LT
1938
CAS

GUIDO CASTELNUOVO

PROFESSORE ALL'UNIVERSITÀ DI ROMA

LEZIONI

DI

GEOMETRIA ANALITICA

NONA EDIZIONE

Geometria analitica del piano e dello spazio
I concetti fondamentali della Geometria Proiettiva
Curve e Superficie di secondo ordine.



MILANO - GENOVA - ROMA - NAPOLI
SOCIETÀ ANONIMA EDITRICE DANTE ALIGHIERI
(Albrighi, Segati & C.)

1938 - XVI

Inv. 33420

GUIDO CASTELNUOVO

PROFESSORE ALL'UNIVERSITÀ DI ROMA

LEZIONI

DI

GEOMETRIA ANALITICA

NONA EDIZIONE

Geometria analitica del piano e dello spazio
I concetti fondamentali della Geometria Proiettiva
Curve e Superficie di secondo ordine.

(24)



MILANO - GENOVA - ROMA - NAPOLI
SOCIETÀ ANONIMA EDITRICE DANTE ALIGHIERI
(Albrighi, Segati & C.)

1938 - XVI

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

PROPRIETÀ LETTERARIA

DELLA

SOCIETÀ ANONIMA EDITRICE DANTE ALIGHIERI

(Albrighi, Segati & C.)

Le copie non firmate dall'Autore si riterranno contraffatte



Città di Castello, Tipografia della Casa Editrice S. Lapi.

PREFAZIONE ALLA PRIMA EDIZIONE

Per far cosa grata ai miei studenti, mi son deciso a raccogliere queste lezioni. Ma io spero che questo trattato possa destare qualche interesse presso un pubblico più vasto; non già per i risultati, tutti noti ed ormai classici, che esso contiene, bensì per l'indirizzo, in parte nuovo, che lo ispira.[1]

Nell'Università di Roma infatti, per iniziativa del professore CREMONA (di cui noi tutti, discepoli ed ammiratori, piangiamo la perdita) e del prof. CERRUTI, ai corsi tradizionali di Geometria proiettiva sintetica e di Geometria analitica si volle sostituire un unico insegnamento, allo scopo di associare, in armonica unione, i due metodi cui la Geometria deve le sue vittorie, e rivolgerli insieme ad accrescere la cultura scientifica dei giovani. Come io abbia tradotto in atto tale pensiero apparirà dalla presente opera.

In essa il lettore non deve adunque cercare quella unità di mezzi, quella purezza di linee, che attribuiscono ad un trattato di Geometria proiettiva i caratteri di un'opera d'arte. Ma non troverà nemmeno traccia dello sforzo, a cui deve adattarsi chi vuole da un unico punto di vista osservare un orizzonte troppo vasto. Ogni questione vien qui discussa col metodo che più si presta ad approfondirla, e vari argomenti, esaminati sotto molteplici aspetti, acquistano un singolare rilievo.

---

[1] Lo stesso ordine di idee si ritrova nelle Lezioni di *Geometria proiettiva ed analitica* del prof. DEL RE (Modena, 1900), le quali però, nella parte sinora uscita, riguardano soltanto le forme ad una dimensione.

I mezzi di ricerca, di cui il lettore dispone fin dai primi capitoli, avrebbero consentito di dare al mio corso una maggiore ampiezza ed un carattere più elevato. Non ho ceduto a questa tendenza, pensando che i giovani, a cui le mie lezioni si rivolgono, sono avviati, per la maggior parte, alla Scuola degli Ingegneri; perciò, ad es., nella geometria piana ho fatto uso continuo di coordinate cartesiane, relegando in alcuni paragrafi secondari le coordinate proiettive che, a giudicare dal titolo della presente opera, avrebbero dovuto tenervi una parte essenziale. Ma, pur astraendo dalla ragione suddetta, io penso che, di fronte al continuo sviluppo della scienza intesa nel senso più largo, di fronte alle cognizioni sempre più varie che ormai si esigono da ogni spirito colto, non convenga dare ai nostri primi corsi universitari una soverchia estensione. Ciò che importa è di mettere in piena luce le idee larghe e feconde che reggono un determinato ramo di studi, per ricavarne coi mezzi più semplici i risultati essenziali, lasciando in ombra i particolari minuziosi che solo interessano chi di tutta la scienza guardi un campo ristretto.

Ad accrescere in varie direzioni la cultura dei volonterosi, ad educarne il gusto, provvedono i numerosi esercizi di cui ho voluto arricchire questo volume. Con assidua cura ho cercato di disporli in ordine logico, distribuendoli, per ciascun capitolo, in gruppi, a seconda delle loro mutue affinità, e spesso li ho forniti di un cenno di risoluzione, affinchè il lettore possa gradatamente, e senza sforzo eccessivo, giungere a nuove verità importanti e riposte. E nella scelta ho ricorso, quante volte ho potuto, alle opere dei fondatori della Geometria moderna, procurando sempre, e cogli esercizi, e col testo, e colle note storiche che lo accompagnano, di far penetrare nello studioso lo spirito di quei Grandi, nei quali è dubbio se debba più ammirarsi l'acume dello scienziato o la grazia dell'artista.

Io spero che quest'opera possa dare ai giovani, cui è dedicata, solide basi per progredire negli studi geometrici; ad essi riuscirà facile ed istruttivo approfondire in vari punti queste

prime cognizioni colla lettura di qualcuno degli ottimi trattati, ove la Geometria proiettiva o l'analitica vengono esposte separatamente, coi metodi propri a ciascuno dei due rami.[1]

Non mi fermerò qui ad enunciare i singoli argomenti trattati nel presente volume; l'indice particolareggiato, di cui esso è fornito, provvede a ciò. Ma prima di chiudere queste righe, debbo esprimere viva riconoscenza al dottor G. Bisconcini per la cura con cui volle disegnare le numerose figure intercalate nel testo.

Roma, luglio 1903.

---

[1] Fra i molti, citerò solo quei trattati di cui ho più particolarmente profittato nella redazione di quest'opera. Per la Geometria analitica:

D'Ovidio, *Geometria analitica* (Torino; varie edizioni).

Salmon, *A treatise on Conic Sections;* opera di cui esistono traduzioni in francese, tedesco, ed anche in italiano (*Trattato analitico delle sezioni coniche...*, Napoli, 1868), questa ultima però fatta sopra una delle prime edizioni inglesi.

Per la Geometria proiettiva:

Staudt, *Die Geometrie der Lage* (1847), di cui fu pubblicata una traduzione italiana (*Geometria di posizione*, Torino, 1889).

Reye, *Die Geometrie der Lage;* varie edizioni tedesche (l'ultima in 3 vol.), una traduzione francese (in 2 vol.) ed una italiana del 1° volume (*La Geometria di posizione*, Venezia, 1884).

Enriques, *Lezioni di Geometria proiettiva* (Bologna; varie edizioni).

Delle opere italiane pubblicate dopo il 1903, indicherò le seguenti:

Severi, *Complementi di Geometria proiettiva* (Bologna, 1906).

Berzolari, *Geometria analitica*, due volumi, (Milano 1911, 1916).

Ciani, *Lezioni di Geometria proiettiva ed analitica* (Pisa, 1912); *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee...* (Pisa, 1915).

Bianchi, *Lezioni di Geometria analitica* (Pisa, 1915).

PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

I benevoli giudizi, con cui fu accolta la prima edizione di questo Trattato,[1] avrebbero dovuto indurmi a ripubblicarlo integralmente, solo introducendo qualche ritocco che i colleghi, sicuri di farmi cosa gradita, vollero suggerirmi.

Ma il critico più severo di un'opera è talvolta lo stesso autore. E poichè la critica riguardava piuttosto l'insieme del libro, che le singole parti, ho creduto opportuno di mutarne tutto l'ordinamento e di alterare qua e là gli effetti di ombra e di luce.

Due criteri mi hanno guidato. In primo luogo la convinzione che il periodo, ormai trascorso, in cui la nuova Geometria andò costituendosi, abbia lasciato sussistere, accanto al solido edifizio, divenuto stabile conquista della scienza, anche costruzioni provvisorie che non giova più conservare. Perciò, mentre ho messo in piena luce i concetti elevati che la Geometria proiettiva introdusse nelle matematiche, ho tolto dal testo e portato negli esercizi una serie di risultati minori, a cui si è attribuito talora eccessiva importanza, più per ragione di metodo che per intrinseco valore.

D'altra parte l'esperienza didattica mi ha insegnato come sia vantaggioso far percorrere alla mente degli allievi, per quanto è possibile, le stesse tappe attraverso a cui è passata la scienza nel suo sviluppo. Così, nel campo ove si svolge

[1] *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva*, Società Editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segati, e C., Milano-Roma-Napoli, 1903-1905.

questo trattato, ho riconosciuto non esser conveniente di esporre nella scuola le vedute e il linguaggio della nuova Geometria, finchè una sufficiente conoscenza della Geometria analitica non abbia lasciato apparire l'utilità di quelle vedute, e l'opportunità di quel linguaggio. Perciò, in questa seconda edizione, ho preferito trattare anzitutto la Geometria cartesiana elementare e le generalità sui luoghi geometrici, per introdurre poi le nozioni fondamentali di Geometria proiettiva, di cui l'importanza apparisce nella teoria delle coniche e quadriche, che costituisce l'ultima parte del corso.

Avrei potuto, per seguire la tendenza che oggi prevale in alcuni trattati stranieri, far uso sistematico del metodo differenziale nello studio delle curve e delle superficie. Ma, pur astraendo dagli inconvenienti che questo indirizzo avrebbe avuto coll'ordinamento attuale del nostro primo biennio universitario, mi è parso inopportuno di staccare le applicazioni geometriche dal corso di Calcolo infinitesimale, cui si riferiscono, giacchè, di molte teorie astratte, appartenenti al detto corso, quelle applicazioni rivelano la ragione storica e mettono in luce l'interesse. Associando, al contrario, la Geometria analitica cogli elementi della Geometria proiettiva, mentre si evita la ripetizione di argomenti che figureranno nel corso di Analisi infinitesimale, si riesce d'altra parte a temperare l'aridità che un insegnamento di pura Geometria cartesiana presenterebbe.

Collo studio costante della misura, che mi son prefisso in tutti i capitoli di questo Trattato, io confido che esso raggiunga il duplice scopo di fornire le nozioni geometriche fondamentali agli allievi ingegneri, senza stancarli con inutili astruserie, e di invogliare i giovani diretti alla scienza ad allargare la propria cultura in campi più elevati.

Roma, marzo 1909.

Le successive edizioni sono ristampe della seconda, salvo lievi ritocchi.

Roma, febbraio 1919.

INTRODUZIONE

1. Geometria elementare e Geometria analitica. — È noto che la Geometria elementare assunse presso i Greci la forma sotto cui anche oggi viene insegnata nelle nostre scuole; e gli *Elementi di* EUCLIDE (300 av. Cr.) forniscono sempre il modello cui s'ispirano i moderni trattati. Nel *Secolo d'oro,* successivo ad EUCLIDE, gli stessi metodi vengono applicati allo studio di nuovi enti e di nuovi problemi. Spiccano sopra gli altri (verso il 200 av. Cr.) i grandi nomi di APOLLONIO e di ARCHIMEDE, per il primo dei quali è titolo di gloria il trattato sulle *Sezioni coniche,* mentre il secondo, colle rettificazioni e quadrature di figure curvilinee, gettava i primi semi di quei procedimenti che dovevano, molti secoli dopo, trovare il loro completo sviluppo nel Calcolo Infinitesimale.

Ad un periodo di attività scientifica così meravigliosa succede un lungo silenzio, che si prolunga quasi fino al Rinascimento. Tra le varie cause di questo ristagno alcune ebbero carattere generale ed estesero successivamente i loro effetti sopra ogni ramo di cultura. Altre però riguardavano in special modo la Geometria. Fu rilevato infatti che quei procedimenti i quali, per opera dei grandi geometri greci, avevano prodotto frutti così rigogliosi, non avrebbero potuto conservare a lungo la loro fecondità senza subire una profonda trasformazione. Le crescenti complicazioni, cui conduceva lo studio di nuovi problemi, dovevano segnare la prossima fine di quell'indirizzo. Occorreva che una veduta più larga e sintetica delle proprietà dello spazio permettesse di riunire in pochi enunciati, validi senza eccezione, le proposizioni troppo numerose e troppo speciali della Geometria elementare. Occorreva inoltre che fossero scoperti metodi generali ed uniformi per trattare i problemi geometrici.

Ora questo spirito di generalità e di uniformità, che fa difetto alla Geometria greca, costituisce invece il carattere principale di un altro ramo di matematica, l'Algebra, che, sorta durante il Medio Evo, aveva già assunto nel XVI secolo un notevole grado di sviluppo.

Doveva presentarsi spontaneo il desiderio di applicare sistematicamente i procedimenti ed i risultati dell'algebra alla trattazione delle questioni

geometriche. Ed infatti nella prima metà del secolo XVII due grandi scienziati francesi, il DESCARTES e il FERMAT, proposero contemporaneamente per lo studio della geometria piana quel metodo che, sotto il nome di *cartesiano,* viene anche oggi adoperato a preferenza di ogni altro.

In che consista la *Geometria cartesiana* è inutile dir qui, visto che la maggior parte di questo Trattato è dedicata ad esporne i fondamenti. Basti rilevare che l'introduzione della *Geometria analitica,* seguìta a breve distanza dalla scoperta del Calcolo infinitesimale, ha trasformato profondamente tutto l'organismo matematico; e che oggi non è quasi ramo di scienza, ove il concetto di coordinate cartesiane non trovi applicazioni.

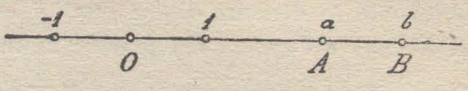
2. Ascisse sulla retta. — Sebbene lo spirito del metodo cartesiano si riveli nello studio della geometria piana e solida, giova tuttavia, per ragioni didattiche, accennare brevemente alla geometria analitica sulla retta.

Sia proposto un problema relativo a più punti di una retta; questo ad es.: *Dati tre punti A, B, C di una retta, costruire sulla retta un punto X tale che la somma dei segmenti AX, BX, CX, sia uguale ad un segmento assegnato MN.* La traduzione del problema geometrico in una questione algebrica è immediata. La prima idea che si presenta è di assumere come quantità note le misure (rispetto ad una unità di lunghezza prescelta) dei segmenti AB, AC, BC, MN, e come incognite le misure dei segmenti AX, BX, CX. Tenendo conto delle relazioni che passano tra i dati e le incognite, si giungerebbe subito a stabilire tre equazioni di primo grado fra le tre incognite. È chiaro però che, operando così, si introduce nei calcoli un numero esuberante di quantità collegate tra loro (perchè ad es. i valori di AB, BC ed AC non sono indipendenti), ciò che porta inutili complicazioni. Inoltre, se si prende in *valore assoluto* la misura di ogni segmento (come si suol fare nella geometria elementare), si è costretti a distinguere tanti casi particolari, quante sono le mutue posizioni che i quattro punti A, B, C, X possono assumere.

Il primo inconveniente si evita contando le distanze di tutti i punti della retta a partire da un unico punto di riferimento (*origine*). Il secondo, attribuendo alle dette distanze un segno conveniente, secondo il verso in cui vengono misurate. Si arriva così al *sistema delle ascisse* (VIÈTE, secolo XVI).

3. Dei due *versi* (o *sensi*) in cui un punto mobile può descrivere una retta, si scelga uno ad arbitrio come verso *positivo,* e si indichi con una freccia. Fissato poi sulla retta un punto O, *origine,* ed assunto un determinato segmento come unità lineare, si associ ad ogni punto A della retta quel numero a (intero, o frazionario, o irrazionale) che misura la distanza OA, ed è preceduto dal segno $+$ o $-$, secondo che per andare da O in A si

percorre la retta in verso positivo o negativo. Il numero a si chiama *l'ascissa* del punto A (rispetto all'origine O, all'unità, e al verso prescelto); e si scrive $OA = a$. Dato il punto, l'ascissa è determinata senza ambiguità. Viceversa, dato un numero reale a, positivo o negativo, è determinato completamente il punto A che ha per ascissa a, e sta dalla *banda positiva* o *negativa* di O secondo che a è positivo o negativo.



L'origine O ha per ascissa *zero;* due punti simmetrici rispetto ad O hanno ascisse uguali ed opposte; se un punto si muove sulla retta allontanandosi indefinitamente da O, l'ascissa cresce in valore assoluto e *tende* a $+\infty$ o $-\infty$, secondo il verso in cui avviene il movimento.

4. Relazioni tra più segmenti di una retta. — Per applicare le ascisse allo studio delle relazioni fra i punti di una retta occorre premettere una osservazione. Sopra una retta u, sulla quale sia fissato il verso positivo, stiano due punti A, B. Noi indicheremo con AB il valore del segmento finito congiungente i due punti, misurato con una unità prestabilita, e preso col segno $+$ o $-$ secondo che per andare da A in B, seguendo il segmento stesso, si percorre la retta in verso positivo o negativo; in altri termini AB è l'ascissa di B rispetto all'origine A. Segue subito che sarà

$$AB = -BA, \text{ ossia } AB + BA = 0. \tag{1}$$

Se C è un terzo punto qualsiasi della retta, *tra le mutue distanze dei tre punti vale sempre la relazione*

$$AB + BC = AC, \tag{2}$$

ossia

$$AB + BC + CA = 0;$$

la quale si giustifica, ad es., facendo vedere che sussiste nei sei casi che i tre punti possono presentare rispetto all'ordine di successione. La (2) può anche scriversi sotto la forma



$$AB = CB - CA. \tag{2'}$$

Col metodo da n ad $n+1$ si riesce ad estendere la (2) ad un numero qualsiasi di punti $A, B, C, \ldots, H, K$, comunque situati sopra u; si ha precisamente

$$AB + BC + \ldots + HK = AK, \tag{3}$$

ossia

$$AB + BC + \ldots + HK + KA = 0.$$

5. Distanza di due punti espressa mediante le loro ascisse. — La (2'), quando si riguardi O come origine di un sistema di ascisse, ci dice subito che *la distanza di due punti è espressa dalla differenza tra l'ascissa del secondo e l'ascissa del primo;* in formula

$$AB = b - a, \tag{4}$$

se a e b sono le ascisse di A e B.

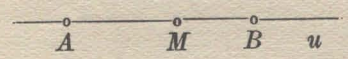
Come applicazione cerchiamo l'ascissa x del punto medio M del segmento AB; sarà per ipotesi $AM = MB$, ossia $x - a = b - x$,

$$x = \frac{a+b}{2}; \tag{5}$$

l'ascissa del punto medio di un segmento è la semisomma delle ascisse degli estremi.

6. Punto che divide un segmento in dato rapporto. — La formola (5) è caso particolare di un'altra che spesso si adopera.

Dati due punti A, B sopra una retta u, e detto M un terzo punto della retta, è determinato in valore e segno il rapporto $r = \frac{AM}{BM}$ che dicesi talvolta *rapporto semplice dei tre punti* A, B, M.[1]



Il numero r è negativo se M cade nel segmento AB, positivo se M cade fuori del detto segmento, vale zero se M cade in A. Se M si avvicina sempre più a B, il rapporto

$$\frac{AM}{BM} = 1 + \frac{AB}{BM}$$

cresce indefinitamente in valore assoluto, mantenendosi positivo o negativo secondo che M è esterno od interno al segmento AB; in virtù di questa osservazione si suol dire che, per M coincidente con B, è $r = \pm\infty$.

Dette a, b, x le ascisse dei tre punti A, B, M rispetto ad una origine comunque scelta, si ha evidentemente (n. 5)

$$r = \frac{a-x}{b-x}. \tag{6}$$

Di qua, considerando r come nota e risolvendo rispetto ad x, si trae

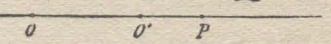
$$x = \frac{a - rb}{1-r}, \tag{7}$$

la quale esprime l'*ascissa del punto che forma il rapporto r coi punti di ascisse a e b.*

[1] Osservi il lettore che r non dipende nè dall'unità di lunghezza nè dal verso positivo.

Il punto M è completamente determinato quando è dato r, fatta eccezione per il valore $r = 1$, cui non corrisponde nessun punto della retta. Per $r = -1$ si ha il punto medio del segmento AB, e la (7) si riduce alla (5).

7. Trasformazione delle ascisse. — Può accadere che, dopo aver riferito i punti di una retta ad una origine O, convenga riferire i punti stessi ad una nuova origine O' (restando immutato il verso e l'unità lineare). Quando sia nota la posizione relativa di O ed O', assegnando ad es. l'ascissa h di O' rispetto all'origine O, si scrive subito la relazione che lega le ascisse $OP = x$, $O'P = x'$ di uno stesso punto P riferito alle due origini (formola per la *trasformazione delle ascisse*).



Si ha infatti $OP = OO' + O'P$, ossia

$$x = x' + h, \quad x' = x - h.$$

Come varia l'ascissa di un punto quando muta il verso positivo o l'unità di lunghezza?

8. Sistema di coordinate. Geometria analitica. — Col mezzo delle ascisse noi riusciamo a stabilire tra i punti di una retta ed i numeri reali una *corrispondenza biunivoca*, una legge cioè in virtù della quale ad ogni punto corrisponde *un* numero reale (*ascissa*), e ad ogni numero reale *un* punto. La detta corrispondenza è inoltre *continua*. Con ciò si esprime il fatto che un punto qualsiasi X della retta, avente l'ascissa x, può includersi in un segmento MN così piccolo che la differenza tra l'ascissa y di un punto qualsiasi del detto segmento MN e l'ascissa x di X riesca in valore assoluto minore di una quantità positiva comunque assegnata d, cioè $| y - x | < d$; basta infatti, a tale scopo, assumere come punti M ed N quelli che hanno per ascissa rispettivamente $x - \frac{d}{2}$ e $x + \frac{d}{2}$, osservando che ogni punto del segmento MN ha allora una ascissa y tale che $x - \frac{d}{2} \leqq y \leqq x + \frac{d}{2}$, donde segue $| y - x | \leqq \frac{d}{2} < d$.

Ora esistono svariatissimi metodi, di cui alcuni saranno indicati nel seguito, per riferire in modo biunivoco e continuo i punti di una retta, o di un tratto di retta, ai numeri reali; ognuno di questi metodi dà luogo ad un *sistema di coordinate*, chiamandosi *coordinata* di un punto il numero che gli corrisponde. Un particolare sistema di coordinate è il *sistema delle ascisse*, di cui ora abbiamo discorso.

Vedremo in seguito come questo concetto possa estendersi ai punti di un piano o dello spazio; e come analoghe corrispondenze possano stabilirsi fra numeri ed enti geometrici diversi dai punti. Le nozioni già

acquisite son però sufficienti per acquistare una idea, sia pur vaga, di ciò che è la *Geometria analitica.*

Quando sopra una retta (o sopra un piano...) si fissi un sistema di coordinate, le relazioni geometriche che passano tra punti di quella retta (o di quel piano...) si possono tradurre in relazioni analitiche tra i numeri che son coordinate dei punti stessi. Lo studio di queste relazioni, fatto coi metodi e colle risorse dell'analisi, conduce allora ad interpretazioni geometriche relative ai punti considerati.

Si parta ad es. da un problema relativo a punti di una retta, il quale potrà, in generale, enunciarsi nei termini seguenti: « Dati più punti $A, B, \ldots$ di una retta, determinare sulla retta uno o più punti $X, \ldots$ legati ai punti dati da relazioni geometriche assegnate ». Se ora noi fissiamo sulla retta un sistema di coordinate, ad es. ascisse, e chiamiamo $a, b, \ldots$ le coordinate di $A, B, \ldots$, che potremo ritener *note,* ed $x, \ldots$ le coordinate *incognite* di $X, \ldots$, il problema geometrico proposto si tradurrà in un problema analitico: « dati più numeri $a, b, \ldots$, calcolarne altri $x, \ldots$ che siano legati a quelli da relazioni analitiche assegnate ».

Anzi il primo passo da percorrere nella via qui tracciata consiste nel tradurre le relazioni geometriche del primo enunciato nelle relazioni analitiche equivalenti del secondo; fatto ciò, si sarà *messo in equazione* il problema primitivo. Il secondo passo consiste nel trasformare e risolvere, quando sia possibile, le equazioni rispetto alle incognite $x, \ldots$ che esse contengono, ufficio questo spettante all'Analisi (Algebra, Calcolo infinitesimale...). Il terzo passo finalmente consiste nella interpretazione sulla figura primitiva dei risultati del procedimento analitico (costruzione dei punti incogniti $X, \ldots$, discussione, ecc.).[1]

Similmente si procede quando si debba dimostrare analiticamente un teorema relativo a una figura geometrica; si tradurranno le ipotesi e la tesi in relazioni analitiche tra le coordinate degli elementi della figura; e tutto si ridurrà a far vedere che la relazione traducente la tesi è conseguenza delle relazioni traducenti le ipotesi.

Il complesso di tutti quei procedimenti che permettono di trattare una questione geometrica col mezzo delle coordinate costituisce la *Geometria analitica,* la quale è dunque un insieme di metodi e non un insieme

---

[1] Applicando queste considerazioni generali al problema del n. 2 e detta l la lunghezza del segmento MN, si vede che il primo passo conduce a scrivere la equazione

$$(x-a)+(x-b)+(x-c)=l;$$

il secondo a risolverla:

$$x=\frac{1}{3}(a+b+c+l);$$

il terzo a concludere che il problema ammette sempre una ed una sola soluzione, che si ottiene mediante una semplice costruzione suggerita dall'ultima formola.

di proprietà. Di fronte alla Geometria analitica sta la *Geometria sintetica*, la quale studia direttamente le figure geometriche senza il sussidio del calcolo, e le trasforma mediante operazioni geometriche, anzichè mediante procedimenti analitici. Una stessa questione geometrica può esser trattata o per via analitica o per via sintetica, come apparirà chiaramente dal seguito.

Esercizi. I. — 1) Se A, B, C, D sono quattro punti di una retta, vale la relazione (di EULERO) $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DB} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = 0$.

2) Se M ed N sono i punti medi dei segmenti AB e CD, si ha $2\,\overline{MN} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

3) Essendo M il punto medio di AB, e P un punto qualsiasi della retta, si ha $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM}^2 - \overline{MA}^2$.

4) Date le ascisse degli estremi di un segmento, calcolare le ascisse dei punti che dividono il segmento in n parti uguali. Calcolare l'ascissa del punto che divide il segmento in media ed estrema ragione.

5) Date (mediante le ascisse) due coppie di punti AB, EF sopra una retta, determinare su questa (l'ascissa di) un punto M tale, che sia $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{ME} \cdot \overline{MF}$. Casi d'impossibilità, d'indeterminazione.

II. — 6) Dati due punti A, B di una retta, costruire su questa un punto M che formi con A e B un rapporto uguale al rapporto di due dati segmenti ed avente un segno fissato.

7) Esprimere la distanza di due punti M, N, conoscendo i rapporti semplici che i punti stessi formano con due punti A, B, di cui sia nota la distanza.

8) Sulla retta che congiunge due punti luminosi A, B di intensità α, β determinare un punto che sia ugualmente illuminato dai detti centri; il problema ha generalmente due soluzioni. (Si ricordi che l'intensità luminosa varia in ragione inversa del quadrato della distanza).

III. — 9) Dati due punti A_1, A_2 di *pesi* p_1, p_2, dicesi *baricentro* dei punti stessi quel punto M della loro retta che forma con essi il rapporto semplice[1] $-\frac{p_2}{p_1}$. Date le ascisse dei punti A_1, A_2, si calcoli l'ascissa del baricentro. In qual caso il baricentro non esiste?

10) Dati più punti allineati $A_1, A_2, \ldots, A_n$ coi pesi $p_1, p_2, \ldots, p_n$, si costruisca il baricentro di A_1, A_2 presi coi pesi p_1, p_2; poi il baricentro del baricentro trovato, preso col peso $p_1 + p_2$, e di A_3 col peso p_3; poi il baricentro del nuovo baricentro, preso col peso $p_1 + p_2 + p_3$, e di A_4 col peso p_4; e così si continui. Quando si siano esauriti tutti i punti dati, si sarà ottenuto un punto il quale non dipende dall'ordine in cui quelli furono adoperati, e dicesi *il baricentro dei punti A_i coi pesi p_i*. In qual caso il baricentro non esiste? Quando è indeterminato? Si dimostri che nell'ultima ipotesi ciascuno dei punti dati è baricentro dei rimanenti presi coi pesi loro spettanti.

---

[1] In base a note considerazioni di statica, il baricentro ha un significato meccanico preciso anche quando i due pesi hanno segni diversi.

11) Dati n punti $A_1, A_2, \dots, A_n$ di una retta, determinare su questa un punto M tale, che risulti nulla la somma delle distanze di M dai punti dati, moltiplicate per n numeri dati (positivi o negativi) $p_1, p_2, \dots, p_n$; in simboli

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i \overline{MA_i} = 0.$$

Si riconoscerà che il punto M è il baricentro dei punti dati presi coi pesi $p_1, p_2, \dots, p_n$; nel caso che i pesi siano tutti uguali (ad es. uguali a 1), M dicesi *centro delle medie distanze.*

12) Coi dati dell'esercizio precedente determinare sulla retta un punto N tale, che la somma dei quadrati delle distanze di N da $A_1, A_2, \dots$ moltiplicate per $p_1, p_2 \dots$ abbia un dato valore k:

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i \overline{NA_i}^2 = k.$$

In quali casi il problema ammette due, una, o nessuna soluzione? Si dimostri che il primo membro dell'ultima eguaglianza ha valore minimo o massimo (secondo che $\Sigma p_i \gtrless 0$) quando N cade nel baricentro dei punti dati. Quale particolarità presenta il problema se $\Sigma p_i = 0$?

13) Nella trattazione dei due ultimi problemi e degli analoghi conviene introdurre la nozione seguente. Detta x_i l'ascissa di A_i rispetto ad una origine O, dicesi *momento d'ordine m* dei punti A_i coi pesi p_i, rispetto al punto O, la somma

$$I_m = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i^m \qquad (m = 0, 1, \dots).$$

Per $m = 1$, il momento dicesi pure *statico* o *baricentrico*; per $m = 2$, *momento d'inerzia.* Riferiti i punti A_i ad una seconda origine O', tale che $OO' = h$, e indicati con $I'_1, I'_2, \dots$ i momenti dei punti stessi rispetto ad O', si dimostrino le relazioni

$$I'_1 = I_1 - hI_0, \quad I'_2 = I_2 - 2hI_1 + h^2 I_0.$$

14) La somma dei quadrati delle mutue distanze di n punti allineati è uguale ad n volte la somma dei quadrati delle distanze dei punti stessi dal centro delle medie distanze. In simboli, indicando con O il detto centro,

$$n \, \Sigma_i \overline{OA_i}^2 = \Sigma_{ik} \overline{A_i A_k}^2,$$

dove la prima somma va estesa ai valori $i = 1, 2 \dots n$, e l'ultima alle combinazioni binarie ik dei numeri stessi.

15) Attribuendo ai punti A_i i pesi p_i, e indicando con O il baricentro dei punti stessi, si ha la relazione più generale

$$\left(\Sigma_i p_i\right)\left(\Sigma_i p_i \overline{OA_i}^2\right) = \Sigma_{ik} p_i p_k \overline{A_i A_k}^2.$$

16) Nelle ipotesi ultime, detto P un punto qualunque della retta, vale la formola (data da LAGRANGE per punti comunque situati nello spazio)

$$\left(\Sigma_i p_i\right)\left(\Sigma_i p_i \overline{PA_i}^2\right) - \overline{OP}^2\left(\Sigma_i p_i\right)^2 = \Sigma_{ik} p_i p_k \overline{A_i A_k}^2.$$

9. Fascio di rette. Ascisse angolari. — Prima di passare alla Geometria analitica del piano giova estendere, per quanto è possibile, agli angoli aventi comune il vertice ed il piano alcune nozioni relative ai segmenti di una retta.

Una retta che ruoti in un piano intorno ad un punto fisso S assume infinite posizioni, che costituiscono un *fascio di rette* avente per *centro* S. La rotazione può avvenire in due *versi* opposti; uno di questi (ad es. l'opposto al verso in cui ruotano le lancette di un orologio) si chiamerà *positivo* e si indicherà con una freccia. Se come elemento generatore del fascio si considera la *intera* retta, senza distinguere le due semirette in cui essa vien divisa da S, il fascio potrà generarsi colla rotazione di *mezzo giro* in un determinato senso; alla fine la retta avrà ripreso la posizione iniziale. Se invece il fascio è generato da una semiretta uscente da S, occorrerà che questa compia un *intero giro.*

Si assuma un determinato angolo come unità di misura degli angoli. Sebbene la scelta sia arbitraria, si suole assumere come unità uno dei due angoli seguenti:

1) l'*unità pratica* o *grado,* che è la novantesima parte dell'angolo retto;

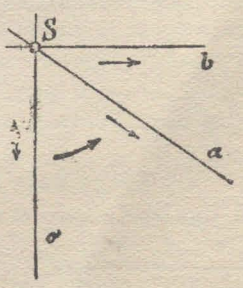
2) l'*unità teorica* o *radiante,* cioè l'angolo che intercetta sopra un cerchio avente il centro nel vertice un arco uguale al raggio. Misurato con quest'ultima unità (che noi adotteremo sistematicamente) l'intero giro vale 2π; indicando dunque con ω° il valore del radiante espresso in gradi, si ha la proporzione

$$360^\circ : \omega^\circ = 2\pi : 1 ,$$

donde si deduce

$$\omega^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ\ 17'\ 54'' \ldots$$

Ciò posto, si fissi nel fascio S una *retta origine* o. Dato un numero φ positivo o negativo, rimane determinata la rotazione intorno ad S di una retta, che parta dalla posizione o e descriva un angolo misurato in valore assoluto da φ; la rotazione avvenendo in verso positivo o negativo secondo il segno di φ. Se a è la posizione finale della retta mobile, potremo dire che a è pienamente determinata quando sia noto l'angolo φ. Non può dirsi però, inversamente, che ad ogni retta a del fascio corrisponda *un solo* angolo φ, a meno che non si facciano nuove convenzioni. Ciò dipende dal fatto che la retta mobile, dopo aver ruotato di un angolo π intorno ad S (in qualsiasi verso), riprende la posizione iniziale. Se dunque indichiamo con $\widehat{oa}$ il valore di



ogni angolo misurante una rotazione che porti la retta mobile da o in a, dovremo scrivere, ove sia k un numero intero, positivo, nullo o negativo

$$\widehat{oa} = \varphi + k\pi, \quad \text{ossia} \quad \widehat{oa} \equiv \varphi \pmod{\pi}.$$

Chiameremo, per ragioni di analogia, $\widehat{oa}$ l'*ascissa angolare*, od *anomalia*, della retta a, rispetto all'origine o; ricordando però che, data la retta, l'anomalia è determinata solo *a meno di multipli di* π.[1]

Estesa la definizione data per l'angolo $\widehat{oa}$ ai mutui angoli di più rette $a, b, c, \ldots$ di un fascio, si possono scrivere alcune relazioni analoghe a quelle del n. 4 colleganti più segmenti di una retta, sostituendo però l'uguaglianza colla congruenza, od anche (quando non si temano equivoci) scrivendo l'uguaglianza e ricordando che questa vale *a meno di multipli di* π. In tal senso vanno intese le relazioni

$$(1)\quad \begin{cases} \widehat{ab} = -\widehat{ba}, & \text{ossia} \quad \widehat{ab} + \widehat{ba} = 0, \\ \widehat{ab} + \widehat{bc} = \widehat{ac}, & \text{ossia} \quad \widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ca} = 0, \\ \widehat{ab} = \widehat{cb} - \widehat{ca}. \end{cases}$$

Spesso si preferisce assumere come elemento del fascio la *semiretta* uscente dal centro, o la intera retta dotata di un verso, *retta orientata*, ciò che produce lo stesso effetto quando si osservi che, dato il verso, rimane ben definita sulla intera retta la *semiretta* positiva uscente dal centro. Nella nuova ipotesi si può ripetere tutto ciò che sopra si disse a proposito degli angoli, colla sola avvertenza che questa volta, per la ragione detta innanzi, l'ambiguità nella valutazione degli angoli sarà di *multipli di* 2π. Le formule (1) varranno ancora, però *a meno di multipli di* 2π.

Osservazione. — Se sopra tutto il piano (cioè per ogni fascio) è definito il verso positivo delle rotazioni, ad es. il verso opposto a quello descritto dalle lancette di un orologio, e si suppone inoltre che una retta orientata, la quale si muova mantenendosi parallela a sè stessa, trascini con sè il proprio verso, si osserverà che l'angolo di due rette orientate non varia quando le rette si spostino mantenendosi parallele alle posizioni iniziali. Segue che la relazione (1) fra tre rette (e le analoghe fra più rette) vale anche se le rette stesse non appartengono ad un fascio, ma sono disposte comunque in un piano. Si noti ad es. che quella relazione, tenuto conto dell'ambiguita di un multiplo di 2π, esprime, in altra forma, il teorema sulla somma dei tre angoli di un triangolo.

10. Coordinate tangenti nel fascio di rette. — Sebbene l'angolo $\widehat{ab}$ di due semirette, o rette orientate, sia determinato solo a meno di mul-

[1] Una siffatta indeterminazione potrebbe togliersi quando si lasciasse variare l'ascissa angolare soltanto fra zero e π (l'ultimo valore escluso). Questa convenzione, la quale però porta altri inconvenienti, potrà farsi caso per caso, ove se ne presenti l'opportunità.

tipli di 2π, tuttavia le funzioni goniometriche sen ab, cos ab, tg ab,... sono pienamente individuate, perchè sen $(\varphi + 2k\pi) = \text{sen } \varphi$, ecc. E qui si noti che, se ad uno dei lati, ad es. a b, si sostituisce la semiretta prolungamento b' o la retta primitiva col verso invertito, dall'essere

$$\widehat{ab'} = \widehat{ab} + \pi,$$

seguono le relazioni

$$\text{sen } ab' = -\text{sen } ab, \quad \cos ab' = -\cos ab, \quad \text{tg } ab' = \text{tg } ab.$$

Vediamo così che la tangente dell'angolo di due rette non dipende dai versi potitivi che si assumono sopra queste, ma solo dal verso positivo delle rotazioni, a differenza di ciò che accade pel seno e pel coseno.

Segue che, volendo fissare nel fascio S un *sistema di coordinate* atto ad individuare le *rette intere*, si può assumere come coordinata di una retta a la tangente dell'angolo $\widehat{oa}$ che a forma con una retta fissa (*origine*) o. Si noterà allora che, mentre la retta a varia descrivendo il fascio in verso positivo, partendo ad es. dalla posizione b normale ad a condotta per S, la sua *coordinata tangente*, $x = \text{tg } oa$, varia percorrendo tutto il campo dei numeri reali da $-\infty$ a $+\infty$; e tra la posizione della retta e il valore di x si viene a stabilire una corrispondenza biunivoca e continua,[1] fatta astrazione per la retta b del fascio, alla quale si dovrebbe attribuire la coordinata $\pm\infty$.

Aggiungiamo che, dette x, x' le coordinate tangenti di due rette a, a' del fascio, l'angolo che esse formano è determinato dalla formola

$$\text{tg } aa' = \text{tg } (oa' - oa) = \frac{x' - x}{1 + xx'},$$

e la condizione di perpendicolarità delle due rette è espressa da

$$xx' + 1 = 0.$$

Osservazione. — Fissato il verso positivo delle rotazioni nel piano, ed attribuito ad ogni retta del piano un verso positivo, gli angoli di due rette e le loro funzioni goniometriche acquistano, secondo le nostre convenzioni, certi segni. È dunque il caso di verificare se le formole trigonometriche, che ordinariamente vengono stabilite *invalore assoluto*, siano valide anche nei segni quando si rispettino quelle convenzioni. Pel seguito interessa solo osservare che, dato un triangolo di vertici A, B, C, i cui lati rispettivamente opposti sieno le rette orientate a, b, c, *le note relazioni di proporzionalità tra lati e seni degli angoli opposti valgono anche nei segni quando si scrivano così*:

$$\frac{AB}{\text{sen } ab} = \frac{BC}{\text{sen } bc} = \frac{CA}{\text{sen } ca}.$$

[1] La definizione di corrispondenza continua, data nel n. 8 a proposito delle coordinate sulla retta, si trasporta subito al fascio di rette, sostituendo alla parola *segmento* la parola *angolo*.

Si giustifica l'affermazione, considerando anzitutto il caso che i versi positivi sui lati siano diretti da A a B, da B a C, da C ad A (giacchè allora i tre numeratori sono positivi ed i tre denominatori hanno uno stesso segno), ed osservando poi che l'inversione del verso sopra uno dei lati produce il cambiamento di segno nel numeratore di una frazione e nei denominatori delle altre due.

11. Cenno sul fascio di piani. — Un piano che ruota intorno ad una retta fissa s assume infinite posizioni costituenti un *fascio di piani*, di cui s è l'*asse*. Tutte le proprietà del fascio di rette ed i relativi sistemi di coordinate si trasportano subito al fascio di piani, come risulta osservando che un piano perpendicolare ad s sega i piani del fascio in rette di un fascio, i cui mutui angoli hanno gli stessi valori dei diedri corrispondenti. Basterà qui notare che nel fascio di piani si può riguardare come elemento o l'intero piano o il semipiano, una delle due metà in cui un piano è diviso dall'asse del fascio; avvertendo che talora, in luogo dei due semipiani formanti l'intero piano, si considerano le due *facce* o *pagine* del piano che son viste da un osservatore giacente nell'una o nell'altra delle due regioni di spazio separate dal piano.

Esercizi. — 1) La retta variabile a descrivente un fascio sega una retta fissa t in un punto A; stabilito su t un sistema di ascisse, l'ascissa di A si può assumere come coordinata della retta a. Come devono esser scelte t e l'origine delle ascisse perchè questa coordinata sia una coordinata tangente?

2) Data la coordinata tangente di una retta rispetto ad una origine o, calcolare la coordinata tangente della stessa retta rispetto ad una nuova origine o'.

3) Date le coordinate tangenti di due rette a, b, calcolare le coordinate tangenti delle bisettrici degli angoli $\widehat{ab}$, e verificarne la perpendicolarità.

PARTE PRIMA.

Geometria analitica del piano

CAPITOLO I.

Relazioni di posizione fra punti e rette.

12. Sistema di coordinate nel piano. — Si dimostra che è impossibile far corrispondere ai punti di un piano i *singoli* numeri reali, senza rinunziare alla *continuità;*[1] rinunzia questa che renderebbe inservibile la corrispondenza agli scopi geometrici. Si riesce invece, in infiniti modi, ad associare ad ogni punto del piano una *coppia* di numeri reali, *coordinate* del punto, in guisa che sia rispettata la continuità; in guisa cioè che, variando il punto entro un'area sufficientemente ristretta, ciascuna delle due coordinate vari entro un intervallo sufficientemente piccolo, il quale possa anzi restringersi ad arbitrio pur di limitare convenientemente l'area. Si suol dire perciò che il piano è un ente a *due dimensioni* (mentre la retta possiede una sola dimensione).

Tra i vari sistemi di coordinate proposti per lo studio della geometria piana, ha la massima importanza il *sistema cartesiano,* sia per ragioni storiche, sia specialmente per i servigi che presta nelle matematiche pure ed applicate.

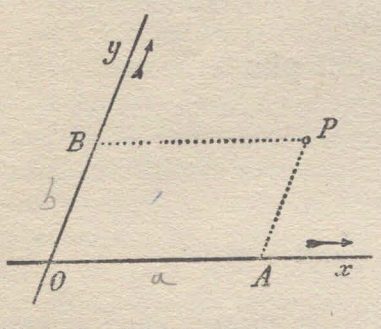
Sebbene nelle opere dei geometri greci si trovino procedimenti che si traducono facilmente coi metodi della geometria analitica, tuttavia non poteva sorgere questa scienza finchè il calcolo letterale non fosse giunto ad un certo grado di

---

[1] Si riesce effettivamente (come dimostrò G. CANTOR, 1877) a stabilire una corrispondenza biunivoca ma non continua, fra i punti del piano ed i singoli numeri reali. Così si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra un punto P che descrive l'area di un quadrato ed un punto P' che ne descrive un lato; ma, mentre il punto P si avvicina con continuità ad un punto Q dell'area in una direzione *generica,* il punto P' *non* ha per limite il punto Q' corrispondente a Q; in ciò consiste la *discontinuità* della corrispondenza. Si può tuttavia stabilire la corrispondenza in modo che mentre P' tende a Q' sopra il lato, il punto P nell'area tenda al punto Q. In tal caso, se P' descrive con continuità il lato nominato, il punto P si muove con continuità nell'area, e vi traccia una *curva continua* (in senso analitico, non intuitivo), che la riempie interamente (PEANO).

sviluppo. L'idea di studiare le proprietà del piano mediante coordinate venne, quasi contemporaneamente, a FERMAT e DESCARTES. Quest'ultimo, che espose con maggiore ampiezza e con numerose applicazioni i nuovi concetti nella sua *Géométrie* (1637), viene comunemente riguardato come fondatore della Geometria analitica.

13. Coordinate cartesiane. — Assumiamo nel piano due rette, *assi coordinati*, secantisi in un punto *O*, *origine*; chiamiamo *asse x* una di quelle, *asse y* l'altra. Fissiamo ad arbitrio i versi positivi sugli assi, e scegliamo l'unità di lunghezza per misurare i segmenti sopra di essi. Per ogni punto *P* del piano passa una retta parallela all'asse *y*, ed una retta parallela all'asse *x*; quelle rette incontrano rispettivamente gli assi *x*, *y* nei punti *A* e *B*. Dato *P*, sono determinati questi punti e quindi i valori $OA = a$, $OB = b$, presi coi segni convenienti. Viceversa, dati due numeri reali *a*, *b* coi relativi segni, sono determinati i punti *A*, *B* e quindi il punto *P*, quarto vertice del parallelogramma costruito su *OA*, *OB*.

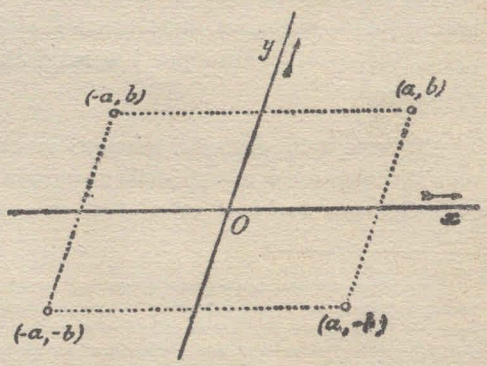


I numeri *a*, *b* si chiamano le *coordinate cartesiane* del punto *P*; in particolare, *a* dicesi la *prima coordinata*, o l'*ascissa*, o la *x* del punto *P*, e *b* la *seconda coordinata*, o la *ordinata*, o la *y*; e si scrive brevemente *P* (*a*, *b*).

Risulta dalla definizione che *i punti dell'asse x hanno nulla la ordinata* ($y = 0$); ed *i punti dell'asse y hanno nulla la ascissa* ($x = 0$); *per la origine O sono nulle le due coordinate*. Avremo dunque

$$A\,(a,\ 0),\quad B\,(0,\ b),\quad O\,(0,\ 0).$$

Quanto ai segni delle coordinate, è da notarsi che i due assi *x*, *y* dividono il piano in quattro regioni angolari, a ciascuna delle quali spettano particolari segni. Così ogni punto appartenente all'angolo limitato dalle semirette positive *x*, *y* ha positiva la *x* e la *y*; mentre se sta nell'angolo opposto al vertice, saranno negative le due coordinate; un punto dell'angolo formato dalla semiretta positiva *x* colla semiretta negativa *y*, ha positiva la *x* e negativa la *y*, ecc. Ad es. i quattro punti (*a*, *b*), (— *a*, *b*), (— *a*, — *b*) (*a*, — *b*) sono vertici di un parallelogramma avente i lati paralleli agli assi coordinati e il centro nell'origine. Due punti come (*a*, *b*), (— *a*, — *b*) sono simmetrici rispetto alla origine.



Nelle applicazioni si introduce generalmente la ipotesi, a cui più tardi ci atterremo, che l'angolo $\widehat{xy}$ sia retto (coordinate cartesiane *ortogonali*). Volendo, in questa ipotesi, applicare ad esempi numerici le formole del testo, conviene servirsi di *carta millimetrata*, assumendo come assi coordinati due delle rette perpendicolari tracciate nel foglio, e prendendo ad es. come unità lineare il centimetro. Si tenga conto di questo consiglio nell'eseguire gli esercizi numerici che si trovano alla fine di questo e dei successivi capitoli.

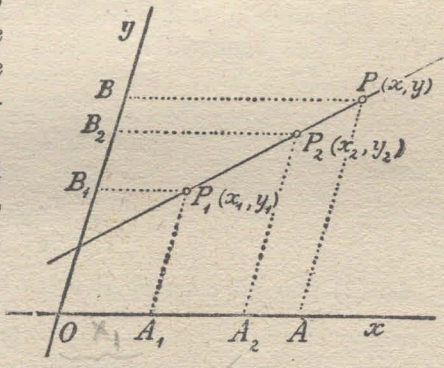
14. Punto che divide un segmento in un dato rapporto. — Tratteremo ora, col mezzo delle coordinate cartesiane, i principali problemi di geometria piana; e cominceremo a studiare le relazioni fondamentali di posizione fra punti e rette, cioè le condizioni di allineamento di più punti, di concorrenza di più rette, ecc. In questo primo gruppo di questioni, le formole a cui giungeremo non contengono l'angolo formato dagli assi coordinati, il quale sarà dunque fissato ad arbitrio.[1]

Proponiamoci anzitutto il problema:

Dati due punti mediante le loro coordinate, determinare le coordinate di un punto allineato con quelli, e formante con essi un rapporto semplice assegnato.

Siano $P_1\ (x_1, y_1)$, $P_2\ (x_2, y_2)$ i punti dati, $P\ (x, y)$ il punto della retta P_1P_2 formante coi punti dati il rapporto semplice noto

$$\frac{P_1P}{P_2P} = r.$$



Conduciamo per i punti P_1, P_2, P le rette parallele a ciascun asse fino ad incontrare l'altro asse. Otterremo le due terne di punti A_1A_2A sopra x e B_1B_2B sopra y; e sarà

$$\frac{P_1P}{P_2P} = \frac{A_1A}{A_2A} = \frac{B_1B}{B_2B}.$$

Ora le ascisse di A_1 e A_2 sono rispettivamente x_1, x_2; quindi l'ascissa di A, o, ciò che fa lo stesso, di P, sarà (n. 6) $x = \dfrac{x_1 - r\,x_2}{1 - r}$. Similmente si calcola l'ordinata di P, e si conclude che *le coordinate richieste di P sono*

$$(1) \qquad x = \frac{x_1 - r\,x_2}{1 - r}, \quad y = \frac{y_1 - r\,y_2}{1 - r}.$$

[1] In questo Cap. I si potrebbero anche (senza modificar le formole) scegliere unità diverse per misurare le ascisse e le ordinate; ciò che però non si suol fare generalmente.

Ponendo $-r = \frac{n}{m}$, quelle coordinate possono anche scriversi sotto la forma

$$(1') \qquad x = \frac{m x_1 + n x_2}{m + n}, \quad y = \frac{m y_1 + n y_2}{m + n}.$$

In particolare: *il punto medio del segmento $P_1 P_2$ ha le coordinate*

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

15. Condizione di allineamento di tre punti. — Se nelle (1) varia r, variano in corrispondenza x, y, ed il punto $P(x, y)$ descrive la retta $P_1 P_2$; viceversa, per ogni posizione di P su quella retta, si può trovare un valore di $r = \frac{P_1 P}{P_2 P}$ tale che le (1) diano le coordinate di P.

Dunque la condizione perchè tre punti dati $P(x, y)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ siano allineati, è che le (1) coesistano per uno stesso valore di r, ossia che i due valori di r ricavati dalle (1) siano uguali fra loro:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2},$$

od anche

$$(2) \qquad \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}.$$

La (2) può pure scriversi sotto la forma

$$(2') \qquad (x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0,$$

la quale (come si verifica direttamente) dà la condizione di allineamento anche quando uno dei denominatori delle (2) è nullo; o sotto la forma

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

o sotto l'altra più usata

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La condizione perchè tre punti siano allineati è espressa dall'annullarsi del determinante formato colle coordinate dei punti stessi e colle unità.

16. Equazione di una retta. — Se si suppongono fissi i punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ e variabile il punto $P(x, y)$, la relazione (2), o (2'), o (3) diviene una equazione nelle variabili x, y, equazione che è soddisfatta ogniqual-

volta x, y sono coordinate di un punto della retta P_1P_2, e solo allora. Perciò si suol dire che la equazione (2), o (2'), o (3), nelle variabili x, y, *rappresenta analiticamente la retta congiungente i due punti* (x_1, y_1), (x_2, y_2), è *la equazione della retta* nominata; mentre la retta rappresenta graficamente quella equazione.

La nostra equazione è lineare rispetto alle variabili x, y, e (sviluppata ed ordinata) ha la forma

$$ax + by + c = 0, \tag{4}$$

dove a, b, c sono tre costanti indipendenti dalla posizione del punto $P(x, y)$.

Ora si può chiedere se *ogni* equazione del tipo (4) rappresenti effettivamente una retta, vale a dire se gli infiniti punti, le cui coordinate verificano la (4), siano tutti allineati. Basterà esaminare se tre, comunque scelti, tra i detti punti appartengano ad una retta. Siano dunque (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) tre punti tali che risulti

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \quad ax_2 + by_2 + c = 0, \quad ax_3 + by_3 + c = 0.$$

Queste equazioni, lineari ed omogenee rispetto ad a, b, c, coesistono per valori non tutti nulli delle quantità stesse; sarà quindi verificata la condizione

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

la quale esprime che i tre punti sono allineati. Concludendo:

Se un punto si muove descrivendo una retta, le sue coordinate verificano una equazione lineare a due variabili; e viceversa.

17. Posizioni particolari di una retta rispetto agli assi. — La posizione della retta

$$ax + by + c = 0 \tag{1}$$

dipende dai valori dei tre coefficienti a, b, c, o meglio dai rapporti di due di essi al terzo. Alcuni di quei coefficienti possono anche esser nulli; non tutti però, e nemmeno i due primi insieme.

a) Se $b = c = 0$, $a \neq 0$, l'equazione diviene

$$ax = 0, \quad \text{ossia} \quad x = 0,$$

e *rappresenta l'asse y*, i cui punti hanno nulla l'ascissa. Similmente si conchiude che l'equazione

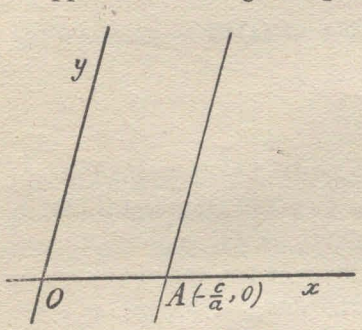
$$y = 0$$

rappresenta l'asse x.

b) Se $b = 0$, ma $a \neq 0$, $c \neq 0$, la (1) diviene

$$ax + c = 0, \quad \text{ossia} \quad x = -\frac{c}{a},$$

e rappresenta il luogo dei punti che hanno per ascissa $-\frac{c}{a}$, cioè una retta parallela all'asse delle y, uscente da quel punto A dell'asse x che ha l'ascissa $-\frac{c}{a}$.



Similmente vediamo che

$$by + c = 0$$

è l'equazione di una retta parallela all'asse x.

Dunque: *se nell'equazione di una retta manca una delle coordinate, la retta è parallela al corrispondente asse.*

c) Se si suppone nulla soltanto c, l'equazione (1) assume la forma

$$ax + by = 0,$$

e la retta corrispondente passa per l'origine, perchè i valori $x = 0$, $y = 0$ soddisfano l'equazione proposta.

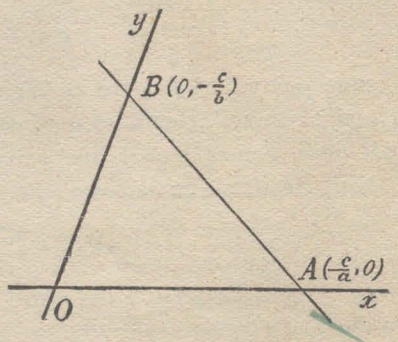
Quindi: *se nell'equazione di una retta manca il termine noto, la retta passa per l'origine.*

L'equazione della nostra retta può pure scriversi sotto le forme equivalenti

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}, \qquad y = mx,$$

(dove α e β sono proporzionali a $-b$, a, ed è $m = -\frac{a}{b}$).

Per tracciare effettivamente la retta in questione basterà conoscerne un altro punto, che otterremo dando ad x un valore numerico arbitrario, non nullo, e calcolando il corrispondente valore di y.



d) Se infine nella equazione (1) tutti i coefficienti sono diversi da zero, la retta sega gli assi coordinati x, y in due punti A e B distinti da O. Per avere la intersezione A coll'asse x, $(y = 0)$ si ponga $y = 0$ nella (1); si troverà

$$x = OA = -\frac{c}{a}.$$

Similmente, per $x = 0$, si ha

$$y = OB = -\frac{c}{b}.$$

Indicando i due segmenti OA, OB con

$$p = -\frac{c}{a}, \quad q = -\frac{c}{b},$$

l'equazione (1), dopo averne divisi i due membri per $-c$, può scriversi sotto la forma

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

la quale rappresenta *una retta che stacca sugli assi, a partire dalla origine, i segmenti p e q.*

18. Retta passante per un punto dato. — Disponendo dei coefficienti che entrano nell'equazione di una retta

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

o meglio dei rapporti di due di essi al terzo, si può ottenere che la retta soddisfi a due condizioni assegnate, traducentisi in due relazioni fra i detti rapporti. In tal guisa si ritroverebbe, ad es. sotto la forma (3) del n. 15, l'equazione della retta congiungente due punti.

Se si esige che la retta (1) passi per un sol punto $P(x_1, y_1)$, dei due rapporti sopra nominati uno resterà ancora indeterminato. Ed infatti la condizione imposta si traduce nella relazione

$$ax_1 + by_1 + c = 0,$$

la quale, sottratta membro a membro dalla (1), dà

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0, \tag{2}$$

equazione che, al variare del rapporto $\frac{a}{b}$, *rappresenta ogni retta passante per il punto* (x_1, y_1).

In particolare, se $b = 0$ ed $a \neq 0$, si ha $x - x_1 = 0$, equazione della parallela all'asse y condotta per il punto P; ecc.

19. Intersezione di due rette. Condizione di parallelismo. — Passiamo ora a considerare due o più rette di un piano, insieme alle equazioni che le rappresentano. Ogni relazione grafica fra quelle rette si traduce in una particolarità del sistema di equazioni lineari, e inversamente le proprietà dei sistemi di equazioni a due incognite si rispecchiano nelle proprietà grafiche dei sistemi di rette di un piano.

Così, se son date due rette r, r' mediante le loro equazioni

$$r) \qquad a x + b y + c = 0,$$

$$r') \qquad a' x + b' y + c' = 0,$$

il problema di determinare il punto di incontro, si traduce nel problema di trovare due valori x, y, coordinate del punto stesso, soddisfacenti al sistema dato.

Le coordinate richieste sono dunque

$$(1) \qquad x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

Se $ab' - a'b \neq 0$, le due rette si segano in un punto determinato.

Se invece $ab' - a'b = 0$, senza che siano nulli entrambi i numeratori delle (1), non esistono valori di x, y soddisfacenti le equazioni $r)$, $r')$; le due rette non hanno alcun punto comune, sono parallele. La condizione di parallelismo, $ab' - a'b = 0$, può anche porsi (quando a' e b' siano diversi da zero) sotto la forma

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'},$$

e si enuncia: *condizione perchè due rette, di date equazioni, siano parallele, è che i coefficienti delle variabili in una delle equazioni siano proporzionali ai corrispondenti coefficienti dell'altra.*

Se si avesse inoltre

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

(o meglio, per contemplare anche il caso di denominatori nulli, se si verificassero le relazioni che si ottengono da queste liberando da frazioni), le coordinate del punto (1) si presenterebbero sotto forma indeterminata; ma allora le due equazioni $r)$ ed $r')$ sarebbero equivalenti, e le due rette r, r' coinciderebbero.

Ritornando alla condizione di parallelismo notiamo che, se nella equazione di una retta r rimangono fissi i coefficienti delle variabili e muta il termine noto, la retta si muove parallelamente a sè stessa. Segue che la parallela alla r condotta per l'origine avrà l'equazione

$$a x + b y = 0,$$

e la parallela alla retta stessa pel punto (x_1, y_1) sarà data da

$$a (x - x_1) + b (y - y_1) = 0.$$

20. Fascio di rette. — Consideriamo ora tre rette,

$$r) \qquad ax + by + c = 0,$$
$$r') \qquad a'x + b'y + c' = 0,$$
$$r'') \qquad a''x + b''y + c'' = 0,$$

e cerchiamo la condizione affinchè appartengano ad uno stesso fascio (n. 9).

Osserviamo perciò che, se le tre rette passano per uno stesso punto, le coordinate x, y di questo devono soddisfare insieme le tre equazioni, e quindi deve essere

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

La medesima relazione si verifica però anche se le rette sono parallele tra loro, giacchè in tal caso sono nulli i minori formati cogli elementi delle prime due verticali del determinante. Viceversa, se la (1) è soddisfatta, o le equazioni $r)$, $r')$, $r'')$ coesistono per un sistema di valori x, y, ed allora le tre rette passano per un medesimo punto; oppure nel determinante (1) sono nulli i minori suddetti, e le tre rette risultano parallele tra loro.

Volendo enunciare brevemente il risultato, conviene estendere la definizione di fascio di rette (n. 9). Da ora in poi, per *fascio di rette* intenderemo *un sistema di rette di un piano che escano da uno stesso punto, o siano parallele a due a due.* E quando sia necessario distinguere i due casi, diremo *proprio* il primo fascio (dotato di centro), e *improprio* il secondo.

Possiamo ora esprimere la (1) così: *Condizione necessaria e sufficiente perchè tre rette appartengono ad un fascio è che si annulli il determinante formato coi coefficienti e termini noti delle equazioni delle rette stesse.*

Supposte distinte le rette r, r', la (1) esprime pure la condizione di compatibilità delle tre equazioni lineari con due incognite λ, μ:

$$(2) \qquad a'' = a\lambda + a'\mu, \quad b'' = b\lambda + b'\mu, \quad c'' = c\lambda + c'\mu.$$

Calcolate le incognite in modo da soddisfare le (2), e sostituiti al posto di a'', b'', c'' i loro valori nella equazione $r'')$, questa assume la forma

$$(a\lambda + a'\mu)x + (b\lambda + b'\mu)y + (c\lambda + c'\mu) = 0,$$

ossia

$$(3) \qquad \lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0.$$

Ora una equazione, come la (3), che si ottenga sommando due o più equazioni, dopo averle moltiplicate per certi coefficienti (*parametri*), dicesi *combinazione lineare* di quelle. Dunque: *la equazione di ogni retta for-*

mante fascio con due rette assegnate può scriversi come una combinazione lineare delle equazioni di queste.

Al variare dei parametri λ e μ, o meglio del parametro rapporto $h = \frac{\mu}{\lambda}$, la retta (3) o

$$(3') \qquad ax + by + c + h(a'x + b'y + c') = 0$$

varia descrivendo il fascio nominato; precisamente ai valori $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ ($h = 0$) corrisponde la retta r, ed ai valori $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ ($h = \pm\infty$) corrisponde la r'. Il parametro h può riguardarsi come coordinata della retta (3') entro il fascio nominato; di qual natura sia questa coordinata sarà visto in seguito.[1]

Osservazione. — Che la (3) rappresenti una retta passante per il punto comune alle r, r' (nella ipotesi che queste si seghino), può anche dimostrarsi direttamente, osservando anzitutto che la (3) è lineare e quindi rappresenta una retta, in secondo luogo che questa passa per il detto punto, perchè le coordinate di esso annullano i polinomi $ax + \ldots$, $a'x + \ldots$, e quindi il primo membro della (3).

21. Nuova forma della condizione perchè tre rette formino fascio. — Volendo verificare se tre rette formano fascio è utile in certi casi ricorrere alla proposizione seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè tre rette formino fascio è che esistano tre numeri, non tutti nulli, tali che moltiplicando ordinatamente per essi le equazioni delle tre rette e sommando membro a membro si ottenga una identità. Siano

$$r) \qquad ax + by + c = 0,$$
$$r') \qquad a'x + b'y + c' = 0,$$
$$r'') \qquad a''x + b''y + c'' = 0,$$

le tre rette date, e si supponga anzitutto che, indicando con λ, μ, ν certi tre numeri non tutti nulli, si abbia identicamente (cioè per valori arbitrari di x, y)

$$(1) \qquad \lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'x + c') + \nu(a''x + b''y + c'') = 0,$$

ossia

$$(\lambda a + \mu a' + \nu a'')x + (\lambda b + \mu b' + \nu b'')y + (\lambda c + \mu c' + \nu c'') = 0.$$

---

[1] Se del fascio si conosce il centro (x_1, y_1), conviene scrivere la equazione della retta generica di esso sotto la forma indicata nel n. 18, che è poi una combinazione lineare delle due equazioni

$$x - x_1 = 0, \qquad y - y_1 = 0$$

rappresentanti le parallele agli assi uscenti dal centro.

Perchè questa identità si verifichi, devono esser nulli i coefficienti di x, y e il termine noto:

$$\lambda a + \mu a' + \nu a'' = 0,$$
$$\lambda b + \mu b' + \nu b'' = 0,$$
$$\lambda c + \mu c' + \nu c'' = 0.$$

Ma la coesistenza di queste tre equazioni, per valori non tutti nulli di λ, μ, ν, porta l'annullarsi del determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix};$$

quindi (n. 20) le tre rette r, r', r'' formano fascio. Viceversa, se le tre rette formano fascio ed è quindi nullo il determinante ora scritto, le ultime tre equazioni possono risolversi mediante valori non tutti nulli di λ, μ, ν, e sussiste l'identità (1).

Quando invece nella (1), al posto di λ, μ, ν, si pongano valori *arbitrari*, essa non sussiste più identicamente, ma ci dà una equazione lineare in x, y, rappresentante una retta la quale, come è facile vedere, appartiene essa pure al fascio che contiene le tre rette date.

22. Rete di rette. — Supponiamo, al contrario, che le tre rette r, r', r'' sopra considerate non formino fascio. Allora, comunque vengano scelti i parametri, non tutti nulli, λ, μ, ν, la (1) non è più verificata identicamente, ma rappresenta una certa retta del piano. E vale la proposizione seguente:

Date le equazioni di tre rette non formanti fascio, mediante una conveniente combinazione lineare di quelle si può rappresentare una quarta retta assegnata ad arbitrio nel piano.

Nella nuova ipotesi infatti, poichè il determinante sopra scritto è diverso da zero, esisteranno tre numeri λ, μ, ν tali che risulti

$$\lambda a + \mu a' + \nu a'' = a''',$$
$$\lambda b + \mu b' + \nu b'' = b''',$$
$$\lambda c + \mu c' + \nu c'' = c''',$$

dove a''', b''', c''' sono tre quantità date ad arbitrio, non tutte nulle; perciò l'equazione

$$(1) \quad \lambda (ax + by + c) + \mu (a'x + b'y + c') + \nu (a''x + b''y + c'') = 0$$

coinciderà coll'altra

$$a''' x + b''' y + c''' = 0,$$

che definisce una retta arbitraria del piano.

Al variare dei tre parametri λ, μ, ν, o meglio dei due rapporti $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, la (1) rappresenta la totalità, o (come si suol dire) la *rete* delle rette del piano.

23. Notazione abbreviata. — Le formule che ci siamo procurati finora permettono di trattare analiticamente le questioni riguardanti la mutua posizione di punti e rette di un piano. Ora, quando nella figura considerata compariscono più rette, ciascuna delle quali vien rappresentata da una equazione lineare, conviene spesso mettere in evidenza i legami che passano fra le equazioni stesse, piuttosto che i coefficienti di queste. E allora si preferisce indicare abbreviatamente i primi membri di alcune tra quelle equazioni mediante singole lettere, le quali adunque designano polinomi contenenti le variabili x, y, e non quantità. Con questa *notazione abbreviata* si raggiunge una maggior concisione nella scrittura, in grazia alla quale, dal solo aspetto delle formole, è facile dedurre le proprietà di posizione degli elementi della figura studiata.

Così, se indichiamo con l, m, n... polinomi lineari in x, y, e quindi con $l=0$, $m=0$, $n=0$... le equazioni di più rette, potremo enunciare sotto la seguente forma gli ultimi risultati:

a) L'equazione $\lambda l+\mu m=0$ rappresenta una retta generica del fascio determinato da $l=0$, $m=0$.

b) Condizione perchè tre rette $l=0$, $m=0$, $n=0$ formino fascio è che esistano tre numeri λ, μ, ν non tutti nulli, tali che il polinomio $\lambda l+\mu m+\nu n$ sia identicamente nullo.

c) Se le tre rette $l=0$, $m=0$, $n=0$ non formano fascio, la equazione $\lambda l+\mu m+\nu n=0$ è atta a rappresentare una qualsiasi retta del piano, purchè i parametri λ, μ, ν siano convenientemente scelti.

Esercizi. I. — 1) Segnare i punti di coordinate (1, 1), (2, — 2), (— 3, — 4) (— 1.3, 2.7), $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $(2+\sqrt{3}, 1-\sqrt{5})$; dividere il segmento che congiunge due di questi punti in 2, 3,... parti uguali e calcolare le coordinate dei punti di divisione.

2) I tre punti (1, — 1), (3, 2), (4, y) sono allineati; calcolare y e confrontarne il valore con quello dedotto dalla figura.

3) Determinare parecchi punti soddisfacenti colle loro coordinate ad una delle equazioni $2x+3y=0$, $3x-y-1=0$, $5x+2y-3=0$, e verificare graficamente che sono allineati.

4) Costruire le rette di equazione $x-2=0$, $y+\sqrt{2}=0$, $x+y=0$, $2x+3y=0$, $x+2y+3=0$.

5) I punti (1, 2), (2, — 2), (— 3, — 4) determinano un triangolo; scrivere le equazioni dei lati, delle parallele ai lati condotte per i vertici opposti, delle congiungenti i punti medi dei lati, delle mediane; verificare che le ultime tre rette concorrono in un punto e calcolarne le coordinate.

6) Le rette $x+y-1=0$, $x-2y-2=0$, $3x-2y+6=0$ determinano un triangolo; calcolare le coordinate dei vertici; scrivere le equazioni delle parallele ai lati condotte per i vertici opposti e delle mediane; determinare la intersezione di queste. Verificare mediante misure eseguite sulla figura le coordinate calcolate.

7) Risolvere i problemi indicati negli esercizi 5), 6) nella ipotesi che i vertici del triangolo abbiano le coordinate (x_i, y_i), oppure i lati abbiano le equazioni $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$; dimostrare in particolare, nella prima ipotesi, che il punto di concorso delle mediane ha le coordinate $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $\frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$.

8) Date in un piano due o più rette r_1, $r_2 \dots$, sopra ogni parallela all'asse y si costruisca un punto, la cui ordinata sia la somma delle ordinate corrispondenti alle rette date; si dimostri che il luogo di quel punto è una retta.

II. — 9) Dati in un piano n punti A_i (x_i, y_i) e dati in corrispondenza n numeri p_i, $(i = 1, 2, \dots, n)$, il baricentro dei punti A_i presi coi pesi p_i si definisce nello stesso modo tenuto per le punteggiate (n. 8, es. 9), 10)). Si dimostri che le coordinate del detto baricentro sono $\frac{\Sigma_i p_i x_i}{\Sigma_i p_i}$, $\frac{\Sigma_i p_i y_i}{\Sigma_i p_i}$ (sicchè, in particolare, il punto di concorso delle mediane di un triangolo è il baricentro dei vertici presi con pesi uguali); e si concluda che il detto baricentro non dipende dall'ordine in cui i punti A_i si adoperano nella costruzione. Se però $\Sigma_i p_i = 0$, senza che siano nulli entrambi i numeratori, le rette che congiungono ciascun punto A_i col baricentro dei rimanenti risultano tutte parallele, e si dice che il baricentro degli n punti si è allontanato all'infinito in quella direzione. Se finalmente sono nulli anche i due numeratori, ciascun punto A_i coincide col baricentro dei rimanenti, ed il baricentro dei punti dati è indeterminato.

10) Dati due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ed una retta $ax + by + c = 0$ che seghi la congiungente di quei punti in Q, calcolare il rapporto semplice $\frac{P_1 Q}{P_2 Q}$.

11) Dati (mediante le coordinate) i punti P_1, P_2, P_3, P_4, calcolare il rapporto semplice formato da P_1, P_2 colla intersezione di $P_1 P_2$ e di $P_3 P_4$.

12) Dall'es. 10) si deduca il teorema di Menelao (I secolo d. C.): «Una retta sega i tre lati di un triangolo ABC in tre punti A', B', C' tali che il prodotto dei rapporti semplici $\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1$»; e viceversa.

13) Dall'es. 11) si deduca il teorema di Ceva (1678): «Le rette congiungenti i vertici di un triangolo ABC con un punto qualsiasi del piano segano i lati opposti in tre punti A', B', C' tali che il prodotto $\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = -1$»; e viceversa.

14) Scrivere l'equazione di quella retta che passa pel punto d'incontro di $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$, e soddisfa ad una delle condizioni seguenti: *a*) passa per l'origine; *b*) è parallela ad uno degli assi; *c*) passa per un punto di date coordinate; *d*) è parallela ad una retta di data equazione; *e*) passa pel punto di concorso delle rette $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$.

15) Le congiungenti i vertici di un triangolo coi punti medi dei segmenti intercettati sopra una trasversale dai relativi angoli segano i lati opposti del triangolo in tre punti allineati; (si possono assumere due lati del triangolo come assi coordinati).

16) Si dimostri il teorema di PAPPO (IV secolo d. C.): «Se un esagono ha i vertici di posto dispari sopra una retta ed i vertici di posto pari sopra una seconda retta, i tre punti d'incontro delle coppie di lati opposti stanno sopra una terza retta». (Si assumano le due prime rette come assi coordinati).

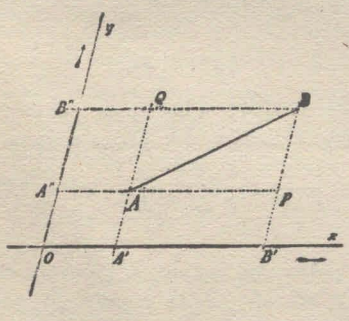
17) I punti medi delle diagonali di un quadrilatero ed il punto medio del segmento che congiunge le intersezioni dei lati opposti stanno sopra una medesima retta; (due lati del quadrilatero possono assumersi come assi coordinati; oppure si possono ritener date le coordinate dei vertici e delle due intersezioni, tenendo conto delle relazioni che devono legarle).

CAPITOLO II.

Distanze, angoli, aree.

24. Proiezioni parallele di segmenti. — Tratteremo ora un secondo gruppo di questioni sui punti e le rette di un piano, questioni relative ai concetti metrici di distanza, angolo, area... Per procedere in modo uniforme nel detto studio, premettiamo qualche nozione sulle proiezioni parallele dei segmenti.

Date nel piano due rette non parallele x, y, sulla prima delle quali sia fissato il verso positivo, *proiettare* un punto A del piano *sopra* x *parallelamente ad* y, o *secondo la direzione* y, vuol dire condurre per A la parallela ad y fino all'incontro con x nel punto *proiezione* A'. I punti di un segmento AB avranno per proiezioni i punti di un segmento $A'B'$ di x, il quale (tenuto conto del segno) si dirà *proiezione di* AB *sopra* x *secondo la direzione* y. È chiaro che se AB si sposta parallelamente a sè stesso, mantenendo invariata la propria grandezza e il proprio verso, la proiezione $A'B'$ scorre sopra x senza alterarsi nè in grandezza, nè in verso; dunque: segmenti uguali, paralleli ed ugualmente diretti, o (come diremo brevemente, riassumendo le tre condizioni con un solo aggettivo) *segmenti equipollenti hanno proiezioni uguali sopra una stessa retta, secondo una stessa direzione.*



a) Se fissiamo il verso positivo anche sopra y, potremo costruire inoltre la proiezione $A''B''$ di AB sopra y, secondo la direzione x. I due seg-

menti $A'B'$, $A''B''$, considerati in grandezza, direzione e verso, si chiamano le *componenti di* AB (segmento *risultante*) *secondo le direzioni* x, y. Le rette proiettanti adoperate nella costruzione limitano un parallelogramma $APBQ$, di cui il segmento AB è una diagonale, ed i cui lati AP, PB sono equipollenti alle due componenti nominate. Enunceremo questa osservazione dicendo: *con due segmenti equipollenti alle componenti di un segmento si può costruire una spezzata bilatera, di cui il segmento dato congiunge gli estremi.* Se il segmento AB si sposta parallelamente a sè stesso, senza alterarsi in grandezza, le due componenti di esso non mutano nè grandezza, nè direzione, nè verso; dunque *le componenti di un segmento definiscono il segmento in grandezza, direzione e verso, non in posizione.*

Se si assumono le rette x, y come assi coordinati, e si chiamano (x, y) ed (x', y') le coordinate cartesiane di A e B, le componenti di AB sono date, in valore e segno, da

$$x' - x, \quad y' - y.$$

In particolare, le componenti del segmento, che va dall'origine ad un punto, sono le coordinate cartesiane del punto stesso.

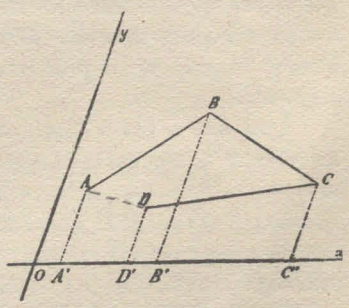
b) Consideriamo ora più segmenti, che siano i successivi lati di una spezzata, ad es. $ABCD$; proiettiamo i vertici di questa sopra x, secondo la direzione y, ed indichiamone le proiezioni con A', B', C', D'. Chiameremo *proiezione della spezzata su* x (secondo la direzione y) la somma delle proiezioni dei lati, prese coi segni che ad esse spettano, vale a dire (n. 4)

$$A'B' + B'C' + C'D' = A'D'.$$

Ma $A'D'$ è la proiezione di AD; dunque:

La proiezione di una spezzata è uguale alla proiezione del segmento che ne congiunge gli estremi (essendo le proiezioni eseguite sopra una stessa retta, secondo una stessa direzione).

In particolare: *la proiezione di un segmento è uguale alla somma delle proiezioni delle sue componenti prese secondo due direzioni quali si vogliano.*



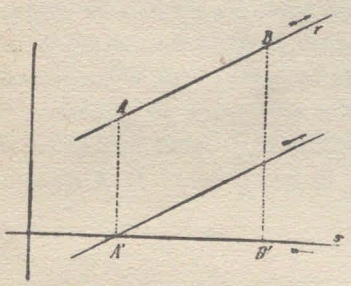
Se due spezzate hanno gli stessi estremi, le loro proiezioni sopra una stessa retta, secondo una stessa direzione, sono uguali.

c) Se si eseguiscono proiezioni *ortogonali*, vale a dire se la retta x, su cui si proietta, è perpendicolare alla direzione y, secondo cui si proietta, passa una relazione semplice fra la lunghezza di un segmento e la sua proiezione. Sia infatti AB un segmento di una retta r, e sia $A'B'$ la sua proiezione ortogonale su x. Possiamo, senza alterare la proiezione, immaginar trasportato parallelamente AB colla retta r,

finchè A viene a coincidere con A'. Allora AB ed $A'B'$ sono, rispettivamente, ipotenusa e cateto di un triangolo rettangolo di cui $\widehat{xr}$ è l'angolo adiacente al cateto; dunque

$$A'B' = AB \cos \widehat{xr}.$$

Questa relazione vale anche nei segni, quando si siano fissati comunque i versi positivi sopra le rette x ed r. Ciò si verifica supponendo anzitutto fissati i versi da A verso B e da A' verso B', giacchè allora i tre termini della precedente uguaglianza sono positivi, e notando poi che una inversione del senso positivo sopra una delle due rette muta il segno a due di quei termini e lascia inalterato il terzo. In parole: *la proiezione ortogonale di un segmento sopra una retta è data (in valore e segno) dal prodotto del segmento obiettivo per il coseno dell'angolo formato dalle rette contenenti il segmento e la proiezione.*



Osservazione. — Nell'ultimo paragrafo, parlando di un segmento, abbiamo fatto attenzione alla sua grandezza, alla direzione della retta che lo sostiene, al verso in cui il segmento si intende descritto, ma non ci siamo occupati della posizione che il segmento occupa nel piano (o nello spazio). Ora in varie applicazioni della matematica (alla meccanica, alla fisica...), nelle quali un siffatto ente geometrico spesso interviene, si è convenuto di attribuirgli un nome speciale; si è chiamato *vettore* un segmento considerato in grandezza, verso e direzione. Se AB è un vettore che va descritto da A verso B, il punto A si chiama *origine* (o *punto d'applicazione*) e B *termine;* un vettore noto è fissato anche in posizione, quando ne sia data la origine. Due vettori che differiscano solo per l'origine (vale a dire due segmenti equipollenti) diconsi *uguali.* Ai vettori si applicano le nozioni di *proiezioni, componenti...,* di cui parlammo a proposito dei segmenti.

Dati due o più vettori, se a partire da un punto A arbitrario si costruisce un vettore AB uguale al primo vettore assegnato, poi un vettore BC uguale al secondo vettore assegnato, e così si continua, si arriva alla fine a tracciare una spezzata $ABC...HK$, che ha tanti lati quanti sono i vettori dati; il vettore AK, che ne congiunge gli estremi, si chiama *somma* o *risultante* dei vettori dati (*componenti*); ad es., nel piano un vettore qualsiasi è la somma delle sue due componenti, prese secondo due direzioni arbitrarie. La somma o composizione dei vettori gode, come facilmente si dimostra, la proprietà associativa e commutativa.

Colla nuova locuzione, un teorema precedente può enunciarsi dicendo che la somma delle proiezioni di più vettori uguaglia la proiezione della somma dei vettori stessi (sopra una data retta, secondo una data direzione).

25. Distanza di due punti. — Riprendiamo ora gli assi cartesiani x, y. Per ottenere la massima semplicità nelle formole e per limitarci all'ipotesi costantemente seguìta in pratica, supporremo, in questo Capitolo, perpendicolari i due assi, *ortogonale* il sistema di coordinate. E precisamente supporremo fissati i versi positivi sugli assi in modo che sia $\widehat{xy} = +\frac{\pi}{2}$. A titolo di informazione aggiungeremo tuttavia le principali formole nel caso di assi obliqui, lasciando al lettore la cura di dimostrarle.

Consideriamo due punti $P(x, y)$, $P'(x', y')$ giacenti sopra una retta r, su cui sia fissato arbitrariamente il verso positivo, ed indichiamo con d la misura (in valore e segno) del segmento PP'. Siano inoltre

$$X = x' - x, \quad Y = y' - y$$

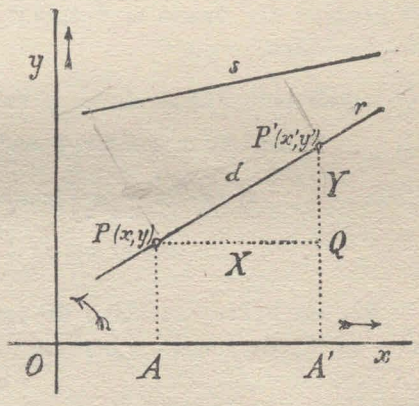
le componenti secondo le direzioni x, y del detto segmento, le quali possono riguardarsi come lati, paralleli ad x, y, di una spezzata PQP' conducente da P in P'. Proiettiamo ortogonalmente il segmento PP' e la spezzata sopra una retta arbitraria s (su cui si supporrà fissato il verso positivo); avremo (n. 24)

(α) $d \cos rs = X \cos xs + Y \cos ys;$

e facendo coincidere la s ordinatamente colle rette r, x, y, otterremo ancora

(β) $d = X \cos xr + Y \cos yr$

(γ) $d \cos rx = X, \quad d \cos yr = Y.$



Fra la (β) e le (γ) possiamo anzitutto eliminare i coseni, moltiplicando i due membri della (β) per d e sostituendo, al posto di $d \cos xr$, $d \cos yr$, i valori dati dalle (γ). Avremo così

$$d^2 = X^2 + Y^2$$

(teorema di PITAGORA), ossia, ricordando le espressioni di X, Y,

(1) $$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2.$$

La (1) permette di calcolare la distanza di due punti, di cui sian note le coordinate: *il quadrato della distanza di due punti è espresso, in coordinate ortogonali, dalla somma dei quadrati delle differenze fra le coordinate omonime dei due punti.* In particolare, la distanza del punto P dall'origine è data da

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

In assi obliqui si sarebbe trovata la formola

$$(1^*) \qquad d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + 2\,(x' - x)\,(y' - y)\cos xy.$$

26. Relazioni angolari. — Eliminiamo ora d, X, Y fra le (β) e (γ), sostituendo nella (β) al posto di X, Y i valori dati dalle (γ) e dividendo i due membri per d. Otterremo

$$(2) \qquad \cos^2 xr + \cos^2 yr = 1.$$

I coseni degli angoli che una retta r forma cogli assi coordinati si sogliono chiamare *coseni di direzione* di quella retta. Dunque *la somma dei quadrati dei coseni di direzione di una retta vale* 1 (in assi ortogonali).[1]

Se ora operiamo le stesse sostituzioni (γ) nella (α), anzichè nella (β), troviamo

$$(3) \qquad \cos rs = \cos xr \cos xs + \cos yr \cos ys;$$

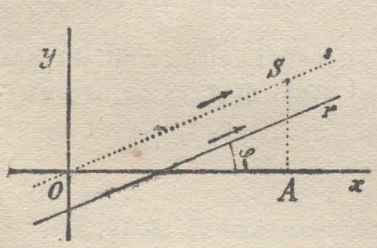
il coseno dell'angolo di due rette è dato (in assi ortogonali) *dalla somma dei prodotti dei coseni di direzione dell'una retta per i corrispondenti coseni dell'altra.*[2]

In assi obliqui si avrebbero le formole:

$$(2^*) \qquad \operatorname{sen}^2 xy = \cos^2 xr + \cos^2 yr - 2\cos xr \cos yr \cos xy.$$

$$(3^*) \qquad \cos rs = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 xy}\,[\cos xr \cos xs + \cos yr \cos ys - (\cos xr \cos ys + \cos xs \cos yr)\cos xy].$$

27. Rapporto direttivo di una retta. — Per applicare la formola (3) nella geometria analitica occorre, data l'equazione di una retta, calcolare i coseni di direzione di questa.



Consideriamo a tal fine una retta r,

$$(1) \qquad ax + by + c = 0,$$

che supporremo anzitutto non parallela all'asse y $(b \neq 0)$. Risolvendo rispetto ad y, porremo la (1) sotto la forma

$$(1') \qquad y = mx + p,$$

---

[1] Poichè $\widehat{xr} + \widehat{ry} = \widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, la (2) non differisce dalla formola notissima $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

[2] La (3) è identica alla nota formola

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

dalla quale si deducono facilmente la $\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ e le altre formole di addizione dei seni e coseni. Procedimenti analoghi a quelli qui seguiti permetterebbero di ritrovare in modo uniforme, e tenendo conto dei segni, tutte le formole della trigonometria piana. Si vedano in proposito la *Trigonometria* del BALTZER e la *Geometria Analitica* del D'OVIDIO (Cap. III).

dove $m = -\frac{a}{b}$ si suol chiamare (per la ragione che ora vedremo) *rapporto* o *coefficiente direttivo* della retta.

La retta s, parallela ad r per O, ha l'equazione

$$y = mx, \tag{2}$$

dalla quale si ricava subito

$$m = \frac{y}{x} = \frac{AS}{OA} = \operatorname{tg} xs.$$

Posto $\widehat{xs} = \widehat{xr} = \varphi$, e ritornando alla (1), concludiamo che

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a}{b}; \tag{3}$$

il rapporto direttivo di una retta (in assi ortogonali) *è uguale alla tangente dell'angolo che l'asse* x *forma colla retta;* ciò anche quando

$$b = 0, \quad -\frac{a}{b} = \infty.$$

Segue di qua che ogni retta formante l'angolo $\varphi\left(\neq \frac{\pi}{2}\right)$ coll'asse x ha un'equazione del tipo

$$y = x \operatorname{tg}\varphi + p,$$

e, se passa per il punto (x', y'),

$$y - y' = (x - x') \operatorname{tg}\varphi,$$

od anche

$$\frac{x - x'}{\cos\varphi} = \frac{y - y'}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Ritornando alla (3), possiamo sostituire ad essa le due relazioni

$$\operatorname{sen}\varphi = -a\rho, \quad \cos\varphi = b\rho, \tag{4}$$

dove ρ è un fattore di proporzionalità che si calcola subito quadrando le (4) e sommando membro a membro. Risulta

$$1 = \rho^2 (a^2 + b^2),$$

donde

$$\rho = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{5}$$

e quindi, sostituendo nelle (4),

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{-a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}; \tag{6}$$

queste dànno i *coseni di direzione* ($\cos\varphi = \cos xr$, $\operatorname{sen}\varphi = \cos yr$) *della retta* r. Il denominatore va preso collo stesso segno nelle due formole (6);

il segno resta però indeterminato finchè sopra r non sia fissato il verso positivo.

In assi obliqui si hanno le formole

$$(3^*) \qquad \frac{\operatorname{sen} xr}{\operatorname{sen} ry} = -\frac{a}{b},$$

$$(6^*) \quad \operatorname{sen} xr = \frac{-a \operatorname{sen} xy}{\pm\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos xy}}, \qquad \cos xr = \frac{b - a\cos xy}{\pm\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos xy}}.$$

28. **Angolo di due rette.** — Data, insieme alla retta r

$$(1) \qquad ax + by + c = 0,$$

una seconda retta r' di equazione

$$(1') \qquad a'x + b'y + c' = 0,$$

si osservi che è

$$\widehat{rr'} = \widehat{xr'} - \widehat{xr} = \varphi' - \varphi,$$

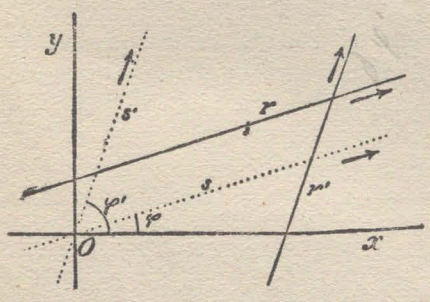
dove φ' indica l'angolo che x forma con r'. Quest'angolo è determinato dalle formole

$$(6') \qquad \operatorname{sen}\varphi' = \frac{-a'}{\pm\sqrt{a'^2+b'^2}}, \qquad \cos\varphi' = \frac{b'}{\pm\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

colla solita osservazione intorno al doppio segno. Ricordando ora le note formole esprimenti $\cos(\varphi' - \varphi)$ e $\operatorname{sen}(\varphi' - \varphi)$, citate anche nella nota al n. 26, otteniamo subito, in base alle (6) e (6'),

$$(7) \qquad \cos rr' = \frac{aa' + bb'}{\pm\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

$$(8) \qquad \operatorname{sen} rr' = \frac{ab' - a'b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}},$$



le quali *dànno il coseno ed il seno dell'angolo delle due rette* (1) e (1') (in assi ortogonali).

I denominatori nelle due formole hanno lo stesso segno; questo però rimane ambiguo finchè non siano fissati, sulle due rette, i versi positivi.

Dividendo membro a membro la (8) per la (7), si ottiene, senza ambiguità di segno (cfr. n. 10),

$$(9) \qquad \operatorname{tg} rr' = \frac{ab' - a'b}{aa' + bb'},$$

la quale (dividendo numeratore e denominatore per $b\,b'$) può anche scriversi così:

$$(9') \qquad \operatorname{tg} rr' = \frac{m' - m}{1 + mm'},$$

dove m, m' sono i rapporti direttivi delle due rette.

Sotto questa forma la (9') non differisce dalla formola che esprime $\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi)$ in funzione di $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi'$.

In assi obliqui valgono le formule

$$(7^*) \qquad \cos rr' = \frac{a\,a' + b\,b' - (a\,b' + a'\,b)\cos xy}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos xy}\ \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2\,a'\,b'\cos xy}},$$

$$(8^*) \qquad \operatorname{sen} rr' = \frac{(a\,b' - a'\,b)\operatorname{sen} xy}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos xy}\ \sqrt{a'^2 + b'^2 - 2\,a'\,b'\cos xy}}.$$

29. Condizione di perpendicolarità di due rette. — La condizione affinchè le due rette r, r' siano perpendicolari fra loro è espressa dall'annullarsi di $\cos rr'$, e quindi del numeratore della (7). Dunque:

In assi ortogonali, la condizione perchè le due rette

$$a\,x + b\,y + c = 0, \quad a'\,x + b'\,y + c' = 0$$

siano perpendicolari tra loro è

$$(10) \qquad a\,a' + b\,b' = 0.$$

Quest'ultima ci fornisce il rapporto dei coefficienti a' e b' di ogni retta r' che sia perpendicolare ad una retta r assegnata; se, ad es., prendiano $a' = \frac{1}{a}$ (il che è lecito finchè $a \neq 0$), dovremo poi assumere $b' = -\frac{1}{b}$. Quindi:

In assi ortogonali, la equazione della retta condotta per il punto (x', y') normalmente alla retta $a\,x + b\,y + c = 0$ è

$$(11) \qquad \frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b}.$$

Se le due rette r, r' sono date mediante le equazioni $y = m\,x + p$, $y = m'\,x + p'$, la condizione di perpendicolarità è

$$mm' = -1;$$

e l'equazione della retta perpendicolare alla prima, condotta dal punto (x', y'), è

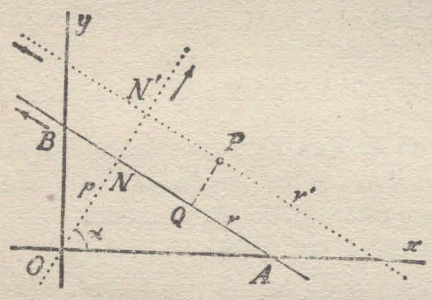
$$y - y' = -\frac{1}{m}(x - x').$$

Cercando la intersezione della retta (11) colla (1), sarebbe facile determinare la distanza del punto (x', y') dalla retta (1), distanza che noi ci procureremo per altra via.

30. Equazione normale di una retta. — Data una retta r di equazione

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

sulla quale retta sia fissato arbitrariamente il verso positivo, si conduca da O la perpendicolare n alla r, e sopra n si scelga il verso positivo in modo che sia $\widehat{nr} = +\frac{\pi}{2}$. Indichiamo con $p = ON$ la distanza di O da r, presa col segno che le spetta, e poniamo $\widehat{xn} = \alpha$. È chiaro che, data la retta orientata r, i valori di p ed α sono completamente determinati, e viceversa; possiamo quindi proporci di calcolare p ed α partendo dalla (1), e, inversamente, di scrivere la equazione della retta, quando siano noti p ed α.



Supponiamo a tal fine, per ora, che la retta r seghi effettivamente gli assi x, y in due punti A, B distinti da O, vale a dire che le quantità a, b, c siano diverse da zero. Osserviamo poi che

$$OA \cos\alpha = OB \operatorname{sen}\alpha = ON = p.$$

Sostituendo al posto di OA, OB i valori $-\frac{c}{a}, -\frac{c}{b}$ ricavati dalla (1) (n. 17) e dividendo per c, otteniamo le relazioni

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{b} = -\frac{p}{c},$$

ossia, indicando con ϱ il valore comune dei tre rapporti,

$$\cos\alpha = a\varrho, \quad \operatorname{sen}\alpha = b\varrho, \quad -p = c\varrho. \tag{2}$$

Dalle due prime, quadrando e sommando, ricaviamo ϱ, precisamente

$$\varrho = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}; \tag{3}$$

sostituendo nelle (2), abbiamo [1]

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{4}$$

$$-p = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}},$$

[1] Si osservi che le prime due equazioni (4) si deducono subito dalle (6) del n. 27 notando che $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

l'ultima delle quali permette di decidere il segno del radicale, essendo noto il segno di p in relazione al verso fissato su n o su r.

Moltiplicando la (1) per ϱ e tenendo conto delle (2), la equazione della retta data si presenta sotto la forma

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0, \tag{5}$$

la quale, in virtù della (3), coincide termine a termine colla equazione

$$\frac{ax + by + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \tag{6}$$

quando in questa si stacchino i termini contenenti le singole variabili ed il termine noto.

Ora questi risultati, ed anche le stesse relazioni (2), valgono qualunque sia la posizione della retta r rispetto agli assi. Infatti, se ad es. r è parallela ad x, nella prima delle (2) è da porsi $a = 0$, $\cos \alpha = 0$, mentre le altre rimangono inalterate; se r passa per O, nell'ultima delle (2) si porrà $c = 0$, $p = 0$, mentre le rimanenti sussistono, come si verificherebbe sostituendo, per un momento, alla retta r una retta parallela. Concludiamo che:

La equazione di una retta qualsiasi può scriversi assumendo come coefficienti delle variabili x, y i coseni di direzione della normale alla retta, e come termine noto la distanza, cambiata di segno, dell'origine dalla retta.

Questa particolare equazione (5), in cui le costanti hanno i significati geometrici ora esposti, fu detta (da HESSE) *forma normale della equazione di un retta,* o, brevemente, *equazione normale della retta.*

Va notato che l'equazione normale di una retta rappresenta la retta *orientata,* cioè presa con un determinato verso; giacchè, ove si inverta sopra r, e quindi sopra n, il verso positivo, mutano segno nella (5) i coefficienti delle variabili e il termine noto.

D'ordinario una retta vien data analiticamente mediante una equazione *generale,* lineare, del tipo (1), i cui coefficienti non hanno ordinariamente alcun significato geometrico (lo hanno bensì i loro mutui rapporti). Dalle cose dette risulta che la equazione normale della retta stessa si ottiene moltiplicando i due membri della (1) per il fattore ϱ, cioè scrivendo la (6).

In assi ortogonali, l'equazione normale

$$\frac{ax + by + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \tag{6}$$

si ottiene dall'equazione generale della retta, dividendone il primo membro per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti delle variabili.

Quanto al segno del radicale, sussiste l'osservazione fatta sopra.

In assi obliqui, l'equazione normale di una retta si presenta sotto la forma

$$x \cos xn + y \cos yn - p = 0, \tag{5*}$$

ed il fattore ρ, per cui va moltiplicata l'equazione generale, quando debba esser ridotta a forma normale, è espresso da

$$(3^*) \qquad \rho = \frac{\operatorname{sen} xy}{\pm\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos xy}}.$$

31. Distanza di un punto da una retta. — Il vantaggio di adoperare in talune questioni l'equazione normale di una retta risulta dal problema seguente.

Sia data una retta r ed un punto $P(x', y')$, comunque situato; si voglia calcolare la distanza $\delta = PQ$ del punto dalla retta. Supponiamo che su questa sia fissato il verso positivo; conduciamo da O la normale n ad r, e su n e sulle parallele ad n fissiamo il verso positivo, secondo la convenzione fatta prima $\left(\widehat{nr} = +\frac{\pi}{2}\right)$. La distanza δ assumerà così un certo segno, dipendente dalla banda, rispetto ad r, in cui si trova il punto P; precisamente, date le nostre convenzioni, avranno distanza positiva da r i punti giacenti a *sinistra* di un osservatore che percorra la retta nel senso positivo, e distanza negativa gli altri punti. Ciò premesso, si conduca per P la retta r' parallela ad r, e sia N' il punto in cui quella sega n. Si avrà allora, anche tenendo conto dei segni (v. la figura di pag. 34),

$$QP = NN' = ON' - ON = p' - p,$$

dove si è posto $ON = p$, $ON' = p'$.

Ora, se la retta r è data mediante la sua equazione normale

$$(5) \qquad x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0,$$

è noto p. Quanto a p', osserviamo che l'equazione normale di r' sarà

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p' = 0,$$

e poichè la retta stessa passa per P, dovrà questa equazione esser soddisfatta dalle coordinate (x', y') di P, donde

$$p' = x'\cos\alpha + y'\operatorname{sen}\alpha.$$

Sostituendo nell'espressione QP e cambiando segno, si ha infine

$$(7) \qquad \delta = PQ = -(x'\cos\alpha + y'\operatorname{sen}\alpha - p).$$

Il risultato si enuncia in forma molto semplice:

La distanza di un punto, di date coordinate, da una retta, di data equazione normale, è il valore opposto a quello che assume il primo membro della equazione stessa quando al posto delle variabili si sostituiscano le coordinate del punto.

Risulta dunque che, se nel primo membro della equazione normale di una retta si sostituiscono alle variabili le coordinate di un punto qual-

siasi, quel primo membro assume un valore che ha una immediata interpretazione geometrica, giacchè esprime (a parte il segno) la distanza del punto dalla retta.

L'ultima osservazione non sussiste più, se la equazione della retta è data in forma generale

$$ax + by + c = 0. \tag{1}$$

Allora per risolvere il problema di cui ci occupiamo converrà ridurre a forma normale la (1). Ricordando la (6), otteniamo:

In assi ortogonali, la distanza del punto (x', y') *dalla retta* (1) *è espressa da*

$$\delta = \frac{ax' + by' + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{8}$$

Il segno del radicale è, come dicemmo, indeterminato, finchè sulla retta non sia fissato il verso positivo. Spesso si conviene di riguardar come positiva la distanza dell'origine O $(0, 0)$ da una retta qualsiasi che non passi per O, vale a dire il valore

$$p = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}};$$

questa convenzione costringe ad assumere un *determinato* segno (quello di c) per il denominatore. La convenzione però non si estende alle rette uscenti dall'origine.

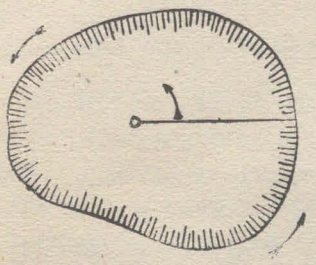
In ogni caso, risulta dalla (8) che il valore assunto dal primo membro della (1), quando al posto delle variabili si pongano le coordinate di un punto qualsiasi P, è proporzionale alla distanza di P dalla retta. E quel valore ha lo stesso segno per i punti P che stanno da una determinata banda della retta, ed il segno opposto per i punti che stanno dalla banda opposta; precisamente, se $c \neq 0$, quel valore ha il segno di c, quando P sta dalla banda dell'origine rispetto alla retta.

In assi obliqui, il primo enunciato di questo numero rimane inalterato, tenuto conto della (5*); nel secondo enunciato la (8) va sostituita dalla

$$\delta = \frac{(ax' + by' + c)\operatorname{sen} xy}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos xy}}. \tag{8*}$$

32. Segno di un'area piana. — Dobbiamo ancora procurarci la formola che esprime l'area di un triangolo (o poligono). Accenneremo anzitutto ad una convenzione che si suol fare riguardo ai segni delle aree di figure piane, convenzione di cui si riscontra la utilità in varie questioni di matematiche pure ed applicate.

Consideriamo nel piano un'area limitata da una linea chiusa, poligonale o curva (*contorno* o *circuito*), che supporremo non intrecciata. Un punto mobile può descrivere il contorno in due versi opposti. Quando il punto si muove in uno dei due versi, che diremo *positivo*, il raggio congiungente quel punto mobile ad un punto fisso, interno all'area (e sufficientemente vicino alla posizione del punto mobile), ruota intorno al punto fisso in verso positivo; mentre se il punto mobile percorre il contorno in verso *negativo*, quel raggio ruota in verso negativo. Possiamo ancora notare che, date le nostre convenzioni, un osservatore, il quale percorra il contorno in verso positivo, restando al disopra del piano dell'area, lascia l'area alla sua sinistra. Ora noi riguarderemo come *positiva* o *negativa* un'area, secondo che il contorno di essa si immagina descritto in verso positivo o negativo; al valore aritmetico dell'area (relativo ad una determinata unità di misura) premetteremo, secondo i casi, il segno + o il segno —.



In particolare, se P_1, P_2, P_3 sono i vertici di un triangolo, col simbolo $P_1 P_2 P_3$ indicheremo il valore dell'area del triangolo, preso col segno + o — secondo che un osservatore, il quale descriva il perimetro passando successivamente per i vertici P_1, P_2, P_3, lascia l'area a sinistra o a destra. Stabilendo le analoghe convenzioni per le altre permutazioni dei tre vertici, risultano le uguaglianze

$$P_1 P_2 P_3 = P_2 P_3 P_1 = P_3 P_1 P_2$$
$$= - P_1 P_3 P_2 = - P_2 P_1 P_3 = - P_3 P_2 P_1.$$

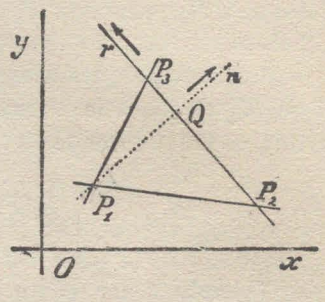
Risulta ancora che, se il vertice P_1 si muove, mentre P_2, P_3 restano fissi, l'area $P_1 P_2 P_3$ conserva il suo segno finchè P_1 rimane da una determinata banda della retta $P_2 P_3$, e cambia segno appena P_1 passa dalla banda opposta.

Condotta da uno dei vertici, ad es. da P_1, la perpendicolare $P_1 Q$ sul lato opposto $P_2 P_3$, è ora il caso di chiederci quali convenzioni si debbano rispettare perchè la nota formola esprimente l'area:

$$(1) \qquad P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} P_1 Q \cdot P_2 P_3,$$

valga anche nei segni. A tal fine cominciamo ad assumere, come verso positivo sul lato, quello che va da P_2 a P_3, di guisa che $P_2 P_3$ avrà un valore positivo; e come verso positivo sopra l'altezza $P_1 Q$, quello che si

porta a coincidere col verso positivo del lato corrispondente mediante la rotazione dell'angolo $+\frac{\pi}{2}$. Allora per un osservatore che percorra il lato $P_2 P_3$ nel verso positivo, il vertice P_1 e l'area restano da una stessa banda; quindi l'altezza $P_1 Q$ e l'area hanno lo stesso segno (positivo o negativo, secondo che quella banda è la sinistra o la destra), sicchè, nella nostra ipotesi, la (1) sussiste anche nel segno. Ma ciò si verifica pure, quando sul lato $P_2 P_3$, e quindi sull'altezza $P_1 Q$, si inverta il verso positivo, giacchè allora mutano segno i due fattori a secondo membro della (1), mentre il primo membro conserva il suo segno. Concludiamo che l'area di un triangolo è espressa, anche nel segno, dalla formola (1), purchè, comunque sia fissato il verso positivo sopra il lato, si assuma come positivo sull'altezza corrispondente quel verso che si porta a coincidere col primo verso mediante la rotazione di $+\frac{\pi}{2}$.



33. Espressione dell'area di un triangolo in funzione delle coordinate dei vertici. — Siano $P_1 (x_1, y_1)$, $P_2 (x_2, y_2)$, $P_3 (x_3, y_3)$ i tre vertici del triangolo. Partiamo dalla formola

$$P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} P_1 Q \cdot P_2 P_3, \tag{1}$$

e calcoliamo anzitutto la distanza $P_1 Q$. A tal fine scriviamo l'equazione della retta $P_2 P_3$ sotto la forma normale. Ora l'equazione generale della retta è (n. 16)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

ossia

$$x (y_2 - y_3) - y (x_2 - x_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) = 0.$$

Per ridurla a forma normale (n. 30) si deve dividere il primo membro per

$$\pm \sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_2 - x_3)^2}.$$

Ma questo radicale esprime la distanza $P_2 P_3$; dunque l'equazione normale di $P_2 P_3$ è

$$\frac{1}{\pm P_2 P_3} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

e la distanza di P_1 da questa retta vale (n. 31)

$$(4) \qquad P_1 Q = \frac{1}{\pm P_2 P_3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix};$$

Sostituendo questa espressione nella (1), e trascurando pel momento il segno, risulta che l'area del nostro triangolo è data, almeno in valore assoluto, dalla formola

$$(5) \qquad P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Volendo tener conto del segno, occorre esaminare il denominatore della (3) e decidere intorno al segno che deve essergli attribuito. Ma si perviene pure allo scopo, ricorrendo alla seguente considerazione. Supposti fissi P_2, P_3, si faccia variare P_1 (x_1, y_1). Allora nella (5) il primo membro conserva il suo segno finchè P_1 si trova da una stessa banda della retta $P_2 P_3$, e cambia segno quando P_1 passa dalla banda opposta (n. 32); lo stesso avviene del secondo membro, perchè il segno del determinante (2) dipende dalla banda in cui si trova il punto (x, y) rispetto alla retta $P_2 P_3$ (n. 31). Ripetendo osservazioni analoghe per i punti P_2 e P_3, segue che, comunque siano scelti i punti P_1, P_2, P_3, i segni dei due membri della (5) o sono sempre concordi, o sono sempre opposti. D'altronde, prendendo come vertici del triangolo i punti P_1 (0, 0), P_2 (1, 0), P_3 (0, 1), è facile vedere che primo e secondo membro della (5) sono positivi. Dunque la (5) vale anche nei segni.

In assi ortogonali, l'area del triangolo avente i vertici P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), P_3 (x_3, y_3) *è espressa, in valore e segno, da*

$$(5) \qquad P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se il determinante si annulla, i tre punti sono allineati. Si ritrova così la condizione già stabilita al n. 15.

In assi obliqui, l'area del triangolo è data (in valore e segno) dalla formola:

$$(5^*) \qquad P_1 P_2 P_3 = \frac{\operatorname{sen} xy}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizi. I. — 1) Nei triangoli definiti negli es. 5), 6) del n. 23 calcolare le lunghezze dei lati, i coseni degli angoli, le aree, le lunghezze delle altezze; scrivere le equazioni di queste e determinare le coordinate del loro punto d'incontro.

2) In generale, per il triangolo definito dai tre punti (x_i, y_i) o dalle tre rette $a_i x + b_i y + c_i = 0$, $(i = 1, 2, 3)$, scrivere le equazioni delle altezze, dimostrare che passano per uno stesso punto (*ortocentro*), e determinare le coordinate di questo.

3) Equazione della retta perpendicolare, nel punto di mezzo, al segmento (x_1, y_1), (x_2, y_2). Le perpendicolari ai tre lati di un triangolo nei loro punti medi passano per uno stesso punto (centro del cerchio circoscritto); calcolare le coordinate di esso per un triangolo generale, o per i triangoli nominati nell'es. 1).

4) Date due rette r, s uscenti da un punto, rimane determinata una terza retta t per il punto, quando sia noto il rapporto $\dfrac{\operatorname{sen} r\,t}{\operatorname{sen} s\,t} = k$ dei seni degli angoli, che la t forma con r, s (*rapporto semplice* delle tre rette r, s, t). Ora se $l = 0$, $m = 0$ sono le equazioni normali delle due prime rette, si dimostri che la terza retta è rappresentata da $l - km = 0$.

5) Date due rette mediante le loro equazioni normali o generali, scrivere le equazioni delle bisettrici degli angoli che esse formano; dimostrare analiticamente che le due bisettrici sono perpendicolari.

6) Date le equazioni normali dei tre lati di un triangolo, scrivere le equazioni delle bisettrici interne ed esterne. Dimostrare che: *a*) le bisettrici interne passano per uno stesso punto (centro del cerchio iscritto); *b*) due bisettrici esterne e la interna relativa al terzo vertice passano per uno stesso punto (centro di un cerchio ex-iscritto); *c*) le bisettrici esterne segnano i lati opposti in tre punti allineati; *d*) due bisettrici interne e la esterna relativa al terzo vertice segano i lati opposti in tre punti allineati. (Conviene supporre fissati i versi positivi sui lati in modo che seguendoli si possa descrivere il perimetro del triangolo).

7) Si calcolino le equazioni delle bisettrici e le coordinate delle loro intersezioni per uno dei triangoli nominati nell'es. 1).

8) In un triangolo l'ortocentro, il baricentro (punto comune alle mediane) e il centro del cerchio circoscritto sono allineati, e la distanza fra i due primi punti è doppia della distanza dei due ultimi (EULERO). (Conviene scegliere il baricentro come origine).

9) Se due triangoli $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$ sono così situati che le perpendicolari calate dai vertici A, B, C del primo sui lati $B'\,C'$, $C'\,A'$, $A'\,B'$ del secondo passino per uno stesso punto, anche le perpendicolari calate dai vertici A', B', C' del secondo sui lati $B\,C$, $C\,A$, $A\,B$ del primo passeranno per uno stesso punto; (si possono supporre date le coordinate dei sei vertici dei due triangoli o le equazioni dei sei lati).

II. — 10) L'espressione dell'area di un triangolo può anche ottenersi (in assi ortogonali od obliqui) osservando che se Q è il punto d'incontro di $P_1\,P_4$ con $P_2\,P_3$, si ha (anche nel segno)

$$\frac{P_1\,P_2\,P_3}{P_4\,P_2\,P_3} = \frac{P_1\,Q}{P_4\,Q}.$$

Esprimendo il rapporto semplice mediante le coordinate dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 (n. 23, es. 11), si troverà che il rapporto delle due aree è uguale al rapporto dei determinanti formati colle coordinate dei vertici e colle unità. Con passaggi

analoghi si viene ad esprimere il rapporto $\frac{P_1 P_2 P_3}{P_4 P_5 P_6}$ come quoziente di due determinanti; ora, se ai punti P_4, P_5, P_6, che sono arbitrari, si dànno particolari posizioni, per es. P_4 (0, 0), P_5 (1, 0), P_6 (0, 1), in guisa da poter calcolare direttamente l'area $P_4 P_5 P_6$, si ritrova la formula che dà l'area di $P_1 P_2 P_3$ (LUCAS).

11) Teorema di VARIGNON: Se $A B C D$ è un parallelogramma (A, C vertici opposti) ed M un punto qualsiasi del piano, sussiste, in valore e segno, la relazione fra aree triangolari:

$$M A C = M A B + M A D.$$

12) Dati in un piano n punti $P_i (x_i, y_i)$ (dove $i = 1, 2, \ldots n$), vertici di un n.gono comunque intrecciato, e detto $M (x, y)$ un ulteriore punto del piano, si dimostri che la somma algebrica di aree $M P_1 P_2 + M P_2 P_3 + \ldots + M P_n P_1$ è indipendente dalla posizione del punto M, e vale $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$, dove l'indice $n + 1$ va sostituito con 1. Per $n = 3$ quella somma ha per valore l'area del triangolo $P_1 P_2 P_3$; in generale, per n qualsiasi, se l'n.gono è convesso, quella somma esprime l'area dell'n.gono, come si verifica dalla figura assumendo M nell'interno di esso. Partendo da queste osservazioni, si assume in ogni caso il valore di quella somma come area dell'n.gono $P_1 P_2 \ldots P_n$. Si ha così il modo per definire l'area di un n.gono intrecciato, e in generale (mediante passaggio al limite) l'area limitata da un contorno chiuso curvilineo, comunque intrecciato. Come applicazione, si noti che, se $P_1 P_2 P_3 P_4$ è un quadrangolo semplice intrecciato, i cui lati $P_2 P_3$ e $P_4 P_1$ si seghino nel punto Q interno ad essi, l'area del quadrangolo è data dalla differenza tra i valori assoluti delle aree $Q P_1 P_2$ e $Q P_3 P_4$, presa con segno opportuno.

13) L'area dell'n.gono sopra nominato è espressa (in assi ortogonali) dalla formola di GAUSS: $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} y_i (x_{i-1} - x_{i+1})$, dove gli indici 0 ed $n + 1$ equivalgono agli indici n ed 1; in parole: «il doppio dell'area di un poligono è dato dalla somma dei prodotti dell'ordinata (od ascissa) di ciascun vertice per la differenza delle ascisse (o rispett. ordinate) dei due vertici contigui».

14) Un'altra espressione della stessa area è la seguente

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} (y_i + y_{i+1}) (x_i - x_{i+1}),$$

che ha una interpretazione geometrica semplice; «l'area di un poligono è data dalla somma delle aree dei trapezi aventi come basi le ordinate condotte dalle coppie di vertici consecutivi, ciascuna di queste aree essendo presa con segno conveniente».

15) Dimostrare che l'area del triangolo limitato dalle tre rette $a_i x + b_i y + c_i = 0$, ($i = 1, 2, 3$) è data (in assi ortogonali) da

$$\frac{1}{2 C_1 C_2 C_3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2,$$

dove C_1, C_2, C_3, sono i complementi algebrici di c_1, c_2, c_3.

III — 16) Se O è il baricentro di n punti A_i presi coi pesi p_i, $(i = 1, 2, \dots n)$ (n. 23, es. 9), ed è P un altro punto qualsiasi del piano, vale la relazione

$$\Sigma_i p_i \overline{PA_i}^2 = \Sigma_i p_i \overline{OA_i}^2 + \overline{OP}^2 \Sigma_i p_i.$$

17) Da questa può dedursi la relazione (cfr. n. 8, es. 15)

$$(\Sigma_i p_i)\,(\Sigma_i p_i \overline{OA_i}^2) = \Sigma_{ik} p_i p_k \overline{A_i A_k}^2,$$

e, nel caso di pesi uguali,

$$n\,\Sigma_i \overline{OA_i}^2 = \Sigma_{ik} \overline{A_i A_k}^2,$$

(la seconda somma essendo estesa a tutte le combinazioni binarie dei numeri $1, 2, \dots n$).

18) Segue dalle precedenti la relazione di LAGRANGE (cfr. n. 8, es. 16):

$$(\Sigma_i p_i)\,(\Sigma_i p_i \overline{PA_i}^2) - \overline{OP}^2\,(\Sigma_i p_i)^2 = \Sigma_{ik} p_i p_k \overline{A_i A_k}^2,$$

dove P è un punto arbitrario del piano.

IV. — 19) Una retta $ax + by + c = 0$ divide il piano in due regioni, a ciascuna delle quali corrisponde un determinato segno, cioè il segno che le coordinate di un punto di quella regione fanno assumere al primo membro della equazione scritta (n. 31). Ne viene che, se con ε si indica uno dei due segni $+$ o $-$, e con la relazione simbolica $ax + by + c = \varepsilon$ si indica la disuguaglianza che si ottiene sostituendo in essa al simbolo: $= \varepsilon$ il simbolo: > 0 o < 0 rispettivamente, la detta disuguaglianza sarà soddisfatta dalle coordinate di ogni punto di un semipiano.

20) Attribuendo ad ε' un significato analogo, si scrivano le due disuguaglianze $ax + by + c = \varepsilon$, $a'x + b'y + c' = \varepsilon'$. Le coppie di numeri (x, y), che le soddisfano insieme, rappresentano punti di una delle regioni limitate dalle rette $ax + \dots = 0$, $a'x + \dots = 0$. Se le due rette si segano, esse determinano quattro regioni, che corrispondono alle quattro scelte possibili per ε, ε'

$$(++,\ +-,\ -+,\ --).$$

21) Associando alle disuguaglianze precedenti una terza $a''x + b''y + c'' = \varepsilon''$, si possono ripetere considerazioni analoghe, coll'avvertenza però che, mentre tre rette dividono il piano in *sette* regioni al più, si ottengono *otto* sistemi di disuguaglianze disponendo in tutti i modi possibili dei segni ε, ε', ε''. Vi è dunque uno degli otto sistemi (ed in generale uno solo), che si compone di disuguaglianze incompatibili. Per decidere quale sia, si osservi che, se (x, y) è un punto interno al triangolo racchiuso dalle rette $ax + \dots = 0$, $a'x + \dots = 0$, $a''x + \dots = 0$, le sue coordinate attribuiscono ai primi membri i segni di $\frac{\Delta}{C}$, $\frac{\Delta}{C'}$, $\frac{\Delta}{C''}$, dove Δ è il determinante formato coi coefficienti e termini noti delle tre equazioni, e C, C', C'' sono i complementi algebrici dei termini noti. Ora, se si rappresentano con ε, ε', ε'' i segni opposti a quei tre, le tre disuguaglianze sono incompatibili (come è pur facile verificare direttamente).

22) Risolvere in numeri interi, valendosi della rappresentazione grafica, il sistema delle tre disuguaglianze $2x + y - 2 > 0$, $x - 3y + 3 > 0$, $4x - 3y - 15 < 0$.

Capitolo III.

Trasformazione delle coordinate. Punti e rette immaginarie.

34. Formole pel passaggio da un sistema cartesiano ad un nuovo sistema cartesiano. — Accade spesso che, dopo aver riferito una figura piana a due assi cartesiani x, y, si scorga la convenienza di assumere come nuovi assi cartesiani due certe rette X, Y del piano, legate in particolar modo a quella figura. Sorge allora il problema di stabilire tali relazioni fra le *antiche* coordinate (x, y) e le *nuove* (X, Y) di uno stesso punto, che permettano di esprimer le une coordinate mediante le altre.

Nel trattare questo problema (detto *della trasformazione delle coordinate*) distingueremo tre casi:

I. I nuovi assi X, Y sono paralleli agli antichi x, y.

II. Gli assi X, Y ed x, y hanno la stessa origine, ma direzioni diverse.

III. I nuovi assi sono in posizione affatto generale rispetto agli antichi.

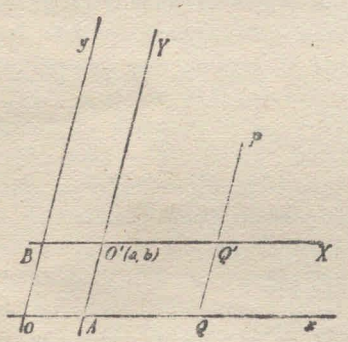
I. Caso. — Per assegnare la posizione dei nuovi assi rispetto agli antichi basterà dare le coordinate $OA = a$, $AO' = b$ della nuova origine O' riferita ad x, y.

Preso ora un punto P ad arbitrio, conduciamo per esso la parallela agli assi y ed Y, fino ad incontrare gli assi x ed X in Q e Q', rispettivamente; otteniamo così le antiche coordinate di P

$$OQ = x, \quad QP = y,$$

e le nuove

$$O'Q' = X, \quad Q'P = Y.$$



Ora si ha

$$OQ = OA + O'Q', \quad QP = AO' + Q'P,$$

ossia

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + X, \\ y = b + Y, \end{cases}$$

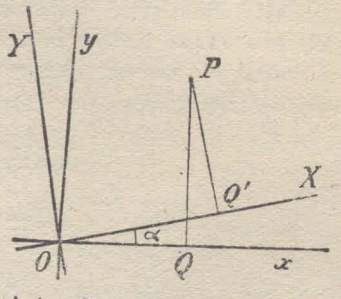
le quali danno le antiche coordinate mediante le nuove.

Le formole

$$X = x - a,$$
$$Y = y - b,$$

risolvono il problema inverso.

II. Caso. — Per ottenere formole più semplici e limitarci all'ipotesi che sola interviene nelle applicazioni, supporremo *ortogonali* entrambi i sistemi (*trasformazione ortogonale*), e precisamente supporremo che la coppia dei nuovi assi X, Y (anche tenuto conto dei versi positivi) provenga dalla coppia degli assi antichi x, y mediante la rotazione dell'angolo α intorno ad O.



Preso un punto P ad arbitrio, di cui siano $x = OQ$, $y = QP$ le antiche coordinate, e $X = OQ'$, $Y = Q'P$ le nuove, si osservi che le due spezzate OQP, $OQ'P$, cogli estremi comuni, avranno le stesse proiezioni ortogonali sopra una medesima retta r qualsiasi (n. 24); sarà dunque

$$(\alpha) \qquad x\cos xr + y\cos yr = X\cos Xr + Y\cos Yr.$$

Facendo ora coincidere successivamente r cogli assi x, y, e ricordando che

$$\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{xX} = \widehat{yY} = \alpha, \quad \widehat{xY} = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{Xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

si ottengono le formole

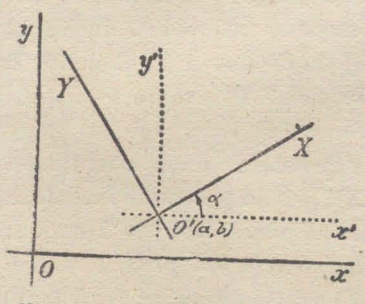
$$(2) \qquad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha, \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha. \end{cases}$$

Le (2) risolvono il problema.[1]

Le formole per il passaggio inverso si ricavano risolvendo le (2) rispetto ad X, Y, o (ciò che fa lo stesso) scambiando x con X, y con Y ed α con $-\alpha$.

III. Caso. — Siano ancora *ortogonali* i due sistemi, e precisamente si supponga che la nuova coppia XY provenga dall'antica xy mediante una traslazione, che porti l'origine O nel punto O' avente le antiche coordinate (a, b), e mediante una successiva rotazione dell'angolo α intorno ad O'.

Introduciamo un sistema di assi ausiliari x', y', paralleli ad x, y condotti per O', e indichiamo con x', y' le coordinate di P rispetto a questi nuovi assi (essendo al solito x, y ed X, Y le antiche e le nuove coordinate di P). Vediamo allora che il passaggio dalle x', y' alle X, Y si effettua mediante le formole (2), nei cui primi membri si scrivano x', y' in luogo di x, y. D'altra parte il passaggio dall'antico sistema al sistema ausiliare si effettua mediante le formole del tipo (1)



$$x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

[1] Se la nuova coppia XY provenisse dall'antica mediante una rotazione dell'angolo α intorno ad O ed un ribaltamento del piano intorno ad X (nel qual caso $\widehat{xX} = \alpha$, $\widehat{yY} = \alpha + \pi$), si dovrebbero adoperare, in luogo delle (2), le formole che derivano da queste col mutare il segno di Y.

Dunque, in fine,

$$(3)\qquad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha + a, \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha + b. \end{cases}$$

Se i due sistemi coordinati fossero obliqui, dopo aver scritto la formola (α) del *Caso II*, si farebbe coincidere successivamente la retta r con una perpendicolare ad y e con una perpendicolare ad x. Dal *Caso II* al *III* si passa colla considerazione suesposta. Si arriva in fine alle *formole generali*

$$(3^*)\qquad \begin{cases} x = X\dfrac{\operatorname{sen} Xy}{\operatorname{sen} xy} + Y\dfrac{\operatorname{sen} Yy}{\operatorname{sen} xy} + a, \\ y = X\dfrac{\operatorname{sen} Xx}{\operatorname{sen} yx} + Y\dfrac{\operatorname{sen} Yx}{\operatorname{sen} yx} + b. \end{cases}$$

35. Tipo generale delle formole per la trasformazione delle coordinate cartesiane. — In molte questioni non occorre tener conto dei valori dei coefficienti che entrano nelle formole (3) o (3*), basta ricordare l'aspetto di queste, e scriverle così:

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a + a'X + a''Y, \\ y = b + b'X + b''Y, \end{cases}$$

dove a, a', ... b'' sono sei costanti, che non dipendono dalla posizione del punto considerato. In parole: *le coordinate dell'un sistema si esprimono mediante funzioni lineari delle coordinate dell'altro sistema;* funzioni che inoltre sono omogenee ($a = b = 0$), quando le origini coincidono.

36. Movimento di una figura piana sopra il piano. — Delle formole che definiscono una trasformazione ortogonale di coordinate, si può dare una interpretazione notevole, relativa alla *geometria del movimento.*

Si supponga perciò che le due coppie di assi xy, XY siano tracciate su due fogli sovrapposti, ed in P si trovino due punti sovrapposti, aventi rispettivamente le coordinate (x, y), (X, Y) legate dalla (3). Se ora facciamo strisciare il primo foglio sopra il secondo immobile, finchè la coppia di assi xy viene a coincidere colla coppia di assi XY, il punto P del foglio mobile si porterà in una nuova posizione P' avente le coordinate x, y *rispetto agli assi fissi* X, Y.

Segue che (X, Y) ed (x, y) possono ora riguardarsi come coordinate, *rispetto ad un unico sistema cartesiano fisso* XY, della posizione iniziale P e finale P' di uno stesso punto appartenente al piano mobile. Dunque:

Se una figura piana, di forma invariabile, striscia sul proprio piano, tra le coordinate della posizione iniziale (X, Y) *e della posizione finale* (x, y) *di un punto qualsiasi della figura, riferite ad uno stesso sistema fisso di assi ortogonali, passano relazioni del tipo*

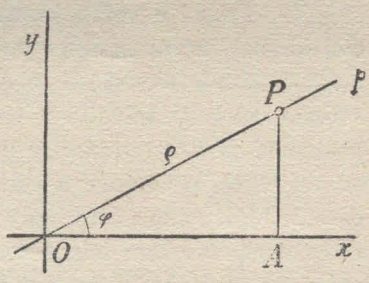
$$(3)\qquad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha + a, \\ y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha + b. \end{cases}$$

Se il movimento della figura è una traslazione, allora $\alpha = 0$, e le (3) si riducono alle formole (1) del *I Caso;* se è una rotazione intorno all'origine, allora $a = b = 0$, e si ottengono le formole (2) relative al *II Caso.*

Facendo astrazione dal movimento, si può anche dire, con linguaggio facilmente comprensibile, che le (3) stabiliscono le relazioni tra le coordinate (rispetto ad un unico sistema di assi) di due punti corrispondenti in due figure *direttamente uguali* di uno stesso piano.[1]

37. Coordinate polari. — Il problema della trasformazione delle coordinate comprende, in generale, quei procedimenti mediante i quali, date le coordinate di un punto in un sistema *qualsiasi* di coordinate (sia pure non cartesiano), si possono calcolare le coordinate del punto stesso in un altro sistema di coordinate. Sarebbe dunque il caso di parlare di sistemi di coordinate diversi dal cartesiano. Basterà definire, tra questi, un sistema, detto *sistema polare,* che viene talvolta adoperato, specialmente nelle matematiche applicate.

Nel piano si fissi un punto O, *polo*, ed una retta orientata, o semiretta, x passante per O, detta *asse polare.* Allora, dato un punto P, rimane determinata la distanza $OP = \rho$, *raggio vettore* del punto, e (a meno di multipli di 2π) l'angolo $\widehat{xp} = \varphi$, *anomalia* od *ascissa angolare*, che la semiretta positiva x forma colla semiretta p uscente da O e passante per P. Viceversa, quando siano noti i numeri ρ e φ, rimane individuato il punto P, come intersezione di un cerchio di centro O e raggio ρ (luogo dei punti che hanno il raggio vettore ρ costante) con una semiretta uscente da O (luogo dei punti che hanno costante l'anomalia φ). I due numeri ρ e φ si chiamano *coordinate polari* di P.



Per avere tutti i punti del piano, basta far variare φ da 0 a 2π, e il raggio vettore ρ tra 0 e $+\infty$; oppure, come talvolta è preferibile, φ da 0 a π, e ρ da $-\infty$ a $+\infty$, convenendo allora che i raggi vettori negativi siano da valutarsi sulla semiretta opposta a quella che forma l'anomalia φ con x.

[1] Se al movimento sopra considerato si fa seguire il ribaltamento del piano mobile intorno ad una retta del piano fisso, finchè quello si adagi nuovamente su questo, si dovrà nelle (3) cambiare il segno di Y. Le nuove formule definiscono l'*uguaglianza inversa* sul piano.

Si noterà inoltre che i punti della semiretta positiva x hanno $\varphi = 0$, $\varrho > 0$; quelli della semiretta negativa hanno $\varphi = \pi$, $\varrho > 0$, (oppure $\varphi = 0$, $\varrho < 0$); il polo ha $\varrho = 0$, φ indeterminata.

Le formole per passare dal sistema polare al cartesiano si ottengono subito nel caso che uno, x, degli assi cartesiani coincida coll'asse polare, e l'altro, y, gli sia perpendicolare nel polo. Infatti dall'esame del triangolo rettangolo OAP, i cui cateti $OA = x$, $AP = y$ dànno le coordinate cartesiane di P, mentre l'ipotenusa $OP = \varrho$ e l'angolo $A\widehat{O}P = \varphi$ dànno le coordinate polari, risulta

$$x = \varrho \cos \varphi, \qquad y = \varrho \operatorname{sen} \varphi; \tag{1}$$

donde si ricavano le formole inverse

$$\left\{ \begin{array}{c} \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y}{x}. \end{array} \right. \tag{2}$$

Se poi il sistema cartesiano non si trovasse nella particolare posizione ora considerata, basterà introdurre un sistema cartesiano ausiliare, che sia legato al sistema polare dalla relazione suddetta.

38. Punti e rette immaginarie. — Nel Capitolo seguente dovremo considerare, accanto alle equazioni lineari rappresentanti rette, anche equazioni di grado superiore; e dalla risoluzione dei sistemi di tali equazioni saremo condotti talvolta a trovare per x e y valori immaginari. Così il problema di determinare le coordinate dei punti comuni ad una retta e ad un cerchio conduce a soluzioni immaginarie se la retta è esterna al cerchio. Potremmo dire, col linguaggio della geometria elementare, che retta e cerchio non hanno nessun punto comune. Ma un tal linguaggio presenta qualche inconveniente, e non permette, ad es., di enunciare semplicemente la relazione notevole di due cerchi e di una retta situati in modo che le coordinate dei punti comuni al primo cerchio e alla retta, pur essendo immaginarie, coincidano con le coordinate dei punti comuni al secondo cerchio ed alla retta. La figura, cui qui si accenna, ha la più stretta analogia con quella composta di due cerchi secanti una retta negli stessi due punti: ma il linguaggio sin qui usato non mette in rilievo tale analogia. Si riesce ad evitare questi inconvenienti, ricorrendo alla considerazione che segue.

Notiamo a tal fine che, fissato nel piano un sistema di coordinate, ad es. cartesiane x, y, la Geometria analitica permette di sostituire alle relazioni geometriche fra i punti del piano, le relazioni analitiche fra le coppie di numeri (x, y), relazioni che, in generale, varranno per numeri reali o complessi. Volendo interpretare, in tutta la loro estensione, i ri-

sultati analitici col linguaggio geometrico, noi converremo di chiamare *punto* (x, y) ogni coppia di numeri x, y, reali o complessi. Osserveremo però che, se x ed y sono ambedue reali, il punto nominato (punto *reale*) ha una effettiva rappresentazione geometrica nel modo noto; se invece x ed y (od uno dei due numeri) sono complessi, nella quale ipotesi il punto si dice *immaginario*, la rappresentazione geometrica manca, almeno finchè non si introduca qualche ulteriore convenzione.

Converremo di estendere ai punti immaginari le formole dimostrate nel caso di punti reali (condizione di allineamento, equazioni di rette, formole di distanze...). E talvolta accadrà che, pur operando sopra punti immaginari, queste formole ci conducano ad enti reali. Ciò succede, ad es., quando si operi simmetricamente sopra due punti *immaginari coniugati*, tali cioè che le coordinate dell'uno siano, rispettivamente, complesse coniugate alle coordinate dell'altro; come sarebbero i due punti

$$P' \ (x' = a + bi, \quad y' = \alpha + \beta i),$$
$$P'' \ (x'' = a - bi, \quad y'' = \alpha - \beta i),$$

$(a, b, \alpha, \beta$ reali, $i = \sqrt{-1})$. Così si scorge subito che è reale il punto medio tra P', P'', il quale ha le coordinate

$$\frac{x' + x''}{2} = a, \quad \frac{y' + y''}{2} = \alpha.$$

È reale la retta congiungente due punti immaginari coniugati; giacchè ha per equazione

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a + bi & \alpha + \beta i & 1 \\ a - bi & \alpha - \beta i & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

la quale (se all'ultima orizzontale si aggiunge la seconda, si divide la nuova orizzontale per 2, la si toglie dalla precedente, e finalmente si sopprime il fattore i) può scriversi sotto la forma

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ b & \beta & 0 \\ a & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dove l'unità immaginaria non entra più.

Quindi: *Ogni punto immaginario sta sopra una (ed una sola) retta reale*, la retta che lo congiunge col suo coniugato.

Una equazione lineare in coordinate cartesiane x, y rappresenta una retta; se nei coefficienti entra l'unità immaginaria, in guisa che essa non possa esser eliminata, diremo che si tratta di una *retta immaginaria*. Ed alle rette immaginarie estenderemo le formule di geometria analitica valide

per rette reali.[1] Due rette immaginarie si dicono *coniugate,* se i coefficienti omologhi delle equazioni di quelle sono numeri complessi coniugati. Il lettore dimostrerà facilmente che *è reale il punto d' incontro di due rette immaginarie coniugate,* o, in altre parole: *sopra ogni retta immaginaria sta un (unico) punto reale,* intersezione della retta colla sua coniugata.

Le considerazioni precedenti si riferiscono ad un unico sistema di coordinate x, y. Se si introduce un nuovo sistema di coordinate X, Y, e si applicano le formole di trasformazione ad un punto immaginario (x, y), si troveranno per X, Y valori immaginari, che si diranno, per convenzione, coordinate dello stesso punto riferito al nuovo sistema di assi. Cose analoghe si ripetono per le equazioni di rette immaginarie.

39. Rette isotrope.[2] — Per fare un'applicazione, della quale solo in seguito apparirà l'interesse geometrico, consideriamo le due rette immaginarie coniugate

$$x + iy = 0, \quad x - iy = 0 \tag{1}$$

passanti per l'origine O di un sistema cartesiano *ortogonale*; le due rette si chiamano *rette isotrope,* o *direzioni assolute,* uscenti da O. Esse presentano questa proprietà che è sufficiente per caratterizzarle: se si eseguisce una trasformazione ortogonale di coordinate che lasci ferma l'origine, le (1) si mutano in due equazioni che hanno precisamente la stessa forma:

$$X + iY = 0, \quad X - iY = 0. \tag{1'}$$

Infatti la prima delle (1), ad es., mediante la sostituzione (2) del n. 34, diviene

$$(X \cos \alpha - Y \operatorname{sen} \alpha) + i\,(X \operatorname{sen} \alpha + Y \cos \alpha) = 0,$$

ossia

$$X(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) + iY(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = 0,$$

donde, mediante soppressione di un fattore non nullo, si ricava la prima delle (1'). D'altra parte, se la stessa sostituzione (con α diverso da un multiplo di π) si applica ad una qualsiasi equazione di primo grado in x, y, diversa dalle (1), si ottiene una nuova equazione in X, Y, i cui coefficienti non sono mai uguali nè proporzionali ai coefficienti dell'equazione primitiva; lasciamo al lettore la facile verifica. Si è condotti perciò a dire che le rette isotrope uscenti dall'origine sono le sole rette, le cui equazioni siano *invarianti* rispetto ad una trasformazione ortogonale di coordinate che lasci ferma l'origine.

---

[1] S'intende che per il seno, coseno .. di un angolo immaginario α dovranno adottarsi le definizioni fornite dall'Analisi mediante serie di potenze intere e positive di α.

[2] Questa nozione interviene soltanto nel Cap. III della Parte III e nei successivi; il lettore può omettere per ora il n. 39.

Ma un enunciato più notevole si ottiene ove si tenga conto della seconda interpretazione (n. 36) delle formole per la trasformazione ortogonale. Risulta infatti dal n. 36 che due equazioni, come le

$$X + iY = 0, \quad x + iy = 0,$$

le quali derivino l'una dall'altra mediante la sostituzione ora eseguita, possono riguardarsi come equazioni, *riferite ad un unico sistema fisso di assi* X, Y, della posizione iniziale e della posizione finale di una retta appartenente ad un piano che ruoti intorno ad O. Ma le due equazioni rappresentano una *stessa* retta, perchè è unico il sistema di assi di riferimento; dunque:

Quando un piano ruota di un angolo arbitrario intorno ad un suo punto, due rette immaginarie uscenti dal punto restano fisse, le rette isotrope; nessun'altra retta del piano gode questa proprietà, se l'angolo è diverso da un multiplo di π.

Da ogni punto $O'(x', y')$ del piano escono due rette isotrope che, rispetto agli assi x, y, hanno le equazioni

$$(2) \qquad x - x' \pm i(y - y') = 0.$$

Infatti le (2) assumono il tipo (1), quando si eseguisca una traslazione di assi che porti la nuova origine in O'.

Sul piano esistono infinite rette isotrope, che si distribuiscono in due fasci impropri

$$x + iy + \lambda = 0, \quad x - iy + \mu = 0,$$

(dove λ e μ sono due parametri) contraddistinti dai valori i e $-i$ dei rapporti direttivi. Uno scorrimento del piano sopra sè stesso trasporta ogni retta isotropa di uno dei due fasci, in una retta isotropa del fascio stesso. Invece un ribaltamento del piano scambia tra loro i due fasci.

Esercizi. I. — 1) Come si presentano le formule per la trasformazione delle coordinate quando i nuovi assi X, Y sono le bisettrici degli angoli degli assi antichi (ortogonali od obliqui)?

2) Scrivere direttamente le formule che permettono di passare da due assi x, y a due nuovi assi X, Y rappresentati, nell'antico sistema, dalle equazioni

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0.$$

3) Il determinante formato coi coefficienti di X, Y nelle (3*) del n. 34 vale $\dfrac{\operatorname{sen} XY}{\operatorname{sen} xy}$.

4) Si dimostri, sia mediante considerazioni geometriche, sia mediante l'effettivo calcolo, che una trasformazione di coordinate, la quale non alteri l'origine, muta il trinomio $x^2 + 2xy\cos xy + y^2$ nel trinomio $X^2 + 2XY\cos XY + Y^2$, essendo (x, y) ed (X, Y) le antiche e le nuove coordinate di uno stesso punto; caso particolare della trasformazione ortogonale.

5) Nelle ipotesi dell'es. 4), dette (x', y'), (X', Y') le antiche e le nuove coordinate di un secondo punto, si dimostri che la espressione $(xy' - x'y)$ sen xy si muta nella espressione $(XY' - X'Y)$ sen XY.

6) Se si moltiplica il determinante del terzo ordine, formato colle coordinate di tre punti e colle unità, per il seno dell'angolo degli assi, si ottiene una espressione la quale, per una *qualsiasi* trasformazione di coordinate cartesiane, si muta nell'analoga espressione relativa ai nuovi assi. Da questa osservazione, che si giustifica col calcolo diretto, si deduca una nuova dimostrazione della formola che dà l'area di un triangolo mediante le coordinate dei vertici, n. 33, (5*). (Si assumano come assi ausiliari due lati del triangolo).

7) Posto $z = x + iy$, $Z = X + iY$ (dove $i = \sqrt{-1}$), le formole (3) del n. 34, per il passaggio da assi ortogonali ad assi ortogonali, si riassumono nella seguente: $z = mZ + n$, dove m, n sono due numeri complessi, il primo dei quali ha per modulo l'unità.

II. — 8) In uno scorrimento di un piano sopra sè stesso (n. 36) esiste un punto, ed uno solo (*centro di rotazione*), la cui posizione finale coincide colla posizione iniziale; facendo ruotare il piano di un angolo conveniente intorno al detto centro, si può portare il piano dalla posizione iniziale alla posizione finale. Il centro non esiste, solo quando si possa passare dalla posizione iniziale alla finale mediante una tralazione.

9) Il risultato precedente può anche presentarsi così:

Se $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ sono due figure piane direttamente uguali, le rette perpendicolari ai segmenti AA', BB', CC', ..., nei rispettivi punti medi, passano per un medesimo punto O, oppure sono tutte parallele. Nel primo caso, facendo ruotare intorno ad O di un angolo conveniente la prima figura, essa viene a sovrapporsi alla seconda; nel secondo caso lo stesso effetto si ottiene mediante una conveniente traslazione.

10) Se due figure piane $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, o (come si suol dire) i rispettivi piani sono inversamente uguali, non esiste in generale nessun punto del primo piano che coincida col corrispondente punto del secondo, ma esiste sempre una retta del primo piano che coincide colla retta corrispondente del secondo. Per ottenere la sovrapposizione della prima figura colla seconda basta applicare a quella una traslazione di un segmento conveniente (che può anche essere nullo) parallelamente alla retta, ed un ribaltamento intorno a questa. La retta contiene i punti medi di tutti i segmenti AA', BB', CC', ...

III. — 11) Esprimere la distanza di due punti, e l'area del triangolo determinato da tre punti, mediante le coordinate polari dei punti stessi. Condizione di allineamento di tre punti in coordinate polari.

12) L'equazione di una retta in coordinate polari (ρ, φ) può porsi sotto la forma

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = p,$$

dove α e p sono due costanti; quali grandezze geometriche misurano?

IV. — 13) Per il punto reale di coordinate cartesiane ortogonali a, b passa una retta isotropa del primo fascio (rapporto direttivo $+i$), la quale sega l'asse x nel punto immaginario di ascissa $a + bi$; viceversa, la retta isotropa del primo fascio che esce da quest'ultimo punto contiene. come unico punto reale, il punto

(a, b). Viene così a stabilirsi una corrispondenza biunivoca fra i numeri complessi $a + bi$ ed i punti reali (a, b) di un piano, che coincide colla nota rappresentazione di GAUSS. Come si presenterebbe la corrispondenza se si adoperassero le rette isotrope del secondo fascio?

14) Due punti di una retta isotropa hanno sempre distanza nulla; tali rette chiamansi perciò anche *rette di lunghezza nulla.*

15) L'angolo formato da una retta isotropa con sè stessa è indeterminato. $\left(\text{Si trova infatti per il coseno ed il seno del detto angolo l'espressione } \frac{0}{0}\right)$.

16) L'angolo formato da una retta isotropa con una qualsiasi altra retta del piano è infinito. (Si trovano per il coseno ed il seno espressioni del tipo $\frac{m}{0}$ con $m \neq 0$, le quali non corrispondono a nessun angolo finito, nè reale, nè immaginario).

17) La distanza di un punto qualsiasi da una retta isotropa, che non passi per esso, è infinita.

18) Si dimostri, mediante una trasformazione di coordinate, che le rette isotrope uscenti dall'origine, in assi obliqui, hanno le equazioni

$$x + y\,(\cos xy \pm i \operatorname{sen} xy) = 0.$$

CAPITOLO IV.

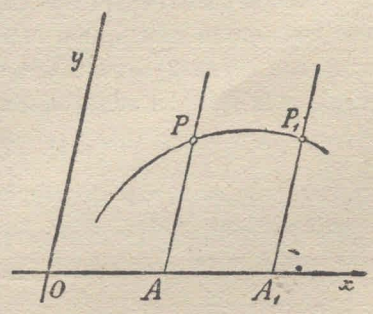
Rappresentazione analitica delle curve piane.

40. Equazione di una curva piana. — Il problema fondamentale della Geometria analitica consiste nel rappresentare i luoghi geometrici (curve, superficie...) mediante equazioni a più variabili, e nel dedurre le proprietà di quelli dalle proprietà delle equazioni corrispondenti.

Noi faremo vedere anzitutto come ad una equazione fra due variabili x, y si possa associare una linea piana. Cominciamo a supporre che la equazione sia risolta rispetto ad una delle variabili, ed abbia il tipo

(1) $\quad y = f(x), \quad$ ossia $\quad y - f(x) = 0,$

dove f indica una qualsiasi funzione. Fissato un sistema qualunque di coordinate, per es. cartesiane, consideriamo quei punti le cui coordinate soddisfano alla equazione (1). Per costruirne uno si attribuirà ad x un particolare valore a, e si determinerà il valore corrispondente di y, che si suole indicare con $f(a)$; poi si segnerà quel punto P che ha l'ascissa a e l'ordinata $f(a)$. Attribuendo ad x un nuovo valore a_1, e determinando



$y = f(a_1)$, si avrà un nuovo punto P_1; e così si troveranno quanti altri punti si vogliano. Tutti i punti che in tal guisa possono costruirsi formano un luogo geometrico, *il luogo di quei punti che colle loro coordinate soddisfano all'equazione* (1); la (1) è *l'equazione* del nominato luogo, *rappresenta analiticamente* il luogo (mentre *il luogo* rappresenta geometricamente la equazione (1)).

Qui si badi che gl'infiniti punti del luogo possono formare una o più linee (nel senso intuitivo della parola *linea*); ma possono anche, in altri casi, giacere sparsi nel piano, in guisa che non riesca possibile di ordinarli lungo curve.[1] Affinchè il primo caso si presenti è necessario che si verifichino alcune condizioni, delle quali basterà qui ricordare la più semplice ed evidente. Occorre dunque che, mentre il punto A varia con continuità sull'asse x, o almeno in un certo tratto di questo, il corrispondente valore dell'ordinata AP vari, esso pure, con continuità; in termini precisi: la y deve esser funzione continua della x, per tutti i valori di x compresi fra certi limiti. D'altronde questa e le analoghe condizioni saranno sempre soddisfatte in tutti i casi che avremo da considerare. Potremo dire adunque, in quei casi, che *la* (1) *rappresenta una curva*, è la *equazione di una curva*.

Viceversa, segnata nel piano degli assi cartesiani x, y una curva arbitraria (convenientemente limitata), rimane stabilita una dipendenza tra x ed y, per la quale ad ogni valore di x compreso in un certo intervallo corrisponde un valore di y, ordinata del punto della curva avente quell'ascissa x; rimane dunque definita y come funzione di x. La relazione $y = f(x)$, a cui così si arriva, è la equazione della curva.

L'equazione (1) a due variabili è una forma particolare della equazione

$$f(x, y) = 0, \tag{2}$$

dove, questa volta, f è simbolo di funzione di due variabili. Anche la (2) rappresenta un luogo geometrico, *il luogo di quei punti che con le loro coordinate x, y verificano l'equazione stessa*.[2]

Volendo costruire questo luogo *per punti*, nella ipotesi ad es. che x, y siano coordinate cartesiane, attribuiremo ad x un primo valore arbitrario $x = a$; con ciò la (2) diviene una equazione ad una sola incognita $f(a, y) = 0$, equazione la quale, risolta, ci darà per y certi valori $y = b, b', b''$... I punti

$$P(a, b), \quad P'(a, b'), \quad P''(a, b'')...$$

appartengono al luogo. Attribuendo ad x un nuovo valore a_1, e calcolando i corrispondenti valori di y, troveremo nuovi punti del luogo; e così si potrà continuare.

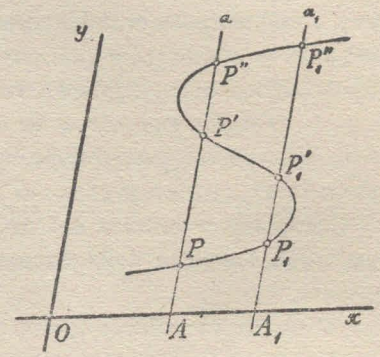
---

[1] Ciò accadrebbe, ad es., se la funzione fosse definita dalle condizioni seguenti: per ogni valore razionale di x, è $y = 0$; per ogni valore irrazionale di x, è $y = 1$.

[2] Si pensi al caso particolare delle equazioni lineari, cui corrispondono rette (n. 16 e seg.).

Nei casi che avremo da trattare quei punti si susseguiranno lungo una o più curve, che sono definite dalla equazione (2).

Inversamente, data nel piano una curva, le coordinate x, y di un punto che la descriva saranno legate da una certa relazione, che potrà scriversi simbolicamente sotto la forma (2), e si dirà *equazione della curva*.



Osservazione. — Di questa rappresentazione geometrica delle funzioni (o delle equazioni (1)) si approfitta continuamente nelle scienze di osservazione, dove talvolta si costruiscono curve (*diagrammi*) per presentare in modo sensibile i risultati di una serie di osservazioni; talvolta invece la curva vien tracciata direttamente, ad es. mediante strumenti registratori, e da quella si cerca di dedurre la funzione.

D'altra parte la detta rappresentazione geometrica mette in rilievo le particolarità più notevoli della funzione $f(x)$ (intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente, massimi o minimi,...) con un'approssimazione che, in certe questioni pratiche, può essere più che sufficiente. I punti in cui la curva (1) sega l'asse delle x forniscono i valori di x per cui $f(x)$ si annulla, cioè le radici (reali) dell'equazione $f(x) = 0$. Si ha così un metodo grafico per la risoluzione di un'equazione ad una incognita, che è adoperato molto spesso nelle applicazioni della matematica.

La rappresentazione delle curve mediante equazioni fu introdotta contemporaneamente da Des Cartes (1637) e Fermat. La distinzione delle curve in *algebriche* e *trascendenti* (n. 43) è dovuta a Des Cartes e Leibniz, mentre la classificazione delle curve algebriche secondo l'ordine fu proposta da Newton (1676).

41. Intersezioni di due curve. — Se

$$3) \qquad f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0$$

sono le equazioni di due curve, riferite ad uno stesso sistema di coordinate, la ricerca dei punti di incontro di quelle si riduce alla ricerca delle coppie di valori (x, y) che soddisfano insieme alle equazioni (3); queste coppie si ottengono *risolvendo il sistema* (3) *rispetto alle incognite* x, y. Possiamo dire che il sistema (3) rappresenta il gruppo delle nominate intersezioni, gruppo che potrà comporsi, secondo i casi, di un numero finito o infinito di punti.

42. Studio di una curva piana partendo dalla sua equazione. — Riprendiamo in esame una sola curva e la sua equazione in un determi-

nato sistema di coordinate. La stretta connessione che passa fra curva ed equazione dà luogo ad una serie di problemi fondamentali, che possono distribuirsi nei due gruppi seguenti.

I. *Definire e studiare le curve partendo dalle equazioni rappresentative;* classificare le curve secondo la natura delle equazioni, dedurre da queste la forma, le principali proprietà delle curve corrispondenti, assegnare possibilmente una semplice costruzione della curva.

II. *Definita una curva mediante una costruzione geometrica (o meccanica), o mediante una proprietà di quella, scrivere la equazione rappresentativa in un sistema prefisso di coordinate.*

Occupiamoci intanto del primo problema. E notiamo anzitutto che, in certi casi, l'aspetto della equazione lascia subito vedere come la curva sia formata.

Così, in coordinate cartesiane, *una equazione che contenga una sola coordinata variabile rappresenta un gruppo di rette parallele ad uno degli assi.* Ad es., data la equazioue

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

e posto che essa sia soddisfatta da certi valori di x

$$x = a,\ a', \ldots,$$

è chiaro che i punti soddisfacenti colle loro coordinate alla (1) appartengono alle rette $x = a$, $x = a', \ldots$, sicchè queste rette, parallele all'asse y, compongono la linea rappresentata dalla (1).

Se la equazione data contiene le due coordinate x, y, omogeneamente, di guisa che (fatta astrazione eventualmente dalla soluzione $y = 0$, di cui è evidente il significato geometrico) possa assumersi come unica incognita il rapporto $\frac{x}{y}$, e l'equazione possa scriversi

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \tag{2}$$

la linea corrispondente è costituita da un gruppo di rette uscenti dall'origine, aventi le equazioni

$$\frac{x}{y} = k, \qquad \frac{x}{y} = k', \qquad \frac{x}{y} = k'', \ldots,$$

dove k, k', k''... sono le radici della (2).

43. Curve algebriche; ordine della curva. — Le curve piane si sogliono classificare in relazione alle equazioni che le rappresentano in *coordinate cartesiane.*[1] Se la equazione della curva è algebrica, e quindi può

[1] È necessario ricordare che la classificazione muterebbe, quando la curva si riferisse a coordinate non cartesiane.

porsi sotto forma razionale intera (un polinomio contenente le potenze intere e positive di x, y, uguagliato a zero), la curva dicesi *algebrica*; altrimenti dicesi *trascendente*. Trascendenti, ad es., sono le curve $y = \text{sen } x$ (*sinusoide*), $y = \text{tg } x$, $y = \log x$, ecc.

Noi ci dovremo occupare in special modo di curve algebriche. Queste possono classificarsi ulteriormente secondo il *grado* della equazione (cioè del polinomio sopra nominato), grado a cui si dà il nome di *ordine* della curva corrispondente.

Una curva algebrica d'ordine n ha dunque una equazione del tipo

$$\Sigma_{rs} C_{rs} x^r y^s = 0, \qquad (r + s \leqq n) \tag{1}$$

dove C_{rs} è un coefficiente, r ed s sono numeri interi non negativi la cui somma raggiunge, come massimo valore, n.

Le curve, o linee, algebriche del primo ordine sono le *rette*. Fra le curve del secondo ordine troveremo il cerchio, insieme alle sue proiezioni sopra piani.

Una curva d'ordine $n > 1$ può esser anche costituita da due o più curve algebriche di ordini inferiori, la somma dei quali sia n. Ad es., se $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sono due polinomi, i cui gradi μ, ν abbiano per somma n, l'equazione

$$\varphi(x, y) \cdot \psi(x, y) = 0$$

rappresenta una curva d'ordine n, la quale è composta delle (o si spezza nelle) due curve algebriche di ordine μ, ν

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0.$$

In particolare può darsi che una curva d'ordine n si componga di n rette; ed inversamente, l'insieme di n rette deve riguardarsi come una speciale curva d'ordine n.

44. Invariabilità dell'ordine di una curva algebrica in una trasformazione di coordinate. — Per giustificare la definizione di *ordine* di una curva algebrica occorre dimostrare che l'ordine è un *carattere* della curva, indipendente dal particolare sistema di coordinate cartesiane a cui la curva vien riferita; ossia che il grado della equazione cartesiana rappresentante la curva, riferita a certi assi x, y, non varia quando la stessa curva si riferisca a due nuovi assi X, Y.

Sia

$$\Sigma_{rs} C_{rs} x^r y^s = 0 \qquad (r + s \leqq n) \tag{1}$$

una equazione di grado n, rappresentante una certa curva riferita agli assi x, y. Per aver l'equazione della stessa curva riferita a due nuovi assi

X, Y, dobbiamo tener conto delle formole per la trasformazione delle coordinate (n. 35)

$$(2) \qquad x = a + a' X + a'' Y, \qquad y = b + b' X + b'' Y,$$

dove $a, \ldots, b''$ sono sei costanti. Fatte le sostituzioni (2) nella (1), questa diviene

$$(3) \qquad \Sigma_{rs} C_{rs} (a + a' X + a'' Y)^r \, (b + b' X + b'' Y)^s = 0 \qquad (r + s \leqq n).$$

Ora il termine della sommatoria che è posto in evidenza si sviluppa in un polinomio di grado $r + s \leqq n$ in X, Y; riunendolo cogli altri polinomi analoghi provenienti dagli altri valori di r, s, risulta in fine che il primo membro della (3) si riduce ad un polinomio in X, Y di grado n' *non superiore* ad n. E con ciò è provato che una trasformazione di coordinate non può aumentare il grado di una equazione algebrica (razionale, intera). Ma non può nemmeno diminuirlo, perchè altrimenti la trasformazione inversa, che permette di passare dalle coordinate X, Y alle x, y e quindi dalla (3) alla (1), dovrebbe mutare il grado n' di quella nel grado $n > n'$ di questa, mentre l'aumento del grado fu dimostrato impossibile. Si conclude che $n = n'$.

45. Significato geometrico dell'ordine di una curva. — Che l'ordine di una curva sia un carattere di questa, indipendente dagli assi coordinati a cui la curva è riferita, risulta pur dal seguente teorema che ne mette in luce il significato geometrico:

L'ordine di una curva algebrica è il numero dei punti in cui questa è segata da una retta generica del suo piano, purchè si tenga conto delle intersezioni immaginarie, coincidenti...

Infatti per avere le intersezioni della curva dell'ordine n

$$(1) \qquad \Sigma_{rs} C_{rs} x^r y^s = 0 \qquad (r + s \leqq n)$$

colla retta

$$(2) \qquad y = mx + p,$$

basta sostituire nella (1), ad y, il valore dato dalla (2); si ottiene così l'equazione

$$\Sigma_{rs} C_{rs} x^r (mx + p)^s = 0, \qquad (r + s \leqq n)$$

la quale è di grado n nella x (almeno quando si escludano particolari valori di m). Risolvendo questa equazione, si ottengono n valori di x,

$$x_1, \; x_2, \ldots, \; x_n$$

(fra reali, immaginari, coincidenti...), ai quali corrispondono, per la (2), n valori di y

$$y_2, \; y_1, \ldots, \; y_n.$$

Si hanno dunque n intersezioni (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n), come si era affermato. Un esame particolareggiato dei casi che possono presentarsi sarà fatto in seguito nella ipotesi $n = 2$.

46. Simmetria di una curva rispetto agli assi o rispetto all'origine. — Il primo problema enunciato al n. 42 comprende anche la discussione della forma di una curva di cui sia data l'equazione

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

ad es. in coordinate cartesiane ortogonali. Però la Geometria analitica, senza il sussidio del calcolo infinitesimale, non dispone di metodi generali in proposito. Faremo vedere nel Cap. seguente come convenga procedere in casi concreti assegnati, limitandoci qui a poche osservazioni evidenti.

Se il primo membro della (1) *non si altera quando si cambi il segno alla y (o alla x), la curva* (1) *è simmetrica rispetto all'asse delle x (o delle y).* Infatti nella prima ipotesi, se il punto (x, y) soddisfa colle sue coordinate alla (1), vi soddisferà pure il punto $(x, -y)$, simmetrico di quello rispetto all'asse x.

Se il primo membro della (1) *non si altera (o cambia solo di segno), quando si mutino contemporaneamente i segni ad x e y, la curva* (1) *è simmetrica rispetto all'origine.* Infatti, se il punto (x, y) appartiene alla curva (1), vi apparterrà pure il punto $(-x, -y)$, simmetrico del primo rispetto all'origine. In particolare, se $f(x, y) = -f(-x, -y)$, l'origine stessa sta sulla curva, giacchè, sostituendo nell'ultima uguaglianza 0 al posto di x ed y, si ha $f(0, 0) = -f(0, 0)$ donde $f(0, 0) = 0$.[1]

Per una curva algebrica le proposizioni precedenti divengono:

Una curva algebrica è simmetrica rispetto all'asse x (o y) se la coordinata y (od x) entra nell'equazione solo con esponenti pari.

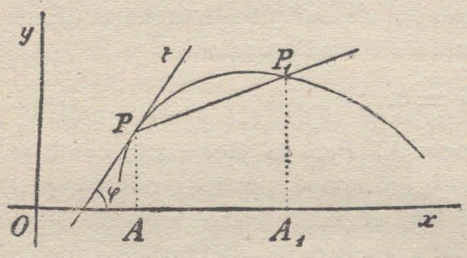
Una curva algebrica è simmetrica rispetto all'origine se tutti i termini dell'equazione hanno grado pari, o tutti grado dispari (nell'ultimo caso la origine sta sulla curva).

47. Tangente ad una curva in un punto. — Per il tracciamento di una curva di data equazione è spesso utile la determinazione della tangente in un punto generico della curva. Sebbene il *problema delle tangenti* esca dai limiti della Geometria analitica elementare, come viene intesa tra noi, non possiamo esimerci dall'accennare ad una questione che anche sto-

[1] Il secondo teorema vale pure per assi obliqui, mentre il primo continua a sussistere soltanto se per simmetria (obliqua) si intenda una corrispondenza, ove i segmenti congiungenti punti omologhi risultano paralleli ad y, e sono divisi per metà dall'asse x.

ricamente costituisce il nesso tra la nostra scienza ed il Calcolo infinitesimale.

Consideriamo un arco di curva, che supporremo descritta da un punto moventesi con continuità. Fissiamo un punto P sulla curva e congiungiamolo con un secondo punto P_1 della curva, che faremo poi scorrere lungo la curva stessa. Se accade che, mentre il punto P_1 si avvicina indefinitamente al punto P (da una banda o dall'altra), la retta mobile PP_1 abbia per limite una retta determinata t uscente da P, si dice che t è la *tangente della curva in P*. Per una classe estesissima di curve (ad es. per tutte quelle che avremo da considerare in seguito) in ogni punto generico P esiste una determinata tangente.



Vediamo ora l'interpretazione analitica di questo concetto. Partiamo dall'equazione della curva

$$y = f(x) \tag{1}$$

in coordinate cartesiane. Siano x_0 ed $y_0 = f(x_0)$ le coordinate del punto fisso P, x_1 ed $y_1 = f(x_1)$ le coordinate del punto mobile P_1. La equazione della retta PP_1 potrà scriversi così (n. 15):

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0},$$

od anche

$$y - y_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

e finalmente, se poniamo $x_1 - x_0 = h$,

$$y - y_0 = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0). \tag{2}$$

Ora facciamo che il punto $P_1(x_1, y_1)$ si avvicini sempre più al punto $P(x_0, y_0)$; la differenza h fra le ascisse dei due punti tenderà a zero, ed a zero tenderà pure la differenza $f(x_0 + h) - f(x_0)$ tra le ordinate, data la continuità della curva. Se avviene che la frazione $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ abbia, per $h = 0$, un limite determinato, anche la retta (2), PP_1, avrà una posizione limite, *tangente in P*, rappresentata dall'equazione che si ottiene dalla (2) sostituendo al posto della frazione il relativo limite. Questo limite, supposto esistente, si suole indicare scrivendo

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

e si chiama valore della *derivata* di $f(x)$ (o di y) per $x = x_0$. Con questa notazione, *la equazione della tangente alla curva* (1) *nel punto* $P\ (x_0, y_0)$ *acquista la forma*

$$y - y_0 = (x - x_0)\, f'(x_0). \tag{3}$$

La esistenza della derivata porta adunque l'esistenza della tangente, e viceversa (quando si eccettuino punti particolari).

In coordinate ortogonali, la derivata di $f(x)$, *per* $x = x_0$, *esprime la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente alla curva* (1), *nel punto di ascissa* x_0, *forma coll'asse delle* x (n. 27).

Il calcolo differenziale insegna a calcolare le derivate delle ordinarie funzioni. Ed insegna pure a trasformare la (3), nella ipotesi che la curva sia data mediante una equazione

$$f(x, y) = 0, \tag{1'}$$

contenente implicitamente le due coordinate. Si dimostra che allora la equazione della tangente, nel punto (x_0, y_0), può scriversi così

$$(x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) = 0, \tag{3'}$$

dove f'_x, f'_y sono le *derivate parziali* del polinomio (1'), l'una rispetto ad x, l'altra rispetto ad y; precisamente, $f'_x(x_0, y_0)$ è il valore che assume, per $x = x_0$, la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x, y_0)$ della sola variabile x, ed un analogo significato ha $f'_y(x_0, y_0)$.

Per fare un'applicazione delle cose dette, si consideri la curva (*parabola*)

$$y = x^2.$$

Poichè la derivata di x^2 è $2x$, la tangente alla parabola nel punto (x_0, y_0) avrà l'equazione

$$y - y_0 = 2x_0\,(x - x_0),$$

od anche, tenuto conto che il punto appartiene alla curva ed è quindi $y_0 = x_0^2$,

$$y + y_0 = 2x_0 x.$$

Esercizi. I.[1] — 1) Costruire per punti le curve rappresentate dalle seguenti equazioni in coordinate cartesiane ortogonali:

$$y = \frac{1}{2}x^2, \qquad y = x^2 - 2x, \qquad y = \frac{2}{5}x^2 - x - 2 \ (\textit{parabole});$$

$$y = \frac{4}{x}, \qquad y = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}, \qquad y = \frac{3}{x} + x - 4 \ (\textit{iperboli});$$

$$y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{9 - x^2} \ (\textit{ellisse});$$

$y = x^3$, $y = x^3 - x + 2$ (*parab. cubiche*); $y^2 = x^3$ (*parab. semicub.*), $y = x - \frac{1}{x^2}$.

[1] Quantunque alcune delle curve qui indicate formino argomento di ricerca nel Cap. V, è bene che lo studioso si abitui sin d'ora a costruire colla maggiore esattezza una curva di cui sia data la equazione, usando, ove occorrano, tavole di funzioni goniometriche o di logaritmi. Si adoperi la carta millimetrata, prendendo come unità il centimetro e attribuendo ad x successivi valori, differenti l'uno dall'altro di 0.1.

2) Costruire le curve $y = \operatorname{sen} x$ (*sinusoide*), $y = \operatorname{tg} x$ (*curva delle tangenti*), $y = \sec x$, $y = \log_{10} x$ (*logaritmica*).

3) Costruire le curve rappresentate dalle seguenti equazioni in coordinate polari: $\rho = \varphi$ (*spirale di* ARCHIMEDE); $\rho = \frac{1}{\varphi}$ (*spirale iperbolica*); $\rho = 2^{\varphi}$ (*spirale logaritmica*); $\rho^2 = \varphi$ (*spirale parabolica o di* FERMAT); $\rho = \cos\frac{\varphi}{2}$.

II. — 4) Determinare graficamente le radici reali delle equazioni seguenti (n. 40, Oss.):

$$x^3 - 5x + 1 = 0; \qquad x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0;$$

$$x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 20x^2 - 21x + 7 = 0.$$

5) Determinare graficamente le radici reali del sistema di due equazioni a due incognite (n. 41): $2y^2 - x = 0$, $x^3 - y - 1 = 0$.

6) Determinare graficamente le radici delle equazioni:

$$2x - 3 \operatorname{sen} x = 0; \qquad x - \operatorname{tg} x = 0;$$

(per quanto riguarda la prima, si costruiscano le linee

$$y = \operatorname{sen} x, \qquad 2x - 3y = 0;$$

analogamente per la seconda).

7) Determinare graficamente le radici dell'equazione $x^5 = 5^x$. (Si prendano i logaritmi dei due membri, e si cerchino le intersezioni della curva logaritmica con una retta conveniente).

III). — 8) Le condizioni per la simmetria di una curva algebrica, enunciate al n. 46, sono invertibili; precisamente, se la curva è simmetrica rispetto all'asse x, la coordinata y deve comparire solo con esponenti pari (a meno che l'asse x non formi parte della curva); e se la curva è simmetrica rispetto all'origine, i termini devono esser tutti di grado pari o tutti di grado dispari.

9) Segue che una curva d'ordine dispari simmetrica rispetto ad un punto, passa per questo punto.

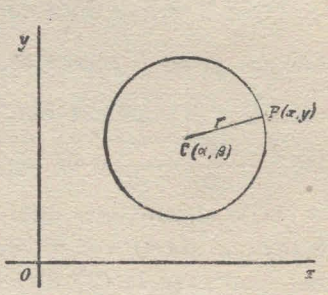
10) Se una curva qualsiasi possiede due assi di simmetria perpendicolari tra loro, essa possiede un centro di simmetria nella intersezione degli assi.

IV. — 11) Si chiama *normale* ad una curva la perpendicolare alla tangente nel punto di contatto. Si scrivano le equazioni delle tangenti (n. 47) e delle normali condotte alle curve seguenti, in un punto generico di esse: $y = ax^2$, $y = ax^3$, $y = ax^{\frac{3}{2}}$, $y = ax^n$, dove a è una costante, n un numero razionale. Si determini il rapporto semplice formato sulla tangente dal punto di contatto e dalle intersezioni cogli assi. (Si ricordi che la derivata di ax^n è nax^{n-1}).

12) Sapendo che la derivata di $\operatorname{sen} x$ è $\cos x$, e di $\operatorname{tg} x$ è $\frac{1}{\cos^2 x}$, si determinino le tangenti in un punto generico alle curve $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{tg} x$; si dimostri, in particolare, che la tangente a queste curve nell'origine è la bisettrice dell'angolo $\widehat{xy}$

48. Equazione del cerchio. — Occupiamoci ora del secondo problema fondamentale che si presenta nello studio analitico dei luoghi geometrici (n. 42): *data la legge di generazione di una curva, scriverne la equazione.*

Si stabilirà nel piano, su cui giace la curva, un sistema di coordinate, per es. cartesiano (i cui assi converrà talvolta di assumere in particolari posizioni rispetto alla figura); si chiameranno x, y le coordinate del punto variabile che descrive la curva, e si riguarderanno come note le coordinate di punti, le equazioni di rette, che occupino posizioni fisse nella figura, le lunghezze di segmenti assegnati, ecc.; si cercherà finalmente di tradurre la legge, secondo cui il punto variabile si muove, in una relazione analitica fra le variabili x, y e le quantità note. Questa relazione sarà la equazione della curva.



Proponiamoci, ad es., di trovar la equazione del cerchio di dato centro e dato raggio. Riferiamoci ad un sistema di coordinate cartesiane *ortogonali*, e diciamo α, β le coordinate del centro C, ed r il raggio.

La condizione perchè un punto $P(x, y)$ appartenga al detto cerchio è $CP = r$. Ma CP si sa esprimere mediante la coordinate di C e P (n. 25),

$$CP = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}.$$

Dunque la detta condizione si traduce (elevando a quadrato i due membri) nella relazione

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2,$$

che è precisamente *la equazione del cerchio.*

In particolare, il cerchio che ha per centro l'origine e per raggio r ha l'equazione

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ritorniamo alla (1). Sviluppando e ordinando possiamo trascriverla così:

$$(1') \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0.$$

Il cerchio è dunque una curva del *secondo ordine.*

Però, se confrontiamo la (1′) colla equazione generale di secondo grado a due variabili, riscontriamo nella (1′) le particolarità che il coefficiente di x^2 è uguale al coefficiente di y^2 e manca il termine col prodotto xy. È ora il caso di vedere se, inversamente, una equazione di secondo grado dotata di queste particolarità, come è la

$$(2') \qquad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

rappresenti, in assi ortogonali, un cerchio. Notiamo perciò che la (2) può ridursi alla forma

$$(2') \qquad \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}.$$

Ora il primo membro è il quadrato della distanza fra il punto variabile (x, y) ed il punto fisso $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, mentre il secondo membro è costante; si conclude che la (2'), o la (2), rappresenta il cerchio di centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e di raggio $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$.

Ciò almeno può dirsi nella ipotesi $a^2+b^2-4c>0$, giacchè allora r è reale, e si tratta di un cerchio propriamente detto. Ma se $a^2+b^2-4c=0$, nel qual caso la (2') diviene

$$(2'') \qquad \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=0,$$

vi è un solo punto reale $\left(x=-\frac{a}{2}, y=-\frac{b}{2}\right)$ soddisfacente colle sue coordinate alla (2'') ed il cerchio, per dir così, si riduce al suo centro (cerchio di raggio 0); mentre nel campo complesso, la (2'') si spezza nelle due equazioni lineari

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)+i\left(y+\frac{b}{2}\right)=0, \quad \left(x+\frac{a}{2}\right)-i\left(y+\frac{b}{2}\right)=0,$$

rappresentanti le rette isotrope uscenti dal detto centro (n. 39), il che porta a riguardare il cerchio di raggio nullo come costituito dalle due rette isotrope uscenti dal centro di esso. Finalmente, se $a^2+b^2-4c<0$, nessun punto reale soddisfa colle sue coordinate alla (2'), la quale tuttavia (d'accordo colle nostre convenzioni) diremo che rappresenta un *cerchio immaginario* di centro reale $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ e di raggio immaginario.

Concludendo:

In assi ortogonali, una equazione di secondo grado, la quale abbia uguali i coefficienti di x^2 ed y^2 e manchi del termine con xy, rappresenta un cerchio (reale od immaginario): se la equazione si riduce ad aver l'unità come coefficiente di x^2 ed y^2, le metà dei coefficienti di x, y cambiate di segno dànno le coordinate del centro.

In assi obliqui, la equazione di un cerchio si riconosce subito essere del tipo

$$x^2+2xy\cos\omega+y^2+a_1x+b_1x+c_1=0;$$

e le condizioni perchè una equazione di secondo grado rappresenti un cerchio sono: che i coefficienti di x^2 ed y^2 siano uguali, ed il coefficiente di xy sia uguale

al coefficiente di x^2 moltiplicato per 2 cos xy; le coordinate del centro hanno espressioni meno semplici che in assi ortogonali.

49. Sistemi di curve. — In vari casi non si riesce a tradurre immediatamente, sotto forma analitica, la legge geometrica a cui obbedisce un punto che si muova lungo una curva. Giova allora seguire una via indiretta che si fonda sulle considerazioni seguenti, già interessanti di per sè.

Riprendiamo un'equazione a due variabili x, y, che siano, ad es., coordinate cartesiane, e supponiamo ora che i coefficienti di quella dipendano da una quantità k (*parametro*), che possa assumere vari valori nel corso della questione.

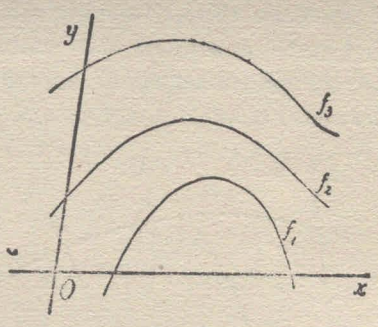
Rappresenteremo l'equazione sotto la forma

$$f(x, y; k) = 0. \tag{1}$$

Se attribuiamo a k un valore determinato k_1, la (1) diventa

$$f(x, y; k_1) = 0, \tag{1'}$$

nella quale le variabili sono x ed y soltanto; la (1') rappresenta dunque una certa curva, che chiameremo f_1. Ad un secondo valore k_2, attribuito a k, corrisponde una seconda curva che chiameremo f_2, e così via; al variare di k nella (1), varia la corrispondente curva e descrive un *sistema di curve*, sistema le cui componenti (*curve*) corrispondono ai valori attribuiti al parametro k; esse hanno come *coordinate* (si potrebbe dire) i valori di k. Se sono soddisfatte (come succede nei casi ordinari) certe condizioni di continuità, il sistema di curve può considerarsi generato da una delle sue curve che vada spostandosi e, generalmente, deformandosi in modo continuo. È notevole il caso che, attribuiti ad x, y due valori x', y', scelti ad arbitrio in intervalli convenienti, la (1) fornisca, per l'unica incognita k, *un solo valore* k'. Allora il punto (x', y') si troverà sopra una sola curva $f(x, y; k') = 0$ del sistema; per ogni punto di una certa regione del piano passa dunque una sola curva del sistema.



Un particolare sistema di linee, soddisfacente alle condizioni suddette, è il *fascio di rette*. Esso corrisponde alla ipotesi che f sia una funzione lineare di x, y, nei cui coefficienti entri linearmente il parametro k; poichè allora, staccando i termini che contengono k dai termini indipendenti dal parametro, la (1) assume la nota forma

$$(a x + b y + c) + k (a' x + b' y + c') = 0.$$

In generale, se la f è funzione algebrica, razionale, intera, di grado n in x, y, nei cui coefficienti entri *linearmente* il parametro k, la (1) può scriversi sotto la forma

$$\varphi(x, y) + k\psi(x, y) = 0,$$

dove φ e ψ sono funzioni razionali intere di grado non superiore ad n (una almeno di grado n). Il sistema prende allora il nome di *fascio di curve d'ordine n*. Ci occuperemo in seguito del caso $n = 2$.

50. Concetto generale di sistema di coordinate nel piano. — Si abbiano ora due sistemi di curve, rappresentati dalle equazioni

$$f(x, y; k) = 0, \tag{1}$$

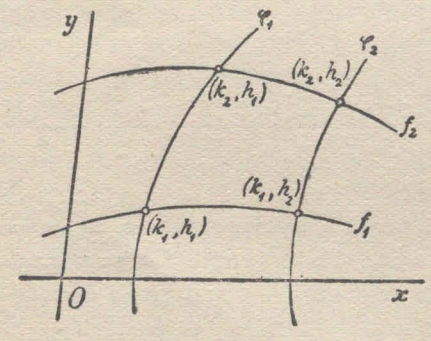
$$\varphi(x, y; h) = 0, \tag{2}$$

dove k ed h sono due parametri. A due valori k_1, h_1 dei parametri corrispondono le curve f_1, φ_1 rappresentate dalle equazioni

$$f(x, y; k_1) = 0, \tag{1'}$$

$$\varphi(x, y; h_1) = 0; \tag{2'}$$

a due nuovi valori k_2, h_2 corrisponderanno le curve f_2, φ_2, ecc. Ora, se accade che per ogni punto P, situato in una certa regione del piano, passi una sola curva di ciascuno dei due sistemi, quei valori k, h dei parametri che spettano rispettivamente alle due curve passanti per P, possono assumersi come *coordinate* del punto P in un nuovo sistema di coordinate. Dato P, sono determinate le sue coordinate; mentre, date queste, rimangono determinate in corrispondenza tante posizioni di P, quanti sono i punti di quella regione in cui si segano due curve, l'una del primo, l'altra del secondo sistema. I punti, per i quali la prima coordinata k ha un valore costante, appartengono ad una curva del primo sistema; i punti, per cui è costante h, appartengono ad una curva del secondo sistema. Le equazioni (1), (2) stabiliscono le relazioni fra le antiche coordinate x, y, ad es. cartesiane, e le nuove k, h; risolvendo quelle equazioni rispetto a k ed h, o rispetto ad x ed y, si otterrebbero le formole di passaggio dall'uno all'altro sistema.



È facile vedere che il sistema di coordinate (k, h) qui definito comprende, come casi particolari, i sistemi visti sinora. Se infatti i due sistemi (1) e (2) sono fasci impropri di rette, si otterrà (scegliendo convenientemente i parametri) l'ordinario sistema di coordinate cartesiane. Se invece

l'un sistema si compone di cerchi di centro comune O e l'altro di rette uscenti da O, per modo che, in coordinate cartesiane ortogonali, le (1) e (2) assumano le forme particolari

$$x^2 + y^2 - \varrho^2 = 0, \qquad y - x \operatorname{tg} \varphi = 0,$$

dove questa volta i parametri sono indicati con ϱ e φ, si avrà in corrispondenza il sistema di coordinate polari (ϱ, φ); le ultime equazioni dànno infatti le formole di passaggio fra il sistema cartesiano e il sistema polare (n. 37).

51. Luogo delle intersezioni di curve corrispondenti in due dati sistemi. — Riprendiamo i due sistemi di curve (1) e (2) del numero precedente, i quali definiscono un sistema di coordinate (k, h) nel piano.

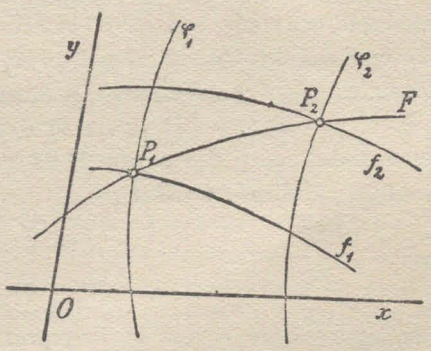
Se fra k ed h stabiliamo una relazione analitica $\psi(k, h) = 0$, questa ci rappresenterà un luogo geometrico (n. 40), il luogo di quei punti che colle loro nuove coordinate (k, h) soddisfano alla detta relazione.

Limitiamoci ad esaminare un caso particolare; supponiamo che questa relazione sia l'eguaglianza $k = h$, scriviamo dunque nelle (1), (2), al posto di k ed h, uno stesso valore, sia k. In tale ipotesi i punti del luogo sono i punti comuni alle due curve

$$f(x, y; k) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi(x, y; k) = 0, \tag{4}$$

le quali variano al variare di k. Se chiamiamo *corrispondenti* queste due curve (entro ai sistemi che esse descrivono al variare di k), possiamo definire il nostro luogo come *il luogo delle intersezioni di curve corrispondenti nei due sistemi.* Noi ci proponiamo di scrivere *la equazione del luogo in coordinate* x, y.



Sia

$$F(x, y) = 0 \tag{5}$$

la equazione richiesta; esaminiamo quali relazioni passino fra la (5) e le (3), (4). Notiamo perciò che al nostro luogo appartiene ogni punto P_1 (x_1, y_1), il quale sia comune a due curve corrispondenti dei sistemi (3), (4), ad es. alle due curve f_1, φ_1 che si ottengono attribuendo al parametro variabile k un particolare valore k_1:

$$\begin{cases} f(x, y; k_1) = 0, \\ \varphi(x, y; k_1) = 0. \end{cases}$$

Segue che, se due valori x_1, y_1 soddisfano a queste due equazioni, essi determinano un punto P_1 del luogo, e quindi soddisfano certamente anche all'equazione (5). Si ha così la prima proprietà della equazione (5):

I. *Se tre numeri x_1, y_1, k_1, sostituiti nelle* (3) *e* (4) (*al posto di x, y, k*), *verificano quelle equazioni, allora i primi due x_1, y_1 verificano l'equazione* (5).

Viceversa, se x_1, y_1 verificano l'equazione (5) e quindi sono coordinate di un punto P_1 del nostro luogo, allora, per la legge con cui questo è descritto, devono esistere due curve corrispondenti f_1, φ_1 dei sistemi (3), (4) che passino per P_1; e in conseguenza deve esistere un valore k_1 di k tale che x_1, y_1, k_1 verifichino tanto la (3), quanto la (4). Abbiamo così la seconda proprietà dell'equazione (5):

II. *Se due numeri x_1, y_1 verificano l'equazione* (5), *deve esistere un terzo numero k_1 tale che x_1, y_1, k_1 verifichino insieme la* (3) *e la* (4).

Ora quando tre equazioni (3), (4), (5), le due prime a tre variabili x, y, k, l'ultima a due variabili x, y, si trovano legate tra loro dalle due condizioni I e II ora esposte, si dice che la (5) è la *risultante* delle equazioni (3) e (4) dopo la eliminazione di k; e la operazione colla quale si passa dalle equazioni (3) e (4) alla equazione (5) dicesi *eliminazione* di k tra le equazioni (3), (4).

Concludiamo dunque: *dati due sistemi di curve mediante due equazioni* (*in coordinate x, y*) *contenenti un parametro, l'equazione* (*in x, y*) *del luogo delle intersezioni di curve dei due sistemi corrispondenti ad uno stesso valore del parametro si ottiene eliminando questo tra le equazioni date.*

La possibilità della eliminazione ed i procedimenti per eseguirla vengono studiati nei vari rami dell'Analisi.

52. Equazioni parametriche di una curva. — Alle considerazioni precedenti conviene spesso ricorrere quando si deve scrivere l'equazione della curva descritta da un punto P (x, y), che si muove con data legge geometrica. Anzichè cercare direttamente la relazione analitica che passa tra x, y, può riuscir più facile di determinare due relazioni tra le coordinate variabili x, y del punto P ed una terza quantità variabile k legata colla figura, relazioni del tipo

$$f(x, y; k) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi(x, y; k) = 0, \tag{4}$$

di cui conosciamo ormai la interpretazione geometrica. Volendo ottenere l'equazione della curva in coordinate x, y, resta solo da eliminare il parametro k tra le (3) e (4). E in certi casi può anzi convenire di scrivere più relazioni tra x, y e alcuni parametri k, l...; sempre l'equazione del luogo si otterrà (come si vede mediante ragionamenti analoghi) eliminando tutti i parametri fra quelle relazioni.

Ma talvolta si preferisce di rappresentare la curva mediante due equazioni contenenti le coordinate variabili x, y ed un parametro, anzichè mediante una sola equazione in x, y. Di tal natura sono, ad es., le *equazioni parametriche* di una curva

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \tag{6}$$

esprimenti le coordinate x, y di un punto variabile in funzione di un parametro t. Ad ogni valore di t corrisponde allora un punto (x, y) della curva; e la equazione di questa in x, y si otterrebbe eliminando t fra le equazioni (6).

Così le equazioni

$$x = at + a', \quad y = bt + b'$$

rappresentano parametricamente la retta

$$\frac{x - a'}{a} = \frac{y - b'}{b}.$$

Qui a', b' sono le coordinate di un particolar punto P' della retta, mentre a, b definiscono la direzione della retta, ed in assi ortogonali sono proporzionali ai coseni di direzione di essa (n. 27); posto che siano uguali a quei coseni, il parametro t misura la distanza fra il punto fisso P' (a, b) e il punto variabile P (x, y) descrivente la retta.

Un secondo esempio è offerto dalle equazioni

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \operatorname{sen}\varphi,$$

dove r è costante e φ il parametro, le quali in assi ortogonali dànno il cerchio

$$x^2 + y^2 = r^2$$

avente il centro nell'origine e il raggio r. Il parametro φ misura l'angolo formato dall'asse x colla retta che unisce l'origine al punto (x, y), mobile sul cerchio.

Esercizi.[1] I. — 1) Scrivere l'equazione del luogo di un punto tale che i quadrati delle distanze di esso da due punti fissi abbiano una data differenza.

2) Sopra due rette secantisi in O (che potranno assumersi come assi) variano due punti A, B, in guisa che la somma $OA + OB$ rimanga costante; qual'è il luogo del punto medio di AB, o, in generale, del punto che divide il segmento AB in dato rapporto?

3) Nelle stesse ipotesi dell'es. precedente, si conducano in A, B le perpendicolari ad OA, OB rispettivamente; qual'è il luogo della loro intersezione?

[1] I luoghi qui considerati sono tutte rette (es. 1 — 7) o cerchi (es. 8 — 14). Generazioni di curve superiori si troveranno negli esercizi alla fine del Cap. V.

4) Dati in un piano più segmenti A_1A_2, A_3A_4, ..., il luogo di un punto M tale che la somma delle aree $MA_1A_2 + MA_3A_4 + \dots$ abbia un valore assegnato k, è una retta parallela alla risultante dei segmenti dati (n. 24, Oss.), la cui direzione non dipende dunque da k. Fa solo eccezione il caso che quella risultante sia nulla, perchè in tale ipotesi non esistono punti M soddisfacenti al problema se k è dato ad arbitrio, mentre ogni punto del piano vi soddisfa se k ha un conveniente valore; la somma sopra scritta non dipende dunque da M.

5) Dato un triangolo OAB, si conduca una parallela variabile ad AB, secante gli altri due lati in A', B'; qual'è il luogo della intersezione delle rette AB', $A'B$?

6) Se più trasversali uscenti da un punto P segano due rette fisse x, y nelle coppie di punti AA', BB', CC' ..., si cerchi il luogo dei punti di incontro $AB' \cdot A'B$, $AC' \cdot A'C$, $BC' \cdot B'C$, ...: si troverà una retta passante per il punto $O \equiv xy$, detta *polare* di P rispetto alle rette x, y.

7) Date n rette ed un punto O, si conduca per O una trasversale variabile, la quale seghi quelle rette in A_1, A_2, ..., A_n; poi si prenda sulla trasversale un segmento OA tale che sia $\frac{n}{OA} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{OA_i}$. Si dimostri che il luogo del punto A è una retta, *polare armonica* di O rispetto alle n rette. (Si faccia uso di coordinate polari, rispetto al polo O). Si considerino in particolare i casi $n = 2$, 3.

II. — 8) Il luogo di un punto, le cui distanze da due punti fissi hanno un dato rapporto k, è un cerchio; quale ne è il centro? quale è il raggio? E se $k = 1$?

9) Il luogo di un punto tale che la somma dei quadrati delle distanze di esso da due punti fissi sia costante è un cerchio, il cui centro non dipende dal valore della costante.

10) In generale, dati n punti A_i ed n numeri p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), il luogo di un punto M tale che sia costante la somma $\sum_i p_i \overline{MA_i}^2 = k$ è un cerchio, il cui centro è il baricentro dei punti A_i presi coi pesi p_i (n. 23, es. 9); quale ne è il raggio? Ad ogni punto M del piano corrisponde un determinato valore k della somma sopra scritta; ed il baricentro nominato è il punto per cui quella somma è minima (se $\sum p_i > 0$), o massima (se $\sum p_i < 0$). Come si modificano questi risultati se $\sum p_i = 0$?

11) Luogo di un punto da cui un dato segmento è visto sotto angolo costante.

12) Il luogo di un punto tale che i piedi delle perpendicolari da esso calate sopra due rette fisse x, y abbiano una distanza assegnata è un cerchio.

13) Il luogo di un punto tale che i piedi delle perpendicolari da esso calate sopra i lati di un triangolo formino un triangolo di area assegnata Δ è un cerchio, il cui centro non dipende dal valore di Δ; per $\Delta = 0$ quel cerchio è circoscritto al triangolo. Segue, in particolare, il teorema di SIMSON: «I piedi delle perpendicolari calate sui lati di un triangolo da un punto qualunque del cerchio circoscritto sono allineati». Indicando con $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ le equazioni normali dei lati del triangolo, con L, M, N gli angoli opposti, si troverà, per quel luogo, la equazione

$$mn \operatorname{sen} L + nl \operatorname{sen} M + lm \operatorname{sen} N = 2\Delta,$$

la quale, come si verifica, rappresenta appunto un cerchio.

14) In generale, il luogo di un punto tale che i piedi delle perpendicolari da esso calate sopra i lati di un poligono formino un poligono (*pedale* o *podario* del punto) di area assegnata Δ è un cerchio, il cui centro è il baricentro dei vertici del poligono dato, quando a ciascuno si attribuisca come peso il seno del doppio dell'angolo del poligono avente ivi il vertice; il raggio r del cerchio è poi dato dalla formola $r^2 = \frac{8(\Delta - \Delta_0)}{S}$, dove Δ_0 è l'area del poligono pedale del detto baricentro, ed S è la somma dei detti pesi. Se $S = 0$, i poligoni pedali di tutti i punti del piano hanno la stessa area Δ_0 (STEINER).

CAPITOLO V.

Il cerchio ed altre curve particolari.

53. Cerchio determinato da tre punti. — Vogliamo, in questo Capitolo, applicare a curve particolari varie nozioni esposte in generale nel Capitolo che precede. Ci occuperemo anzitutto del cerchio.

L'equazione (detta da alcuni *normale*) del cerchio in coordinate ortogonali è, come sappiamo (n. 48), del tipo

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \tag{1}$$

dove α, β sono le coordinate del centro ed $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$ è il raggio (reale o immaginario). Poichè l'equazione dipende da tre coefficienti α, β, γ, si potrà assoggettare un cerchio a tre condizioni, traducentesi in altrettante relazioni fra quei coefficienti. Così, se si vuole che il cerchio passi per tre punti assegnati (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), dovranno esser verificate le tre equazioni di condizione

$$x_i^2 + y_i^2 - 2\alpha x_i - 2\beta y_i + \gamma = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

e quali permettono di calcolare, α, β, γ. Il risultato della sostituzione di questi valori nella (1) si ottiene direttamente eliminnando α, β, γ fra la (1) e le tre equazioni di condizione. Si giunge così all'equazione

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

che rappresenta appunto il cerchio richiesto. Ciò almeno nella ipotesi che sia diverso da zero il complemento algebrico di $x^2 + y^2$. Nel caso opposto i tre punti sono allineati (n. 51), l'equazione si abbassa a primo grado e rappresenta, com'è facile riconoscere, la retta dei tre punti.

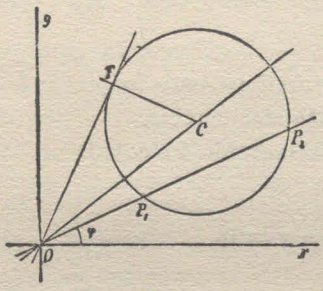
54. Equazione polare di un cerchio. Potenza di un punto rispetto ad un cerchio. — Assumendo come polo ed asse polare di un sistema di coordinate polari (ϱ, φ) l'origine e l'asse x del sistema cartesiano sopra adoperato, si arriva, colle note formole di trasformazione (n. 37), a scrivere l'equazione polare del cerchio (1) sotto la forma

$$\varrho^2 - 2(\alpha \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi)\varrho + \gamma = 0. \tag{2}$$

Per ogni valore di φ la (2) fornisce due valori ϱ_1, ϱ_2 di ϱ, raggi vettori delle *due* intersezioni del cerchio colla retta uscente da O e formante con x l'angolo φ. Ora si ha dalla (2)

$$\varrho_1 \varrho_2 = \gamma,$$

indipendente da φ, e si conclude che, *se intorno ad un punto ruota una trasversale, il prodotto dei due segmenti compresi fra il punto e le intersezioni della trasversale con un cerchio fisso è costante.* Quel prodotto costante, preso in valore e segno, si chiama (collo STEINER) *potenza* del punto primitivo rispetto al cerchio. La potenza $\gamma = (\alpha^2 + \beta^2) - r^2$ è pur data dalla differenza fra il quadrato della distanza del punto dal centro del cerchio e il quadrato del raggio. Per un cerchio reale la potenza è positiva, nulla, o negativa, secondo che il punto è esterno, sulla circonferenza, o interno al cerchio; e, nel primo caso è uguale al quadrato del tratto di tangente $O\,T$ compreso fra il punto ed il cerchio, nel terzo caso al quadrato, cambiato di segno, della metà della corda che ha in O il suo punto medio. Per un cerchio immaginario la potenza di ogni punto è positiva.



Dalle cose dette risulta che la potenza dell'origine rispetto ad un cerchio è espressa dal termine noto dell'equazione normale (1). Se fosse richiesta la potenza di un altro punto $P(x_0, y_0)$, basterebbe eseguire la trasformazione di coordinate (n. 34, I) $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$, assumendo come nuovi assi le parallele agli antichi, uscenti da P. L'equazione (1) si trasforma nella

$$X^2 + Y^2 + 2(x_0 - \alpha)X + 2(y_0 - \beta)Y + (x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma) = 0. \tag{1'}$$

Si deduce che *la potenza del punto* (x_0, y_0) *rispetto al cerchio* (1) *è data da*

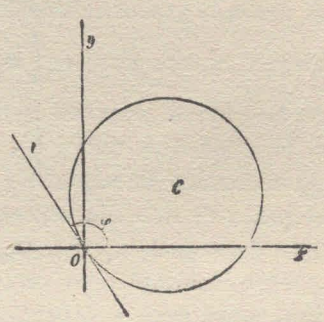
$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma,$$

vale a dire *dal valore che assume il primo membro dell'equazione normale* (1) *quando al posto delle variabili si sostituiscano le coordinate del punto.*

Secondo che questo valore è positivo, nullo, o negativo, il punto sarà dunque esterno, sulla circonferenza, od interno al cerchio (supposto reale).

55. Tangente ad un cerchio in un punto. — Se il cerchio (1) o (2) passa per l'origine, è $\gamma = 0$. Allora la (2) ha, qualunque sia φ, una radice nulla, come è chiaro geometricamente, mentre l'altra radice vale

$$\rho = 2(\alpha \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi).$$



Anche questa seconda radice è nulla, e la retta corrispondente è tangente al cerchio nell'origine, quando φ sia tale da rendere

$$\alpha \cos\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi = 0,$$

ossia

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

La retta in questione ha l'equazione cartesiana

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x,$$

ossia

$$\alpha x + \beta y = 0;$$

questa equazione (ottenuta uguagliando a zero l'insieme dei termini lineari nella (1)) rappresenta dunque la tangente nell'origine al cerchio (1), quando $\gamma = 0$.

Qualunque sia γ, volendo la tangente al cerchio (1) in un punto (x_0, y_0) di esso, si potrà eseguire, come prima, la traslazione di assi che porta in questo punto l'origine; si arriverà così all'equazione (1'), in cui però mancherà la parte indipendente da X e da Y. Uguagliando a zero il complesso dei termini lineari in X, Y nella (1') troviamo l'equazione

$$(x_0 - \alpha)X + (y_0 - \beta)Y = 0,$$

che rappresenta la tangente richiesta nelle nuove coordinate X, Y; ricordando poi che $X = x - x_0$, $Y = y - y_0$, *l'equazione della tangente al cerchio* (1) *nel punto* (x_0, y_0) *assume la forma*

$$(3) \qquad (x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0.$$

Sviluppando la (3) e osservando che

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 + \gamma = 0,$$

quella equazione può scriversi così:

$$(3') \qquad x x_0 + y y_0 - \alpha(x + x_0) - \beta(y + y_0) + \gamma = 0.$$

Il lettore verificherà subito che la tangente nominata è normale al raggio del cerchio passante per il punto di contatto (x_0, y_0).[1]

56. Intersezioni di un cerchio con una retta. — Il problema di determinare le intersezioni del cerchio (1) colla retta $a x + b y + c = 0$ porta a risolvere il sistema delle equazioni delle due linee, e quindi la equazione di secondo grado nella sola x che si ottiene sostituendo nella (1), al posto di y, il valore $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ (cfr. n. 45). Quella equazione in x (i cui coefficienti si ricavano mediante operazioni razionali eseguite sopra $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$) ha due radici x_1, x_2 che possono esser reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie coniugate; sostituendo successivamente queste, al posto di x, nella espressione di y si ottengono due valori y_1, y_2, ordinate dei punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) soddisfacenti al problema. Si giunge così al noto risultato, che un cerchio è segato da una retta in due punti, i quali sono reali e distinti (se la retta è *secante*), o reali e coincidenti (se è *tangente*), o immaginari coniugati (se è *esterna* al cerchio). I tre casi si presentano (come è noto dalla geometria elementare, e può verificarsi per via analitica) in relazione alla distanza del centro del cerchio dalla retta.

57. Intersezione di due cerchi; asse radicale. — Date le equazioni di due cerchi

$$(4) \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \gamma' = 0, \end{cases}$$

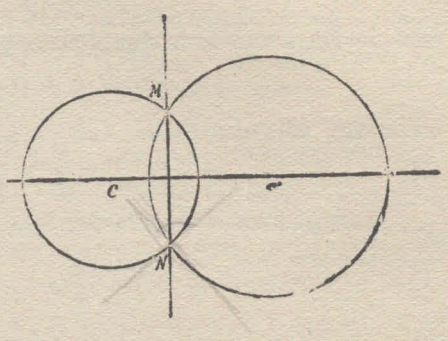
si osserverà che ogni soluzione (x, y) di queste soddisfa pure all'equazione

$$(5) \qquad 2(\alpha - \alpha')x + 2(\beta - \beta')y - (\gamma - \gamma') = 0$$

ottenuta dalle (4) mediante sottrazione; e viceversa, ogni soluzione comune ad una delle (4) e alla (5) è comune anche all'altra delle (4). Possiamo dunque risolvere, anzichè il sistema (4), il sistema composto di una delle (4) e della (5). Ma questa rappresenta una retta; vediamo adunque che *il problema di determinare le intersezioni di due cerchi equivale al problema di determinare le intersezioni di un cerchio con una retta*, e porta, in sostanza, a risolvere una equazione di secondo grado ed una incognita, i cui coefficienti sono funzioni razionali dei coefficienti delle equazioni dei due cerchi. Concludiamo: *due cerchi si segano in due punti, che possono esser reali e distinti* (cerchi secantisi), *reali e coincidenti* (cerchi tangenti), *o immaginari coniugati* (cerchi non secantisi). Ciò almeno se non sono insieme $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$; giacchè, se questo caso si presenta, la (5) diviene assurda finchè $\gamma \neq \gamma'$,

[1] Alla (3) si sarebbe anche arrivati applicando la formola generale (3') del n. 47.

io finchè i due cerchi sono distinti, e le (4) sono, per conseguenza, incompatibili. I due cerchi, che allora sono concentrici, non hanno nessuna intersezione. Vedremo però in seguito come, con opportune convenzioni, si possa far rientrare l'ultima osservazione nel teorema generale, che da quelle convenzioni verrà anzi reso più completo.



È facile caratterizzare geometricamente la retta (5). Se infatti cerchiamo il luogo dei punti (x, y) che hanno uguale potenza rispetto ai due cerchi (4), siamo condotti (n. 54) ad uguagliare i primi membri delle due equazioni (4), e quindi perveniamo alla (5). Dunque: *il luogo dei punti che hanno potenza uguale rispetto a due cerchi è una retta* (detta *asse radicale*), *la quale contiene le due intersezioni* (reali o immaginarie) *dei due cerchi.* L'asse radicale manca solo quando i cerchi siano concentrici. Escluso questo caso, *l'asse radicale è perpendicolare alla congiungente i centri dei cerchi,* come risulta confrontando la (5) coll'equazione della detta congiungente

$$\frac{x - \alpha}{\alpha - \alpha'} = \frac{y - \beta}{\beta - \beta'}$$

*58. **Condizione di ortogonalità di due cerchi.** — Si chiama *angolo di due cerchi* (o di due curve), in un punto comune, l'angolo formato dalle due tangenti in quel punto. Se quest'angolo è retto, i due cerchi (o le due curve) *si tagliano ortogonalmente.* È facile stabilire la condizione affinchè i due cerchi (4) si taglino ortogonalmente, sia ricorrendo alle equazioni delle tangenti in un punto ad essi comune, sia notando che i raggi r, r' dei due cerchi, passanti per il detto punto, devono esser perpendicolari. Considerando il triangolo rettangolo, che ha quei raggi come cateti, e come ipotenusa la distanza dei centri (α, β), (α', β'), si ha

$$r^2 + r'^2 = (\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2,$$

ossia, ricordando che $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma$, $r'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 - \gamma'$,

$$2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' - (\gamma + \gamma') = 0, \tag{6}$$

che è la condizione richiesta di ortogonalità.

Il lettore potrà, seguendo una via analoga, determinare in generale l'angolo di due cerchi (4).

---

* I n. segnati con asterisco possono omettersi in una prima lettura

* **59. Fascio di cerchi.** — Date le equazioni (4) di due cerchi, che indicheremo abbreviatamente con

$$S = 0, \qquad S' = 0, \tag{4'}$$

consideriamo una loro combinazione lineare

$$\lambda S + \mu S' = 0.$$

od anche, adoperando un solo paramento $k = -\frac{\mu}{\lambda}$,

$$S - k S' = 0. \tag{7}$$

Questa equazione, che per $k \neq 1$ può scriversi sotto la forma

$$x^2 + y^2 - 2\frac{\alpha - k\alpha'}{1-k}x - 2\frac{\beta - k\beta'}{1-k}y + \frac{\gamma - k\gamma'}{1-k} = 0, \tag{7'}$$

rappresenta ancora un cerchio il quale, al variare del parametro k, descrive un sistema di infiniti cerchi, detto *fascio* (cfr. n. 49). Al fascio appartengono evidentemente i cerchi primitivi $S = 0$ ed $S' = 0$, corrispondenti ai valori $k = 0, \pm\infty$; mentre, per $k = 1$, la (7) ci dà l'asse radicale dei due cerchi nominati.

Sono proprietà immediate del fascio le seguenti:

a) I punti comuni ai due cerchi primitivi appartengono ad ogni cerchio del fascio, e diconsi *punti base del fascio;*

b) Per un punto del piano, che non sia base, passa sempre uno ed un sol cerchio del fascio.

Sia infatti $P_0\ (x_0, y_0)$ un punto del piano, e siano S_0, S_0' i valori che assumono i polinomi S, S' quando al posto delle variabili x, y si pongano x_0, y_0. Se P_0 appartiene ai due cerchi primitivi, sarà $S_0 = 0$, $S'_0 = 0$, e quindi

$$S_0 - k S'_0 = 0;$$

segue che P_0 appartiene ad ogni cerchio (7) del fascio. Se invece P_0 non è comune ai cerchi primitivi, i valori S_0, S'_0 non sono entrambi nulli, e l'ultima equazione fornisce un valore per k; sostituendolo nella (7), si ha quel particolare cerchio del fascio che passa per P_0.

Segue dalla *a*) che *i cerchi del fascio hanno a due a due lo stesso asse radicale,* detto *asse radicale del fascio;* ciò si verifica pur subito per via analitica. Ogni punto dell'asse radicale ha la stessa potenza rispetto a tutti i cerchi del fascio. Il fascio è anche determinato da un sol cerchio e dall'asse radicale, mediante combinazione lineare delle relative equazioni, giacchè la (7) può scriversi così:

$$(S - S') - (k - 1) S' = 0.$$

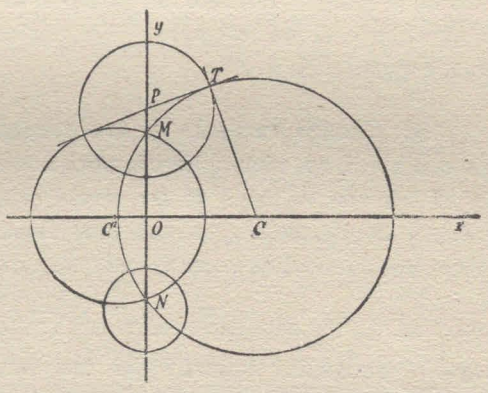
Il luogo dei centri dei cerchi di un fascio è una retta normale dell'asse radicale, detta *asse centrale;* infatti il centro del cerchio (7') ha le coordi-

nate $\frac{\alpha - k\alpha'}{1-k}$, $\frac{\beta - k\beta'}{1-k}$, e quindi (n. 14) appartiene alla retta congiungente i centri (α, β), (α', β') dei due cerchi (4'), retta che sappiamo già esser normale all'asse radicale. Ogni punto di quella retta è centro di *un* cerchio del fascio. Fa eccezione solo il caso che i due cerchi (4') siano concentrici, giacchè allora tutti i cerchi del fascio hanno lo stesso centro.

***60. Fasci ortogonali di cerchi.** — Se, per semplificar le formole, assumiamo come assi delle x e delle y l'asse centrale e l'asse radicale di un fascio di cerchi (non concentrici), e poniamo sia $x^2 + y^2 + \gamma = 0$ il particolare cerchio del fascio avente il centro nella origine, ogni altro cerchio del fascio avrà una equazione del tipo

$$x^2 + y^2 - 2kx + \gamma = 0, \tag{8}$$

dove k, ascissa del centro, è un parametro variabile da cerchio a cerchio. I punti base del fascio, situati sull'asse y, hanno l'ordinata $y = \pm\sqrt{-\gamma}$, e quindi sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati, secondo che γ è negativo, nullo, o positivo; nel caso $\gamma = 0$ tutti i cerchi del fascio toccano l'asse y nell'origine.



Osserviamo ancora che il raggio del cerchio (8) vale $\sqrt{k^2 - \gamma}$; quindi i centri dei cerchi di raggio nullo appartenenti al fascio hanno le ascisse $k = \pm\sqrt{\gamma}$, e sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari, secondo che sono immaginari, reali e coincidenti, o reali e distinti i punti base del fascio; quei due centri si chiamano *punti limite* del fascio.

Ciò premesso, prendiamo sopra l'asse y un punto arbitrario P $(0, h)$, e da esso conduciamo la tangente PT ad un cerchio qualsiasi (8) del fascio. Detto ϱ il segmento di tangente compreso fra P e il cerchio, sarà ϱ^2 uguale alla potenza di P rispetto al cerchio (8), ossia (n. 54)

$$\varrho^2 = h^2 + \gamma,$$

valore indipendente da k, cioè dal particolare cerchio considerato nel fascio, ecom era prevedibile ricordando la proprietà dell'asse radicale. Con centro P e raggio ϱ descriviamo un cerchio, la cui equazione si trova essere

$$x^2 + y^2 - 2hy - \gamma = 0. \tag{9}$$

Questo cerchio, qualunque sia h, taglia ortogonalmente il cerchio (8) corrispondente ad un valore arbitrario di k; ciò risulta subito dalla costruzione geometrica eseguita, e si verifica analiticamente ricordando la condizione di ortogonalità (6) (n. 58). Al variare di h il cerchio (9) descrive pure un fascio, di cui però l'asse centrale è l'asse y, mentre l'asse radicale è l'asse x; inoltre i punti base del nuovo fascio hanno le coordinate $(\pm\sqrt{\gamma}, 0)$ e quindi coincidono coi punti limite del fascio (8), mentre i punti limite del fascio (9), di coordinate $(0, \pm\sqrt{-\gamma})$, coincidono coi punti base del fascio (8). Concludiamo:

Ad ogni fascio di cerchi non concentrici è congiunto un secondo fascio di cerchi, i quali segano ortogonalmente i cerchi del primo fascio; i due fasci sono così situati che l'asse radicale ed i punti base di ciascuno sono asse centrale e punti limite per l'altro fascio. Si suol dire talvolta che i due fasci costituiscono un *sistema doppio ortogonale di cerchi.*[1] Per ogni punto T del piano passa un cerchio del primo fascio ed uno del secondo; ed i due parametri k ed h, relativi ai due cerchi nominati, potrebbero riguardarsi come coordinate del punto T in un nuovo sistema di coordinate; si avrebbe così un esempio della nozione di sistema generale di coordinate esposta nel n. 50.

***61. Centro radicale di tre cerchi.** — Relativamente al sistema di tre cerchi di un piano, limitiamoci a dimostrare il teorema seguente:

I tre assi radicali di tre cerchi arbitrari (non formanti fascio), presi a due a due, passano per uno stesso punto, che ha uguale potenza rispetto ai tre cerchi, e dicesi *centro radicale* di questi. Infatti se

$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0$$

sono le equazioni normali dei tre cerchi, i tre assi radicali hanno le equazioni

$$S - S' = 0, \quad S' - S'' = 0, \quad S'' - S = 0,$$

che, sommate membro a membro danno una identità, donde segue il teorema (n. 22). Se però due dei tre cerchi sono concentrici, uno degli assi radicali manca e gli altri due sono paralleli.

Esercizi. I. — 1) Scrivere la equazione di un cerchio il quale soddisfi ad uno dei seguenti gruppi di condizioni: *a*) ha per centro il punto (2, 3) e passa per il punto (— 1, 6); *b*) passa per l'origine e per i punti (2, 0), (0, — 3); *c*) passa per l'origine, toccando ivi la retta $2x + 3y = 0$, e passa inoltre per il punto (— 1, 0); *d*) passa per i punti di ascisse 2, 3 sull'asse x e tocca l'asse y;

[1] Se il primo fascio si componesse di cerchi concentrici, il secondo degenererebbe nel fascio delle infinite rette uscenti dal centro comune.

e) passa per il punto (2, 3) e tocca i due assi coordinati; *f*) tocca gli assi coordinati e la retta $2x + y - 5 = 0$. Quanti cerchi soddisfano alle condizioni imposte? Dei detti cerchi determinare il centro e le intersezioni incognite cogli assi; per il cerchio *f*) determinare il punto di contatto colla tangente indicata.

2) Determinare le intersezioni del circolo *a*) dell'es. precedente colla retta $2x + 3y - 6 = 0$. Determinare le intersezioni dei due cerchi *a*), *b*).

3) Condurre la tangente al cerchio *a*) nel punto $(-1, 6)$; al cerchio *b*) in ciascuno dei tre punti che lo individuano.

4) Determinare le tangenti del cerchio $x^2 + y^2 = r^2$ che sono parallele ad una retta assegnata $ax + by = 0$.

5) Condurre le tangenti al cerchio precedente da un punto (x_0, y_0) assegnato; qual'è l'equazione della retta (sempre reale) congiungente i due punti di contatto (*polare* del punto dato)? Qual'è l'angolo racchiuso dalle due tangenti?

6) Luogo del punto da cui un dato cerchio $x^2 + y^2 = r^2$ è visto sotto un angolo assegnato (racchiuso dalle due tangenti); in particolare, sotto un angolo retto.

7) Dato un cerchio mediante la sua equazione normale, condurre ad esso le tangenti dall'origine. Si tratti poi un caso numerico, supponendo ad es. che il cerchio abbia per centro il punto (3, 4) e per raggio 2.

8) Luogo dei punti medi delle corde di un cerchio passanti per un punto assegnato; dove cadono le intersezioni del luogo col cerchio dato? (Il problema può trattarsi in coordinate cartesiane o polari, collocando l'origine, o il polo, nel punto assegnato).

II. — 9) Dati due cerchi mediante le loro equazioni normali, determinare l'angolo sotto cui si segano (cfr. n. 58). Qual'è la condizione perchè i due cerchi si tocchino?

10) Fra i cerchi di un fascio esistono al più due i quali tocchino una data retta. Quale particolarità si presenta se la retta passa per uno dei punti base? (Si può supporre che la retta sia l'asse x).

11) Dati tre cerchi $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$, non appartenenti ad un fascio, si considerino gli infiniti cerchi rappresentati dall'equazione $\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$, al variare dei parametri; essi formano un sistema, detto *rete*, contenente ogni fascio determinato da due cerchi della rete, presi comunque. Per un punto generico del piano passano infiniti cerchi della rete, formanti un fascio; per due punti generici del piano passa un solo cerchio della rete. Il centro radicale di tre cerchi della rete (n. 61) non varia col variare dei cerchi stessi, e dicesi *centro radicale della rete*. Reti particolari sono costituite da tutti i cerchi che passano per un dato punto, oppure da tutti i cerchi che hanno i centri sopra una data retta.

12) Scelto come centro il centro radicale di una rete, e come raggio il segmento di tangente (reale o immaginario) compreso tra il detto centro ed un cerchio qualsiasi della rete, si descriva un cerchio; questo sega ortogonalmente ogni cerchio della rete, e dicesi *cerchio fondamentale della rete*. Esso è pure il luogo dei centri dei cerchi di raggio nullo appartenenti alla rete. Ed ogni rete può riguardarsi come l'insieme dei cerchi che segano ortogonalmente un dato cerchio. Note le equazioni di tre cerchi di una rete, si scriva l'equazione del cerchio fondamentale.

13) I cerchi di un fascio segano sopra un cerchio fisso coppie di punti ap-

partenenti a rette di un fascio (n. 61). Segue che in un fascio di cerchi ve ne sono due al più che toccano un cerchio assegnato; come si costruiscono?

14) Dati due cerchi di centri (α, β), (α', β') e di raggi r, r', si determinino le tangenti ad essi comuni (cioè le rette che hanno le distanze r, r' dai due centri). Le quattro tangenti, reali od immaginarie, determinano un quadrilatero di cui due vertici opposti, sempre reali, si trovano sulla congiungente i due centri, ed hanno le coordinate

$$\frac{\alpha' r \pm \alpha r'}{r \pm r'}, \qquad \frac{\beta' r \pm \beta r'}{r \pm r'};$$

essi diconsi *centri di similitudine* dei due cerchi e precisamente centro *interno* od *esterno*, secondo che si prendono i segni superiori o inferiori. Come si costruiscono i punti stessi partendo dai centri e dai raggi dei due cerchi?

15) Tre cerchi, presi a due a due, danno complessivamente sei centri di similitudine; si dimostri che i tre centri esterni sono allineati, e sono pure allineati due centri interni e il centro esterno relativo alla coppia rimanente di cerchi.

III. *Inversione rispetto ad un cerchio* (Dandelin, Plücker). — 16) Dato un cerchio di centro O e raggio r, ad ogni punto P del piano si faccia corrispondere quel punto P' della retta OP, che rende $OP \cdot OP' = r^2$ (anche nel segno). La corrispondenza, che così viene a stabilirsi fra P e P', dicesi *trasformazione per raggi vettori reciproci* o *inversione*, rispetto al *centro d'inversione* O ed al *cerchio fondamentale* dato. La corrispondenza fra P e P' è scambievole e biunivoca, fatta eccezione per P coincidente con O, al qual punto non corrisponde nessun punto (o, come talora si dice convenzionalmente in questa teoria, corrisponde il *punto* (∞, ∞) del piano). Ogni punto del cerchio d'inversione corrisponde a sè stesso. È facile stabilire le relazioni fra le coordinate polari o cartesiane di due punti corrispondenti P e P'. Assunto, ad esempio, il raggio del cerchio come unità, $r = 1$, e riferiti i punti $P(x, y)$, $P'(x', y')$ a due assi ortogonali uscenti da O, valgono le formole

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Queste possono riassumersi in una sola, se si introducono i numeri complessi $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $\bar{z}' = x' - iy'$; si ha infatti $\bar{z}' = \frac{1}{z}$.

17) Se il punto P descrive una curva, il punto inverso P' descrive una curva, *inversa* della prima. Si dimostri che l'inversa di una retta è un cerchio, il quale tocca in O la retta parallela alla data (a meno che la retta primitiva non passi per O, giacchè allora ha per inversa sè stessa). In generale, *ogni cerchio si muta per inversione in un cerchio*, o in una retta se il cerchio primitivo passa per O, eccezione questa che può ritenersi inclusa nell'enunciato, ove si riguardino le rette come casi particolari di cerchi.

18) Due cerchi, inversi l'uno dell'altro, segano negli stessi due punti (reali o immaginari) il cerchio fondamentale e determinano un fascio a cui questo appartiene. Un centro di similitudine dei primi due cerchi coincide col cerchio d'inversione. Viceversa, due cerchi qualsiasi si corrispondono in una inversione, che

ha come fondamentale un cerchio del loro fascio, e come centro uno dei centri di similitudine dei cerchi dati.

19) Due rette formano lo stesso angolo che i cerchi ad esse corrispondenti. L'angolo di due cerchi è pure uguale all'angolo dei due cerchi inversi. Cerchi tangenti si mutano per inversione in cerchi tangenti. Ed in generale si può dimostrare che, se due curve si toccano in un punto (hanno ivi la stessa tangente), le curve inverse si toccano nel punto corrispondente. Da queste premesse segue il teorema:

20) *L'angolo di due curve* (n. 58), *in un punto comune, è uguale all'angolo delle curve inverse nel punto corrispondente*; in breve, *la inversione non altera gli angoli* (ne inverte però i segni); è, come suol dirsi, una trasformazione *isogonale* o *conforme*.

21) Ogni cerchio ortogonale al cerchio fondamentale vien mutato dall'inversione in sè stesso; e viceversa, un cerchio inverso di sè stesso, se non è il cerchio fondamentale, è ortogonale ad esso. È inverso di sè stesso, quindi ortogonale al cerchio fondamentale, ogni cerchio passante per due punti distinti corrispondenti nell'inversione.

22) Un meccanismo per realizzare l'inversione è il seguente: s'immagini un parallelogramma equilatero, articolato nei vertici, del quale due vertici opposti A, O siano costretti a muoversi sopra un cerchio fisso di centro O e raggio ρ; gli altri due vertici B, D si corripondono allora in una inversione, rispetto al centro O e ad un cerchio di raggio $r = \sqrt{\rho^2 - l^2}$, essendo l il lato del parallelogramma. Segue che, se B è costretto a descrivere un cerchio passante per O, D descriverà una retta. Un apparecchio, fondato su questo concetto, per trasformare il moto circolare in moto rettilineo, è l'*inversore* di PEAUCELLIER.

62. Forme delle curve di secondo ordine. — Abbandonando ora il cerchio, vogliamo mostrare sopra un esempio, utile per il seguito, come dall'equazione di una curva si possa dedurne la forma. Ci fermeremo sulle curve del secondo ordine, le cui equazioni vedremo in seguito potersi ridurre, mediante una conveniente scelta degli assi coordinati ortogonali, ad uno dei tipi seguenti (esclusi alcuni casi di secondario interesse):

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(3) \qquad y^2 = 2px,$$

dove a, b, p sono costanti positive.

I. La curva

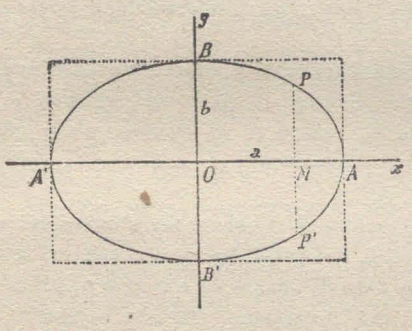
$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

detta *ellisse*, sega l'asse x in due punti A, A', di cui si trovano le ascisse ponendo nella (1) $y = 0$; si ha così $x = \pm a$. Similmente si vede che la

curva stessa sega l'asse y in due punti B, B', di ordinate $y = \pm b$. I punti A, A', B, B' diconsi *vertici*. Scritta ora la (1) sotto la forma

$$(1') \qquad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

risulta che, per aver valori reali di y, occorre attribuire ad x valori tali che $x^2 \leqq a^2$, ossia $|x| \leqq a$; si conclude che i punti reali della curva stanno tutti entro la striscia compresa fra le parallele ad y condotte per A ed A' (tangenti alla curva nei vertici A ed A'). Ed in modo analogo, risolvendo la (1) rispetto ad x, si vede che la curva è compresa fra le parallele ad x condotte per B e B' (tangenti in questi punti). La curva sta dunque nel rettangolo avente per mediane AA' e BB'.



Se ad x si attribuiscono valori positivi decrescenti da a a 0, la (1') dà per y valori aritmeticamente crescenti da 0 a b, ciascuno dei quali va preso col doppio segno; si hanno dunque due archi di curva, simmetrici rispetto all'asse x, che partono da A e vanno scostandosi dall'asse x, fino a raggiungere B e B' rispettivamente. Dall'altra parte dell'asse y si ritrova un arco di curva $BA'B'$ simmetrico all'arco già tracciato, rispetto all'asse y; infatti il secondo membro della (1') non muta cambiando x in $-x$. La curva è dunque chiusa, possiede due assi di simmetria ortogonali x, y, e, per conseguenza, un centro di simmetria nell'origine (cfr. n. 46), *assi* e *centro* della ellisse.

Notiamo la ipotesi $a = b$; la equazione (1) diviene allora

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

e rappresenta un cerchio, caso particolare della ellisse.

Se l'ultima equazione si risolve rispetto ad y,

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2},$$

e si paragona colla (1'), si riconosce che le ordinate della ellisse e del cerchio, corrispondenti ad uno stesso valore di x, stanno nel rapporto costante $b : a$. Segue che per costruire una ellisse di semiassi a, b basta costruire un cerchio di raggio a ed alterare tutte le ordinate perpendicolari ad un diametro (preso come asse x) nel rapporto $b : a$.

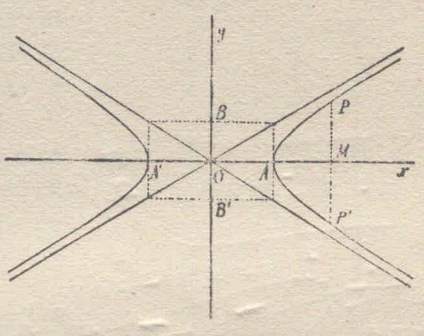
II. La curva

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

detta *iperbole*, sega pure l'asse x in due punti A, A' (*vertici*) di ascisse $\pm a$; ma non sega in punti reali l'asse y, perchè le ordinate delle corrispondenti intersezioni sono date da $\pm bi$. La (2), risolta rispetto ad y,

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \tag{2'}$$

fa vedere che i punti reali della curva hanno ascisse tali che sia $|x| \geq a$. Ne viene che la curva sta al di fuori della striscia compresa fra le parallele ad y condotte per A ed A' (tangenti alla iperbole nei vertici); la curva deve quindi comporsi di due rami distinti, situati nelle due regioni del piano esterne a quella striscia. Facendo crescere x da a a $+\infty$, (o decrescere x da $-a$ a $-\infty$), la (2') fornisce per y valori che vanno crescendo aritmeticamente da 0 a $+\infty$, e devono esser presi col doppio segno. Ciascun ramo di curva, a partire dal punto A od A' rispettivamente, va scostandosi dall'asse x al disopra e al disotto, in modo simmetrico, e si estende all'infinito. I due rami sono d'altronde mutuamente simmetrici rispetto all'asse y. Anche la iperbole possiede dunque due assi di simmetria x, y ed il centro di simmetria O (n. 46), *assi* e *centro* della iperbole.



Nella figura sono anche segnate le due rette

$$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b},$$

uscenti dall'origine e dette *asintoti*. Esse son caratterizzate da questa proprietà: se un punto, partendo da un vertice, descrive uno dei rami di iperbole allontanandosi all'infinito, la distanza del punto da uno degli asintoti tende a zero. Se infatti indichiamo con y, y_1 le ordinate dei punti della iperbole e di un asintoto che corrispondono ad uno stesso valore, ad es. positivo, di x e cadono in uno stesso quadrante, ad es. nel primo, abbiamo

$$y_1 - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}};$$

ed è chiaro che l'ultima frazione, ove il radicale va preso positivamente, tende a zero quando x cresce indefinitamente.

Se $a = b$, gli asintoti sono perpendicolari e la iperbole $x^2 - y^2 = a^2$ dicesi *equilatera*.

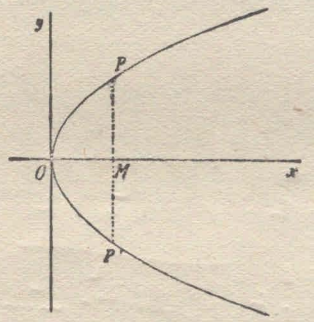
III. Finalmente la curva

$$y^2 = 2px, \tag{3}$$

detta *parabola*, passa per l'origine (*vertice*), sega ivi in due punti coincidenti l'asse y (tangente nel vertice), e non sega in altri punti l'asse x. La (3), scritta così

$$(3') \qquad y = \pm\sqrt{2px},$$

indica che i punti reali della curva hanno tutti ascissa positiva (o nulla), essendo per ipotesi $p > 0$; sicchè la curva sta tutta da una stessa banda dell'asse y. Mentre x cresce da 0 a $+\infty$, il valore assoluto di y cresce pure da 0 a $+\infty$, la curva va scostandosi sempre più dall'asse x, al disopra e al disotto simmetricamente, e si estende all'infinito.



La parabola si compone adunque di un solo ramo, che si estende all'infinito, e possiede un (unico) asse di simmetria, *asse* della parabola.

63. Alcune generazioni di curve del secondo ordine.

a) *Il luogo di un punto, le cui distanze da due punti fissi (fuochi) hanno una data somma o una data differenza, è, rispettivamente, una ellisse, od una iperbole.*

Detti F, F' i due punti fissi, si scelga la loro congiungente come asse x, e la perpendicolare nel punto medio O di FF' come asse y; si ponga poi $FF' = 2c$, sicchè le coordinate di F, F' saranno $(c, 0)$, $(-c, 0)$, e si chiami $2a$ la somma o differenza costante di cui parla l'enunciato. Indicando con (x, y) le coordinate di un punto P che descrive il luogo, si osservi che le distanze PF, PF' sono espresse (in valore assoluto) da

$$d = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \qquad d' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

e devono soddisfare alla condizione

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Per render questa razionale trasportiamo il primo radicale nel secondo membro ed innalziamo a quadrato; avremo, fatte alcune semplificazioni,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

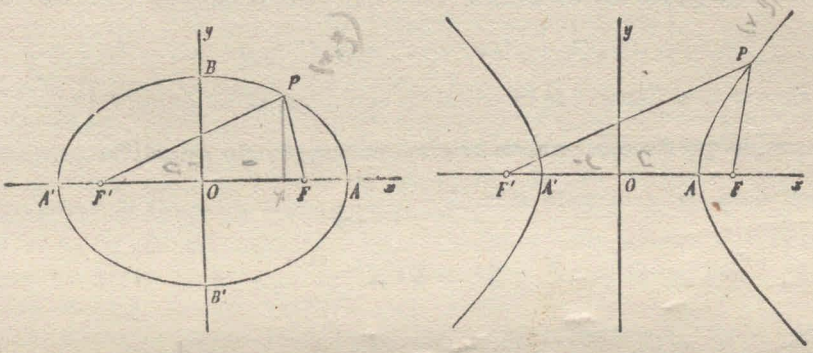
e di qua, mediante nuovo innalzamento a quadrato e riduzioni (nella ipotesi $a \neq c$),

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

È questa l'equazione del luogo, il quale è adunque del secondo ordine. Si badi però che, in conseguenza delle due elevazioni a quadrato, alla equazione (1) si arriva partendo da ciascuna delle quattro seguenti:

$$(2) \quad d + d' = 2a, \quad d - d' = 2a, \quad -d + d' = 2a, \quad -d - d' = 2a,$$

dove d e d' sono, come si disse, i valori assoluti dei due lati PF, PF' del triangolo PFF'. Ora, se $a > c$ e quindi $2a > F'F$, delle quattro relazioni (2) solo la prima può sussistere (in virtù delle note disuguaglianze



fra i lati di un triangolo); in questa ipotesi adunque la (1), che può scriversi così

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (b^2 = a^2 - c^2)$$

rappresenta una *ellisse* (n. 62, I), luogo dei punti le cui distanze da F, F' hanno costante la *somma* (ed uguale a $2a$, che è il maggiore dei due assi della curva).

Se invece $a < c$ e quindi $2a < F'F$, delle (2) può sussistere la seconda o la terza; e la (1), che può scriversi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (b^2 = c^2 - a^2)$$

rappresenta una *iperbole* (n. 62, II), luogo dei punti le cui distanze da F, F' hanno costante la *differenza* (ed uguale a $2a$, che è la lunghezza dell'asse secante la curva); questa differenza è positiva o negativa, secondo il ramo d'iperbole che si considera.

b) *Il luogo di un punto, le cui distanze da un punto fisso (fuoco) e da una retta fissa (direttrice) hanno un dato rapporto, è una ellisse, una parabola od una iperbole, secondo che quel rapporto è inferiore, uguale o superiore all'unità.*

Assunta la retta fissa come asse delle y, e la perpendicolare a questa dal punto fisso F come asse delle x, detta f l'ascissa di F ed e il rap-

porto dato, potremo scrivere la relazione a cui soddisfano le coordinate (x, y) di un punto P del luogo sotto la forma

$$\frac{\pm\sqrt{(x-f)^2+y^2}}{x} = e,$$

ossia

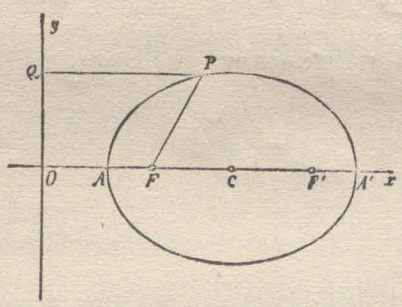
$$(3) \qquad (1-e^2)x^2 + y^2 - 2fx + f^2 = 0.$$

Si tratta dunque di una curva del secondo ordine, la quale sega l'asse x nei punti le cui ascisse sono date dall'equazione

$$(1-e^2)x^2 - 2fx + f^2 = 0.$$

Se $e \neq 1$, si hanno due intersezioni equidistanti dal punto $C\left(\frac{f}{1-e^2}, 0\right)$. Assumendo questo come nuova origine, ed eseguendo quindi la traslazione di assi data dalle formole $x = X + \frac{f}{1-e^2}$, $y = Y$, la (3) si muta nella

$$(1-e^2)X^2 + Y^2 - \frac{f^2e^2}{1-e^2} = 0,$$



ossia, ponendo $\frac{f^2e^2}{(1-e^2)^2} = a^2$,

$$(3') \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2(1-e^2)} = 1,$$

la quale rappresenta una *ellisse* se $e < 1$, od una *iperbole* se $e > 1$. La nuova origine C è centro della curva; la distanza CF è data da [1]

$$c_1 = f - \frac{f}{1-e^2} = -\frac{fe^2}{1-e^2}.$$

Se invece $e = 1$, la curva (3) sega l'asse x nel solo punto $\left(\frac{f}{2}, 0\right)$; trasportando ivi la origine colle formole $x = X + \frac{f}{2}$, $y = Y$, la (3) diventa

$$(3'') \qquad Y^2 = 2fX,$$

e rappresenta una parabola (n. 62, III).

---

[1] Nella ipotesi che la (3') e la (1) rappresentino una stessa curva, risulta dal confronto

$$c^2 = a^2e^2 = \frac{f^2e^4}{(1-e^2)^2} = c_1^2, \qquad \text{ossia } e = \pm c_1,$$

donde si ricava che le due denominazioni di fuoco adoperate negli enunciati *a)* e *b)* concordano.

Esercizi. — 1) Si scrivano le equazioni polari della ellisse e della iperbole, assumendo come polo il centro. Quali sono i punti della curva che hanno dal centro distanze massime o minime?

2) Si trasformi l'equazione di una iperbole, assumendo come nuovi assi coordinati gli asintoti. Si arriverà ad una equazione del tipo $XY = \text{cost.}$, la quale adunque rappresenta una iperbole. Si deduca dalla nuova equazione che un punto, il quale, descrivendo la curva, vada allontanandosi dal centro, si avvicina sempre più ad un asintoto.

3) Una ellisse può rappresentarsi mediante le equazioni parametriche $x = a\cos\varphi$, $y = b \operatorname{sen}\varphi$; qual'è il significato geometrico del parametro φ? (Si descriva il cerchio concentrico all'ellisse, che ha il raggio a, oppure b, ecc.).

4) Per la iperbole possono servire le equazioni parametriche $x = a \sec\varphi$, $y = b \operatorname{tg}\varphi$; qui il parametro ha un significato meno semplice.

5) Se un segmento di lunghezza costante scorre coi suoi estremi sopra due rette ortogonali fisse x, y, un punto qualsiasi del segmento descrive una ellisse avente gli assi sopra x, y; su questa proprietà è fondato il *compasso ellittico* che descrive la curva con un moto continuo (Proclo, v secolo d. C.).

6) In un triangolo isoscele ORS è fisso un estremo O della base, la retta x sopra cui questa si trova, e la lunghezza $OR = RS$ del lato; quale luogo descrive un punto di RS, mentre S percorre x?

7) Il luogo dei centri dei cerchi che toccano due cerchi fissi si compone di due curve del secondo ordine aventi per fuochi i centri di questi cerchi.

8) Qual'è il luogo dei centri dei cerchi che toccano un dato cerchio ed una data retta?

9) Luogo dei centri dei cerchi che intercettano su due rette x, y, ad es. ortogonali, corde di data lunghezza.

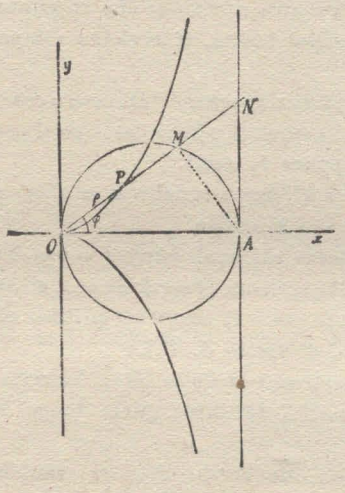
64. La Cissoide ed il problema della duplicazione del cubo. — Negli ultimi numeri di questo Capitolo ci occuperemo di alcune curve superiori algebriche (nn. 64-66), o trascendenti (nn. 67-70), limitandoci a brevi cenni, giacchè un esame più particolareggiato esigerebbe l'uso del calcolo infinitesimale.

Talune di queste curve presentano anche uno speciale interesse storico, giacchè furono introdotte dai geometri greci allo scopo di risolvere problemi, che essi non riuscivano a trattare cogli strumenti classici: riga e compasso. Un esame profondo compiuto nel secolo XIX ha condotto a stabilire le condizioni cui deve soddisfare un problema geometrico, perchè esso sia risolubile mediante intersezioni di rette e cerchi, ed a riconoscere che quelle condizioni non sono verificate pèr i problemi suddetti. D'altra parte, un problema determinato può sempre risolversi mediante intersezioni di curve convenienti; caso per caso si dovrà esaminare quali sieno le curve che forniscano la risoluzione più semplice, o più elegante.[1]

[1] Il lettore troverà maggiori particolari su questo soggetto nell'articolo «Sui problemi geometrici» pubblicato in fine del presente Volume.

Una dei problemi a cui sopra si allude, e di cui tra poco parleremo, si risolve mediante una curva scoperta dal geometra DIOCLE (II secolo av. Cr.), e detta *Cissoide*. Eccone la generazione.

Si parta da una circonferenza, della quale sia segnato un punto O e la tangente nel punto diametralmente opposto A; condotta per O una trasversale ad arbitrio, che seghi di nuovo la circonferenza in M e la tangente in N, si prenda sulla trasversale un segmento $OP = MN$ (in valore e segno). Il luogo descritto dal punto P, al variare della trasversale, è la cissoide.



È facile scrivere la equazione della curva in coordinate polari (ϱ, φ), prendendo O come polo ed OA come asse polare; detto a il diametro del cerchio, si ha infatti

$$\varrho = OP = MN = AN \operatorname{sen}\varphi = OA \operatorname{tg}\varphi \operatorname{sen}\varphi,$$

e quindi infine

$$(1) \qquad \varrho = a \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

Da questa, colle note formole di trasformazione (n. 37), si passa alla equazione in coordinate cartesiane ortogonali, essendo O l'origine ed OA l'asse x:

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)\, x - a\, y^2 = 0.$$

La cissoide è dunque del *terzo ordine*, ed è simmetrica rispetto all'asse x (n. 46). L'equazione risolta rispetto ad y,

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a - x}},$$

fa vedere che la curva è tutta compresa nella striscia fra l'asse y $(x = 0)$ e la tangente al cerchio in A $(x = a)$, e si estende all'infinito al disopra e al disotto dell'asse x, mentre va avvicinandosi sempre più alla detta tangente; questa dicesi *asintoto* della curva.

I due rami di curva separati dall'asse x si congiungono in O, dove la curva ha un punto *singolare*. La particolarità di O consiste in ciò: se per O conduciamo una retta generica (ad es. la OP)

$$(3) \qquad y = mx$$

e ne cerchiamo le intersezioni colla curva (1), siamo condotti a risolvere la equazione di terzo grado in x (ottenuta mediante eliminazione di y fra la (2) e la (3))

$$(1 + m^2)\, x^3 - a m^2 x^2 = 0,$$

che ha due radici nulle, e la terza diversa da zero, se $m \neq 0$.

Dunque ogni retta per O sega la curva in tre punti, *di cui due cadono in O*. Perciò si dice che O è un *punto doppio* della curva, anzi una *cuspide*, perchè una sola retta uscente da O, la $y = 0$, sega ivi la curva in *tre* punti coincidenti.

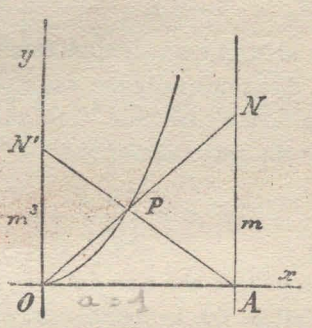
Ricavando dall'ultima equazione la radice x non nulla, e dalla (3) il corrispondente valore di y, troviamo che le coordinate di un punto P generico della curva possono porsi sotto la forma

$$(4) \qquad x = \frac{a m^2}{1 + m^2}, \qquad y = \frac{a m^3}{1 + m^2};$$

queste possono riguardarsi come *equazioni parametriche* della cissoide (n. 52).

La cissoide serve a risolvere il *problema della duplicazione del cubo* (o *problema di Delo*), intorno a cui le notizie risalgono al v secolo av. Cr. Questo problema, che è irresolubile colla riga e col compasso, si enuncia così: *dato un segmento, costruire un secondo segmento il cui cubo abbia volume doppio del cubo costruito sul segmento primitivo.* Preso il segmento dato come unità di lunghezza, ed indicato con x il segmento incognito, si deve dunque risolvere geometricamente l'equazione $x^3 = 2$.

A tal fine riprendiamo la cissoide, assumendo ora il diametro OA del cerchio come unità di lunghezza ($a = 1$). Condotta la retta (3) per O, questa sega la retta AN ($x = 1$) nel punto N di ordinata $AN = m$, e la cissoide, nel punto P di coordinate (4), ove si ponga $a = 1$. Congiungiamo ora P con A (1, 0). Scrivendo l'equazione della retta AP, si verifica facilmente che essa incontra l'asse y nel punto N' di ordinata $ON' = m^3$. Colla costruzione eseguita nell'ordine inverso si può dunque, quando sia dato un segmento $ON' = m'$, costruire il segmento $AN = \sqrt[3]{m'}$, e se $m' = 2$, ossia $ON' = 2\,OA$, si viene a risolvere il problema di Delo.



65. La Concoide della retta e la trisezione dell'angolo. — La *concoide della retta* (o di NICOMEDE, II secolo av. Cr.) si definisce così. Data una retta d (*base*) ed un punto O (*polo*) fuori della retta, sopra ogni trasversale condotta per O e secante d in un punto M, si porti, dall'una e dall'altra banda di M, un segmento $MP = MQ$ avente una lunghezza l assegnata (*intervallo*); il luogo dei punti P e Q è la concoide. Assunto O come polo, la OA perpendicolare a d come asse polare, e posto $OA = a$, l'equazione polare della concoide è [1]

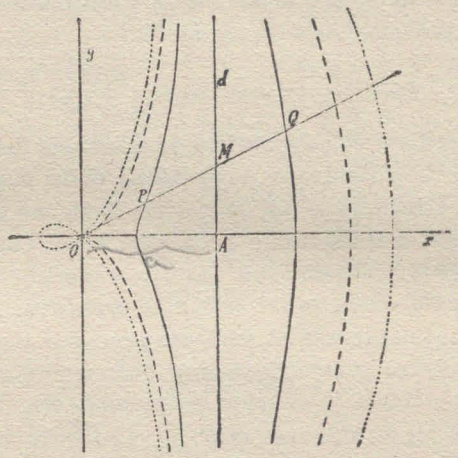
$$(1) \qquad \varrho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l;$$

[1] Si può anche assumere, innanzi ad l, sempre il segno $+$, pur di lasciar variare φ oltre ai limiti π e $-\pi$, interpretando i valori negativi del raggio vettore secondo una convenzione accennata nel n. 37.

e l'equazione cartesiana ortogonale, rispetto all'origine O e all'asse x coincidente con OA,

$$(2) \qquad (x^2 + y^2)(x - a)^2 - l^2 x^2 = 0.$$

La curva è del *quarto ordine*, simmetrica rispetto all'asse x (n. 46).



e si compone di due rami situati da bande opposte rispetto alla retta d; i due rami vengono rappresentati insieme dall'equazione cartesiana scritta in forma razionale, e quindi costituiscono una *unica* curva algebrica. La (2), posta sotto la forma

$$y^2 = x^2 \left[\frac{l^2}{(x-a)^2} - 1\right] = \frac{x^2}{(x-a)^2}(l + x - a)(l - x + a),$$

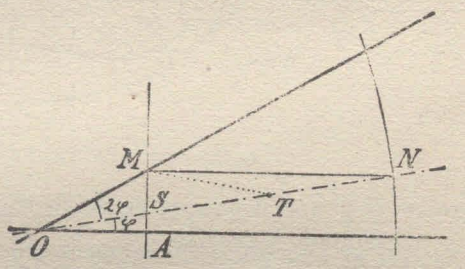
fa vedere che uno dei due rami è compreso fra le rette $x = a$, $x = a + l$, l'altro fra le rette $x = a - l$, $x = a$; inoltre che i due rami, mentre si allontanano dall'asse x, vanno sempre più avvicinandosi alla retta base $x = a$.

La origine soddisfa colle sue coordinate all'equazione (2) della curva, ed è anzi *un punto doppio*, perchè una retta generica uscente da O, $y = mx$, sega la curva in quattro punti di cui *due* cadono sempre in O, mentre gli altri due sono in generale distinti da O ed hanno le ascisse $x = a \pm \frac{l}{\sqrt{1+m^2}}$. Uno di questi viene però a coincidere con O, se $l : \sqrt{1+m^2} = a$, ossia se $m = \pm \frac{1}{a}\sqrt{l^2 - a^2}$. Ora ad un siffatto valore di m non corrisponde nessuna retta se $l < a$; accade allora che, mentre il punto O appartiene alla curva per la ragione analitica sopra esposta, nessun *ramo continuo* di curva passa per O; ed O dicesi *punto isolato*. Se invece $l = a$, allora la sola retta $y = 0$ ha tre punti riuniti in O comuni colla curva, ed O è una

cuspide. Finalmente, se $l > a$, ciascuna delle due rette $y = \pm \frac{x}{a}\sqrt{l^2 - a^2}$ ha in comune colla curva tre punti riuniti in O, ed il punto O (per cui un ramo passa due volte) dicesi *nodo* della curva. I tre casi sono rappresentati, nella figura della pagina 90, rispettivamente con segno continuo, tratteggiato o punteggiato.

La concoide della retta (che potrebbe generarsi per moto continuo mediante uno strumento facilmente immaginabile) permette di dividere un angolo qualsiasi in tre parti uguali, mentre la costruzione non può eseguirsi colla riga e col compasso.

Detto $A\hat{O}M$ l'angolo in questione, da un punto M di un lato si conduca la perpendicolare MA sull'altro lato, e si descriva poi la concoide che ha il vertice O come polo, la retta MA come base, e il doppio del segmento OM come intervallo; di questa concoide basta il ramo che è separato da O mediante la base. Condotta per M la parallela ad OA, fino ad incontrare in N il detto ramo di curva, si congiunga N con O; dico che l'ultima retta forma con OA un angolo $\varphi = \frac{1}{3} A\hat{O}M$. Infatti, se indichiamo con S il punto in cui ON sega MA, e con T il punto medio di SN, per una nota proprietà del triangolo rettangolo SMN si ha $MT = \frac{1}{2} SN = OM$ (metà dell'*intervallo*), quindi



$$T\hat{O}M = M\hat{T}S = 2M\hat{N}O = 2N\hat{O}A,$$

ciò che giustifica la nostra affermazione.

66. Curva di Cassini.[1] — La curva si definisce come luogo dei punti le cui distanze da due punti fissi F, F' (*fuochi*) dànno un prodotto costante. Assunta la retta FF' come asse x di un sistema ortogonale avente l'origine nel punto medio O del segmento FF', posto $FF' = 2c$, e detto a^2 il prodotto costante, l'equazione della curva è

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2,$$

o, in forma razionale,

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = a^4.$$

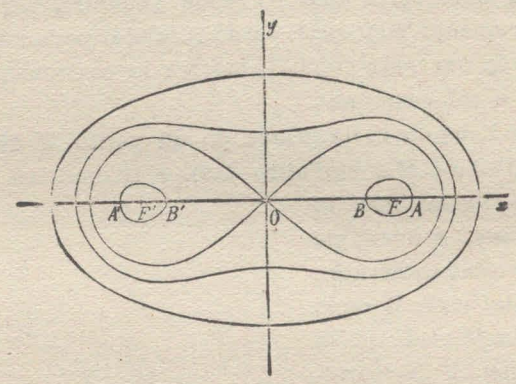
[1] Astronomo del XVII secolo, il quale emise la ipotesi che la terra potesse descrivere una curva siffatta intorno al sole, anzichè una ellisse.

La curva è del *quarto ordine*, simmetrica rispetto agli assi x ed y (n. 46).

L'equazione, risolta rispetto ad y^2, ci dà

$$y^2 = -(x^2 + c^2) \pm \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}, \tag{2}$$

dove la quantità sotto al radicale è positiva, per x reale. Però dei due



valori di y^2 uno è sempre negativo e non dà punti reali; l'altro è positivo (o, al minimo, nullo) se

$$a^4 + 4c^2x^2 \geqq (x^2 + c^2)^2,$$

ossia se

$$a^2 \geqq |\, x^2 - c^2 \,|\,,$$

dove il secondo membro indica il valore assoluto della espressione scritta. Staccando i due casi $x^2 \gtrless c^2$, abbiamo in fine le limitazioni

$$c^2 - a^2 \leqq x^2 \leqq a^2 + c^2.$$

Di qua vediamo intanto che la curva è tutta compresa nella striscia definita dalle parallele ad y condotte per i punti A ed A' di ascisse $\pm\sqrt{a^2 + c^2}$.

Inoltre, se $a < c$, fra le parallele ad y condotte per i punti B e B', di ascisse $\pm\sqrt{c^2 - a^2}$, non si trovano punti reali della curva; e quindi la curva si spezza in due parti (ovali), di cui una è compresa fra le parallele uscenti da A e B, e l'altra è simmetrica a questa rispetto ad y.

Se $a = c$, la curva, di cui l'equazione può scriversi così

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0,$$

passa per l'origine, e si compone di un solo ramo annodato nell'origine; essa porta il nome di *lemniscata di* BERNOULLI (1694), ed ha una semplice equazione polare (rispetto al polo O e all'asse polare x):

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi, \tag{3}$$

la quale mostra che i due tratti annodantisi in O hanno ivi per tangenti le bisettrici dell'angolo degli assi $\left(\text{giacchè si ha } \varrho = 0 \text{ quando } \varphi = \pm\frac{\pi}{4}\right)$.

Finalmente se $a > c$, la curva si compone di un unico tratto ovale non passante per l'origine.

Risolvendo la (1) rispetto ad x^2, il lettore potrà vedere che la ordinata di un punto della curva di CASSINI è limitata dalla condizione $|y| \leqq \frac{a^2}{2c}$; al segno di uguaglianza corrispondono quattro punti di incontro della curva col cerchio di centro O e raggio OF, punti che sono reali finchè $a \leqq c\sqrt{2}$, ed hanno effettivamente l'ordinata massima (in valore assoluto). Ma se $a > c\sqrt{2}$, il cerchio non sega la curva in punti reali, ed il massimo valore dell'ordinata è raggiunto nei punti $x = 0, y = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$. Conviene adunque spezzare la ipotesi $a > c$, che conduce ad una ovale, nelle due ipotesi $a \leqq c\sqrt{2}$ (ovale schiacciata vicino all'asse y), $a > c\sqrt{2}$ (ovale propriamente detta).

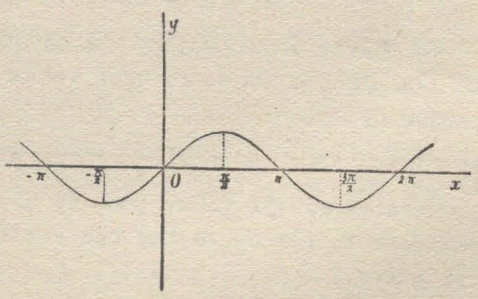
67. Sinusoide. — È la curva definita dall'equazione

$$y = \operatorname{sen} x, \tag{1}$$

in coordinate ortogonali. Essa passa per l'origine, sega l'asse x in infiniti punti di ascissa $k\pi$, dove k è un intero qualsiasi positivo o negativo, e compie infinite oscillazioni fra le rette $y = +1$, $y = -1$, che raggiunge nei punti di ascissa $\frac{(4k+1)\pi}{2}$, $\frac{(4k+3)\pi}{2}$, rispettivamente.

La sinusoide è simmetrica rispetto all'origine (n. 46) e rispetto a tutte le sue intersezioni coll'asse x. È simmetrica inoltre, come è facile verificare, rispetto alle rette

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2}.$$



Una traslazione della curva parallelamente all'asse x di un segmento uguale a 2π (o ad un multiplo di 2π) riporta la curva su sè stessa; si dice perciò che la curva (o la funzione sen x) è *periodica* col *periodo* 2π.[1]

Se si trasporta l'asse delle y parallelamente a sè stesso, finchè la

[1] In generale, si dice che la funzione $f(x)$, o la curva $y = f(x)$, è *periodica* col *periodo* T, quando $f(x+T) = f(x)$, qualunque sia x.

nuova origine cada nel punto di ascissa arbitraria c, l'equazione della curva diviene, indicando ora con x la nuova ascissa (n. 34, 1),

(2) $$y = \operatorname{sen}(x + c).$$

In particolare, se $c = \frac{\pi}{2}$, si ha l'equazione $y = \cos x$; sicchè la curva dei coseni non differisce dalla curva dei seni, se non per la posizione dell'origine.

Se inoltre supponiamo di alterare le ordinate della curva (2) in un rapporto costante, e le ascisse in un altro rapporto costante, di guisa che sia $y = \frac{1}{a} y', x = b x'$, si otterrà, sostituendo e sopprimendo gli apici, la *curva sinusoidale*

(3) $$y = a \operatorname{sen}(b x + c),$$

che ha una forma analoga alla sinusoide. Questa curva, pure periodica, interviene continuamente nella teoria dei movimenti vibratori. Il massimo valore di y, che è a, si suol ivi chiamare *ampiezza;* la distanza tra due intersezioni successive di due rami ascendenti coll'asse x, data da $T = \frac{2\pi}{b}$, si chiama *periodo;* finalmente, nella ipotesi $0 \leqq -c < 2\pi$ (che può sempre supporsi realizzata, data la periodicità della curva), dicesi *fase* l'espressione $p = -\frac{c}{2\pi} = -\frac{c}{b} : T$, che è il rapporto tra la minima ascissa positiva di una intersezione di un ramo ascendente di curva coll'asse x, ed il periodo. Colle nuove notazioni la (3) si presenta sotto la forma

$$y = a \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{x}{T} - p\right).$$

68. Curve logaritmiche ed esponenziali. — Se a è una quantità positiva, diversa da 1, ad ogni valore reale di y corrisponde *un* valore positivo di

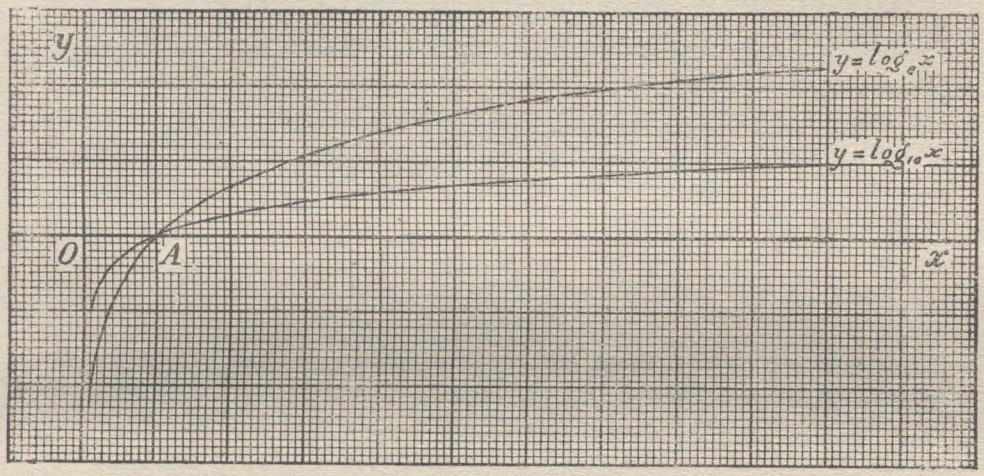
(1) $$x = a^y;$$

e, viceversa, ad ogni valore positivo di x corrisponde *un* valore reale di y soddisfacente alla (1). Si dice che y è il *logaritmo* di x *rispetto alla base* a, e si scrive

(2) $$y = \log_a x.$$

La (2) rappresenta, in coordinate cartesiane ortogonali, una curva *logaritmica* con base a. La curva si compone di un sol ramo, che sta tutto a destra dell'asse y, ed è segato in un sol punto dalle rette parallele all'asse x, e dalle rette parallele all'asse y corrispondenti ad ascisse posi-

tive. La curva attraversa l'asse x nel punto A di ascissa 1, perchè $\log 1 = 0$; inoltre, se si suppone $a > 1$, si riconosce che $y \gtrless 0$, secondo che $x \gtrless 1$,[1] e precisamente $y = 1$ per $x = a$. L'ordinata ha per limite $y = -\infty$ quando x tende a 0, ed ha per limite $+\infty$ quando x va crescendo illimitatamente. Si deduce che il punto A spezza la curva in due tratti, di cui uno sta al disotto dell'asse x e si avvicina indefinitamente all'asse y (*asintoto*), mentre l'altro sta al disopra dell'asse x e va innalzandosi sempre più, a mano a mano che il punto che lo percorre si allontana da A.



Volendo descrivere la curva con sufficiente esattezza, si attribuisca anzitutto alla base un valore in corrispondenza al quale si possegga una tavola di logaritmi, ad es. $a = 10$. Costruita per punti la curva (2), si riesce a tracciare la curva logaritmica corrispondente ad un'altra base qualsiasi b,

$$y_1 = \log_b x,$$

pur di alterare tutte le ordinate della prima curva in un rapporto costante, che si calcola subito prendendo i logaritmi, a base b, dei due membri della (1); si ottiene infatti

$$y_1 = y \log_b a = y : \log_a b.$$

Graficamente il rapporto rimane determinato dal fatto che la seconda curva deve passare per il punto $(b, 1)$.

[1] I segni di y si scambiano, se $a < 1$.

Tra le infinite curve logaritmiche (*affini* tra loro) che si possono tracciare è notevole quella dei logaritmi naturali

$$y = \log_e x, \tag{3}$$

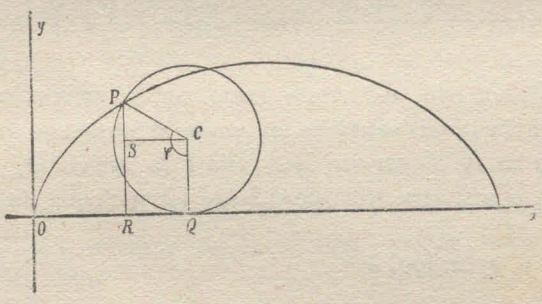
la cui base è il noto numero [1]

$$e = 2{,}71828...$$

La curva dei logaritmi naturali si distingue dalle altre curve logaritmiche per il fatto che la tangente alla curva in A forma l'angolo $\frac{\pi}{4}$ ($= 45°$) coll'asse x. Infatti la derivata di $\log_e x$ è $\frac{1}{x}$, come insegna il Calcolo differenziale, e quindi, per $x = 1$, il rapporto direttivo della tangente vale 1 (n. 47).[2]

Si noti infine che la curva logaritmica (2) si può anche riguardare come rappresentata dall'equazione (1), ed in tal senso può chiamarsi *curva esponenziale*. In particolare, le due curve della figura corrispondono alle equazioni $x = 10^y$, $x = e^y$.

69. Cicloide. — È la curva generata da un punto di una circonferenza, la quale rotoli senza strisciare sopra una retta fissa (*base*). La cicloide si compone di infinite arcate, tutte uguali, le quali poggiano sulla base in punti che distano l'uno dall'altro di $2\pi r$, essendo r il raggio del cerchio generatore; ad una delle dette arcate si limita, di solito, il nome di cicloide. Si assuma come origine O di un sistema ortogonale la origine di un'arcata (posizione in cui il punto generatore della curva si porta nel punto di contatto fra il cerchio e la base) e come asse x la base. Indicando con C il centro del cerchio mobile in un determinato istante, con P la posizione corrispondente del punto generatore, e con Q il punto in cui il cerchio stesso tocca la base, è facile esprimere



---

[1] Per passare dalla curva dei logaritmi decimali alla curva dei logaritmi naturali si tenga conto dei valori

$$\log_{10} e = 0.43429..., \quad \log_e 10 = 2{,}30258...$$

[2] La derivata di $\log_a x$ vale $\frac{1}{x} \log_a e$; quindi il rapporto direttivo della tangente alla curva $2 = A$ vale $\log_a e$.

le coordinate x, y di P in funzione dell'angolo $Q\widehat{O}P = \varphi$. Notando infatti che $OQ =$ arco $QP = r\varphi$, si hanno subito le equazioni parametriche della cicloide

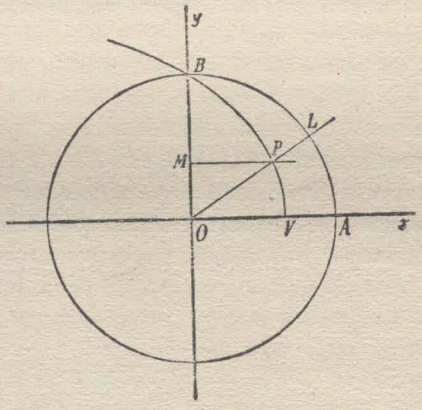
$$x = r(\varphi - \operatorname{sen}\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi),$$

ed, eliminando φ $\left(= \text{arc cos}\dfrac{r-y}{r}\right)$, la equazione cartesiana

$$x = r \operatorname{arc\,cos}\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

La cicloide è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi r$, che passa per il punto più elevato ($y = 2r$) della curva. La cicloide fu argomento di numerose ricerche, nel secolo XVII, da parte di GALILEO, TORRICELLI, ROBERVAL, PASCAL ed altri.

70. Quadratrice di DINOSTRATO (IV secolo av. Cr.). — Siano OA, OB due raggi perpendicolari di un cerchio; due punti mobili L, M descrivono, con moto uniforme, rispettivamente la circonferenza ed il diametro OB, in guisa che essi, partendo nel tempo stesso da A e da O, giungano insieme in B; il luogo del punto P, in cui la parallela ad OA condotta per M sega la retta OL, è la quadratrice.



Detti ρ e φ le coordinate polari di P rispetto al polo O e all'asse polare OA, posto $y = OM$, e preso come unità il raggio del cerchio, si ha la relazione

$$y = \frac{2\varphi}{\pi}$$

Da questa si trae l'equazione polare della curva

$$\rho = \frac{2}{\pi}\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi},$$

e l'equazione cartesiana $\left(\text{poichè } \varphi = \dfrac{\pi y}{2},\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}\right)$

$$y = x \operatorname{tg}\frac{\pi y}{2}.$$

Posto $y = 0$, l'equazione darebbe un valore indeterminato per x. Tuttavia come punto V di partenza della curva dall'asse x (*vertice*) è naturale assumere il punto, il cui raggio vettore è dato da

$$\lim_{\varphi = 0}\rho = \frac{2}{\pi}\lim_{\varphi = 0}\frac{\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{2}{\pi}.$$

Il segmento terzo proporzionale dopo OV ed OA vale adunque $\frac{\pi}{2}$, ed è uguale al quadrante di circonferenza. Questa ed altre simili applicazioni della curva alla rettificazione e quadratura del cerchio giustificano il nome dato ad essa.

Esercizi I. — 1) Date due rette ortogonali x, y uscenti da O ed un punto A sopra x, si conduca per A una trasversale variabile; detto M il punto in cui questa sega y, si portino sopra la trasversale, a partire da M, due segmenti MP, MQ uguali ad MO; i punti P e Q descrivono una curva del terzo ordine, detta *strofoide*, la quale ha un nodo in O. Si domandano le equazioni cartesiana e polare della curva.

2) Una generazione meccanica, dovuta a NEWTON, della cissoide (n. 64) e della strofoide si ottiene così. Siano x, y due rette ortogonali uscenti da O, ed A sia un punto di x; si immagini ora un angolo retto $A\widehat{P}R$, un cui lato AP, di lunghezza variabile, passi costantemente per A, mentre l'altro lato $PR = AO$, di lunghezza costante, scorra coll'estremo R lungo y; il vertice P dell'angolo descrive una strofoide, ed il punto medio di PR descrive una cissoide. Qual'è l'equazione del luogo descritto da un punto generico di PR?

3) La cissoide, la strofoide e la lemniscata (n. 66) si ottengono pure da curve del secondo ordine mediante la trasformazione per inversione (n. 61, es. 16); precisamente, la prima curva è l'inversa di una parabola rispetto al vertice, la terza è l'inversa di una iperbole equilatera $x^2 - y^2 = a^2$ rispetto al centro, e la seconda è l'inversa della stessa iperbole rispetto ad un vertice. (Si adoperino le equazioni polari delle rispettive curve).

4) Un'altra generazione della lemniscata si ottiene partendo da un cerchio e da due sue tangenti ortogonali secantisi in un punto O, conducendo per O una trasversale variabile che seghi il cerchio in M, N, e prendendo su questa i due segmenti $OP = -OP' = MN$; il luogo dei punti P, P' è una lemniscata.

5) Se sopra una trasversale variabile, condotta per un punto fisso O di un cerchio, si portano, a partire dalla seconda intersezione M col cerchio, due segmenti $MP = -MP'$ uguali ad un segmento costante l, i punti P e P' descrivono una curva del quarto ordine, detta *concoide del cerchio* o *lumaca di* PASCAL. Nello studiare la forma della curva si distinguano i tre casi $l \lessgtr 2r$, essendo r il raggio del cerchio; per $l = 2r$ la curva dicesi pure *cardioide*.

6) La *lumaca* di PASCAL può pure definirsi come il luogo dei piedi delle perpendicolari calate da un punto fisso O sopra le tangenti ad un cerchio C qualsiasi (*podaria* del punto rispetto al cerchio). La nuova costruzione si riconduce alla precedente, ove si consideri il cerchio che ha per diametro la distanza di O dal centro del cerchio C.

7) La curva inversa della *lumaca* di PASCAL rispetto al punto O è una curva di secondo ordine, di cui si dimostra che O è fuoco (n. 63). Invertendo questa osservazione, si ha una terza definizione di quella curva.

8) Un segmento MN, di lunghezza costante a, scorre coi suoi estremi lungo due rette ortogonali x, y uscenti da O. Siano P e Q i piedi delle perpendicolari

calate sul segmento da O e dal quarto vertice del rettangolo avente i lati OM, ON. I punti P e Q descrivono due curve del sesto ordine, delle quali la prima (che passa con quattro rami per O) dicesi *rosa a quattro foglie*, mentre la seconda (non passante per O) dicesi *astroide*. L'equazione di quest'ultima può porsi sotto la forma semplice $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Si dimostra col Calcolo differenziale, o colle considerazioni dell'es. 26), che l'astroide ha come tangente, in ogni suo punto, la relativa posizione della retta MN; di qua si può trarre una nuova definizione della curva.

9) Un punto P, il quale vari in modo che le sue distanze da due punti fissi A, B siano legate da una relazione lineare $aPA + bPB = c$ (a, b, c costanti), descrive una curva del quarto ordine, detta *ovali di* CARTESIO.

10) Data una circonferenza con due diametri ortogonali x, y, da un estremo del primo si conduca una trasversale variabile che seghi y in M e il cerchio nuovamente in N, poi si conducano da M, N le parallele ad x, y rispettivamente; il luogo del punto d'incontro di queste è una curva del terzo ordine.

II. — 11) Se un cerchio di raggio r ruota senza strisciare sulla periferia di un cerchio fisso di raggio R, un punto di quello descrive una curva detta *epicicloide* od *ipocicloide*, secondo che i due cerchi si toccano esternamente od internamente. Misurando il rotolamento mediante la lunghezza $R\varphi = r\psi$ dell'arco variabile del cerchio fisso e del cerchio mobile che viene percorso dal punto di contatto, le equazioni parametriche della epicicloide si presentano sotto la forma

$$\begin{aligned} x &= (R + r)\cos\varphi - r\cos(\varphi + \psi), \\ y &= (R + r)\operatorname{sen}\varphi - r\operatorname{sen}(\varphi + \psi), \end{aligned} \qquad (R\varphi = r\psi)$$

mentre le equazioni della ipocicloide si ottengono mutando il segno ad r. La curva è in generale trascendente; ma diviene algebrica quando $\frac{R}{r}$ è razionale. Così la ipocicloide, se $R = 2r$, si riduce ad un diametro del cerchio fisso (donde un mezzo per trasformare un movimento rotatorio in rettilineo); e se $R = 4r$, diviene un astroide (es. 8). La epicicloide, se i due cerchi sono eguali, diviene una cardioide (es. 5), ecc.

12) Intorno ad un cerchio fisso è avvolto un filo, un cui estremo cade nel punto P del cerchio; se ora si svolge il filo tenendolo teso pel detto estremo (in guisa che il tratto svolto PQ si mantenga sempre tangente al cerchio nel punto variabile Q), il punto P descrive una curva trascendente detta *sviluppante del cerchio*. Si ricerchino le equazioni parametriche, assumendo come parametro l'angolo al centro che insiste sull'arco di cerchio PQ.

13) Date due o più sinusoidi $y = a_i \operatorname{sen}(b_i x + c_i)$, dove $i = 1, 2, \ldots$, si può formare una nuova curva $y = \Sigma_i\, a_i \operatorname{sen}(b_i x + c_i)$, detta *curva armonica*, facendo corrispondere ad ogni valore dell'ascissa la somma delle ordinate delle sinusoidi date (*componenti*). La nuova curva in generale non è una sinusoide; e non è nemmeno periodica (n. 67), a meno che i periodi delle sinusoidi componenti non abbiano rapporti razionali; in quest'ultimo caso il periodo della curva armonica è il minimo multiplo dei periodi delle componenti. Se i periodi delle componenti sono tutti uguali ($b_1 = b_2 = \ldots = b$), la curva armonica (*risultante*) è essa pure

una sinusoide collo stesso periodo, ed ha una equazione del tipo $y = a \operatorname{sen}(bx + c)$, dove a (*ampiezza*) e c ($= -2\pi \times$ *fase*) sono il modulo e l'argomento del numero complesso che è somma dei numeri complessi aventi i moduli $a_1, a_2 \ldots$ e gli argomenti $c_1, c_2, \ldots$ In altre parole, il vettore a e l'anomalia c si ottengono graficamente dai caratteri analoghi delle componenti mediante l'operazione di somma dei vettori (n. 24; Oss.).

14) Tracciate le due curve esponenziali (n. 68) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, che sono mutuamente simmetriche rispetto all'asse y, sopra ogni parallela ad y si costruisca il punto medio del segmento intercettato tra le due curve. Il luogo del detto punto è una curva

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

detta *catenaria*, perchè lungo essa si dispone un filo pesante, flessibile ed inestendibile, di cui siano fissati gli estremi.

15) La funzione a secondo membro dell'ultima equazione si chiama *coseno iperbolico di x*, e si indica con $\cos h\, x$. Si costruisca la curva dei *seni iperbolici*,

$$y = \operatorname{sen} h\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

che passa per l'origine ed è simmetrica rispetto ad essa.

16) Una curva, che può in pratica sostituire una tavola di logaritmi, è la *spirale logaritmica*, che ha l'equazione polare

$$\rho = a^{\varphi}, \quad \text{oppure} \quad \varphi = \log_a \rho.$$

Attribuendo all'anomalia φ valori in progressione aritmetica, si hanno per ρ valori in progressione geometrica. Se dunque, insieme al polo O, son noti due punti A_0, A_1 della curva, si possono determinare infiniti altri punti $A_2, \ldots$ della curva, costruendo un triangolo $A_1 O A_2$, che sia simile al triangolo $A_0 O A_1$, ecc.; e si può anche costruire con mezzi elementari un punto $A_{1/2}$ della curva sulla bisettrice dell'angolo $A_0 O A_1$, ecc.

17) Se A, A' sono due punti della spirale logaritmica, ad ogni terzo punto B della curva corrisponde un quarto punto B' tale, che i triangoli AOB, $A'OB'$ risultino simili. Se A' si avvicina indefinitamente ad A, B' si avvicinerà indefinitamente a B. Segue che «in una spirale logaritmica è costante l'angolo formato dalla tangente in un punto qualsiasi col raggio vettore che passa per il punto». Dunque i punti di contatto delle tangenti parallele ad una retta data stanno sopra una retta passante per O, ed i punti di contatto delle tangenti condotte per un punto P del piano stanno sopra un cerchio passante per O e per P.

III. — 18) Da una curva qualsiasi $y = f(x)$ si può dedurre una nuova curva (*affine* a quella) $y = af(x)$, alterando tutte la ordinate in un rapporto costante. Detti *corrispondenti* sulle due curve due punti che abbiano ascisse uguali ed ordinate nel rapporto assegnato, risulta subito che la retta congiungente due punti dell'una curva sega sull'asse x la retta congiungente i punti corrispondenti dell'altra. Facendo poi tendere a zero la differenza tra le ascisse, risulta che le tangenti alle due curve in punti corrispondenti si segano sull'asse x. La prima proprietà permette di costruire la seconda curva, quando sia data la prima curva

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

ed un punto di quella; la seconda proprietà permette di costruire la tangente in un punto della seconda curva, quando sia nota la tangente nel punto corrispondente della prima.

19) Si applichino i risultati precedenti a costruire quanti si vogliano punti e tangenti di una ellisse, di cui siano dati in grandezza e posizione i due assi (n. 62, I)

20) Le curve logaritmiche $y = \log x$, corrispondenti a vari valori della base, si trovano nelle condizioni contemplate dall'es. 18). Segue che le tangenti a queste curve, in punti aventi la stessa ascissa, segano l'asse x in uno stesso punto. Si determini, in particolare, l'ascissa x_0 del punto di contatto di una delle curve, in guisa che la tangente passi per l'origine (nn. 47, 68); si troverà $x_0 = e$, donde la seguente determinazione geometrica del numero e: « costruita per punti una qualsiasi curva logaritmica (ad es. quella di base 10), si conduca ad essa la tangente dall'origine; l'ascissa del punto di contatto è il numero e ».

21) Se una figura piana di forma invariabile si muove con continuità sul proprio piano, i suoi punti $A, B, C...$ descrivono certe linee $AA'..., BB'..., CC'..., ...$ (*traiettorie*), sulle quali riguarderemo come corrispondenti le posizioni contemporanee dei punti mobili. Le rette, che bisecano perpendicolarmente corde corrispondenti $AA', BB', CC', ...$ di quelle curve, passano tutte per uno stesso punto o sono parallele (n. 39, es. 9). Se supponiamo ora che la figura $A'B'C'...$ ritorni alla posizione iniziale $ABC...$, ripassando per le posizioni intermedie, le lunghezze delle corde $AA', BB', CC'...$ tenderanno a 0, mentre le rette cui appartengono avranno come posizioni limiti le tangenti in $A, B, C,...$ alle dette traiettorie, e le perpendicolari sopra nominate diverranno le *normali* (cioè perpendicolari alle tangenti) alle traiettorie in $A, B, C,...$ Segue: « Se alle traiettorie dei punti di una figura invariabile, che scorra sul proprio piano, si conducono le normali in punti corrispondenti, esse vanno a passare per un medesimo punto (*centro istantaneo di rotazione*) o sono parallele ». Il movimento della figura può riguardarsi come risultante da una serie di rotazioni (o eventualmente traslazioni) infinitesime intorno ai successivi centri istantanei. Se alle traiettorie di due punti si sanno condurre direttamente le normali, si potranno condurre le normali alla traiettoria di ogni altro punto.

22) Valendosi della considerazione precedente e della costruzione della ellisse mediante il compasso ellittico (n. 63, es. 5), si conducano la normale e la tangente alla ellisse in un punto generico; (la figura mobile è il segmento di lunghezza costante...).

23) Nella costruzione della concoide della retta (n. 65, fig. di pag. 90) si riguardi $OPMQ$ come una figura invariabile, di cui il punto M descrive la retta d, due punti P, Q descrivono la concoide considerata, e finalmente il punto O, colle posizioni successive $O'...$ che assume (se si vuole che il segmento OM conservi lunghezza costante), descrive un arco di una seconda concoide avente per tangente in O la retta OM. In base a questa considerazione si può costruire il centro istantaneo di rotazione (es. 21), e quindi si possono condurre le normali alla prima concoide in P e Q.

24) Costruire la normale in un punto generico della concoide del cerchio (es. 5), della cissoide e della strofoide, servendosi per queste due ultime curve della generazione di NEWTON (es. 2).

25) Quando un cerchio rotola senza strisciare sopra una retta o sopra una curva, il centro istantaneo di rotazione sta nel punto di contatto. Valendosi di questo fatto, che si giustifica pure mediante considerazioni intuitive, si costruiscano la tangente e la normale in un punto generico della cicloide (n. 69). Si dimostri inoltre che la detta normale è tangente (in un punto di ordinata uguale e di segno opposto) ad una seconda cicloide, uguale alla prima, avente per base la retta $y = -2r$ e per sommità i punti $(0, 0)$, $(2\pi r, 0)$, ecc... L'*evoluta* di una cicloide (curva toccata dalle normali a questa) è dunque una nuova cicloide.

26) Condurre la normale e la tangente in un punto generico di una epicicloide od ipocicloide (es. 11). Considerando, in particolare, la ipocicloide per cui $R = 4r$, si dimostri che la tangente intercetta nell'angolo xy un segmento costante $= R$, e la normale passa per il vertice opposto ad O del rettangolo che ha due lati sugli assi e quel segmento come diagonale. Resta così confermato che, in quella ipotesi, la ipocicloide è un astroide (es. 8).

PARTE SECONDA.

Geometria analitica dello spazio

CAPITOLO I.

Relazioni di posizione tra punti, rette e piani.

71. Sistema cartesiano di coordinate. — Il procedimento seguito per fissare, mediante coordinate cartesiane, la posizione di un punto in un piano (n. 13) si estende subito allo spazio.

Per un punto O (*origine*) conduciamo tre rette x, y, z, non giacenti in un piano, che diremo *assi coordinati* (rispettivamente *asse* x, y, z); i piani che esse determinano a due a due saranno i *piani coordinati* xy, xz, yz. Fissiamo ad arbitrio sui tre assi i versi positivi, ed assumiamo un segmento come unità di misura.[1]

Conduciamo poi per un punto qualunque P dello spazio tre piani paralleli, rispettivamente, ai piani yz, zx, xy; quei piani segheranno, rispettivamente, gli assi x, y, z in tre punti A, B, C, sicchè rimarranno individuati, in valore e segno, tre numeri $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$.

Viceversa, dati i tre numeri a, b, c, restano individuati i punti A, B, C, e quindi il punto P, come intersezione di tre piani paralleli ai piani cordinati.

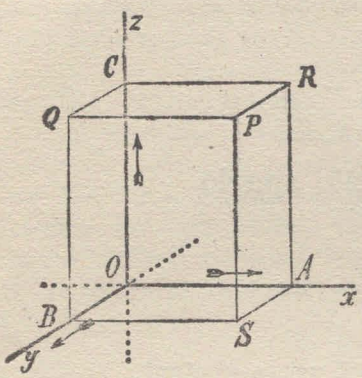
I tre numeri a, b, c si chiamano *coordinate cartesiane* del punto P

Sebbene i versi positivi sui tre assi possano scegliersi ad arbitrio, tuttavia la maggior parte degli autori adotta la scelta indicata nella figura. In parole: un osservatore, situato lungo l'asse z coi piedi in O ed il capo dalla banda positiva, il quale guardi la semiretta positiva x, deve avere alla sua destra la semiretta positiva y. Il verso (da sinistra a destra), in cui l'osservatore vedrebbe ruotare la semiretta positiva x, se questa si portasse a coincidere colla semiretta positiva y, descrivendo un angolo inferiore a π, si definisce come *verso positivo delle rotazioni* intorno alla retta orientata z. E questa definizione può estendersi alla rotazione intorno ad una qualsiasi retta orientata dello spazio, purchè si faccia muovere con continuità il triedro degli assi, finchè l'asse z venga a coincidere colla nuova retta.

Quanto all'unità di misura, si potrebbero, a dir vero, nei problemi di questo Cap. I, assumere, senza inconvenienti, tre unità diverse per misurare i segmenti paralleli ad x, y, z, rispettivamente. Ma la maggior generalità così ottenuta non avrebbe alcun vantaggio pratico, e perciò vi si rinuncia.

(rispettivamente *prima coordinata* od x, *seconda coordinata* od y, *terza coordinata* o z di P); e si scrive $P\ (a, b, c)$.

I tre piani passanti per P, e paralleli ai piani coordinati, racchiudono con questi un parallelepipedo, di cui O e P sono due vertici opposti; OA, OB, OC sono i lati uscenti da O, e PQ, PR, PS, rispettivamente ad essi uguali e paralleli, sono i lati uscenti da P. Ne viene che, volendo costruire il punto P di coordinate a, b, c, si può determinare su x il punto A tale che $OA = a$, condurre per A la parallela ad y, e prendere su questa il segmento $AS = b$ (diretto come il semiasse positivo o negativo y, secondo che b è positivo o negativo), e finalmente condurre per S la parallela a z, sulla quale si prenderà $SP = c$ (diretto come il semiasse positivo z, se $c > 0$, ecc.).



Così si viene a costruire una spezzata, che comincia nell'origine e termina in P, ed i cui lati successivi (tenuto conto delle loro direzioni) hanno per misura le coordinate di P. Altre spezzate della stessa natura si trovano considerando i tre assi in ordine diverso.

Gli otto vertici del parallelepipedo prima nominato hanno evidentemente le coordinate:

$$\begin{array}{llll} P\ (a, b, c), & Q\ (0, b, c), & R\ (a, 0, c), & S\ (a, b, 0), \\ A\ (a, 0, 0), & B\ (0, b, 0), & C\ (0, 0, c), & O\ (0, 0, 0). \end{array}$$

In generale, ogni punto del piano yz ha la x nulla, ogni punto del piano zx ha la y nulla, ed ogni punto del piano xy ha la z nulla. Per un punto dell'asse x sono nulle la seconda e la terza coordinata ($y = z = 0$), ecc.; l'origine ha nulle le tre coordinate.

I tre piani coordinati dividono lo spazio in otto regioni (triedri); a ciascuna regione corrispondono particolari segni per le coordinate. Così un punto, che si trovi nel triedro formato dalle semirette positive x, y, z, ha le tre coordinate positive, mentre un punto del triedro formato dalla semiretta negativa x e dalle semirette positive y, z, ha la prima coordinata negativa e le altre due positive, ecc.

Gli otto punti

$$\begin{array}{llll} (a, b, c), & (-a, b, c), & (a, -b, c), & (a, b, -c), \\ (a, -b, -c), & (-a, b, -c), & (-a, -b, c), & (-a, -b, -c), \end{array}$$

le cui coordinate differiscono solo per i segni, sono vertici di un parallelepipedo, che ha le facce parallele ai piani coordinati e le diagonali passanti per l'origine.

Se le coordinate di un punto sono uguali e di segno opposto alle coordinate di un secondo punto, i due punti sono simmetrici rispetto alla origine.

72. Punto che divide un segmento in un dato rapporto. — Proponiamoci il problema:

Dati due punti $P_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $P_2\ (x_2, y_2, z_2)$, *determinare le coordinate di quel punto* P *della retta* $P_1 P_2$, *che forma con essi un dato rapporto semplice* $\dfrac{P_1 P}{P_2 P} = r$.

Proiettiamo i tre punti P_1, P_2, P sopra uno degli assi coordinati (ad es. x) mediante piani paralleli al piano coordinato opposto ($y\,z$). Ragionando sui punti proiezione come in geometria piana (n. 14), ricaviamo che le coordinate di P sono

$$(1) \qquad x = \frac{x_1 - r\,x_2}{1 - r}, \qquad y = \frac{y_1 - r\,y_2}{1 - r}, \qquad z = \frac{z_1 - r\,z_2}{1 - r}.$$

In particolare il punto medio di $P_1 P_2$ $(r = -1)$ ha le coordinate

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

73. Retta congiungente due punti. — Ricavando r dalle relazioni (1), risulta

$$r = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2};$$

quindi le equazioni

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

son certo soddisfatte dalle coordinate (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) di tre punti allineati. Viceversa, se sussistono le ultime relazioni, i tre punti sono in linea retta, perchè, indicando con r il valore comune delle tre frazioni e ricavando x, y, z, si ritorna alle (1), le quali dicono che (x, y, z) è un punto determinato della retta congiungente (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2).

Le ultime relazioni, o le relazioni equivalenti

$$(2) \qquad \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2},$$

le quali, quando x, y, z si considerino come variabili, sono soddisfatte dalle coordinate di ogni punto della retta $P_1 P_2$, e di nessun altro punto,

si dicono le *equazioni* (due indipendenti) *della retta congiungente i due punti* (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2).[1]

Indicando i tre denominatori con tre lettere l, m, n, abbiamo le equazioni

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}, \tag{3}$$

le quali servono a rappresentare *una retta generica uscente dal punto* (x_1, y_1, z_1), retta che vien determinata coll'assegnare i valori dei tre denominatori, o almeno dei loro mutui rapporti. Ad es. una retta qualsiasi uscente dall'origine ha equazioni del tipo

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

esprimenti la proporzionalità delle coordinate di un punto variabile sulla retta.

74. Piano congiungente tre punti. — Trascriviamo le formole (1) (n. 72) ponendovi $r = -\frac{n}{m}$, dove m, n sono due quantità di cui interessa solo il rapporto. Vediamo allora che le coordinate di ogni punto P della retta $P_1 P_2$ si presentano sotto la forma

$$x = \frac{m x_1 + n x_2}{m + n}, \qquad y = \frac{m y_1 + n y_2}{m + n}, \qquad z = \frac{m z_1 + n z_2}{m + n}. \tag{1'}$$

Preso ora un punto P_3 (x_3, y_3, z_3) fuori di quella retta, congiungiamolo con P. Un punto generico Q della retta $P P_3$ avrà similmente coordinate del tipo

$$\frac{\mu x + \nu x_3}{\mu + \nu}, \qquad \frac{\mu y + \nu y_3}{\mu + \nu}, \qquad \frac{\mu z + \nu z_3}{\mu + \nu},$$

dove x, y, z sono date dalle (1'), ed è $\frac{PQ}{P_3 Q} = -\frac{\nu}{\mu}$. Sostituendo, al posto di x, y, z, i loro valori, e ponendo per semplicità (visto che di μ e ν inte-

---

[1] Le tre equazioni (due indipendenti), che si ottengono dalle (2) mandando via i denominatori, possono adoperarsi (poichè seguono direttamente dalle (1)) anche nel caso che qualcuno dei denominatori delle (2) si annulli, mentre allora le (2) non hanno più significato.

Le condizioni di allineamento di tre punti si esprimono pure annullando i quattro determinanti di 3° ordine estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix};$$

si ottengono così quattro condizioni, di cui però due sole sono indipendenti.

ressa solo il rapporto) $\mu = m + n$, $\nu = p$, le coordinate di Q acquistano la forma

$$(4)\qquad \frac{m x_1 + n x_2 + p x_3}{m + n + p}, \qquad \frac{m y_1 + n y_2 + p y_3}{m + n + p}, \qquad \frac{m z_1 + n z_2 + p z_3}{m + n + p}.$$

Variando m, n, p o, meglio, i loro mutui rapporti, varia il punto Q sul piano $P_1 P_2 P_3$; e viceversa, per ogni posizione di Q sul piano, si possono scegliere m, n, p in guisa che le (4) diano le coordinate del punto stesso. In breve, diremo che le (4) esprimono le coordinate di ogni punto del piano $P_1 P_2 P_3$.

Di qua è facile ricavare la condizione perchè quattro punti siano in un piano, Infatti, dette ora x, y, z le coordinate (4) del punto Q, e indicato con k il denominatore comune delle (4), abbiamo le uguaglianze

$$\begin{aligned} k &= m + n + p, \\ k x &= m x_1 + n x_2 + p x_3, \\ k y &= m y_1 + n y_2 + p y_3, \\ k z &= m z_1 + n z_2 + p z_3, \end{aligned}$$

le quali devono coesistere per valori non tutti nulli di k, m, n, p, se il punto Q (x, y, z) sta sul piano $P_1 P_2 P_3$; e viceversa. La condizione analitica perchè ciò accada è l'annullarsi del determinante formato coi coefficienti di k, m, n, p in quelle equazioni, ossia (scambiando linee e colonne)

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

In parole:

Affinchè quattro punti stiano in un piano è necessario e sufficiente che si annulli il determinante (5) *formato colle coordinate dei punti e colle unità.*[1]

75. Equazione di un piano. — Se si considerano come variabili x, y, z, e come costanti gli altri elementi, l'equazione (5) è soddisfatta dalle coordinate di ogni punto del piano che contiene i punti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), e non dalle coordinate di un punto esterno. La (5) dicesi perciò *equazione del piano congiungente i tre punti nominati.*[2]

Sviluppando la (5) secondo gli elementi della prima orizzontale, si ottiene una equazione del tipo

$$(6)\qquad a x + b y + c z + d = 0.$$

[1] Cfr., per l'analoga questione in geometria piana, il n. 15.
[2] Cfr. il n. 16.

Dunque: *un piano è rappresentato da una equazione di primo grado nelle coordinate cartesiane di un punto variabile che lo descriva.*

Viceversa: *ogni equazione di primo grado in coordinate cartesiane x, y, z rappresenta un piano;* si dimostra in modo analogo a quello tenuto per le rette in geometria piana (n. 16).

76. Posizioni particolari di un piano rispetto agli assi. — Consideriamo il piano

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{1}$$

e determiniamone le intersezioni cogli assi coordinati. Se ci occupiamo, ad es., dell'asse x, ricorderemo che per ogni punto di esso è $y = 0$, $z = 0$; sostituendo questi valori nella (1) otteniamo

$$ax + d = 0, \tag{2}$$

da cui

$$x = -\frac{d}{a};$$

il punto richiesto è dunque $A\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$.

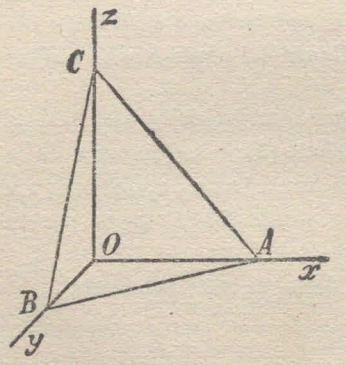
Vanno considerati però alcuni casi particolari.

Se $d = 0$, la (2) è certo soddisfatta da $x = 0$ (ossia la (1) è soddisfatta da $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$); segue che *un piano passa per l'origine quando nella sua equazione manca il termine noto.*

Se invece è $d \neq 0$ ed $a = 0$, la (2) non è soddisfatta da valori finiti di x, ed il piano (1), la cui equazione diventa

$$by + cz + d = 0,$$

risulta parallelo all'asse x.



Finalmente, se sono nulli a e d, la (2) è soddisfatta qualunque sia x, ed il piano (1), la cui equazione si riduce a

$$by + cz = 0,$$

passa per l'asse x.

Raccogliendo gli ultimi due casi, diremo: *Se nell'equazione di un piano manca una coordinata, il piano è parallelo al corrispondente asse; se manca inoltre il termine noto, l'asse stesso giace nel piano.*

Se nell'equazione (1) mancassero due variabili, per esempio x, y, e l'equazione si riducesse a

$$cz + d = 0, \qquad \text{ossia} \qquad z = -\frac{d}{c},$$

il piano, dovendo riuscir parallelo agli assi x, y, sarebbe parallelo al piano xy. Se inoltre mancasse il termine noto e si avesse dunque (per $c \neq 0$).

$$cz = 0 \qquad \text{ossia} \qquad z = 0,$$

l'equazione rappresenterebbe il piano xy. Dunque *i tre piani coordinati* yz, zx, xy *hanno, rispettivamente, le equazioni* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Ritornando all'equazione (1), nell'ipotesi che siano diversi da zero i coefficienti e il termine noto, vediamo che i segmenti OA, OB, OC staccati dal piano (1) sugli assi coordinati, a partire dall'origine, valgono

$$p = -\frac{d}{a}, \quad q = -\frac{d}{b}, \quad r = -\frac{d}{c}.$$

Ricavando di qua a, b, c e sostituendo nella (1), si ottiene

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

equazione del piano che stacca i segmenti p, q, r *sugli assi coordinati.*

Se poi si volesse la retta intersezione del piano (1) con uno dei piani coordinati, ad es. col piano xy ($z = 0$), basterebbe porre $z = 0$ nella (1). Si trova così l'equazione

$$ax + by + d = 0,$$

che, nel piano xy, rappresenta la retta richiesta AB (mentre nello spazio rappresenta il piano condotto per la retta AB parallelamente all'asse z).

77. Piani passanti per un punto dato. — Ragionando come in geometria piana (n. 18) si vede subito che ogni piano passante per un punto assegnato $P(x_1, y_1, z_1)$ ha una equazione del tipo

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

dove a, b, c sono coefficienti, i cui valori, o, meglio, i cui rapporti determinano uno tra gli infiniti piani contenenti P.

78. Condizioni di parallelismo di due piani. — Occupiamoci ora del sistema di due piani

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$
$$\pi') \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$

ed esaminiamo anzitutto come si possa riconoscere se essi siano paralleli.

È chiaro che, se i due piani sono paralleli, essi devono segare ciascun piano coordinato (a cui non siano paralleli) lungo due rette parallele, e viceversa. Supposto, ad es., che i due piani π, π' non siano paralleli al piano $z = 0$, essi hanno in comune con questo piano le rette

$$ax + by + d = 0, \qquad a'x + b'y + d' = 0,$$

le quali risultano parallele (n. 19) se $a : b = a' : b'$. Ragionando analogamente sugli altri piani coordinati si conclude: *affinchè due piani di date equazioni siano paralleli è necessario e sufficiente che i coefficienti delle coordinate nell'una equazione siano proporzionali agli omologhi coefficienti dell'altra;* in simboli:

(1) $$a : b : c = a' : b' : c'.$$

Si deve intendere, naturalmente, che se una o due delle quantità a primo membro sono nulle, devono annullarsi pure le quantità omologhe a secondo membro, giacchè allora il piano π è parallelo ad uno o a due degli assi coordinati, ed agli stessi assi deve riuscir parallelo il piano π'. Quest'avvertenza è superflua, se in luogo delle (1) si adoperano le relazioni che da quelle si ottengono riducendo a forma intera, relazioni espresse dall'annullarsi dei minori del secondo ordine estratti dalla matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Se poi nelle equazioni π), π') sono proporzionali, non solo i coefficienti delle variabili, ma pure i termini noti, i due piani coincidono, e viceversa.

Dalle condizioni (1) di parallelismo segue che il piano parallelo al piano π, condotto per un punto dato $P(x_1, y_1, z_1)$, ha l'equazione

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

e, in particolare, se quel punto è l'origine,

$$a x + b y + c z = 0.$$

79. Fascio di piani. — Due piani distinti

π) $$a x + b y + c z + d = 0,$$

π') $$a' x + b' y + c' z + d' = 0,$$

quando si seghino lungo una retta, determinano un fascio di piani, costituito da tutti i piani passanti per quella retta (n. 11). Si può dire però che due piani determinano un fascio, anche se sono paralleli, purchè si estenda il significato di quella locuzione, e si chiami *fascio* (improprio) *di piani* l'insieme dei piani che sono paralleli tra loro (confronta n. 20). Come si potrà scrivere l'equazione di un piano generico del fascio determinato dai due piani?

Formiamo una combinazione lineare delle equazioni date

π'') $$\lambda(a x + b y + c z + d) + \mu(a' x + b' y + c' z + d') = 0,$$

ossia

$$(\lambda a + \mu a') x + (\lambda b + \mu b') y + (\lambda c + \mu c') z + (\lambda d + \mu d') = 0,$$

dove λ, μ sono due parametri, non entrambi nulli. L'equazione *lineare* π'') rappresenta intanto un piano π''. Di più, ogni punto P comune ai due

piani π, π' appartiene certo al piano π'', perchè le coordinate di P soddisfano alle equazioni π), π'), ed in conseguenza alla π''). Dunque se i due piani π, π' si segano in una retta, questa appartiene pure al piano π''. Se invece i due piani π, π' sono paralleli, le due terne di quantità (a, b, c), (a', b', c') sono proporzionali; ma allora risultano pure proporzionali le due terne (a, b, c), $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c')$, sicchè il piano π'' riesce parallelo a π, ed appartiene ancora al fascio $\pi\,\pi'$.

Al variare di λ e μ o, meglio, del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, il piano π'' varia nel fascio $\pi\,\pi'$, e lo descrive interamente, perchè si può sempre calcolare il valore di $\frac{\lambda}{\mu}$ in modo che il piano π'' passi per un punto assegnato ad arbitrio nello spazio.

Concludiamo che: *la equazione di ogni piano formante fascio con due piani assegnati, può scriversi come una combinazione lineare delle equazioni di questi.*

80. Equazioni di una retta nello spazio. — Riprendiamo due equazioni lineari

$$(1)\qquad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \end{cases}$$

rappresentanti due piani, che supporremo distinti e non paralleli. Ad ogni soluzione (x, y, z) del sistema (1) corrisponde un punto, che appartiene alla retta r intersezione dei due piani; e, viceversa, ogni punto di r ha coordinate soddisfacenti le (1). Diremo che il sistema (1) rappresenta la retta r; *una retta nello spazio è rappresentata da due equazioni lineari, le quali, prese isolatamente, rappresentano due piani passanti per la retta.*

È chiaro che la stessa retta r potrà rappresentarsi mediante due equazioni che si ottengano dalle (1) formando due combinazioni lineari distinte (n. 79). Possiamo disporre dei relativi parametri in guisa da eliminare una volta y, ed una seconda volta x, fra le (1). Otteniamo così le due equazioni

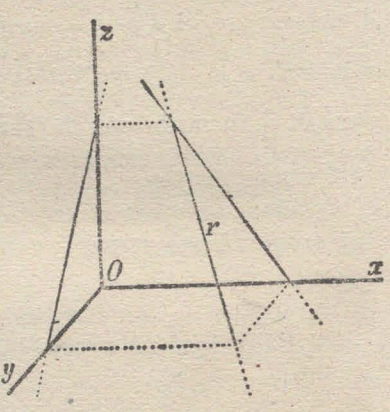
$$(1')\qquad \begin{cases} (a\,b' - a'\,b)\,x + (c\,b' - c'\,b)\,z + (d\,b' - d'\,b) = 0, \\ (b\,a' - b'\,a)\,y + (c\,a' - c'\,a)\,z + (d\,a' - d'\,a) = 0. \end{cases}$$

È però da notare che le operazioni eseguite non sarebbero lecite, se b e b', oppure a ed a', si annullassero insieme; inoltre che, se $a\,b' - a'\,b$ fosse nullo, le due equazioni ora scritte sarebbero equivalenti, e rappresenterebbero un unico piano passante per la retta r e parallelo al piano $x\,y$; la retta stessa sarebbe parallela ad $x\,y$ (o vi giacerebbe). Supposto dunque che $a\,b' - a'\,b \neq 0$, vale a dire, che la retta r non sia parallela al piano

xy (nè vi giaccia), noi possiamo porre le equazioni di r sotto la forma (1'). Conviene anzi risolvere le (1') rispetto ad x, y ordinatamente, e scriverle così:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = lz + p, \\ y = mz + q. \end{cases}$$

Le (2) si chiamano talvolta *equazioni ridotte* della retta; esse, isolatamente, rappresentano i piani passanti per la retta r e paralleli agli assi y, x, rispettivamente; od anche, se si vuole, rappresentano le intersezioni di quei piani coi piani xz, yz, rispettivamente. Le (2) vengono spesso adoperate, giacchè esse contengono il minimo numero dei coefficienti (quattro) che possono comparire nelle equazioni di una retta.[1] Va però notato che le (2) non trattano simmetricamente le tre coordinate; nè si prestano a rappresentare le rette parallele al piano xy, per le quali converrebbe adoperare, ad es., equazioni risolte rispetto ad x e z, ovvero ad y e z.



Le (2), risolte rispetto a z, nella ipotesi che non siano nulle l, m, possono scriversi così

$$(2') \qquad \frac{x-p}{l} = \frac{y-q}{m} = \frac{z}{1},$$

e rientrano perciò nel tipo

$$(3) \qquad \frac{x-x'}{l} = \frac{y-y'}{m} = \frac{z-z'}{n};$$

sotto questa forma abbiamo già visto (n. 73) potersi scrivere le equazioni di una retta generica uscente dal punto (x', y', z'). Ed ora possiamo aggiungere che le tre equazioni (due indipendenti) riunite nelle (3) rappresentano i tre piani condotti per la retta parallelamente agli assi.

Dal confronto fra le (2') e le (3) risulta che le tre quantità $l, m, 1$, nelle equazioni ridotte (2) di una retta, hanno lo stesso ufficio che i tre denominatori l, m, n nelle equazioni (3); in altre parole, i due coefficienti l, m che compariscono nelle equazioni (2) hanno lo stesso significato geometrico dei rapporti $\frac{l}{n}, \frac{m}{n}$ tra i denominatori delle equazioni della retta scritte sotto la forma (3). Quale sia questo significato geometrico si vedrà in seguito.

---

[1] Una retta dipende infatti da *quattro costanti*, ad es. dalle coordinate (x_1, y_1), (x_2, z_2) dei punti ove essa incontra i piani coordinati xy, xz.

Ritorniamo alle (2). Se poniamo in esse $z = 0$, troviamo $x = p$, $y = q$; dunque *p e q sono le prime due coordinate del punto ove la retta sega il piano xy.*

In particolare, una retta uscente dall'origine, e non giacente nel piano xy, ha equazioni del tipo

$$x = lz, \qquad y = mz;$$

se invece sta sopra xy, come equazioni di essa possono prendersi $z = 0$, $y = \lambda x$.

Gli assi coordinati x, y, z hanno, ordinatamente, le coppie di equazioni

$$y = 0,\ z = 0; \qquad z = 0,\ x = 0; \qquad x = 0,\ y = 0.$$

81. Parallelismo di due rette. — I due coefficienti l, m, che compariscono nelle equazioni ridotte (2) di una retta, definiscono la *direzione* della retta; ciò risulta dalla osservazione che segue, ed apparirà in modo più preciso quando determineremo gli angoli che una retta forma cogli assi.

Cerchiamo le condizioni di parallelismo fra la retta (2) e la retta

$$x = l'z + p',$$
$$y = m'z + q'.$$

Poichè i piani condotti per le due rette parallelamente all'asse x, o all'asse y, devono risultare paralleli, si avrà (n. 78)

$$l = l', \qquad m = m';$$

queste sono le condizioni richieste.

Segue subito che la retta parallela alla (2) condotta per un punto assegnato (x_1, y_1, z_1) avrà le equazioni

$$x - x_1 = l(z - z_1),$$
$$y - y_1 = m(z - z_1).$$

Segue ancora, con analoghe considerazioni, che la retta (3) (n. 80) e la retta

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

sono parallele se

$$l : m : n = l_1 : m_1 : n_1.$$

82. Punto di incontro di tre piani; stella di piani. — Date le equazioni di tre piani

$$\pi) \quad ax + by + cz + d = 0,$$
$$\pi') \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0,$$
$$\pi'') \quad a''x + b''y + c''z + d'' = 0,$$

la ricerca del punto ad essi comune si riduce alla risoluzione del sistema scritto di tre equazioni lineari con tre incognite. Le soluzioni, *coordinate del punto richiesto,* possono indicarsi brevemente così:

$$(1) \qquad x = \frac{A}{D}, \qquad y = \frac{B}{D}, \qquad z = \frac{C}{D},$$

dove A, B, C, D sono i determinanti del terzo ordine (presi con segni convenienti) che si ottengono dalla matrice

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{vmatrix},$$

omettendo la prima, o la seconda, ... o l'ultima colonna.

Se $D \neq 0$, il punto richiesto è unico e determinato. Ma *se* $D = 0$, *senza che si annullino tutti i numeratori delle* (1), non esiste alcun punto comune a π, π', π'' ed *i tre piani sono paralleli ad una stessa retta* (come le facce di un prisma). Finalmente, *se* $A = B = C = D = 0$, *i tre piani appartengono ad un fascio;* ciò risulta subito se, ad es., i due primi piani si segano in una retta, perchè allora ogni soluzione (x, y, z) delle equazioni $\pi), \pi')$ è una soluzione della equazione $\pi'')$, sicchè il terzo piano passa per quella retta;[1] e risulta se i piani π, π' sono paralleli, giacchè allora si riconosce pure che π'' è parallelo ad essi.

Supposto che i tre piani π, π', π'' non appartengano ad un fascio, formiamo una combinazione lineare delle loro equazioni:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\lambda (ax + by + cz + d) + \mu (a'x + b'y + c'z + d') \\ &\quad + \nu (a''x + b''y + c''z + d'') = 0. \end{aligned}$$

Questa rappresenta un piano, il quale passa per il punto $P \equiv \pi\pi'\pi''$, ove esista, perchè la (2) è soddisfatta dalla terna di valori (x, y, z) che soddisfano le equazioni $\pi), \pi') \pi'')$. Se poi i tre piani dati sono paralleli ad una stessa retta, si verifica direttamente che anche il piano (2) è parallelo a quella retta.

Ora si suol chiamare *stella di piani,* sia l'insieme dei piani che passano per uno stesso punto (*centro*), sia l'insieme dei piani che sono paralleli ad una retta (dicendo talvolta nell'ultimo caso, che la stella è *impropria*). Con questa locuzione possiamo affermare che la (2) rappresenta, in ogni caso, un piano della stella determinata dai tre piani π, π', π''. Al variare dei parametri λ, μ, ν, o, meglio, dei rapporti $\frac{\lambda}{\nu}, \frac{\mu}{\nu}$, il piano (2) va-

[1] Lo stesso fatto si giustifica osservando che, se $A = B = C = D = 0$, una delle tre equazioni primitive può ottenersi come combinazione lineare delle altre due, sicchè i tre piani formano fascio.

ria nella stella nominata, e la descrive tutta, perchè si possono calcolare i detti rapporti in modo che il piano (2) passi per due punti assegnati ad arbitrio. Concludiamo: *date le equazioni di tre piani, che determinino una stella, la equazione di ogni altro piano della stella può ottenersi come una combinazione lineare di quelle.*

83. Intersezione di una retta con un piano; condizione perchè una retta sia parallela ad un piano, o vi giaccia. — Poichè una retta è rappresentata da due equazioni lineari, il punto d'incontro della retta con un piano si otterrà risolvendo il sistema formato dalle due equazioni della retta colla equazione del piano.

In particolare, se la retta è data mediante le equazioni

$$r) \qquad x = lz + p, \qquad y = mz + q,$$

ed il piano mediante l'equazione

$$\pi) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$

sostituiremo in questa, al posto di x ed y, i valori dati dalle r); otteniamo

$$(al + bm + c)z + (ap + bq + d) = 0,$$

donde

$$z = -\frac{ap + bq + d}{al + bm + c}.$$

Le altre due coordinate x, y del punto richiesto si ricavano servendosi delle r).

L'espressione di z ci mostra che la *condizione di parallelismo tra la retta r e il piano π* è

$$(1) \qquad al + bm + c = 0;$$

mentre, *se, insieme a questa relazione, coesiste la*

$$(2) \qquad ap + bq + d = 0,$$

la retta r giace per intero nel piano π.

Se le equazioni della retta r sono date invece sotto la forma

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n},$$

per trovare le coordinate del punto πr conviene indicare con una nuova variabile ϱ il valor comune delle tre frazioni, esprimere le coordinate (x, y, z) di un punto descrivente la retta in funzione di ϱ,

$$x = x' + l\varrho, \quad y = y' + m\varrho, \quad z = z' + n\varrho,$$

sostituire questi valori nella equazione π) e ricavare ρ; si ottiene così

$$\rho = -\frac{ax' + by' + cz' + d}{al + bm + cn}.$$

Conosciuto ρ, le formole precedenti dànno subito le coordinate x, y, z del punto richiesto. Questa volta *la condizione di parallelismo tra retta e piano è*

$$al + bm + cn = 0; \tag{1'}$$

questa, insieme alla

$$ax' + by' + cz' + d = 0, \tag{2'}$$

dà le condizioni perchè la retta stia nel piano.

84. Condizione affinchè quattro piani, o due rette, abbiano un punto comune. — Date le equazioni di quattro piani

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \\ a'''x + b'''y + c'''z + d''' = 0, \end{array}\right. \tag{1}$$

se questi hanno un punto comune, devono coesistere quelle quattro equazioni a tre incognite, ed è quindi

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} = 0; \tag{2}$$

la stessa condizione sussiste, se i piani sono paralleli ad una medesima retta (n. 82). Viceversa, sia nullo il determinante (2); allora, od esiste un sistema di valori (x, y, z) soddisfacente tre indipendenti, e quindi tutte quattro le equazioni (1), ed i quattro piani hanno un punto comune; oppure un tal sistema non esiste, ed i quattro piani sono paralleli ad una stessa retta. Dunque: *condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro piani appartengano ad una stella è che sia nullo il determinante formato coi coefficienti e termini noti delle relative equazioni.* In tale ipotesi, una delle equazioni (1) può scriversi come combinazione lineare delle rimanenti (n. 82).

La (2) esprime pure la condizione perchè si seghino (o siano parallele) due rette rappresentate, la prima da due delle equazioni (1), la seconda dalle due rimanenti. Se le rette sono date mediante equazioni ridotte

$$r) \qquad x = lz + p, \qquad y = mz + q,$$
$$r') \qquad x = l'z + p', \qquad y = m'z + q',$$

per trovare la detta condizione conviene eliminare x tra le equazioni della prima colonna, y tra le equazioni della seconda, ottenendo le due:

$$(l - l')\,z + p - p' = 0, \qquad (m - m')\,z + q - q' = 0;$$

si trova in fine, eliminando z tra queste,

$$(l - l')\,(q - q') - (m - m')\,(p - p') = 0,$$

che è *la condizione affinchè si seghino* (*o siano parallele*) *le rette* r, r'.

Se le due rette sono rappresentate invece mediante equazioni del tipo

$$r_1) \qquad \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$r_2) \qquad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2},$$

per esprimere la condizione di incontro (o parallelismo), conviene scegliere due punti (x_1, y_1, z_1), $(x_1 + \varrho_1 l_1, y_1 + \varrho_1 m_1, z_1 + \varrho_1 n_1)$ della prima retta, e due punti (x_2, y_2, z_2), $(x_2 + \varrho_2 l_2, y_2 + \varrho_2 m_2, z_2 + \varrho_2 n_2)$ della seconda, ed imporre ai quattro punti la condizione di trovarsi in un piano (n. 74). Con facili trasformazioni si può presentare quella condizione così:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

85. Nuova forma della condizione perchè tre piani appartengano ad un fascio, o quattro piani ad una stella. — Conviene talvolta presentare sotto la forma seguente alcune condizioni sopra enunciate:[1]

Condizione necessaria e sufficiente affinchè tre piani appartengano ad un fascio, o quattro piani ad una stella, è che si possa formare colle equazioni di quei piani, adoperando parametri non tutti nulli, una combinazione lineare che sia verificata identicamente (cioè per valori arbitrari di x, y, z).

Infatti, se indichiamo per brevità con $L, M, \ldots$ dei polinomi lineari in x, y, z, e quindi con $L = 0$, $M = 0, \ldots$ le equazioni di certi piani, il verificarsi di una identità del tipo

$$\lambda L + \mu M + \nu N = 0,$$

ossia (supposto ad es. $\lambda \neq 0$) $L = -\frac{\mu}{\lambda} M - \frac{\nu}{\lambda} N$, significa che il polinomio L è una combinazione lineare dei polinomi M, N, e quindi (n. 79) che il piano $L = 0$ appartiene al fascio dei piani $M = 0$, $N = 0$; e viceversa. Analogamente si procede quando si tratti di quattro piani di una stella.

Dati quattro piani non appartenenti ad una stella, mediante una conveniente combinazione lineare delle loro equazioni si può rappresentare un

[1] Cfr. Geometria piana, n. 21.

piano arbitrariamente assegnato. Si dimostra come l'analogo teorema di geometria piana (n. 22).

Esercizi I. — 1) Segnate sul foglio di disegno le immagini dei tre assi cartesiani, si rappresentino i punti le cui coordinate sono: (0, 1, 2), (1, 0, — 1), (2, 1, 0), (1, — 1, 1).[1]

2) Trovare l'equazione del piano determinato: *a*) dai tre punti (2, — 1, 1), (1, 1, — 1), (— 1, 0, 1); *b*) dal punto (2, 1, — 1) e dalla retta $x = 2z + 1, y = z + 3$.

3) Trovare l'equazione del piano: *a*) passante per i punti (2, — 1, 1), (1, 1, — 1) e parallelo alla retta $x = -y = z$; *b*) passante per il punto (2, — 1, 1) e parallelo al piano $x + 2y + z + 1 = 0$; *c*) passante per il punto (2, — 1, 1) e parallelo alle rette $x = -y = z$, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = -z$; *d*) passante per la retta $x = z - 1$, $y = 2z + 3$ e parallelo alla retta $x = 2y = z$.

4) Le faccie di un tetraedro hanno le equazioni

$$x - z + 1 = 0, \quad 2x + 3y + z = 0, \quad x + 3y + 2 = 0, \quad 3x + y - z - 2 = 0;$$

si trovino le coordinate dei vertici.

5) Rappresentare sulla figura le rette

$$x = z + 2,\ y = 2z + 1; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}; \quad x = -y = z;$$

determinare le intersezioni delle due prime coi piani coordinati.

6) Si scriva l'equazione del piano che proietta, parallelamente all'asse z, la retta $x = lz + p$, $y = mz + q$.

7) Equazioni dei piani proiettanti, parallelamente ai singoli assi, la retta

$$2x + 3y - 4z + 1 = 0, \quad 3x - 5y + 2z = 0.$$

8) Presi come vertici di un tetraedro i quattro punti di cui nell'es. 1) sono date le coordinate, trovare le equazioni degli spigoli.

9) Trovare le equazioni della retta: *a*) passante per il punto (1, 1, — 1) e parallela alla retta $x = z - 1$, $y = 3z + 2$; *b*) passante per il punto (— 1, 2, 2) e parallela ai due piani $x - z + 1 = 0$, $2x + 3y - 3z = 0$; *c*) che passa per il punto (0, 1, — 1) e incontra le rette $x = 3y = 3z - 1$, $\frac{x-1}{2} = y - 2 = -z$; *d*) che passa per il punto (1, — 1, 2), incontra la retta $x = 3$, $y = z - 2$, ed è parallela al piano $x - 2y - z = 0$: *e*) che incontra le due rette $x = y = z$, $x - 1 = y + 2 = -z$, ed è parallela ad uno degli assi.

10) Determinare le coordinate del punto d'intersezione del piano

$$2x + y - 2z + 3 = 0 \quad \text{colla retta } x = 2z - 1,\ y = z + 1.$$

---

[1] La figura disegnata può riguardarsi come una proiezione parallela della figura dello spazio sopra il foglio. Conoscendo le posizioni, rispetto al foglio, dei tre assi e la direzione della proiezione, si potrebbero calcolare i rapporti secondo cui vengono alterati tre segmenti uguali ad 1 situati sugli assi. Se invece sono arbitrari gli assi obiettivi e la direzione della proiezione, quei rapporti possono (come si dimostra) esser scelti ad arbitrio. Si può dunque, anche nel disegno, assumere un unico segmento come unità di misura sulle proiezioni degli assi x, y, z.

11) Le due rette

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}, \qquad \frac{x-x'}{l'}=\frac{y-y'}{m'}=\frac{z-z'}{n'}$$

passano pel punto (x', y', z'); scrivere l'equazione del piano che le contiene.

12) Trovare l'equazione del piano contenente le due rette parallele

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}, \qquad \frac{x-x''}{l}=\frac{y-y''}{m}=\frac{z-z''}{n}.$$

II. — 13) Dati n punti dello spazio e in corrispondenza n numeri, si definisca il baricentro di questi punti, presi coi pesi uguali ai numeri dati, in modo analogo a quello tenuto nel caso di punti allineati o giacenti in un piano (n. 8, es. 9); n. 23, es. 9)); si trovino le coordinate di questo punto, e si consideri il caso particolare in cui i pesi sono tutti uguali.

14) I tre segmenti che congiungono i punti medi delle coppie di lati opposti di un tetraedro passano per uno stesso punto, che divide ciascuno di quei segmenti per metà. Quel punto è pure comune ai quattro segmenti che congiungono i vertici del tetraedro ai baricentri delle faccie opposte, e divide ciascuno di quei segmenti nel rapporto di 3 ad 1. Esso è il baricentro dei vertici del tetraedro presi con pesi uguali, o, come suol dirsi brevemente, il baricentro del tetraedro.

Capitolo II.

Distanze, angoli, aree, volumi.

86. Proiezioni parallele di segmenti. — Seguendo lo stesso ordine tenuto nella geometria piana (n. 24), alla ricerca delle formole esprimenti i principali caratteri metrici premettiamo alcune nozioni relative alle proiezioni parallele.

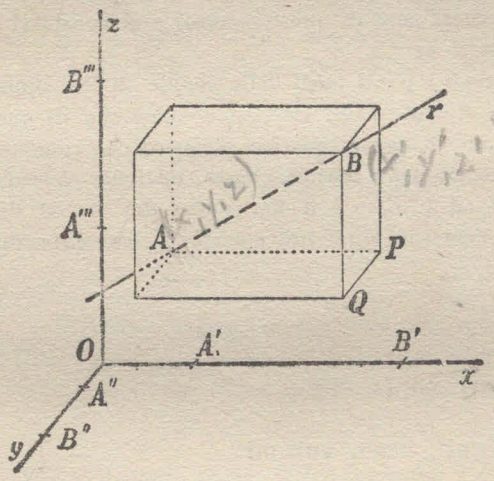
Nello spazio si possono considerare proiezioni *sopra una retta secondo una data giacitura*, oppure *sopra un piano secondo una data direzione.*

Per definire il primo tipo di proiezioni, supponiamo data una retta x, su cui sia fissato il verso positivo, ed un piano ξ non parallelo ad x. *Proiettare sopra la retta x un punto A, secondo la giacitura* ξ (o parallelamente al piano ξ), significa costruire il punto A' intersezione della x col piano parallelo a ξ condotto per A. I punti di un segmento AB hanno le proiezioni nei punti di un segmento $A'B'$, il quale, preso col segno che gli spetta, dicesi *proiezione* di AB. I lati di una spezzata $ABCD\ldots$ hanno come proiezioni i segmenti consecutivi $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, ..., la cui somma (algebrica) dicesi *proiezione della spezzata.* Anche qui *la proiezione di una spezzata è uguale alla proiezione del segmento che ne congiunge gli estremi;*

e *due spezzate aventi gli stessi estremi dànno proiezioni uguali* (sopra una stessa retta, secondo una stessa giacitura).

a) Si parta dai tre assi coordinati x, y, z, e si considerino le proiezioni $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ di uno stesso segmento AB, sopra x parallelamente ad yz, sopra y parallelamente a zx, sopra z parallelamente a xy; quelle proiezioni diconsi *le componenti del segmento AB, secondo gli assi x, y, z.* I sei piani condotti per A e B, mediante i quali si eseguiscono le proiezioni nominate, limitano un parallelepipedo, in cui A, B sono vertici opposti, ed i cui lati sono equipollenti alle componenti del segmento.

Con tre segmenti equipollenti alle tre componenti si può (in più modi) formare una spezzata trilatera (ad esempio $APQB$) avente come estremi A e B. Se (x, y, z), (x', y', z') sono le coordinate di A, B, le dette componenti valgono ordinatamente



$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z,$$

e divengono le coordinate di B, se A cade nell'origine.

b) Useremo di solito proiezioni *ortogonali*, mediante piani normali alla retta sopra cui si proietta.

Fra un segmento AB appartenente ad una retta r, su cui sia fissato il verso positivo, e la sua proiezione ortogonale $A'B'$ sopra una retta x, passa la relazione

$$A'B' = AB \cos xr;$$

la proiezione ortogonale di un segmento sopra una retta è data (*in valore e segno*) *dal prodotto del segmento obiettivo per il coseno dell'angolo formato dalle rette contenenti il segmento e la proiezione.* Infatti, se il segmento AB si sposta parallelamente a sè stesso, non variano nè in valore, nè in segno, le quantità che entrano nella relazione scritta; ora questa sussiste (n. 24) se A cade su x, perchè allora la figura è contenuta nel piano xr, quindi sussiste in ogni caso.[1]

87. Proiezione di un'area. — Se per i punti $A, B, \ldots$ dello spazio si conducono rette parallele ad una retta assegnata r, e si determinano

[1] I risultati di questo numero possono enunciarsi col linguaggio della teoria dei vettori, estendendo allo spazio l'Oss. che segue il n. 24

le intersezioni di queste con un piano fisso π, non parallelo ad r, i punti $A', B', \ldots$ che così si ottengono diconsi *proiezioni di* $A, B, \ldots$ *su* π *secondo la direzione* r; o, brevemente, *proiezioni ortogonali su* π, se r è normale a π.

I punti di un'area situata in un piano ϱ si proiettano nei punti di un'area di π, *area proiezione*. Ora, nel caso di proiezioni ortogonali, vale il teorema:

La proiezione ortogonale di un'area, situata in un piano, sopra un secondo piano, è uguale all'area obiettiva moltiplicata per il coseno del diedro dei due piani.

La dimostrazione si fonda su questi due lemmi, che si giustificano subito:

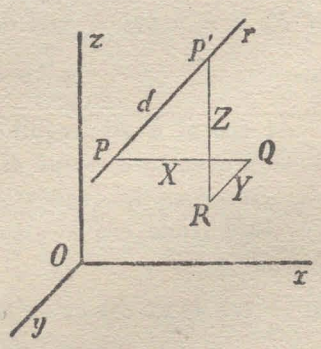
1) un segmento del piano ϱ, che sia parallelo alla retta u intersezione dei due piani, ha per proiezione ortogonale sul piano π un segmento parallelo ad u, ed uguale al segmento obiettivo;

2) un segmento di ϱ, che sia perpendicolare ad u, ha per proiezione ortogonale su π un segmento perpendicolare ad u, ed uguale al segmento obiettivo moltiplicato per $\cos \pi\varrho$.

Ora sia Δ l'area di una figura di ϱ, e Δ' l'area della proiezione ortogonale su π. Se la prima figura è un triangolo con un lato parallelo ad u, allora certo vale la

$$\Delta' = \Delta \cos \pi\varrho,$$

giacchè il triangolo e la sua proiezione hanno due lati uguali, e le altezze corrispondenti nel rapporto $\cos \pi\varrho$. D'altra parte, un triangolo qualsiasi dato su ϱ, mediante una retta parallela ad u condotta per un vertice si scompone in due triangoli che si trovano nelle condizioni suddette; e poichè la (1) vale per i triangoli parziali, vale anche per il triangolo totale. Finalmente la (1) si estende ai poligoni (che mediante diagonali si scompongono in triangoli), e alle figure limitate da contorni curvilinei, che possono riguardarsi come limiti di poligoni iscritti.



88. Distanza di due punti. — Riprendiamo i tre assi cartesiani x, y, z, che supporremo *ortogonali*, cioè perpendicolari a due a due, ogniqualvolta dovremo stabilire relazioni metriche; ciò per evitare inutili complicazioni.

Siano $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ due punti appartenenti ad una retta r, su cui sia fissato arbitrariamente il verso positivo. Consideriamo il se-

mento $PP' = d$ (in valore e segno), e le sue componenti secondo gli assi, che valgono

$$X = x' - x, \qquad Y = y' - y, \qquad Z = z' - z.$$

Con tre segmenti equipollenti a queste possiamo formare, come si disse, una spezzata trilatera $PQRP'$, di cui il segmento PP' congiunge gli estremi. Proiettiamo ora una prima volta il segmento PP', una seconda volta la spezzata $PQRP'$, sopra una retta qualunque s dello spazio, ed uguagliamo le proiezioni; si ha così:

$$d \cos rs = X \cos xs + Y \cos ys + Z \cos zs. \tag{1}$$

Facendo coincidere s successivamente cogli assi x, y, z, e ricordando che, per ipotesi, $\widehat{xy} = \widehat{xz} = \widehat{yz} = \frac{\pi}{2}$, abbiamo

$$d \cos xr = X, \qquad d \cos yr = Y, \qquad d \cos zr = Z; \tag{2}$$

finalmente, facendo coincidere s con r,

$$d = X \cos xr + Y \cos yr + Z \cos zr. \tag{3}$$

Per approfittare di queste formole moltiplichiamo anzitutto la (3) per d, e sostituiamo nel secondo membro, al posto di $d \cos xr, \ldots$, i valori dati dalle (2). Avremo:

$$d^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

ossia

$$d^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2. \tag{4}$$

Il quadrato della distanza di due punti è uguale alla somma dei quadrati delle differenze tra le coordinate omonime dei punti stessi (cfr. n. 25).

89. Relazioni angolari. — Se invece nella (3) sostituiamo, al posto di X, Y, Z, i valori dati dalle (2), e dividiamo poi per d, abbiamo

$$\cos^2 xr + \cos^2 yr + \cos^2 zr = 1. \tag{5}$$

I coseni degli angoli che una retta forma cogli assi coordinati diconsi brevemente *coseni di direzione della retta;* concludiamo quindi:

La somma dei quadrati dei coseni di direzione di una retta è uguale ad 1.

Eseguendo ora le stesse sostituzioni (2) nella (1), e dividendo per d, avremo

$$\cos rs = \cos xr \cdot \cos xs + \cos yr \cdot \cos ys + \cos zr \cdot \cos zs. \tag{6}$$

Il coseno dell'angolo di due rette è uguale alla somma dei prodotti dei coseni di direzione dell'una retta per i corrispondenti coseni della seconda (cfr. n. 26).

90. Coseni di direzione di una retta. — Date le equazioni di una retta r sotto la forma

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}, \tag{1}$$

si osservi che, se $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ sono due punti della retta, i numeratori delle (1) esprimono le proiezioni ortogonali del segmento $P'P$ sui tre assi coordinati (n. 86), e possono quindi esser sostituiti da $P'P\cos\hat{xr}$, $P'P\cos\hat{yr}$, $P'P\cos\hat{zr}$. Sopprimendo il fattor comune $P'P$, otteniamo

$$\frac{\cos\hat{xr}}{l}=\frac{\cos\hat{yr}}{m}=\frac{\cos\hat{zr}}{n},$$

ossia, indicando con ϱ il valor comune incognito delle tre frazioni,

$$\cos\hat{xr}=l\varrho, \qquad \cos\hat{yr}=m\varrho, \qquad \cos\hat{zr}=n\varrho.$$

Per calcolare ϱ eleviamo a quadrato queste e sommiamo; ricordando la (5) del n. 89, avremo

$$1=(l^2+m^2+n^2)\,\varrho^2,$$

da cui

$$\varrho=\frac{1}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

e quindi

$$\begin{cases}\cos\hat{xr}=\dfrac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, & \cos\hat{yr}=\dfrac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\\[2ex] \cos\hat{zr}=\dfrac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.\end{cases} \tag{2}$$

Il radicale va preso collo stesso segno nelle tre frazioni, ma questo è arbitrario finchè non sia fissato il verso positivo su r. In parole:

I coseni di direzione di una retta, le cui equazioni siano scritte sotto la forma (1), *sono proporzionali ai denominatori, e si ottengono dividendo questi per la radice quadrata della somma dei loro quadrati.*

Se la retta è data invece mediante equazioni ridotte

$$x=lz+p, \qquad y=mz+q, \tag{1'}$$

ossia (n. 80)

$$\frac{x-p}{l}=\frac{y-q}{m}=\frac{z}{1},$$

basta porre $n=1$ nelle formole precedenti; risulta così che *i coseni di direzione della retta* (1') *sono proporzionali a* l, m, 1, *e sono dati precisamente da*

$$\begin{cases}\cos\hat{xr}=\dfrac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+1}}, & \cos\hat{yr}=\dfrac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+1}},\\[2ex] \cos\hat{zr}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{l^2+m^2+1}}.\end{cases} \tag{2'}$$

Seguono di qua i significati geometrici dei coefficienti l, m nelle equazioni ridotte (1'):

$$l = \frac{\cos xr}{\cos zr}, \quad m = \frac{\cos yr}{\cos zr}.$$

Ritornando alle (1) risulta che *le equazioni della retta uscente dal punto* (x', y', z'), *e formante cogli assi coordinati* x, y, z *gli angoli* α, β, γ *rispettivamente, possono scriversi sotto la forma* (detta *normale*)

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma}.$$

Queste rappresentano la retta *orientata;* invertendo il verso sopra di essa, mutano segno i tre denominatori. Il valore t comune alle tre frazioni rappresenta la distanza del punto fisso (x', y', z') dal punto variabile (x, y, z). Esprimendo queste ultime coordinate in funzione di t, si possono sostituire alle (3) le equazioni

$$(4) \qquad x = x' + t\cos\alpha, \quad y = y' + t\cos\beta, \quad z = z' + t\cos\gamma,$$

che diconsi *parametriche,* perchè dànno, per ogni valore del parametro t, le coordinate di un punto della retta.

91. Angolo di due rette. — Per determinare il coseno dell'angolo formato dalle due rette (incidenti o sghembe)

$$r) \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

$$s) \qquad \frac{x - x'}{l'} = \frac{y - y'}{m'} = \frac{z - z'}{n'},$$

si calcolino i coseni di direzione delle rette stesse:

$$\cos xr = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \quad \text{ecc.},$$

$$\cos xs = \frac{l'}{\pm\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}, \quad \text{ecc.},$$

e si sommino i prodotti dei coseni relativi ad r per gli omologhi coseni relativi ad s (n. 89, (6)); si giunge così al risultato:

Il coseno dell'angolo delle due rette r, s *è espresso dalla formola*

$$\cos rs = \frac{l\,l' + m\,m' + n\,n'}{\pm\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\,\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}};$$

il segno è ambiguo finchè sulle rette non siano fissati i versi positivi.

La condizione di ortogonalità $(\widehat{r\,s} = \frac{\pi}{2}$, anche se le rette sono sghembe)[1] *è data da*

$$l\,l' + m\,m' + n\,n' = 0. \tag{6}$$

Per calcolare il seno dell'angolo $\widehat{r\,s}$ si osservi che

$$\operatorname{sen}^2 r\,s = 1 - \cos^2 r\,s$$

$$= \frac{(l^2+m^2+n^2)\,(l'^2+m'^2+n'^2) - (l\,l'+m\,m'+n\,n')^2}{(l^2+m^2+n^2)\,(l'^2+m'^2+n'^2)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}^2}{(l^2+m^2+n^2)\,(l'^2+m'^2+n'^2)}$$

e finalmente:[2]

$$\operatorname{sen}^2 r\,s = \frac{(m\,n' - m'\,n)^2 + (n\,l' - n'\,l)^2 + (l\,m' - l'\,m)^2}{(l^2+m^2+n^2)\,(l'^2+m'^2+n'^2)}. \tag{7}$$

Se le due rette r, s sono date mediante equazioni ridotte

$$r) \qquad x = l\,z + p \qquad y = m\,z + q,$$
$$s) \qquad x = l'\,z + p', \qquad y = m'\,z + q',$$

nelle formole precedenti si porrà $n = n' = 1$; si ottiene così, ad es.,

$$\cos r\,s = \frac{l\,l' + m\,m' + 1}{\pm\sqrt{l^2+m^2+1}\,\sqrt{l'^2+m'^2+1}}.$$

92. Equazione normale di un piano, — Per ottenere formole analoghe relative a piani, conviene anzitutto scrivere sotto una forma particolare l'equazione di un piano (cfr. n. 30).

Sia dato un piano π mediante l'equazione *generale*

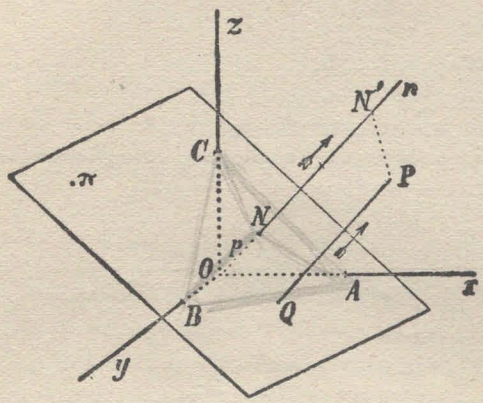
$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0. \tag{1}$$

---

[1] Se la retta s è la *perpendicolare* calata su r dal punto (x', y', z'), oltre la condizione di ortogonalità (6), deve esser soddisfatta la condizione di incontro fra r ed s (n. 84). Si hanno così due relazioni lineari od omogenee fra l', m', n', le quali determinano i mutui rapporti di queste incognite.

[2] Il valore di sen $r\,s$, che si ottiene estraendo la radice quadrata, può sempre assumersi positivo, purchè si convenga di indicare con $\widehat{r\,s}$ l'angolo positivo minore di due retti che r forma con s.

Conduciamo ad esso la normale n dall'origine, la quale incontri il piano in N, e su quella fissiamo ad arbitrio il verso positivo, ad es. da O verso N, se il piano non passa per O. Poniamo $ON = p$ (in valore e segno), e chiamiamo α, β, γ gli angoli che la normale n forma cogli assi coordinati x, y, z. Osserviamo poi che il segmento $ON = p$ è la proiezione ortogonale, sopra n, di ciascuno dei segmenti OA, OB, OC che il piano stacca sugli assi a partire dall'origine; ciò almeno nella ipotesi, in cui per ora ci mettiamo, che i punti A, B, C esistano e siano diversi da O, vale a dire che le quantità a, b, c, d siano tutte diverse da zero. Ricordando i valori di quei tre segmenti $\left(-\frac{d}{a}, -\frac{d}{b}, -\frac{d}{c}\right.$; n. 76$\left.\right)$, otteniamo la relazione $-\frac{d}{a}\cos\alpha = p$ e le analoghe, ossia



$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = -\frac{p}{d},$$

od anche, indicando con ϱ il valore comune dei quattro rapporti,

$$\cos\alpha = a\varrho, \quad \cos\beta = b\varrho, \quad \cos\gamma = c\varrho, \quad -p = d\varrho, \tag{2}$$

Le tre prime, quando si tenga conto della relazione fra i coseni di direzione di una retta (n. 89), ci permettono di calcolare ϱ. Si trova

$$\varrho = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \tag{3}$$

e quindi

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, & \cos\beta = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \end{cases} \tag{4}$$

$$-p = \frac{d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \tag{5}$$

l'ultima delle quali permette di decidere il segno del radicale, quando si osservi che p ha un segno determinato, ad es. positivo, in relazione col verso positivo fissato su n.

Moltiplicando la (1) per ϱ, e tenendo conto delle (2), la equazione del piano si presenta sotto la forma *normale*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \tag{6}$$

la quale, in virtù delle (4), (5), coincide termine a termine colla equazione

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0, \tag{7}$$

quando in questa si stacchino i termini contenenti le singole variabili ed il termine noto.

Ora questi risultati, ed anche le stesse relazioni (2), valgono qualunque sia la posizione del piano π rispetto agli assi. Infatti se, ad es., π è parallelo all'asse x, nella prima delle (2) si ha $a = 0$, $\cos\alpha = 0$, mentre le altre rimangono inalterate; se π passa per O, nell'ultima delle (2) si porrà $d = 0$, $p = 0$, mentre le rimanenti sussistono, come si verificherebbe sostituendo per un momento al piano π un piano parallelo. Concludiamo che:

La equazione di ogni piano può scriversi assumendo come coefficienti delle variabili x, y, z i coseni di direzione di una normale al piano, e come termine noto la distanza, cambiata di segno, dell'origine del piano. La equazione generale (1) *di un piano si traduce nella forma normale* (6) *dividendone il primo membro per la radice quadrata della somma dei quadrati dei coefficienti delle variabili.*

Giova pure tener presente il risultato contenuto nelle equazioni (4):

I coseni di direzione della normale di un piano sono proporzionali ai coefficienti delle variabili nella equazione generale del piano, e si ottengono dividendo i detti coefficienti per la radice quadrata della somma dei loro quadrati.

93. La distanza di un punto da un piano. — Sia $P\,(x', y', z')$ il punto, ed il piano π sia dato mediante la equazione normale

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Si conduca per P il piano parallelo a π, il quale seghi n in N', e si ponga $ON' = p'$ (v. fig. di pag. 126); l'equazione normale di questo nuovo piano

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p' = 0$$

dovrà essere soddisfatta dalle coordinate di P; segue

$$p' = x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma.$$

Ora la distanza $\delta = PQ = N'N$ dal piano π è data da (cfr. n. 31)

$$\delta = p - p' = -(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma - p); \tag{8}$$

dunque:

La distanza di un punto, di date coordinate, da un piano di data equazione normale è il valore opposto a quello che assume il primo membro della equazione stessa quando, al posto delle variabili, si sostituiscano le coordi-

nate del punto. Qui la distanza figura con un segno, che è il segno di PQ quando sulla retta PQ si assuma lo stesso verso positivo di n. Tutti i punti dello spazio che stanno da una stessa banda di π, ad es. da quella contenente l'origine, hanno dal piano distanze positive; i punti dell'altra regione hanno distanze negative.

Se il piano è dato mediante una equazione generale, si ha (n. 92):

La distanza del punto P (x', y', z') dal piano

$$a x + b y + c z + d = 0$$

è espressa da

$$\delta = \frac{a x' + b y' + c z' + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{9}$$

Il segno del radicale può esser regolato in modo che la distanza dell'origine del piano riesca positiva (se $d \neq 0$).

Osservazione. — La (9) ci fa vedere che il valore assunto dal primo membro della equazione generale di un piano, quando al posto delle variabili si pongono le coordinate di un punto dato P, differisce per un fattore costante dalla distanza di P dal piano, ed assume l'uno o l'altro segno secondo che P si trova dall'una o dall'altra banda rispetto al piano.

94. Retta e piano perpendicolari. — Una retta uscente dal punto P (x', y', z'),

$$r) \qquad \frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n},$$

è perpendicolare al piano

$$\pi) \qquad a x + b y + c z + d = 0,$$

se i coseni di direzione della retta, che sono proporzionali ad l, m, n (n. 90), uguagliano i coseni di direzione della normale al piano, che sono proporzionali ad a, b, c (n. 92), se adunque l, m, n sono proporzionali ad a, b, c. Assumendoli uguali (come è lecito), si ha il risultato:

La retta uscente dal punto (x', y', z'), e perpendicolare al piano

$$a x + b y + c z + d = 0,$$

ha le equazioni

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b} = \frac{z - z'}{c}.$$

In particolare, se il punto è l'origine, la retta sarà

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Similmente si vede che il piano perpendicolare alla retta r, condotto per il punto (x_0, y_0, z_0), ha l'equazione

$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0.$$

95. Diedro di due piani; angolo di una retta con un piano. — Nei problemi ove intervengono angoli di piani, o di piani con rette, giova sostituire a ciascun piano una retta normale, per ridursi così a questioni già trattate.

Ad es. il diedro dei due piani

$$\pi) \qquad a\,x + b\,y + c\,z + d = 0,$$

$$\pi') \qquad a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' = 0$$

uguaglia l'angolo (preso convenientemente) delle due rette normali a quei piani condotte dalla origine

$$n) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$n') \qquad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'};$$

dunque (n. 91):

Il diedro di due piani π, π' *è determinato dalle formole*

$$\cos \pi\,\pi' = \frac{a\,a' + b\,b' + c\,c'}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$

$$\operatorname{sen}^2 \pi\,\pi' = \frac{(a\,b' - a'\,b)^2 + (a\,c' - a'\,c)^2 + (b\,c' - b'\,c)}{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)}.$$

La condizione di ortogonalità tra i due piani è

$$a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0.$$

Similmente, se è richiesto l'angolo del piano π colla retta

$$r) \qquad \frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n},$$

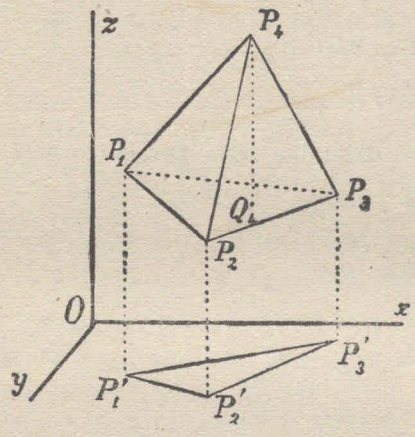
si conduca la normale n al piano π, e si osservi che l'angolo $\widehat{r\,n}$ è il complemento dell'angolo $\widehat{r\,\pi}$; dunque

$$\operatorname{sen}\, r\,\pi = \cos r\,n = \frac{a\,l + b\,m + c\,n}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

L'annullarsi del numeratore esprime questa volta il parallelismo fra la retta r e il piano n, come, per altra via, si era veduto (n. 83).

96. Area di un triangolo. — Per calcolare l'area di un triangolo giova il seguente lemma:

Il quadrato di un'area piana è uguale alla somma dei quadrati delle proiezioni ortogonali dell'area sopra tre piani mutuamente perpendicolari.



Sia Δ l'area, n una normale al piano che la contiene; come piani di proiezione si assumono i piani coordinati. Poichè il diedro formato dal piano di Δ col piano yz uguaglia l'angolo $\widehat{nx}$ delle due normali, sarà (n. 87)

$$\Delta_x = \Delta \cos n\,x$$

la proiezione ortogonale dell'area sul piano $y\,z$; e similmente saranno

$$\Delta_y = \Delta \cos n\,y, \quad \Delta_z = \Delta \cos n\,z$$

le proiezioni sui piani $z\,x$, $x\,y$. Quadrando, sommando e ricordando la (5) del n. 89, si ha

$$\Delta^2 = \Delta_x{}^2 + \Delta_y{}^2 + \Delta_z{}^2,$$

che dimostra il lemma.

Si voglia ora l'area Δ del triangolo $P_1\,P_2\,P_3$, i cui vertici hanno le coordinate $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$, $P_3\,(x_3, y_3, z_3)$. Il triangolo proiezione ortogonale di Δ sul piano $x\,y$ ha i vertici $P_1'\,(x_1, y_1)$, $P_2'\,(x_2, y_2)$, $P_3'\,(x_3, y_3)$, ed ha quindi l'area (n. 33)

$$\Delta z = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Con permutazioni circolari di x, y, z si ottengono le aree delle altre due proiezioni Δ_x, Δ_y; quadrando e sommando, in virtù del lemma precedente, si trova

$$(1) \qquad \Delta^2 = \frac{1}{4}\left\{ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2 \right\}.$$

97. Volume di un tetraedro. — Il tetraedro sia determinato dal triangolo $P_1\,P_2\,P_3$ che precede, e dal vertice $P_4\,(x_4, y_4, z_4)$. Calcoliamo anzitutto la distanza $P_4\,Q_4$ del quarto vertice dalla faccia opposta. Questa faccia ha l'equazione (n. 74)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

quindi $P_4 Q_4$ è dato (n. 93) da una frazione, il cui numeratore è il valore assunto dal determinante quando al posto delle variabili si sostituiscono le coordinate (x_4, y_4, z_4) di P_4; e il denominatore, essendo la radice quadrata della somma dei quadrati dei complementi algebrici di x, y, z nel determinante scritto, è uguale a 2Δ, in virtù della (1) (n. 96). Si ha così la relazione

$$P_4 Q_4 = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se poi si ricorda la formola di geometria elementare che esprime il volume di un tetraedro,

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = \frac{1}{3} \Delta \cdot P_4 Q_4,$$

si trova in fine, trascurando i segni,

$$(2) \qquad P_1 P_2 P_3 P_4 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Il volume di un tetraedro è dato da un sesto del determinante formato colle coordinate dei vertici e colle unità. Si confronti l'analoga formola che dà l'area di un triangolo in geometria piana (n. 33).

L'annullarsi del determinante è, come già sappiamo (n. 74), la condizione perchè i quattro vertici stiano in un piano.

Osservazione. — Al volume di un tetraedro $P_1 P_2 P_3 P_4$ si può attribuire un segno colla seguente convenzione.

Si immagini un osservatore coi piedi nell'interno del triangolo $P_1 P_2 P_3$ ed il capo della banda di P_4. Un punto, che descriva il perimetro del triangolo $P_1 P_2 P_3$ incontrandone i vertici nell'ordine scritto, apparirà ruotare, rispetto all'osservatore, in un verso determinato. Se questo verso è positivo (cioè da sinistra verso destra), si riguarderà come positivo il volume del tetraedro; altrimenti si riterrà negativo.[1]

Volendo ora esaminare se la formola (2) valga anche nel segno, si noti che, quando il vertice P_4 (x_4, y_4, z_4) varia, mentre P_1, P_2, P_3 restano fissi, il primo membro della (2) cambia segno ogniqualvolta P_4 attraversa il piano $P_1 P_2 P_3$, passando dall'una all'altra banda, e solo in questo caso. Ma nel tempo stesso cambia segno anche il determinante secondo membro, come risulta dalla osservazione del n. 93.

[1] Si può anche dire che il volume è positivo se ad un osservatore, che abbia i piedi in P_1 e il capo in P_2, il verso da P_2 a P_3 appare procedere da sinistra verso destra.

Dunque, per ogni posizione di P_4, i due membri della (2) hanno o sempre lo stesso segno, o sempre il segno opposto; e lo stesso fatto si verifica variando gli altri vertici. Per decidere quale dei due casi si presenti, si consideri il tetraedro che ha i vertici (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), il cui volume è positivo per definizione. Poichè il determinante che si trova nella (2) acquista in corrispondenza il valore — 1, concludiamo che la formola (2) vale anche nei segni purchè a secondo membro si premetta il segno —.

98. Minima distanza fra due rette. — Per fare una applicazione di varie formole precedenti proponiamoci di determinare la minima distanza fra le due rette

$$r_1) \qquad \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$r_2) \qquad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

È noto che per *minima distanza* si intende la lunghezza del segmento avente gli estremi su r_1, r_2 e perpendicolare ad entrambe le rette; segmento uguale alla distanza fra punto qualsiasi di r_2, ad es. (x_2, y_2, z_2), ed il piano π_1 condotto per r_1 parallelamente ad r_2.

L'equazione del piano π_1 sarà del tipo

$$a x + b y + c z + d = 0;$$

le condizioni di contenere la retta r_1, e di esser parallelo alla retta r_2, sono espresse (n. 83) da

$$\begin{aligned} a x_1 + b y_1 + c z_1 + d &= 0, \\ a l_1 + b m_1 + c n_1 &= 0, \\ a l_2 + b m_2 + c n_2 &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando a, b, c, d fra le quattro ultime relazioni, si ottiene l'equazione del piano sotto forma di un determinante di quarto ordine uguagliato a zero; e questa equazione si riduce subito alla seguente:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ora la distanza del punto (x_2, y_2, z_2) da questo piano è espressa dalla formola (n. 93).

$$(2) \qquad \delta = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2 + (l_1 m_2 - l_2 m_1)^2}},$$

che *dà la minima distanza richiesta.* Tenendo conto della formola (7) del n. 91, la (2) può anche trascriversi così:

$$(2') \qquad \delta = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\,\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}\,\operatorname{sen} r_1 r_2}.$$

L'annullarsi del numeratore esprime che le due rette stanno in un piano; cfr. n. 84.

Si noterà che, se le due rette r_1, r_2 sono date mediante le loro equazioni normali (n. 90), se dunque $l_1, \ldots, n_2$ sono proprio i coseni di direzione $\cos\alpha_1, \ldots, \cos\gamma_2$ delle rette stesse, la (2') diviene

$$(2'') \qquad \delta = \frac{1}{\operatorname{sen} r_1 r_2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Se invece la retta r_1 è definita come congiungente i punti $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $P'\,(x', y', z')$, e la r_2 come congiungente $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$, $P''\,(x'', y'', z'')$, nelle quali ipotesi possiamo porre (n. 73)

$$l_1 = x' - x_1, \quad m_1 = y' - y_1, \quad n_1 = z' - z_1,$$
$$l_2 = x'' - x_2, \quad m_2 = y'' - y_2, \quad n_2 = z'' - z_2,$$

il determinante che entra nella (2') esprime (n. 97) il sestuplo del volume del tetraedro $P_1 P' P_2 P''$, mentre i radicali dànno i segmenti $P_1 P'$, $P_2 P''$; e la formola (2') equivale alla seguente

$$(3) \qquad 6\, P_1 P' P_2 P'' = P_1 P' \cdot P_2 P'' \cdot \delta \operatorname{sen} r_1 r_2.$$

Per tradurla in parole si chiami (con CAYLEY) *momento di due rette sghembe* il prodotto della minima distanza per il seno dell'angolo che esse formano; si avrà allora il teorema di CHASLES: *il sestuplo del volume di un tetraedro è espresso dal prodotto di due lati opposti per il momento delle rette cui esse appartengono.*

Esercizi. I. — 1) Una retta forma con tre assi ortogonali angoli uguali; qual'è il comune valore di questi?

2) Un piano stacca sui tre assi coordinati segmenti uguali; si calcoli il diedro formato da esso coi piani coordinati.

3) Si calcolino i coseni di direzione delle seguenti rette: *a)* $x = 2z + 3$, $y = 3z - 1$; *b)* $2z - y + 3z + 1 = 0$, $x - 3y + z - 1 = 0$; *c)* $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$; *d)* normale al piano $3x + 4y - 5z + 1 = 0$.

4) Dato il tetraedro i cui vertici hanno per coordinate (0, 0, 2), (1, 0, 0), (— 2, 1, 0), (1, 1, 1), determinare le lunghezze dei lati, le aree delle facce e il volume.

5) Trovare l'angolo delle due rette

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{z}{\sqrt{2}}; \qquad \frac{x}{\sqrt{3}} = y, \quad z = 0.$$

6) Gli spigoli di un angolo triedro hanno per equazioni: $x = 2y = z$, $-x = y = z$, $x = -3y = 2z$; si calcolino i valori delle sue facce e dei suoi angoli diedri. Si risolva lo stesso problema per il triedro i cui spigoli sono le bisettrici delle facce del triedro xyz.

7) Trovare l'angolo della retta $x = 2z$, $y = z + 1$ col piano $x - 3z + 2 = 0$.

8) I punti (1, 1, 1), (1, — 1, — 1), (— 1, 1, — 1),(— 1, — 1, 1) sono vertici di un tretraedro regolare. Calcolare le lunghezze dei lati, i valori degli angoli piani e dei diedri.

9) Risolvere l'analogo problema per l'ottaedro regolare, che ha per vertici i sei punti ($\pm$ 1, 0, 0), (0, $\pm$ 1, 0, (0, 0, $\pm$ 1).

10) Condurre per il punto (x', y', z') il piano perpendicolare alla retta $x = lz + p$, $y = mz + q$, e determinare la intersezione di quello con questa.

11) Determinare la distanza tra il punto e la retta dell'esercizio precedente; in particolare tra il punto (2, 0, — 1) e la retta $x = 3z + 2$, $y = 2z - 5$. (Un primo metodo è suggerito dall'esercizio 10); si può anche cercare la distanza del punto da un piano generico condotto per la retta, disponendo del piano in guisa da render massima questa distanza; o finalmente determinare l'area del triangolo che ha un vertice nel punto e gli altri in due punti scelti sulla retta...).

12) Condurre per il punto (3, 1, — 1) il piano che è parallelo alla retta $x = 2z + 3$, $y = z$, ed è perpendicolare al piano $2x + 3y - z + 5 = 0$.

13) Trovare le equazioni della retta passante pel punto (x', y', z'), e che incontra la retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ sotto un angolo di 60°, ovvero le è perpendicolare. (Es. numerico: il punto sia l'origine, e la retta abbia le equazioni $x + 2y = 0$, $x - 3z + 1 = 0$).

14) Per la retta $x = lz + p$, $y = mz + q$ condurre un piano che formi con un piano dato, $ax + by + cz + d = 0$, un diedro dato, e in particolare sia perpendicolare ad esso. (Es. numerico: la retta sia $2x = -y = -2z + 2$, il piano sia uno dei piani coordinati, ovvero il piano $x - y + z + 1 = 0$, e il diedro sia di 60°).

15) Dati due piani paralleli

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad ax + by + cz + d' = 0,$$

calcolare la loro distanza.

16) Date due rette parallele

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}, \qquad \frac{x - x''}{l} = \frac{y - y''}{m} = \frac{z - z''}{n},$$

calcolare la loro distanza.

II. — 17) I sei piani perpendicolari agli spigoli di un tetraedro, nei punti medi di questi, passano per uno stesso punto.

18) I piani che passano rispettivamente per i punti medi degli spigoli di un tetraedro, e sono perpendicolari agli spigoli opposti, concorrono in uno stesso punto.

19) Scrivere le equazioni dei piani bisettori del diedro formato da due piani dati.

20) Scrivere le equazioni delle bisettrici dell'angolo delle due rette

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}, \qquad \frac{x-x'}{l'}=\frac{y-y'}{m'}=\frac{z-z'}{n'}.$$

21) I piani che congiungono gli spigoli di un triedro colle bisettrici delle facce opposte passano per una stessa retta; così pure i piani congiungenti due spigoli colle bisettrici esterne delle facce opposte, ed il piano congiungente il terzo spigolo colla bisettrice interna della terza faccia. Le bisettrici esterne delle tre facce stanno in un piano; così pure due bisettrici interne e la terza bisettrice esterna. (Come triedro si può assumere quello, supposto obliquo, degli assi coordinati).

22) I tre piani bisettori interni dei diedri di un triedro passano per una stessa retta; e passano pure per una retta due piani bisettori esterni e il piano bisettore interno relativo al terzo spigolo. I tre piani bisettori esterni segano le facce opposte in tre rette di uno stesso piano; e così pure due piani bisettori interni e il piano bisettore esterno relativo al terzo spigolo.[1]

23) I sei piani bisettori interni dei diedri di un tetraedro passano per uno stesso punto; così pure passano per uno stesso punto i tre piani bisettori esterni relativi ai tre spigoli di una faccia, e i tre piani bisettori interni relativi ai rimanenti spigoli; finalmente passano per uno stesso punto i due piani bisettori interni relativi a due spigoli opposti, e i quattro piani bisettori esterni relativi ai rimanenti spigoli. Si hanno così complessivamente 8 punti, che sono centri di sfere tangenti alle facce del tetraedro.

24) Se in un tetraedro due coppie di spigoli opposti si compongono di rette ortogonali, la stessa proprietà spetta alla terza coppia.

25) Le quattro altezze di un tetraedro sono, in generale, sghembe a due a due; però, se due altezze si segano, allora si segano anche le altre due, e due spigoli opposti del tetraedro sono ortogonali; se, di più, altri due spigoli opposti del tetraedro sono ortogonali, le quattro altezze passano per uno stesso punto.

26) Insieme al triedro formato dai piani $a_i x + b_i y + c_i z = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ si consideri il triedro supplementare (che ha come spigoli le rette normali a quei piani condotte per l'origine). Si dimostri che i due triedri sono così situati che i piani congiungenti spigoli corrispondenti passano per una stessa retta, e le rette intersezioni di facce corrispondenti stanno in un medesimo piano; inoltre questo piano e quella retta sono perpendicolari tra loro.

III. — 27) Siano r, s due rette orientate, non parallele, e t sia la retta perpendicolare ad entrambe, orientata in guisa che un osservatore situato lungo t nel solito modo (n. 71, nota), il quale guardi la semiretta positiva r, abbia alla

[1] In questo, e nel seguente es., per caratterizzare i diedri interni s'immagini un punto (ad es. l'origine) che cada in una delle regioni in cui lo spazio è diviso dal triedro o tetraedro; si chiamerà interno ogni diedro contenente quel punto.

sua destra la semiretta positiva s. Si dimostri che i coseni di direzione della retta t sono espressi, in valore e segno, dalle formule

$$\cos xt = \frac{1}{\operatorname{sen} rs}\begin{vmatrix} \cos yr & \cos zr \\ \cos ys & \cos zs \end{vmatrix}, \text{ ecc.,}$$

dove sen rs va preso in valore assoluto.

28) La convenzione stabilita nell'esercizio precedente attribuisce un segno alla minima distanza δ fra due rette r, s. Si dimostri che questo segno è opposto a quello che δ ha nella formula (2'') (n. 98); è pure opposto a quello che δ assume in conseguenza della formula (3) (n. 98). Il segno della minima distanza risulta positivo o negativo, secondo che, rispetto ad un osservatore disteso nel verso positivo di r (od s), il verso positivo lungo s (od r) procede da destra verso sinistra, o viceversa.

29) Date le equazioni di due rette sotto forma parametrica

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma,$$
$$x = x' + t'\cos\alpha', \quad y = y' + t'\cos\beta', \quad z = z' + t'\cos\gamma',$$

si determinino le coordinate degli estremi del segmento minima distanza tra le due rette, la lunghezza del segmento stesso, e le equazioni della retta cui esso appartiene.

30) Sopra tre rette orientate r, s, t, uscenti da un punto O, si prendano tre segmenti $OR = OS = OT = 1$. Calcolando, secondo la formola di geometria elementare, il volume del tetraedro $ORST$, nel quale si riguardino successivamente come basi le facce OST, OTR, ORS, si trovano le uguaglianze

$$\operatorname{sen} rr' \operatorname{sen} st = \operatorname{sen} ss' \operatorname{sen} tr = \operatorname{sen} tt' \operatorname{sen} rs,$$

dove r', s', t' indicano le proiezioni ortogonali degli spigoli r, s, t su quelle facce. Il comune valore dei tre prodotti, preso col segno che spetta al volume del tetraedro nominato (n. 97, Oss.), si chiama (Staudt) *seno del triedro* rst, e si indica con sen rst; esso è compreso fra -1 e $+1$, e raggiunge uno di questi estremi se il triedro è trirettangolo; vale 0 se le tre rette stanno in un piano.

Si dimostri che si ha

$$\operatorname{sen} rst = \begin{vmatrix} \cos xr & \cos xs & \cos xt \\ \cos yr & \cos ys & \cos yt \\ \cos zr & \cos zs & \cos zt \end{vmatrix},$$

e in conseguenza

$$\operatorname{sen}^2 rst = \begin{vmatrix} 1 & \cos rs & \cos rt \\ \cos sr & 1 & \cos st \\ \cos tr & \cos ts & 1 \end{vmatrix}.$$

31) Il volume di un tetraedro è uguale ad un sesto del prodotto di tre spigoli uscenti da un vertice per il seno del relativo triedro.

IV. — 32) Si estendano ad un sistema di n punti dello spazio, presi con determinati pesi, le relazioni enunciate in geometria piana al n. 33, es. 16), 17), 18).

33) Se si considerano n punti $P_i\,(x_i, y_i, z_i)$, di pesi p_i, e una retta r, dicesi *momento d'inerzia del sistema dei punti rispetto ad* r la somma dei prodotti dei

pesi dei singoli punti per i quadrati delle rispettive distanze da r. Quali sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati?

34) Dimostrare che il momento d'inerzia di un sistema di punti rispetto ad una retta è uguale al momento d'inerzia rispetto alla parallela condotta pel centro di gravità, aumentato del prodotto del quadrato della distanza di queste due rette per la somma dei pesi. (Per semplicità si assuma come asse z la retta passante pel centro di gravità, della quale è parola nel teorema).

35) Il momento d'inerzia di un sistema di punti, rispetto ad una retta r passante per l'origine delle coordinate, è

$$a_{11}\cos^2 rx + a_{22}\cos^2 ry + a_{33}\cos^2 rz + 2\,a_{23}\cos ry\cos rz + 2\,a_{31}\cos rz\cos rx + 2\,a_{12}\cos rx\cos ry,$$

dove a_{11}, a_{22}, a_{33} sono i momenti d'inerzia rispetto agli assi coordinati, e

$$a_{23} = -\sum_1^n p_i y_i z_i, \quad a_{31} = -\sum_1^n p_i z_i x_i, \quad a_{12} = -\sum_1^n p_i x_i y_i.$$

36) Estesi ai vettori nello spazio le definizioni enunciate nell'Oss. al n. 24, si stabiliscano le formule che esprimono i coseni di direzione di un vettore $(R) \equiv AB$ (avente l'origine in A e il termine in B) in funzione delle componenti X, Y, Z del vettore.

37) Date le componenti di due vettori, trovare il coseno dell'angolo che essi formano, e la condizione affinchè sieno ortogonali.

38) La *somma geometrica, o risultante,* di un sistema di vettori si definisce come nel piano: essa è un nuovo vettore, che ha per componenti la somma delle componenti omonime dei vettori dati.

39) Dicesi *prodotto interno* di due vettori un numero, che è il prodotto delle loro lunghezze per il coseno dell'angolo che essi formano. Tanto dalla sua definizione, quanto dalla sua espressione $XX' + YY' + ZZ'$ in funzione delle componenti (X, Y, Z), (X', Y', Z') dei due vettori, si rileva che il prodotto interno gode la proprietà commutativa.

40) Dicesi *prodotto esterno* di due vettori (R), (S), aventi la stessa origine, un *nuovo vettore* (P), colla stessa origine, normale al piano dei due dati, avente per lunghezza il prodotto delle lunghezze di questi per il seno dell'angolo compreso, e diretto in modo che la rotazione di un angolo inferiore a π, mediante cui (R) si sovrappone ad (S), avvenga, rispetto a (P), in verso positivo. La lunghezza di (P) è uguale al valore dell'area del parallelogramma di cui (R), (S) sono due lati. Le componenti L, M, N di quel vettore uguagliano in valore le componenti o proiezioni ortogonali sui piani (yz, zx, xy) della detta area; precisamente

$$L = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y & z & 1 \end{vmatrix}, \text{ ecc.},$$

dove (x, y, z) sono le coordinate dell'origine comune, e (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) quelle degli estremi liberi dei due vettori. Dalla definizione geometrica e dall'espressione delle componenti si rileva che il prodotto esterno di due vettori muta segno quando si scambi l'ordine di questi.

41) Per *momento di un vettore* $(R) \equiv AB$ *rispetto a un punto* M intendesi il prodotto esterno dei due vettori MA, MB, vale a dire un vettore uscente da M, normale al piano MAB, uguale al doppio dell'area del triangolo MAB, e diretto nel verso convenuto. Se le componenti di (R) sono X, Y, Z, le coordinate di A sono x_1, y_1, z_1, e quelle di M sono x, y, z, si trova che le componenti L, M, N di (P) sono

$$L = (y - y_1)\,Z - (z - z_1)\,Y, \quad \text{ecc.};$$

ovvero, introducendo le componenti L_0, M_0, N_0 del momento dello stesso vettore rispetto all'origine delle coordinate:

$$L = L_0 - y_1 Z + z_1 Y, \qquad M = M_0 - z_1 X + x_1 Z, \qquad N = N_0 - x_1 Y + y_1 X.$$

42) La componente, secondo una retta r, del momento di un vettore (R) rispetto a un punto qualunque M di r, non dipende dalla posizione di M. (Per vederlo nel modo più semplice si assuma la retta come asse coordinato). La lunghezza di questo nuovo vettore, il quale dicesi *momento di* (R) *rispetto ad* r, è data dal valore assoluto del prodotto $R\delta$ sen ϑ, ove con δ si indichi la minima distanza fra r ed (R) e con ϑ l'angolo delle due rette.

43) Dato un sistema di vettori (R_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dicesi *momento risultante* del sistema, rispetto ad un punto, il vettore (P) somma dei momenti dei vettori dati, rispetto a quel punto (che si dice *centro di riduzione* del sistema). Posto che il centro di riduzione abbia le coordinate x', y', z', e i vettori (R_i) abbiano le componenti X_i, Y_i, Z_i, e sieno applicati ai punti (x_i, y_i, z_i), le componenti di (P) risultano

$$L = \sum_1^n{}_i \left((y_i - y')\,Z_i - (z_i - z')\,Y_i \right), \quad \text{ecc.}$$

Indicando con L_0, M_0, N_0 le componenti del momento risultante, rispetto all'origine, e con X, Y, Z le componenti della risultante (R) del sistema di vettori, si ha

$$L = L_0 - y' Z + z' Y, \quad \text{ecc.}$$

Com'è il momento risultante di un sistema, se la risultante è nulla?

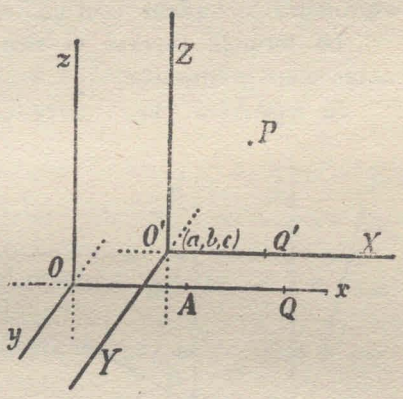
44) Il momento risultante di un sistema di vettori ha sempre la stessa proiezione sulla risultante del sistema, comunque vari il centro di riduzione. Se poi il centro di riduzione varia sopra una retta parallela alla risultante, i momenti corrispondenti sono vettori equipollenti; variano cioè solo da retta a retta. (Per dimostrare queste due proprietà si assuma la retta, di cui si tratta, come asse z).

Capitolo III.

Trasformazione delle coordinate.

99. Trasformazione delle coordinate cartesiane. — Proponiamoci il problema (cfr. n. 34):

Fissati due sistemi di assi cartesiani nello spazio, stabilire tra le coordinate (x, y, z), (X, Y, Z) *di uno stesso punto* P *nei due sistemi tali relazioni che permettano di esprimere le* x, y, z *in funzione delle* X, Y, Z, *e viceversa.*



Distingueremo tre casi:

I Caso. — I nuovi assi (ortogonali o no) X, Y, Z siano paralleli agli antichi x, y, z; ma la nuova origine O' sia distinta dalla antica, e abbia, nell'antico sistema, le coordinate (a, b, c).

Per un punto P qualunque conduciamo il piano parallelo ad yz e YZ, e siano Q, Q' i punti in cui esso sega gli assi x, X; sia poi A il punto di incontro di x col piano YZ; si ha

$$OQ = x, \qquad O'Q' = AQ = X, \qquad OA = a,$$

ed inoltre

$$OQ = OA + AQ.$$

Da questa, e dalle analoghe relazioni relative agli altri due assi, si deducono le formole richieste

$$(1) \qquad x = a + X, \qquad y = b + Y, \qquad z = c + Z.$$

Le formole per il passaggio inverso sono

$$X = x - a, \qquad Y = y - b, \qquad Z = z - c.$$

II Caso. — L'origine sia comune, ma siano diverse le direzioni degli assi nei due sistemi, che, per semplicità, supporremo *entrambi ortogonali.*

Di uno stesso punto P si costruiscano le antiche coordinate

$$OQ = x, \qquad QR = y, \qquad RP = z,$$

e le nuove

$$OQ' = X, \qquad Q'R' = Y, \qquad R'P = Z.$$

Proiettando ortogonalmente le due spezzate $OQRP$, $OQ'R'P$ (i cui lati sono paralleli, rispettivamente, agli antichi e ai nuovi assi coordinati) sopra una stessa retta, si ottengono proiezioni uguali (n. 86). Facendo coincidere questa retta ordinatamente cogli assi x, y, z, e ricordando che

$$\widehat{xy} = \widehat{xz} = \widehat{yz} = \frac{\pi}{2},$$

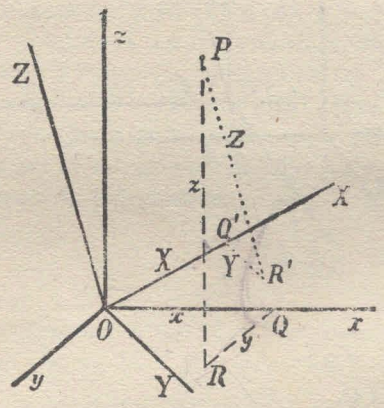
si trovano le formole

$$(2) \quad \begin{cases} x = X\cos Xx + Y\cos Yx + Z\cos Zx, \\ y = X\cos Xy + Y\cos Yy + Z\cos Zy, \\ z = X\cos Xz + Y\cos Yz + Z\cos Zz, \end{cases}$$

esprimenti le antiche coordinate mediante le nuove.

Le formole inverse si ricavano col semplice scambio delle lettere maiuscole e minuscole.

Si osserverà che i nove coefficienti che entrano nelle formole (2) (coseni di direzione dei nuovi assi rispetto agli antichi) non sono tutti indipendenti fra loro; ma precisamente *sei* di quei coefficienti possono esprimersi in funzione degli altri *tre*. Infatti, per fissare la posizione del triedro XYZ rispetto al triedro xyz, basta conoscere *gli angoli* $x\widehat{X}$, $y\widehat{X}$, che permettono di costruire l'asse X, e *l'angolo* $x\widehat{Y}$, che determina Y sul piano normale in O ad X; l'asse Z sarà poi la normale comune ad X e Y. Segue di qua che fra quei nove coefficienti devono passare varie relazioni, di cui *sei* indipendenti. Fra queste relazioni le più importanti si ricordano nel modo seguente.



Si formi il determinante della sostituzione (2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos Xx & \cos Yx & \cos Zx \\ \cos Xy & \cos Yy & \cos Zy \\ \cos Xz & \cos Yz & \cos Zz \end{vmatrix}.$$

a) *La somma dei quadrati degli elementi di una stessa orizzontale, o verticale, del determinante* Δ *è uguale ad* 1; infatti, ad es., gli elementi della prima orizzontale sono i coseni di direzione della retta x rispetto ai tre assi ortogonali X, Y, Z (n. 89, (5)).

b) *La somma dei prodotti degli elementi di una stessa linea* (*orizzontale o verticale*) *per gli elementi di una linea parallela è zero,* giacchè si ha, ad es. (n. 89, (6)),

$$\cos Xx\cos Xy + \cos Yx\cos Yy + \cos Zx\cos Zy = \cos xy = 0.$$

c) *Il determinante* Δ *vale* ± 1; infatti, eseguendo il quadrato di Δ secondo la nota regola, si ottiene un determinante nel quale, in virtù delle relazioni *a*) e *b*), gli elementi principali valgono 1, e gli altri 0; dunque $\Delta^2 = 1$, $\Delta = \pm 1$. L'ambiguità nel segno si spiega nel seguente modo. Si supponga che il triedro trirettangolo XYZ vada ruotando con moto continuo intorno ad O, mentre il triedro xyz resta fisso; il valore di Δ, ove mutasse, dovrebbe variare con continuità; ma poichè Δ non può assumere che i valori $+1$ o -1, esso dovrà, durante il movimento, conservare il valore $+1$, o il valore -1. Ora, con un movimento continuo si può ottenere che le semirette positive X, Y vengano a sovrapporsi alle semirette positive x, y; allora la semiretta positiva Z verrà a coincidere, o colla semiretta positiva z, o colla semiretta negativa z. Nel primo caso si ha, alla fine del moto,

$$\cos Xx = 1,\ \cos Yy = 1,\ \cos Zz = 1,\ \cos Xy = \ldots = 0,\ \Delta = +1;$$

nel secondo

$$\cos Xx = 1,\ \cos Yy = 1,\ \cos Zz = -1,\ \cos Xy = \ldots = 0,\ \Delta = -1.$$

Dunque il determinante Δ vale $+1$, o -1, secondo che è possibile, o no, sovrapporre il triedro XYZ al triedro xyz, in guisa che le semirette positive X, Y, Z vengano a coincidere colle semirette positive x, y, z. Nel primo caso i due triedri diconsi *congruenti*.

III Caso. — I due sistemi *ortogonali* differiscano per l'origine e per la direzione degli assi.

Ragionando come in geometria piana (n. 34), si perviene alle formole

$$(3)\qquad \begin{cases} x = X\cos Xx + Y\cos Yx + Z\cos Zx + a, \\ y = X\cos Xy + Y\cos Yy + Z\cos Zy + b, \\ z = X\cos Xz + Y\cos Yz + Z\cos Zz + c, \end{cases}$$

dove a, b, c, sono le coordinate della nuova origine rispetto all'antico sistema.

Osservazione. — Varie volte basta ricordare che le formole per il passaggio da un sistema cartesiano ad un altro sono del tipo

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a + a'X + a''Y + a'''Z, \\ y = b + b'X + b''Y + b'''Z, \\ z = c + c'X + c''Y + c'''Z, \end{cases}$$

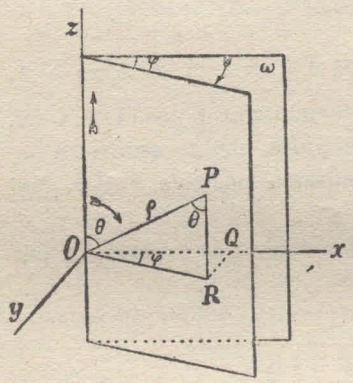
dove le quantità a, ... c''' sono costanti, indipendenti dalla posizione del punto che si considera.

In questo tipo rientrano anche le formole per il passaggio da un sistema non ortogonale ad un altro sistema non ortogonale; esse infatti si otterrebbero proiettando ortogonalmente le spezzate formate dalle antiche

e nuove coordinate (cfr. *Caso II*) sopra una retta normale ad uno dei piani yz, zx, xy, il che porterebbe, è vero, modificazioni nei coefficienti di X, Y, Z nelle formole (2) o (3); ma le formole stesse rimarrebbero lineari. In ogni caso: *nel passaggio da uno ad un altro sistema cartesiano, le coordinate antiche si esprimono mediante funzioni lineari delle nuove, e viceversa.*

100. Coordinate polari nello spazio. — In alcune questioni metriche, ed in varie applicazioni della matematica, giova far uso di un sistema di coordinate, che è analogo al sistema delle coordinate polari nel piano (n. 37).

Fissato un punto O (*polo*), una retta orientata z per esso (*asse polare*), ed un semipiano ω per z (*piano polare*), ad ogni punto P dello spazio corrispondono la distanza $OP = \rho$ (*raggio vettore*), il diedro φ del semipiano ω col semipiano zP (*azimuth* o *longitudine*), e l'angolo θ della semiretta positiva z colla semiretta OP (*distanza zenitale* o *colatitudine*). Viceversa, dati ρ, φ, θ, resta pienamente determinato il punto P. Possiamo assumere perciò i valori ρ, φ, θ come coordinate *polari* del punto P.



Per avere tutti i punti dello spazio, basta far variare ρ fra 0 e $+\infty$, φ fra 0 e 2π, θ fra 0 e π. I punti per cui $\rho = \text{cost.}$ si trovano sopra una sfera di centro O; quelli, per cui $\varphi = \text{cost.}$ appartengono ad un semipiano (o piano) per l'asse polare; quelli, per cui θ è costante stanno in un cono rotondo di vertice O ed asse z. Ed ogni punto dello spazio vien riguardato come intersezione di una di quelle sfere, di uno di quei piani e di uno di quei coni.

È facile stabilire le formole per il passaggio dal sistema delle coordinate polari ρ, φ, θ al sistema cartesiano ortogonale x, y, z, che ha l'origine in O, l'asse z coincidente coll'asse polare, ed il piano xz coincidente con ω. Se infatti si costruiscono le coordinate cartesiane OQ, QR, RP di P, dall'esame dei triangoli ORP, OQR, rettangoli rispettivamente in R e Q, seguono le formole

$$(1)\qquad \begin{cases} x = OQ = OR\cos\varphi = \rho\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi, \\ y = QR = OR\,\text{sen}\,\varphi = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi, \\ z = RP = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

Per il passaggio inverso servono le formole

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \text{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

Esercizi. I. — 1) Le formole per il passaggio da un sistema ortogonale ad un nuovo sistema ortogonale divengono

a) $$x = X, \quad y = Y, \quad z = Z + c,$$

se l'antico triedro xyz ha subìto una traslazione del segmento c lungo l'asse z;

b) $$x = X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi, \quad y = X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi, \quad z = Z,$$

se l'antico triedro ha subìto una rotazione del diedro φ intorno all'asse z;

c) $$x = X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi, \quad y = X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi, \quad z = Z + c,$$

se lo spostamento del triedro risulta da una rotazione intorno a z, seguìta da una traslazione lungo z (*movimento elicoidale* intorno a z).

3) Si dimostri che le formole

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \\ y &= \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \\ z &= \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, \end{aligned}$$

definiscono una trasformazione ortogonale di coordinate coll'origine fissa, ogniqualvolta i coefficienti verifichino le sei relazioni

$$\begin{aligned} &\Sigma\alpha_i^2 = 1, \quad \Sigma\beta_i^2 = 1, \quad \Sigma\gamma_i^2 = 1. \\ &\Sigma\beta_i\gamma_i = 0, \quad \Sigma\gamma_i\alpha_i = 0, \quad \Sigma\alpha_i\beta_i = 0. \end{aligned}$$

Esistono infatti allora tre rette X, Y, Z mutuamente ortogonali, tali che $\cos xX = \alpha_1$, ecc. Da quelle sei relazioni seguono le altre indicate al n. 99 (II Caso), e segue pure che, nel determinante Δ della sostituzione, il complemento algebrico di ciascun elemento uguaglia l'elemento stesso moltiplicato per $\Delta = \pm 1$.

3) In una trasformazione ortogonale di coordinate coll'origine fissa rimangono invariate le espressioni seguenti, formate colle coordinate di uno o più punti: $x^2 + y^2 + z^2$, $xx_1 + yy_1 + zz_1$, $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2$, ed il determinante formato colle coordinate di tre punti. (La dimostrazione può darsi, sia eseguendo la verificazione diretta, sia badando al significato geometrico di quelle espressioni).

4) In una trasformazione ortogonale di coordinate ove cambi l'origine restano invariate le espressioni che si deducono da quelle dell'es. precedente, sostituendo alle coordinate di uno o più punti le componenti di uno o più segmenti.

5) Siano xyz, XYZ due terne congruenti di assi ortogonali colla stessa origine O, ed x_1 sia la retta intersezione dei piani xy, XY, sulla quale si fissi arbitrariamente il verso positivo, ad es. in guisa che sia $xx_1 < \pi$. Si può portare la prima terna a coincidere colla seconda mediante le tre rotazioni seguenti, da eseguirsi in verso positivo (n. 71, nota): una rotazione intorno a z dell'angolo $\varphi = \widehat{xx_1}$, mediante la quale il triedro xyz assume la posizione x_1y_1z; una rotazione intorno a x_1 dell'angolo $\vartheta = \widehat{zZ}$, mediante la quale il triedro x_1y_1z assume la posizione x_1y_2Z (ciò è possibile, perchè z e Z sono ambedue perpendicolari ad x_1); finalmente una rotazione intorno a Z dell'angolo $\psi = \widehat{x_1X}$, mediante la quale l'ultimo triedro viene a coincidere con XYZ (ciò è possibile, perchè x_1 ed X sono perpendicolari a Z). Indicando con (x, y, z), (x_1, y_1, z), (x_1, y_2, Z), (X, Y, Z)

le coordinate di uno stesso punto, riferito successivamente alle terne di assi nominati, valgono le formole (es. 1)

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \operatorname{sen}\varphi, \qquad y = x_1 \operatorname{sen}\varphi + y_1 \cos\varphi,$$
$$y_1 = y_2 \cos\vartheta - Z \operatorname{sen}\vartheta, \qquad z = y_2 \operatorname{sen}\vartheta + Z \cos\vartheta,$$
$$x_1 = X \cos\psi - Y \operatorname{sen}\psi, \qquad y_2 = X \operatorname{sen}\psi + Y \cos\psi.$$

Eliminando x_1, y_1, y_2 tra queste, si ottengono infine le formole seguenti, dovute ad EULERO:

$$x = X(\cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\vartheta) - Y(\cos\varphi\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\cos\vartheta) + Z\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta.$$

$$y = X(\operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\vartheta) - Y(\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) - Z\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta,$$

$$z = X\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\vartheta + Y\cos\psi\operatorname{sen}\vartheta + Z\cos\vartheta.$$

Queste formole hanno il vantaggio di contenere esattamente il numero dei parametri indipendenti (*tre:* φ, ϑ e ψ, detti *angoli di* EULERO), da cui dipende la posizione del nuovo triedro rispetto all'antico.

6) Siano xyz, XYZ due terne congruenti di assi ortogonali, e sia P un punto qualsiasi, avente nei due sistemi le coordinate (x, y, z), (X, Y, Z); un movimento, che porti il primo triedro a coincidere col secondo, porta il punto P in un nuovo punto P' avente, rispetto ai nuovi assi, le coordinate (x, y, z). Segue che le formole per la trasformazione delle coordinate ortogonali,

$$x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + a, \text{ ecc.},$$

quando il determinante $\Delta = [\alpha_1 \beta_2 \gamma_3]$ vale $+1$, possono interpretarsi come relazioni fra la posizione iniziale $P(X, Y, Z)$ e la posizione finale $P'(x, y, z)$ di uno stesso punto, riferito ad un *unico* sistema di assi XYZ. Le formole stesse definiscono dunque un movimento nello spazio, in quanto si tien conto solo della posizione iniziale e finale, facendo astrazione dalle posizioni intermedie (cfr. n. 36). In particolare le formole *a*), *b*), *c*) dell'es. 1) definiscono, ordinatamente, una traslazione parallela all'asse Z, una rotazione, o un movimento elicoidale intorno a questo asse; le formole (1) del n. 99 definiscono una traslazione, rappresentata dal vettore che ha le componenti (a, b, c); le formole (2) del n. 99 definiscono una rotazione intorno al punto fisso O, ecc.

7) Se xyz, XYZ sono due triedri trirettangoli congruenti colla stessa origine O, i piani condotti per le bisettrici interne degli angoli $x\widehat{X}$, $y\widehat{Y}$, $z\widehat{Z}$, perpendicolarmente ai piani dei rispettivi angoli, passano per una stessa retta r tale che $\widehat{rx} = r\widehat{X}$, $\widehat{ry} = r\widehat{Y}$, $\widehat{rz} = r\widehat{Z}$. Facendo ruotare intorno ad r, di un angolo conveniente, il primo triedro, esso viene a sovrapporsi al secondo. Di qua, tenuto conto dell'es. precedente, si conclude che «la rotazione di un corpo intorno ad un punto può sempre esser sostituita dalla rotazione intorno ad una retta uscente dal punto» (EULERO).

II. — 8) Le formole (2) o (3) del n. 99, quando si faccia astrazione da una parte dei legami tra i coefficienti, valgono pure per passare da un sistema *ortogonale* xyz ad un sistema *non ortogonale* XYZ. In tal caso però il determinante

della sostituzione vale $\Delta = \text{sen } XYZ$ (n. 98, es. 30)). La sostituzione inversa (che si ottiene mediante risoluzione rispetto ad X, Y, Z) ha il determinante $\Delta' = \frac{1}{\text{sen } XYZ}$. Da queste osservazioni segue che il determinante della sostituzione esprimente le coordinate *oblique* X, Y, Z di un punto, mediante nuove coordinate *oblique* X_1, Y_1, Z_1 del punto stesso, vale $\frac{\text{sen } X_1Y_1Z_1}{\text{sen } XYZ}$; (si introduca un sistema ortogonale ausiliare).

9) Si dimostri che, in coordinate oblique XYZ, il volume di un tetraedro è espresso da un sesto del solito determinante (n. 97) moltiplicato per sen XYZ; (si introduca un sistema ortogonale ausiliare).

III. — 10) Nel sistema di coordinate polari ogni retta orientata uscente dal polo è determinata dalla longitudine φ e dalla colatitudine ϑ di un suo punto qualsiasi. Si scrivano le equazioni della retta (φ, ϑ) riferita al sistema cartesiano fissato come al n. 100, e si trovino i relativi coseni di direzione.

11) Date due rette (φ, ϑ), (φ_1, ϑ_1) uscenti dal polo di un sistema polare, determinare l'angolo che esse formano. La formola, cui si arriva, coincide colla nota formola di trigonometria sferica

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c \cos A,$$

dove a, b, c sono i lati e A, B, C gli angoli di un triangolo sferico. Da questa formola, mediante permutazioni di lettere e passaggio al triangolo polare, si ricavano tutte le altre formole di trigonometria sferica.

12) Come coordinate (*cilindriche*) di un punto P dello spazio si possono adoperare la distanza $z = QP$ di P da un piano fisso Oxy, e le coordinate polari (ρ, φ) del punto Q del detto piano, rispetto al polo O e all'asse polare Ox. Il punto P risulta allora come intersezione di un piano ($z = \text{cost.}$) parallelo al piano fisso, di un cilindro ($\rho = \text{cost.}$) rotondo intorno all'asse Oz, e di un semipiano ($\varphi = \text{cost.}$) passante per il detto asse. Si trovino le formole per il passaggio dalle coordinate cilindriche alle coordinate cartesiane ortogonali x, y, z. Si dimostri poi che l'equazione di un piano in coordinate cilindriche può porsi sotto la forma

$$\rho \cos(\varphi - \varphi_0) + cz = p,$$

dove φ_0, c e p sono costanti; quale ne è il significato geometrico?

CAPITOLO IV.

Rappresentazione analitica delle superficie e delle linee nello spazio.

101. Equazioni di un luogo di punti. — Un punto, che si muova nello spazio con data legge, può descrivere una linea o una superficie. Noi vedremo ora che le linee e le superficie possono rappresentarsi mediante equazioni contenenti, come variabili, le coordinate del punto mobile.

In generale, data una o più equazioni a tre variabili x, y, z (delle quali una o due potrebbero eventalmente mancare), si considerino tutte le terne di valori (x, y, z) soddisfacenti insieme le equazioni proposte. Quando sia fissato nello spazio un sistema qualsiasi di coordinate, cartesiane o polari. ..., ad ognuna di quelle terne corrisponde un punto avente le coordinate (x, y, z). Il luogo di questi punti si dirà *rappresentato analiticamente dalle equazioni date.* Il luogo avrà *due dimensioni* e sarà, nei casi ordinari, una *superficie,* quando di tre valori x, y, z, soddisfacenti alle equazioni date, si possano assegnare ad arbitrio *due,* entro limiti convenienti, rimanendo in conseguenza determinato il terzo, in uno o più modi. Il luogo avrà *una dimensione* e sarà, nei casi ordinari, una *linea,* quando si possa assegnare ad arbitrio il valore di *una* sola coordinata, rimanendo determinate, in uno o più modi, le altre due.

Viceversa, se un punto si muove nello spazio con data legge, le coordinate del punto varieranno soddisfacendo a certe relazioni, traducenti la legge che regola il movimento; queste relazioni saranno le *equazioni del luogo.*

102. Equazione di una superficie. — Per precisare i concetti che precedono, partiamo da una sola equazione a tre variabili x, y, z che possiamo interpretare come coordinate cartesiane di un punto nello spazio; sia

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

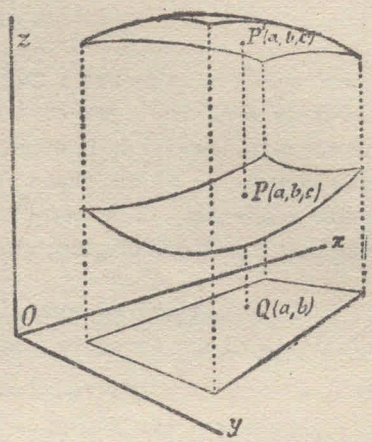
Per costruire un punto del luogo rappresentato dalla (1), si attribuiscano alle due prime coordinate valori arbitrari $x = a, y = b$; rimarrà una equazione ad una sola incognita z:

$$f(a, b, z) = 0,$$

la quale, ove i valori attribuiti ad x, y siano scelti in intervalli convenienti, potrà fornire per z uno o più valori $z = c, c', \ldots$ I punti

$$P(a, b\ c), \qquad P'(a, b, c'), \ldots$$

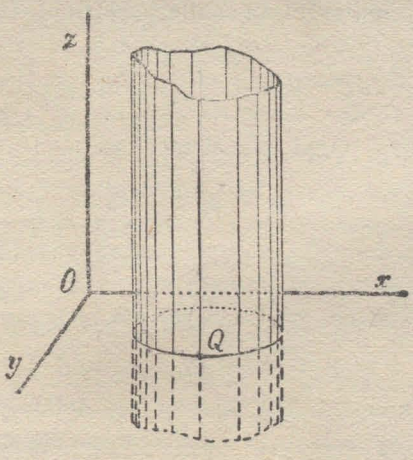
appartengono al luogo, e si trovano sopra una retta parallela a z, condotta per il punto Q (a, b) del piano xy. Facendo variare il punto Q nel detto piano, entro un'area conveniente, e ripetendo per ogni posizione di Q la considerazione precedente, si otterranno infiniti punti $P, P', \ldots, P_1, P'_1, \ldots$, i quali (ove siano soddisfatte per la z, considerata come funzione di x, y, certe condizioni di continuità che si verificano nei casi ordinari) costituiranno una superficie, composta di una o più falde; la (1) sarà *la equazione della superficie.*



103. — L'equazione di una superficie può presentare varie particolarità, che è opportuno notare. Può nella equazione mancare una coordinata, ad esempio z, e la equazione ridursi al tipo

$$f(x, y) = 0. \tag{2}$$

Ora l'equazione stessa, nel piano xy $(z = 0)$, rappresenta una certa linea (n. 40), luogo di un punto Q (a, b) le cui coordinate soddisfano la (2). Ma poichè z non entra nella equazione (2), l'equazione sarà soddisfatta dalle coordinate $x = a$, $y = b$, z arbitraria, di ogni punto della retta condotta pel punto Q parallelamente all'asse z; sicchè tutta quella retta sta sulla superficie. Questa è costituita da infinite rette parallele a z, condotte per i singoli punti della linea piana; la superficie è, in tal caso, un *cilindro,* avente come *generatrici* quelle rette. Dunque: *nello spazio un'equazione contenente due sole coordinate cartesiane rappresenta un cilindro, le cui generatrici sono parallele all'asse della coordinata mancante.*



Se poi l'equazione della superficie contenesse una sola coordinata, x, e fosse soddisfatta dai valori $a, a', \ldots$ di x, la superficie sarebbe costituita dai piani (paralleli ad y, z)

$$x = a, \qquad x = a', \ldots$$

È pur notevole il caso che *l'equazione della superficie contenga omogeneamente le tre coordinate cartesiane*, in guisa da potersi ridurre alla forma

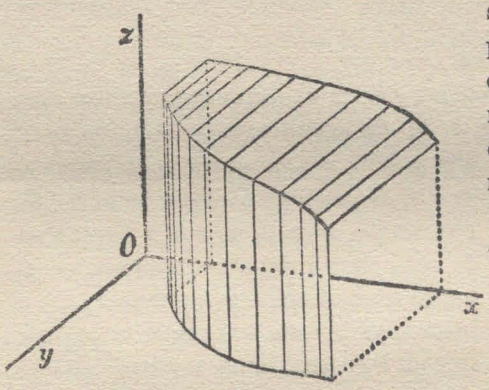
$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0, \tag{3}$$

in cui solo compariscono i rapporti di due delle tre coordinate alla terza. Allora *la superficie è un cono col vertice nell'origine*, si compone cioè di infinite rette uscenti dalla origine. Infatti, se la equazione (3) è soddisfatta dalle coordinate di un punto $P(x, y, z)$, l'equazione stessa viene evidentemente soddisfatta dalle coordinate (kx, ky, kz) di ogni punto della retta congiungente P coll'origine; questa retta appartiene dunque alla superficie.

104. Equazioni di una linea nello spazio. — Due equazioni nelle coordinate di un punto variabile,

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

rappresentano il luogo di quei punti che, colle loro coordinate, soddisfano insieme le due equazioni, e quindi appartengono alle due superficie rappresentate da quelle equazioni. Questi punti costituiscono la *intersezione* delle due superficie, cioè, in generale, una *linea*, una *curva* (composta di una o più parti), che si dirà rappresentata dalle equazioni (1).



Una linea, nello spazio, si suole rappresentare mediante due equazioni di due superficie passanti per essa.

Ogni equazione

$$\psi(x, y, z) = 0,$$

che si possa dedurre come *conseguenza* delle (1), che sia adunque soddisfatta da ogni soluzione (x, y, z) del sistema (1), rappresenta una superficie passante per la linea (1). E, se il sistema (1) è *equivalente* al sistema

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

per modo che ogni soluzione di ciascuno dei due sistemi sia soluzione anche dell'altro, la stessa linea sarà rappresentata indifferentemente dal sistema (1) o dal sistema (2).

Se, in particolare, dalle equazioni (1) noi deduciamo una terza equazione $F(x, y) = 0$ eliminando una delle variabili, ad es. la z, questa equazione rappresenterà un cilindro (n. 103) passante per la linea (1) ed avente le generatrici parallele all'asse z, precisamente il cilindro ottenuto proiettando la linea parallelamente all'asse z. Analogamente si formereb-

bero le equazioni dei cilindri proiettanti la linea parallelamente agli assi x, y. E la linea potrebbe rappresentarsi mediante le equazioni di due di questi cilindri, ad es.[1]

$$F(x, y) = 0, \qquad \Phi(x, z) = 0; \tag{3}$$

però i due cilindri avranno, in generale, altre curve in comune oltre alla linea primitiva, sicchè le equazioni (3) verrebbero a rappresentare questa linea insieme a quelle curve.

105. Intersezione di tre superficie. — Un sistema di tre equazioni con tre coordinate,

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

rappresenta quei punti che sono comuni alle tre superficie $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$; punti che possono anche riguardarsi come intersezioni della superficie $\psi = 0$, colla linea $f = 0$, $\varphi = 0$, ecc. In generale, si tratterà di un *gruppo di punti*, in numero finito o infinito; ma, in casi particolari, quei punti potrebbero succedersi con continuità, e costituire una linea o superficie comune alle tre superficie (1).

106. Superficie algebriche; ordine della superficie. — Riprendiamo una sola equazione, in *coordinate cartesiane*, rappresentante una superficie. Questa dicesi *algebrica d'ordine n* se la equazione è algebrica, e (ridotta alla forma razionale intera) ha il grado n. In caso contrario la superficie è *trascendente*.

Le superficie algebriche di primo ordine sono i *piani*. Le superficie di secondo ordine verranno studiate in seguito; fra esse vedremo subito esservi la sfera.

Che l'ordine di una superficie algebrica sia un carattere della superficie, indipendente dal particolare sistema di assi cartesiani a cui la superficie vien riferita, si dimostra collo stesso ragionamento tenuto in geometria piana (n. 44), il quale fa vedere che il grado dell'equazione della superficie non si altera quando si eseguisca una trasformazione di coordinate cartesiane (n. 99).

107. Significato geometrico dell'ordine di una superficie. — L'ordine di una superficie algebrica è veramente un carattere geometrico di questa, come risulta dal seguente teorema:

Una superficie algebrica d'ordine n è segata da ogni retta, che non vi appartenga, in n punti, e da ogni piano, che non vi appartenga, in una curva d'ordine n.

[1] Queste considerazioni si trovano esposte, in un caso particolare, al n. 80, quando si trattava di rappresentare una retta mediante le equazioni di due piani per essa.

Il teorema si dimostra nel modo più semplice, assumendo quella retta come asse coordinato, ad es. asse x, o quel piano come piano coordinato, ad es. piano xy, ciò che può sempre ottenersi pur di eseguire una conveniente trasformazione di coordinate cartesiane, la quale non altera il grado dell'equazione della superficie. Sia

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'equazione di grado n di questa, nelle nuove coordinate. Per avere le intersezioni della superficie coll'asse x, si pongano $y = 0$, $z = 0$ nella (1); si troverà un'equazione

$$f(x, 0, 0) = 0, \tag{2}$$

generalmente di grado n in x, la quale fornirà per x certi n valori, ascisse degli n punti d'incontro richiesti. Se invece si richiede la curva intersezione della (1) col piano xy, si porrà $z = 0$ nella (1), ottenendo così l'equazione di grado n

$$f(x, y, 0) = 0, \tag{3}$$

la quale, nel piano xy, rappresenta una curva d'ordine n (n. 43). Le apparenti eccezioni, derivanti dal fatto che, in casi particolari, le (2), (3) possono risultare di grado inferiore ad n, spariscono quando si introducano opportune convenzioni, di cui dovremo parlare in seguito. È chiaro però che occorre tener conto delle intersezioni immaginarie, o coincidenti...

Uno studio più minuto dei vari casi che si possono presentare sarà fatto poi nella ipotesi $n = 2$.

108. Equazione della sfera. — Per mostrare, sopra un esempio, come la equazione di una superficie possa dedursi dalla legge di generazione di questa, trattiamo il caso della sfera. Riferiamoci ad assi coordinati *ortogonali;* indichiamo con α, β, γ le coordinate note del centro C della sfera, con r il raggio, pure noto. E sia $P(x, y, z)$ un punto generico della sfera. Esprimendo, mediante le coordinate, che la distanza CP è uguale ad r, perveniamo all'equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2, \tag{1}$$

ossia

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2) = 0, \tag{1'}$$

che rappresenta appunto una sfera. La sfera è dunque una superficie del *secondo ordine.*

L'equazione (1'), confrontata colla equazione generale di secondo grado a tre variabili x, y, z, offre la particolarità che i quadrati x^2, y^2, z^2, hanno lo stesso coefficiente, e mancano i termini coi prodotti xy, xz, yz. Ora ogni equazione di secondo grado avente queste particolarità rappresenta,

in assi ortogonali, una sfera. Infatti una siffatta equazione potrà sempre scriversi sotto la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \tag{2}$$

ossia

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right) + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d^2}{4}, \tag{2'}$$

la quale, confrontata colla (1), indica appunto trattarsi di una sfera di centro $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ e di raggio $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}$.

Ciò, a dir vero, sussiste senz'altro nella ipotesi che la espressione sotto il radicale sia positiva. Se quella espressione è nulla, vi è un sol punto reale $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ soddisfacente colle sue coordinate alla (2'); e nessun punto siffatto esiste se quella espressione è negativa. Tuttavia, in virtù di convenzioni ormai familiari, si dirà ancora che la (2') rappresenta una sfera, il cui raggio è nullo o immaginario (cfr. n. 48).

In ogni caso: *una equazione di secondo grado in coordinate cartesiane ortogonali, la quale abbia uguali i coefficienti di x^2, y^2, z^2, e manchi dei termini con xy, xz, yz, rappresenta una sfera; se la equazione si riduce ad aver l'unità come coefficiente di x^2, y^2, z^2, le metà dei corfficienti di x, y, z, cambiate di segno, dànno le coordinate del centro.*

* **Osservazione.** — L'equazione di una sfera, avente per centro l'origine e raggio 0, è, in assi ortogonali,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{3}$$

Ora questa rappresenta un cono col vertice nell'origine (n. 103), cono di cui un sol punto è reale, il vertice. Il cono è segato dal piano xy ($z = 0$) nella coppia di rette $x^2 + y^2 = 0$, ossia $x \pm iy = 0$, cioè nelle rette isotrope uscenti dall'origine sul detto piano (n. 39). La stessa conclusione vale qualunque sia il piano condotto per l'origine, con cui il cono (3) venga segato; infatti il detto piano può essere assunto come piano XY di un nuovo sistema di coordinate ortogonali XYZ, avente la stessa origine O; e, d'altra parte, la trasformazione di coordinate con cui si passa dagli assi xyz ai nuovi assi XYZ muta la (3) nella equazione dello stesso tipo $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$, come il lettore potrà verificare eseguendo effettivamente le sostituzioni (2) del n. 99, e ricordando le relazioni che passano fra i nove coefficienti.[1] Dunque:

---

[1] Che le coordinate (x, y, z), (X, Y, Z) di uno stesso punto P, riferito a due sistemi ortogonali aventi la stessa origine O, siano legate dalla identità $x^2 + y^2 + z^2 \equiv X^2 + Y^2 + Z^2$, si dimostra anche direttamente osservando che tanto il primo, quanto il secondo membro esprimono il quadrato della distanza OP. Il ragionamento suppone veramente che le coordinate siano reali; ma una identità algebrica tra quantità reali sussiste notoriamente anche per quantità immaginarie.

Una sfera di raggio 0, *la quale nel campo reale si riduce a un solo punto* (*il suo centro*), *nel campo complesso è un cono composto di tutte le rette isotrope dello spazio uscenti dal centro,* è il *cono isotropo* od *assoluto* avente ivi il vertice.

Nell'enunciato non si tien conto della ipotesi che il centro della sfera cada nell'origine, giacchè l'equazione di una sfera di raggio 0, avente il centro in un punto qualsiasi dello spazio, può sempre, con una traslazione d'assi, ridursi alla forma (3).

Sull'interesse che offre il cono isotropo nello studio delle proprietà metriche dello spazio avremo occasione di parlare in seguito.

Esercizi[1] I. — 1) Luogo dei punti tali che la differenza dei quadrati delle distanze da due punti fissi sia costante.

2) Luogo dei punti le cui distanze da due piani fissi, moltiplicate per due numeri dati, dànno una somma costante.

3) Un triangolo variabile, coi vertici sugli spigoli di un triedro, ruota intorno ad uno dei suoi lati; qual'è il luogo del baricentro del triangolo?

4) Qual'è il luogo dei baricentri dei triangoli i cui vertici stanno sugli assi ed hanno dall'origine distanze di somma costante?

5) Con immediata estensione allo spazio dell'es. 7) del n. 52, si definisce il piano polare armonico di un punto rispetto a n piani dati. Si scriva l'equazione di questo piano.

6) Il luogo di un punto tale che il rapporto delle distanze da due punti fissi sia costante, è in generale una sfera. Quale ne è il centro e quale il raggio? Si consideri, in particolare, il caso che il rapporto sia uguale a 1. Il luogo dei punti le cui distanze da tre punti fissi sono proporzionali a tre numeri dati è in generale un cerchio, il cui centro è sul piano dei tre punti. E se i tre numeri sono uguali?

7) Si estenda allo spazio l'es. 10), n. 52.

8) Il luogo dei piedi delle perpendicolari calate da un punto sui piani di una stella è una sfera avente per diametro il segmento che congiunge quel punto al centro della stella.

9) Se per un punto O si conducono più rette a secare una sfera, il luogo dei punti medi delle corde giacenti su quelle è una nuova sfera, che ha per diametro il segmento congiungente O col centro della sfera primitiva.

II. — 10) Trovare l'equazione della sfera che passa per l'origine e per i punti (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1); oppure, che ha il centro in quest'ultimo punto e passa pel punto (1, 1, — 2).

11) Si scriva l'equazione di una sfera in coordinate polari, e se ne profitti per estendere alla sfera la nozione di *potenza* di un punto (n. 54). Qual'è la potenza del punto (x_0, y_0, z_0) rispetto alla sfera

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0\,?$$

[1] Questi es. riguardano soltanto piani, sfere e loro mutue intersezioni. Di superficie più elevate trattano gli es. alla fine del Capitolo.

12) Data la sfera $S = 0$ dell'es. 11) e la retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$, si determinino le intersezioni di questa con quella, e la condizione di contatto; (si ricaverà una nuova via per trovare la distanza del punto (α, β, γ) dalla retta).

13) Le rette uscenti da un punto O e tangenti ad una sfera formano un cono del secondo ordine. (Si può assumere O come origine),

14) L'equazione del piano tangente alla sfera $S = 0$ (es. 11) in un suo punto $P'(x', y', z')$ è

$$xx' + yy' + zz' - \alpha(x + x') - \beta(y + y') - \gamma(z + z') + \delta = 0.$$

(Basta scrivere l'equazione del piano normale in P al raggio che passa per P, tenendo conto che P appartiene alla sfera; oppure si può imitare il procedimento esposto al n. 55).

15) Qual'è la condizione perchè il piano $ax + by + cz + d = 0$ tocchi la sfera $S = 0$? (Si può ricorrere all'es. 14); o ricordare che la distanza del punto (α, β, γ) dal piano deve esser uguale al raggio della sfera).

16) Per la retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ condurre i piani tangenti alla sfera $S = 0$.

17) Determinare le coordinate del centro e il raggio del cerchio che è intersezione del piano $P \equiv ax + by + cz + d = 0$ colla sfera $S = 0$.

18) Il cerchio dell'es. 17) ha come proiezione ortogonale sul piano xy una curva del secondo ordine $K \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \ldots = 0$, ed il cerchio stesso può rappresentarsi mediante le due equazioni $P = 0$, $K = 0$. Viceversa, si dimostri che le due ultime equazioni rappresentano un cerchio, quando

$$\frac{a^2 + c^2}{a_{11}} = \frac{b^2 + c^2}{a_{22}} = \frac{ab}{a_{12}}.$$

19) Due sfere $S = 0$, $S' = 0$ si segano lungo un cerchio reale, o immaginario, appartenente al *piano radicale* $S - S' = 0$ (supposti uguali ad 1 i coefficienti dei quadrati nei polinomi S, S'). Il problema di determinare la intersezione di due sfere equivale dunque a quello di determinare la intersezione di un piano con una sfera. Si estendano al caso di due sfere gli es. 15), 17).

20) Tre sfere $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ si segano generalmente in due punti reali, o immaginari, che stanno sulla retta (*asse radicale*) $S - S' = 0$, $S - S'' = 0$. Si trovino, ad es., le intersezioni delle tre sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1 = 0,\quad x^2 + y^2 + z^2 - y - z = 0,\quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

21) I piani tangenti a due sfere, in qualsiasi punto comune ad esse, formano un diedro costante, che dicesi *angolo delle due sfere*. Determinare l'angolo delle due sfere $S = 0$, $S' = 0$, e la condizione perchè queste si tocchino, o si seghino ortogonalmente: l'ultima condizione è

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' - \frac{1}{2}(\delta + \delta') = 0.$$

III. — 22) Se le equazioni $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ rappresentano due sfere, anche l'equazione $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 = 0$ (con λ_1, λ_2 costanti arbitrarie, non entrambe nulle)

rappresenta una sfera la quale, al variare del rapporto $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, descrive un *fascio di sfere*. Le sfere del fascio passano tutte per uno stesso cerchio, *base* del fascio, il cui piano $S_1 - S_2 = 0$ (*piano radicale* del fascio) è il luogo dei punti aventi uguale potenza rispetto alle sfere $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, e ad ogni sfera del fascio. Per ogni punto dello spazio, che non appartenga al cerchio base, passa *una* sfera del fascio. Il luogo dei centri delle sfere del fascio è una retta (*asse centrale*) perpendicolare al piano radicale nel centro del cerchio base. Il piano radicale è invece il luogo dei centri delle sfere ortogonali alle sfere del fascio (cfr. nn. 59, 60). Queste ultime sfere passano tutte per due punti dell'asse centrale, che sono centri delle due sfere di raggio nullo appartenenti al fascio. Come si modificano questi risultati se le sfere $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ sono concentriche?

23) Se $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ sono le equazioni di tre sfere, non appartenenti ad un fascio, l'equazione $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0$ (corrispondente a valori non tutti nulli, nè infiniti, dei parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) rappresenta una sfera, che passa per i due punti comuni alle sfere date (*punti base*). L'insieme di quelle ∞^2 sfere costituisce un sistema (*rete di sfere*) tale che ad esso appartiene ogni fascio determinato da due sfere della rete, mentre per due punti generici dello spazio passa una sola sfera della rete. La retta che congiunge i due punti base dicesi *asse radicale* della rete; per essa passano i piani radicali di tutti i fasci appartenenti alla rete, ed un suo punto generico ha la stessa potenza rispetto a tutte le sfere del sistema. Il luogo dei centri delle sfere della rete è, in generale, il piano (*piano centrale*) perpendicolare all'asse radicale nel punto medio tra i due punti base. L'asse radicale è invece il luogo dei centri delle sfere che sono ortogonali a tutte le sfere della rete; esse costituiscono un fascio, il cui cerchio base sta nel piano centrale, e sega ortogonalmente le sfere della rete;[1] esso è il luogo dei centri delle sfere di raggio nullo appartenenti alla rete. Come si modificano i risultati, se i centri delle tre sfere $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ sono allineati?

24) Quattro sfere $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_4 = 0$, non appartenenti ad una stessa rete, determinano un *sistema lineare* ∞^3 di sfere, la cui sfera generica ha l'equazione $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0$ (ove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono costanti arbitrarie finite, soggette solo alla condizione di non esser tutte nulle). Al sistema appartiene ogni rete ed ogni fascio determinati da tre o due sfere generiche del sistema stesso. Esiste in generale una sola sfera del sistema che passi per tre punti dati, o che abbia il centro in un punto dato. I piani radicali e gli assi radicali dei fasci e delle reti contenute nel sistema passano per uno stesso punto, che dicesi *centro radicale* del sistema. Esso è centro di una sfera ortogonale a tutte le sfere del sistema, la quale è il luogo dei centri delle sfere di raggio nullo del sistema. Se ne scriva l'equazione partendo dall'una o dall'altra di queste sue proprietà. Come si modificano i risultati se le quattro sfere date hanno i centri in un piano, oppure passano per un punto?

---

[1] S'intende dire con ciò che, nei punti d'intersezione del cerchio con una sfera, la tangente al cerchio e il piano tangente alla sfera sono ortogonali.

25) Un piano passante per i centri C, C' di due sfere sega queste lungo due cerchi, i cui centri di similitudine (n. 61, es. 14) non variano mentre quel piano ruota intorno alla retta CC', e diconsi *centri di similitudine* (interno ed esterno) delle due sfere. Date le coordinate dei centri C, C' ed i raggi delle sfere, si determinino le coordinate dei due centri di similitudine. Ciascuno di essi è vertice di un cono rotondo circoscritto ad ambedue le sfere.

26) Si estendano ai centri di similitudine di tre sfere, prese due a due, i risultati enunciati nell'es. 15) del n. 61.

27) Quattro sfere, prese due a due, dànno complessivamente dodici centri di similitudine. Si dimostri che i sei centri di similitudine esterni sono in un piano, e a tre a tre su quattro rette; i tre centri di similitudine interni, che tre delle sfere determinano colla quarta, e i tre esterni che quelle determinano fra loro sono pure in un piano, e a tre a tre su quattro rette; e finalmente i quattro centri di similitudine interni, che due delle sfere determinano colle altre due, e i due esterni della prima e seconda coppia di sfere sono in un piano, e a tre a tre su quattro rette.

IV. *Inversione rispetto a una sfera.* — 28) Il concetto di *trasformazione per raggi vettori reciproci*, o *inversione*, rispetto a un *centro d'inversione* O e ad una sfera *fondamentale* col centro in quel punto, è una estensione immediata di quello stabilito nel piano (v. n. 61, es. 16 e seg.). Enunciamo soltanto le proprietà fondamentali, facili a dimostrarsi direttamente. Le coordinate di due punti $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$ corrispondenti (*inversi*) sono legate dalle formole

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{r^2 z}{x^2 + y^2 + z^2},$$

dove r è il raggio della sfera fondamentale. Una sfera ed un cerchio (intersezione di due sfere) sono trasformati generalmente in una sfera ed in un cerchio; se però quelli passano per O, le figure trasformate sono rispettivamente un piano ed una retta. E viceversa. Sfere corrispondenti segano la sfera fondamentale in uno stesso cerchio (reale o immaginario), e determinano un fascio cui appartiene l'ultima sfera.

29) Due piani, o due rette secantisi formano lo stesso angolo delle due sfere, o dei due cerchi (*inversi*), in cui si mutano mediante una inversione. Donde segue che l'angolo di due superficie, o di due curve qualsiasi, in un punto ad esse comune, è uguale all'angolo delle figure *inverse* nel punto corrispondente.[1]

30) Fissato sopra una sfera un punto P (*polo*), e condotto un piano π parallelo al piano tangente in P, per es. passante per il centro (piano dell'*equatore*), si proiettino i punti della sfera da P su π. Ogni punto A della sfera ha una determinata proiezione A' su π, eccetto quando A cade in P; e viceversa. Si ottiene così una *rappresentazione* della sfera sul piano π, conosciuta da IPPARCO e TOLOMEO e detta *proiezione stereografica*. Le principali proprietà della proiezione stereografica seguono dal fatto che una figura $AB\ldots$ sulla sfera, e la proie-

[1] Per *angolo* di due superficie, o di due curve, in un punto comune, si intende l'angolo formato dai piani, o dalle rette tangenti a quelle superficie, o curve, nel punto. Basterà qui prendere questo concetto come intuitivo.

zione $A'B'\ldots$ sul piano sono inverse rispetto al centro di inversione P e ad una sfera fondamentale, che ha centro P e passa per il cerchio segato da π sulla sfera primitiva. Si vede così che «i cerchi della sfera primitiva si proiettano stereograficamente in cerchi», e «che l'angolo di due curve sulla sfera è uguale all'angolo delle due curve proiezioni». In virtù dell'ultima proprietà, la proiezione stereografica dicesi *conforme*, e viene adoperata spesso nel tracciamento delle carte geografiche.

31) Le proprietà suddette della proiezione stereografica si deducono anche per via analitica, valendosi delle formole che legano le coordinate di due punti corrispondenti. Assunta come sfera primitiva la $x^2+y^2+z^2=r^2$, come polo P il punto $(0, 0, r)$, e come piano π il piano $z=0$, si osservi che le coordinate (x, y, z) di un punto A della sfera sono espresse, in funzione delle coordinate (x', y') del punto proiezione sul piano, mediante le formole

$$x=\frac{2r^2x'}{x'^2+y'^2+r^2}, \quad y=\frac{2r^2y'}{x'^2+y'^2+r^2}, \quad z=r\,\frac{x'^2+y'^2-r^2}{x'^2+y'^2+r^2},$$

donde

$$x'=\frac{rx}{r-z}, \quad y'=\frac{ry}{r-z}, \qquad (x^2+y^2+z^2=r^2).$$

109. Equazioni parametriche di una curva. — Non sempre si riesce a tradurre direttamente la legge secondo cui vien descritto un luogo geometrico, nelle equazioni del luogo. Conviene allora introdurre, accanto alle coordinate del punto mobile, certe variabili ausiliari, dette *parametri*, e stabilire relazioni tra quelle coordinate e questi parametri. Eliminando poi i parametri fra le dette relazioni, si perverrà ad una o più equazioni fra le coordinate x, y, z, equazioni rappresentanti il luogo che si vuol studiare. Questo procedimento si giustifica colle stesse considerazioni svolte in geometria piana al n. 49 e seg.

D'altra parte è spesso opportuno rappresentare una linea, od una superficie (anzichè nel modo indicato ai numeri 102, 104) mediante *equazioni parametriche*, esprimenti le coordinate del punto mobile, che descrive il luogo, in funzione di uno o due parametri.

Siano, ad es.,

$$(1) \qquad x=f(t), \qquad y=\varphi(t), \qquad z=\psi(t)$$

funzioni continue della variabile t, per i valori di questa compresi in un conveniente intervallo. Ad un valore di t corrisponde, in virtù delle (1), una terna di valori (x, y, z), e quindi un punto; al variare di t il punto si muove con continuità, e descrive, generalmente, una curva, rappresentata dalle (1). Eliminando il parametro t fra due delle equazioni (1), ad es. fra la seconda e la terza, si ottiene la equazione $F(y, z)=0$ di un cilindro passante per quella curva; ed un secondo cilindro $\Phi(x, z)=0$, proiettante la curva, si ottiene eliminando t fra la prima e la terza delle (1). Anche le equazioni $F(y, z)=0$, $\Phi(x, z)=0$, rappresentano la stessa

curva (1), presa però insieme, generalmente, a qualche altra linea (cfr. n. 104).

Per portare un esempio, si considerino le equazioni parametriche

$$(1') \qquad x = at + a', \qquad y = bt + b', \qquad z = ct + c',$$

dove le a, a', ..., c' sono sei costanti. La eliminazione del parametro t fra le (1') conduce alle equazioni di una retta:

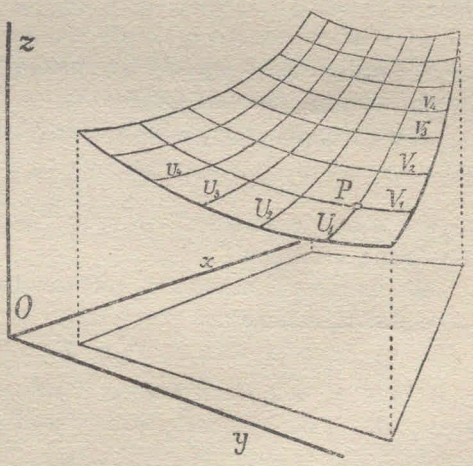
$$\frac{x - a'}{a} = \frac{y - b'}{b} = \frac{z - c'}{c}.$$

Dunque *le equazioni* (1') *rappresentano una retta*, i cui coseni di direzione, in assi ortogonali, sono proporzionali ad a, b, c (n. 90).

110. Equazioni parametriche di una superficie. — Si abbiano ora tre equazioni

$$(2) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

esprimenti le coordinate di un punto variabile mediante funzioni continue di due parametri, u, v; e le (2) siano tali, che da esse sia possibile (almeno teoricamente) di eliminare u e v, ottenendo una sola relazione $F(x, y, z) = 0$. Le (2) rappresentano allora parametricamente la superficie $F = 0$; un punto generico di essa si otterrà dalle (2) attribuendo ad u, v una coppia di valori, e calcolando i corrispondenti valori di x, y, z.



Le equazioni (2) lasciano subito apparire due sistemi di curve giacenti sulla superficie. Se infatti nelle (2) diamo ad u un valore costante $u = u_1$, e lasciamo variare il solo parametro v, il punto (x, y, z) corrispondente descrive (n. 109) una curva che giace sulla superficie, e può indicarsi con U_1. Una seconda curva U_2 si ottiene attribuendo al parametro u un secondo valore $u = u_2$, e lasciando variare v; ed analogamente si ottengono infinite altre curve U_3, U_4, ..., che si succedono con continuità se i valori attribuiti ad u formano una successione continua; tutte queste curve formano un primo *sistema* di curve sulla superficie, il sistema $u = \text{cost}$. Un secondo sistema di curve, V_1, V_2, V_3, ..., sulla superficie si ottiene attribuendo al parametro v un valore fisso, che potrà essere v_1, oppure v_2, oppure v_3, ..., e lasciando di

volta in volta variare u; sarà il sistema $v = \text{cost.}$ I due sistemi di curve formano sulla superficie un reticolato; per ogni punto P della superficie passa *una* curva del primo sistema ed *una* curva del secondo se le equazioni (2) sono di tal natura che, fissate le coordinate (x, y, z) del punto P, rimangano individuati i corrispondenti valori u_1, v_1 di u e v; in tal caso, quei valori u_1, v_1 potranno riguardarsi come speciali coordinate (*curvilinee*) del punto P variabile sopra la superficie.

La superficie poi potrà ritenersi generata, sia da una curva U la quale si muova, e si deformi, assumendo le posizioni delle curve $U_1, U_2, \ldots$, che tutte si appoggiano alle curve fisse $V_1, V_2, \ldots$; sia da una curva V, la quale vari appoggiandosi alle curve fisse $U_1, U_2, \ldots$

Si considerino, ad es., tre equazioni contenenti linearmente i parametri:

$$(2') \qquad x = a u + a' v + a'', \quad y = b u + b' v + b'', \quad z = c u + c' v + c'';$$

esse rappresentano il piano

$$\begin{vmatrix} x - a'' & a & a' \\ y - b'' & b & b' \\ z - c'' & c & c' \end{vmatrix} = 0,$$

la cui equazione si ottiene eliminando i parametri. Qui i due sistemi di linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, sono due fasci impropri di rette giacenti nel piano; e le coordinate (u, v) di un punto del piano possono riguardarsi come coordinate cartesiane, sul piano, rispetto agli assi $u = 0$, $v = 0$ e al punto unità $(u = 1, v = 1)$.

Un secondo esempio interessante è fornito dalle equazioni (cfr. n. 100)

$$(2'') \qquad x = r \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi, \qquad y = r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi, \qquad z = r \cos \vartheta,$$

dove r è una costante, ϑ, φ sono i parametri, ed x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali.

Eliminando i parametri, coll'innalzare a quadrato le tre equazioni e sommare, si ottiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

equazione di una sfera avente il centro nell'origine e raggio r. Le linee $\vartheta = \text{cost.}$, ossia $z = \text{cost.}$, sono cerchi, *paralleli*, segati dai piani paralleli ad xy; le linee $\varphi = \text{cost.}$, ossia $\frac{y}{x} = \text{cost.}$, sono cerchi massimi, *meridiani*, segati dai piani condotti per l'asse z. Le coordinate φ e ϑ di un punto della sfera sono la *longitudine*, rispetto al meridiano (principale) $\varphi = 0$ situato nel piano xz, e il complemento della latitudine, o *colatitudine*; perciò φ e ϑ si chiamano *coordinate geografiche* sulla sfera.

111. Equazioni di cilindri e coni. -- Le considerazioni generali esposte sul principio del n. 109 permettono di formare le equazioni di certe famiglie di superficie, che frequentemente si incontrano.

Una superficie generata da una retta mobile, le cui posizioni dipendano dai valori attribuiti ad *un* parametro, dicesi *rigata*; le infinite rette che la costituiscono sono le *generatrici* della superficie. Poichè la posizione di una retta

(1) $$x = lz + p, \qquad y = mz + q$$

dipende dai valori di *quattro* quantità l, m, p, q, la (1) descriverà una rigata se quelle quantità saranno legate da *tre* relazioni (o se saranno espresse in funzione di *un* parametro). Eliminando l, m, p, q fra queste tre relazioni e le (1), si avrà la equazione della rigata.

Fra le rigate sono notevoli, in particolare, i *cilindri* e i *coni*. La rigata è un cilindro se le generatrici sono tutte parallele tra loro; è un cono se passano tutte per uno stesso punto fisso (*vertice*).

Ora la retta (1) si muove parallelamente a sè stessa se restano fissi i valori di l, m (n. 81). Perchè essa descriva un cilindro basterà dunque che passi *una* relazione fra i *due* parametri rimanenti p, q:

(2) $$f(p, q) = 0.$$

L'equazione del cilindro si ottiene eliminando p, q fra le (1) e le (2); *è dunque*

(3) $$f(x - lz,\ y - mz) = 0.$$

Si osservi che la (2) ha un semplice significato geometrico; essa rappresenta infatti la curva sezione del cilindro col piano x,y, perchè p, q sono le coordinate della intersezione della generatrice (1) col detto piano. Si noti inoltre che, se la generatrice (1) è parallela all'asse z, allora $l = m = 0$, e si ricade in un tipo di equazione già nota (n. 103).

Proponiamoci ora di scrivere la equazione di un cono avente per vertice il punto $V\ (x_0, y_0, z_0)$. Ogni retta per V ha equazioni del tipo

(4) $$x - x_0 = l\,(z - z_0), \qquad y - y_0 = m\,(z - z_0).$$

La retta descrive un cono se fra i *due* parametri l, m passa *una* relazione

(5) $$f(l, m) = 0.$$

L'eliminazione di l, m fra le (4) e la (5) conduce a scrivere *l'equazione del cono sotto la forma*

(6) $$f\left(\frac{x - x_0}{z - z_0},\ \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

Se il vertice coincide coll'origine ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), si ricade in una equazione già nota (n. 103).

Vediamo, ad es., come si riesca a scrivere la equazione del cono proiettante dall'*origine* una curva assegnata

(7) $$\varphi(X, Y, Z) = 0, \qquad \psi(X, Y, Z) = 0,$$

dove le coordinate cartesiane di un punto descrivente la curva si sono indicate con X, Y, Z, per distinguerle dalle coordinate x, y, z di un punto generico del cono. Qui, in luogo delle (4), abbiamo le equazioni

$$x = lz, \qquad y = mz. \tag{4'}$$

Il legame (5) fra l ed m si otterrà imponendo alla retta (4') di contenere un punto (X, Y, Z) della curva (7), il che dà

$$l = \frac{X}{Z}, \qquad m = \frac{Y}{Z}; \tag{8}$$

eliminando X, Y, Z fra le due ultime relazioni e le due (7), si avrebbe appunto una relazione fra l, m. Resterebbe poi, secondo il procedimento sopra esposto, da eliminare l, m tra la detta relazione e le (4'). Riassumendo: per ottenere la equazione del cono si devono eliminare le cinque variabili X, Y, Z, l, m fra le sei relazioni (7), (4') e (8). Ora, in questo caso, conviene condurre la eliminazione nel seguente modo. Eliminiamo anzitutto l, m fra le (4') ed (8); otterremo le relazioni

$$\frac{x}{z} = \frac{X}{Z}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{Y}{Z}, \tag{9}$$

le quali, introducendo una variabile ausiliare t, possono anche scriversi così

$$X = \frac{x}{t}, \qquad Y = \frac{y}{t}, \qquad Z = \frac{z}{t}; \tag{10}$$

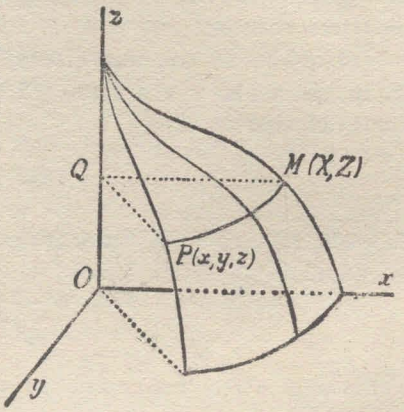
eseguiamo poi le sostituzioni (10) nelle (7), che divengono

$$\varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0, \qquad \psi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = 0, \tag{7'}$$

ed eliminiamo finalmente t fra queste due. L'equazione risultante rappresenta appunto il cono richiesto.

112. Superficie rotonde. — Un'altra famiglia interessante di superficie è costituita dalle *superficie rotonde* (o *di rotazione*). Una superficie rotonda è generata da una curva che ruoti intorno ad una retta fissa (*asse*), colla quale la curva sia rigidamente collegata. Ogni punto della curva descrive un cerchio (*parallelo*), che sta in un piano perpendicolare all'asse, ed ha il centro sull'asse; ed ogni piano perpendicolare all'asse sega la superficie (se vi è intersezione) lungo uno o più paralleli. I piani per l'asse segano la superficie lungo curve tutte uguali, che diconsi *meridiani*, e sono simmetriche rispetto all'asse. E la superficie può ritenersi generata facendo ruotare di mezzo giro un meridiano intorno all'asse (o di un intero giro la metà di un meridiano che sta da una banda dell'asse).

Volendo scrivere l'equazione di una superficie rotonda, supporremo appunto che questa venga generata da un meridiano; e per maggior semplicità ci riferiremo ad un sistema cartesiano ortogonale, il cui asse z coincida coll'asse di rotazione. Sia data l'equazione del meridiano in uno dei piani per z, ad es. sul piano xz; se con X, Z indichiamo le coordinate di un punto qualsiasi di questo piano ($y = 0$), il meridiano avrà una equazione del tipo



$$f(X, Z) = 0. \tag{1}$$

Un punto $M(X, Z)$ di esso, ruotando intorno a z, si porti nella posizione $P(x, y, z)$; si potranno subito stabilire due relazioni tra le coordinate di M e quelle di P, ricordando che M e P si trovano sopra uno stesso piano parallelo a xy, e sono equidistanti dal punto $Q(0, 0, z)$ in cui quel piano sega z. Si ha precisamente

$$Z = z, \qquad X = \pm\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Se facciamo variare x, y, z, in modo che i valori X, Z, risultanti dalle (2), verifichino la (1), il punto $P(x, y, z)$ varierà descrivendo tutta la superficie. L'equazione di questa si otterrà dunque eliminando i parametri X e Z tra la (1) e le (2). Così si ricava

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0, \tag{3}$$

che è l'equazione richiesta.

Brevemente, si può dire che *l'equazione della superficie rotonda generata da una curva del piano xz, la quale ruoti intorno all'asse z, si ottiene sostituendo nella equazione della curva $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ al posto di x.*

Osservazione. — Se la superficie rotonda si suppone generata dalla rotazione di una curva sghemba qualsiasi

$$f(X, Y, Z) = 0, \qquad \varphi(X, Y, Z) = 0 \tag{1'}$$

intorno all'asse z, per esprimere il legame fra un punto $M(X, Y, Z)$ di questa curva ed una posizione $P(x, y, x)$ assunta dal punto mediante la rotazione, dovremo adoperare, in luogo delle (2), le relazioni

$$Z = z, \qquad \pm\sqrt{X^2 + Y^2} = \pm\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2'}$$

L'equazione della superficie si otterrà eliminando X, Y, Z fra le quattro equazioni (1'), (2').

113. Quadriche rotonde. — Per fare un'applicazione del procedimento sopra indicato, esaminiamo le superficie che si ottengono facendo ruotare una conica intorno ad uno dei suoi assi di simmetria. Troveremo certe particolari superficie del secondo ordine, che prendono il nome di *quadriche rotonde.*

Si abbia, ad es., una ellisse, che possiamo ritenere situata nel piano xz, in guisa che x e z siano gli assi della curva. Questa avrà una equazione del tipo

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1.$$

Facendo ruotare la curva intorno all'asse z, otteniamo un *ellissoide rotondo* di equazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

L'ellissoide dicesi *schiacciato* se $a > b$, allungato se $a < b$; è una sfera se $a = b$.

Similmente la iperbole

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Z^2}{b^2} = 1,$$

ruotando intorno all'asse *non trasverso* z, descrive l'*iperboloide rotondo ad una falda*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

mentre, ruotando intorno all'asse *trasverso* x, descrive l'*iperboloide rotondo a due falde*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Finalmente la parabola

$$X^2 = 2pZ,$$

ruotando intorno all'asse z, descrive il *paraboloide rotondo*

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Si hanno così quattro tipi di quadriche rotonde, le cui forme, facili ad immaginare, verranno poi studiate accuratamente nella teoria delle quadriche.

Esercizi. I. — 1) Scrivere l'equazione del cono che ha il vertice nell'origine delle coordinate, e per direttrice il cerchio $ax + by + cz + d = 0$, $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$.

2) Equazione del cilindro, che ha per direttrice il cerchio $x^2 + y^2 = r^2$ del piano xy, e le generatrici parallele alla retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

3) Il luogo dei punti le cui distanze da un piano e da una retta fissa sono in rapporto costante è un cono di 2° ordine col vertice nel punto d'incontro della retta e del piano, ovvero un cilindro, pure di 2° ordine, se la retta è parallela al piano; il cono risulta di rotazione se la retta è perpendicolare al piano. (Per semplificare la ricerca, in questo e negli es. seguenti, converrà scegliere convenientemente gli assi; si potrà ad es., nel primo caso, scegliere la retta come asse coordinato, e il piano passante per l'origine).

4) Il luogo dei punti tali che la somma (o la differenza) delle distanze da due punti fissi sia costante è un ellissoide (o iperboloide a due falde) rotondo, avente come asse la retta congiungente i due punti.

5) Il luogo dei punti le cui distanze da un punto e da un piano fissi sono in rapporto costante è una quadrica rotonda intorno alla perpendicolare calata dal punto sul piano, e precisamente un ellissoide, un paraboloide, o un iperboloide a due falde, secondo che il valore del rapporto è minore, uguale o maggiore dell'unità.

6) Il luogo dei punti le cui distanze da un punto e da una retta hanno un rapporto costante k è un ellissoide rotondo, o un iperboloide rotondo ad una falda, secondo che k è minore o maggiore dell'unità. Qual'è l'asse di rotazione? Se $k = 1$, si ottiene un cilindro a sezioni paraboliche, normale al piano individuato dal punto e dalla retta.

7) Il luogo dei punti le cui distanze da due rette (in generale sghembe) sono in rapporto costante è una superficie del secondo ordine, che diventa un cono se le due rette s'incontrano, e un cilindro se sono parallele.

8) Un cerchio di raggio r, il quale ruoti intorno ad una retta del suo piano, genera una superficie rotonda del quarto ordine, detta *toro* (o *superficie anulare*). Si scriva l'equazione della superficie assumendo l'asse di rotazione come asse z, ed il piano contenente i centri dei cerchi meridiani come piano xy. Si determinino le intersezioni del toro coi piani coordinati, e con piani paralleli a questi. Si osservi, in particolare, che il piano $y = r$ sega il toro lungo una curva di Cassini (n. 66), e precisamente lungo una lemniscata se la distanza del centro del cerchio meridiano dall'asse z è $2r$.

9) Luogo dei punti tali che il prodotto delle distanze da due punti fissi sia costante (cfr. n. 66).

10) Luogo di un punto tale che il triangolo avente per vertici i piedi delle perpendicolari calate dal punto sulle faccie di un triedro trirettangolo abbia data area.

11) Un piano varia in guisa che il volume formato da esso coi tre piani coordinati si mantiene costante; si trovi il luogo descritto dal piede della perpendicolare calata dall'origine sul piano.

II. — 12) Si sa (n. 100, es. 6) che le formule

$$x = X + a, \quad y = Y + b, \quad z = Z + c$$

determinano la posizione (x, y, z) assunta da un punto generico (X, Y, Z) dello spazio mediante una traslazione. Se a, b, c sono funzioni continue di un parametro u, il punto avente le coordinate

$$(1) \qquad x = X + f_1(u), \quad y = Y + f_2(u), \quad z = Z + f_3(u)$$

varia con u, e descrive una curva C, la quale passa per la posizione iniziale (X, Y, Z) se (come supporremo) per un valore di u, ad es. per $u = 0$, si annullano $f_1(u), f_2(u), f_3(u)$. La C può riguardarsi come la curva, *traiettoria*, descritta dal punto (X, Y, Z), a cui si applichi una serie continua di successive traslazioni infinitesime. La stessa serie di traslazioni, applicata ad un nuovo punto (X_0, Y_0, Z_0), lo fa muovere lungo una curva uguale alla C, le cui equazioni si otterrebbero dalle (1) ponendo X_0, Y_0, Z_0 al posto di X, Y, Z. Ora si applichi quella serie di traslazioni ai singoli punti di una curva C' avente le equazioni

$$X = \varphi_1(v), \quad Y = \varphi_2(v), \quad Z = \varphi_3(v).$$

Questa curva descriverà una *superficie di traslazione*, rappresentata dalle equazioni

$$(2) \qquad x = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) + \varphi_3(v).$$

Di questa superficie si dicono *generatrici* la curva C' $(u = 0)$ e le curve, ad essa uguali, $u =$ cost.; mentre diconsi *direttrici* le curve $v =$ cost., tutte uguali alla C. È chiaro però, data la simmetria con cui entrano le f e le φ nelle (2), che l'ufficio delle direttrici e delle generatrici è scambievole; la superficie può anche riguardarsi come generata da una curva uguale a C, la quale si muova per successive traslazioni, in modo che i suoi punti descrivano curve uguali a C'. Una superficie di traslazione può anche riguardarsi come luogo dei punti medi dei segmenti che congiungono i punti di due curve (Lie): partendo dalle curve

$$x = 2 f_1(u), \quad y = 2 f_2(u), \quad z = 2 f_3(u),$$
$$x = 2 \varphi_1(u), \quad y = 2 \varphi_2(u), \quad z = 2 \varphi_3(u),$$

si ritrova la superficie (2).

Per fare qualche applicazione, si consideri: *a*) il caso che le curve C, C' sieno due rette, e si troverà come superficie di traslazione un piano; *b*) una curva sia il cerchio $x = r \cos u$, $y = r \operatorname{sen} u$, $z = 0$, e l'altro la retta $x = a v$, $y = b v$, $z = c v$; la superficie è allora il cilindro la cui equazione, ottenuta eliminando i parametri u, v, è $(c x - a z)^2 + (c y - b z)^2 = c^2 r^2$; *c*) se le due curve sono le parabole $x = 2 p u$, $y = 0$, $z = 2 p u^2$; $x = 0$, $y = 2 q v$, $z = 2 q v^2$, la superficie è il *paraboloide* $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2 z$.

13) Le formole

$$x = X \cos \varphi - Y \operatorname{sen} \varphi, \quad y = X \operatorname{sen} \varphi + Y \cos \varphi, \quad z = Z$$

caratterizzano il moto rotatorio intorno all'asse z (n. 100, es. 6). Se X, Y, Z sono coordinate dei punti di una curva, se è dunque $X = f_1(u)$, $Y = f_2(u)$, $Z = f_3(u)$, la superficie di rotazione che questa genera ha le equazioni parametriche

$$x = f_1(u) \cos \varphi - f_2(u) \operatorname{sen} \varphi, \quad y = f_1(u) \operatorname{sen} \varphi + f_2(u) \cos \varphi, \quad z = f_3(u).$$

Per questa via si può ritrovare l'equazione di una superficie di rotazione di cui sia dato il meridiano sul piano xz. — Se le equazioni della curva generatrice fossero $X = f(Z)$, $Y = \varphi(Z)$, la superficie avrebbe l'equazione $x^2 + y^2 = [f(z)]^2 + [\varphi(z)]^2$. Se, in particolare, la curva che ruota è la retta $X = a$, $Y = b Z$, la superficie è l' iperboloide a una falda $x^2 + y^2 - b^2 z^2 = a^2$. (È interessante osservare che anche

la retta $X = a$, $Y = -bZ$, simmetrica della prima rispetto al piano xz, genera lo stesso iperboloide, e che perciò questa superficie contiene due sistemi distinti di rette).

14) Le formole

$$(1) \qquad x = X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi, \quad y = X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi, \quad z = Z + c\varphi$$

rappresentano un *movimento elicoidale* di asse z (n. 100, es. 6). Se in quelle formole si fa variare solo il parametro φ, la curva descritta dal punto (x, y, z) dicesi *elica cilindrica,* ed ha le equazioni parametriche (1); l'elica è tracciata sul cilindro rotondo $x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$. In particolare, se il punto nella posizione iniziale $\varphi = 0$ si trova sull'asse x, le equazioni sono del tipo

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\operatorname{sen}\varphi, \quad z = c\varphi;$$

le proiezioni della curva sui piani $x = 0$, $y = 0$ sono le curve sinusoidali (n. 67) $y = a\operatorname{sen}\frac{z}{c}$, $x = a\cos\frac{z}{c}$, mentre, sul piano $z = 0$, la proiezione è il cerchio $x^2 + y^2 = a^2$. Dicesi *passo* dell'elica la distanza costante $2\pi c$ che intercede fra due punti consecutivi della curva situati sopra una stessa generatrice del cilindro, su cui l'elica è tracciata. Svolgendo il cilindro sopra un piano (ove siano fissati assi ortogonali ξ, η), in guisa che il cerchio base $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ si sviluppi sopra l'asse ξ, e la generatrice del cilindro $y = 0$, $x = a$ si adagi sopra l'asse η, l'elica si sviluppa sulla retta $\eta = \frac{c}{a}\xi$, la quale forma coll'asse ξ un angolo α, detto *inclinazione* dell'elica, e tale che $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a}$.

15) Applicando il movimento elicoidale (1) ai punti (X, Y, Z) di una curva $X = f_1(u)$, $Y = f_2(u)$, $Z = f_3(u)$, si genera una *superficie elicoidale,* le cui equazioni parametriche sono

$$x = f_1(u)\cos\varphi - f_2(u)\operatorname{sen}\varphi, \quad y = f_1(u)\operatorname{sen}\varphi + f_2(u)\cos\varphi, \quad z = f_3(u) + c\varphi.$$

In particolare, la retta $X = lu$, $Y = mu$, $Z = nu$ genera l'*elicoide*

$$z = n\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{l^2 + m^2}} + c\operatorname{arc\,tg}\frac{-mx + ly}{lx + my},$$

il quale sega il piano xy in una spirale d'ARCHIMEDE ($\rho = k\varphi$; cfr. n. 47 es. 3). L'elicoide dicesi *retto* se la retta generatrice è normale all'asse; la sua equazione è $z = c\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$, ossia $y = x\operatorname{tg}\frac{z}{c}$.

16) L'equazione di una superficie rotonda, il cui asse sia una retta qualsiasi

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n},$$

si ottiene osservando che le equazioni

$$lx + my + nz = \lambda,$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = \mu$$

rappresentano un cerchio, il cui centro sta su quella retta, ed il cui piano è perpendicolare alla retta; ed ogni cerchio così situato può rappresentarsi a quel modo, pur di scegliere convenientemente i parametri λ e μ. Se tra i due parametri stabiliamo un legame $\mu = f(\lambda)$, veniamo ad ottenere infiniti cerchi costituenti una superficie rotonda, di cui la retta data è asse. L'equazione di questa superficie è adunque del tipo

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = f(l\,x + m\,y + n\,z).$$

In particolare, se $a = b = c = l = m = 0$, si ricade nel caso ove l'asse coincide coll'asse z.

17) Si dimostri che la superficie del secondo ordine

$$x\,y + x\,z + y\,z = k$$

è rotonda intorno alla retta $x = y = z$; se $k = 0$, si ha un cono rotondo, circoscritto al triedro degli assi coordinati.

18) Si dimostri che la superficie del terzo ordine

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,x\,y\,z = k^3$$

è rotonda intorno alla retta $x = y = z$.

PARTE TERZA.

I concetti fondamentali della Geometria Proiettiva

Capitolo I.

Elementi impropri. - Coordinate omogenee di punti, rette e piani.

114. Cenno storico. — La Geometria analitica cartesiana, di cui nelle lezioni precedenti furono esposti i concetti, ed il Calcolo infinitesimale, sorto verso la fine del XVII secolo per opera di NEWTON e LEIBNIZ, dischiusero un campo così vasto di ricerche da assorbire quasi interamente l'attività dei maggiori matematici del secolo XVIII. D'altra parte i nuovi indirizzi non potevano soddisfare interamente le crescenti esigenze della tecnica, che in quell'epoca compieva rapidi progressi. La Geometria analitica permette bensì di trattare e risolvere una vastissima categoria di problemi, ma le soluzioni che essa fornisce non conducono di solito a costruzioni semplici e pratiche; mentre per il tecnico la risoluzione grafica di un problema ha spesso importanza maggiore del calcolo numerico dei risultati. V'era poi una estesa serie di questioni, interessanti al tempo stesso le arti belle e la ingegneria, che la nuova scienza non si prestava a trattare. Alludiamo a tutti quei procedimenti che permettono di rappresentare sopra un piano le figure date nello spazio, tra cui notissima è la *prospettiva,* e che rientrano oggi nel campo della *Geometria Descrittiva.*

I Greci conoscevano certamente alcune tra le regole della prospettiva, ma i precetti di questa disciplina non si trovano costantemente rispettati prima del Rinascimento. Furono appunto alcuni dei maggiori artisti di quell'epoca che fissarono in modo preciso le regole del disegno prospettivo; basterà citare LEON BATTISTA ALBERTI e PIER DELLA FRANCESCA verso la metà del secolo XV, LEONARDO DA VINCI e ALBERTO DÜRER sul principio del secolo successivo.

Solo più tardi i geometri si interessarono dei metodi della prospettiva, e ne fecero applicazioni scientifiche. Ma gli stessi risultati brillanti raggiunti per questa via dal DESARGUES e, a quanto pare, dal PASCAL, sulla

prima metà del secolo XVII, rimasero isolati e quasi obliati per un lungo periodo ancora, fino al giorno in cui il grande scienziato francese MONGE, col trattato di *Géometrie descriptive* (1795) e colle lezioni, espose e diffuse un metodo sistematico per riprodurre sopra un piano le figure solide, in modo che dal disegno si potesse ricostruire l'originale, come quello da questo.

All'opera di MONGE si può far risalire il risorgimento degli studi geometrici. Le numerose relazioni tra la figura solida e le sue immagini piane, che il MONGE mette in luce, inducono uno degli ultimi e maggiori suoi discepoli, il PONCELET (1822), a studiare quelle proprietà di una figura che si conservano nella proiezione (cioè nel disegno prospettico). Le dette proprietà formano il soggetto della *Geometria proiettiva,* che per opera di MÖBIUS, STEINER, CHASLES, STAUDT ... (nella prima metà del secolo XIX), va staccandosi via via dalla Geometria descrittiva, come pure dalla Geometria elementare, ed assumendo un carattere autonomo.

La Geometria proiettiva, per la larghezza di vedute che la ispira, ha un notevole valore teorico, e per la simmetria ed il rigore dei suoi metodi presenta singolari pregi estetici. Noi però, per i limiti imposti a questo trattato, dobbiamo accontentarci di esporre solo i concetti fondamentali della nuova scienza, che trovano applicazioni nella teoria delle curve e superficie di secondo ordine, cui sono dedicate le ultime Parti di questo Trattato, nella Geometria descrittiva, ed in vari altri rami di matematiche pure ed applicate.[1]

115. Proiezione e sezione. — I metodi per rappresentare sopra un piano le figure dello spazio fanno uso costante di due operazioni, *proiezione* e *sezione,* che sono fondamentali per la Geometria proiettiva.

Eccone le definizioni, poste l'una di fronte all'altra.

Proiettare da un punto S (*centro di proiezione*) una figura composta di punti e rette, significa condurre le rette e i piani che congiungono *S* ai punti e alle rette della figura. La nuova figura così ottenuta, composta di rette e piani uscenti da *S,* si chiama *proiettante* o *visuale* della figura primitiva dal centro *S.*

Proiettare da una retta s (*asse di proiezione*) una figura composta di punti, significa condurre i piani che congiungono la retta *s* ai punti della figura.

Segare con un piano σ (*piano di sezione* o *quadro*) una figura composta di piani e rette, significa determinare le rette e i punti in cui σ sega i piani e le rette della figura. La nuova figura così ottenuta, composta di rette e punti giacenti in σ, si chiama *sezione* o *traccia* della figura primitiva (eseguita) col piano σ.

Segare con una retta s (*trasversale*) una figura composta di piani, significa determinare i punti intersezioni della retta *s* coi piani della figura.

[1] Chi volesse estendere le sue cognizioni nel dominio della Geometria proiettiva, potrebbe leggere con vantaggio le opere citate nella prefazione di questo volume.

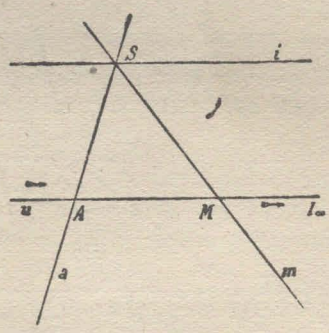
È chiaro poi che in geometria piana si potrà proiettare da un punto una figura composta di punti, e segare con una retta una figura composta di rette.

Spesso le due operazioni di proiezione da un punto, e sezione con un piano, si riuniscono per formare una sola operazione, che prende il nome di *proiezione da un centro S sopra un piano* σ. La operazione si eseguisce proiettando la figura data dal centro *S*, e segandone la visuale col piano σ. La figura che così si ottiene in σ dicesi appunto *proiezione* della figura primitiva da *S* sopra σ. Essa è formata dai punti e dalle rette che son proiezioni (da *S* sopra σ) dei punti e delle rette della figura primitiva.

La proiezione dall'occhio di un osservatore, sopra un piano, di una figura situata dietro al piano è la *prospettiva* della figura. L'*ombra* di un corpo opaco sopra un piano è la proiezione del corpo sul piano dal centro luminoso.

116. Punto all'infinito di una retta. — Esaminando nei casi più semplici le operazioni ora definite siamo condotti a modificare il linguaggio della geometria elementare, in guisa da renderlo atto ad esprimere, nella forma più semplice, le relazioni che andremo a stabilire.

Sia *u* una *retta punteggiata* (o brevemente una *punteggiata*), cioè una retta di cui dovremo considerare i singoli punti. Proiettando la punteggiata *u* da un centro *S*, ad essa esterno, ricaviamo, da ogni punto *A* di *u*, *una* retta *a* del fascio *S*; e viceversa, ogni retta *a* del fascio (salvo una eccezione di cui parleremo) ci dà come sezione *un* punto *A* della punteggiata. Tra la punteggiata *u* e il fascio viene dunque a stabilirsi, mediante l'operazione di proiezione, una *corrispondenza biunivoca*, detta *corrispondenza prospettiva*. Essa però ammette una eccezione, giacchè vi è una retta *i* del fascio, parallela ad *u*, alla quale non corrisponde nessun punto di *u*.



Ora il presentarsi di una eccezione nell'enunciato di un fatto così semplice lascia prevedere una crescente complicazione di linguaggio, quando si prenderanno in esame casi più generali di proiezione. Cercheremo perciò di togliere, almeno formalmente, la eccezione modificando convenientemente il linguaggio.

Supponiamo, a tal fine, che una retta *m* del fascio *S* parta dalla posizione *a* e ruoti intorno ad *S*, ad es. nel verso della freccia. Il punto *M*, sezione di *m* con *u*, si muove sopra *u* sempre in uno stesso verso (segnato con una freccia), e va allontanandosi indefinitamente da *A*, mentre *m* tende a raggiungere la posizione *i*. Converremo di dire che, quando *m* viene a coincidere con *i*, il punto *M* si porta nel *punto all'infinito* (o nel *punto*

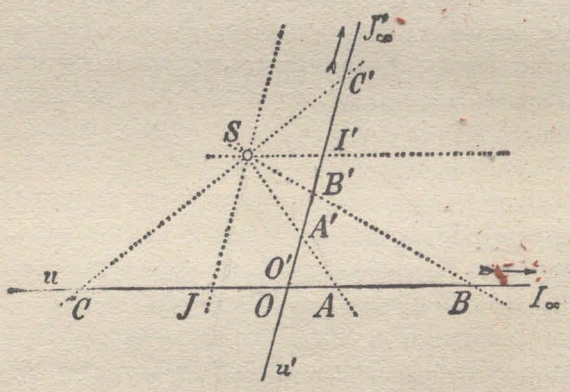
improprio) della retta u. La retta i, parallela ad u, ha in comune con u (secondo questa locuzione) il punto all'infinito I_∞ di u (o di i).

Volendo organizzare in forma logica la geometria proiettiva, giova presentare la stessa convenzione nel modo seguente. La Geometria proiettiva riguarda come punti di una retta, non solo i punti intuitivi o propri, che la geometria elementare considera, ma pure la *direzione* della retta, alla qual direzione essa dà il nome di *punto all'infinito* (o *improprio*). Con ciò l'affermazione evidente: « due rette parallele hanno la stessa direzione » si traduce nella nuova forma: « due rette parallele hanno lo stesso punto all'infinito », o « si incontrano nel punto all'infinito ».

Accolta la convenzione, potremo dire che due rette distinte di un piano hanno sempre *un* punto comune, *proprio* quando si segano (nel senso della geometria elementare), *improprio* se sono parallele.

Proiettare da S il punto all'infinito I_∞ di una retta u, vuol dire condurre per S la i parallela ad u; ed I_∞ è la sezione di i con u. Con ciò sparisce la eccezione, che avevamo sopra rilevata nella corrispondenza prospettiva tra punteggiata e fascio.

117. Movimento proiettivo sopra una retta, segmenti proiettivi. — Proiettiamo ora una punteggiata u sopra una nuova retta u', da un centro S che non appartenga a nessuna delle due rette. Ogni punto $A, B, \ldots$ di u fornisce sopra u' un punto proiezione $A', B', \ldots$; e, viceversa, i primi punti possono riguardarsi come proiezioni degli ultimi. Tra le due punteggiate u, u' viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca (detta *prospettiva*), la quale non ammette eccezioni in virtù della convenzione ora introdotta. Infatti al punto all'infinito I_∞ di u corrisponde la intersezione I' di u' colla parallela ad u uscente da S; e similmente al punto J di u, che appartiene ad una retta proiettante parallela ad u', corrisponde il punto all'infinito J'_∞ di u'. I punti J ed I', generalmente propri, cui corrispondono punti impropri sopra u' ed u, diconsi *punti di fuga* o *punti limite* di u, u', rispettivamente.



Supponiamo che un punto mobile descriva per intero una delle due rette, ad es. la u', nel verso della freccia. Il punto corrispondente sopra u partirà dalla posizione J, e, variando nel verso della freccia, descriverà

anzitutto la semiretta u a destra di J, andrà nel punto I_∞ (quando il primo punto mobile passa per I'), ricomparirà poi sulla retta u a sinistra di J, e descriverà, sempre nello stesso verso, la rimanente semiretta u, fino a ritornare in J.

Mentre il punto mobile sopra u' percorre un segmento $A'B'$ o $B'C'$, il punto corrispondente sopra u descrive una parte di questa retta, che è un segmento propriamente detto, come AB, se $A'B'$ non contiene il punto limite I', oppure (nel caso opposto) si compone dei due prolungamenti di un segmento BC, dei quali il prolungamento a destra di B è la proiezione del segmento $B'I'$, ed il prolungamento a sinistra di C è la proiezione del segmento $I'C'$.

Allo scopo di esprimere nel modo più perspicuo questi vari fatti, e di assimilare col linguaggio, per quanto è possibile, i fenomeni che accadono su due punteggiate proiezioni l'una dell'altra, si stabiliscono le seguenti convenzioni:

a) Si introduce, accanto al *movimento metrico* sopra una retta u fornito dall'intuizione, un *movimento proiettivo,* in virtù del quale un punto mobile, partendo da una posizione *qualsiasi* J, descrive, in un dato verso, anzitutto una metà della retta, passa per il punto all'infinito, ricompare sull'altra semiretta, e la descrive tutta in quel verso fino a ritornare al punto di partenza J.

b) Si chiama *segmento proiettivo,* sopra una retta, non solo il segmento finito considerato nella geometria elementare, ma pure l'insieme dei due prolungamenti di un segmento finito, od anche una semiretta (che è limitata da un punto proprio e dal punto all'infinito).

Segue da queste convenzioni:

1) che, nella Geometria proiettiva, un punto non spezza la retta in due parti, potendosi ancora passare dall'una all'altra banda del punto con un movimento proiettivo, senza oltrepassare il punto;

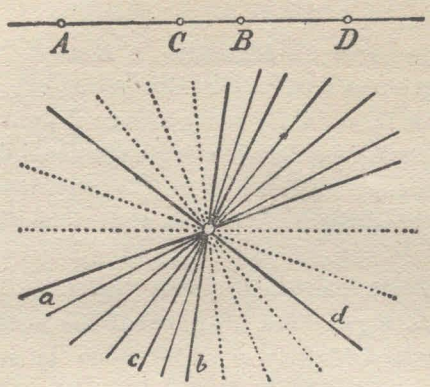
2) che due punti limitano sopra una retta *due* segmenti proiettivi, i quali hanno in comune quei due punti, e nessun altro;

3) che, operando per proiezione e sezione, un movimento proiettivo si converte in un movimento proiettivo, ed un segmento proiettivo in un segmento proiettivo.

118. Coppie di elementi che si separano. — Se nell'uno dei due segmenti proiettivi, aventi per estremi A e B, fissiamo un punto C e nell'altro un punto D, è chiaro che per andare, con un movimento proiettivo, da A a B, si dovrà oltrepassare C o D. Si dice perciò che i punti C, D *separano,* o *dividono,* i punti A, B. Risulta poi che anche A, B separano C, D; in breve *le coppie* AB *e* CD *si separano.*

Una nozione analoga si può introdurre nei fasci di rette (o di piani)

Si osservi anzitutto che due rette a, b di un fascio determinano nel fascio due regioni, dette *angoli completi*, di cui una comprende le rette del fascio appartenenti ad uno degli angoli $\widehat{ab}$ ed all'opposto al vertice, l'altra corrisponde ai due angoli $\widehat{ab}$ rimanenti. Se c e d sono due rette, di cui una appartenga all'una e l'altra all'altro degli angoli completi ab, diremo che c e d separano a, b; ecc.



Coppie che si separano dànno, per proiezione o sezione, coppie che si separano.

119. Retta all'infinito di un piano. — Per introdurre una nuova convenzione relativa agli elementi all'infinito, consideriamo ora un piano π ed un punto S esterno al piano. Ogni punto ed ogni retta di π fornisce, mediante proiezione da S, una retta ed un piano della *stella* S; e viceversa, quando si faccia astrazione dalle rette parallele a π e dal piano parallelo a π che passano per S.

Ora una retta r parallela ad un piano π è parallela ad infinite rette di π, le quali, per una convenzione già fatta (n. 116), hanno in comune, tra loro e con r, il punto all'infinito. È quindi naturale dire che una retta parallela ad un piano ha in comune con questo il proprio punto all'infinito. Un piano contiene, in conseguenza, il punto all'infinito di ogni sua retta, e di ogni retta ad esso parallela.

Le infinite rette parallele a π condotte per S stanno in un medesimo piano σ, parallelo a π. I punti all'infinito di quelle rette appartengono contemporaneamente a π ed a σ. Si suole esprimere brevemente questo fatto dicendo che due piani paralleli hanno in comune *una retta all'infinito* (o *retta impropria*), la quale contiene i punti all'infinito situati nell'uno o nell'altro piano.

L'ultima convenzione può anche presentarsi così. Si dice talvolta che « due piani paralleli hanno la stessa *giacitura* »; ora si trova opportuno di sostituire alla parola *giacitura* la locuzione *retta all'infinito* (o *impropria*); con ciò la frase tra virgolette si muta precisamente in quella da noi sopra adottata.

In virtù di queste convenzioni, possiamo affermare che:

1) una retta ha sempre in comune con un piano *un* punto (*proprio* od *improprio*), a meno che la retta non appartenga per intero al piano;

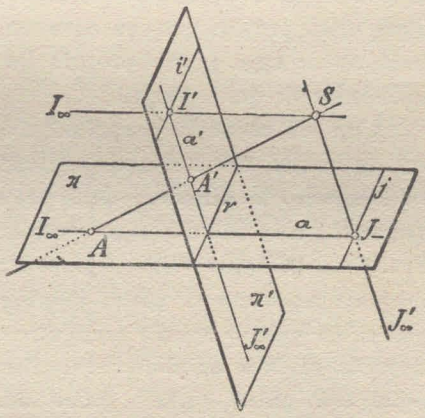
2) due piani distinti hanno sempre una *retta* comune (*propria* se si segano nel senso della Geometria elementare, *impropria* se sono paralleli).

Possiamo dire finalmente che, mediante una proiezione da un centro S, si viene a stabilire tra un piano π ed una stella S una corrispondenza biunivoca senza eccezioni (*corrispondenza prospettiva*), in virtù della quale ad ogni punto o retta di π corrisponde, rispettivamente, *una* retta od *un* piano per S, e viceversa. In particolare, la retta all'infinito di π ha per corrispondente (proiettante) il piano σ parallelo a π.

120. Proiezione di una figura piana sopra un altro piano. — Segando la stella S del numero precedente con un piano π', diverso da π e non passante per S, otteniamo una corrispondenza biunivoca (*prospettiva*) tra i due piani π, π'. Ad ogni punto A e ad ogni retta a di π corrispondono, su π', il punto A' e la retta a', che sono proiezioni di quelli, da S su π'; e viceversa.

La corrispondenza non presenta eccezioni, quando si tenga conto delle convenzioni fatte (n. 119).

In particolare, la retta all'infinito i_∞ di π ha per immagine in π' quella retta i', generalmente propria, che è l'intersezione di π' col piano condotto per S parallelamente a π. La retta i' dicesi *retta limite*, o *retta di fuga* del piano π'; essa è parallela alla intersezione r dei piani π, π', e contiene la proiezione I' di ogni punto all'infinito I_∞ di π. Similmente vi sarà su π' una retta limite j (pure parallela ad r), corrispondente alla retta all'infinito j'_∞ di π'.



Una figura F di π ha, come corrispondente in π', una figura F', che è l'*immagine prospettiva* di quella. Tra le due figure passano alcune relazioni evidenti. Così, se in F un punto A sta sopra una retta a, il punto immagine A' starà sulla retta immagine a'; e se più punti di F sono allineati o più rette concorrenti, i punti e le rette immagini in F' saranno allineati o concorrenti. Queste affermazioni valgono senza eccezione, solo quando si accettino le convenzioni dei nn. 116, 119, e quindi i punti e le rette possano essere propri od impropri. Così accade che due rette parallele di π (aventi in comune un punto di i_∞) hanno per immagini in π' due rette secantisi in un punto, generalmente proprio, di i'; e viceversa. Un parallelogramma di π ha per immagine un quadrangolo, in cui le coppie di lati opposti (prolungati quanto occorre) si segano in punti, generalmente propri, di i'; ecc.

Questi fenomeni della *deformazione prospettiva* sono abbastanza noti, perchè non occorra insistervi ulteriormente. Il rilevarli giova però a giustificare l'utilità delle convenzioni introdotte.

121. Piano all'infinito. — Ricordando che il punto all'infinito di una retta (propria) appartiene alla retta all'infinito di un piano quando quella retta è parallela a questo piano, o vi giace (n. 119), si giustificano facilmente le due proposizioni seguenti:

Due punti all'infinito determinano una ed una sola retta all'infinito, che li contiene.

Due rette all'infinito hanno in comune uno ed un solo punto all'infinito.

Le proposizioni stesse traducono infatti, nel nuovo linguaggio, due noti teoremi di geometria elementare: « un piano, che sia parallelo a due rette di un piano, è parallelo a questo piano »; « una retta, che sia parallela a due piani secantisi lungo una retta, è parallela a questa retta ».

Segue da quelle proposizioni che i punti all'infinito e le rette all'infinito si comportano come i punti e le rette di un piano. Sorge quindi l'idea di chiamare *piano all'infinito* (od *improprio*) l'insieme dei punti all'infinito e delle rette all'infinito dello spazio. Il piano all'infinito è unico; *ad esso appartengono tutti i punti all'infinito e tutte le rette all'infinito.* Ogni retta propria ha con esso un punto in comune, il punto all'infinito della retta; ogni piano proprio ha con esso una retta comune, la retta all'infinito di quel piano.

Con ciò abbiamo esaurito le convenzioni relative agli elementi impropri. In breve, noi abbiamo aggiunto agli infiniti punti intuitivi, o propri, dello spazio, le direzioni delle rette (proprie) che abbiamo chiamati *punti impropri;* alle infinite rette intuitive, o proprie, abbiamo aggiunto le giaciture dei piani, o *rette improprie;* agli infiniti piani intuitivi, o propri, abbiamo aggiunto *il piano improprio,* insieme delle direzioni e delle giaciture. In questo spazio ampliato opera la Geometria proiettiva, la quale, in virtù di tale ampliamento, riesce ad attribuire alle relazioni di posizione tra punti, rette e piani una forma semplice e comprensiva, che manca agli enunciati della Geometria elementare.

I concetti di punto e retta all'infinito si trovano già in DESARGUES (1639); mentre il piano all'infinito fu introdotto da PONCELET (1822).

Sebbene nel fissare le convenzioni relative agli elementi impropri si sia fatto uso tacitamente del postulato V di EUCLIDE, il quale afferma in sostanza che sopra un piano e per un punto si può condurre una sola retta che non incontri una retta assegnata in quel piano, fu osservato tuttavia (dal KLEIN) che la Geometria proiettiva è indipendente da quel postulato, e vale anche quando il postulato stesso venga sostituito con una delle due ipotesi a cui si perviene negandolo (ipotesi di LOBATSCHEFSKIJ, o della *geometria iperbolica,* la quale afferma che per un punto e sopra un piano si possono condurre infinite rette non secanti una retta del piano; ipotesi di RIEMANN, o della *geometria ellittica,* secondo la quale due rette di un piano si incontrano sempre). Si dovranno veramente modificare

in conseguenza le convenzioni, con cui gli elementi impropri furono introdotti (convenzioni che anzi non occorrono nella ipotesi di RIEMANN), ma sempre si potrà procedere in modo che valgano le proposizioni sopra le quali la Geometria proiettiva è fondata.

122. Proposizioni fondamentali relative alle mutue posizioni di punti, rette e piani. — Per giustificare un'affermazione precedente presentiamo qui alcuni enunciati, validi per elementi propri od impropri, i quali riassumono, nel nuovo linguaggio, numerose proposizioni di geometria elementare. Riuniremo a coppie questi enunciati per mettere in rilievo un'analogia, di cui dovremo discorrere nel n. 123. Faremo poi uso, per brevità, delle locuzioni seguenti: Se un punto sta sopra una retta, diremo indifferentemente che il punto *appartiene* alla retta, o che la retta *appartiene* al punto, o che il punto e la retta *si appartengono*; e lo stesso verbo adotteremo per i casi analoghi di un punto con un piano, o di una retta con un piano. Diremo poi che certe condizioni *individuano* un punto, o una retta, o un piano, quando esse determinano in uno ed in un sol modo quel punto, ecc.

a) *Due punti individuano una retta, a cui essi appartengono* (la loro congiungente).

b) *Tre punti, che non appartengano ad una stessa retta, individuano un piano, a cui essi appartengono* (il piano che li congiunge).

c) *Un punto ed una retta, che non si appartengano, individuano un piano* (congiungente), *a cui entrambi appartengono.*

d) *Se due punti di una retta appartengono ad un piano, la retta appartiene al piano.*

e) *Due rette appartenenti ad uno stesso punto, appartengono pure ad uno stesso piano.*

a') *Due piani individuano una retta, a cui essi appartengono* (la loro intersezione).

b') *Tre piani, che non appartengano ad una stessa retta, individuano un punto, a cui essi appartengono* (in cui si segano).

c') *Un piano ed una retta, che non si appartengano, individuano un punto* (intersezione), *a cui entrambi appartengono.*

d') *Se due piani* (*passanti*) *per una retta appartengono ad un punto, la retta appartiene al punto.*

e') *Due rette appartenenti ad uno stesso piano, appartengono pure ad uno stesso punto.*

Abbiamo detto che le dieci proposizioni valgono per elementi propri od impropri. Ciò si giustifica osservando che, se si parte da una qualsiasi delle proposizioni stesse, e si fanno le varie ipotesi possibili relative all'esser propri od impropri gli elementi ivi considerati, si ricade sempre in note proposizioni di Geometria elementare. Così ad es. la *a*), secondo che dei punti ivi nominati si suppongono propri due, uno o nessuno, si

traduce rispettivamente nel primo postulato della retta, nel postulato delle parallele, o nella prima proposizione del n. 121. Ma da questa semplice verifica segue una conseguenza notevole: *Ogni proposizione dedotta logicamente da quelle dieci fondamentali (senza introdurre nuovi concetti) vale indifferentemente per elementi propri od impropri.* La stessa conseguenza sussisterebbe per un teorema la cui dimostrazione si fondasse, oltre che sulle dieci proposizioni nominate, anche sopra altre pur valide per elementi propri ed impropri. E siccome a questa condizione soddisfano tutti i principî che servono di base alla Geometria proiettiva, si conclude: *Ogni proprietà di Geometria proiettiva sussiste indifferentemente per elementi propri od impropri.* Quando dunque nella Geometria proiettiva si nomina un punto, una retta, od un piano, è sottinteso che l'elemento potrà essere proprio o improprio. Va notato però sin d'ora che i teoremi di Geometria proiettiva contemplano soltanto la mutua posizione degli elementi (appartenenza, allineamento di punti, concorrenza di rette...), sono, come suol dirsi, di *natura grafica;* ma non riguardano questioni di misure, o *metriche,* non si occupano adunque di eguaglianze di segmenti, angoli ... Nella *Geometria metrica* la distinzione tra elementi propri e impropri va sempre fatta, e quando non vi si accenni esplicitamente, si intende che i punti, le rette e i piani di cui si parla sono *propri.*

123. Legge di dualità. — Ad un'altra conseguenza, di importanza anche maggiore, si perviene con un ragionamento analogo, se si osserva che ciascuna delle dieci proposizioni fondamentali si muta in un'altra di quelle (scritta di fronte), quando nell'enunciato della prima si scambino tra loro le parole *punto* e *piano,* lasciando inalterata la parola *retta.* Un siffatto scambio si chiama *trasformazione per dualità* (nello spazio), e due proposizioni, che esso converta l'una nell'altra, diconsi *duali.* Dunque le cinque proposizioni di sinistra sono duali, ordinatamente, delle cinque proposizioni di destra.

Noi ci limitiamo a constatare questo fatto; esso dipende, in parte, dalla natura dello spazio, come ci vien rappresentato dai sensi aiutati dalla facoltà di astrazione, in parte dalle convenzioni con cui abbiamo introdotti gli elementi impropri. Ma da questa osservazione segue che *ogni proposizione dedotta logicamente da quelle dieci fondamentali (senza introdurre nuovi concetti) dà luogo ad un'altra proposizione pur vera, quando l'enunciato della prima si trasformi per dualità nello spazio,* vale a dire, quando in esso si scambino tra loro le parole *punto* e *piano,* lasciando inalterata la parola *retta.* Infatti la stessa dimostrazione della prima proposizione si muta, con quello scambio, nella dimostrazione della seconda Siccome poi tutta la Geometria proiettiva si fonda sopra le dieci proposizioni fondamentali già enunciate, e sopra altre, a cui si applica la stessa

osservazione relativa alla dualità, si conclude: *Ogni proprietà di Geometria proiettiva dà luogo ad un'altra proprietà pur vera* (che in casi particolari può coincidere colla prima), *quando nell'enunciato di quella si eseguisca lo scambio per dualità.* Di due proposizioni *duali* basta dimostrare una per esser sicuri che sussiste anche l'altra. In tale affermazione consiste la *legge di dualità nello spazio.*

Si osservi però, in primo luogo, che la legge si potrà applicare ad una proposizione, solo quando la dimostrazione di questa si appoggi esclusivamente sopra proposizioni fondamentali trasformabili per dualità; da questa condizione potremo, in certi casi, liberarci nel seguito quando riusciremo a giustificare per altra via la legge di dualità.

Si osservi, in secondo luogo, che per applicare ad una proposizione la legge di dualità occorre che la proposizione sia enunciata in *forma grafica* (n. 122); alle proposizioni metriche la legge di dualità, in generale, non è applicabile.

Due proposizioni duali si riferiscono a due figure che si chiamano pur *duali.* Ad ogni punto, retta, o piano dell'una corrisponde, rispettivamente, un piano, una retta od un punto dell'altra; e se più elementi della prima figura sono legati da qualche relazione grafica, la relazione duale passerà tra gli elementi della seconda figura. Così, ad es., se due elementi della prima figura si appartengono, si apparterranno gli elementi corrispondenti della seconda; se tre o più punti della prima figura sono allineati, i piani corrispondenti della seconda passeranno per una stessa retta, ecc.

Accanto alla legge di dualità *nello spazio*, di cui ora abbiamo discorso, vanno ricordate altre due leggi di dualità, l'una valida in *geometria piana*, la seconda nella *geometria della stella.* La legge di dualità piana afferma che da una proposizione grafica di geometria piana si può dedurne un'altra, collo scambio delle parole *punto* e *retta*; quindi da una proprietà dei vertici di un *n.gono* piano, una proprietà dei lati di un *n.latero.*[1] La legge di dualità nella stella autorizza lo scambio delle parole *retta* e *piano* (uscenti da un punto, centro della stella).

Le due leggi ora menzionate si giustificano in modo analogo, sebbene meno semplice, di quello tenuto a proposito della dualità nello spazio. Noi, del resto, dovremo in seguito giustificare per altra via queste leggi, e per ora ci limiteremo ad applicarle a quelle proposizioni, le cui dimostrazioni possono trasformarsi immediatamente coi detti scambi di parole, senza perdere la loro validità.

[1] Nel seguito, finchè non si introducano nuove convenzioni, per *n.gono* piano si intenderà una figura determinata da n punti di un piano (*vertici*) assegnati in dato ordine, e dalle rette (*lati*) che congiungono ciascun vertice col successivo e l'ultimo col primo. L'*n.latero* è la stessa figura, che si considera costruita a partire dalle n rette (lati), i *vertici* essendo intersezioni delle coppie di lati consecutivi.

La legge di dualità (o reciprocità) nel piano e nello spazio fu rilevata da PONCELET (1818), partendo da considerazioni di tutt'altra natura, ed enunciata in tutta la sua estensione da GERGONNE (1826).

124. Esempi di proposizioni grafiche. — Le considerazioni dei nn. 122 e 123 si applicano, ad es., alle seguenti proposizioni, che si appoggiano soltanto sui principî del n. 122. Si osserverà, nel confrontare gli enunciati corrispondentisi per dualità nello spazio, che la *coppia di rette secantisi* (in un punto proprio od improprio) o, come si suol dire, *coppia di rette incidenti*, è un ente duale di sè stesso (n. 122, *e*), *e'*)); e, per conseguenza, è duale di sè stessa la *coppia di rette non incidenti*, o *rette sghembe*.

Occupiamoci anzitutto dei due problemi:

α) *Per un dato punto condurre una retta che incontri due rette sghembe assegnate, nessuna delle quali passi pel punto.*

Se P è il punto ed a, b sono le rette date, la retta richiesta dovrà appartenere al piano Pa ed al piano Pb, sarà dunque l'intersezione dei piani Pa, Pb.

α') *In un dato piano condurre una retta che incontri due rette sghembe assegnate, nessuna delle quali giaccia nel piano.*

Se π è il piano ed a, b sono le rette date, la retta richiesta dovrà appartenere al punto πa ed al punto πb, sarà dunque la congiungente i due punti πa, πb.

I due problemi hanno sempre una ed una sola soluzione.

β) *Esistono infinite rette che segano tre rette date, sghembe a due a due,* ed una qualsiasi di quelle può costruirsi:

o assumendo un punto arbitrario sopra una delle tre rette date, e conducendo per esso la retta che sega le altre due.

γ) *Se più rette si segano a due a due, senza passare tutte per uno stesso punto, esse stanno in uno stesso piano.*

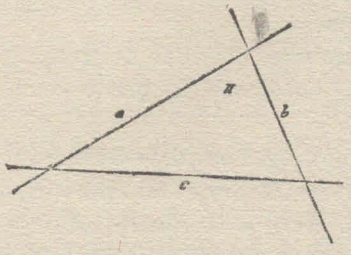
Infatti: due qualunque a e b delle rette date, segandosi in un punto, staranno in uno stesso piano π. Fra le altre rette del sistema ve ne sarà per ipotesi una almeno, c, che non passerà pel punto ab; essa però, dovendo segare a e b, starà nel piano π. Ogni altra retta del sistema o non passerà pel punto ab, ed

o conducendo un piano arbitrario per una delle tre date, e costruendo in esso la retta che sega le altre due.

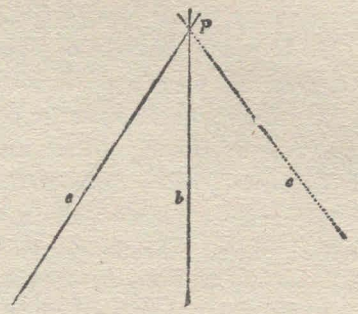
γ') *Se più rette si segano a due a due, senza stare tutte in uno stesso piano, esse passano per uno stesso punto.*

Infatti: due qualunque a e b delle rette date, giacendo nello stesso piano, si segheranno in un punto P. Fra le altre rette del sistema ve ne sarà per ipotesi una almeno, c, che non starà nel piano ab; essa però, dovendo segare a e b, passerà pel punto P. Ogni altra retta del sistema o non starà nel piano ab, ed allora

allora (come la c) starà nel piano π; o passerà pel punto ab, ed allora, dovendo incontrare la c, starà anche essa nel piano π delle tre rette a, b, c.



(come la c) passerà pel punto P, o starà nel piano ab, ed allora, dovendo segare la c, passerà anch'essa pel punto P comune alle tre rette, a, b, c.



125. Forme geometriche fondamentali. — Nella geometria elementare si osserva che un punto, muovendosi con legge assegnata, genera una linea od una superficie; la linea, o la superficie, vien riguardata come *luogo di un punto*. Ora la legge di dualità nel piano, o nello spazio (n. 123), ci conduce a considerare altresì sistemi (*inviluppi*) costituiti dalle infinite rette di un piano, o dagli infiniti piani dello spazio, che soddisfano a determinate condizioni. Riserbandoci di chiarir meglio tale concetto mediante considerazioni analitiche, vogliamo qui raccogliere le definizioni (in parte già date) dei più semplici enti generati da punti, rette o piani mobili; enti a cui STEINER (1832) diede il nome di *forme geometriche fondamentali*.

a) Le forme fondamentali, in cui l'*elemento generatore è il punto*, sono:

I. *La retta punteggiata*, o semplicemente *punteggiata*, insieme di tutti i punti che appartengono ad una linea retta (cfr. n. 116); la retta dicesi il *sostegno* della forma.

II. *Il piano punteggiato*, insieme di tutti i punti che appartengono ad un piano; il piano è il *sostegno* della forma.

III. *Lo spazio punteggiato*, insieme di tutti i punti dello spazio; lo spazio è il *sostegno* della forma.

b) Le forme fondamentali, in cui l'*elemento generatore è il piano*, sono:

I. *Il fascio di piani*, insieme di tutti i piani che appartengono ad una retta (cfr. n. 11); in esso il *sostegno* è la retta comune a tutti i piani (*asse del fascio*).

II. *La stella di piani*, insieme di tutti i piani che appartengono ad un punto (cfr. n. 82); qui il *sostegno* è il punto comune a tutti i piani (*centro della stella*).

III. *Lo spazio di piani*, insieme di tutti i piani dello spazio; qui il *sostegno* è lo *spazio*.

c) Le forme fondamentali, in cui l'*elemento generatore è la retta*, sono:

I. *Il fascio di rette* (o *di raggi*), insieme di tutte le rette che appartengono ad un punto e ad un piano per esso, vale a dire, che passano per un punto e giacciono in un piano condotto pel punto (cfr. n. 9); qui i *sostegni* della forma sono il punto comune (*centro del fascio*) ed il piano comune (*piano del fascio*).

II. *Il piano di rette* o *piano rigato*, insieme di tutte le rette che appartengono ad un piano; il *sostegno* è il *piano*.

III. *La stella di rette* (o *di raggi*), insieme di tutte le rette (dello spazio) che appartengono ad un punto; il *sostegno* è il punto comune a tutte le rette (*centro della stella*).

Riguardo a queste definizioni va notato che i punti, le rette e i piani, di cui si parla, possono essere indifferentemente propri od impropri. Così, ad es., accanto al *fascio proprio di rette*, avente il centro ed il piano proprio, dovremo considerare il *fascio improprio di rette*, di cui il piano è proprio mentre il centro è improprio (cfr. n. 20), ed il *fascio di rette improprie* che ha improprio tanto il centro quanto il piano. Ed accanto alla stella *propria* di rette e di piani, avente il centro proprio, vanno considerate la *stella impropria di rette*, costituita da tutte le rette dello spazio parallele ad una retta data, e la *stella impropria di piani*, costituita da tutti i piani dello spazio paralleli a una retta data (cfr. n. 82); il centro della stella impropria è un punto improprio.

Osserveremo, in secondo luogo, che la definizione di una forma fondamentale, trasformata per dualità nello spazio o nel piano (n. 123), fornisce ancora la definizione di una forma fondamentale. Precisamente, le tre forme fondamentali generate dal punto sono duali, nello spazio, delle tre forme fondamentali generate dal piano; il fascio di rette è duale di sè stesso, ed il piano rigato e la stella di rette sono mutuamente duali.

Per dualità piana si corrispondono poi la punteggiata ed il fascio di rette, il piano punteggiato ed il piano rigato.

Un altro modo per classificare le forme fondamentali consiste nel dividerle in forme di *prima*, di *seconda* e di *terza specie*, comprendendo nelle forme di prima specie la punteggiata ed i due fasci; tra quelle di seconda specie il piano punteggiato, il piano rigato e le due stelle; tra quelle di terza specie lo spazio di punti e lo spazio di piani. Il criterio che presiede a tale classificazione riguarda il numero delle coordinate (una, due o tre rispettivamente) che occorre conoscere per determinare un elemento in una forma di prima, seconda o terza specie. Di tali coordinate abbiamo già discorso, ad es., per le forme generate da punti, e parleremo tra poco per alcune delle altre. Osserveremo inoltre esservi molte proprietà che spettano a tutte le forme di una stessa specie, e non appartengono più alle forme di specie diversa. Queste proprietà si potranno

enunciare come relazioni tra gli elementi di una o più forme della stessa specie, senza precisare la natura dell'elemento. Sostituendo poi, alla parola *elemento*, i termini più precisi *punto*, *retta* o *piano*, si avranno altrettante proposizioni relative alle diverse forme fondamentali (di quella specie) che abbiamo introdotto.

126. Caratteri proiettivi di una figura; scopo della Geometria proiettiva. — Riprendiamo ora le considerazioni del n. 120, ove si ponevano a riscontro due figure piane F, F', proiezioni l'una dell'altra da un centro S. Abbiamo osservato allora che alcuni dei caratteri della F si trasmettono alla figura F'; tali sono, ad es., l'allineamento di punti, la concorrenza di rette, in breve i caratteri che abbiamo chiamato *grafici* (n. 122). Altri caratteri invece della figura F si alterano mediante la proiezione che conduce da F ad F'; tra questi il parallelismo o l'angolo di due rette, la distanza di due punti, l'area, in breve la maggior parte dei caratteri in cui comparisce il concetto di misura (caratteri *metrici*).

Per ricordare la distinzione ora fatta, si suol chiamare *carattere proiettivo* di una figura piana ogni carattere che si trasmetta inalterato alle figure proiezioni di quella.[1] Un'analoga distinzione si potrà fare in seguito fra i caratteri delle figure solide; ma quel che abbiamo detto sinora è sufficiente per comprendere la definizione che segue:

La Geometria proiettiva si propone lo studio dei caratteri proiettivi delle figure, e delle relazioni che legano quei caratteri tra loro (proprietà proiettive).

La Geometria proiettiva, in senso stretto, fa astrazione dalle proprietà metriche delle figure; ma essa riesce ad estendere il suo dominio fino a quelle, in base all'osservazione che le proprietà metriche possono dedursi come corollari dalle proprietà proiettive, quando le figure, cui si riferiscono, abbiano speciali relazioni con enti particolari, come sono le rette o il piano all'infinito,... Così avviene che le proprietà proiettive di un quadrangolo piano si riducono a proprietà metriche (considerate in geometria elementare), quando il quadrangolo abbia speciali relazioni colla retta all'infinito, sia dunque un trapezio, un parallelogramma, ecc.

Di fronte a questo indirizzo moderno della Geometria proiettiva, che subordina le proprietà metriche alle proprietà proiettive, va ricordato un altro indirizzo, il cosidetto *metodo della proiezione centrale*, che procede in senso inverso, ed ebbe la massima importanza nello sviluppo della nostra scienza. Val la pena di esporne il concetto direttivo. Volendo studiare le proprietà proiettive di una figura piana F, si cerchi se, tra le proiezioni di F eseguite da centri arbitrari sopra piani arbitrari, ve ne sia

[1] Si dimostra che ogni carattere proiettivo può enunciarsi sotto tal forma da apparire come carattere grafico. Perciò nel seguito non faremo distinzione fra caratteri grafici e proiettivi.

qualcuna F' dotata di particolarità metriche; (se F è, ad es., un quadrangolo semplice, si potrà supporre che F' sia un parallelogramma). Trovata una tal figura F', se ne ricerchino le proprietà coi noti metodi della Geometria elementare; e tra le proprietà stesse si distinguano quelle che hanno carattere proiettivo, dalle altre; le prime potranno senz'altro trasportarsi alla figura F, e condurranno a proprietà proiettive di questa. Nello sviluppo del nostro corso, e colla scelta degli esercizi, vedremo anche più chiaramente le particolarità dell'uno e dell'altro indirizzo.

La distinzione tra proprietà proiettive, e non proiettive, delle figure è dovuta a PONCELET (1822), che adoperò sistematicamente il metodo della proiezione centrale per arricchire la Geometria proiettiva. Lo STAUDT, per primo (1847), riuscì a liberare dalle nozioni metriche i fondamenti di questa scienza, e segnò così la strada, che vien seguita nei trattati più moderni di Geometria proiettiva. I rapporti che passano tra la Geometria proiettiva e la Geometria metrica furono messi in piena luce dal CAYLEY e dal KLEIN.

Esercizi. I. — 1) Enunciare, col linguaggio della Geometria elementare, tutti i casi a cui dànno luogo le proposizioni α), α'), β) del n. 124, quando si supponga che uno o più degli elementi ivi nominati siano impropri.

2) Se una retta a ed un piano α sono perpendicolari, il punto A_∞ della retta e la retta a'_∞ del piano sono tali che ogni retta per A_∞ è perpendicolare ad ogni piano per a'_∞. Le rette dello spazio che formano angolo retto con a (e colle sue parallele) segano tutte a'_∞, e viceversa; quindi le rette perpendicolari ad a formano un particolar sistema di rette secanti due rette sghembe a, a'_∞. Si applichino ad esse i problemi α) ed α') (n. 124): come si presentano gli enunciati?

3) Dedurre che esiste sempre una ed una sola retta perpendicolare a due rette sghembe a, b, e costruirla; di qual problema può questo riguardarsi come caso particolare?

4) Segando un tetraedro con un piano generico, si ottiene un quadrilatero: come deve esser condotto il piano secante per ottenere un parallelogramma? Proiettando un tetraedro da un punto sopra un piano, si ottiene un quadrangolo; fissato il centro di proiezione, come deve esser scelto il piano, perchè i vertici del quadrangolo formino un parallelogramma?

5) Dato sopra un piano un quadrangolo, proiettarlo da un tal centro sopra un tale piano, che la proiezione risulti: a) un trapezio, b) un parallelogramma, c) un rettangolo, d) un rombo (o losanga), e) un quadrato: negli ultimi quattro casi quale sarà la retta limite del piano primitivo?

6) Dato un triangolo qualsiasi, proiettarlo in guisa che la proiezione risulti un triangolo simile, od anche uguale, a un triangolo dato; (si può scegliere ad arbitrio la retta limite).

7) A quali casi può dar luogo la proiezione di un'area (per es. triangolare) di un piano π sopra π', a seconda della posizione dell'area rispetto alla retta limite di π?

8) Quando la retta limite di π è propria, vi è un solo punto improprio di π che ha per proiezione un punto improprio di π', e quindi vi è un solo fascio improprio in π che ha per proiezione un fascio improprio.

9) Se la retta all'infinito di π si proietta nella retta all'infinito di π', allora rette parallele di π si proiettano in rette parallele di π', ogni parallelogramma di π si proietta in un parallelogramma di π', ecc. Ora due sono i casi in cui quel fatto si presenta: l'uno corrisponde ad una particolarità nella posizione del centro di proiezione, i due piani essendo arbitrari (*proiezione parallela*); l'altro ad una particolarità nella posizione reciproca dei due piani, essendo arbitrario il centro di proiezione (*omotetia*); i due casi possono del resto presentarsi insieme.

10) Una particolare proiezione parallela è la proiezione *ortogonale* di un piano sopra un altro (n. 87). Si dimostri che la condizione perchè un angolo retto si proietti ortogonalmente in un angolo retto è che l'angolo primitivo abbia uno (almeno) dei suoi lati parallelo al piano di proiezione; in altre parole, la sezione piana di un diedro retto è un angolo retto, solo quando un lato dell'angolo è perpendicolare allo spigolo del diedro.

II. *Sul teorema dei triangoli omologici.* — 11) Nella corrispondenza prospettiva fra due piani (n. 120), punti corrispondenti sono allineati con uno stesso punto (centro di proiezione), e rette corrispondenti si segano in punti di una stessa retta (intersezione dei due piani).

12) Una figura F_0, situata sopra un piano π_0, si proietti da due centri diversi S, S' sopra uno stesso piano π. Si otterranno così su π due figure F, F' (che diconsi *proiezioni stereoscopiche* o *bipolari* della F_0). Chiamando ora corrispondenti due punti A, A', o due rette a, a' di F, F', quando siano le proiezioni di uno stesso punto A_0, o retta a_0 di F_0, vale il teorema: Le rette congiungenti punti corrispondenti delle due figure F, F', passano per uno stesso punto (che è la traccia della retta SS'), ed i punti intersezioni di rette corrispondenti stanno sopra una medesima retta (che è la intersezione di π, π_0).

13) Due triangoli, situati in piani diversi o in uno stesso piano, diconsi *omologici* (o *prospettivi*), se le rette congiungenti punti corrispondenti passano per uno stesso punto (*centro di omologia*), ed i punti d'incontro di rette corrispondenti stanno sopra una medesima retta (*asse di omologia*). Segue dagli es. 11), 12) che «due triangoli sono omologici, sia quando, giacendo in piani diversi, sono l'uno proiezione dell'altro, sia quando, giacendo in uno stesso piano, sono entrambi proiezioni (da centri diversi) di uno stesso triangolo situato in un altro piano».

14) Delle due condizioni che intervengono nella definizione di due triangoli omologici, una qualsiasi è conseguenza dell'altra. Ciò afferma il *teorema dei triangoli omologici* (Desargues, 1639), che si spezza nella proposizione seguente e in quella dell'es. 15): «Se due triangoli, non aventi alcun elemento comune, sono così riferiti che le rette congiungenti i vertici dell'uno coi vertici corrispondenti dell'altro passino per uno stesso punto, le intersezioni dei lati dell'uno coi lati corrispondenti dell'altro appartengono ad una medesima retta». (Il teorema è evidente se i triangoli sono in piani diversi; in caso opposto, si può costruire un triangolo di cui quelli siano proiezioni; poi es. 13)).

15) «Se due triangoli, non aventi alcun elemento comune, sono così riferiti che le intersezioni dei lati dell'uno coi lati corrispondenti dell'altro stiano in una

stessa retta, le rette congiungenti i vertici dell'uno coi vertici corrispondenti dell'altro passano per uno stesso punto». (Vale la stessa avvertenza che per l'es. precedente).

16) Si enunci e si dimostri coi metodi della geometria elementare il teorema dei triangoli omologici (diretto ed inverso), nelle ipotesi che i triangoli stiano in un medesimo piano e che l'asse di omologia sia all'infinito. Si deduca poi, col metodo della proiezione centrale, il teorema generale, liberandosi dall'ultima ipotesi.

17) Si trasformino per dualità nello spazio i teoremi 14), 15).

18) Date in un piano due rette r, r' ed un punto P, non appartenente a nessuna di quelle, se per P si conducono più trasversali, che seghino r, r' nelle coppie di punti AA', BB', CC', ..., i punti di incontro di AB' con $A'B$, di AC' con $A'C$, di BC' con $B'C$, ... stanno sopra una stessa retta p, che passa per il punto $rr' \equiv O$, e dicesi *polare* di P rispetto alla coppia di rette r, r'.

19) Un punto P' qualsiasi della retta p ora nominata ha per polare (rispetto ad r, r') la retta $OP \equiv p'$; in altre parole: se di due punti il secondo sta sulla polare del primo, il primo apparterrà alla polare del secondo. Segue che ogni punto di p ha per polare p', ed ogni punto di p' ha per polare p; la polare di un punto, rispetto ad r, r', non varia dunque quando il punto descrive una retta passante per la intersezione rr'.

20) Si supponga, in particolare, che le due rette r, r' sopra nominate siano parallele e sia improprio il punto P, e si approfitti di questo caso metrico per dimostrare gli esercizi 18) e 19) col metodo della proiezione centrale.

21) Si enuncino e dimostrino le proposizioni duali nel piano delle 18) e 19); si arriverà alla nozione di *polo* di una retta, rispetto ad una coppia di punti. In particolare, quale è il polo della retta all'infinito rispetto ad una coppia di punti propri?

22) Date in un piano due rette a, b ed un punto M, congiungere M col punto ab, senza far uso di quest'ultimo punto; (basta costruire due triangoli omologici tali che a, b e la retta richiesta siano le congiungenti di vertici corrispondenti oppure si può ricorrere all'es. 18)).

23) In particolare: date in un piano due rette parallele ed un punto, condurre per questo la parallela a quelle, servendosi della sola riga.

24) Dati in un piano due punti A, B ed una retta m, determinare la intersezione di m colla retta AB, senza tracciare quest'ultima retta; (si trasformino per dualità piana le costruzioni relative all'es. 22)).

25) In particolare (se A, B sono all'infinito): dato un parallelogramma ed una retta m, condurre una parallela ad m, valendosi della sola riga. Ricorrendo poi all'es. 23), si può condurre la parallela per un punto assegnato ad arbitrio (PONCELET).

26) Se i vertici A_1, A_2, A_3, A_4 di un quadrangolo appartengono ordinatamente ai lati a_1, a_2, a_3, a_4 di un quadrilatero, ed i lati opposti A_1A_2, A_3A_4 del primo si segano sopra la diagonale $a_4a_1 \cdot a_2a_3$ del secondo, i rimanenti lati opposti del primo si segheranno sulla rimanente diagonale del secondo.

27) Se due quadrangoli completi[1] $ABCD$, $A'B'C'D'$, privi di elementi comuni, son così riferiti che cinque lati, AB, ..., del primo seghino i corrispon-

[1] Un *quadrangolo completo* è, come vedremo in seguito, la figura composta di quattro punti (*vertici*) e delle *sei* rette (*lati*) che congiungono questi a due a due. La figura duale nel piano è il *quadrilatero completo*.

denti cinque lati, $A'B', \ldots$, del secondo in cinque punti di una stessa retta, i sesti lati dei due quadrangoli si segheranno in un punto di quella retta, e le congiungenti vertici corrispondenti passeranno per uno stesso punto; i due quadrangoli diconsi *omologici*. (Caso particolare metrico: la retta sia all'infinito). Trasformare il teorema per dualità piana.

28) L'es. 27) permette di dare un'altra risoluzione (dovuta a LAMBERT) del problema: dato un parallelogramma, condurre per un punto la parallela a una retta data, servendosi della sola riga. Basta considerare il quadrangolo completo determinato da due vertici opposti del parallelogramma e dai punti all'infinito dei lati, e costruire un secondo quadrangolo, omologico a quello rispetto alla retta data, e di cui il punto dato sia un vertice.

29) Se si congiunge il punto di incontro M delle diagonali di un quadrangolo semplice $ABCD$ coi punti di incontro P e Q delle coppie di lati opposti, le due congiungenti segano ancora i lati del quadrangolo nei vertici di un nuovo quadrangolo, i cui lati opposti vanno ad incontrarsi nelle intersezioni della retta PQ colle diagonali del primo quadrangolo; (si dimostri in base all'es. 27), o col metodo della proiezione centrale).

30) Date tre rette a, b, c e tre punti allineali A', B', C', costruire un triangolo, i cui vertigi A, B, C appartengano ordinatamente alle tre rette date e i cui lati BC, CA, AB passino ordinatamente per i tre punti dati (es. 27)). Nel caso che le tre rette a, b, c passino per uno stesso punto, il problema generalmente non ammette soluzione; se ne ammette una, ne ammette infinite. Questione duale nel piano.

31) Se due tetraedri $ABCD$, $A'B'C'D'$, privi di elementi comuni, sono così riferiti che le rette congiungenti i vertici dell'uno coi corrispondenti vertici dell'altro passino per uno stesso punto, i punti e le rette intersezioni di spigoli e faccie corrispondenti stanno in uno stesso piano. Enunciare e dimostrare il teorema duale (nello spazio).

III. *Sul teorema di* PASCAL. — 32) Chiameremo *seilatero sghembo* la figura composta di sei rette a_1, a_2, $\ldots$ a_6, considerate nell'ordine scritto, non appartenenti tutte ad un piano, e tali che ciascuna incontri la successiva e l'ultima incontri la prima; il seilatero ha sei vertici $A_{12} \equiv a_1 a_2, \ldots$ e sei facce $\alpha_{12} \equiv a_1 a_2, \ldots$, ed è una figura duale di sè stessa. Ora si dimostri che, se in un seilatero sghembo ciascun lato (a_i) sega il lato opposto (a_{i+3}), allora le tre rette congiungenti coppie di vertici opposti $(A_{12} A_{45}, \ldots)$ passano per uno stesso punto, e le tre rette intersezioni di coppie di facce opposte $(\alpha_{12} \alpha_{45}, \ldots)$ stanno in uno stesso piano; (un seilatero si ottiene assumendo tre rette a_1, a_3, a_5, sghembe a due a due, e tre rette a_2, a_4, a_6 che seghino quelle).

33) Segando con un piano il seilatero dell'esercizio precedente, si ottiene un esagono in cui i punti intersezioni delle coppie di lati opposti appartengono ad una stessa retta (*esagono di* PASCAL); proiettando invece da un punto, sopra un piano, il seilatero stesso, si ottiene un seilatero piano in cui le rette congiungenti le coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto (*seilatero di* BRIANCHON).

34) Una applicazione notevole delle osservazioni precedenti si ottiene, ove si consideri la superficie (*iperboloide rotondo ad una falda*) generata da una retta

mobile a, la quale ruoti intorno ad una retta fissa o, sghemba con a ed invariabilmente collegata con essa. La superficie contiene infinite rette a, a_1, a_2, ..., successive posizioni di a, le quali sono sghembe a due a due. Siccome poi la superficie è simmetrica rispetto ad ogni piano π passante per l'*asse* o (come risulta ad es. dal notare che le sezioni di quella con piani normali ad o sono cerchi), segue che la superficie conterrà un secondo sistema di rette b, b_1, b_2, ..., pure sghembe a due a due, che sono simmetriche delle a, a_1, a_2, ... rispetto al piano π; e la superficie stessa può generarsi facendo ruotare intorno all'asse o una retta b. Una qualsiasi retta del primo sistema sega una qualsiasi retta del secondo sistema; per ogni punto della superficie passa una retta del primo ed una retta del secondo sistema. Tre rette del primo sistema e tre rette del secondo sistema possono riguardarsi come lati (rispett. primo, terzo, quinto; secondo, quarto, sesto) di un seilatero sghembo del tipo considerato nell'es. 32).

35) Segando la figura con un piano normale all'asse o, si deduce che «se un esagono è iscritto in un cerchio, le tre intersezioni delle tre coppie di lati opposti appartengono ad una retta» (teorema di PASCAL, dimostrazione di DANDELIN). Proiettando invece la figura sul detto piano da un punto dell'asse o (per es. dal punto all'infinito di o) si deduce: «se un seilatero è circoscritto ad un cerchio, le tre rette congiungenti le coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto» (teorema di BRIANCHON).

36) Se la stessa figura si sega con un piano contenente due rette della superficie (una del primo e l'altra del secondo sistema), si ha: «se un esagono ha i vertici di posto dispari sopra una retta e i vertici di posto pari sopra una seconda retta, i punti di incontro delle tre coppie di lati opposti appartengono ad una terza retta» (teorema di PAPPO; cfr. n. 23, es. 16)); mentre si ottiene il teorema duale nel piano, se la stessa figura si proietta da un punto della superficie sopra un piano arbitrario.

37) Un corollario metrico del teorema di PAPPO dice: «se in un trapezio, di cui AB e CD siano le basi, si congiungono i vertici A e C con un punto del lato BD, le parallele alle due congiungenti, condotte per D e B rispettivamente, si segheranno sopra AC». Ora questo corollario si dimostra facilmente coi mezzi della Geometria elementare; se ne deduca il teorema generale di PAPPO, ricorrendo alla proiezione centrale.

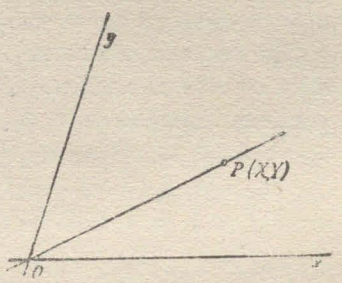
38) Del teorema di PAPPO e del suo duale si approfitti per dare nuove soluzioni dei problemi indicati negli es. 22) e 24).

127. Coordinate cartesiane omogenee nel piano. — Prima di passare alla ricerca di caratteri proiettivi delle figure, conviene esaminare quale influenza abbiano avuto, nello sviluppo della stessa geometria analitica elementare, i concetti di cui abbiamo discorso nel presente Capitolo.

Fermiamoci anzitutto sulla geometria piana e sulla nozione di punti all'infinito e retta all'infinito del piano. Ed osserviamo che, mentre le coordinate cartesiane permettono di individuare i singoli punti *propri* del piano, esse non si prestano a rappresentare i punti *impropri*. Se un punto va allontanandosi all'infinito sul piano, le sue cordinate cartesiane (in ge-

nerale) crescono senza limite in valore assoluto, e tendono a $\pm\infty$. Però al simbolo $(\pm\infty, \pm\infty)$ non corrisponde un sol punto, bensì tutti punti impropri del piano; per individuare un punto improprio, cioè una direzione, bisognerebbe conoscere il limite cui tende il rapporto $\frac{x}{y}$ delle due coordinate del punto mobile.

Ora, per ottenere nella geometria analitica la stessa generalità, che la geometria proiettiva raggiunge colla introduzione degli elementi impropri, conviene, in certe questioni, modificare il sistema delle coordinate cartesiane, in modo da renderlo atto a rappresentare anche questi nuovi elementi. Noi riusciremo allo scopo rappresentando i punti del piano, non più mediante coppie, bensì mediante terne di numeri (x, y, z), dei quali però interessano soltanto i mutui rapporti.



Tracciamo a tal fine i due assi cartesiani x, y; e supponiamo anzitutto che, di tre numeri dati x, y, z, il terzo z sia diverso da zero. Allora sono pienamente determinati i due rapporti

$$(1) \qquad X = \frac{x}{z}, \qquad Y = \frac{y}{z},$$

ed è quindi individuato quel punto *proprio* P che ha l'ascissa X e l'ordinata Y.[1] Viceversa, dato un punto proprio P, di coordinate cartesiane X, Y, si possono sempre scegliere tre numeri x, y, z $(z \neq 0)$, tali che sussistano le (1). Anzi questa scelta può farsi in infiniti modi; giacchè si può assumere la terna

$$x = X, \quad y = Y, \quad z = 1,$$

od ogni altra terna la quale si componga di numeri proporzionali a questi.

Cerchiamo ora di far corrispondere ad una terna di numeri, di cui il terzo numero sia nullo, un punto *improprio* del piano. Attribuiamo perciò ad x, y due valori arbitrari, purchè non entrambi nulli, ed a z un valore variabile, e per ora non nullo. Avremo in corrispondenza un punto proprio P, di coordinate cartesiane X, Y date dalle (1), il quale, al variare di z, si muove descrivendo una retta uscente dalla origine, la cui equazione è

$$(2) \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y}, \qquad (X, Y \text{ variabili})$$

[1] Nei numeri seguenti di questo Cap. indicheremo con lettere maiuscole, $X, Y \ldots$ le coordinate cartesiane ordinarie, riservando le lettere minuscole $x, y, z \ldots$ alle coordinate omogenee. Questa convenzione verrà abbandonata nel seguito, quando sia impossibile l'equivoco.

o meglio

$$(2') \qquad Xy - Yx = 0,$$

per comprendere anche il caso che la x o la y sia nulla. Ora, se z tende a zero, senza che mutino x ed y, i valori X, Y dati dalle (1) (od uno almeno di essi) vanno crescendo senza limite (in valore assoluto), ed il punto P va allontanandosi all'infinito lungo la retta (2). Siamo condotti perciò a far corrispondere alla terna di numeri $(x, y, 0)$ il punto all'infinito della retta (2). Viceversa, dato un punto improprio P_∞, lo si congiunga all'origine, e si scriva la equazione di questa retta sotto la forma (2), o (2'); saranno allora x, y due numeri noti, ai quali potrebbero pure sostituirsi due numeri proporzionali. I due numeri x, y (o due numeri proporzionali), insieme a 0, dànno una terna $(x, y, 0)$ che faremo corrispondere al punto P_∞. Riassumendo:

Segnati nel piano due assi cartesiani x, y, ad ogni gruppo di tre numeri x, y, z, non tutti nulli, corrisponde un unico punto P del piano; se $z \neq 0$, P è proprio ed ha per coordinate cartesiane $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$; se invece $z = 0$, P sta all'infinito sulla retta $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}$ (X, Y coordinate variabili). *Viceversa, un punto P corrisponde ad infinite terne di numeri; però da una di queste si ottengono tutte le altre, moltiplicando i tre numeri della terna per uno stesso fattore non nullo. Alla terna* (0, 0, 0) *non corrisponde alcun punto del piano.*

Tre numeri x, y, z, ai quali corrisponda un punto P nel modo detto, si chiamano *coordinate* (*cartesiane*) *omogenee* di P; la posizione di P dipende solo dai mutui rapporti delle coordinate omogenee.

Dalla definizione seguono subito alcune osservazioni.

Vi sono tre punti del piano, punti *fondamentali del sistema*, o vertici del *triangolo fondamentale*, che hanno nulle due coordinate omogenee, e la terza diversa da zero, ad es. uguale ad 1 (come si potrà sempre supporre); sono l'*origine* (0, 0, 1), il *punto all'infinito dell'asse* x (1, 0, 0), e *il punto all'infinito dell'asse* y (0, 1, 0). I punti, per cui una delle tre coordinate è nulla, costituiscono tre rette *fondamentali*, lati del triangolo fondamentale; precisamente, un punto $(0, y, z)$, sta sull'*asse* y, un punto $(x, 0, z)$ sull'*asse* x, ed un punto $(x, y, 0)$ sulla *retta all'infinito*. Vi è un punto (*punto unità*), le cui tre coordinate sono uguali fra loro, e possono assumersi uguali ad 1; è il punto (1, 1, 1) che ha le coordinate cartesiane $X = 1$, $Y = 1$. Il punto all'infinito della retta $X = Y$, congiungente il punto unità colla origine, ha le coordinate (1, 1, 0); ecc.

Come applicazione, cerchiamo le coordinate omogenee del punto all'infinito della retta

$$aX + bY + c = 0.$$

Quel punto appartiene pure alla parallela uscente dall'origine (n. 19)

$$aX + bY = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{X}{-b} = \frac{Y}{a},$$

ed ha quindi le coordinate uguali, o proporzionali, a $(-b, a, 0)$.

Nella ipotesi di assi ortogonali, queste coordinate sono proporzionali ai coseni di direzione della retta (n. 27).

Osservazione. — Noi riterremo estesa la definizione di coordinate omogenee anche al caso di punti immaginari; per un punto siffatto, uno almeno dei mutui rapporti delle tre coordinate x, y, z sarà un numero complesso.

Cerchiamo, ad es., le coordinate dei punti all'infinito delle rette isotrope uscenti da un punto qualsiasi (n. 39). Quei punti, centri dei due fasci impropri di rette isotrope, diconsi *punti ciclici* del piano. Ne riconosceremo presto la importanza.

Ricordando che le rette isotrope uscenti dall'origine hanno le equazioni (in coordinate ortogonali)

$$X \pm iY = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{X}{1} = \frac{Y}{\pm i},$$

concludiamo che i *punti ciclici del piano hanno, rispetto ad assi ortogonali, le coordinate omogenee*

$$(1, i, 0), \qquad (1, -i, 0).$$

128. Equazione omogenea di una retta. — Per trasformare in coordinate omogenee x, y, z la equazione cartesiana di una retta

$$aX + bY + c = 0, \tag{3}$$

si eseguiscano le sostituzioni (1) e si liberi da frazioni; così si ottiene la *equazione omogenea della retta*

$$ax + by + cz = 0. \tag{4}$$

Questa è soddisfatta, non solo dalle coordinate dei punti propri della retta, ma pure dalle coordinate $(-b, a, 0)$ del punto all'infinito della retta stessa. Il passaggio inverso, dalla (4) alla (3), si eseguisce dividendo i due membri della (4) per z e ricordando le (1).

Qui si noti che la equazione omogenea (4) ha senso anche quando due dei coefficienti sono nulli (non tutti e tre); ad es., se $a = b = 0$, la (4) si riduce a $z = 0$, che è soddisfatta dalle coordinate omogenee dei punti impropri: dunque *la equazione omogenea della retta all'infinito del piano* è $z = 0$; mentre questa retta non poteva rappresentarsi colle ordinarie coordinate cartesiane.

129. Equazione omogenea di una curva piana. — Le stesse sostituzioni (1), che abbiamo adoperato or ora, permettono di trasformare in coordinate omogenee l'equazione di una curva qualsiasi. Se, ad es., si tratta di una curva algebrica d'ordine n (n. 43)

$$\Sigma_{r,s} O_{r,s} X^r Y^s = 0 \qquad (r+s \leq n), \tag{5}$$

fatte le sostituzioni (1), converrà moltiplicare per z^n allo scopo di liberare da frazioni. Otteniamo così *la equazione omogenea della curva*

$$\Sigma_{r,s} O_{r,s} x^r y^s z^{n-r-s} = 0, \tag{6}$$

ciascun termine della quale ha il grado n. Viceversa, una equazione razionale, intera ed omogenea di grado n, com'è la (6), rappresenta una curva algebrica d'ordine n, la cui equazione cartesiana (5) si ottiene dividendo i due membri della (6) per z^n e ricordando le (1).

L'equazione omogenea di una curva è soddisfatta dalle coordinate (omogenee) dei punti propri ed *impropri* della curva, dei quali ultimi, nel nuovo sistema di coordinate, si riesce a tener conto.

Osservazione. — Applicando le cose dette al caso del cerchio, riferito ad assi ortogonali (n. 48), troviamo che esso ha una equazione omogenea del tipo

$$x^2 + y^2 + axz + byz + cz^2 = 0. \tag{7}$$

I punti all'infinito del cerchio hanno coordinate $(x, y, 0)$ soddisfacenti la (7), e quindi la

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{y}{x} = \pm i.$$

Segue che *ogni cerchio sega la retta all'infinito del piano nei punti ciclici* (n. 127, Oss.); notevole osservazione di PONCELET (1822), sopra cui dovremo ritornare in seguito.

***130. Coordinate di una retta nel piano.** — Al n. 123 noi abbiamo osservato che, nella geometria proiettiva piana, i punti e le rette si comportano in modo analogo, di guisa che, nelle proposizioni concernenti proprietà grafiche, è permesso lo scambio delle parole *punto* e *retta*. D'altra parte, nello stabilire la geometria analitica del piano, abbiamo trattato in modo diverso il punto e la retta; il punto fu rappresentato mediante un gruppo di numeri (coordinate), la retta invece mediante quella equazione lineare a cui soddisfano le coordinate dei singoli suoi punti. In tal modo la retta veniva considerata come descritta dal movimento di uno dei suoi punti, come sostegno di una punteggiata.

Proponendoci ora di operare sulle rette di un piano come finora abbiamo operato sui punti, dobbiamo cercare anzitutto il modo di individuare una retta mediante coordinate. A questo risultato si può esser condotti, o da considerazioni geometriche (notando, ad es., che per fissare una retta r nel piano basta conoscere i punti in cui r sega due rette fisse), oppure da considerazioni analitiche, ricorrendo alle nozioni finora acquistate. Seguiremo questa seconda via.

Fissati nel piano due assi cartesiani $x, y,$ noi sappiamo che ogni retta r può essere rappresentata da una equazione lineare ed omogenea

$$(1) \qquad ax + by + cz = 0,$$

o, ciò che fa lo stesso (eccettuata la retta all'infinito), dall'equazione

$$aX + bY + c = 0,$$

in coordinate cartesiane ordinarie. Dati tre numeri $a, b, c,$ dei quali uno almeno non nullo, è nota la equazione (1), e quindi la retta r corrispondente. Viceversa, data $r,$ si potrà scrivere una equazione che la rappresenti, sia la (1) ad esempio; ogni altra equazione della stessa retta si otterrà, come sappiamo (n. 20), dalla (1) moltiplicandone i tre coefficienti $a, b, c,$ per uno stesso fattore. Sicchè, data la retta $r,$ saranno determinati i tre numeri $a, b, c,$ o tre numeri ad essi proporzionali.

Ora una corrispondenza di questo tipo, tra ente geometrico e terna di numeri, ci si presentò nell'introdurre le *coordinate omogenee di un punto.* L'analogia ci porta ad assumere i tre numeri a, b, c suddetti come *coordinate omogenee della retta* $r.$

In conclusione: *noi chiamiamo coordinate omogenee di una retta, rispetto a due assi* $x, y,$ *tre numeri* a, b, c *tali che*

$$ax + by + cz = 0$$

sia l'equazione della retta in coordinate omogenee di punti, od

$$aX + bY + c = 0$$

l'equazione cartesiana della retta.

***131. Coordinate plückeriane.** — Le coordinate omogenee di una retta si sogliono indicare con $u, v, w.$ La retta da esse rappresentata ha dunque l'equazione

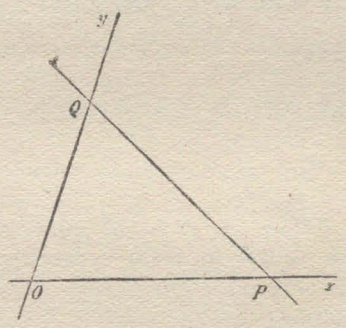
$$(1) \qquad ux + vy + wz = 0.$$

Le tre coordinate possono assumere valori arbitrari, purchè non tutti nulli; *alla terna* (0, 0, 0) ***non corrisponde nessuna retta.*** Se due coordinate

sono nulle (e la terza può quindi supporsi uguale ad 1), la retta è *fondamentale* nel sistema di coordinate. Precisamente:

le coordinate (1, 0, 0) spettano all'*asse delle y*,
» (0, 1, 0) » all'*asse delle x*,
» (0, 0, 1) » alla *retta all'infinito*.

Se una delle tre coordinate è nulla, la retta passa per uno dei tre punti fondamentali. Così: se è $w = 0$, la retta passa per l'origine; se $u = 0$, la retta è parallela all'asse x; e se $v = 0$, la retta è parallela all'asse y. Vi è una retta (*retta unità*), le cui tre coordinate sono uguali tra loro, e possono supporsi uguali ad 1; essa ha l'equazione cartesiana $X + Y + 1 = 0$; ecc.



Come le coordinate omogenee di un punto (x, y, z) non hanno significato geometrico, ma lo hanno i rapporti $X = \frac{x}{z}$, $Y = \frac{y}{z}$, così, non le coordinate omogenee di retta u, v, w, ma i rapporti $U = \frac{u}{w}$, $V = \frac{v}{w}$ hanno una interpretazione geometrica. E precisamente, poichè i due segmenti OP, OQ staccati dalla retta (1) sugli assi hanno i valori (n. 17)

$$OP = -\frac{w}{u}, \quad OQ = -\frac{w}{v},$$

segue che sarà

$$U = \frac{u}{w} = -\frac{1}{OP}, \qquad V = \frac{v}{w} = -\frac{1}{OQ}.$$

Dunque: *i rapporti delle due prime coordinate u, v di una retta alla terza w hanno valori inversi e contrari a quelli dei segmenti che la retta stacca sugli assi* (a partire dalla origine).

Si osserverà che la conoscenza dei due numeri U e V è già sufficiente, in generale, per individuare una retta del piano; perciò U e V possono riguardarsi come *coordinate non omogenee della retta*, o *coordinate plückeriane*, come si chiamano (in contrapposto a coordinate cartesiane) per riguardo al PLÜCKER, che primo introdusse (1828) le coordinate di una retta.[1]

Va però avvertito che le coordinate plückeriane non si prestano a rappresentare le singole rette passanti per l'origine; giacchè per ognuna

[1] Talvolta u, v, w si chiamano *coordinate plückeriane omogenee*.

di esse (eccettuati gli assi) si ha $U = \pm\infty$, $V = \pm\infty$. Questo fatto fa riscontro a quello relativo alle coordinate cartesiane ordinarie, le quali non sono atte a rappresentare i punti di una determinata retta (all'infinito).

*** 132. Equazione di un punto in coordinate di rette.** — Dire che una retta p ha le coordinate u, v, w equivale a dire che essa è rappresentata, in coordinate x, y, z di punti, dall'equazione

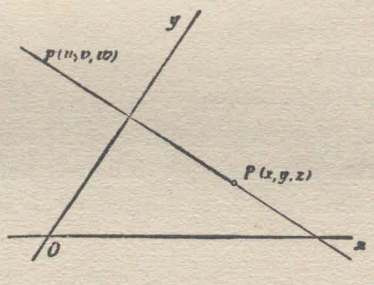
$$ux + vy + wz = 0. \tag{1}$$

Questa definizione si traduce subito nell'enunciato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il punto (x, y, z) stia sulla retta (u, v, w) è che si verifichi la relazione (1). In coordinate non omogenee, X, Y di punti, U, V di rette, la (1) diviene

$$UX + VY + 1 = 0. \tag{1'}$$

Ora la (1) contiene simmetricamente le coordinate di un punto $P\,(x, y, z)$ e di una retta $p\,(u, v, w)$, e dà luogo a due interpretazioni diverse, secondo che si fanno variare le une o le altre coordinate.



1) Se attribuiamo valori costanti ad u, v, w, e teniamo quindi fissa la retta p, ma lasciamo variare x, y, z, ad ogni terna di valori (x, y, z) soddisfacenti alla (1) corrisponde un punto P della retta p; in tale ipotesi, la (1) rappresenta la retta $p\,(u, v, w)$, *è la equazione, in coordinate di punti, della retta stessa*, la quale viene riguardata come sostegno di una punteggiata.

2) Se invece attribuiamo valori costanti ad x, y, z, tenendo fisso il punto P, ma lasciamo variare u, v, w, ad ogni terna di valori (u, v, w) soddisfacenti alla (1) corrisponde una retta p passante per il punto P; questa volta, dunque, la (1) ci rappresenta il fascio di rette che ha per centro il punto $P\,(x, y, z)$, è (come si suol dire) *la equazione, in coordinate di rette, del punto P*, riguardato come centro di un fascio.

Riassumendo:

Quando i punti si determinano mediante coordinate omogenee x, y, z, le rette vengono rappresentate da equazioni lineari ed omogenee in x, y, z; quando le rette si determinano mediante coordinate omogenee u, v, w, i punti vengono rappresentati da equazioni lineari ed omogenee in u, v, w.

*** 133. Problemi fondamentali su punti e rette in coordinate omogenee.** — L'analogia, che fin da ora si riscontra fra le coordinate omogenee di punto e di retta, ci si presenterà anche più spiccata trattando

in coordinate omogenee i problemi fondamentali sulla mutua posizione di punti e rette, problemi che già in gran parte abbiamo risolto mediante coordinate non omogenee di punti.

α) Se un punto muovendosi descrive una punteggiata p, le coordinate variabili (x, y, z) del punto soddisfano ad una equazione lineare ed omogenea,

$p)$ $\qquad ax + by + cz = 0,$

equazione della retta p (che ha per coordinate omogenee a, b, c).

β) Si abbia una seconda equazione lineare ed omogenea in x, y, z,

$p')$ $\qquad a'x + b'y + c'z = 0$

la quale rappresenti una seconda retta p' (a', b', c').

Determinare analiticamente il punto d'incontro delle rette p, p', vuol dire cercare una terna di valori, non tutti nulli, x, y, z (coordinate del punto pp') che verifichino le due equazioni lineari od omogenee $p), p')$.

α') Se una retta muovendosi descrive un fascio di rette di centro P, le coordinate variabili (u, v, w) della retta soddisfano ad una equazione lineare ed omogenea,

$P)$ $\qquad au + bv + cw = 0,$

equazione del punto P (che ha per coordinate omogenee a, b, c).

β') Si abbia una seconda equazione lineare ed omogenea in u, v, w,

$P')$ $\qquad a'u + b'v + c'w = 0,$

la quale rappresenti un secondo punto P' (a', b', c').

Determinare analiticamente la retta congiungente i due punti PP', vuol dire cercare una terna di valori non tutti nulli, u, v, w (coordinate della retta PP') che verifichino le due equazioni lineari ed omogenee $P), P')$.

Ora questi valori sono uguali, o proporzionali, ai tre determinanti

$$\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

estratti dalla matrice formata coi coefficienti delle due equazioni.[1]

Un caso eccezionale si presenta soltanto, quando i tre determinanti si annullano insieme; ma allora una delle due equazioni lineari è conseguenza dell'altra, e le due rette p e p', od i due punti P e P', coincidono. Ciò risulta pure osservando che allora si ha

$$a : b : c = a' : b' : c'$$

(a meno che non siano tutte nulle le a, b, c, o le a', b', c').

[1] I rapporti dei primi due determinanti al terzo dànno, nel problema di sinistra, le coordinate cartesiane X, Y del punto di incontro delle due rette $aX + bY + c = 0$, $a'X + b'Y + c' = 0$ (n. 19). La condizione di parallelismo è espressa dall'annullarsi del terzo determinante.

γ) Data una terza retta

p'') $\quad a''x + b''y + c''z = 0$

(di coordinate a'', b'', c''), *la condizione affinchè le tre rette* p, p', p'' *passino per uno stesso punto* è che esista una terna di valori x, y, z, non tutti nulli (coordinate del punto nominato), soddisfacenti alle tre equazioni p), p'), p''); è dunque *che sia nullo il determinante formato coi coefficienti delle equazioni delle tre rette, o* (ciò che fa lo stesso) *colle coordinate plückeriane omogenee delle rette;* ossia (cfr. n. 20)

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

E qui si noti che, se nella (1) si suppongono costanti gli elementi delle ultime due orizzontali e si lasciano variare gli elementi della prima orizzontale, l'equazione (1) rappresenta o il punto pp' in coordinate di rette a, b, c, oppure la retta PP' in coordinate di punti a, b, c.

δ) L'annullarsi del determinante (1), quando non siano tutti nulli i minori del secondo ordine estratti dalla matrice delle prime due orizzontali, per una osservazione già fatta porta l'esistenza di due numeri λ e μ tali da soddisfare le relazioni

$$(2) \qquad a'' = \lambda a + \mu a', \qquad b'' = \lambda b + \mu b', \qquad c'' = \lambda c + \mu c'.$$

Sostituendo questi binomi, al posto dei coefficienti, nelle equazioni p'') e P''), esse assumono le forme:

$$(3) \qquad \lambda (ax + by + cz) + \mu (a'x + b'y + c'z) = 0.$$

Dunque: *l'equazione* (in coordinate omogenee di punti) *di ogni retta appartenente al fascio* pp' *può scriversi come combinazione lineare delle equazioni delle due rette* p, p' (n. 20).

E si può anche dire che *le coordinate* (a'', b'', c'') *di una retta appartenente al fascio delle due rette* (a, b, c), (a', b', c') *possono esprimersi, in funzione delle coordinate di queste, mediante le relazioni* (2).

γ') Dato un terzo punto

P'') $\quad a''u + b''v + c''w = 0$

(di coordinate a'', b'', c''), *la condizione affinchè i tre punti* P, P', P'' *stiano in una stessa retta* è che esista una terna di valori u, v, w, non tutti nulli (coordinate della retta nominata), soddisfacenti alle tre equazioni P), P'), P''); è dunque *che sia nullo il determinante formato coi coefficienti delle equazioni dei tre punti, o* (ciò che fa lo stesso) *colle coordinate cartesiane omogenee dei tre punti;* ossia (cfr. n. 15)

$$(3') \qquad \lambda (au + bv + cw) + \mu (a'u + b'v + c'w) = 0.$$

Dunque: *l'equazione* (in coordinate omogenee di rette) *di ogni punto appartenente alla retta* PP' *può scriversi come combinazione lineare delle equazioni dei due punti* P, P'.

E si può anche dire che *le coordinate* (a'', b'', c'') *di un punto appartenente alla congiungente i due punti* (a, b, c), (a', b', c') *possono esprimersi, in funzione delle coordinate di questi, mediante le relazioni* (2).

ε) Date tre rette mediante le loro equazioni in coordinate di punti, la condizione perchè quelle formino fascio può anche esprimersi dicendo che deve esistere una conveniente combinazione lineare delle tre equazioni, la quale si riduca ad una identità (n. 21).

Se invece le tre rette non formano fascio, mediante una conveniente combinazione lineare delle loro equazioni si può rappresentare una quarta retta assegnata ad arbitrio nel piano (n. 22).

ε') Dati tre punti mediante le loro equazioni in coordinate di rette, la condizione perchè quelli siano allineati può anche esprimersi dicendo che deve esistere una conveniente combinazione lineare delle tre equazioni, la quale si riduca ad una identità.

Se invece i tre punti non sono allineati, mediante una conveniente combinazione lineare delle loro equazioni si può rappresentare un quarto punto assegnato ad arbitrio nel piano.

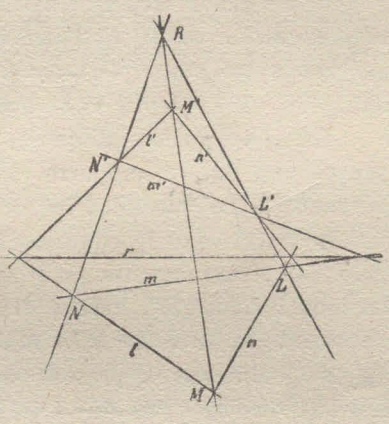
*** 134. Legge di dualità piana.** — L'ultimo paragrafo contiene una serie di procedimenti analitici, che possono ricevere una doppia interpretazione geometrica, secondo che le coordinate, ivi adoperate, si considerano come coordinate di punti, o coordinate di rette.

Ora si voglia studiare una proprietà *grafica* di una figura piana composta di n punti ed N rette. Per dimostrare analiticamente quella proprietà si potrà riferire la figura ad un sistema di coordinate omogenee di punti; si rappresenteranno dunque gli n punti mediante n terne di numeri, e le N rette mediante N equazioni lineari ed omogenee in coordinate di punti; ed applicando in un ordine conveniente i risultati del numero precedente, si dimostrerà che la relazione analitica, in cui si traduce la tesi dell'enunciato, può dedursi algebricamente dalle relazioni traducenti la ipotesi.

Giunti però alla fine della dimostrazione, noi possiamo rileggere tutte le formole scritte, in modo diverso, interpretando ora le coordinate introdotte, non più come coordinate di punti, bensì come coordinate di rette. In tale ipotesi, le n terne di numeri sopra nominate rappresentano n *rette*, e le N equazioni lineari rappresentano N *punti*. I passaggi analitici continueranno a sussistere; però l'interpretazione geometrica del risultato non ci darà più il teorema da cui siamo partiti; ma invece quel teorema in cui il primitivo si muta quando si scambino tra loro nell'enunciato le parole *punto* e *retta* di un piano, *punteggiata* e *fascio di rette*. L'osservazione qui fatta, secondo cui la dimostrazione analitica di un certo teorema, interpretata in un altro modo, ci dà la dimostrazione del teorema duale, giustifica pienamente la *legge di dualità del piano: Da ogni proposizione grafica di geometria piana si può dedurne un'altra* (in generale diversa dalla prima) *mediante lo scambio delle parole punto e retta.*

E qui si noti che, per applicare la legge di dualità ad un teorema, non occorre nemmeno che il teorema sia dimostrato analiticamente, ma basta sapere che il teorema sussiste, e che le ipotesi e la tesi di esso possono tradursi analiticamente coi mezzi di cui si parla nel numero precedente. Infatti, dovendo la tesi esser conseguenza delle ipotesi, si è sicuri che il teorema può dimostrarsi per via analitica coi mezzi nominati; e ciò è sufficiente per il nostro scopo.

*** 135. Dimostrazione analitica del teorema dei triangoli omologici.** — Per render più chiare, con un esempio, le considerazioni dell'ultimo numero, esporremo qui una dimostrazione analitica di un notevolissimo teorema dovuto a DESARGUES (1639).



Il teorema si spezza in due proposizioni mutuamente duali, che chiameremo *a*) e *b*) (cfr. n. 126, es. 14), 15)).

a) *Se due triangoli situati in un piano sono così riferiti, che i lati dell'uno scghino i corrispondenti lati dell'altro in tre punti di una stessa retta, le rette congiungenti i vertici dell'uno coi corrispondenti vertici dell'altro passano per uno stesso punto.* (Due triangoli, che si trovino nella relazione indicata, diconsi *omologici;* quella retta è l'*asse di omologia*, e questo punto è il *centro di omologia*).

Riferiamo i due triangoli LMN, $L'M'N'$ ad un sistema di *coordinate omogenee di punti.* I lati l, m, n del primo triangolo avranno tre equazioni lineari, che potremo indicare brevemente con

$$(1) \qquad l = 0, \qquad m = 0, \qquad n = 0.$$

Se poi

$$(2) \qquad r = 0$$

è la equazione della retta su cui si segano i lati omologhi dei due triangoli, le equazioni dei lati l', m', n' del secondo triangolo potranno scriversi sotto la forma

$$(3) \qquad r + \lambda l = 0, \qquad r + \mu m = 0, \qquad r + \nu n = 0,$$

dove λ, μ, ν sono certi parametri.

Ora, per procurarci le equazioni delle rette congiungenti vertici omologhi, osserviamo che, se dalla seconda delle equazioni (3) si sottrae membro a membro la terza, si ottiene l'equazione $\mu m - \nu n = 0$, la quale

pel modo come fu ricavata, rappresenta una retta passante per il vertice $m' n' \equiv L'$; ma poichè quella equazione è pure una combinazione lineare di $m = 0$, $n = 0$, la retta stessa passerà anche pel punto $mn \equiv L$. Dunque le rette LL', MM', NN' hanno rispettivamente le equazioni

$$(4) \qquad \mu m - \nu n = 0, \qquad \nu n - \lambda l = 0, \qquad \lambda l - \mu m = 0.$$

Ora le (4), sommate membro a membro, dànno una identità; si conchiude dunque (n. 133, ε)) che *le rette LL', MM', NN' passano per uno stesso punto;* e con ciò rimane dimostrata la prima parte del teorema dei triangoli omologici.

b) *Se due triangoli situati in un piano sono così riferiti, che le rette congiungenti i vertici dell'uno coi corrispondenti vertici dell'altro passino per uno stesso punto, le intersezioni dei lati dell'uno coi corrispondenti lati dell'altro stanno sopra una stessa retta.*

La dimostrazione di questa seconda parte del teorema si ottiene dalla precedente, pur di supporre che le equazioni scritte abbreviatamente contengano, come variabili, le *coordinate di rette*, anzichè quelle di punti. Allora le (1) sono le equazioni di tre punti L, M, N, vertici di un triangolo, la (2) rappresenta pure un punto R, e le (3) rappresentano altri tre tre punti L', M', N', vertici di un secondo triangolo, i quali stanno ordinatamente sulle rette RL, RM, RN (n. 133, δ)), d'accordo colla ipotesi. Le (4) finalmente rappresentano, come è facile vedere, i punti d'incontro dei lati omologhi dei due triangoli; dal fatto che le (4), sommate membro a membro, forniscono una identità si conclude questa volta (n. 133, ε')) che *i tre punti ora nominati stanno sopra una stessa retta*, c. d. d.

*** 136. Inviluppo di rette.** — Il concetto di curva piana, considerata come luogo dei punti soddisfacenti ad una data legge, si muta, per dualità piana, nel concetto di *inviluppo di rette*, costituito da tutte le rette di un piano che soddisfano ad una condizione assegnata.

La dualità si riscontra anche nella rappresentazione analitica. Adoperando, per semplicità, coordinate plückeriane (non omogenee) U, V di una retta, la equazione

$$(1) \qquad f(U, V) = 0$$

rappresenta *l'inviluppo formato da tutte le rette che colle loro coordinate soddisfano all'equazione* (1); la quale vien detta *equazione* dell'inviluppo (cfr. n. 40). Gli inviluppi possono classificarsi secondo la natura delle loro equazioni in coordinate plückeriane. Diremo dunque *algebrico*, o *trascendente*, un inviluppo, secondo che algebrica, o trascendente, è la equazione rappresentativa; e, nel primo caso, chiameremo *classe* dell'inviluppo il grado della equazione algebrica (razionale, intera) di esso. *Gli inviluppi di prima*

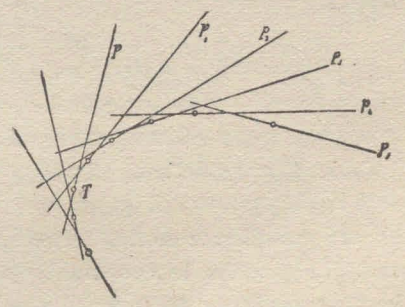
classe sono i fasci di rette, o, come si suol dire, *i punti*, riguardati come centri di fasci (n. 132). Fra gli inviluppi di seconda classe si trova il sistema delle tangenti ad un cerchio, di cui il lettore potrà subito scrivere la equazione, noto il centro ed il raggio del cerchio; ed, in generale, vedremo che le tangenti ad una curva del secondo ordine costituiscono un inviluppo di seconda classe.

La nozione di *classe* di un inviluppo algebrico corrisponde, per dualità piana, alla nozione di *ordine* di una curva algebrica; le curve piane d'ordine n hanno come enti duali gli inviluppi di rette di classe n. Lo stesso procedimento algebrico che ci ha condotto a scoprire il significato geometrico dell'ordine di una curva (n. 45), ci fornisce (interpretato nel modo duale) il significato della classe di un inviluppo: *la classe di un inviluppo algebrico è il numero delle rette dell'inviluppo che passano per un punto generico del piano*, purchè si contino convenientemente le soluzioni coincidenti, immaginarie...

137. Punti di contatto di un inviluppo. — Alla nozione di inviluppo di rette si giunge d'ordinario per quest'altra via, che ne fornisce una immagine più perspicua.

Si parta da una curva piana, e si conducano le tangenti nei singoli suoi punti (n. 47); queste costituiscono appunto un inviluppo di rette.

La costruzione, d'altra parte, si può invertire, pur di introdurre il concetto di *punto di contatto di un inviluppo*, che corrisponde per dualità al concetto di tangente ad una curva. Supposto che un inviluppo venga descritto da una retta muoventesi con continuità, si consideri una posizione p della retta, e sia p_1 una nuova posizione della retta stessa. Mentre la retta p_1, descrivendo l'inviluppo, va avvicinandosi indefinitamente alla p, il punto pp_1 va scorrendo lungo la p; se esso tende ad una posizione limite T,



si dirà che T è il *punto di contatto* della retta p, appartenente all'inviluppo. E l'equazione del punto T in coordinate di rette si potrebbe ritrovare, partendo dalla equazione dell'inviluppo, collo stesso procedimento analitico che dà, in coordinate di punti, la equazione della tangente ad una curva.

I punti di contatto delle infinite rette di un inviluppo costituiscono generalmente una curva. Ora l'intuizione suggerisce, ed il calcolo infinitesimale dimostra, che (sotto certe restrizioni verificate nei casi più comuni) la curva dei punti di contatto ha precisamente come tangenti le

rette dell'inviluppo (ciascuna retta toccando la curva nel proprio punto di contatto). Riunendo queste varie osservazioni, possiamo dire:

Le tangenti ad una curva piana costituiscono generalmente un inviluppo di rette, i cui punti di contatto sono i punti della curva primitiva.

I punti di contatto di un inviluppo di rette costituiscono generalmente una curva piana, le cui tangenti sono le rette dell'inviluppo primitivo.

Segue di qua che ad una curva è associato un determinato inviluppo, e viceversa; ma non sarebbe esatto dire, in generale, che quella curva e quell'inviluppo si corrispondono per dualità.[1]

138. Coordinate cartesiane omogenee nello spazio. — La estensione dei concetti precedenti allo spazio è così immediata, che possiamo limitarci a brevi osservazioni.

Le coordinate cartesiane ordinarie non si prestano a rappresentare i punti impropri dello spazio. Per ovviare a tale inconveniente basta *associare ad ogni punto P un gruppo di quattro numeri x, y, z, t, detti coordinate cartesiane omogenee, e tali che, se $t \neq 0$, il punto P ha le coordinate cartesiane ordinarie*

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t}; \tag{1}$$

e, se $t = 0$, il punto P è all'infinito sulla retta

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} \qquad (X, Y, Z \text{ variabili}). \tag{2}$$

Il punto P è determinato quando ne siano note le coordinate omogenee (purchè non tutte nulle), mentre, dato P, le coordinate sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità.

Se si considera il *tetraedro fondamentale* costituito dai piani coordinati e dal piano all'infinito, si vedrà subito che ciascun vertice di esso ha tre coordinate nulle, mentre la rimanente può prendersi uguale ad 1; così l'origine ha le coordinate (0, 0, 0, 1), il punto all'infinito dell'asse x ha le coordinate (1, 0, 0, 0), ecc. Per un punto situato sopra uno spigolo del tetraedro due coordinate sono nulle; per un punto di una faccia è nulla una coordinata; ecc.

Per fare una applicazione delle cose dette, si noti che il punto all'infinito della retta

$$\frac{X - X'}{l} = \frac{Y - Y'}{m} = \frac{Z - Z'}{n}, \tag{3}$$

[1] Ad es., si dimostra che le tangenti ad una curva generale d'ordine n formano un inviluppo di classe $n(n-1)$, mentre la curva primitiva ha come ente duale un inviluppo di classe n.

o della parallela

$$\frac{X}{l}=\frac{Y}{m}=\frac{Z}{n},$$

ha le coordinate omogenee $(l, m, n, 0)$. Ed il punto all'infinito della retta

$$X = lZ + p, \qquad Y = mZ + q$$

ha le coordinate $(l, m, 1, 0)$. Donde l'osservazione, spesso utile, che, *in assi ortogonali, le prime tre coordinate omogenee di un punto all'infinito sono proporzionali ai coseni della direzione che quel punto definisce* (la quarta coordinata essendo nulla) (n. 90).

Il piano, che in coordinate cartesiane ha l'equazione

$$aX + bY + cZ + d = 0, \tag{4}$$

in coordinate omogenee è rappresentato da

$$ax + by + cz + dt = 0, \tag{4'}$$

equazione soddisfatta dalle coordinate dei punti propri ed impropri del piano. L'ultima equazione (ma non la precedente) ha significato anche se $a = b = c = 0$, $d \neq 0$, e rappresenta allora il *piano all'infinito*, $t = 0$.

Una superficie algebrica d'ordine n è rappresentata, in coordinate omogenee, da una equazione algebrica, razionale, intera ed *omogenea* di grado n, che si ricava dalla equazione cartesiana mediante le sostituzioni (1).

Osservazione. — Sebbene si preferisca d'ordinario, nella geometria analitica, far uso di coordinate cartesiane non omogenee, giova tuttavia tener presenti le considerazioni che precedono, allo scopo di ritrovare, nel modo più rapido, alcune formole di uso continuo. Infatti le coordinate omogenee permettono di ricondurre alla nozione fondamentale di *appartenenza*, le relazioni di parallelismo fra rette o piani dello spazio. Così la condizione, già trovata (n. 83), affinchè la retta (3) sia parallela al piano (4) si ricostruisce subito, esprimendo che le coordinate $(l, m, n, 0)$ del punto all'infinito della retta soddisfano all'equazione omogenea (4') del piano; si ha infatti

$$al + bm + cn = 0.$$

*** 139. Coordinate di piani. Equazione di un punto.** — *Si chiamano coordinate omogenee di un piano quattro numeri u, v, w, r, tali che*

$$ux + vy + wz + rt = 0 \tag{1}$$

sia l'equazione del piano in coordinate omogenee di punti, (o

$$uX + vY + wZ + r = 0.$$

l'equazione cartesiana del piano).

Date le coordinate omogenee (non tutte nulle) di un piano, questo è determinato, mentre, dato il piano, le sue coordinate sono note a meno

BIBLIOTECA NACIONAL DE MAESTROS

di un fattore di proporzionalità. Non esse, ma i loro mutui rapporti hanno significati geometrici. Precisamente *i rapporti*

$$U = \frac{u}{r}, \quad V = \frac{v}{r}, \quad W = \frac{w}{r}$$

(che diconsi *coordinate plückeriane*, o *coordinate non omogenee* del piano) *esprimono i valori inversi, e cambiati di segno, dei segmenti che il piano stacca sugli assi coordinati, a partire dall'origine* (cfr. n. 131).

La (1) può anche riguardarsi come *la condizione perchè il punto* P (x, y, z, t) *ed il piano* π (u, v, w, r) *si appartengano.*

Se nella (1) attribuiamo valori costanti alle u, v, w, r, e lasciamo variare x, y, z, t, il punto P descrive il piano π, per la qual ragione la (1), in questa ipotesi, si chiama appunto *l'equazione* (in coordinate di punti) *del piano punteggiato* π. Ma se invece, nella (1), teniamo fisse x, y, z, t, e facciamo variare u, v, w, r, il piano π si muove in modo da passare sempre per il punto fisso $P(x, y, z, t)$, e descrive la stella di piani P; riguardata sotto questo aspetto, *la equazione* (1), in coordinate di piani, *rappresenta una stella di piani, o,* come si suol dire, *il punto P, che ne è centro.* Mentre un punto, in coordinate puntuali, vien definito mediante un gruppo di (tre o quattro) numeri, ed il piano è rappresentato da una equazione lineare, accade, in coordinate di piani, che il piano venga determinato mediante un gruppo (di tre o quattro) numeri, ed il punto mediante una equazione lineare (cfr. n. 132).

Appare così sin d'ora, anche nella trattazione analitica, quella perfetta analogia, *dualità*, fra le relazioni grafiche di punti e le relazioni grafiche di piani nello spazio, che le considerazioni sintetiche ci avevano lasciato prevedere (n. 123).

Per mettere in rilievo questa dualità analitica bastano le osservazioni seguenti.

a) Si abbiano due equazioni lineari in coordinate di piani

$$(2) \qquad \begin{cases} au + bv + cw + dr = 0, \\ a'u + b'v + c'w + d'r = 0, \end{cases}$$

rappresentanti staccatamente due punti $P\,(a, b, c, d)$, $P'\,(a', b', c', d')$. Ogni gruppo di coordinate (u, v, w, r), che soddisfi entrambe le equazioni (2), determina un piano che passa per i punti P, P' e quindi per la retta PP'. *In coordinate di piani, una retta* (riguardata come asse di un fascio di piani) *vien rappresentata da due equazioni lineari, le quali, separatamente, definiscono due punti della retta* (cfr., per la considerazione duale, il n. 80).

Una combinazione lineare delle equazioni (2),

$$\lambda\,(au + \ldots) + \mu\,(a'u + \ldots) = 0,$$

rappresenta un punto P'' $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b', \lambda c + \mu c, \lambda d + \mu d')$ della retta PP'. Riunendo questo fatto col duale che risulta dal n. 79, abbiamo:

Ogni punto della retta congiungente due punti

$P\,(a, b, c, d)$, $P'\,(a', b', c', d')$

ha coordinate del tipo

$(\lambda a + \mu a', \ldots, \lambda d + \mu d')$.

Ogni piano per la retta intersezione dei due piani

$\pi\,(a, b, c, d)$, $\pi'\,(a', b' c' d')$

ha coordinate del tipo

$(\lambda a + \mu a', \ldots, \lambda d + \mu d')$.

b) Date tre equazioni lineari ed omogenee in u, v, w, r,

$$au + \ldots = 0, \qquad a'u + \ldots = 0, \qquad a''u + \ldots = 0,$$

rappresentanti tre punti, il problema analitico di trovare un sistema di valori, non tutti nulli (u, v, w, r), soddisfacente alle tre equazioni, si traduce nel problema geometrico di costruire il piano contenente i tre punti. Ogni combinazione lineare

$$\lambda\,(au + \ldots) + \mu\,(a'u + \ldots) + \nu\,(a''u + \ldots) = 0$$

delle tre equazioni rappresenta un ulteriore punto di quel piano; donde l'enunciato di sinistra (cfr. n. 82):

Ogni punto del piano congiungente tre punti (a, b, c, d), (a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d'') *ha coordinate del tipo*

Ogni piano per il punto intersezione di tre piani (a, b, c, d), (a', b', c', d'), (a'', b'', c'', d'') *ha coordinate del tipo*

$$(\lambda a + \mu a' + \nu a'', \ldots, \lambda d + \mu d' + \nu d'').$$

c) In breve, ogni procedimento analitico atto a dimostrare, col mezzo delle coordinate, una proprietà grafica di punti, rette e piani dello spazio, può ricevere una doppia interpretazione, secondo che le coordinate di cui vien fatto uso si riguardano come coordinate di punti, o coordinate di piani. Le due interpretazioni conducono a due risultati, i cui enunciati si ottengono l'uno dall'altro collo scambio delle parole *punto* e *piano*, lasciando inalterata la parola *retta*.

Si ha qui una giustificazione analitica della *legge di dualità nello spazio*, la quale appunto autorizza il suddetto scambio di parole negli enunciati delle proprietà grafiche (n. 123; cfr. n. 134).

***140. Inviluppi di piani.** — Il concetto *luogo di punti* nello spazio si trasforma, per dualità, nel concetto di *inviluppo di piani*, ente costituito dai piani soddisfacenti ad una legge assegnata. Un inviluppo di piani si rappresenta mediante una o più equazioni in coordinate di piani, ad esem-

pio non omogenee, U, V, W; ed è formato da quei piani che colle loro coordinate soddisfano alle equazioni nominate.

Come si distinguono luoghi di punti *semplicemente infiniti* o *curve*, e luoghi *doppiamente infiniti* o *superficie*, così si dovranno considerare inviluppi di piani *semplicemente* e *doppiamente infiniti*.

a) Un inviluppo doppiamente infinito si compone dei piani soddisfacenti, colle loro coordinate, ad *una* equazione $f(U, V, W) = 0$. L'inviluppo dicesi *algebrico*, *di classe n*, se la equazione è algebrica (razionale, intera) di grado n. Gli inviluppi doppiamente infiniti di prima classe sono le stelle di piani, o, se si vuole, i punti, considerati come sostegni degli infiniti piani passanti per essi (n. 139). Tra gli inviluppi doppiamente infiniti di seconda classe si trova (come il lettore vedrà facilmente) l'insieme dei piani tangenti ad una data sfera.

Un inviluppo doppiamente infinito (algebrico o trascendente) è pure costituito dai piani che toccano una data curva piana (algebrica o trascendente), vale a dire che passano per le singole tangenti alla curva. Quell'inviluppo si compone di infiniti fasci di piani, i cui assi stanno in un piano σ, e corrisponde, per dualità, ad una superficie costituita da infinite rette punteggiate uscenti da un punto S, vale a dire ad un cono di vertice S.[1]

b) Un inviluppo semplicemente infinito di piani è, in linea generale, costituito dai piani comuni a due inviluppi doppiamente infiniti, e si rappresenta mediante le equazioni $f(U, V, W) = 0$, $\varphi(U, V, W) = 0$ di questi. Così ad es., i piani di un fascio costituiscono un inviluppo semplicemente infinito, rappresentato da due equazioni lineari in U, V, W (n. 139); i piani passanti per un punto e tangenti ad una sfera formano pure un inviluppo semplicemente infinito, rappresentato da una equazione lineare e da una (particolare) equazione quadratica in U, V, W. I piani proiettanti da un punto le tangenti ad una curva piana appartengono ad un inviluppo semplicemente infinito (inviluppo *conico* di piani), che corrisponde, per dualità nello spazio, ad una curva piana considerata come luogo di punti.

Queste poche nozioni bastano per il seguito, ove incontreremo soltanto inviluppi doppiamente infiniti di seconda classe.

Esercizi. — 1) Qual'è (in geometria piana) la distanza del punto $P(X, Y)$ dalla retta (U, V)? Qual'è l'angolo delle due rette (U, V), (U', V')? Questioni analoghe relative a punti e piani dello spazio.

---

[1] Come un cono di vertice $O(X = 0, Y = 0, Z = 0)$ è rappresentato, in coordinate cartesiane, da un'equazione omogenea in X, Y, Z (n. 42), così l'inviluppo dei piani che toccano una curva giacente sul piano all'infinito $(U = 0, V = 0, W = 0)$, è rappresentato da un'equazione omogenea in U, V, W.

2) Se una retta (U, V) si muove in un piano in guisa che la sua distanza da un punto fisso $C(\alpha, \beta)$ rimanga costante, $= r$, essa inviluppa un cerchio; si deduca di qua l'equazione dell'inviluppo formato dalle tangenti a un cerchio, la quale può scriversi sotto la forma

$$U^2 + V^2 - \frac{P^2}{r^2} = 0,$$

dove $P \equiv U\alpha + V\beta + 1 = 0$ è l'equazione plückeriana del centro. Questione analoga relativa all'inviluppo dei piani tangenti ad una sfera.

3) Siano dati in un piano n punti A_i ed n numeri p_i $(i = 1, 2 \ldots n)$; una retta, la quale si muova in guisa che sia costante la somma delle distanze da essa dei punti A_i, moltiplicate rispettivamente per i numeri p_i, descrive l'inviluppo delle tangenti ad un cerchio, avente il centro nel baricentro dei punti A_i presi coi pesi p_i; l'inviluppo si riduce ad un fascio se quella somma è nulla. Caso particolare in cui $\Sigma p_i = 0$. Questione analoga nello spazio, sostituendo alla retta mobile un piano mobile.

4) Una retta si muove in un piano in modo che il segmento intercettato su di essa dai due assi coordinati ortogonali si mantenga costante; equazione del l'inviluppo che essa descrive (cfr. n. 70, es. 8)).

Capitolo II.

Il birapporto di quattro elementi.

141. Rapporto semplice di tre elementi. — In questo capitolo ci proponiamo la ricerca di una espressione formata colle mutue distanze di più punti di una retta, espressione che goda *carattere proiettivo* (n. 126), cioè che non muti valore quando ai punti nominati si sostituiscano le loro proiezioni sopra una seconda retta arbitraria da un centro arbitrario. Tale proprietà non gode certo la distanza di due punti, nè il rapporto semplice di tre punti (n. 6), giacchè quella e questo vengono alterati in generale da una proiezione. Però, mediante rapporti semplici, riusciremo a costruire l'espressione richiesta.

Ricordiamo anzitutto che il rapporto semplice di tre punti A, B, C di una retta, che ora indicheremo con $(A\ B\ C)$, è definito dalla uguaglianza

$$(1) \qquad (A\,B\,C) = \frac{AC}{BC},$$

ed ha, per ogni posizione di C (fermi restando i punti propri A, B), un determinato valore. Possiamo attribuire a quel rapporto un valore anche nell'ipotesi che C sia il punto all'infinito della retta. Basta osservare che

$\frac{AC}{BC} = 1 + \frac{AB}{BC}$ tende ad 1 quando C va allontanandosi indefinitamente da B, e porre, per convenzione, $(A\,B\,C_\infty) = 1$.

Introduciamo ora per tre rette (o piani) di un fascio una espressione che ha stretta analogia colla precedente, e porta lo stesso nome. Date tre rette a, b, c di un fascio, sulle quali siano fissati arbitrariamente i versi positivi, dicesi *rapporto semplice delle tre rette* l'espressione

$$(2) \qquad (a\,b\,c) = \frac{\operatorname{sen} ac}{\operatorname{sen} bc}.$$

Si vede subito che, per ogni posizione di c nel fascio, a e b restando fisse, il rapporto semplice ha un determinato valore. In particolare, $(a\,b\,c)$ vale 0 se c coincide con a, vale $\pm\infty$ se c coincide con b, è negativo se c si trova nell'angolo formato da due semirette a, b aventi lo stesso segno, è positivo nel caso opposto, vale ± 1 quando c coincide colla bisettrice del primo o secondo angolo.

Si dimostra poi facilmente che, date le rette a, b coi rispettivi versi, e dato il valore r del rapporto semplice che esse formano con una terza retta c, questa è completamente determinata (fatta astrazione dal verso, che non ha influenza sul segno del rapporto semplice; n. 10).

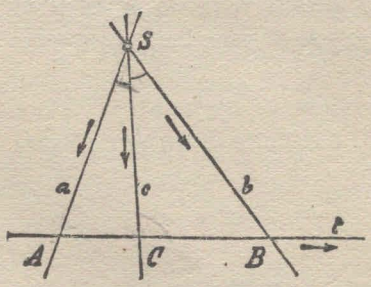
Si avverta che la definizione (2) si riferisce al caso del fascio proprio. Se il fascio è improprio, porremo

$$(2') \qquad (a\,b\,c) = \frac{\operatorname{dist} ac}{\operatorname{dist} bc},$$

dove dist ac, dist bc sono le mutue distanze delle tre rette parallele, misurate sopra una perpendicolare comune, su cui sia fissato il verso positivo. Le considerazioni precedenti si estendono a questa ipotesi con lievi ed evidenti modificazioni.

È poi immediata l'estensione al fascio di piani.

142. Relazione fra i rapporti semplici di tre elementi nella punteggiata e nel fascio di rette. — Se tre punti A, B, C di una retta propria t si proiettano da un centro S (esterno a t), si ottengono tre rette a, b, c di un fascio; quale relazione passa fra i rapporti semplici $(A\,B\,C)$ ed $(a\,b\,c)$?



Fissati ad arbitrio i versi positivi sulle rette a, b, c, t, dall'esame dei due triangoli SAC, SBC seguono le relazioni, valide anche nei segni (n. 10, Oss.),

$$\frac{AC}{SA} = \frac{\operatorname{sen} ac}{\operatorname{sen} ct}, \qquad \frac{BC}{SB} = \frac{\operatorname{sen} bc}{\operatorname{sen} ct}.$$

Dividendo queste due membro a membro, e adoperando i simboli sopra definiti, si ha

$$(3) \qquad (A\,B\,C) = \frac{SA}{SB}(a\,b\,c).$$

La dimostrazione è relativa alle ipotesi che A, B, C ed S siano punti propri. Ora A e B debbono esserlo, per la stessa definizione di rapporto semplice. Se C è improprio e quindi $(A\,B\,C) = 1$, si verifica direttamente che la (3) sussiste ancora. Se finalmente S è improprio, la (3) va sostituita dalla

$$(3') \qquad (A\,B\,C) = (a\,b\,c),$$

che si giustifica subito ricordando le definizioni, e tenendo presente il teorema sulle trasversali a rette parallele.

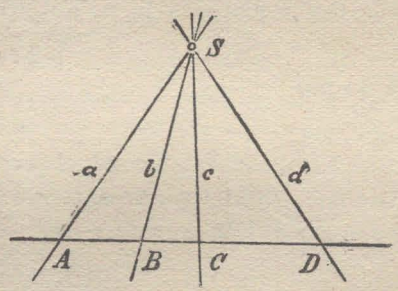
143. Birapporto di quattro elementi. — La relazione (3) ci dice che, se il punto C varia sulla retta t, e varia in corrispondenza la retta proiettante c del fascio S, i due rapporti semplici $(A\,B\,C)$, $(a\,b\,c)$ variano proporzionalnente. Se dunque fissiamo un quarto punto D sulla t, e chiamiamo d la retta SD, abbiamo

$$(A\,B\,D) = \frac{SA}{SB}(a\,b\,d).$$

Dividendo membro a membro la (3) per quest'ultima, otteniamo

$$(4) \qquad \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)} = \frac{(a\,b\,c)}{(a\,b\,d)}.$$

Le espressioni che compariscono in questa formola hanno ricevuto, per la loro importanza, un nome speciale. *Dati sopra una forma di prima specie quattro elementi, si chiama birapporto, o doppio rapporto* (MÖBIUS, 1827), *o rapporto anarmonico* (CHASLES, 1837) *degli elementi stessi, il quoziente ottenuto dividendo il rapporto semplice dei primi tre per il rapporto semplice del primo, secondo e quarto.*



Il birapporto si indica scrivendo ordinatamente i simboli dei quattro elementi tra parentesi; sarà dunque:

sulla punteggiata $$(A\,B\,C\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

nel fascio di rette $$(a\,b\,c\,d) = \frac{(a\,b\,c)}{(a\,b\,d)} = \frac{\operatorname{sen} ac}{\operatorname{sen} bc} : \frac{\operatorname{sen} ad}{\operatorname{sen} bd},$$

nel fascio di piani $$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = \frac{(\alpha\,\beta\,\gamma)}{(\alpha\,\beta\,\delta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha\gamma}{\operatorname{sen} \beta\gamma} : \frac{\operatorname{sen} \alpha\delta}{\operatorname{sen} \beta\delta},$$

(coll'avvertenza che nelle due ultime relazioni, al posto di *sen*, va scritto *dist*, quando si tratti di fascio improprio).

Con queste notazioni la (4) può scriversi

$$(A\,B\,C\,D) = (a\,b\,c\,d),$$

e dà luogo all'importante teorema:

Il birapporto di quattro rette di un fascio è uguale al birapporto dei quattro punti in cui le rette sono segate da una trasversale qualsiasi, che non passi pel centro.

Di qua, tenendo fisse le quattro rette e variando la trasversale, oppure tenendo fissi i quattro punti e variando il centro di proiezione, si ottengono i due corollari seguenti, di cui il primo era noto a PAPPO (IV secolo dopo C.):

Quattro rette di un fascio sono segate da una trasversale qualsiasi in quattro punti, il cui birapporto rimane costante al variare della trasversale.

Quattro punti di una retta sono proiettati da un centro qualsiasi mediante quattro rette, il cui birapporto rimane costante al variare del centro di proiezione.

Mettiamo ora in relazione quattro piani α, β, γ, δ di un fascio coi quattro elementi in cui vengono segati da un piano o da una retta. Supposto anzitutto il piano secante π normale ai quattro piani, e dette a, b, c, d le rette sezioni, appartenenti ad un fascio, si ha per definizione

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = (a\,b\,c\,d).$$

Segando ora le quattro rette, e quindi i quattro piani, con una trasversale t giacente in π, e detti A, B, C, D i punti sezioni, sarà

$$(a\,b\,c\,d) = (A\,B\,C\,D),$$

e quindi

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = (A\,B\,C\,D).$$

Finalmente, se conduciamo per la trasversale t un piano arbitrario π', il quale seghi i piani α, β, γ, δ in quattro rette di un fascio a', b', c', d', passanti ordinatamente per A, B, C, D, si avrà

$$(A\,B\,C\,D) = (a'\,b'\,c'\,d').$$

Se si bada che π' è un piano generico dello spazio, si perviene al teorema:

Il birapporto di quattro piani di un fascio è uguale al birapporto delle quattro rette in cui i piani stessi sono segati da un piano arbitrario, non passante per l'asse del fascio; ed è pure uguale al birapporto dei quattro punti in cui i piani stessi vengono segati da una trasversale qualsiasi, sghemba rispetto all'asse. La seconda parte del teorema si riduce alla prima, purchè si conduca per la trasversale un piano arbitrario.

Le varie proposizioni, a cui siamo così pervenuti, si sogliono riassumere in forma concisa, dicendo che *il birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie non si altera quando la forma si sottoponga ad una o più operazioni di proiezione o sezione;* od anche: *il birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie è un carattere proiettivo del gruppo degli elementi stessi.* Sarebbe facile dimostrare che, partendo da tre soli elementi, non è possibile formare una espressione avente carattere proiettivo. Il birapporto di quattro elementi è la più semplice espressione che goda siffatta proprietà; in ciò sta l'importanza del doppio rapporto nello sviluppo della Geometria proiettiva. Un'importanza analoga hanno nella Geometria elementare la distanza di due punti e l'angolo di due rette, quando si studia l'uguaglianza delle figure, o l'angolo stesso e il rapporto di due segmenti nella teoria della similitudine.

Sebbene si trovi traccia del birapporto in PAPPO, DESARGUES, ..., la teoria di questa espressione si formò nella prima metà del secolo XIX. MÖBIUS (1827), STEINER (1832), CHASLES (1837) misero in luce l'importanza del birapporto, e fondarono su di esso un nuovo ramo di geometria.

144. Come vari il birapporto di quattro elementi al variare di uno di questi. — Se A, B, C, D sono quattro elementi di una forma qualsiasi di prima specie, dei quali i primi tre siano fissi e distinti tra loro, ed il quarto D variabile, ad ogni posizione di D corrisponde un valore determinato k del birapporto

$$k = (A\,B\,C\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)}. \tag{1}$$

Ciò senza eccezione, se si conviene che, quando D cade in A, o B, ed è quindi rispettivamente (n. 6, 141) $(A\,B\,D) = 0, \pm\infty$, sia $k = \pm\infty, 0$; per D coincidente con C è naturalmente $k = 1$. Se D appartiene a quel tratto di forma (segmento proiettivo, angolo o diedro completo) $A\,B$ in cui cade C, allora $(A\,B\,C)$ e $(A\,B\,D)$ hanno lo stesso segno, ed è quindi k positivo; se D appartiene all'altro tratto di forma $A\,B$, è k negativo; donde l'osservazione che il birapporto di quattro elementi è positivo o negativo, secondo che la coppia dei due primi e dei due ultimi elementi non si separano, o si separano.

Viceversa, dati i tre elementi A, B, C ed il numero k, è determinato in modo unico sulla forma quell'elemento D che verifica la (1), giacchè risulta noto il rapporto semplice

$$(A\,B\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{k}.$$

Osservazione. — Qualche avvertenza va fatta nel caso che taluno degli elementi nominati sia improprio. Supponiamo ad es. che la forma sia una punteggiata. Se uno dei due ultimi punti, C o D, è improprio, la definizione (1) del birapporto conserva il suo significato, e ci dà (tenuto conto del n. 141)

$$(A\,B\,C\,D_\infty) = (A\,B\,C), \qquad (A\,B\,C_\infty\,D) = \frac{1}{(A\,B\,D)} = (B\,A\,D).$$

Ma se A, o B, è improprio, la definizione stessa cade in difetto. Per definire anche in queste ipotesi il birapporto osserveremo che, se A, B, C, D sono quattro punti propri, sussiste l'identità

$$(A\,B\,C\,D) = (C\,D\,A\,B),$$

che si verifica subito sostituendo ai simboli le loro espressioni. Se invece A, o B, è improprio, il simbolo che sta a primo membro perde il suo significato, mentre il simbolo a secondo membro conserva un valore ben determinato. Attribuiremo perciò al primo simbolo il valore rappresentato dal secondo, e porremo convenzionalmente [1]

$$(A_\infty\,B\,C\,D) = (C\,D\,A_\infty\,B) = (D\,C\,B),$$
$$(A\,B_\infty\,C\,D) = (C\,D\,A\,B_\infty) = (C\,D\,A).$$

Supponiamo ora che due, di quattro punti allineati, siano impropri; allora è impropria la retta che li sostiene, insieme agli altri due punti In tal caso, dette a, b, c, d le rette proiettanti i quattro punti A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ da un centro proprio arbitrario, porremo per convenzione

$$(A_\infty\ B_\infty\ C_\infty\ D_\infty) = (a\,b\,c\,d),$$

visto che il secondo birapporto non dipende dal centro di proiezione.

Con simili convenzioni si estende il significato del birapporto di quattro rette, o piani, di un fascio anche al caso che uno o più elementi siano impropri. È poi facile verificare che, accettando siffatte estensioni, il teorema del n. 143, che fissa il carattere proiettivo del birapporto, vale senza eccezioni.

145. Birapporto di quattro elementi dati mediante le loro coordinate o le loro equazioni.

a) Si abbiano anzitutto quattro punti A, B, C, D di una retta, sulla quale sia fissato un sistema di ascisse; e siano a, b, c, d le loro ascisse. Segue subito dalla definizione

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}.$$

[1] Alle stesse convenzioni si giungerebbe assumendo, ad es., come valore di $(A_\infty\,B\,C\,D)$ il limite a cui tende il valore di $(A\,B\,C\,D)$, quando B, C, D rimangono fissi, ed A scorre sulla retta allontanandosi all'infinito.

L'espressione, che sta a secondo membro, si dice spesso *birapporto dei quattro numeri a, b, c, d,* e si indica scrivendo (a, b, c, d); *il birapporto di quattro punti di una retta è espresso dal birapporto delle loro ascisse.*

b) Si abbiano ancora quattro punti A, B, C, D di una retta, i quali, questa volta, siano riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane omogenee di un piano contenente la retta. Se (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) sono le coordinate di A e B, le coordinate di C e D saranno del tipo (n. 133, δ))

$$C\,(x_1 + hx_2, \quad y_1 + hy_2, \quad z_1 + hz_2),$$
$$D\,(x_1 + ky_2, \quad y_1 + ky_2, \quad z_1 + kz_2),$$

dove h e k sono due parametri. Per calcolare il birapporto $(ABCD)$, proiettiamo i quattro punti sull'asse x parallelamente ad y. I punti proiezioni hanno le stesse ascisse dei punti A, B, C, D, cioè, ordinatamente (n. 127),

$$\frac{x_1}{z_1}, \quad \frac{x_2}{z_2}, \quad \frac{x_1 + hx_2}{z_1 + hz_2}, \quad \frac{x_1 + kx_2}{z_1 + kz_2},$$

e dànno luogo allo stesso birapporto. Ma il birapporto dei punti proiezioni uguaglia il birapporto dei quattro numeri scritti, che (eseguito il facile calcolo) risulta essere $\frac{h}{k}$. Dunque: *il birapporto di quattro punti allineati in un piano*

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_1 + hx_2, \ldots), \quad (x_1 + kx_2, \ldots)$$

uguaglia il rapporto $\frac{h}{k}$ *dei parametri, da cui dipendono i due ultimi punti.*

Analogo risultato, se i quattro punti fossero riferiti ad un sistema di coordinate omogenee nello spazio.

c) Consideriamo finalmente quattro rette di un piano formanti fascio, ed aventi le equazioni (ad es., in coordinate cartesiane ordinarie)

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \qquad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$
$$(a_1x + \ldots) + h\,(a_2x + \ldots) = 0,$$
$$(a_1x + \ldots) + k\,(a_2x + \ldots) = 0.$$

Il loro birapporto è uguale al birapporto dei quattro punti ove esse segano l'asse x, i quali hanno le ascisse

$$-\frac{c_1}{a_1}, \quad -\frac{c_2}{a_2}, \quad -\frac{c_1 + hc_2}{a_1 + ha_2}, \quad -\frac{c_1 + kc_2}{a_1 + ka_1}.$$

Ora il birapporto di questi quattro numeri risulta ancora uguale ad $\frac{h}{k}$; dunque (facendo uso della notazione abbreviata): *il birapporto di quattro rette di un fascio, aventi le equazioni*

$$l = 0, \qquad m = 0, \qquad l + hm = 0, \qquad l + km = 0,$$

uguaglia il rapporto $\frac{h}{k}$ *dei parametri, da cui dipendono le ultime due rette.*[1]

L'ultima proposizione si estende poi subito a quattro piani di un fascio.

146. Proprietà del birapporto di quattro numeri. — Il calcolo algebrico, cui sopra si accenna, è caso particolare del seguente, che eseguiremo per dimostrare una notevole proprietà algebrica del birapporto di quattro numeri. Premettiamo che una relazione del tipo

$$y = \frac{mx + n}{px + q},$$

la quale lega due quantità variabili x, y, (essendo m, n, p, q costanti), dicesi una *trasformazione* (o *sostituzione*) *lineare* fra le dette variabili; e che l'espressione

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = mq - np$$

chiamasi *determinante* della trasformazione. Ora vale il teorema:

Se due variabili x, y sono legate da una trasformazione lineare (1), *a determinante non nullo, allora ad ogni valore di x corrisponde un determinato valore di y, e viceversa; ed inoltre il birapporto di quattro valori arbitrari attribuiti ad x è uguale al birapporto dei corrispondenti valori di y.*

È chiaro intanto che, dato x, sarà determinato y, a meno che quel valore di x non renda insieme

$$mx + n = 0, \qquad px + q = 0,$$

caso impossibile, perchè il determinante dei coefficienti e termini noti è diverso da zero. Similmente, ragionando sulla equazione che si ottiene risolvendo la (1) rispetto ad x, si dimostra che ad ogni valore di y corrisponde un determinato valore di x.

Per dimostrare la seconda parte del teorema, attribuiamo ad x quattro valori arbitrari x_1, x_2, x_3, x_4, e siano

$$y_i = \frac{mx_i + n}{px_i + q} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

[1] Se si bada che le quattro rette hanno le coordinate omogenee (n. 130)

$$(a_1, b_1, c_1), \quad (a_2, b_2, c_2), \quad (a_1 + ha_2, \ldots), \quad (a_1 + ka_2, \ldots),$$

si scorge la perfetta analogia (dualità) dell'ultimo risultato col precedente.

i valori corrispondenti di y. Si ha per definizione

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4}.$$

Ora è

$$y_1 - y_3 = \frac{mx_1 + n}{px_1 + q} - \frac{mx_3 + n}{px_3 + q},$$

ossia

$$y_1 - y_3 = \frac{(mq - np)\ (x_1 - x_3)}{(px_1 + q)\ (px_3 + q)}.$$

Mutando, a primo e secondo membro, l'indice 1 in 2, abbiamo similmente

$$y_2 - y_3 = \frac{(mq - np)(x_2 - x_3)}{(px_2 + q)(px_3 + q)};$$

e dividendo membro a membro le due eguaglianze (tenuto conto della $mq - np \neq 0$),

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{px_2 + q}{px_1 + q}.$$

Mutando in questa l'indice 3 in 4, si ha

$$\frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4} = \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} \cdot \frac{px_2 + q}{px_1 + q},$$

e dividendo le due ultime uguaglianze membro a membro,

$$\frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y_4}{y_2 - y_4} = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4},$$

ossia, in simboli,

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

come dovevasi dimostrare.

147. Relazione tra i vari birapporti che si possono formare con quattro elementi. — Il birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie dipende dall'ordine in cui gli elementi si considerano. Ora le permutazioni di quattro elementi sono 24, ma i corrispondenti birapporti non sono tutti distinti. Infatti

I. *Il birapporto di quattro elementi non si altera se si scambiano tra loro due qualunque di questi, purchè nel tempo stesso si scambino anche gli altri due.* Sicchè, ad es., si ha

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Queste uguaglianze si verificano subito, ricordando le definizioni (nella ipotesi ad es. che si tratti di punti):

$$(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}, \qquad (BADC) = \frac{BD \cdot AC}{BC \cdot AD}, \quad \text{ecc.}$$

In base a questo lemma, dato un birapporto formato con quattro elementi A, B, C, D in un ordine qualsiasi, noi possiamo sempre, senza alterarne il valore, ordinare le lettere in guisa che A venga in primo posto. E possiamo quindi limitarci a considerare, fra i 24 birapporti sopra nominati, i sei seguenti

$$(ABCD), \quad (ACDB), \quad (ADBC), \quad (ABDC), \quad (ADCB), \quad (ACBD).$$

I valori di cinque tra essi possono esprimersi in funzione del sesto e ciò in virtù dei due lemmi seguenti.

II. *Due birapporti, i quali differiscano per lo scambio dei due ultimi (o dei due primi) elementi, dànno per prodotto l'unità.* Infatti

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)}, \quad (ABDC) = \frac{(ABD)}{(ABC)},$$

e moltiplicando

$$(ABCD)\,(ABDC) = 1.$$

III. *Due birapporti, che differiscano per lo scambio dei due elementi medi (o dei due estremi), dànno per somma l'unità.* È lecito supporre che gli elementi siano punti, potendosi altrimenti sostituire a quelli le intersezioni con una retta. Fissato su questa un sistema di ascisse, e dette a, b, c, d le ascisse dei quattro punti, si tratta di dimostrare l'uguaglianza

$$(a, b, c, d) + (a, c, b, d) = 1,$$

che il lettore verificherà subito sostituendo ai simboli le loro espressioni (n. 145, *a*)).

Indicando con k il valore di uno dei sei birapporti sopra nominati, ad es. di $(ABCD)$, si trovano per quelli i valori

$$(ABCD) = k, \qquad (ABDC) = \frac{1}{k},$$

$$(ACBD) = 1 - k, \qquad (ACDB) = \frac{1}{1-k},$$

$$(ADBC) = \frac{k-1}{k}, \qquad (ADCB) = \frac{k}{k-1}.$$

148. Gruppi armonici. — I sei birapporti ora considerati, sebbene in generale distinti tra loro, possono coincidere in parte per valori particolari di k. Così risulta

$$(ABCD) = (ABDC)$$

quando sia

$$k = \frac{1}{k}, \qquad \text{ossia} \qquad k^2 = 1, \; k = \pm 1.$$

Esaminiamo staccatamente i due casi.

Se è

$$k = (A\,B\,C\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)} = 1,$$

allora, od A e B sono distinti, ma C coincide con D, oppure A e B coincidono tra loro. *Se il birapporto di quattro elementi vale* 1, *o il primo elemento coincide col secondo, o il terzo col quarto; e viceversa.*

Se invece

$$k = (A\,B\,C\,D) = -1,$$

i quattro elementi sono generalmente distinti, e formano un gruppo che, per le sue notevoli proprietà, ricevette un nome speciale.

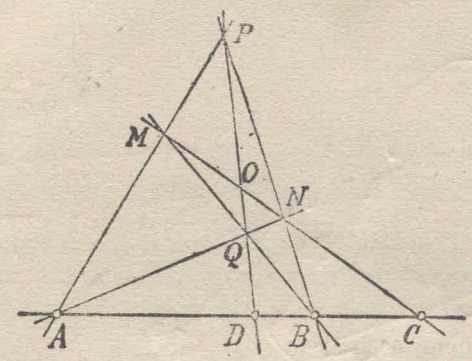
Si dice che quattro elementi A, B, C, D di una forma di prima specie formano un gruppo armonico, o sono armonici, quando il loro birapporto $(A\,B\,C\,D)$ *vale* -1. In questa definizione non è indifferente l'ordine degli elementi. Segue tuttavia dal n. 147 che, se $A\,B\,C\,D$ è un gruppo armonico, sono pure armonici i gruppi $A\,B\,D\,C$, $B\,A\,C\,D$, $B\,A\,D\,C$, $C\,D\,A\,B$, ..., insomma $A\,B\,C\,D$ ed i sette gruppi che da esso si ottengono con uno o più scambi dei due primi, o dei due ultimi elementi, o della coppia dei due primi colla coppia dei due ultimi. Perciò i due primi elementi A e B, che godono uffici scambievoli, si dicono *coniugati armonici* rispetto a C, D, e viceversa C, D sono coniugati armonici rispetto ad A, B. E si dice pure che le due coppie $A\,B$ e $C\,D$ *si separano armonicamente,* perchè il segno negativo del birapporto prova la separazione delle coppie stesse (n. 144).

È poi chiaro che un gruppo armonico di elementi di una forma di prima specie dà per proiezione o sezione nuovi gruppi armonici.

Ritornando ora alla osservazione con cui comincia questo numero, possiamo affermare, colla nomenclatura introdotta, che, *se il birapporto di quattro elementi distinti non si altera quando si scambiano fra loro i due ultimi (o i due primi) elementi, gli elementi stessi formano un gruppo armonico.*

149. Costruzione di un gruppo armonico di punti mediante il quadrangolo completo. — Dati sopra una qualsiasi forma di prima specie tre elementi distinti A, B, C, è individuato (n. 144) un quarto elemento D, tale che $A\,B\,C\,D$ risulti un gruppo armonico, $(A\,B\,C\,D) = -1$.

L'elemento D è distinto da A, B, C, e si dice *quarto armonico dopo i tre elementi* A, B, C. Fra le varie costruzioni del quarto armonico, nella ipotesi che gli elementi siano punti di una retta, è notevole quella a cui conduce la considerazione seguente.



Supposto per il momento che il problema sia risolto, supposto adunque che $A\,B\,C\,D$ sia un gruppo armonico sulla retta u, proiettiamo i quattro punti da un centro qualsiasi P, sopra una retta condotta arbitrariamente per C. Dette M, N, C, O le proiezioni di A, B, C, D, sarà armonico il gruppo $M\,N\,C\,O$ e quindi $N\,M\,C\,O$. Tiriamo ora le due rette $N\,A$, $M\,B$, e sia Q la loro intersezione Proiettando il gruppo $N\,M\,C\,O$ da Q, sopra u, ed indicando con D' la proiezione di O, risulta che è armonico il gruppo $A\,B\,C\,D'$, mentre per ipotesi è tale $A\,B\,C\,D$. Segue che il punto D' coincide con D, ossia che il punto O è proiettato in D, sia dal centro Q, sia dal centro P. Dunque il punto D è la intersezione di u colla $P\,Q$; donde la costruzione seguente:

« Volendo il quarto punto armonico D dopo i tre punti A, B, C, si conduca per C una retta arbitraria, sulla quale si prendano ad arbitrio due punti M, N, si congiungano questi con A e B nei due modi possibili, e si determinino le intersezioni, non ancora considerate, P e Q delle dette congiungenti; la retta $P\,Q$ passa per il punto richiesto D ».

Per enunciare in forma concisa la proprietà su cui poggia la costruzione, conviene introdurre la nozione di *quadrangolo completo*. Si indica con questo nome la figura composta di quattro punti, *vertici*, di cui mai tre siano allineati, e delle sei rette, *lati*, che li congiungono a due a due. Nel quadrangolo completo $M\,N\,P\,Q$ i sei lati si distribuiscono in tre coppie di *lati opposti* (non aventi alcun vertice in comune)

$$M\,N,\ P\,Q\ \ ;\ \ M\,P,\ N\,Q\ \ ;\ \ M\,Q,\ N\,P.$$

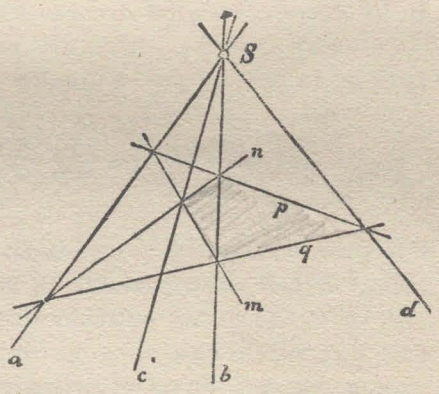
Due lati opposti si segano in un *punto diagonale*, ed i tre punti diagonali O, A, B costituiscono il *triangolo diagonale* del quadrangolo completo. Ciò premesso, possiamo dire:

In un quadrangolo completo due punti diagonali separano armonicamente le intersezioni della loro congiungente coi lati del quadrangolo passanti per il terzo punto diagonale.

Osservazione. — La costruzione suesposta ci insegna che, se A, B, C sono tre punti di una retta e si costruisce un qualsiasi quadrangolo completo, di cui

due lati opposti passino per A, due lati opposti per B ed un quinto lato per C, il sesto lato del quadrangolo segherà la retta in un punto D, che non varia col variare del quadrangolo adoperato. Ora lo stesso fatto si poteva dedurre come conseguenza del teorema dei triangoli omologici, e precisamente dell'es. 27) del n. 126. Si sarebbe fin d'allora potuto dare una definizione di *gruppo armonico* di punti, dicendo (con STAUDT) armonici quattro punti allineati $ABCD$, tali che esista un quadrangolo completo, di cui due lati opposti passino per A, due lati opposti per B, un quinto lato per C e il sesto per D. E partendo da questa definizione, si sarebbero ritrovate le proprietà dei gruppi armonici, senza introdurre il concetto di doppio rapporto e le nozioni metriche a cui siamo ricorsi per stabilirle. Una siffatta via permise appunto allo STAUDT di costruire la geometria proiettiva in base a nozioni puramente grafiche.

150. Costruzione di un gruppo armonico di rette mediante il quadrilatero completo. — Il teorema ed il problema del precedente numero possono trasformarsi per dualità piana; basta a tal fine scambiare negli enunciati, come pure nelle dimostrazioni, le parole *punto* e *retta*. Si arriva così anzitutto alla nozione di *quadrilatero completo*, figura costituita da quattro rette, *lati*, di cui mai tre concorrano in un punto, e dei sei punti, *vertici*, in cui quelle si segano a due a due. Nel quadrilatero completo $mnpq$ diconsi *opposti* i vertici mn e pq, mp ed nq, mq ed np; e le tre rette, cui queste coppie danno luogo, diconsi *rette diagonali* e costituiscono il trilatero diagonale; (nella figura sono tracciate solo due rette diagonali a, b). Ora vale il teorema:



In un quadrilatero completo due rette diagonali separano armonicamente le rette, che congiungono la loro intersezione coi due vertici del quadrilatero appartenenti alla terza retta diagonale; le due rette diagonali $a \equiv mp \,.\, nq$, $b \equiv mq \,.\, np$ sono divise armonicamente dalle due rette c e d, che proiettano da $S \equiv ab$ i vertici mn e pq.

Di qua si deduce subito il modo di costruire, colla sola riga, quella retta d del fascio S che forma un gruppo armonico con tre rette a, b, c assegnate nel fascio stesso.

151. Relazioni fra le mutue distanze di quattro punti armonici. *a*) Siano A, B, C, D quattro punti armonici di una retta, e siano a, b, c, d le loro ascisse rispetto ad una qualsiasi origine. Se poniamo $(ABC) = r$. sarà, per la stessa definizione del gruppo armonico, $(ABD) = -(ABC) = -r$.

Quindi le ascisse dei due ultimi punti del gruppo possono esprimersi mediante le formole (n. 6)

$$(1) \qquad c = \frac{a - rb}{1 - r}, \qquad d = \frac{a + rb}{1 + r}.$$

Le (1), per ogni valore di r, forniscono una coppia di punti separati armonicamente da A, B.

b) Se, in particolare, l'origine cade nel punto medio O tra A e B, allora $b = -a$, e quindi le (1) divengono

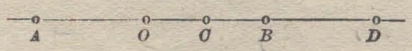
$$c = a\frac{1 + r}{1 - r}, \qquad d = a\frac{1 - r}{1 + r},$$

che, moltiplicate membro a membro, danno

$$(2) \qquad a^2 = cd, \qquad \text{ossia} \qquad OA^2 = OB^2 = OC \cdot OD.$$

In un gruppo armonico di punti, la distanza del punto medio fra due coniugati da uno di questi è media geometrica tra le distanze del punto medio stesso dagli altri due punti coniugati del gruppo; e viceversa.

Poichè OA^2 è positivo, OC ed OD devono avere lo stesso segno; dunque in un gruppo armonico di punti, due punti coniugati stanno dalla stessa banda del punto medio fra gli altri due.



Se, A e B rimanendo fissi, il punto C si muove da O verso B, descrivendo il segmento finito OB, il coniugato armonico D descriverà il prolungamento di OB dalla parte di B, venendo dall'infinito verso B.

Se C finisce per coincidere con B, dovrà pure D cadere in B; si suol dire perciò che, se in un gruppo armonico di punti (o di elementi di una qualsiasi forma di prima specie) due punti (o elementi) coincidono, un terzo punto (od elemento) coincide con quelli, ed il quarto può cadere dovunque sulla forma. Un siffatto gruppo armonico si suol chiamare *degenere*.

Se invece il punto C cade in O, il coniugato D andrà all'infinito, come risulta pure dal fatto che

$$(A\,B\,O\,D_\infty) = \frac{(A\,B\,O)}{(A\,B\,D_\infty)} = \frac{-1}{1} = -1;$$

dunque:

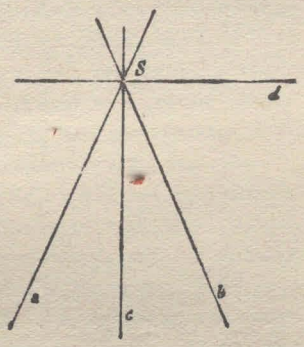
c) Il coniugato armonico del punto medio di un segmento, rispetto agli estremi di questo, è il punto all'infinito della retta; e viceversa, il coniugato armonico del punto all'infinito di una retta, rispetto a due punti di essa, è il punto medio tra quelli.

d) Ritornando alle (1), e supposto ora che l'origine cada in A e sia quindi $a = 0$, si ricava subito la relazione

$$(3) \qquad \frac{2}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

In un gruppo armonico di punti, la distanza di un punto dal suo coniugato è media armonica tra le distanze del punto stesso dagli altri due punti del gruppo; e viceversa.[1]

152. Gruppi armonici di rette aventi particolarità metriche. — Relazioni e proposizioni analoghe alle precedenti si ritrovano nel fascio di rette; ci limiteremo a due osservazioni.



a) *I lati di un angolo sono separati armonicamente dalle due bisettrici.* Infatti, detti a, b i lati, c e d le bisettrici, si ha (fissando convenientemente i versi positivi sui lati)

$$(abc) = -1, \qquad (abd) = 1,$$

e quindi

$$(abcd) = -1.$$

b) *Se di quattro rette armoniche di un fascio, due coniugate sono perpendicolari, esse bisecano gli angoli delle altre due.* Infatti se a, b, c, d sono le quattro rette, e c, d sono perpendicolari tra loro, la retta b', che con a forma due angoli bisecati da c e d, dà una quaterna armonica $ab'cd$; ma per ipotesi anche $abcd$ è armonica, quindi b' coincide con b.

Esercizi I. *Sui rapporti semplici.* — 1) Se, dati comunque nello spazio n (≥ 2) punti propri $A, B, C, \ldots, K$, sulle n rette $AB, BC, \ldots, KA$, che essi determinano, si segnano ordinatamente i punti $M, N, \ldots, R$, il prodotto dei rapporti semplici (ABM), $(BCN), \ldots, (KAR)$ uguaglia il prodotto degli analoghi rapporti semplici formati colle rette proiettanti i punti stessi da un punto qualunque S dello spazio; ed uguaglia pure il prodotto analogo relativo alla figura $A'B'C' \ldots K'$, che si ottiene proiettando la data da S sopra un piano qualsiasi (Poncelet).

2) Se la figura $ABC \ldots K$ è piana, ed i punti $M, N, \ldots, R$ sono allineati, scegliendo S sulla loro retta si riconosce che il prodotto considerato vale 1. Dunque: « Se i lati $AB, BC, \ldots, KA$, di un n.gono piano vengono segati da

---

[1] Si dice che tre numeri sono in *progressione armonica* (ed il secondo è *medio armonico* fra gli altri due), quando i loro inversi sono in progressione aritmetica.

una trasversale, che non passi per nessun vertice, nei punti $M, N, \ldots R$, il prodotto dei rapporti semplici (ABM), (BCN), $\ldots$, (KAR) è uguale a $+1$».

3) La proposizione è invertibile per $n = 3$, e fornisce il teorema di MENELAO (cfr. n. 23, es. 12)): «Condizione necessaria e sufficiente perchè tre punti M, N, P, situati sui lati AB, BC, CA di un triangolo, siano allineati è che il prodotto dei rapporti semplici (ABM), (BCN), (CAP) sia uguale a $+1$».

4) Teorema di CEVA (cfr. n. 23, es. 13)): «Condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti M, N, P, appartenenti ai lati AB, BC, CA di un triangolo, congiunti coi vertici opposti diano tre rette passanti per uno stesso punto è che il prodotto dei rapporti semplici (ABM), (BCN), (CAP) valga -1» (Si applichi il teorema dell'es. 1), scegliendo questo punto come centro di proiezione).

5) Dimostrare i teoremi di MENELAO e di CEVA col metodo della proiezione centrale, proiettando le figure in guisa che alla trasversale o al punto di concorso corrispondano elementi impropri.

6) Dimostrare, mediante il teorema di CEVA, che in un triangolo le tre mediane passano per uno stesso punto; le tre bisettrici interne passano per uno stesso punto; due bisettrici esterne e la bisettrice interna relativa al terzo vertice passano per uno stesso punto; le tre altezze passano per uno stesso punto.

7) Dimostrare, mediante il teorema di MENELAO, che in un triangolo i punti di incontro dei lati colle tre bisettrici esterne relative ai vertici opposti sono allineati; così pure sono allineati i punti di incontro dei lati con due bisettrici interne e colla bisettrice esterna relativa al terzo vertice.

8) Di tre punti A', B', C', presi sui lati di un triangolo ABC, si costruiscano i simmetrici A'', B'', C'' rispetto ai punti medi dei lati stessi; si dimostri che, se A', B', C' appartengono ad una retta, anche A'', B'', C'' appartengono ad una retta (*coniugata isotomica* della prima); e se le rette AA', BB', CC' passano per un punto, anche le rette AA'', BB'', CC'' passano per un punto (*coniugato isotomico* del primo).

9) Teorema di SIMSON: «I piedi delle perpendicolari calate sui lati di un triangolo da un punto qualunque del cerchio circoscritto sono allineati».

10) Dimostrare, mediante il teorema di MENELAO, l'esercizio 26) del n. 126, e dedurre il teorema dei triangoli omologici.

11) Se delle nove intersezioni di due trilateri abc, lmn, giacenti in uno stesso piano e non aventi elementi comuni, tre al, bm, cn stanno sopra una retta p, ed altre tre am, bn, cl stanno sopra una retta q, anche le tre rimanenti intersezioni an, bl, cm staranno sopra una retta r. Quelle nove intersezioni si trovano dunque distribuite sui lati di tre trilateri abc, lmn, pqr, per modo che ciascun lato contiene tre intersezioni, e per ciascuna intersezione passano tre lati. Due qualsivogliano dei tre trilateri sono omologici in tre modi diversi (per es. abc può considerarsi come omologico a lmn, oppure a mnl, oppure a nlm), e gli assi di omologia costituiscono il rimanente trilatero.

12) Il teorema precedente può anche enunciarsi così: se in un esagono piano i vertici di posto dispari stanno sopra una retta ed i vertici di posto pari sopra una seconda retta, i tre punti d'incontro delle coppie di lati opposti stanno sopra una terza retta; (teorema di PAPPO, cfr. n. 126, es. 36)).

13) Teorema di CARNOT (1803): «Il prodotto dei rapporti semplici deter-

minati sui lati di un poligono dalle intersezioni con un cerchio è uguale a $+1$»; precisamente, se $ABC\ldots K$ è il poligono, ed MM', NN', ..., RR' sono le coppie di intersezioni dei successivi lati AB, BC, ..., KA con un cerchio, si ha

$$(ABM)\ (ABM')\ (BCN)\ (BCN')\ \ldots\ (KAR')=+1.$$

14) Nel caso particolare in cui il poligono si riduce ad un triangolo, si può dedurre dal teorema precedente il teorema di PASCAL (pel cerchio): «se un esagono è iscritto in un cerchio, i punti di incontro delle tre coppie di lati opposti appartengono ad una retta» (cfr. n. 126, es. 35)).

15) Come si enuncia il teorema di CARNOT, nel caso che i lati del poligono siano tangenti al cerchio? Se in particolare si tratta di un triangolo, si deduce la proprietà seguente: «se un triangolo è circoscritto ad un cerchio, le congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati opposti passano per uno stesso punto». E di qua segue che «se un triangolo è iscritto in un cerchio, i punti di incontro dei lati colle tangenti nei vertici opposti sono allineati».

16) Se i lati a, b, ..., k di un n. latero e le rette m, n, ..., r uscenti rispettivamente dai vertici ab, bc, ..., ka, segano una trasversale nei punti A, B, ..., K, M, ..., sussiste la relazione

$$(abm)\ (bcn)\ \ldots\ (kar)=(ABM)\ (BCN)\ \ldots\ (KAR).$$

(Si adoperi la (3) del n. 142, sostituendo al rapporto $SA:SB$ il rapporto dei seni degli angoli opposti).

17) Se sui lati a, b, c di un triangolo ABC si trovano tre punti A', B' C', e si chiamano a', b', c' le rette che congiungono questi punti coi vertici opposti, si ha $(ABC')\ (BCA')\ (CAB')=-(bac')\ (cba')\ (acb')$.

18) Di tre rette a', b', c' uscenti dai vertici del trilatero abc si costruiscano le simmetriche a'', b'', c'' rispetto alle bisettrici interne; si dimostri che, se a', b', c' passano per un punto, anche a'', b'', c'' passano per un punto (*coniugato isogonale* del primo); e se i punti aa', bb', cc' appartengono ad una retta, anche i punti aa'', bb'', cc'' appartengono ad una retta (*coniugata isogonale* della prima).

19) Se $ABC\ldots K$ ed $a'b'c'\ldots k'$ sono un n.gono e un n.latero di uno stesso piano, si ha

$$(ABa')\ (BCb')\ \ldots\ (KAk')=(b'a'B)\ (c'b'C)\ \ldots\ (a'k'A),$$

dove (ABa') indica il rapporto semplice formato dai punti A, B colla intersezione $AB\cdot a'$, e gli altri simboli hanno significato analogo o duale. (Si conducano infatti le normali da A e B sopra a', ecc.).

20) Se $ABC\ldots K$, $A'B'C'\ldots K'$ sono due n.goni di un piano, i cui lati AB, BC, ..., $A'B'$, ... si indichino con a, b, ..., a', ..., e si pone

$$AB\cdot A'B'\equiv M,\quad BC\cdot B'C\equiv N,\ \ldots,$$

e dualmente $ab\cdot a'b'\equiv m$, ..., vale la relazione

$$(ABM)\ (A'B'M)\ (BCN)\ (B'C'N)\ldots=(bam)\ (b'a'm)\ (cbn)\ (c'b'n)\ldots$$

Questa, di cui si vedrà in seguito una importante applicazione, è notevole per il fatto che i due membri si trasformano in certo modo l'uno nell'altro per dualità.

21) Se tre punti A, B, C di una punteggiata t sono proiettati da una retta r, sghemba rispetto a t, mediante i piani α, β, γ, si ha la relazione

$$(ABC) = \frac{\text{dist } Ar}{\text{dist } Br} \cdot (\alpha\beta\gamma),$$

dove dist Ar è la distanza del punto A dalla retta r, presa con segno conveniente.

22) Estendere il teorema dell'es. 2) a un n.gono sghembo segato da un piano; il nuovo teorema è invertibile per $n = 4$.

II. *Sui birapporti* — 23) Dati tre elementi di una forma di prima specie, costruire in questa l'elemento che forma con quelli un birapporto assegnato; (mediante una operazione di proiezione o sezione si può ridursi al caso che uno dei quattro elementi sia un punto improprio, e quindi il birapporto diventi un rapporto semplice).

24) Se A, B, C, ... sono elementi di una forma di prima specie, si ha

$$(ABCD)\ (ABDE) = (ABCE)$$
$$(ABCD)\ (ABDE) \dots (ABHK) = (ABCK).$$

25) Se i lati di un triangolo ABC vengono segati da due trasversali nelle terne di punti $A'B'C'$, $A''B''C''$, si ha

$$(BCA'A'')\ (CAB'B'')\ (ABC'C'') = 1.$$

Questo teorema, che può dedursi dal teorema di Menelao, contiene d'altronde quest'ultimo come caso particolare. Analoga estensione può ricevere il teorema di Ceva.

26) Dalla relazione $(abcd) + (acbd) = 1$, che lega due birapporti formati con quattro rette di un fascio, dedurre l'identità

$$\operatorname{sen} ab \operatorname{sen} cd + \operatorname{sen} ac \operatorname{sen} db + \operatorname{sen} ad \operatorname{sen} bc = 0,$$

analoga all'identità di Eulero per la punteggiata (n. 8, es. 1)). Da quella identità si possono ricavare (ad es. supponendo $\widehat{cd} = \frac{\pi}{2}$, ...) le note formole trigonometriche che danno sen $(\alpha \pm \beta)$, cos $(\alpha \pm \beta)$.

27) Conducendo pel centro del fascio $abcd$ un cerchio, il quale seghi quelle rette in A, B, C, D, la identità precedente si traduce nella relazione

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

tra le sei corde (prese con segni convenienti), che congiungono i quattro punti due a due. Essa esprime il teorema di Tolomeo sul quadrangolo iscritto in un cerchio.

28) Dato un triangolo ABC ed un punto D, che non stia su nessun lato, le rette a', b', c', proiettanti i vertici da D formano, con una trasversale qualsiasi d condotta per D, un birapporto $(a'b'c'd)$ uguale a quello $(A'B'C'D)$ formato dalle intersezioni della trasversale coi lati del triangolo e dal punto D.

29) Dedurre dall'es. 28) la risoluzione del seguente problema e del duale: date tre rette a, b, c non concorrenti, ed un punto D che non appartenga a nessuna di quelle, condurre per D una trasversale, che seghi le rette in tre punti

A', B', C' formanti con D un birapporto $(A'\,B'\,C'\,D)$ di valore assegnato. Esaminare il caso particolare che sia improprio D od una delle tre rette date.

30) Dedurre dall'es. 28) la dimostrazione del teorema: «il birapporto dei quattro punti, in cui le facce di un tetraedro vengono segate da una retta, è uguale al birapporto dei quattro piani proiettanti dalla retta i vertici opposti del tetraedro».

III. *Sui gruppi armonici.* — 31) Per costruire il quarto punto armonico D dopo tre punti dati A, B, C, si conduca per C una retta arbitraria, e su questa si prendano a partire da C, da bande opposte, due segmenti uguali CA', CB'; si costruisca poi il punto $S \equiv AA' \cdot BB'$; come riuscirà la retta SD? Si può dare una costruzione analoga di un gruppo armonico in un fascio di rette?

32) Un'altra costruzione di un gruppo armonico di punti è fondata sul teorema: le rette congiungenti un punto di un cerchio cogli estremi di un diametro dividono armonicamente ogni corda perpendicolare a quel diametro.

33) Lo stesso problema si risolve ricorrendo al teorema: se due cerchi si segano ortogonalmente, i diametri dell'uno sono divisi armonicamente dall'altro.

34) Ricorrendo alle costruzione mediante il quadrangolo completo, risolvere colla sola riga i problemi seguenti:

a) dato un segmento col suo punto medio, condurre per un punto la parallela alla retta contenente il segmento;

b) date due rette parallele, costruire il segmento doppio, triplo ... di un segmento dato sopra una di quelle; o dividere il segmento in due, tre ... parti uguali;

c) dato un parallelogramma, dimezzare un segmento assegnato comunque (n. 126, es. 25)).

35) Ricorrendo alle costruzioni dell'es. 34) *b*), si può colla sola riga risolvere il problema seguente: «date due rette parallele, e fissati sopra una di queste i punti di ascisse 0, 1, costruire su di essa un punto avente un'ascissa razionale assegnata ad arbitrio».

36) Il luogo dei punti coniugati armonici di un punto P, rispetto alle intersezioni delle trasversali uscenti da P con due rette a, b, è la polare (n. 126, es. 18)) p di P rispetto alle rette a, b. Proposizione duale del piano.

37) Se delle intersezioni dei lati di un triangolo con una trasversale si costruiscono i coniugati armonici rispetto alle coppie dei vertici appartenenti a quei lati, i nuovi punti congiunti coi vertici opposti danno tre rette passanti per uno stesso punto; questo punto e quella trasversale diconsi *armonici* rispetto al triangolo. Proposizione duale.

38) Se delle intersezioni dei sei spigoli di un tetraedro con un piano qualsiasi si costruiscono i punti coniugati armonici rispetto alle coppie di vertici esistenti sui relativi spigoli, i nuovi punti congiunti cogli spigoli opposti danno sei piani passanti per uno stesso punto. E viceversa. Il piano primitivo ed il punto ottenuto diconsi *armonici* rispetto al tetraedro.[1]

---

[1] Si dimostrino i teoremi 37) e 38) anche per via analitica, facendo uso della notazione abbreviata (nn. 23, 145).

39) Un quadrangolo completo è individuato quando ne sia dato il triangolo diagonale EFG ed un vertice A: come si costruiscono gli altri tre vertici B, C, D? Dimostrare che se, rimanendo fisso il triangolo diagonale, il vertice A descrive una retta a, gli altri tre vertici descrivono tre rette b, c, d; la configurazione delle quattro rette a, b, c, d è tale, che il trilatero formato con tre qualsivogliano di esse è omologico al triangolo diagonale EFG, coll'asse di omologia nella quarta retta. Questione duale pel quadrilatero.

40) Dato un tetraedro $ABCD$ ed un punto A', costruire un altro tetraedro $A'B'C'D'$ tale, che le coppie di spigoli opposti dell'un tetraedro si appoggino alle coppie di spigoli opposti dell'altro.

41) Segare tre piani α, β, γ di un fascio proprio mediante un piano, in modo che, delle rette sezioni, la terza biseghi l'angolo delle prime due; (si costruisca il piano δ quarto armonico dopo α, β, γ).

42) Se a, b, c, d sono quattro rette di un fascio proprio, ed m è una bisettrice dell'angolo ab, valgono le seguenti relazioni, analoghe a quelle valide pel gruppo armonico di punti (n. 151):

$$\frac{2}{\operatorname{tg} ab} = \frac{1}{\operatorname{tg} ac} + \frac{1}{\operatorname{tg} ad}, \qquad \operatorname{tg}^2 mb = \operatorname{tg} mc \cdot \operatorname{tg} md.$$

43) Date sopra una retta due coppie di punti AB ed EF, costruire una terza coppia XY che divida armonicamente quelle due. Si dimostri che questa coppia esiste ed è unica, se le due coppie date non si separano; non esiste invece nel caso opposto. (Supposta nota la coppia XY, e detto O il punto medio, risulta (n. 151) $OX^2 = OA \cdot OB = OE \cdot OF$; dunque O sta sull'asse radicale (n. 57) di due cerchi arbitrari secanti sulla retta le due coppie date, ed OX è la tangente da O ad uno di essi).

44) Dati sopra una retta due segmenti AB, EF, determinare il luogo di un punto S dal quale i due segmenti siano visti sotto angoli uguali o supplementari.

***153. Coordinate proiettive sopra una forma di prima specie.** — Abbiamo visto (n. 144) che, dati sopra una forma di prima specie tre elementi fissi A, B, C ed un quarto M variabile, per ogni posizione di questo rimane determinato il valore k del birapporto

$$k = (ABCM);$$

e viceversa, noto k, è M completamente determinato. Fra la posizione di M ed il valore di k sussiste adunque una corrispondenza biunivoca, che, come facilmente si riconosce, è continua, quando si faccia astrazione dall'elemento A della forma dove $k = \pm\infty$.

Si potrà quindi assumere k come coordinata dell'elemento M; e si parlerà di *coordinata birapporto*, o *coordinata proiettiva*, rispetto agli *elementi fondamentali* A, B, C, i quali (tenuto conto delle loro coordinate $\pm\infty$, 0, 1; n. 144) si sogliono chiamare rispettivamente *elemento infinito, zero, unità*.

Il nome di *proiettiva* dipende da ciò, che, se con una o più operazioni di proiezione o sezione si passa dalla forma primitiva, a cui appartengono gli elementi $A, B, C, M \ldots$, ad una nuova forma di prima specie, a cui appartengano gli elementi corrispondenti $A', B', C', M', \ldots$, la coordinata proiettiva dell'elemento variabile M, rispetto agli elementi fondamentali A, B, C della prima forma, è sempre eguale alla coordinata proiettiva dell'elemento variabile M', rispetto agli elementi fondamentali A', B', C' della seconda forma. In un certo senso si potrebbe dire che la coordinata proiettiva di un elemento, sopra una forma di prima specie, non si altera se la forma si assoggetta ad operazioni di proiezione e sezione. Perciò il sistema delle coordinate proiettive si presta, più di ogni altro, a studiare le proprietà proiettive delle forme di prima specie.

Osservazione I. — È notevole il fatto che l'ultimo sistema di coordinate contiene, come casi particolari, i principali sistemi di coordinate nominati sin qua.

Anzitutto, se dei tre punti fondamentali A, B, C sopra una punteggiata propria, il primo A è improprio, la coordinata proiettiva del punto variabile M diviene (n. 144, Oss.)

$$k = (A_\infty BCM) = (MCB) = \frac{BM}{BC},$$

ed è l'*ascissa* del punto M rispetto alla origine B e all'unità di lunghezza BC.

In secondo luogo si osservi che, se $l = 0$, $m = 0$ sono le equazioni cartesiane di due rette di un piano, ed è quindi $l + km = 0$ l'equazione di una retta variabile nel fascio determinato da quelle due, k è il birapporto delle quattro rette (n. 145)

$$m = 0, \quad l = 0, \quad l + m = 0, \quad l + km = 0,$$

ed è quindi la *coordinata proiettiva* dell'ultima retta rispetto alle prime tre.

In particolare, nel fascio che ha per centro l'origine di un sistema ortogonale, il coefficiente direttivo k di una retta $y - kx = 0$ è, nel tempo stesso, la tangente dell'angolo che la retta forma coll'asse x (n. 27), e la coordinata proiettiva di quella retta rispetto alle rette fondamentali $x = 0$, $y = 0$, $x - y = 0$; sicchè anche le *coordinate tangenti* (n. 10) sono casi particolari di coordinate proiettive.

Osservazione II. — Giova notare che, in base a quanto ora si disse, il sistema delle coordinate proiettive sopra una punteggiata potrebbe anche definirsi nel seguente modo. Sopra una retta propria ausiliare u si fissi un sistema di ascisse, e sia x l'ascissa di un punto X variabile sulla retta. Si proietti poi, da un centro arbitrario, la punteggiata u sopra una retta arbitraria u', ed al punto X', proiezione di X, si associ quel numero x che si era definito come ascissa di X. Si potrà riguardare x come coordinata di X'; precisamente x è *coordinata proiettiva* di X' rispetto a tre punti fondamentali, che sono proiezioni dei tre punti di u aventi le ascisse $\pm\infty$, 0, 1. Viceversa, mediante proiezione si può sempre passare da un sistema di coordinate proiettive sopra una retta u', ad un sistema di ascisse sopra una retta u.

***154. Espressione del birapporto di quattro elementi mediante le coordinate proiettive. Trasformazione delle coordinate proiettive.**

a) Siano anzitutto A, B, C, M quattro punti di una retta, i quali, rispetto ad una qualsiasi origine, abbiano le ascisse a, b, c, x. La coordinata proiettiva di M, rispetto ai punti fondamentali A, B, C, è espressa (n. 145) da

$$k = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} = \frac{-(a-c)x+(a-c)b}{-(b-c)x+(b-c)a},$$

ossia

$$k = \frac{mx+n}{px+q}, \tag{1}$$

dove si è posto per brevità

$$m = -(a-c), \quad n = (a-c)b, \quad p = -(b-c), \quad q = (b-c)a.$$

Dunque al variare di M, l'*ascissa x e la coordinata proiettiva k di questo punto sono legate da una trasformazione lineare* (n. 146), il cui determinante

$$mq - np = (a-b)(b-c)(c-a)$$

è certo diverso da zero, perchè A, B, C si suppongono distinti.

b) Possiamo applicare alla (1) il teorema del n. 146, il quale afferma che, attribuiti alla x quattro valori arbitrari x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), e detti k_i i corrispondenti valori di k, sussiste l'uguaglianza di birapporti

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (k_1, k_2, k_3, k_4).$$

Ora il primo membro fornisce il birapporto di quattro punti M_i della retta, che abbiano le ascisse x_i, e le coordinate proiettive k_i (rispetto ai punti fondamentali A, B, C); quindi in fine

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = (k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{k_1-k_3}{k_2-k_3} : \frac{k_1-k_4}{k_2-k_4}, \tag{2}$$

la quale esprime il birapporto di quattro punti mediante le loro coordinate proiettive. D'altra parte la (2) si estende ad una qualsiasi forma di prima specie, come si vede eseguendo una proiezione che non altera nè il birapporto, nè le coordinate proiettive. Arriviamo così al risultato: *fissato sopra una forma di prima specie un qualsiasi sistema di coordinate proiettive, il birapporto di quattro elementi della forma è espresso dal birapporto delle loro coordinate.*

c) Supposti fissi gli elementi M_1, M_2, M_3, e variabile M_4, il primo membro della (2) ci dà la coordinata proiettiva k' di M_4 rispetto agli elementi fissi M_1, M_2, M_3; mentre k_4 è la coordinata proiettiva di M_4 rispetto ad A, B, C. Tra le due coordinate passa la relazione (2), che (come sopra vedemmo) è del tipo

$$k' = \frac{\alpha k+\beta}{\gamma k+\delta}, \tag{3}$$

dove si è scritto k in luogo di k_4, e dove α, β, γ, δ sono quattro costanti tali che $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Dunque: *se uno stesso elemento variabile sopra una forma di prima specie viene riferito a due diversi sistemi di coordinate proiettive, le due coor-*

dinate dell'elemento sono legate da una trasformazione lineare a determinante non nullo.

Viceversa, ogni trasformazione (3) a determinante non nullo può interpretarsi come una trasformazione di coordinate proiettive fra il *sistema antico*, i cui elementi fondamentali hanno le coordinate $k = \pm\infty, 0, 1$, ed il *sistema nuovo*, i cui elementi fondamentali hanno le nuove coordinate $k' = \pm\infty, 0, 1$ e quindi le antiche

$$k = -\frac{\delta}{\gamma}, -\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\beta-\delta}{\alpha-\gamma}.$$

***155. Coordinate proiettive omogenee nelle forme di prima specie.** — In ogni sistema di coordinate proiettive vi è un elemento, cui non corrisponde una coordinata finita, quell'elemento che si indica convenzionalmente con $\pm\infty$. Si riesce a togliere questa eccezione nella corrispondenza, associando ad ogni elemento una coppia di numeri x, y, non entrambi nulli (*coordinate proiettive omogenee*), dei quali interessa solo il rapporto, e *tali che, se* $y \neq 0$, *sia* $k = \frac{x}{y}$ *la coordinata proiettiva non omogenea dell'elemento, mentre, se* $y = 0$, $x \neq 0$, *l'elemento abbia la coordinata* $k = \pm\infty$ (cfr. n. 127). Ai tre elementi fondamentali del sistema ($k = \pm\infty, 0, 1$) possiamo dunque attribuire le coordinate omogenee (1, 0), (0, 1), (1, 1), o numeri proporzionali.

La formola (3) per la trasformazione delle coordinate proiettive diviene, quando si introduca l'omogeneità e si chiamino (x, y), (x', y') le coordinate omogenee dei due sistemi,

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}, \tag{4}$$

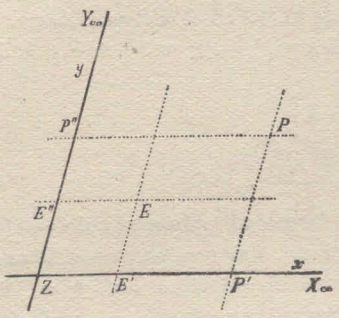
e può esser sostituita dalle due relazioni

$$\begin{cases} \rho x' = \alpha x + \beta y, \\ \rho y' = \gamma x + \delta y, \end{cases} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0) \tag{5}$$

dove ρ è un fattore di proporzionalità arbitrario, purchè non nullo. Si suol dire che *le coordinate di un elemento di una forma di prima specie, riferito a due sistemi di coordinate proiettive omogenee, son legate da una sostituzione* (o *trasformazione*) *lineare ed omogenea a determinante non nullo;* con questa locuzione si indica infatti il sistema di eguaglianze (5).

***156. Coordinate proiettive nel piano punteggiato.** — Cerchiamo ora di estendere alle forme di seconda specie, ed in particolare al piano, il concetto di coordinate proiettive introdotto sulle forme di prima specie ed in particolare sulle punteggiate. Arriveremo allo scopo nel modo più naturale, procurando anzitutto di esprimere le ordinarie coordinate cartesiane mediante birapporti di punti, alcuni dei quali impropri, e liberandoci poi dalla restrizione relativa alle particolari posizioni di questi ultimi punti.

Siano dunque x, y gli assi cartesiani, Z il loro punto di incontro (origine), X_∞, Y_∞ i loro punti all'infinito. Sia finalmente E un punto proprio, fuori degli assi, *punto unità*, al quale attribuiremo convenzionalmente le coordinate cartesiane $(+1, +1)$; vuol dire che assumeremo come unità di misura l'ascissa di E per i segmenti paralleli ad x (ascisse), l'ordinata di E per i segmenti paralleli ad y (ordinate), senza preoccuparci se quelle due unità di misura siano uguali o diverse. Ciò posto, per aver le coordinate cartesiane di un punto generico, P, del piano, dovremo proiettare P ed E da Y_∞ sull'asse x, ottenendo i punti P', E', e da X_∞ sull'asse y, ottenendo i punti P'', E''. L'ascissa X sarà allora il valore del segmento ZP' misurato coll'unità di lunghezza ZE', ossia $X = \dfrac{ZP'}{ZE'}$, e similmente l'ordinata $Y = \dfrac{ZP''}{ZE''}$.



Esprimendo questi rapporti semplici mediante birapporti (n. 144, Oss.), avremo

$$X = (X_\infty Z E' P'), \qquad Y = (Y_\infty Z E'' P'');$$

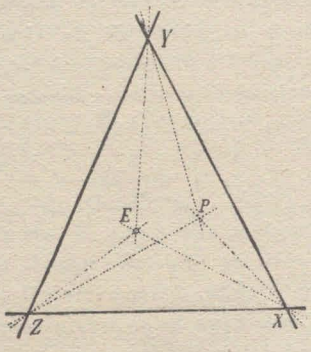
e sostituendo ai birapporti di punti i birapporti delle rette proiettanti da Y_∞ ed X_∞ rispettivamente,

$$X = Y_\infty\ (X_\infty Z E P), \qquad Y = X_\infty\ (Y_\infty Z E P).$$

Liberiamoci ora dalla restrizione che i punti X_∞, Y_∞ siano impropri. Sopra un piano qualsiasi (proprio, od anche improprio) assumiamo *ad arbitrio* un *triangolo fondamentale* XYZ, e fissiamo un *punto unità* E, pure ad arbitrio, ma fuori dei lati del triangolo. Allora, dato un punto P qualsiasi fuori della retta XY, rimangono definiti in valore e segno i birapporti

$$(1) \qquad X = Y\,(XZEP), \qquad Y = X\,(YZEP);$$

e viceversa, dati due numeri finiti X, Y, rimane individuato, in virtù delle (1), il punto P. I due numeri X, Y, collegati al punto P mediante le (1), si dicono *coordinate proiettive* (non omogenee) di P, rispetto ai *punti fondamentali* X, Y, Z ed al *punto unità* E.



Il punto Z ha le coordinate proiettive $(0, 0)$; ogni punto della retta ZX ha $Y = 0$, ogni punto di ZY ha $X = 0$; il punto E ha le coordinate $(1, 1)$. I punti di una retta uscente da X hanno costante la Y, ed i punti di una retta uscente da Y hanno costante la X. Un punto generico della retta XY avrebbe, secondo le (1), $X = \pm\infty$, $Y = \pm\infty$; ma, a togliere la indeterminazione analitica relativa a quei punti, provvederemo coll'introduzione di una terza coordinata. Se la retta XY si suppone impropria, si ricade nell'ordinario sistema cartesiano.

Dovremmo ora trattare, in coordinate proiettive, e relazioni fondamentali di posizione fra punti e rette di un piano. Una semplice osservazione ce ne dispensa.

Tutti i risultati ottenuti in coordinate cartesiane nel Cap. I della Parte I, valgono senz'altro in coordinate proiettive, purchè ai punti impropri, di cui ivi talvolta si parla, si sostituiscano ora i punti della retta fondamentale XY; quindi al rapporto semplice di tre punti allineati, si sostituisca il birapporto formato dai tre punti col punto in cui la loro retta sega XY; ecc. In particolare: *ogni formola esprimente in coordinate cartesiane una relazione proiettiva di punti e rette conserva inalterato il suo significato in coordinate proiettive.*

Questa affermazione si giustifica osservando che i ragionamenti fatti in quel Cap. I, possono ripetersi letteralmente in coordinate proiettive, pur di tener presente la suddetta avvertenza relativa agli elementi impropri.[1]

Risulta così che, *in coordinate proiettive, una retta è ancora rappresentata da una equazione lineare.* In particolare $X = 0$, $Y = 0$ rappresentano le rette fondamentali YZ, XZ; $aX + c = 0$, $bY + c = 0$ rappresentano rette uscenti rispettivamente dai punti fondamentali Y, X; $aX + bY = 0$ è una retta uscente dal punto Z, e precisamente $X - Y = 0$ rappresenta la retta ZE; ecc.

***157. Coordinate proiettive omogenee di punti.** — Volendo rappresentare anche i punti della retta fondamentale XY, faremo uso di *coordinate proiettive omogenee*, che definiremo seguendo la via tenuta al n. 127. Fissato un *triangolo fondamentale* XYZ ed un *punto unità* E, chiameremo coordinate proiettive omogenee di un punto P tre numeri x, y, z, non tutti nulli, tali che

$$(1) \qquad X = \frac{x}{z}, \qquad Y = \frac{y}{z}$$

siano le coordinate proiettive, non omogenee, sopra definite del punto P. Questa definizione vale, a dir vero, colla restrizione $z \neq 0$, la quale porta che il punto P sia fuori della retta XY. Per togliere la restrizione, osserviamo anzitutto che il detto punto $P(x, y, z)$, congiunto con Z, dà una retta ZP avente la equazione

$$(2) \qquad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y},$$

dove X, Y sono le coordinate proiettive variabili; conveniamo poi di attribuire le coordinate $(x, y, 0)$ alla intersezione della retta (2) colla retta XY. Da queste definizioni segue che i rapporti $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ hanno i significati geometrici

$$(1') \qquad \frac{x}{z} = Y(XZEP), \qquad \frac{y}{z} = X(YZEP).$$

---

[1] Ad es. il primo problema risolto in coordinate cartesiane (n. 14) ora va enunciato così: « Date le coordinate proiettive di due punti $P_1(X_1, Y_1)$, $P_2(X_2, Y_2)$, e detta Q la intersezione della retta P_1P_2 colla retta XY, determinare sulla prima retta quel punto $P(X, Y)$, che forma con P_1, P_2, Q un birapporto assegnato $(P_1P_2PQ) = r$ ». Proiettando i quattro punti P_1P_2, P, Q da Y sopra la retta ZX, otterremo quattro punti aventi come prime coordinate proiettive $X_1, X_2, X, \pm\infty$; e dovrà essere $(X_1, X_2, X, \pm\infty) = r$, donde segue $X = \frac{X_1 - rX_2}{1 - r}$. Similmente $Y = \frac{Y_1 - rY_2}{1 - r}$. Si ritrovano così le formole (1) del n. 14, le quali conducono alle conseguenze dedotte nei numeri 15 e seg. Ecc.

Quanto al rapporto $\frac{x}{y}$, si osservi che la retta ZP avente l'equazione (2), ossia $X - \frac{x}{y} Y = 0$, forma colle tre rette ZY, ZX, ZE, di equazioni

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad X - Y = 0,$$

il birapporto

$$Z(YXEP) = \frac{y}{x}.$$

Riunendo questa alle (1'), possiamo ora definire come *coordinate proiettive omogenee di un punto P tre numeri x, y, z, non tutti nulli, tali che sussistano le relazioni (di cui due sole sono indipendenti)*

$$(3) \qquad \frac{y}{z} = X(YZEP), \qquad \frac{z}{x} = X(ZXEP), \qquad \frac{x}{y} = Z(XYEP).$$

Le tre coordinate omogenee di un punto possono evidentemente essere moltiplicate per uno stesso fattore, senza che il punto cambi. I vertici X, Y, Z del triangolo fondamentale hanno rispettivamente coordinate uguali (o proporzionali) a (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1); il punto unità E ha le coordinate (1, 1, 1); per un punto della retta YZ è $x = 0$, per un punto di ZX è $y = 0$, e per un punto di XY è $z = 0$. Ecc.

In coordinate proiettive omogenee una retta è rappresentata da una equazione lineare ed omogenea. In particolare $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ rappresentano i lati del triangolo fondamentale; $ax + by = 0$ è una retta uscente dal vertice Z. Ecc.

***158. Coordinate proiettive nel piano rigato.** — Supposto che una retta p sia rappresentata, in coordinate proiettive omogenee di punti (x, y, z), dall'equazione

$$(1) \qquad ux + vy + wz = 0,$$

potremo chiamare i coefficienti u, v, w coordinate *proiettive omogenee* della retta p; $\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right.$, coordinate *non omogenee;* cfr. nn. 130, 131$\left.\right)$.

Di queste coordinate di rette si può pure assegnare una definizione diretta, che corrisponde per dualità alla definizione delle coordinate proiettive di punti. A tal fine indichiamo con u, v, w le rette fondamentali YZ, ZX, XY; e consideriamo, oltre alla retta p rappresentata dalla (1), la *retta unità* e avente l'equazione

$$(2) \qquad x + y + z = 0,$$

e quindi le coordinate (1, 1, 1). È facile vedere che le rette proiettanti da X i punti eu, pu della retta u ($x = 0$), hanno, rispettivamente, le equazioni

$$y + z = 0, \qquad vy + wz = 0;$$

queste due rette formano adunque colle v, w, di equazioni

$$y = 0, \qquad z = 0,$$

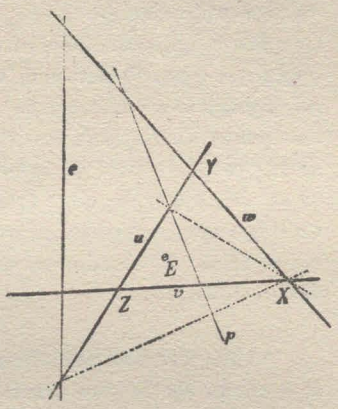
il birapporto

$$u(vwep) = \frac{v}{w}.$$

Operando in modo analogo sugli altri lati del triangolo fondamentale, troviamo che, *fissato un trilatero uvw ed una retta unità e, la quale non contenga alcun vertice di questo, per coordinate proiettive omogenee di una retta p si devono intendere tre numeri u, v, w, tali che sussistano le relazioni (di cui due sole indipendenti)*

$$\frac{v}{w} = u(vwep), \qquad \frac{w}{u} = v(wuep), \qquad \frac{u}{v} = w(uvep).$$

Partendo da quest'ultima definizione, si può ritenere che la retta unità e sia una retta generica del piano. Ma se si vuole, come sarà sempre supposto, che la nuova definizione concordi colla precedente, o, in altri termini, che la (1) esprima la condizione di appartenenza di punto e retta, bisogna che la retta unità sia rappresentata in coordinate di punti dall'equazione (2). E ciò esige, come si dimostra facilmente, che per retta unità si scelga la retta *armonica* del punto unità, rispetto al triangolo fondamentale (n. 152, es. 37)).



In questa ipotesi la (1), secondo che in essa si suppongono variabili le x, y, z, o le u, v, w, rappresenta la retta $p\ (u, v, w)$ in coordinate di punti, o il punto $P\ (x, y, z)$ in coordinate di rette *Un punto è rappresentato adunque da un'equazione lineare in coordinate proiettive di rette* Ad es. il punto $X \equiv vw$ ha l'equazione $u = 0$: ecc

Tutte le considerazioni stabilite al n. 133 *allo scopo di esprimere analiticamente le relazioni di posizione di punti e rette di un piano, valgono ancora quando le coordinate* (x, y, z) *o* (u, v, w), *ivi adoperate, si interpretino come coordinate proiettive omogenee di punti o rette.*

Ogni formola, esprimente in coordinate cartesiane o plückeriane una proprietà proiettiva di una figura piana, conserva il suo significato se quelle coordinate si riguardino come proiettive

Tuttavia, valendosi di coordinate proiettive nell'esame di proprietà grafiche, si hanno, fra gli altri, i seguenti vantaggi:

1) una maggiore libertà nella scelta del triangolo fondamentale, di cui ora si possono assumere ad arbitrio i tre lati mentre nel sistema cartesiano omogeneo uno deve essere improprio;

2) il piano su cui si opera può essere proprio od improprio;

3) il procedimento analitico tenuto nel piano si estende immediatamente alle altre forme di seconda specie, come ora diremo;

4) operando mediante proiezione o sezione sulla figura considerata e sugli elementi di riferimento (triangolo fondamentale e punto o retta unità), le coordinate dei punti e delle rette della figura non si alterano.

Per quanto riguarda i caratteri metrici, le formole in coordinate cartesiane non sono certo applicabili alle nuove coordinate. Delle modificazioni da introdursi non parleremo qui, proponendoci di adoperare sistematicamente coordinate cartesiane nello studio delle proprietà metriche.

***159. Coordinate proiettive nella stella di rette o piani.** — La definizione di coordinate proiettive nel piano punteggiato o rigato si estende senz'altro alla stella di rette o di piani. Allo stesso risultato si perviene nel modo seguente. Si tagli la stella S con un piano π, non passante per il centro della stella, e si fissi su π un sistema di coordinate proiettive di punti o di rette. Si potranno allora far corrispondere ad ogni retta o piano della stella S quelle coordinate che appartengono al punto o alla retta sezione su π. È facile scorgere che una forma di prima specie entro alla stella S (fascio di rette o fascio di piani) è rappresentata da una equazione lineare in coordinate di rette o di piani, ecc.

Osservazione. — Considerazioni della stessa natura permettono di definire sul piano il sistema di coordinate proiettive di punti nel modo seguente, che talvolta è utile ricordare.

Sia π un piano, sopra cui sia fissato un sistema di coordinate cartesiane, omogenee o no. Proiettiamo i punti di π sopra un nuovo piano π' da un centro S, ed associamo ad ogni punto P' di π' quei numeri che sono coordinate cartesiane del punto corrispondente P di π; questi numeri saranno evidentemente coordinate proiettive di P', rispetto a quel triangolo fondamentale che è proiezione su π' del triangolo di π formato dai due assi cartesiani e dalla retta all'infinito. Coll'operazione inversa si trasforma un sistema di coordinate proiettive su π' in un sistema di coordinate cartesiane su π (cfr., per la punteggiata, la Oss. II del n. 153).

***160. Trasformazione delle coordinate proiettive.** — Fissati in una forma di seconda specie due diversi sistemi di coordinate proiettive, sorge il problema di esprimere le coordinate di un elemento nell'un sistema mediante le coordinate dello stesso elemento nell'altro sistema. Ragioniamo, ad es., nella ipotesi che la forma sia un piano punteggiato; i risultati, a cui giungeremo, potranno poi estendersi a tutte le altre forme con semplici cambiamenti di parole.

Sia XYZ il triangolo fondamentale ed E il punto unità dell'*antico* sistema di coordinate proiettive (x, y, z); siano $X'\,Y'\,Z'$ ed E' gli analoghi elementi del *nuovo* sistema (x', y', z'). Per individuare la posizione di questo, rispetto al primitivo, supporremo assegnate intanto le equazioni delle nuove rette fondamentali nelle antiche coordinate; siano

$$\left.\begin{array}{ll} Y'\,Z') & l \equiv a\,x + b\,y + c\,z = 0, \\ Z'\,X') & m \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0, \\ X'\,Y') & n \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

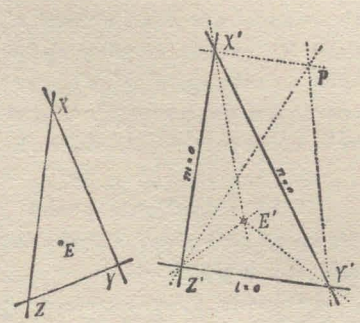
dove l, m, n indicano abbreviatamente i polinomi scritti accanto. Quanto al punto unità E', possiamo tenerne conto nel modo seguente. Se sostituiamo, al posto delle variabili, le antiche coordinate di E' nei polinomi l, m, n, questi acquistano certi tre valori non nulli; ora possiamo sempre fare in modo che i tre valori siano uguali fra loro, purchè immaginiamo moltiplicati per convenienti fattori quei polinomi (o due di essi). Noi supporremo già fatta sin dal principio questa *preparazione* delle equazioni (1); supporremo, in altri termini, che le rette $X'\,E'$, $Y'\,E'$, $Z'\,E'$ siano rappresentate, nell'antico sistema, dalle equazioni

$$m - n = 0, \qquad n - l = 0, \qquad l - m = 0.$$

E con ciò potremo dire di conoscere pienamente i nuovi elementi fondamentali, rispetto agli antichi.

Ciò premesso, consideriamo un punto P, il quale abbia le antiche coordinate (x, y, z) e le nuove (x', y', z'); cerchiamo di esprimere queste mediante quelle. È per definizione, ad es.,

$$\frac{y'}{z'} = X'(Y'Z'E'P).$$



Ora delle quattro rette indicate a secondo membro, le prime tre hanno le equazioni (nelle antiche coordinate)

$$n = 0, \quad m = 0, \quad m - n = 0;$$

e la quarta avrà una equazione del tipo

$$m - \nu n = 0,$$

dove $\nu = \frac{m}{n}$ è il rapporto dei valori assunti dai polinomi m, n quando al posto delle variabili si sostituiscano le coordinate x, y, z di P. D'altra parte ν è il birapporto delle rette aventi quelle quattro equazioni (n. 145); dunque si ha

$$\frac{y'}{z'} = \frac{m}{n},$$

insieme alle due analoghe che si ottengono con analoghi ragionamenti:

$$\frac{z'}{x'} = \frac{n}{l}, \qquad \frac{x'}{y'} = \frac{l}{m}.$$

Introducendo un fattore di proporzionalità ρ, non nullo, e sostituendo ai simboli l, m, n le loro espressioni, giungiamo infine alle formole richieste

$$(2) \qquad \begin{cases} \rho x' = ax + by + cz, \\ \rho x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ \rho z' = a_2 x + b_2 y + c_2 z. \end{cases}$$

Le formole (2) (dove si può pur supporre $\rho = 1$) stabiliscono, come si suol dire, *una sostituzione lineare ed omogenea fra le due terne di variabili* x, y, z *e* x', y', z'. Il *determinante* (di terzo ordine) *della sostituzione*, formato coi nove coefficienti dei trinomi che compariscono a secondo membro, è certo diverso da zero, visto che le tre rette (1) non formano fascio. Dunque:

Stabiliti sopra una forma di prima specie due sistemi di coordinate proiettive ed omogenee, le coordinate di uno stesso elemento nei due sistemi sono collegate da una sostituzione lineare ed omogenea a determinante non nullo. E viceversa. L'inversa segue osservando che ogni siffatta sostituzione può scriversi sotto la forma (2), e che le (2) servono a passare da un sistema di coordinate (x, y, z) a quel nuovo sistema (x', y', z') che ha per rette fondamentali le (1), e per punto di unità il punto che colle sue coordinate x, y, z rende uguali i valori dei tre trinomi (1).

Osservazione. — Nelle (2) si può supporre che x, y, z siano coordinate cartesiane omogenee (o, posto $z = 1$, coordinate cartesiane ordinarie). In tale

ipotesi, le (2) ci conducono alla seguente definizione di coordinate proiettive nel piano punteggiato.

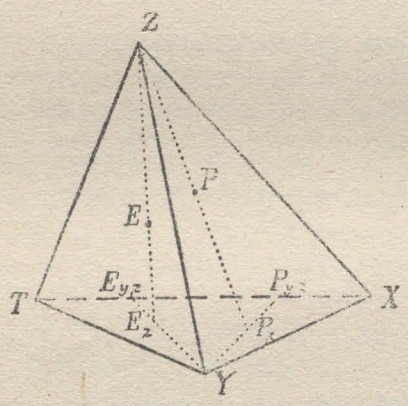
Si fissi sopra un piano un sistema di coordinate cartesiane, e si scrivano le equazioni (1) di tre rette formanti un triangolo. Ad ogni punto P del piano corrispondono allora tre numeri x', y', z', che sono i valori assunti dai primi membri delle (1) quando al posto delle variabili si scrivano le coordinate cartesiane di P. Quei tre numeri x', y', z', o numeri proporzionali, possono assumersi come nuove coordinate del punto P. Che si tratti di coordinate proiettive (rispetto al triangolo nominato) risulta dalle (2).

*** 161. Coordinate proiettive di punti e piani nello spazio.** — Le considerazioni precedenti si estendono immediatamente allo spazio. Potremo dunque limitarci a pochi cenni.

Si parta da un tetraedro qualsiasi $XYZT$, e si fissi inoltre ad arbitrio un punto E, che non appartenga ad alcuna faccia del tetraedro. Allora, per ogni punto P dello spazio, restano individuati i tre birapporti

$$(1) \qquad X = \overline{YZ}\,(XTEP), \qquad Y = \overline{ZX}\,(YTEP), \qquad Z = \overline{XY}\,(ZTEP),$$

dove il primo simbolo indica il birapporto dei piani proiettanti dallo spigolo YZ punti X, T, E, P, e similmente gli altri. Viceversa, noti quei birapporti, sono individuati i piani proiettanti il punto P dai tre lati del triangolo XYZ, ed è quindi individuato il punto P, eccettuato solo il caso che questo punto stia nel piano XYZ (nel qual caso quei doppi rapporti valgono, in generale, $\pm\infty$). Chiameremo perciò i valori (1) *coordinate proiettive* (non omogenee) del punto P, rispetto al *tetraedro fondamentale* $XYZT$ ed al *punto unità* E, il quale ha le coordinate $X = Y = Z = 1$.



Per ovviare all'inconveniente relativo ai punti del piano XYZ, conviene introdurre l'omogeneità. Definiremo come *coordinate proiettive omogenee del punto* P, rispetto al tetraedro e al punto unità suddetti, quattro numeri non tutti nulli, x, y, z, t, tali che siano soddisfatte le sei relazioni seguenti:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{t} = \overline{YZ}\,(XTEP), & \dfrac{y}{t} = \overline{ZX}\,(YTEP), & \dfrac{z}{t} = \overline{XY}\,(ZTEP), \\ \dfrac{y}{z} = \overline{TX}\,(YZEP), & \dfrac{z}{x} = \overline{TY}\,(ZXEP), & \dfrac{x}{y} = \overline{TZ}\,(XYEP). \end{cases}$$

Ciò è sempre possibile (ed in infiniti modi, potendosi dare un valore arbitrario ad una delle quattro coordinate), perchè tre delle relazioni (2), ad es. le tre dell'ultima orizzontale, sono conseguenze delle tre rimanenti. Si giustifica questa affermazione in modo analogo a quello tenuto nel piano (n. 157).

I vertici del tetraedro fondamentale hanno le seguenti coordinate proiettive omogenee:

$$X\ (1,\ 0,\ 0,\ 0),\quad Y\ (0,\ 1,\ 0,\ 0),\quad Z\ (0,\ 0,\ 1,\ 0),\quad T\ (0,\ 0,\ 0,\ 1);$$

ogni punto dello spigolo TX ha $y = z = 0$, ecc.; ogni punto della faccia TXY ha $z = 0$, ecc.; il punto unità ha le coordinate (1, 1, 1, 1).

Se il piano fondamentale XYZ è il piano all'infinito dello spazio, le coordinate proiettive diventano cartesiane (omogenee o no) rispetto all'origine T e agli assi TX, TY, TZ.

Ora va notato che *tutti i risultati ottenuti in coordinate cartesiane, e riguardanti proprietà grafiche* (Parte II, Cap. I), *si trasportano senz'altro in coordinate proiettive, purchè agli elementi all'infinito, che colà talvolta esplicitamente o tacitamente intervengono, si sostituiscano ora gli elementi del piano* XYZ (cfr. n. 156).

In particolare, *un piano* π *è rappresentato, in coordinate proiettive omogenee* x, y, z, t, *da un'equazione lineare ed omogenea*

$$ux + vy + wz + rt = 0, \tag{1}$$

equazione che manca di uno, due o tre termini, secondo che il piano passa per uno, due, o tre vertici del tetraedro fondamentale; sicchè, ad es., le faccie di questo, opposte ai vertici X, Y, Z, T, hanno rispettivamente le equazioni $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

Una retta è rappresentata ancora da due equazioni lineari ed omogenee, relative a due piani passanti per essa; ad es. lo spigolo XY del tetraedro ha le equazioni $z = 0$, $t = 0$; ecc.

I coefficienti u, v, w, r della (1) (o numeri proporzionali) si dicono *coordinate proiettive omogenee* del piano π.

Di siffatte coordinate può anche darsi una definizione diretta, duale a quella adottata per le coordinate proiettive di punti. Si chiamino, a tal fine, u, v, w, r le faccie del tetraedro fondamentale opposte ad X, Y, Z, T, rispettivamente; e si dica e il piano (*piano unità*) che ha, in coordinate proiettive omogenee di punti, la equazione

$$x + y + z + t = 0. \tag{2}$$

Si dimostra allora, collo stesso ragionamento tenuto in geometria piana (n. 158), che il rapporto $\frac{u}{v}$ delle due prime coordinate del piano π, rappresentato dalla (1), ha il seguente significato geometrico:

$$\frac{u}{v} = \overline{wr}\,(uve\pi),$$

dove il secondo membro indica il birapporto dei punti segati, sullo spigolo $wr \equiv XY$ del tetraedro fondamentale, dei piani u, v, e, π, vale a dire il birapporto formato, sullo spigolo XY, dai punti Y, X e dalle intersezioni con e, π; ed analoghi significati hanno gli altri cinque rapporti delle coordinate u, v, w, r. Quanto al piano unità (2), si riconosce che esso è l'*armonico* del punto unità E, rispetto al tetraedro fondamentale (n. 152, es. 38)).

Alle coordinate proiettive di piani si trasportano senz'altro le considerazioni svolte al n. 139, a proposito delle coordinate plückeriane. Ed, in particolare, si riconosce che *un punto è rappresentato da una equazione lineare ed omogenea in coordinate proiettive omogenee di piani.*

Collo stesso ragionamento fatto in geometria piana (n. 160), si stabiliscono le relazioni che passano fra le coordinate proiettive omogenee di uno stesso punto (o di uno stesso piano), riferito a due diversi sistemi di dette coordinate. Limitiamoci ad enunciare il risultato.

Stabiliti nello spazio due diversi sistemi di coordinate proiettive ed omogenee, le coordinate di uno stesso punto (o piano) nei due sistemi sono collegate da una sostituzione lineare ed omogenea, a determinante non nullo; e viceversa. In simboli, dette x_i ed x_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$ le coordinate proiettive di uno stesso punto (o piano), riferito ai due sistemi nominati, valgono relazioni del tipo

$$\rho\, x_i' = \sum_{k=1}^{k=4} a_{ik}\, x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

dove le a_{ik} sono sedici costanti, le quali compongono un determinante del quarto ordine diverso da zero, e ρ è un coefficiente di proporzionalità non nullo, che potrebbe anche supporsi uguale ad 1.

Le formole (1), ove le x_k si riguardino come coordinate *cartesiane omogenee*, forniscono una definizione analitica delle coordinate *proiettive omogenee* (di punti) x_i'.

Le coordinate baricentriche del Möbius (1827), di cui parla l'esercizio 16) seguente, costituirono il primo sistema (non cartesiano) di coordinate proiettive di punti. Il Plücker (1828-31), ricorrendo a considerazioni simili a quella contenuta nella Osservazione del n. 160, introdusse coordinate omogenee di punti, rette... nel piano e nello spazio. La definizione (da noi seguìta) di coordinate proiettive mediante i valori di certi birapporti fu proposta dallo Staudt (1857) e sviluppata dal Fiedler (1870).

Esercizi. I. *Sulle forme di prima specie.* — 1) Date sopra una forma di prima specie due coppie di elementi (mediante le coordinate proiettive) x_1, x_2 ed y_1, y_2, si dimostri che la condizione perchè esse si dividano armonicamente è

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = 0.$$

2) Se la prima coppia è data mediante l'equazione $ax^2 + 2bx + c = 0$ (di cui x_1, x_2 sono le radici reali o immaginarie), la detta condizione diviene

$$a y_1 y_2 + b(y_1 + y_2) + c = 0.$$

3) Se anche la seconda coppia è rappresentata da una equazione

$$a' x^2 + 2 b' x + c' = 0,$$

la condizione stessa diviene

$$a c' + a' c - 2 b b' = 0.$$

Il primo membro di questa dicesi *armonizzante* delle due equazioni quadratiche; lo indicheremo brevemente con H.

4) Se due coppie, rappresentate da equazioni a coefficienti reali, si separano armonicamente, una almeno delle coppie si compone di elementi reali.

5) Calcolare il birapporto dei due elementi rappresentati dall'equazione $ax^2 + 2bx + c = 0$, coi punti di coordinate y, y'.

6) Calcolare il birapporto k dei quattro elementi rappresentati, i due primi dall'una, i due ultimi dall'altra delle equazioni

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \qquad a'x^2 + 2b'x + c' = 0.$$

Si troverà

$$\frac{1+k}{1-k} = \frac{H}{\pm 2\sqrt{\Delta\Delta'}} \qquad (H \text{ armonizz., } \Delta = b^2 - ac,\ \Delta' = \ldots).$$

Segue

$$k = \frac{(H \pm 2\sqrt{\Delta\Delta'})^2}{H^2 - 4\Delta\Delta'}.$$

7) Se le due equazioni quadratiche dell'es. 6) hanno una radice comune, allora $k = \pm\infty$ e quindi

$$H^2 - 4\Delta\Delta' = 0.$$

Il primo membro dicesi *risultante* delle due equazioni; esso può anche scriversi sotto la forma

$$(ac' - a'c)^2 - 4(ab' - a'b)(bc' - b'c).$$

8) Le due coppie rappresentate dalle due equazioni dell'es. 6), nell'ipotesi che si compongano di elementi reali, si separano o no, secondo che $H^2 - 4\Delta\Delta'$ è negativo o positivo.

9) Determinare l'equazione della coppia dei punti che separa armonicamente le due coppie date dalle precedenti equazioni; e dimostrare che essa si compone di punti reali o immaginari, secondo che le coppie date non si separano o si separano (cfr. n. 152, es. 43)).

10) Si esaminino tutti i casi in cui coincidono due dei sei birapporti, generalmente distinti, formati con quattro elementi (n. 147). Oltre ai casi già noti, o che a questi si riconducono, si troveranno i valori $k = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (radici dell'equazione $k^3 = -1$), relativi a gruppi di elementi $ABCD$ detti *equianarmonici* (Cremona), dei quali un elemento almeno è immaginario. Posto che $(ABCD)$ abbia uno dei due valori di k, lo stesso valore hanno $(ACDB)$, $(ADBC)$, mentre il valore coniugato appartiene ad $(ABDC)$, $(ADCB)$, $(ACBD)$.

11) Partendo da tre punti arbitrari di una retta, A, B, C, che si assumono come fondamentali per un sistema di coordinate proiettive, ed eseguendo successive costruzioni di quarti armonici (quindi colla sola riga), si riesce a costruire sulla retta un punto di cui sia assegnata ad arbitrio la coordinata proiettiva, purchè *razionale*. (Si proietti la retta sopra un'altra, in guisa che la proiezione di A sia il punto all'infinito; poi n. 142, es. 35)).

II) *Nel piano e nello spazio.* — 12) Assunto come fondamentale il triangolo diagonale di un quadrangolo completo, e come punto unità un vertice del quadrangolo, si scrivano le coordinate degli altri vertici e le equazioni dei sei lati. Dall'aspetto di queste risultano subito le proprietà armoniche del quadrangolo. Questione duale per il quadrilatero.

13) Scrivere l'equazione della retta armonica del punto (x_1, y_1, z_1) rispetto al triangolo fondamentale (n. 152, es. 37)). Questione duale. Questioni analoghe nello spazio.

14) Dimostrare il teorema dei triangoli omologici (n. 135), assumendo uno dei triangoli come fondamentale, e il centro di omologia come punto di unità. Questione duale. Estensione allo spazio.

15) Dimostrare il teorema sull'esagono iscritto fra due rette (n. 23, es. 16)), assumendo i tre lati di posto dispari come rette fondamentali ed una di quelle due rette come retta unità.

16) Specializzando la posizione del punto unità E rispetto al triangolo fondamentale XYZ, si ottengono particolari sistemi di coordinate proiettive, che possono prestarsi ad applicazioni metriche. Così, se E è il baricentro (punto di concorso delle mediane) del triangolo fondamentale, si ottiene il sistema di *coordinate baricentriche* (MÖBIUS), nel quale ad ogni punto P spettano tali coordinate x, y, z, che risulti P il baricentro dei punti X, Y, Z, presi coi pesi x, y, z; le dette coordinate sono pure proporzionali alle aree dei triangoli PYZ, PZX, PXY. Detti X, Y, Z gli angoli interni del triangolo, si trova che le coordinate baricentriche dell'ortocentro del triangolo sono proporzionali a tg X, tg Y, tg Z; le coordinate del centro del cerchio circoscritto sono proporzionali a sen $2X$,...; del centro del cerchio iscritto a sen X, ... La retta unità è all'infinito, e le coordinate di una retta sono proporzionali alle distanze della retta dai tre vertici del triangolo.

17) Se il punto unità si sceglie nel centro del cerchio iscritto al triangolo, le coordinate diconsi *trimetriche* o *trilineari*; esse sono proporzionali alle distanze del punto cui si riferiscono dai tre lati del triangolo. Le coordinate trimetriche del baricentro sono proporzionali a $\frac{1}{\operatorname{sen} X}, \ldots$, quelle dell'ortocentro a $\frac{1}{\cos X}, \ldots$, quelle del centro del cerchio circoscritto a cos X, ... ; ecc. Qual'è la retta unità? Nel sistema trimetrico la retta all'infinito ha l'equazione $x \operatorname{sen} X + y \operatorname{sen} Y + z \operatorname{sen} Z = 0$.

18) Dimostrare, valendosi del sistema baricentrico o trimetrico, che il baricentro, l'ortocentro e il centro del cerchio circoscritto in ogni triangolo sono allineati (cfr. n. 33, es. 8)).

19) Come si presenta la condizione di parallelismo di due rette nell'uno o nell'altro sistema?

20) Come si specializzano le coordinate non omogenee di punti e rette, se il vertice Z del triangolo fondamentale è improprio ed il punto unità è equidistante dai lati ZX, ZY?

21) Estendere allo spazio i particolari sistemi di coordinate proiettive considerati negli es. 16), 17).

Capitolo III.

Proiettività tra due forme di prima specie.

162. Concetto generale di corrispondenza. — È fondamentale nelle matematiche moderne il concetto di *corrispondenza*, del quale già incidentalmente abbiamo fatto uso più volte. Vogliamo ora dedicarvi qualche parola, per limitarci poi a studiare una famiglia particolare di corrispondenze.

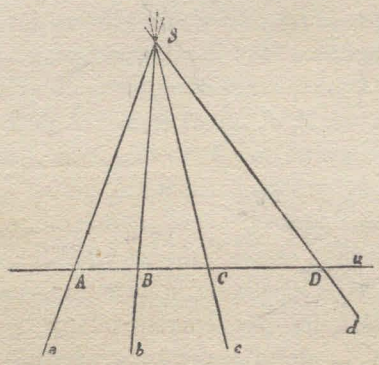
Siano assegnate due classi $(a, b, c, \ldots)$, $(a', b', c', \ldots)$ di elementi qualisivogliano (numeri, punti, oggetti...), in numero finito o infinito; e sia nota inoltre una legge, in virtù della quale ad un qualsiasi elemento, ad es. a, della prima classe venga associato, in modo perfettamente determinato, un elemento (o più elementi) $a', \ldots$ della seconda classe. Diremo allora che quella legge fissa una *corrispondenza*, con cui si passa dalla prima classe alla seconda; l'elemento a della prima classe ha per corrispondente (o corrispondenti) l'elemento (o gli elementi) $a', \ldots$ della seconda classe. Se ad un elemento a, comunque scelto nella prima classe, corrisponde *un solo* elemento a' della seconda, la corrispondenza si dice *univoca*; e si dice *biunivoca* quando inoltre, scelto comunque un elemento a' della seconda classe, esiste nella prima uno ed un solo elemento a, di cui a' sia il corrispondente. Quando si assegna una corrispondenza biunivoca fra due classi, si vengono in realtà a fissare due corrispondenze, *inverse* l'una dell'altra, delle quali una conduce da un elemento qualsiasi a della prima classe all'elemento corrispondente a' della seconda, mentre l'altra riconduce da a' ad a, e distrugge, per dir così, l'effetto della prima.

Facciamo ora qualche ipotesi sulla natura degli elementi componenti le due classi Se questi elementi sono numeri, e precisamente $a, b, c, \ldots$ si riguardano come valori assunti da una variabile x, mentre $a', b', c', \ldots$ sono valori assunti da una variabile y, una corrispondenza univoca fra la prima classe e la seconda definisce y come *funzione* di x. Se la prima classe si compone di elementi geometrici, ad es. degli elementi di una forma di prima specie, e la seconda classe si compone di numeri reali, una corrispondenza biunivoca fra le due classi (quando sia inoltre continua) stabilisce un *sistema di coordinate* sulla forma (n. 8). Finalmente, se le due classi si compongono di elementi geometrici, e sono, ad es., due forme di prima specie, si avrà una corrispondenza geometrica fra le due forme.

Porteremo ora esempi di certe particolari corrispondenze biunivoche fra due forme di prima specie, delle quali poi dovremo occuparci.

163. Esempi di corrispondenze proiettive fra due forme di prima specie.

a) Se si proietta una punteggiata $A, B, C, D, \ldots$, di sostegno u, da un centro S fuori di u, si ottiene un fascio di rette $a, b, c, d, \ldots$, il quale è in corrispondenza biunivoca colla punteggiata (cfr. n. 116). In generale, se si passa da una forma di prima specie ad una seconda forma di prima specie con una o più operazioni di proiezione e sezione, si viene a stabilire fra le due forme una corrispondenza biunivoca, per la quale si corrispondono due elementi di queste che si ottengano l'uno dall'altro mediante quelle operazioni. Una proprietà notevole di una siffatta corrispondenza (proprietà che, come vedremo, basta a definirla) è che il birapporto di quattro elementi arbitrari dell'una forma è uguale al birapporto dei quattro elementi corrispondenti dell'altra (n. 143).



b) Trasportando una punteggiata u in una nuova posizione u', i punti $A, B, C, D, \ldots$ di u si porteranno in certi punti $A', B', C', D', \ldots$ di u', e tra le due punteggiate verrà a stabilirsi una corrispondenza biunivoca, quando si riguardino come corrispondenti due punti, come $A, \ldots$ ed $A', \ldots$, che siano le posizioni iniziale e finale di uno stesso punto mobile. Ora se, come supporremo, il movimento non altera le lunghezze dei segmenti, la distanza di due punti arbitrari della punteggiata u sarà uguale alla distanza dei punti corrispondenti della punteggiata u' (che perciò si dirà *uguale* alla u); ed in conseguenza il birapporto di quattro punti arbitrari di u uguaglierà il birapporto dei corrispondenti punti di u'.

Analogamente un movimento nello spazio trasporta un fascio di rette (o di piani) in un nuovo fascio; e tra i due fasci (*uguali*) passa una corrispondenza biunivoca tale, che il birapporto di quattro elementi arbitrari dell'un fascio risulta certo uguale al birapporto dei corrispondenti elementi dell'altro fascio.

Gli esempi suesposti rendono ormai chiara la definizione che segue.

164. Definizione della proiettività tra due forme di prima specie. — *Si dice che due forme di prima specie sono in corrispondenza proiettiva (o riferite proiettivamente, o proiettive), quando ad ogni elemento di ciascuna di esse corrisponde un solo elemento dell'altra, colla condizione che il birapporto di quattro elementi, comunque scelti, nell'una forma sia uguale al birapporto degli elementi corrispondenti nell'altra forma.* L'ultima con-

dizione determina quali corrispondenze biunivoche debbano riguardarsi come proiettive.

Per indicare che due forme di prima specie sono riferite proiettivamente, e che agli elementi $A, B, C, D, E, \ldots$ della prima corrispondono ordinatamente gli elementi $A', B', C', D', E', \ldots$ della seconda, scriveremo

$$(1) \qquad A\,B\,C\,D\,E \ldots \overline{\wedge}\; A'\,B'\,C'\,D'\,E' \ldots$$

La (1) (nella quale si può anche supporre che a sinistra, e quindi a destra, sia scritto un numero finito $n \geqq 4$ di elementi corrispondenti delle due forme) riassume le uguaglianze che si ottengono scegliendo in tutti i modi quattro elementi della prima forma, e paragonandone il birapporto a quello degli elementi corrispondenti della seconda forma. Le dette uguaglianze non sono però tutte indipendenti, come poi vedremo.

Il concetto di corrispondenza proiettiva (sotto il nome di *collineare*) è dovuto a MÖBIUS (1827); di essa si occuparono successivamente STEINER (1832), che adottò la denominazione da noi accolta, CHASLES (1831), che disse *omografica* la corrispondenza, STAUDT (1847) ...

165. — Gli esempi di corrispondenze proiettive portati nel n. 163 dànno luogo ai seguenti teoremi:

a) *Due forme di prima specie, che si ottengano l'una dall'altra mediante una o più operazioni di proiezione e sezione, sono riferite proiettivamente;* e vedremo tra poco che sussiste pure il teorema inverso.

b) *L'uguaglianza tra due forme di prima specie è una particolare proiettività;* in altre parole: se una forma di prima specie si assoggetta ad un movimento (che non alteri entro ad essa la mutua posizione degli elementi), tra la posizione iniziale e la posizione finale della forma passa una proiettività.

166. Prodotto di proiettività. — Dalla definizione di corrispondenza proiettiva risulta subito che, *se due forme di prima specie sono riferite proiettivamente ad una stessa forma, esse sono riferite proiettivamente tra loro.* In simboli, dalle due relazioni

$$A\,B\,C\,D \ldots \overline{\wedge}\; A'\,B'\,C'\,D' \ldots,$$
$$A'\,B'\,C'\,D' \ldots \overline{\wedge}\; A''\,B''\,C''\,D'' \ldots,$$

segue

$$A\,B\,C\,D \ldots \overline{\wedge}\; A''\,B''\,C''\,D'' \ldots$$

Infatti tra queste due ultime forme viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca, quando si riguardino come corrispondenti due elementi (come A ed A'') i quali abbiano uno stesso elemento (A') corrispondente nella forma

intermedia. E la detta corrispondenza è una proiettività, giacchè, se A, B, C, D sono quattro elementi arbitrari della prima forma, si ha per ipotesi

$$(A\,B\,C\,D) = (A'B'C'D'), \qquad (A'B'C'D') = (A''B''C''D''),$$

donde si trae

$$(A\,B\,C\,D) = (A''B''C''D'').$$

Sono corollari immediati del teorema e degli esempi sopra riportati:

Due forme riferite proiettivamente rimangono nella detta relazione anche se i loro sostegni vengono comunque spostati nello spazio.

Se due forme sono riferite proiettivamente, saranno riferite proiettivamente anche due forme che da quelle ordinatamente si deducano mediante operazioni di proiezione e sezione.

Osservazione. — Il teorema di questo paragrafo può enunciarsi in altro modo. Dette F, F', F'' le tre forme di prima specie sopra considerate, ricordiamo anzitutto che la proiettività fra F ed F' è la riunione di due corrispondenze od operazioni, inverse una dell'altra (n. 162), dette pure proiettività: una prima, che indicheremo con P, la quale permette di passare dalla forma F alla forma F' (e dagli elementi A, B,... agli elementi A', B',...); una seconda operazione che si suole indicare con P^{-1}, la quale fa ritornare da F' ad F (e da A' B',..., ad A, B,...), Similmente indichiamo con P' la operazione, con cui si passa dalla forma F' alla forma F'' (e precisamente da A', B'..., ad A'', B' ...). Eseguendo, una di seguito all'altra, le due operazioni P e P' (prima P e poi P'), si ottiene una operazione composta che conduce da F ad F'', e precisamente dagli elementi A, B,..., agli elementi A'', B''... Questa nuova operazione si suole indicare con $P \cdot P'$, e si chiama *prodotto* delle due operazioni (o corrispondenze) P e P', applicate nell'ordine scritto. Il prodotto di due corrispondenze univoche è evidentemente una corrispondenza univoca. Il ragionamento precedente prova di più, che *il prodotto di due proiettività è ancora una proiettività.* Questo teorema, equivalente al primitivo, può d'altronde estendersi, insieme alla definizione di prodotto, al caso di più proiettività

Come esempio, si osservi che il prodotto di una proiettività P per la sua inversa P^{-1} è una proiettività, che fa corrispondere ad ogni elemento della forma primitiva l'elemento stesso. Questa proiettività si chiama *identità*, e talvolta si indica con 1; sicchè si scrive $P \cdot P^{-1} = 1$.

167. Posizioni particolari di forme proiettive. — I sostegni di due forme proiettive possono essere situati comunque nello spazio. Ma se quelli si trovano in posizioni particolari, si verificano certe proprietà che occorre mettere in rilievo.

Supponiamo anzitutto che si abbiano due punteggiate proiettive u, u', situate in uno stesso piano. Il punto $u\,u'$, comune ai due sostegni, va con-

siderato, separatamente, come elemento di u o di u'; conviene perciò indicarlo con due lettere diverse, ad es. A e B', per mettere in evidenza quale sia la forma a cui viene attribuito. Al punto A di u corrisponde sopra u' un certo punto A', cui si perviene mediante la operazione (proiettività) diretta, sia P, con cui si passa da u ad u'. In generale accadrà che A' sia distinto da A. Similmente, se al punto uu', considerato sopra u' e chiamato B', applichiamo la operazione inversa P^{-1}, con cui si passa da u' ad u, arriviamo ad un punto B di u, generalmente distinto da B'. Se però, in un caso particolare, A coincide con A' (e quindi B' con B), allora A si dirà punto *unito*. E sempre, in una proiettività fra due forme dello stesso nome, dicesi *unito* un elemento che appartenga alle due forme e, considerato nell'una, abbia per corrispondente sè stesso nell'altra.

Considerazioni analoghe si faranno se *ogni* elemento dell'una forma appartiene all'altra, nella quale ipotesi le due forme si dicono *sovrapposte*. Tali sono adunque due punteggiate giacenti sulla stessa retta; due fasci di rette concentrici in uno stesso piano; due fasci di piani aventi lo stesso asse.

Così, se u, u' sono due punteggiate sovrapposte, ogni punto $A \equiv B'$ del sostegno comune va considerato due volte; al detto punto corrispondono, in virtù della proiettività P o P^{-1} rispettivamente, i due punti A' di u', o B di u. I due nuovi punti sono distinti dal punto di partenza, a meno che questo non sia punto unito, e generalmente sono distinti fra loro, perchè la proiettività P differisce generalmente dalla inversa P^{-1}.

Per renderci ragione di queste ultime avvertenze sopra un esempio concreto, supponiamo che l'operazione P sia la traslazione di un centimetro nel verso positivo di u; sicchè l'operazione inversa P^{-1} sarà la traslazione di un centimetro in verso negativo. Allora ad uno stesso punto $A \equiv B'$ della retta corrispondono due punti A' e B, che distano entrambi di un centimetro da A, ma il primo in verso positivo, il secondo in verso negativo. Perciò A' e B sono distinti tra loro e da A.

Riprendendo due forme sovrapposte qualsivogliano, osserviamo che una particolarissima proiettività si ottiene facendo corrispondere ad ogni elemento del comune sostegno l'elemento stesso. Essa dicesi *identità* ed ha come unito ogni elemento.

È chiaro che *una proiettività fra le due forme sovrapposte, la quale abbia tre elementi uniti, ha unito ogni altro elemento ed è l'identità.* Infatti dalla relazione

$$A\,B\,C\,D\ldots \overline{\wedge}\; A'B'C'D'\ldots,$$

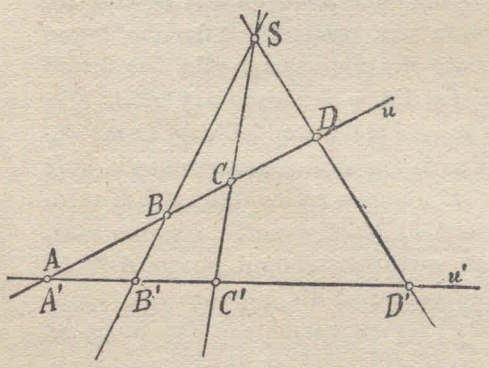
seguono l'uguaglianza $(A\,B\,C\,D) = (A'B'C'D')$ e le analoghe; ora se A, B, C sono uniti, e quindi coincidono rispettivamente con A', B', C', dovrà anche D coincidere con D' (n. 144).

163. Posizione prospettiva di forme proiettive. — Due forme proiettive possono assumere altre posizioni notevoli, dette *posizioni prospettive.*

Per quanto riguarda due forme di nome diverso, noi già dicemmo (n. 116) che esse diconsi *prospettive* (e son certo proiettive), quando una di esse è proiezione o sezione dell'altra; elementi corrispondenti sempre si appartengono.

Si dice inoltre che due forme dello stesso nome, giacenti in uno stesso piano (e riferite proiettivamente), sono *prospettive* nei seguenti casi, che si corrispondono per dualità piana:

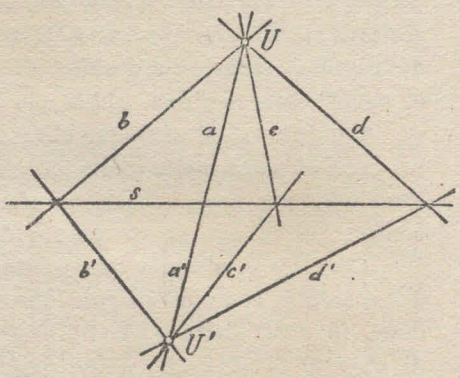
quando due punteggiate sono ottenute segando uno stesso fascio di



rette con due trasversali; allora le rette congiungenti punti corrispondenti delle due punteggiate passano tutte per uno stesso punto (*centro di prospettiva*).

Due punteggiate prospettive hanno *unito* il punto comune ai loro sostegni.

quando due fasci di rette sono ottenuti proiettando una stessa punteggiata da due centri diversi; allora i punti di incontro di rette corrispondenti dei due fasci stanno tutti sopra una stessa retta (*asse di prospettiva*).



Due fasci prospettivi hanno *unita* la retta congiungente i loro centri.

È importante notare che quest'ultima osservazione si inverte. Infatti:

Se due punteggiate riferite proiettivamente, non sovrapposte, hanno un punto unito, esse sono prospettive.

Se due fasci di rette (di un piano) riferiti proiettivamente, non sovrapposti, hanno una retta unita, essi sono prospettivi.

Dimostriamo, ad es., la proposizione di sinistra. Posto che la proiettività fra le punteggiate u ed u' sia

$$(1) \qquad A\,B\,C\,D\,\ldots \overline{\wedge}\, A'\,B'\,C'\,D'\,\ldots,$$

e che $A \equiv A'$ sia il punto unito, consideriamo la intersezione S delle rette BB' e CC'. Proiettando da S i punti di u sopra u', e dette D'', ... le proiezioni di D ..., sussiste la uguaglianza (n. 143)

$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D''),$$

insieme alle analoghe. Ma dalla (1) segue

$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D'),$$

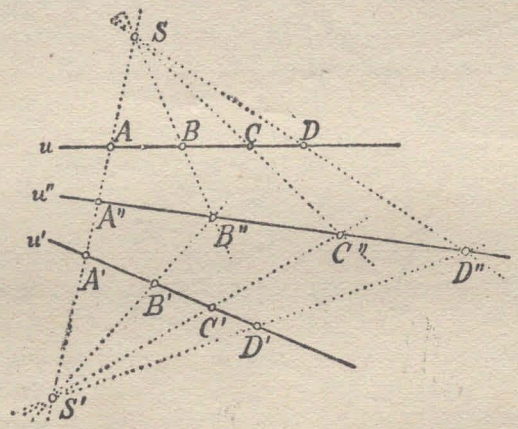
colle analoghe. Il paragone dei secondi membri prova (n. 144) che i punti $D'', \ldots$ coincidono ordinatamente coi punti $D', \ldots$; in altre parole le rette $DD'', \ldots$ passano tutte per S.

Osservazione. — Dalla definizione segue che la relazione prospettiva fra due forme dipende dalla mutua posizione delle forme stesse. Due forme *prospettive*, o meglio *due forme proiettive in posizione prospettiva*, rimangono proiettive, ma perdono generalmente la posizione prospettiva, quando i loro sostegni vengano spostati l'uno rispetto all'altro. Inversamente, due punteggiate o due fasci di rette proiettivi, ma non prospettivi, possono esser sempre portati in tale posizione da divenir prospettivi; giacchè basta collocare le due forme in uno stesso piano, ed in guisa che un elemento prefisso dell'una venga a coincidere coll'elemento corrispondente dell'altra, senza che le forme si sovrappongano.

Segue ancora che due forme prospettive ad una terza non sono generalmente prospettive tra loro, ma soltanto proiettive; si può dire che il prodotto di due o più prospettività non è in generale una prospettività, ma solo una proiettività.

169. Costruzione di una proiettività fra due forme di prima specie. — Siamo ora in grado di costruire una proiettività fra due forme di prima specie, la quale soddisfi a certe condizioni prestabilite; dato un qualsiasi elemento sulla prima forma, ci proponiamo di costruire l'elemento corrispondente della seconda forma.

Si tratti, ad es., di due punteggiate u, u', situate in uno stesso piano, ma non sovrapposte. È facile vedere, e risulterà dal seguito, che in infiniti modi si possono riferire proiettivamente le due punteggiate in guisa che due punti A, B, assegnati ad arbitrio sopra u, abbiano per corrispondenti due punti A', B', assegnati ad arbitrio sopra u'. Esaminiamo perciò se sia possibile *costruire una proiettività fra le due punteggiate* u, u', *in guisa che a tre punti arbitrari* A, B, C *di* u *corrispondano tre punti arbitrari* A', B', C' *di* u'.



Supposto anzitutto che esista una proiettività

$$(1) \qquad A\,B\,C\,D\,\ldots \overline{\wedge}\, A'\,B'\,C'\,D'\,\ldots$$

soddisfacente alle condizioni suddette, proiettiamo le due punteggiate u, u' da due centri arbitrari S, S', situati ordinatamente fuori di u, u'. Otter-

remo due fasci proiettivi che, con una scrittura assai chiara, indicheremo così:

$$S(A\,B\,C\,D\,...) \overline{\wedge} S'(A'\,B'\,C'\,D'\,...).$$

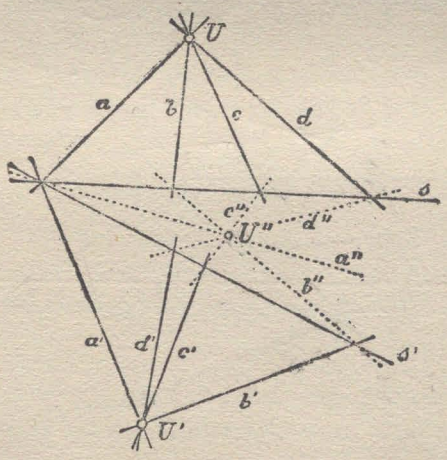
Ora se i punti S, S' vengono scelti sulla retta $A\,A'$,[1] essa risulterà *unita* nei due fasci. Questi in conseguenza (n. 168) sono prospettivi, sicchè i punti intersezioni

$$S\,B \cdot S'\,B' \equiv B'', \qquad S\,C \cdot S'\,C' \equiv C'', \qquad S\,D \cdot S'\,D' \equiv D'', \ldots$$

si trovano sopra una stessa retta u'', la quale può tracciarsi perchè i due primi punti son noti.

Viceversa, detto A'' il punto in cui u'' sega $A\,A'$, se noi proiettiamo la punteggiata $A''\,B''\,C''\,D''\,\ldots$, di sostegno u'', una volta da S sopra u, una seconda volta da S' sopra u', otteniamo due punteggiate (1), le quali sono proiettive a quella, e quindi tra loro, e soddisfano inoltre alle condizioni imposte dall'enunciato. Dunque il problema proposto è sempre risolubile; ed abbiamo anzi visto come possa risolversi.

Ma esisterà una sola proiettività fra u ed u', che muti la terna $A\,B\,C$ nella terna $A'\,B'\,C'$? La domanda è lecita, perchè nella costruzione compariscono vari elementi arbitrari, potendosi scegliere S, S' comunque sopra una delle tre rette $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$. Si potrebbe dunque pensare che una nuova scelta di questi punti conducesse ad una nuova proiettività, nella quale al punto D di u venisse a corrispondere un nuovo punto D_1' di u'. In tal caso però si avrebbe



$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D_1'),$$

mentre per la (1)

$$(A\,B\,C\,D) = (A'\,B'\,C'\,D');$$

di qua si conclude che D' coincide con D_1'. La proiettività, di cui parla l'enunciato, è dunque pienamente determinata.

Noi abbiamo esaminato sinora solo il caso di due punteggiate, situate in un piano e non sovrapposte. A questo caso però può ridursi ogni altro, sostituendo, ove occorra, a due forme assegnate, che debbano esser riferite proiettivamente, due punteggiate nelle condizioni suddette, le quali da

[1] La scelta andrebbe esclusa se A, od A', cadesse nel punto $u\,u'$; ma allora alla retta $A\,A'$ si sostituirebbe la $B\,B'$, o la $C\,C'$.

quelle forme si ottengano mediante preliminari operazioni di proiezione e sezione.

D'altra parte, mediante trasformazione per dualità piana (o solida), si possono dedurre nuove costruzioni dalla costruzione relativa alle punteggiate. Così la figura di pag. 246 risolve il problema di riferire proiettivamente due fasci di rette U, U', situati in un piano ma non sovrapposti, in guisa che alle rette a, b, c del fascio U corrispondano le rette a', b', c' del fascio U'. I due fasci sono segati colle trasversali s, s' condotte arbitrariamente per il punto aa'; ecc.

170. Teorema fondamentale. — Indipendentemente dalla costruzione che si vuol seguire, risulta dalle cose dette la proprietà fondamentale della proiettività:

Tra due forme di prima specie si può stabilire sempre, ed in un sol modo, una proiettività la quale faccia corrispondere a tre elementi, assegnati ad arbitrio sulla prima forma, tre elementi, pure assegnati ad arbitrio sulla seconda.

Le considerazioni del n. 169 provano inoltre che questa proiettività può sempre costruirsi mediante un certo numero finito di operazioni di proiezione e sezione, conducenti da ogni elemento della prima forma al corrispondente elemento dell'altra (quindi colla sola riga, se si opera sopra un piano).

Siccome d'altra parte si sa (n. 165) che due forme di prima specie, una delle quali possa dedursi dall'altra mediante una o più operazioni di proiezione o sezione, sono in corrispondenza proiettiva, così si conclude che la definizione di proiettività da noi data (n. 164) può sostituirsi colla seguente, adottata da vari autori:

Due forme di prima specie diconsi riferite proiettivamente, quando si può passare dall'una all'altra (e precisamente da ogni elemento dell'una al corrispondente elemento dell'altra) *con un numero finito di proiezioni e sezioni.*[1]

* **Osservazione.** — Il primo teorema è così importante, che val la pena di indicarne una dimostrazione più diretta.

Supposto anzitutto che esista una proiettività, la quale muti gli elementi A, B, C della prima forma negli elementi A', B', C' della seconda, quella proiettività deve mutare ogni altro elemento D della prima forma in quell'elemento, *pienamente determinato*, D' della seconda, tale che risulti

$$(1) \qquad (ABCD) = (A'B'C'D').$$

Sicchè la proiettività, se esiste, è unica.

[1] O in altra parola: chiamasi *proiettività* il prodotto di un numero finito di corrispondenze prospettive.

Fatta ora astrazione dall'esistenza della proiettività, si associ ad ogni elemento D della prima forma, quell'elemento D' della seconda determinato dalla (1). Si otterrà così una corrispondenza biunivoca tra le due forme, nella quale si corrisponderanno due elementi, come D, D', aventi la stessa coordinata proiettiva (1) rispetto alle terne di elementi fondamentali $(A\,B\,C)$ ed $(A'B'C')$. Ora il birapporto di quattro posizioni arbitrarie di D certo uguaglia il birapporto delle quattro posizioni corrispondenti di D', giacchè entrambi i birapporti sono espressi dal birapporto delle quattro coordinate proiettive (n. 154), comuni agli uni e agli altri elementi. Dunque la corrispondenza suddetta è una proiettività, di cui così viene dimostrata l'esistenza.

***171. Teorema di** STAUDT. — Risulta dall'ultima osservazione che, date due forme proiettive, le uguaglianze che si ottengono paragonando i birapporti dell'una coi corrispondenti birapporti dell'altra non sono tutte indipendenti tra loro. Se infatti sussistono le uguaglianze che provengono dalla (1) (n. 170) tenendo fissi gli elementi A, B, C, A', B', C', e facendo variare in tutti i modi possibili la coppia di elementi corrispondenti D, D', si verificherà in conseguenza ogni altra uguaglianza che si ricavi scegliendo *comunque* due quaterne di elementi omologhi. La prima definizione di proiettività (n. 164) contiene adunque un numero esuberante di condizioni.

Dello stesso fatto ci possiamo persuadere anche per un'altra via. Vedremo infatti che, dovendo decidere se due forme di prima specie, in corrispondenza biunivoca, sono proiettive, basta considerare nell'una forma solo quei birapporti che hanno un valor numerico prefisso, ad es. -1, e paragonarli coi corrispondenti birapporti dell'altra forma; giacchè, quando si sia riscontrato che anche questi hanno lo stesso valore, si potrà conchiudere che *ogni* birapporto dell'una forma è uguale al corrispondente birapporto dell'altra. Il valore -1 del birapporto ha poi uno speciale interesse, perchè il relativo gruppo di elementi risulta armonico, e può quindi essere definito e costruito in base a sole considerazioni grafiche (n. 149, Oss.). Ciò basta a spiegare quale importanza abbia, nello sviluppo della Geometria proiettiva fondata sopra pure considerazioni grafiche (secondo STAUDT), il teorema seguente:

Una corrispondenza biunivoca fra due forme di prima specie, per la quale ad ogni gruppo armonico dell'una forma corrisponda un gruppo armonico dell'altra, è una proiettività.[1]

Assumiamo tre elementi arbitrari A, B, C della prima forma e gli elementi corrispondenti A', B', C' della seconda forma, come elementi fondamentali di due sistemi di coordinate proiettive. Dette x, x' le coordinate di due elementi corrispondenti X, X' delle due forme, la corrispondenza biunivoca fra X ed X' si traduce in una corrispondenza biunivoca fra le variabili x ed x'; tutto si riduce a provare che, in virtù delle ipotesi del teorema, l'ultima corrispondenza è la uguaglianza $x = x'$.

---

[1] Se come definizione della *proiettività* si assume quella data al n. 170, l'enunciato del teorema concorda con quello di STAUDT. Una dimostrazione (diversa da questa), secondo le tracce di STAUDT, si trova nella Geometria proiettiva di ENRIQUES, Cap. V.

1) Dimostreremo in primo luogo che « a valori crescenti (in senso algebrico) di x corrispondono valori crescenti di x' », o, come si suol dire, che x' è funzione crescente di x. Premettiamo, a tal fine, la osservazione che due coppie di elementi separantisi o non separantisi dell'una forma, hanno per corrispondenti sull'altra forma due coppie che, rispettivamente, si separano o non si separano. Infatti, detti A, B, C, D quattro elementi arbitrari della prima forma, e posto, ad es., che le due coppie AB, CD non si separino, esisteranno (n. 152, es. 43)) due elementi reali U, V dividenti armonicamente le coppie AB, CD. Ma allora gli elementi corrispondenti U', V' dovranno (per la ipotesi del teorema) dividere armonicamente le coppie $A'B', C'D'$, le quali per conseguenza non si separeranno. Segue che il birapporto di quattro elementi arbitrari dell'una forma ha lo stesso segno del birapporto degli elementi corrispondenti dell'altra (n. 144). E segue ancora che, detto E un quinto elemento arbitrario della prima forma, a cui corrisponda l'elemento E' sulla seconda, le due differenze

$$(ABCD) - (ABCE), \qquad (A'B'C'D') - (A'B'C'E')$$

hanno lo stesso segno. Si ha infatti (n. 147):

$$(ABCD) - (ABCE) = (ABCD)\left\{1 - \frac{(ABCE)}{(ABCD)}\right\}$$

$$= (ABCD)\left\{1 - (ABDE)\right\} = (ABCD)\,(ADBE);$$

similmente

$$(A'B'C'D') - (A'B'C'E') = (A'B'C'D')\,(A'D'B'E'),$$

e i due prodotti di birapporti hanno certo lo stesso segno per la osservazione precedente. Ora, dette x_0, x_1 le coordinate proiettive di D, E, e x_0', x_1' le coordinate proiettive di D', E', quelle due differenze valgono $x_0 - x_1$ e $x_0' - x_1'$; dunque se, ad es., $x_0 < x_1$, sarà pure $x'_0 < x_1'$, il che giustifica la nostra affermazione.

2) Dimostriamo in secondo luogo che « se la variabile x assume un valore razionale qualsiasi, la variabile x' assumerà in corrispondenza lo stesso valore, $x' = x$ ». Ciò risulta intanto dalle ipotesi fatte se $x = 0, 1$, perchè l'elemento X avente quella coordinata cade in B, C rispettivamente, ed allora X' cade in B', C', sicchè $x' = 0, 1$. Se poi è, ad es., $x = 2$, l'elemento X sarà il coniugato armonico di B ($x = 0$) rispetto ad A ($x = \pm\infty$) e C ($x = 1$), e quindi X' sarà il coniugato armonico di B' ($x' = 0$) rispetto ad A' ($x' = \pm\infty$) e C' ($x' = 1$), ed avrà la coordinata $x' = 2 = x$. In generale, se x è razionale, X può costruirsi partendo da A, B, C, ed eseguendo un numero finito di costruzioni di quarti armonici (n. 161, es. 11)). Ma allora, eseguendo sulla seconda forma le stesse operazioni, nello stesso ordine, a partire da A', B', C', si perverrà all'elemento X'; e poichè le coordinate x di X ed x' di X' dipendono esclusivamente dalle costruzioni impiegate per ottenere gli elementi stessi, risulta l'uguaglianza $x' = x$.

3) Ormai per concludere che quella uguaglianza vale in ogni caso, resta solo da dimostrare che, anche quando la variabile x assume un valore irrazionale, la variabile x' assume lo stesso valore. Sia x_1 un valore *irrazionale* della variabile x, e siano x_0, x_2 due valori *razionali* della variabile stessa, dei quali il primo sia

inferiore, e il secondo superiore ad x_1; dunque $x_0 < x_1 < x_2$. Indichiamo con x_0', x_1', x_2' i valori corrispondenti della variabile x'. Segue anzitutto dalla 1) che sarà $x_0' < x_1' < x_2'$; e dalla 2) che $x_0' = x_0$, $x_2' = x_2$; sicchè in fine dalle ipotesi $x_0 < x_1 < x_2$, seguono le conseguenze $x_0 < x_1' < x_2$. Ma allora i due numeri x_1, x_1' sono tali, che ogni numero razionale inferiore o superiore al primo è rispettivamente, inferiore o superiore al secondo, e tanto basta per concludere che $x_1' = x_1$. Con ciò il teorema è dimostrato.

172. Equazione della proiettività. — Siano u, u' due punteggiate proiettive, comunque situate, su ciascuna delle quali sia fissato un sistema di ascisse. Se indichiamo con x, x' le ascisse di due punti corrispondenti variabili X, X', tra quei due numeri deve passare una tal relazione analitica che, dato l'uno, l'altro rimanga completamente determinato.

Per stabilire questa relazione, supponiamo determinata la proiettività coll'assegnare tre punti A, B, C di u, aventi le ascisse a, b, c, ai quali debbano corrispondere su u' i punti A', B', C' di ascisse a', b', c'. La relazione geometrica che definisce la proiettività

$$(A\,B\,C\,X) = (A'\,B'\,C'\,X'),$$

si traduce nella relazione algebrica (n. 145, a))

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-x}{b-x} = \frac{a'-c'}{b'-c'} : \frac{a'-x'}{b'-x'},$$

ossia

$$\frac{a-x}{b-x} : \frac{a'-x'}{b'-x'} = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a'-c}{b'-c'}.$$

Posto ora

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a'-c'}{b'-c'} = \frac{(a-c)\,(b'-c')}{(b-c)\,(a'-c')} = k,$$

quantità finita e diversa da zero poichè tali sono le quattro differenze che vi compariscono, avremo

$$\frac{(a-x)\,(b'-x')}{(b-x)\,(a'-x')} = k.$$

Questa, liberando da frazioni e sviluppando, acquista la forma

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \tag{1}$$

dove si è posto per brevità

$$\alpha = 1-k, \quad \beta = a'k - b', \quad \gamma = bk - a, \quad \delta = ab' - ba'k.$$

I quattro coefficienti α, β, γ, δ sono costanti (indipendenti dalla posizione degli elementi variabili X ed X'), tali che la espressione

$$\alpha\delta - \beta\gamma = k(a-b)\,(a'-b')$$

risulta diversa da zero.

La relazione (1) *rappresenta la proiettività* considerata, è *la equazione della proiettività;* con ciò intendiamo dire che due punti corrispondentisi in questa proiettività hanno coordinate soddisfacenti alla (1), e viceversa.

Esaminiamo se, inversamente, ogni relazione del tipo (1), nella quale α, β, γ, δ sono quattro costanti tali che $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, sia atta a rappresentare, nel senso ora stabilito, una proiettività tra due punteggiate, di cui l'una sia descritta da un punto X di ascissa x, e l'altra da un punto X' di ascissa x'. Notiamo perciò che la (1), risolta rispetto ad x', si presenta sotto la forma

$$x' = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \tag{1'}$$

e deve riguardarsi adunque (n. 146) come una trasformazione lineare fra le variabili x, x', avente il determinante $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ (per ipotesi). Ora sappiamo già (n. 146) che una siffatta trasformazione determina tra le variabili x, x' una corrispondenza biunivoca tale che il birapporto di quattro valori arbitrari di x uguaglia il birapporto dei corrispondenti valori di x'. Risulta di qua che effettivamente x, x' sono ascisse di punti corrispondenti di una proiettività.

Una equazione (1), in cui ciascuna delle due variabili x, x', presa isolatamente, entra a primo grado, dicesi *bilineare;* ed ogni equazione bilineare fra x ed x' può porsi sotto la forma (1) (avvertendo che qualcuno dei coefficienti potrebbe esser nullo). Diremo adunque:

Una proiettività fra due punteggiate è rappresentata da una equazione bilineare

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

fra le ascisse x, x' di punti corrispondenti; e viceversa, ogni equazione siffatta rappresenta una proiettività.

La detta equazione, o la equivalente (1'), si sarebbe potuta assumere come definizione della proiettività tra punteggiate. Le proprietà algebriche di quella equazione, o della trasformazione lineare, si traducono nelle proprietà geometriche della proiettività. Qui notiamo che, valendosi della equazione (1) di una proiettività, si possono definire e considerare anche coppie di punti *immaginari* corrispondenti nella proiettività, dei quali le ascisse soddisferanno la (1). Sussiste ancora il teorema che il birapporto di quattro punti, anche immaginari, dell'una forma uguaglia il corrispondente birapporto dell'altra forma, perchè la dimostrazione data nel n. 146 vale per numeri reali o complessi.

L'equazione bilineare (1) di una proiettività dipende essenzialmente da *tre* quantità (*costanti*), che sono i rapporti di tre dei coefficienti al quarto. Sarà dunque determinato il problema di costruire (o scrivere l'equazione di) una proiettività, che soddisfi a tre condizioni assegnate, traducentisi in tre relazioni fra i tre rapporti suddetti.

* **Osservazione I.** — Il procedimento ed il teorema, che precede, sussistono pure se, in luogo di punteggiate, si considerano due forme qualsivogliano di prima specie, riferite proiettivamente, sulle quali siano fissati due sistemi di coordinate proiettive, essendo x ed x' le coordinate di elementi omologhi. Ciò in virtù del n. 154, *b*).

L'osservazione si giustifica anche così. Se gli elementi fondamentali nei due sistemi di coordinate si corrispondono, allora l'equazione della proiettività è evidentemente $x' = x$. Che se poi si mutano sopra una delle due forme, ad es. sulla prima, gli elementi fondamentali, si deve sostituire ad x una espressione del tipo $\frac{mx+n}{px+q}$ (dove x ora designa la nuova coordinata) (n. 154, *c*); si ritrova così una equazione del tipo (1').

Se si adottano coordinate proiettive omogenee (x, y), (x', y') (n. 155), in luogo della (1') si avranno due equazioni della forma

$$(1'') \qquad \begin{cases} \rho x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ \rho y' = a_{21}x + a_{22}x, \end{cases}$$

dove ρ è un fattore di proporzionalità arbitrario ma non nullo, ed $a_{11}, \ldots, a_{22}$ sono quattro costanti, il cui determinante $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

* **Osservazione II.** — Ritornando alla (1), si può chiedere quale ne sia il significato geometrico quando $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. Posto che non siano tutti nulli i coefficienti della (1), e che sia ad es. $\alpha \neq 0$, si moltiplichino per α i due membri della (1); tenuto conto della $\alpha\delta = \beta\gamma$, potremo scrivere la nuova equazione sotto la forma

$$(\alpha x + \gamma)\ (\alpha x' + \beta) = 0.$$

Questa ci dice che alla (1) si può soddisfare, o prendendo $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$ e lasciando arbitrario x', o prendendo $x' = -\frac{\beta}{\alpha}$ e lasciando arbitrario x. Dunque, nella ipotesi presente, la (1) stabilisce una corrispondenza fra le due forme, tale che all'elemento $x = -\frac{\gamma}{\alpha}$ della prima corrisponde *ogni* elemento della seconda forma, mentre ad ogni altro elemento della prima forma corrisponde sempre *lo stesso elemento* di coordinata $x' = -\frac{\beta}{\alpha}$ della seconda; e in condizioni analoghe si trova la seconda forma rispetto alla prima. Una siffatta corrispondenza, che non è più biunivoca senza eccezioni, dicesi *proiettività degenere*. Geometricamente essa si ottiene, ad es., proiettando i punti di una punteggiata u sopra una retta u', da un centro di proiezione scelto sopra u (o sopra u').

173. Proprietà e particolarità metriche di una proiettività fra punteggiate. — Riprendiamo la equazione di una proiettività fra due punteggiate u, u', su cui siano fissati due sistemi di ascisse aventi le origini in due punti arbitrari O, P':

$$(1) \qquad \alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0,$$

od anche

$$(1') \qquad x' = -\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}, \qquad x = -\frac{\gamma x' + \delta}{\alpha x' + \beta},$$

colla condizione

$$(2) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Alla origine $O(x=0)$ della punteggiata u corrisponde, sulla u', il punto O' di ascissa $x' = -\frac{\delta}{\gamma}$; e similmente a P' $(x'=0)$ di u' corrisponde, sopra u, il punto P di ascissa $x = -\frac{\delta}{\beta}$. Se $\delta = 0$, le origini delle due punteggiate sono punti corrispondenti, e viceversa.

Se un punto sopra u va allontanandosi all'infinito, e quindi x tende a $\pm\infty$, il corrispondente valore di x' tende al limite

$$\lim_{x=\infty}\left(-\frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma}\right) = \lim_{x=\infty}\left(-\frac{\beta + \frac{\delta}{x}}{\alpha + \frac{\gamma}{x}}\right) = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Diremo perciò che al punto all'infinito I_∞ della prima punteggiata corrisponde, sulla seconda, il *punto limite* (o *punto di fuga*; cfr. n. 117) I', che ha l'ascissa $-\frac{\beta}{\alpha}$. Similmente si vede che al punto all'infinito $J'\infty$ della u' corrisponde, sopra u, il *punto limite* J avente l'ascissa $-\frac{\gamma}{\alpha}$.

a) Si supponga anzitutto $\alpha \neq 0$; allora i due punti limite J ed I' sono propri. Se con essi coincidono le origini delle due punteggiate u ed u', si avrà $-\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha} = 0$, ossia $\beta = \gamma = 0$, e la equazione (1) si ridurrà al tipo

$$\alpha x x' + \delta = 0, \qquad \text{ossia} \qquad x x' = -\frac{\delta}{\alpha} = \text{costante}.$$

L'ultima equazione può scriversi

$$JX \cdot I'X' = \text{costante},$$

e ci dice: *In una proiettività tra due punteggiate, è costante il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti qualisivogliano dai rispettivi punti limite;* quel prodotto costante chiamasi *potenza* della proiettività. Viceversa, due punti X, X', i quali si muovano sopra due rette in guisa che rimanga costante, $= p$, il prodotto delle distanze dei punti stessi da due punti J, I' fissati sulle rette, descrivono punteggiate proiettive, di cui J ed I' sono i punti limite, e p è la potenza.

b) Si supponga, in secondo luogo, $\alpha = 0$, e quindi, per la (2), $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Allora I' ed J hanno per ascisse $\pm\infty$, e nella proiettività (1), la cui equazione diviene

$$\beta x + \gamma x' + \delta = 0,$$

si corrispondono i punti all'infinito delle due punteggiate. Se inoltre si suppone (come è lecito senza introdurre restrizioni) che la origine della seconda punteggiata cada nel punto O' corrispondente alla origine O della prima, la equazione precedente mancherà pure del termine noto, e si ridurrà alla forma

$$\beta x + \gamma x' = 0, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{x}{x'} = -\frac{\gamma}{\beta} = \text{costante},$$

od anche

$$\frac{OX}{O'X'} = \text{costante}.$$

Di qua segue subito che *ogni* segmento della prima punteggiata sta in un rapporto costante (*rapporto di similitudine*) col corrispondente segmento della seconda; ciò si esprime dicendo che le due punteggiate sono *simili*, che la proiettività è una *similitudine*. Dunque: *Due punteggiate riferite proiettivamente, in guisa che si corrispondano i punti all'infinito dei loro sostegni, sono simili; e viceversa.* Le punteggiate risultano poi *uguali*, se il rapporto di similitudine vale ± 1.

La equazione bilineare della *similitudine* fra due punteggiate, riferite a sistemi di ascisse, manca del termine col prodotto xx'.[1]

174. Elementi uniti di una proiettività tra forme sovrapposte. — Abbiamo già visto (n. 167) che, se due forme riferite proiettivamente sono sovrapposte, esse ammettono al più due elementi uniti, a meno che ogni altro elemento non sia unito. Ora, valendoci del metodo analitico, determineremo i detti elementi uniti.

Possiamo supporre intanto, senza introdurre restrizioni, che le due forme siano *punteggiate*, giacchè, in caso opposto, si può sempre sostituire a quelle

---

[1] I teoremi *a*) e *b*) si dimostrano anche senza ricorrere alla equazione della proiettività. Posto infatti che questa sia $A\,B\,C\ldots \overline{\wedge}\; A'\,B'\,C'\ldots$, si ha:

nel caso *a*) $(A\,B\,J\,I_\infty) = (A'\,B'\,J'_\infty\,I')$, ossia $\dfrac{A\,J}{B\,J} = \dfrac{B'\,I'}{A'\,I'}$, donde

$$JA \,.\, I'A' = JB \,.\, I'B' = \ldots = \textit{potenza};$$

e nel caso *b*) $(A\,B\,C\,I_\infty) = (A'\,B'\,C'\,I'_\infty)$. ossia $\dfrac{A\,C}{B\,C} = \dfrac{A'\,C'}{B'\,C'}$, donde

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \ldots = \textit{rapporto di similitudine}.$$

le loro sezioni con una stessa retta. Fissato sul sostegno comune un *unico* sistema di ascisse, la proiettività sarà rappresentata dalla equazione

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0, \tag{1}$$

dove x, x' sono ascisse di punti corrispondenti.

Se indichiamo con y la coordinata di un elemento unito ($x = x' = y$), dovrà essere

$$\alpha y^2 + (\beta + \gamma) y + \delta = 0, \tag{2}$$

e quindi

$$y = \frac{-(\beta+\gamma) \pm \sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta}}{2\alpha}.$$

Possiamo dunque concludere:

Una proiettività (non identica) *fra due forme sovrapposte ha due elementi uniti, che possono essere reali e distinti, o reali e coincidenti, o immaginari coniugati;* nel primo caso $[(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta > 0]$ la proiettività dicesi *iperbolica,* nel secondo $[(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta = 0]$ *parabolica,* e nel terzo $[(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta < 0]$ *ellittica.*

175. Esempi. Uguaglianza diretta sulla punteggiata o nel fascio. — A due esempi notevoli, sotto l'aspetto metrico, di proiettività parabolica od ellittica si giunge mediante le considerazioni seguenti.[1]

a) Le due forme siano punteggiate sovrapposte, riferite ad un sistema di ascisse. Se l'equazione della proiettività si riduce al tipo

$$\beta x + \gamma x' + \delta = 0, \tag{1'}$$

le due punteggiate sono simili (n. 173, *b*), ed hanno come unito il punto all'infinito U_∞. Allora l'equazione (2), da cui dipendono i punti uniti, si abbassa a primo grado

$$(\beta + \gamma) y + \delta = 0, \tag{2'}$$

e fornisce l'ascissa

$$y = -\frac{\delta}{\beta+\gamma}$$

dell'altro punto unito V, reale, generalmente proprio, detto *centro di similitudine.* La similitudine fra punteggiate sovrapposte è dunque, in generale, una proiettività iperbolica.

Ma se $\beta + \gamma = 0$, $\delta \neq 0$, anche V è improprio, e la proiettività è parabolica. L'equazione (1') ora diviene

$$\beta(x - x') + \delta = 0, \quad \text{ossia} \quad x - x' = -\frac{\delta}{\beta} = \text{cost.}, \tag{2''}$$

[1] Di proiettività iperboliche si possono costruire esempi, assegnando ad arbitrio gli elementi uniti (distinti fra loro) ed inoltre due elementi corrispondenti distinti.

e dice che è costante la distanza $AA' = BB' = CC' = \ldots$ fra ogni punto della prima punteggiata e il punto corrispondente della seconda; le due punteggiate sono uguali, anzi *direttamente uguali*, perchè segmenti corrispondenti sono uguali anche in segno (cfr. n. 167). Dunque:

Una proiettività parabolica fra due punteggiate proprie sovrapposte, la quale abbia l'unico punto unito all'infinito, è una uguaglianza diretta; e viceversa.

Se poi nella (1″) si avesse inoltre $\delta = 0$, la proiettività sarebbe la identità.

× *b*) Anche tra due fasci di rette propri sovrapposti $a\,b\,c\ldots$, $a'\,b'\,c'\ldots$ si stabilisce una *uguaglianza diretta* coll'esigere che sia $\widehat{aa'} = \widehat{bb'} = \widehat{cc'} = \ldots = \omega$ (costante); ma la particolare proiettività, che così si ottiene, non ha evidentemente alcuna retta unita, è *ellittica*.

Per rappresentare analiticamente questa proiettività, si supponga che il centro dei fasci cada nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in un piano xy. Se

$$y = mx, \qquad y = m'x$$

sono le equazioni di due rette corrispondenti, deve essere (n. 28)

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{m' - m}{1 + mm'} = \text{cost.}$$

Indicando il valore di $\operatorname{tg}\omega$ con $\frac{1}{\beta}$ (e quindi $\operatorname{cotg}\omega$ con β) si ricava

$$\text{(I)} \qquad mm' + \beta(m - m') + 1 = 0,$$

equazione che lega i coefficienti direttivi di due rette corrispondenti.[1] Per trovare le rette unite si ponga nella (I) $m = m'$; risulterà

$$\text{(II)} \qquad m^2 + 1 = 0,$$

donde $m = \pm i$. Le rette unite $y = \pm ix$ sono dunque le rette isotrope uscenti dall'origine (n. 39). Concludiamo:

L'uguaglianza diretta fra due fasci di rette sovrapposti è una proiettività ellittica, i cui elementi uniti sono le rette isotrope uscenti dal centro comune; e viceversa. L'ultima asserzione dipende dal fatto che il ragionamento è invertibile.[2]

---

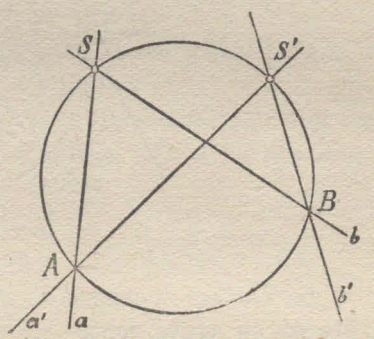
[1] Si osservi che la (I) è ancora una equazione bilineare, le cui variabili m, m' sono coordinate tangenti (n. 10), cioè particolari coordinate proiettive (n. 153, Oss. I). Ciò d'accordo coll'Oss. I del n. 172.

[2] Il teorema enuncia, con parole diverse, la proprietà che ci ha servito a caratterizzare le rette isotrope (n. 39). Se infatti si fa ruotare un piano sopra sè stesso, intorno ad un suo punto, il fascio di rette che ha ivi il centro si trasporta sopra un fascio direttamente uguale e sovrapposto; le sole rette del fascio, che non vengono spostate dal movimento, sono le rette unite nell'uguaglianza suddetta, cioè le rette isotrope.

I due fasci uguali segano sulla retta all'infinito del piano due punteggiate proiettive che chiameremo *direttamente uguali;* esse hanno, come punti uniti, i punti ciclici del piano (n. 127, Oss.).

176. Punti uniti e punti limite di due punteggiate proiettive sovrapposte. — Riprendiamo l'equazione (1) (n. 174) di una proiettività tra punteggiate sovrapposte, e l'equazione (2) che ha per radici le ascisse y_1, y_2 dei punti uniti. Il punto medio tra questi ha l'ascissa $\frac{y_1+y_2}{2} = -\frac{\beta+\gamma}{2\alpha}$. Ma questo valore è anche la semisomma delle ascisse $\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, -\frac{\beta}{\alpha}\right)$ dei due punti limite delle dette punteggiate (n. 173). Dunque: *In una proiettività fra punteggiate sovrapposte, il punto medio tra i punti uniti è pure punto medio tra i punti limite* (ed è sempre reale). Tutto ciò vale nella ipotesi $\alpha \neq 0$; nella ipotesi opposta uno dei punti uniti è improprio (n. 175, *a*)), ed il teorema perde ogni interesse.

177. Una proprietà del cerchio. — Vogliamo ora risolvere graficamente il problema della determinazione degli elementi uniti di una proiettività tra forme sovrapposte, che abbiamo sopra trattato per via analitica. Delle varie costruzioni che furono proposte, la più semplice ed istruttiva fu indicata dallo STEINER. Essa si appoggia sopra una nota proprietà del cerchio.



Se A e B sono due punti di una circonferenza, i quali vengano proiettati da due punti S, S' della circonferenza mediante le coppie di rette a, b ed a', b' rispettivamente, si ha

$$\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'} \pmod{\pi}.$$

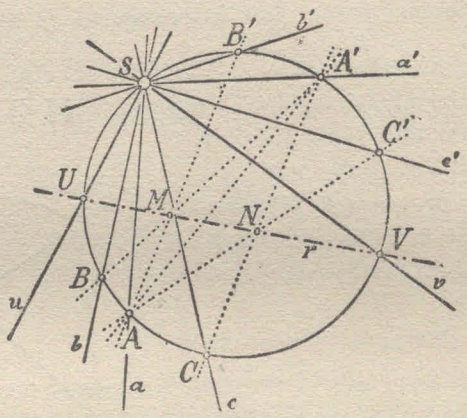
Applicando la stessa proprietà a quanti si vogliano punti $A, B, C\ldots$ della circonferenza, costituenti, come diremo, una *punteggiata* sopra questa, risulta che:

I fasci proiettanti una punteggiata tracciata sopra una circonferenza da due punti di questa sono direttamente uguali, e quindi proiettivi. Va inteso che, se un punto della punteggiata coincide col centro di proiezione, per retta proiettante si deve assumere la tangente alla circonferenza in quel punto.

In particolare, proiettando quattro punti A, B, C, D di una circonferenza da un punto S di questa, si ottengono quattro rette, il cui birapporto non varia mentre S descrive la circonferenza; lo chiameremo *birapporto* $(ABCD)$ dei quattro punti nominati. Ed ora si può estendere la

definizione di proiettività fra forme di prima specie anche al caso che si metta in relazione una forma di prima specie con una punteggiata giacente sopra una circonferenza; e si può parlare di proiettività fra due punteggiate tracciate sopra due circonferenze distinte o coincidenti. Si intenderà sempre: una corrispondenza biunivoca che lascia invariato il valore del birapporto. In particolare: *una punteggiata sopra una circonferenza è proiettiva al fascio di rette che la proietta da un punto arbitrario della circonferenza; e due punteggiate giacenti sopra due circonferenze (distinte o coincidenti) sono proiettive, se i fasci di rette, che proiettano quelle punteggiate da due punti arbitrari delle rispettive circonferenze, sono proiettivi tra loro.*

178. Costruzione degli elementi utili di una proiettività tra forme sovrapposte. — Premesse queste nozioni, supponiamo date due forme di prima specie proiettive e sovrapposte. Possiamo sempre ritenere, senza introdurre restrizioni, che le due forme nominate siano fasci propri di



rette, giacchè, se si trattasse ad es. di punteggiate, basterebbe proiettar queste da un unico centro di proiezione, e risolvere il problema che ci interessa per i fasci così ottenuti.

Siano adunque

(1) $$a\,b\,c\ldots \overline{\wedge}\ a'\,b'\,c'\ldots$$

due fasci di rette aventi lo stesso centro (proprio) S. Condotta ad arbitrio una circonferenza che passi per S, sopra questa i due fasci segheranno due punteggiate proiettive

(2) $$A\,B\,C\ldots \overline{\wedge}\ A'B'C'\ldots$$

Proiettiamo ora la prima e la seconda punteggiata da due punti corrispondenti della seconda e prima, rispettivamente, come sono ad es. A' ed A; otterremo due fasci proiettivi

$$A'(A\,B\,C\ldots)\ \overline{\wedge}\ A\,(A'\,B'\,C'\ldots),$$

anzi prospettivi, perchè hanno la retta unita $A'A$ (n. 168). Ne viene che i punti d'incontro di rette corrispondenti

$$A'B \cdot AB' \equiv M, \quad A'C \cdot AC' \equiv N, \ldots$$

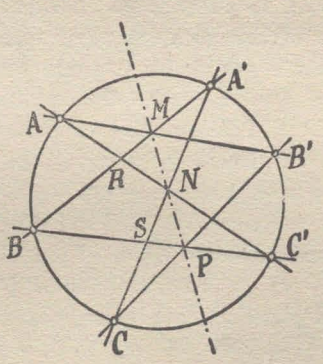
apparterranno ad una stessa retta r. Ed ogni punto di r, proiettato da A' ed A rispettivamente, darà sulla circonferenza due punti D, D' corrispondenti nella proiettività (2), tali adunque che le rette $d \equiv SD$, $d' \equiv SD'$ si corrispondano nella proiettività primitiva (1). Risulta di qua che le intersezioni U, V di r colla circonferenza (ove esistano) sono i punti uniti della proiettività (2), e quindi le rette u, v, proiettanti quei punti da S, sono le rette unite richieste della proiettività (1). Questa è iperbolica, parabolica od ellittica, secondo che la retta r è secante, tangente od esterna alla circonferenza.

179. Asse di proiettività di due punteggiate sulla circonferenza; teorema di Pascal per il cerchio. — Per eseguire la costruzione precedente possiamo scegliere come centri di proiezione, in luogo di A' ed A, altri due punti corrispondenti B' e B; ripetendo il ragionamento, troveremo che i punti

$$B'A \cdot BA' \equiv M, \quad B'C \cdot BC' \equiv P, \ldots$$

stanno sopra una stessa retta, che indicheremo con r'. Dimostriamo che r' coincide con r.

Se nella proiettività fra le due punteggiate sulla circonferenza esistono i punti uniti, le rette r ed r', dovendo passare per essi e per il punto M, coincideranno. Ma se i punti uniti non esistono, la dimostrazione precedente non sussiste più; ne daremo quindi un'altra, che valga in tutti i casi.



Com'è chiaro, tutto si riduce a provare che i tre punti M, N e P sono allineati. A tal fine proiettiamo il gruppo $BA'B'C'$ dai centri A e C; otterremo i due fasci proiettivi

$$A(BA'B'C') \overline{\wedge} C(BA'B'C').$$

Segando questi, ordinatamente, colle trasversali BA' e BC', avremo le punteggiate proiettive

$$BA'MR \overline{\wedge} BSPC'$$

(dove R, S sono ,rispettivamente, i punti $AC' \cdot BA'$, $CA' \cdot BC'$). Queste sono anzi prospettive, avendo l'elemento B unito (n. 168); quindi le rette $A'S$, MP, RC' concorrono in uno stesso punto; in altre parole, sulla retta MP cade il punto N intersezione di $A'S \equiv A'C$ e $RC' \equiv AC'$; c. d. d.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Se $ABCD\ldots$, $A'B'C'D'\ldots$ sono due punteggiate proiettive giacenti sopra una circonferenza, i punti

$$AB' \cdot A'B, \quad AC' \cdot A'C, \ldots, \quad BC' \cdot B'C, \ldots$$

stanno sopra una stessa retta (asse di proiettività delle due punteggiate), la quale sega la circonferenza nei punti uniti della proiettività, se esistono.

In particolare, limitandoci a due terne di punti ABC, $A'B'C'$ assegnate ad arbitrio sulla circonferenza, osserveremo che i tre punti allineati

$$M \equiv AB' \cdot A'B, \quad P \equiv BC' \cdot B'C, \quad N \equiv AC' \cdot A'C$$

possono riguardarsi come intersezioni delle coppie dei lati opposti (1° e 4°, 2° e 5°, 3° e 6°) dell'esagono semplice $AB'CA'BC'$ iscritto nella circonferenza; siamo così condotti al teorema seguente:

In un esagono semplice iscritto in una circonferenza le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno in linea retta.

La proposizione è caso particolare di un celebre teorema, che troveremo nella teoria delle coniche, e che è dovuto a PASCAL (cfr. n. 126, es. 35); n. 152, es. 14)).

Esercizi I. — 1) Sopra tre rette formanti fascio si abbiano tre punteggiate, due delle quali siano prospettive alla terza; si dimostri che anche la prima e la seconda sono prospettive, ed i tre centri di prospettiva sono allineati. Se ne deduca una nuova dimostrazione del teorema dei triangoli omologici giacenti in un piano. Questione duale nel piano.

2) Se di due punteggiate prospettive una ruota intorno al punto unito (proprio), le punteggiate rimangono prospettive, ed il centro di prospettiva descrive un cerchio (o sfera, se il sostegno mobile descrive una stella anzichè un fascio) avente per centro il punto limite della punteggiata fissa, e per raggio la distanza fra il punto limite della punteggiata mobile ed il punto unito.

3) Per costruire la proiettività $ABC\ldots \overline{\wedge} A'B'C'\ldots$ fra due punteggiate u, u', situate in un piano ma non sovrapposte (n. 169), conviene scegliere come centri di proiezione due punti omologhi, quali A' ed A, rispettivamente. L'asse di prospettiva u'' dei due fasci sega u (od u') in un punto P (o Q'), che ha per corrispondente sopra u' (od u) il punto di incontro uu' dei due sostegni.

4) Se $ABCD\ldots$ ed $A'B'C'D'\ldots$ sono due punteggiate proiettive, situate in un piano ma non sovrapposte, i punti di incontro di AB' con $A'B$, di AC' con $A'C$, ..., di BC' con $B'C$, e tutti gli analoghi, stanno sopra una medesima retta (*asse di proiettività* delle due punteggiate), che sega il sostegno di ciascuna punteggiata in un punto, il cui corrispondente sull'altra cade nell'intersezione dei due sostegni. (Infatti l'asse di prospettiva u'' dei fasci A', A dell'es. precedente, e l'asse u''' dei fasci analoghi B', B hanno in comune i punti P, Q', $AB' \cdot A'B$ e quindi coincidono).

5) Si enunci e si dimostri il teorema duale nel piano, che conduce al concetto di *centro di proiettività* di due fasci proiettivi.

6) Se le due punteggiate dell'es. 4) sono prospettive, l'asse di proiettività passa per il punto uu' ed è la polare del centro di prospettiva rispetto ad u, u'. Si ritrova così il teorema del n. 126, es. 18). Questione duale.

7) Il teorema dell'es. 4), limitato a due terne di punti ABC, $A'B'C'$, può enunciarsi così: « Se un esagono ha i vertici di posto dispari sopra una retta ed i vertici di posto pari sopra una seconda retta, le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno sopra una terza retta ». (PAPPO; cfr. n. 23, es. 16), n. 126, es. 36)). Proposizione duale.

8) L'asse di proiettività di due punteggiate proiettive è parallelo alla retta congiungente i punti limite.

9) Se A, B, C sono i punti in cui una retta d è segata da tre rette a, b, c, le rette perpendicolari condotte da A a b e c, da B a c ed a, da C ad a e b determinano (prese in ordine conveniente) un esagono semplice, i cui vertici di posto dispari sono A, B, C, mentre i vertici di posto pari stanno sopra una seconda retta. Da questa osservazione si deduca il teorema di STEINER: « i punti di concorso delle altezze dei quattro trilateri, formati coi lati di un quadrilatero presi tre a tre, stanno per diritto ».

10) Date due punteggiate proiettive su rette distinte u, u' di un piano, e data inoltre nel piano una retta s che non passi per uu', determinare due centri di proiezione S, S' tali che i fasci proiettanti quelle punteggiate riescano prospettivi, coll'asse di prospettiva s. Il problema ammette infinite soluzioni, e precisamente esistono due rette, luoghi rispettivamente dei punti S, S', sulle quali i punti S, S' si corrispondono proiettivamente. Caso particolare che s sia l'asse di proiettività delle u, u'; caso che sia la retta all'infinito. Questione duale nel piano.

II. — 11) Dato un fascio di rette ed una punteggiata proiettiva a quello, segare il fascio con una trasversale, in guisa da ottenere una punteggiata simile od anche uguale alla data.

12) Se $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ sono due punteggiate simili, giacenti sopra due rette distinte u, u' di un piano secantisi in un punto proprio O, sussistono le seguenti proprietà: *a*) il luogo del vertice opposto ad O nei parallelogrammi costruiti sulle coppie di lati OA, OA', oppure OB, OB', ..., è una retta; *b*) il luogo del punto medio dei segmenti AA', BB', ..., congiungenti punti omologhi, è una seconda retta, parallela alla precedente; *c*) se per O si conducono i segmenti OA_0, OB_0, ... paralleli ed uguali (anche nel verso) ai segmenti AA', BB', ..., i punti A_0, B_0, ..., stanno tutti sopra una terza retta; *d*) i cerchi circoscritti ai triangoli OAA', OBB'..., hanno in comune (oltre O) un secondo punto S; *e*) i triangoli SAA', SBB'... sono simili fra loro; *f*) la punteggiata $A'B'C'\ldots$ può essere portata in posizione prospettiva rispetto alla punteggiata $ABC\ldots$, purchè il piano di quella si faccia ruotare intorno ad S di un angolo conveniente, mentre la retta u rimane fissa.

13) Se le punteggiate $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, sono uguali, sussistono le proprietà precedenti, ed inoltre il punto S si trova sulle perpendicolari ai segmenti AA', BB', ... nei loro punti medi, per modo che la rotazione sopra nominata porta l'una punteggiata a coincidere coll'altra (cfr. n 39, es. 9)).

14) Date due punteggiate simili $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$, situate su due rette

di un piano, trovare due punti omologhi X, X', la cui distanza XX' sia uguale in valore assoluto ad un dato segmento; quante soluzioni può avere il problema? come si costruiscono due punti omologhi delle due punteggiate la cui distanza sia minima?

III. — 15) Le rette congiungenti punti corrispondenti di due punteggiate proiettive a sostegni sghembi formano un tal sistema, che ogni retta secante tre di quelle sega tutte le altre; (si proiettino infatti le due punteggiate da una delle dette secanti; n. 167). Teorema duale nello spazio.

16) Le infinite rette che incontrano tre rette date, sghembe a due a due, determinano punteggiate proiettive su queste; quelle adunque formano un sistema Σ' tale, che ogni retta secante tre rette di Σ' sega tutte le altre. Le rette secanti ora nominate formano alla lor volta un nuovo sistema Σ (a cui appartengono anche le rette date), il quale gode le stesse proprietà di Σ'. Due rette di uno stesso sistema sono sghembe tra loro, due rette di sistemi diversi si segano; ciascun sistema (e subordinatamente anche l'altro) è determinato da tre delle sue rette. Due sistemi come Σ e Σ' sono, ad es., quelli appartenenti ad un iperboloide rotondo ad una falda, di cui parla l'es. 34) del n. 126.

IV. — 17) Scrivere la equazione di una proiettività fra due punteggiate, sapendo che i punti limite di queste hanno rispettivamente le ascisse $+1$ e -1, e che si corrispondono i punti di ascisse 2 e 3 della prima e della seconda punteggiata.

18) Costruire le proiettività rappresentate dalle equazioni $x' = x + a$, $x' = bx$, $x' = \frac{1}{x}$, nella ipotesi che x ed x' siano ascisse di punti variabili sopra due punteggiate, ed a, b abbiano valori numerici noti. Dove si trovano i punti limite?

19) Calcolare la potenza della proiettività fra punteggiate

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0,$$

essendo x, x' ascisse di punti corrispondenti.

20) Scrivere la equazione della proiettività prodotto delle due proiettività: $x' = \frac{mx+n}{px+q}$, $x'' = \frac{m'x'+n'}{p'x'+q'}$.

21) Dimostrare che ogni proiettività può riguardarsi come prodotto di più proiettività appartenenti ai tipi particolari indicati nell'es. 18).

V. — 22) Se di due punteggiate o fasci di rette proiettivi sovrapposti si conosce un elemento unito, l'altro si può costruire colla sola riga. (Si proiettino le due punteggiate da due centri allineati col punto unito noto).

23) Una proiettività parabolica tra due forme sovrapposte è determinata quando si conosca l'unico elemento unito U ed una coppia di elementi corrispondenti A, A'; costruire colla sola riga l'elemento B' corrispondente ad un elemento B assegnato.

24) In particolare, se U è il punto all'infinito di una retta, si può: date due rette parallele r, s ed un segmento AB sopra r, costruire colla sola riga sopra r un segmento $A'B' = AB$, di cui un estremo cada in un punto assegnato della retta.

25) Nelle ipotesi dell'esercizio precedente si può dunque costruire sopra r,

colla sola riga, un segmento che sia somma algebrica di quantisivogliano segmenti comunque assegnati su r.

36) Nella stessa ipotesi, dati su r cinque punti A, B, C, A', B', costruire sopra r, colla sola riga, il punto C' tale che

$$AB : BC = A'B' : B'C'.$$

27) Ripetendo operazioni come quelle dei due es. precedenti, si conclude: dati sopra una retta r più segmenti, uno dei quali si assuma come unità di misura, mentre gli altri abbiano le lunghezze $a, b, c, \ldots$, è possibile costruire colla sola riga, sulla retta r, valendosi di una parallela a questa, ogni segmento il cui valore si ottenga eseguendo operazioni razionali, in numero finito, sui numeri $1, a, b, c, \ldots$

28) Od anche: Dati sopra una retta r due o più punti, due dei quali si assumano, rispettivamente, come origine e punto unità di un sistema di ascisse, mentre gli altri abbiano le ascisse $a, b, c, \ldots$, e data una parallela alla retta, è possibile costruire colla sola riga, sulla retta primitiva, ogni punto la cui ascissa possa ottenersi mediante operazioni razionali eseguite sui numeri $1, a, b, c, \ldots$

29) Finalmente se si sceglie un centro di proiezione fuori del piano ove si suppongono eseguite le costruzioni suddette, e da quello si proiettano la retta r e le figure costruttive sopra un nuovo piano, si ottiene (n. 153, Oss. II): Dati sopra una retta tre o più punti, dei quali tre si assumano come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive, e gli altri abbiano le coordinate $a, b, c, \ldots$, è possibile costruire colla sola riga, su quella retta, ogni altro punto la cui coordinata possa ottenersi mediante operazioni razionali eseguite sui numeri $1, a, b, c, \ldots$

VI. — 30) Quando di due punteggiate proiettive sovrapposte siano noti i punti limite J, I' e due punti corrispondenti A, A', per costruire i punti uniti si conducano due segmenti $JM = JA$, $I'M' = I'A'$ perpendicolari al sostegno comune, e diretti in uno stesso verso o in verso opposto, secondo che JA ed $I'A'$ hanno segno opposto od uguale. La circonferenza descritta su MM' come diametro passa per i punti uniti richiesti. Si deduca di qua che una proiettività avente la potenza positiva è certo iperbolica.

31) Dati due fasci propri proiettivi di un piano, costruire le rette dell'uno che sono parallele alle rette corrispondenti dell'altro.

32) Date due forme proiettive, se un elemento mobile descrive la prima di un determinato verso, l'elemento corrispondente descriverà la seconda in un determinato verso. Se le due forme sono sovrapposte, i versi corrispondenti possono coincidere (proiettività *concorde*) od essere opposti (pr. *discorde*). Mediante considerazioni intuitive (che possono rendersi rigorose) si dimostra che una pr. discorde è iperbolica, mentre una pr. concorde può essere ellittica o iperbolica; l'ultimo caso si presenta, ad es., se esiste nell'una forma un tratto (in senso proiettivo) che contenga interamente il tratto corrispondente dell'altra.

33) Una proiettività $\alpha x x' + \ldots = 0$ tra forme sovrapposte è concorde o discorde, secondo che $\alpha\delta - \beta\gamma$ è positivo o negativo. Anche da questa osservazione si deduce che una proiettività discorde è iperbolica.

34) In una proiettività fra due forme sovrapposte è costante il birapporto formato dai due elementi uniti con due elementi corrispondenti qualisivogliano;

quella costante dicesi *caratteristica* o *invariante assoluto* della proiettività. Data l'equazione della proiettività, si calcoli il valore della caratteristica.

35) Costruire una proiettività tra forme sovrapposte conoscendo gli elementi uniti, supposti reali e distinti, e la caratteristica.

36) Riferendo le due forme proiettive sovrapposte ad un unico sistema di coordinate proiettive, di cui gli elementi $0, \infty$ cadano negli elementi uniti, l'equazione della proiettività assume la forma $x' = kx$, dove k è la caratteristica.

37) L'equazione precedente non si applica ad una proiettività parabolica; l'equazione di questa, assumendo come elemento ∞ di un sistema di coordinate proiettive l'unico elemento unito, assume la forma $x' = x + \text{cost.}$

VII. — 38) Se A, B, C, D sono quattro punti armonici di una circonferenza (n. 177), le tangenti al cerchio in A e B si segano sulla retta CD, e le tangenti in C e D si segano su AB; se una di queste due condizioni è soddisfatta, è soddisfatta anche l'altra, ed i quattro punti sono armonici.

39) Dati tre punti A, B, C di una retta o di un cerchio, costruire la proiettività che muta A, B, C in B, C, A rispettivamente. Se i punti stanno sul cerchio, dalla costruzione dell'asse di proiettività si deduca che «un triangolo iscritto in un cerchio è omologico al triangolo formato dalle tangenti nei vertici del primo» (cfr. n. 152, es. 15)).

40) Nella costruzione di Steiner, applicata a due fasci proiettivi sovrapposti, quali particolarità presenta l'asse di proiettività, quando i due fasci sono direttamente od inversamente uguali?

41) Le infinite tangenti ad un cerchio segano, sopra due tangenti fisse, punteggiate proiettive. Di qua si può ricavare la definizione di birapporto di quattro tangenti ad un cerchio, la nozione di proiettività fra una serie di tangenti ad un cerchio ed una forma di prima specie, o fra due serie di tangenti, ed una costruzione dei punti uniti di due punteggiate proiettive sovrapposte valendosi di un cerchio tangente al comune sostegno; tutto ciò procedendo in modo duale a quello seguìto nei n. 177, 178. Si giungerà per questa via al teorema di Brianchon sul cerchio: «se un seilatero è circoscritto ad una circonferenza, le congiungenti le coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto» (cfr. n. 126, es. 35)).

42) Data una *riga a due orli* paralleli, disponendo lo strumento in modo che gli orli passino rispettivamente per due punti O ed A, la cui distanza superi la larghezza della riga, si riesce a condurre per A la tangente al cerchio che ha O per centro e quella larghezza come raggio. Approfittando di questa osservazione e dell'es. 41), si costruiscano i punti uniti di due punteggiate proiettive sovrapposte, valendosi della sola riga a due orli.

VIII. — 43) Dati quattro numeri complessi $z_h = x_h + iy_h$ $(h = 1, 2, 3, 4)$, possiamo riguardarli, sia come ascisse di quattro punti immaginari di una punteggiata, sia come indici di quattro punti reali 1, 2, 3, 4 di un piano nella nota rappresentazione di Gauss dei numeri complessi. Indicando, nell'ultima ipotesi, con $\overline{12}, \ldots$ le mutue distanze dei quattro punti, si dimostri che il birapporto $k = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ è un numero (generalmente) complesso, che ha per modulo l'espressione $\dfrac{\overline{13}}{\overline{23}} : \dfrac{\overline{14}}{\overline{24}}$, e per argomento la differenza degli angoli, sotto cui il

segmento $\overline{21}$ è visto dai punti 3 e 4; od anche l'angolo, secondo cui si segano i due cerchi 123, 124 (precisamente l'angolo delle due tangenti a quelli nel punto 2, prese nei versi 231, 241 rispettivamente).

44) Segue: la condizione necessaria e sufficiente affinchè il birapporto k sia un numero reale è che i quattro punti 1, 2, 3, 4 appartengano ad uno stesso cerchio (od eventualmente ad una retta, dovendo, in questa teoria, riguardarsi le rette come casi particolari di cerchi); e se la condizione è soddisfatta, k è precisamente il birapporto dei quattro punti considerati sulla circonferenza (n. 177); come giaceranno dunque i quattro punti se $k = -1$ (es. 38))? Se k è un immaginario puro, i due cerchi 123, 124 si segano ortogonalmente; si consideri in particolare il caso $k = i$.

45) Rappresentando, come sopra, i numeri complessi z, z' sui punti reali di due piani π, π', una equazione bilineare $\alpha z z' + \beta z + \gamma z' + \delta = 0$, dove α, β, γ, δ sono numeri reali o complessi, definisce una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due piani (riguardando convenzionalmente, in ciascuno, i punti all'infinito come un *unico* punto, immagine del valore infinito di z o z'). Questa corrispondenza ha la proprietà notevole, dipendente dal carattere invariante del birapporto, di mutare i punti di un cerchio (o in particolare di una retta) di π, nei punti di un cerchio (o eventualmente di una retta) di π'; essa dunque trasforma cerchi in cerchi, è una *affinità circolare*, secondo la denominazione di Möbius. L'angolo di due cerchi arbitrari dell'un piano è uguale all'angolo dei cerchi corrispondenti dell'altro; e l'uguaglianza vale anche nel segno, se come versi positivi delle rotazioni si considerano quelli in cui crescono gli argomenti dei numeri complessi rappresentati sui due piani.

46) Se la equazione bilineare manca del termine prodotto zz', l'affinità circolare muta ogni retta dell'un piano in una retta dell'altro, ed ogni figura in una figura simile; dicesi perciò *similitudine*.

47) Nella ipotesi che i due piani π, π' siano sovrapposti insieme agli assi dei numeri reali e degli immaginari puri, si interpretino, mediante la rappresentazione sopra nominata, le equazioni: $z' = z + a$ (*traslazione*, che muta ogni figura in una figura uguale, traslata rispetto alla prima), $z' = bz$ (*similitudine*, anzi, quando b è reale, *omotetia* rispetto all'origine), $z' = \frac{1}{z}$ (che muta in un cerchio ogni retta non passante per l'origine). Si confronti quest'ultima corrispondenza colla trasformazione per *inversione* (n. 61, es. 16)), che inverte il segno degli angoli.

Capitolo IV.

Involuzione sopra una forma di prima specie.

180. Definizione. — Dobbiamo occuparci ora di un caso notevole di proiettività tra forme sovrapposte.

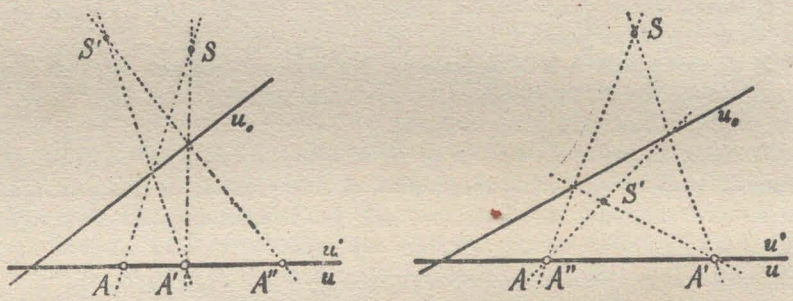
Fu già osservato (n. 167) che, date due forme proiettive sovrapposte, ogni elemento del comune sostegno va considerato due volte, secondo la forma cui esso viene attribuito, e che i due elementi ad esso corrispondenti

nella proiettività diretta P (conducente dalla prima forma alla seconda) e nell'inversa P^{-1} (conducente dalla seconda alla prima) sono generalmente distinti tra loro. Per verificare se si presenti questo fatto o l'opposto, in un caso concreto assegnato, conviene proceder così.

Fissato un elemento generico A sul sostegno comune, si applichi ad esso la operazione P, la quale conduce a quell'elemento A' della seconda forma che corrisponde all'elemento A della prima. Ora si applichi nuovamente la operazione P all'elemento A' (attribuito dunque questa volta alla prima forma). Si arriverà ad un elemento A'', che, in generale, è distinto dall'elemento primitivo A. In tal caso la proiettività P, conducente da A' ad A'', è distinta dalla proiettività inversa P^{-1}, conducente da A' ad A.

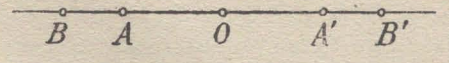
Si supponga al contrario che A'' coincida con A. Allora i due elementi $A \equiv A''$ e A' si corrispondono *in doppio modo*. Con ciò si viene a dire che, tanto la proiettività P, quanto la inversa P^{-1} mutano A in A'; od anche, che agli elementi A ed A' della prima forma corrispondono ordinatamente gli elementi A' ed A della seconda.

Ad es. nelle due figure qui sotto, l'operazione P si compone della proiezione di un punto di u da S sopra u_0, e della successiva proiezione del punto così ottenuto, da S' sopra u'; mentre nell'operazione P^{-1} le due



proiezioni si succedono in ordine inverso. Ora nella figura di sinistra A'' differisce da A. Nella figura di destra A'' coincide con A, ed i punti A, A' si corrispondono in doppio modo. Se le stesse operazioni di quest'ultima figura si applicassero ad altri punti B, C... della retta u, si otterrebbero nuove coppie BB', CC',... di punti corrispondenti in doppio modo.

Un secondo esempio di proiettività tra forme sovrapposte, ove ogni elemento A, B, ... del comune sostegno corrisponde doppiamente ad un altro elemento A', B', ..., si ottiene così. Fissiamo sopra una retta un punto O, ed assumiamo come operazione P la *simmetria rispetto ad* O, la quale muta i punti A, B, ..., della retta nei propri simmetrici A', B', ... rispetto ad O; qui si tratta di una vera proiettività, anzi di una uguaglianza inversa, giacchè si ha



$AB = -A'B'$, ecc. Ora ai punti $A', B', \ldots$ si applichi di nuovo la simmetria P rispetto ad O. Detti $A'', B'', \ldots$ i punti a cui si giunge, sarà evidentemente $A'' \equiv A$, $B'' \equiv B, \ldots$; si conchiude che le coppie AA', $BB', \ldots$ si compongono di punti corrispondenti in doppio modo.

Gli esempi addotti ci autorizzano a dare la seguente definizione:

Si chiama proiettività involutoria, o brevemente involuzione, una proiettività non identica tra due forme di prima specie sovrapposte, nella quale due elementi corrispondenti qualisivogliano si corrispondono sempre in doppio modo. Di due elementi A, A' corrispondentisi in una involuzione, è inutile dire se A, od A', si riguarda come appartenente alla prima o alla seconda forma; i due elementi si chiamano *coniugati nella involuzione.* Ed è pure inutile nominare le *due* forme sovrapposte, quando si tratta di una involuzione; si parlerà di una involuzione sopra *una* punteggiata, in *un* fascio di rette o di piani. La involuzione determina una distribuzione degli elementi della forma in coppie (di elementi *coniugati*), di guisa che ogni elemento della forma appartiene ad una e ad una sola coppia, e i due elementi di una coppia si comportano nello stesso modo l'uno rispetto all'altro; queste coppie si sogliono dire brevemente *coppie della involuzione,* mentre sarebbe preferibile chiamarle *coppie di elementi coniugati in una proiettività involutoria.*

Se AA', BB', $CC', \ldots$ sono più coppie di una involuzione, si ha per definizione

$$A\,A'B\,B'C\,C'\ldots \overline{\wedge}\; A'A\,B'B\,C'C\ldots,$$

e viceversa. Posto ora che da questi elementi, situati in una forma di prima specie, si ottengano, mediante operazioni di proiezione o sezione, nuovi elementi a, a', b, b', c, c'... di una nuova forma di prima specie, si avrà ancora (n. 166)

$$a\,a'\,b\,b'\,c\,c'\ldots \overline{\wedge}\; a'\,a\,b'\,b\,c'\,c\ldots$$

Segue di qua: *se ad una involuzione si applicano operazioni di proiezione o sezione, si ottiene una nuova involuzione.*

Osservazione. — La definizione dell'involuzione si può anche presentare sotto una delle forme seguenti: *dicesi involuzione una proiettività non identica tra forme sovrapposte, che coincida colla sua inversa,* o *che abbia per quadrato la identità.* Il primo enunciato afferma che P e P^{-1} applicate ad un elemento A qualsiasi conducono ad *uno stesso* elemento A'; il secondo che l'operazione $P \cdot P = P^2$ (n. 166, Oss.), la quale muta l'elemento A nell'elemento A'' sopra considerato, è l'identità, cioè che A'' coincide con A, qualunque sia A.

Il concetto di involuzione risale a Desargues (1639), il quale stabilì le relazioni fra tre coppie di una involuzione. La trattazione moderna, qui adottata, risulta dalle ricerche di Chasles (1837), Seydewitz (1844) e Staudt (1847).

181. Proprietà fondamentale della involuzione. — Per riconoscere se una proiettività sia involutoria occorre, secondo la definizione, verificare se *ogni* coppia di elementi corrispondenti si componga di elementi corrispondenti in doppio modo. In realtà si può limitare la verifica ad una sola coppia, in virtù del teorema seguente:

Se in una proiettività fra due forme di prima specie sovrapposte esiste una coppia di elementi distinti che si corrispondano in doppio modo, allora due elementi corrispondenti qualisivogliano si corrispondono in doppio modo, e la proiettività è involutoria.

Siano A, A' due elementi distinti, che si corrispondano in doppio modo nella proiettività P, di guisa che la P muti A ed A' in A' ed A, rispettivamente. Sia B un altro elemento arbitrario che la proiettività P muti in B', e sia X l'elemento che la P fa corrispondere a B'; tutto si riduce a dimostrare che X coincide con B. Infatti si ha, in causa della proiettività P,

$$(A\,A'\,B\,B') = (A'\,A\,B'\,X),$$

ossia (n. 147, I)

$$(A\,A'\,B\,B') = (A\,A'\,X\,B'),$$

la quale fa vedere (n. 144) che B coincide con X, c. d. d.

182. Equazione dell'involuzione. — Allo stesso risultato si può giungere per via analitica; si ha così il vantaggio di vedere quale particolarità presenti l'equazione bilineare di una proiettività, quando questa è involutoria. Siano date due punteggiate proiettive e sovrapposte, riferite ad uno stesso sistema di ascisse, e sia

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

la equazione della proiettività che le collega. Se nella nominata proiettività due punti distinti, di ascisse y e y', si corrispondono in doppio modo, sussisteranno le relazioni

$$\alpha y y' + \beta y + \gamma y' + \delta = 0,$$
$$\alpha y' y + \beta y' + \gamma y + \delta = 0,$$

Sottraendo la seconda dalla prima, si ha

$$(\beta - \gamma)\,(y - y') = 0,$$

e poichè $y \neq y'$, dovrà essere $\beta = \gamma$. Perciò, nella ipotesi fatta, l'equazione della proiettività si riduce alla seguente

$$\alpha x x' + \beta\,(x + x') + \delta = 0. \tag{1}$$

Ora quest'ultima, essendo simmetrica rispetto ad x ed x', determina una proiettività in cui due punti omologhi qualisivogliano si corrispondono

in doppio modo, cioè una involuzione. La (1) è appunto l'equazione della involuzione.[1]

183. Involuzione determinata da due coppie. — *Una involuzione è determinata da due coppie di elementi coniugati.*

Siano infatti $A\,A'$, $B\,B'$ due coppie date. Esiste (n. 170) un'unica proiettività che agli elementi A, A', B fa corrispondere A', A, B', e questa, per il teorema precedente, è involutoria, ed ha come elementi coniugati A e A', B e B'.

Nella dimostrazione comparisce la ipotesi che A ed A' siano distinti, mentre B e B' possono anche coincidere. Quella ipotesi è però superflua, come risulterà dalle considerazioni che seguono.

Proponiamoci ora di scrivere la equazione della involuzione determinata da due coppie di punti di una retta. Osserviamo a tal fine che una involuzione

$$\alpha x x' + \beta (x + x') + \delta = 0, \tag{1}$$

è pienamente conosciuta allorchè siano assegnati i valori dei tre coefficienti α, β, δ; anzi basta dare i rapporti di due dei coefficienti al terzo. Ciò posto, siano y, y' e z, z' le ascisse note di due coppie di punti appartenenti alla nostra involuzione (1) (ciascuna coppia essendo costituita da punti distinti o coincidenti). Dovranno allora sussistere le relazioni

$$\begin{cases} \alpha y y' + \beta (y + y') + \delta = 0, \\ \alpha z z' + \beta (z + z') + \delta = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Le equazioni (2), lineari od omogenee rispetto alle incognite α, β, δ, permettono di calcolar queste, a meno di un fattore arbitrario non nullo; sostituendo nella (1) i valori trovati, il problema sarà risolto.

Del resto, si ottiene subito la equazione richiesta della nostra involuzione, se, insieme alle (2), consideriamo anche la (1), la quale dev'essere soddisfatta ogniqualvolta x, x' sono ascisse di due punti coniugati nella involuzione; avremo così un sistema di tre equazioni lineari, omogenee e coesistenti per valori non tutti nulli delle tre incognite α, β, δ. Dovrà quindi esser nullo il determinante formato coi coefficienti:

$$\begin{vmatrix} x x' & x + x' & 1 \\ y y' & y + y' & 1 \\ z z' & z + z' & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

La equazione (3), bilineare rispetto alle variabili x, x', rappresenta appunto la nostra involuzione.

---

[1] Il risultato sussiste per una qualsiasi forma di prima specie, sopra cui sia fissato un sistema di coordinate proiettive (n. 172, Oss. I).

184. Condizione perchè tre coppie di elementi appartengano ad una stessa involuzione. — La relazione (3) può anche riguardarsi come la condizione affinchè tre coppie di punti x, x'; y, y'; z, z' di una retta appartengano ad una stessa involuzione. Ora questa condizione può mettersi sotto un'altra forma utile a conoscersi.

Supponiamo che le tre coppie siano rappresentate dalle equazioni di secondo grado

$$(4) \qquad \begin{cases} a t^2 + b t + c = 0, \\ a' t^2 + b' t + c' = 0, \\ a'' t^2 + b'' t + c'' = 0, \end{cases}$$

aventi per radici, rispettivamente, x, x'; y, y'; z, z'. Possiamo nel determinante (3) sostituire ai prodotti ed alle somme delle dette radici le loro espressioni in funzione dei coefficienti delle (4). Con ciò, fatte alcune semplici riduzioni, la (3) diviene

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

che è adunque la condizione necessaria e sufficiente affinchè le tre coppie (4) appartengano ad una stessa involuzione.

Ora la (5) ci dà pure la condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano due numeri λ e μ, tali che si abbia

$$\lambda a + \mu a' = a'', \quad \lambda b + \mu b' = b'', \quad \lambda c + \mu c' = c''.$$

Sostituendo ad a'', b'', c'' i loro valori nell'ultima delle (4), questa prende la forma

$$(\lambda a + \mu a') t^2 + (\lambda b + \mu b') t + (\lambda c + \mu c') = 0,$$

ossia

$$(6) \qquad \lambda (a t^2 + b t + c) + \mu (a' t^2 + b' t + c') = 0.$$

In parole: *Date le equazioni di due coppie di una involuzione, la equazione di ogni terza coppia della involuzione può ottenersi come una combinazione lineare delle prime due equazioni.*

Al variare dei parametri λ e μ, o meglio del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, la coppia rappresentata dalla (6) varia e può portarsi a coincidere con ogni coppia della involuzione determinata dalle prime due coppie (4). Queste, in particolare, corrispondono, l'una ai parametri $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$, l'altra ai parametri $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$.[1]

---

[1] Se si volesse applicar qui un linguaggio introdotto per le rette (n. 21) e per le curve (n. 49) di un piano, si potrebbe riguardare la involuzione sopra una punteggiata come *un fascio di coppie di punti*.

È quasi superfluo avvertire che il procedimento ed il risultato del testo si applicano ad una forma di prima specie qualsiasi, su cui si sia fissato un sistema di coordinate proiettive.

185. Teorema di DESARGUES sul quadrangolo completo. — Proponiamoci ora di costruire l'involuzione determinata da due date coppie AA', BB' di elementi coniugati.

Una prima soluzione si avrebbe ricorrendo alla costruzione generale della proiettività tra due forme di prima specie sovrapposte (n. 169).

Un'altra costruzione è basata sopra un teorema di DESARGUES (1639), che si enuncia:

Le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo sono segate da una trasversale, non passante per nessun vertice, in tre coppie di punti appartenenti ad una stessa involuzione.

Le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo sono proiettate da un punto, non situato sopra nessun lato, mediante tre coppie di rette appartenenti ad una stessa involuzione.

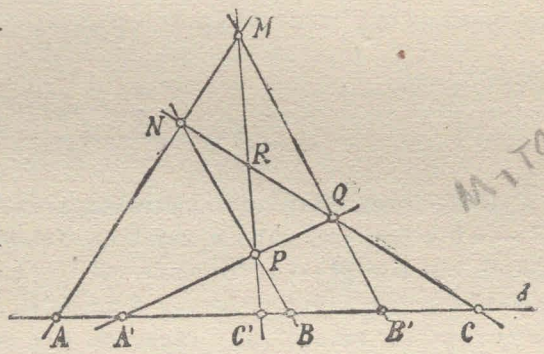
Dimostreremo ad es. il teorema di sinistra.

Sia $MNPQ$ il quadrangolo completo; la trasversale s seghi le coppie di lati opposti nelle coppie di punti AA', BB', CC'. Si tratta di dimostrare che queste appartengono ad una stessa involuzione sulla s.

Posto

$$R \equiv NQ \cdot MP,$$

proiettiamo il gruppo di punti M, P, R, C' della retta MP, sulla trasversale s, dai punti N e Q. Otterremo le due quaterne di punti, proiettive e sovrapposte,



$$A\,B\,C\,C' \overline{\wedge} B'\,A'\,C\,C',$$

da cui (n. 147, I)

$$A\,B\,C\,C' \overline{\wedge} A'\,B'\,C'\,C.$$

Quest'ultima proiettività è involutoria (n. 181), poichè C e C' si corrispondono in doppio modo;[1] d'altra parte, ai punti A, B corrispondono rispettivamente A', B'; quindi AA', BB', CC' sono coppie di una stessa involuzione, c. d. d.

Il teorema di DESARGUES suggerisce subito il modo di costruire sulla punteggiata (e nel fascio di rette, se si adopera il teorema duale) la involuzione determinata da due coppie AA', BB' di elementi coniugati. Del punto C, ad esempio, si domandi il coniugato C'. Per A, A' e C si con-

[1] Qui si suppone che C e C' siano distinti; se però coincidessero, si sceglierebbero altri due vertici del quadrangolo come centri di proiezione, ecc.

ducano tre rette ad arbitrio, l'ultima delle quali incontri le prime due nei punti distinti N e Q. Si unisca B con N e B' con Q; le due nuove rette segano rispettivamente le due uscenti da A', A nei due punti P e M, sulla cui congiungente trovasi il punto C' richiesto. Questa costruzione si eseguisce colla sola riga.[1]

186. Elementi doppi di una involuzione. — La involuzione, essendo una particolare proiettività tra forme sovrapposte, possiede due elementi uniti (n. 174) o *doppi*, come si sogliono chiamare, in ciascuno dei quali due elementi coniugati vengono a coincidere. La involuzione è *iperbolica*, *parabolica* od *ellittica*, secondo che i due elementi doppi sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati.

Se

$$\alpha x x' + \beta (x + x') + \delta = 0 \tag{1}$$

è la equazione della involuzione sopra una retta, ed y è l'ascissa di un punto doppio, si avrà

$$\alpha y^2 + 2\beta y + \delta = 0, \tag{2}$$

donde

$$y = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha\delta}}{\alpha}.$$

L'involuzione è dunque iperbolica, parabolica od ellittica, secondo che $\beta^2 - \alpha\delta$ è positivo, nullo o negativo. Nel secondo caso però, osservando che il binomio $\beta^2 - \alpha\delta$ coincide col binomio $\beta\gamma - \alpha\delta$ relativo ad una proiettività generale (perchè ora $\beta = \gamma$), si conclude (n. 172, Oss. II) che la involuzione parabolica è degenere. Ciò si verifica pure direttamente, perchè, se $\beta^2 - \alpha\delta = 0$, e si suppone ad es. $\alpha \neq 0$, la (1) può scriversi

$$(\alpha x + \beta)(\alpha x' + \beta) = 0,$$

e fa vedere che ogni coppia della involuzione parabolica si compone del punto fisso $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ e di un punto x' variabile da coppia a coppia. Nel punto fisso cade l'unico elemento unito. Di questa involuzione degenere non ci occuperemo nel seguito, e, parlando di involuzione, intenderemo d'ordinario che si tratti di involuzione iperbolica od ellittica.

---

[1] Dal fatto che, dati i cinque punti A, A', B, B' e C, si deve arrivare ad uno stesso C', comunque si disponga degli elementi arbitrari della costruzione, segue: *se due quadrangoli completi sono così riferiti, che cinque lati dell'uno incontrino gli omologhi lati dell'altro in cinque punti di una retta, anche gli omologhi sesti lati si segheranno in un punto di quella retta*; proposizione questa che si sarebbe potuta dedurre anche dal teorema dei triangoli omologici (v. n. 126, es. 27).

187. Proprietà fondamentale degli elementi doppi di una involuzione. — Siano U, V gli elementi doppi di una involuzione, iperbolica od ellittica, ed AA' una coppia di elementi coniugati distinti.

Sarà per ipotesi

$$(UVAA') = (UVA'A);$$

si conclude (n. 148) che i quattro elementi U, V, A, A' formano un gruppo armonico. Dunque:

I due elementi doppi di una involuzione dividono armonicamente ogni coppia della involuzione.

Dati gli elementi doppi U, V di una involuzione, questa è pienamente determinata; e la costruzione dell'elemento A', coniugato con un elemento noto A, si riduce alla costruzione del quarto armonico dopo tre elementi dati. Alla stessa operazione si riduce la costruzione di un elemento doppio di una involuzione, di cui si conosca l'altro elemento doppio ed una coppia AA'.

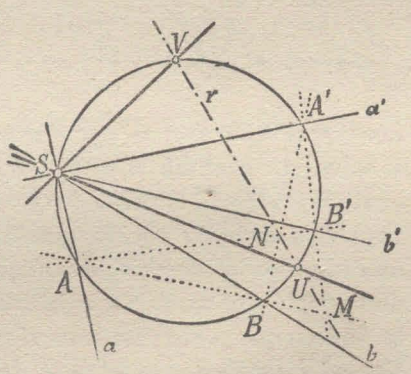
188. Costruzione degli elementi doppi di una involuzione. — Supposto che l'involuzione appartenga ad un fascio proprio di rette (al qual caso ci si può sempre ricondurre mediante una operazione preliminare di proiezione o sezione), si ricorrerà al metodo di STEINER che abbiamo adoperato nella ipotesi di una proiettività generale (n. 178).

Due fasci col centro comune S, tra i quali passi una proiettività involutoria

$$(1) \qquad aa'bb' \ldots \overline{\wedge}\; a'ab'b \ldots,$$

segano sopra una circonferenza, passante per S, due punteggiate proiettive, che diremo *in involuzione*,

$$(2) \qquad AA'BB' \ldots \overline{\wedge}\; A'AB'B \ldots$$



Posto quindi

$$N \equiv AB' \cdot A'B,$$
$$M \equiv AB \cdot A'B',$$

l'asse di proiettività r (n. 179) sarà la congiungente i punti M ed N, e si dirà in questo caso *asse d'involuzione*. La MN sega la circonferenza nei punti doppi U, V dell'involuzione (2), i quali, proiettati da S, dànno le rette doppie u, v richieste dell'involuzione (1). Secondochè l'asse d'involuzione è secante, esterno (o tangente) rispetto al cerchio, la nominata involuzione è iperbolica, ellittica (o parabolica).

Osservazione I. — Consideriamo sulla circonferenza una terza coppia CC' dell'involuzione. Dalla relazione

$$AA'BC \overline{\wedge}\; A'AB'C',$$

che può scriversi

$$(A\,A'\,B\,C) = (A'\,A\,B'\,C'),$$

si deduce (n. 147)

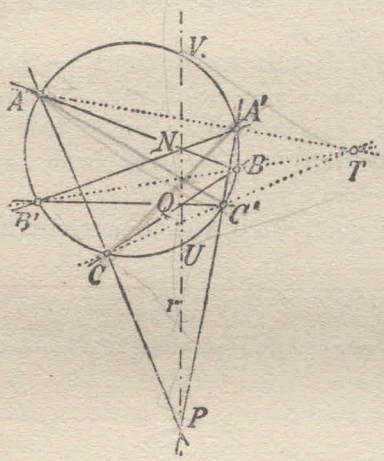
$$(A\,A'\,B\,C) = (A\,A'\,C'\,B').$$

Esiste dunque sulla circonferenza la proiettività

$$A\,A'\,B\,C \;\overline{\wedge}\; A\,A'\,C'\,B'$$

che ha come uniti i punti $A\,A'$. Segue (n. 178) che la intersezione di $B\,B'$ e $C\,C'$ cade sull'asse di proiettività $A\,A'$. Dunque le rette $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$, e tutte le analoghe congiungenti punti coniugati nell'involuzione, concorrono in uno stesso punto T, *polo dell'involuzione* tracciata sulla circonferenza.

Dato comunque il polo, la involuzione sulla circonferenza è determinata. Per costruire di un punto C il coniugato basterà congiungere T con C, e determinare l'ulteriore intersezione C' della retta col cerchio. In particolare, le tangenti che escono dal polo T, supposto esterno, hanno come punti di contatto i punti doppi U, V della involuzione. Concludendo.



Le coppie di punti di una involuzione giacente sopra una circonferenza stanno su rette uscenti da uno stesso punto (polo), il quale è esterno, interno (o sulla circonferenza), secondo che la involuzione è iperbolica, ellittica (o parabolica).

Osservazione II. — Si dice che due coppie di punti $A\,A'$, $B\,B'$ di una circonferenza *si separano*, se per andare da A ad A', seguendo la circonferenza, si deve oltrepassare B o B' (cfr. n. 118); le due coppie son proiettate da ogni punto della circonferenza mediante due coppie di rette che si separano. Ora è chiaro che, in questa ipotesi, le due corde $A\,A'$, $B\,B'$ si segano nell'interno del cerchio; è dunque interno il polo dell'involuzione che le due coppie determinano, e la involuzione è ellittica. L'opposto accade se le due coppie assegnate non si separano. Dunque: *una involuzione è ellittica od iperbolica, secondo che due sue coppie qualisivogliano si separano o non si separano.* Il risultato vale qualunque sia la forma cui la involuzione appartiene.[1]

[1] In base al teorema del n. 187, costruire gli elementi doppi della involuzione determinata dalle coppie AA', BB', vuol dire costruire due elementi che dividano armonicamente le coppie date. Se la involuzione appartiene ad una punteggiata, si può dunque applicare la costruzione indicata nell'es. 43) del n. 152. Anche per questa via si conforma l'ultima Oss.

189. Particolarità metriche di una involuzione.

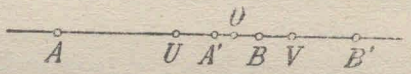
a) Sopra una retta, sulla quale sia fissato un sistema di ascisse, consideriamo una involuzione

$$\alpha x x' + \beta (x + x') + \delta = 0. \tag{1}$$

Il punto all'infinito $x = \pm \infty$ della retta ha, come coniugato, il punto di ascissa $x' = -\frac{\beta}{\alpha}$ (n. 179), il quale dicesi *centro* dell'involuzione, ed è proprio se $\alpha \neq 0$. In questa ipotesi, supposto inoltre che la origine delle ascisse cada precisamente nel detto centro, sarà $\beta = 0$, e la (1) assumerà la forma

$$\alpha x x' + \delta = 0 \qquad \text{ossia} \qquad x x' = -\frac{\delta}{\alpha} = \text{costante}.$$

Dunque: *in una involuzione sulla punteggiata è costante il prodotto delle distanze del centro da due punti coniugati qualisivogliano;* quella costante dicesi *potenza* dell'involuzione, d'accordo colla definizione di potenza di una proiettività data nel n. 173, giacchè ora i due punti limite, ivi considerati, coincidono nel centro. Una involuzione sulla punteggiata è pienamente definita quando se ne conosca il centro (proprio) O e la potenza p, ed è costituita dalle coppie di punti A, A', tali che



$$OA \cdot OA' = p.$$

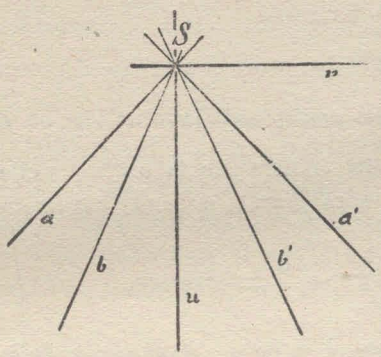
Se U è un punto doppio della involuzione, sarà $\overline{OU}^2 = p$; quindi la involuzione è iperbolica (parabolica), od ellittica, secondo che la potenza è positiva (nulla), o negativa

b) Se invece nella equazione (1) è $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$, il centro è improprio, cioè il punto all'infinito della retta sostegno è doppio; l'altro punto doppio (proprio) U sarà allora punto medio di ogni coppia di punti coniugati (n. 187). Ciò risulta anche osservando che, nell'ultima ipotesi, la (1) diviene

$$\beta (x + x') + \delta = 0, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{x + x'}{2} = -\frac{\delta}{2\beta} = \text{cost.}$$

Questa involuzione iperbolica sulla punteggiata, in cui due punti coniugati, come A ed A', o B e B', ... sono sempre simmetrici rispetto ad un punto fisso U, fu già portata come esempio di involuzione (n. 180), e detta *simmetria* sulla retta. Le due punteggiate proiettive sovrapposte $AA'BB' \ldots \overline{\wedge} A'AB'B \ldots$, che dànno luogo alla simmetria, sono uguali, anzi *inversamente uguali*, giacchè segmenti corrispondenti sono uguali ma di segno opposto. E viceversa: due punteggiate inversamente uguali e sovrapposte dànno luogo ad una involuzione simmetrica.

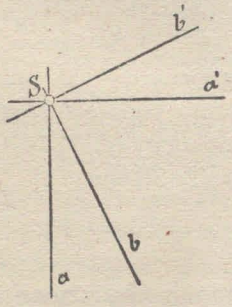
c) Passando dalla punteggiata al fascio proprio di rette, osserviamo che, se ad ogni retta a di un fascio S facciamo corrispondere la retta a' simmetrica di a, rispetto ad una retta fissa u per S (in guisa adunque che sia $\widehat{a'u} = -\widehat{au}$), otterremo nel fascio una *involuzione simmetrica,* le cui rette doppie (reali) sono la u e la perpendicolare ad u condotta per S. Viceversa, ogni involuzione (iperbolica) nel fascio, avente le rette doppie perpendicolari fra loro, è una simmetria (n. 187). Due fasci sovrapposti, corrispondentisi in una involuzione simmetrica, sono inversamente uguali; e due fasci sovrapposti inversamente uguali dànno sempre origine ad una simmetria.



Segando una simmetria nel fascio colla retta all'infinito, si ottiene su questa una *simmetria* o *uguaglianza inversa,* cioè una involuzione iperbolica i cui punti doppi individuano direzioni ortogonali.

190. Involuzione circolare. — È ora il caso di domandarci se due fasci sovrapposti *direttamente* uguali possano trovarsi in involuzione, mentre il fatto analogo non si presenta mai per le punteggiate, dove l'uguaglianza diretta è una proiettività parabolica non involutoria (n. 175, *a*)).

Tra due fasci sovrapposti aventi il centro proprio S, passi una uguaglianza diretta, per la quale ad una retta arbitraria a corrisponda quella retta a' che forma con a l'angolo costante $\widehat{aa'} = \omega$. Volendo ora di a', considerata nel primo fascio, la retta corrispondente a'', dovremo fare $\widehat{a'a''} = \omega$, e quindi $\widehat{aa''} = 2\omega$. Affinchè la proiettività sia involutoria, occorre e basta che a'' coincida con a (senza che a' coincida con a); ciò si ottiene se $2\omega = \pi$, ossia $\omega = \frac{\pi}{2}$.



Si conclude:

In ogni fascio proprio esiste una involuzione in cui ciascuna retta ha per coniugata la retta perpendicolare; essa prende il nome di *involuzione di angoli retti* o *circolare.* Si può affermare che una involuzione nel fascio è circolare, se in essa si conoscono due coppie, ciascuna composta di rette perpendicolari (n. 183).

La involuzione circolare è evidentemente ellittica. Poichè essa rientra come caso particolare nell'uguaglianza diretta fra due fasci sovrapposti

(n. 175, *b*)), *le rette doppie dell'involuzione circolare sono le rette isotrope uscenti dal centro del fascio* (n. 39).

Segando la involuzione circolare del fascio S colla retta all'infinito del piano, otteniamo su questa una involuzione ellittica, detta *circolare*, la quale è proiettata da *ogni* punto proprio mediante una involuzione circolare di rette. Due punti coniugati nella involuzione circolare sulla retta all'infinito individuano direzioni perpendicolari tra loro, e viceversa; quei punti dividono armonicamente i punti doppi, immaginari, della involuzione stessa, i quali sono i punti all'infinito delle rette isotrope, ossia i *punti ciclici* del piano (n. 127, Oss.). Dunque *i punti ciclici di un piano dividono armonicamente i punti all'infinito di ogni coppia di rette mutuamente perpendicolari, tracciate sul piano.*

Osservazione. — Abbiamo già incontrato più volte, nello studio di proprietà metriche, la nozione di rette isotrope e di punti ciclici. L'importanza di questi enti sta in ciò, che i punti ciclici, insieme alla retta all'infinito a cui appartengono, permettono di stabilire il nesso fra le proprietà proiettive e le proprietà metriche delle figure piane (cfr. n. 126). Precisamente: *ogni proprietà metrica di una figura piana può enunciarsi come una relazione proiettiva della figura colla retta all'infinito e coi punti ciclici del piano; e viceversa* (Cayley, 1859; Klein, 1871-72). Giustifichiamo con qualche esempio questa affermazione.

a) Due rette di un piano sono perpendicolari se (i loro punti all'infinito) dividono armonicamente i punti ciclici.

b) Un quadrangolo semplice (figura che ha carattere proiettivo) è un parallelogramma se i punti di incontro delle coppie di lati opposti appartengono alla retta all'infinito; se questi due punti inoltre dividono armonicamente i punti ciclici, si ha un rettangolo; si ha invece una losanga se le due diagonali dividono armonicamente i punti ciclici, ed un quadrato se le due condizioni si verificano insieme.

c) Una curva di secondo ordine (figura avente, come vedremo, carattere proiettivo) sega la retta all'infinito del suo piano in due punti; se questi cadono nei punti ciclici, la curva è un cerchio (n. 129, Oss.), e gode, in conseguenza, di spiccate particolarità metriche.

d) Abbiamo visto (n. 175) che l'uguaglianza diretta tra due fasci sovrapposti è una proiettività, che ha come rette unite le rette isotrope uscenti dal centro comune; e viceversa. Applicando una traslazione ad uno dei fasci, si deduce che l'*eguaglianza diretta tra due fasci di un piano è una proiettività, in cui si corrispondono le rette isotrope uscenti dai rispettivi centri.* Limitando l'osservazione al caso che si considerino due rette a, b dell'un fascio e le corrispondenti a', b' dell'altro, risulta: *la condizione perchè due angoli* $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ *siano uguali, è che il birapporto formato dai lati del primo angolo con le rette isotrope uscenti dal vertice di esso sia uguale al birapporto analogo relativo al secondo angolo.* Segue di qua che il birapporto formato da due rette colle rette isotrope uscenti dalla loro intersezione dipende esclusivamente dall'angolo di quelle rette e non dalla loro posizione. L'osservazione può confermarsi direttamente così.

Fissato nel piano un sistema cartesiano ortogonale, consideriamo le rette isotrope uscenti dall'origine, insieme a due rette a, b, pure uscenti dall'origine e formanti gli angoli α, β coll'asse x. Le quattro rette hanno le equazioni (n. 39, 27)

$$y = ix, \qquad y = -ix, \qquad y = x \operatorname{tg} \alpha, \qquad y = x \operatorname{tg} \beta,$$

e formano il birapporto (n. 145, c))

$$k = (i, -i, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta) = \frac{i - \operatorname{tg} \alpha}{-i - \operatorname{tg} \alpha} : \frac{i - \operatorname{tg} \beta}{-i - \operatorname{tg} \beta}.$$

Moltiplicando i due termini della prima frazione per $i \cos \alpha$, e i due termini della seconda per $i \cos \beta$, quella espressione si trasforma in

$$k = \frac{\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}{\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)} : \frac{\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta}{\cos(-\beta) + i \operatorname{sen}(-\beta)},$$

e, per la nota regola di divisione dei numeri complessi scritti sotto forma trigometrica,

$$k = \cos 2(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen} 2(\alpha - \beta),$$

ossia

$$k = \cos(-2\varphi) + i \operatorname{sen}(-2\varphi),$$

dove $\varphi = \beta - \alpha$ indica l'angolo delle due rette a, b. Dunque: *il birapporto formato dai lati di un angolo colle rette isotrope uscenti dal vertice è un numero complesso, che ha per modulo l'unità e per argomento il doppio dell'angolo;* (il segno dell'argomento non ha importanza, dipendendo dall'ordine in cui si considerano le due rette isotrope).

L'ultima formula può ancora trasformarsi, ricorrendo alla teoria delle potenze ad esponente complesso;[1] quella formula infatti equivale alla seguente

$$k = e^{-2i\varphi},$$

indicando con e la base dei logaritmi naturali. Prendendo i logaritmi dei due membri, abbiamo

$$-2i\varphi = \log k,$$

e finalmente

$$\varphi = -\frac{1}{2i} \log k = \frac{i}{2} \log k.$$

L'angolo di due rette è uguale al fattore costante $\frac{i}{2}$ *moltiplicato per il logaritmo naturale del birapporto formato dalle due rette colle rette isotrope uscenti dal vertice dell'angolo.* Questo importante teorema, dovuto a LAGUERRE (1853), riconduce la nozione metrica di angolo alla nozione proiettiva di birapporto.[2]

---

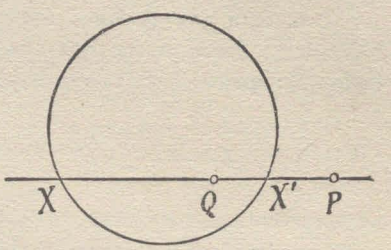
[1] V. ad es. CAPELLI, *Istituzioni di Analisi algebrica* (Napoli 1902), pag. 457, 460.

[2] A chi obiettasse qui che il birapporto di quattro rette fu da noi definito ricorrendo al concetto di angolo, si potrebbe rispondere che lo STAUDT è riuscito a definire il birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie in base a nozioni puramente grafiche, senza parlare di misura di segmenti, angoli, ecc. Ma noi non possiamo riprodurre qui il metodo seguìto dallo STAUDT, e rinviamo chi volesse conoscerlo al *Beiträge zur Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1856-1860); v. in particolare il 2° fascicolo.

191. Coppia comune a due involuzioni sovrapposte. — Ritorniamo, per un momento, alla teoria generale dell'involuzione per risolvere un problema, di cui spesso incontreremo un caso particolare metrico.

Date due involuzioni sopra uno stesso sostegno, costruire (ove esista) una coppia ad esse comune.

Supposto (come è lecito) che le due involuzioni appartengano ad uno stesso fascio proprio di rette, si conduca per il centro di questo una circonferenza. Otterremo sopra di essa due involuzioni, di cui siano P e Q i poli (n. 188, Oss. I). Se queste involuzioni hanno una coppia XX' comune, la retta XX' dovrà passare per P e per Q; e viceversa, le intersezioni della retta PQ col cerchio forniscono la coppia richiesta. Essa si compone di due punti distinti se PQ è secante; di punti coincidenti se PQ è tangente; finalmente, se PQ è esterna al cerchio, manca la coppia comune alle due involuzioni, o, meglio, si compone di elementi immaginari, come mostrerebbe la trattazione analitica.



Dunque: *Due involuzioni, appartenenti ad una stessa forma di prima specie, hanno in comune una coppia di elementi coniugati, che possono essere reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari; il primo caso si presenta certo se delle due involuzioni una almeno è ellittica,* perchè allora il corrispondente polo è interno al cerchio, e quindi la retta PQ è secante.

192. Rette coniugate e perpendicolari di una involuzione nel fascio. — Il corollario metrico si riferisce al caso che le due involuzioni appartengano ad un fascio proprio di rette, ed una di esse sia la involuzione circolare (che è ellittica). Si ha allora:

Una involuzione nel fascio proprio di rette contiene sempre una coppia di rette reali, coniugate nella involuzione e perpendicolari. Se di siffatte coppie ve ne fossero altre, la involuzione sarebbe circolare, come fu già osservato (n. 190).

*** 193. Cenno sulla rappresentazione geometrica degli elementi immaginari sopra una forma di prima specie.** — Prima di abbandonare lo studio delle involuzioni, vogliamo accennare alla via proposta dallo STAUDT per introdurre nella geometria sintetica gli elementi immaginari, dei quali noi abbiamo discorso sinora in un senso puramente analitico (n. 38).

La forma di prima specie sia, per fissar le idee, una punteggiata propria, sulla quale sia stabilito un sistema di ascisse. Ad una equazione di secondo grado, a coefficienti reali,

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

corrisponde, se la equazione ha radici reali, una coppia di punti distinti, o coincidenti, che noi possiamo segnare sulla retta, punti le cui ascisse sono le radici della (1). Se invece la (1) ha radici immaginarie (coniugate) non possiamo più rappresentare graficamente, nel modo ora esposto, queste radici, o i punti immaginari coniugati corrispondenti. Cerchiamo in tal caso se esista sulla forma un ente reale siffatto, che, data la (1), quell'ente rimanga individuato, e viceversa. Se queste condizioni saranno soddisfatte, potremo assumere l'ente stesso come immagine geometrica dell'equazione (1), o della coppia di punti immaginari che ad essa corrisponde.

Ora, data una qualsiasi equazione quadratica (1) a coefficienti reali, rimane individuata sulla punteggiata una involuzione, i cui punti doppi sono determinati dalla (1); questa involuzione ha, come si vede subito (n. 186), l'equazione

$$(2) \qquad a\,x\,x' + \frac{b}{2}(x + x') + c = 0,$$

ed è iperbolica, parabolica, o ellittica, secondo che la (1) ha radici reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie. Nell'ultimo caso *possiamo assumere la involuzione ellittica* (2) *come immagine geometrica* (o come definizione, secondo lo STAUDT) *della coppia di punti immaginari determinati dalla* (1). La involuzione ellittica è un ente reale, costituito da infinite coppie di punti reali; bastano due coppie AA', BB' per individuarla, e quindi per rappresentare la coppia di punti immaginari corrispondente ad una data equazione di secondo grado.

Si osservi poi che ogni coppia di punti immaginari coniugati di un piano appartiene ad *una* retta reale (n. 38), alla quale può applicarsi la considerazione che precede. Ne viene che le infinite coppie di punti immaginari coniugati di un piano sono rappresentate dalle infinite involuzioni ellittiche esistenti sulle singole rette (reali) del piano. Quelle coppie vengono con ciò ad esser definite in modo autonomo, indipendente da un particolare sistema di coordinate fissato nel piano; mentre la definizione analitica, che ne fu data al n. 38, doveva necessariamente esser collegata al sistema di riferimento.

In modo analogo si procederà per rappresentare (o definire) una coppia di elementi immaginari coniugati (in senso algebrico) appartenenti ad un fascio di rette o di piani. Sempre la detta coppia di elementi si rappresenterà mediante quella involuzione ellittica nel fascio che ha come doppi gli elementi nominati. In particolare, le rette isotrope uscenti da un punto proprio S saranno rappresentate dalla involuzione circolare nel fascio S; ed i punti ciclici del piano, dalla involuzione circolare sulla retta all'infinito.

Sugli enti immaginari così introdotti si possono definire le operazioni geometriche fondamentali. Così, per esempio, data sopra una retta (reale) una coppia di punti immaginari coniugati U, V, rappresentata mediante la involuzione ellittica AA', BB', la coppia di rette immaginarie SU, SV, proiettanti quei punti da un punto reale S, si rappresenterà mediante la involuzione nel fascio S determinata dalle coppie di rette SA, SA' ed SB, SB'.

Osservazione. — In molte questioni due elementi immaginari coniugati si presentano sempre insieme, e si comportano nello stesso modo, cosicchè è suffi-

ciente rappresentare la coppia che essi formano ricorrendo alla involuzione ellittica, come ora si disse. In altre questioni però occorre definire separatamente ciascuno dei due elementi immaginari coniugati. A tal fine lo STAUDT ha proposto di considerare, insieme alla involuzione ellittica, uno dei due versi appartenenti alla forma su cui si opera, e di aggregare quel verso ad uno dei due elementi immaginari, e il verso opposto all'altro elemento. In tal guisa, ricordando che due coppie AA', BB' di una involuzione ellittica si separano e quindi che gli elementi $ABA'B'$ si succedono in un verso, e gli elementi $AB'A'B$ nel verso opposto, potremo con $ABA'B'$ rappresentare uno degli elementi doppi della nostra involuzione, e con $AB'A'B$ l'altro.

Esercizi. I. — 1) Costruire sulla punteggiata (x ed x' essendo ascisse) le involuzioni rappresentate dalle equazioni bilineari $xx' = 4$, $x + x' = 2$, o dalle combinazioni lineari

$$\lambda(x-1)^2 + \mu(x+1)^2 = 0, \qquad \lambda x^2 + \mu(x+1) = 0, \qquad \lambda x^2 + \mu = 0;$$

determinarne analiticamente il centro e i punti doppi.

2) Scrivere sotto la forma bilineare, o sotto forma di combinazione lineare, la equazione della involuzione che ha il centro nel punto (di ascissa) 1, e come coniugati i punti $+2$, -2; oppure che ha quel centro e il punto doppio $+3$; oppure che ha i punti doppi -1 e $+4$.

II. — 3) Se AA', BB', CC' sono tre coppie di punti di una stessa involuzione, si ha

$$(BCA')\ (CAB')\ (ABC') = 1.$$

4) Se AA' e BB' sono coppie di elementi corrispondenti in una proiettività tra forme sovrapposte, i cui elementi uniti siano U e V, allora UV, AB', $A'B$ sono tre coppie di una stessa involuzione, e viceversa. Il teorema vale anche se U e V coincidono. Come si enuncia il teorema se A' e B coincidono?

5) Il luogo di un punto, dal quale due punteggiate proiettive non sovrapposte di un piano vengono proiettate mediante due fasci di rette in involuzione, è l'asse di proiettività delle due punteggiate (n. 179, es. 4)). Teorema duale.

6) I cerchi passanti per due punti segano sopra una trasversale coppie di una involuzione, il cui centro si trova sulla congiungente i due punti. Dove cadono i punti doppi della involuzione? Valersi del teorema enunciato per costruire, sulla punteggiata, una involuzione di cui si conoscano due coppie.

7) Data una involuzione ellittica sopra una punteggiata, esistono sempre, in un piano per questa, due punti, da ciascuno dei quali la involuzione è proiettata mediante una involuzione circolare.

8) Data una involuzione iperbolica sopra una punteggiata, qual'è il luogo di un punto da cui la involuzione viene proiettata mediante una involuzione simmetrica di rette?

III. — 9) Le rette polari di un punto (cfr. n. 126, es. 18)), rispetto alle tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo, passano per uno stesso punto (n. 185).

10) I poli di una retta, rispetto alle tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo, stanno sopra una retta; come si enuncia questo teorema se quella retta è all'infinito?

11) Il teorema di DESARGUES sul quadrangolo completo (n. 185) può enunciarsi così: le proiezioni dei vertici di un triangolo, da un punto qualunque del suo piano, sopra una trasversale non passante per nessuno dei vertici, sono coniugate in una involuzione alle intersezioni dei lati rispettivamente opposti del triangolo colla stessa trasversale. Sotto questa forma il teorema può facilmente invertirsi: « se delle intersezioni dei lati di un triangolo con una trasversale si costruiscono i coniugati in una qualsiasi involuzione su quella, questi, congiunti coi vertici rispettivamente opposti del triangolo, dànno tre rette concorrenti in un punto ». Questioni duali.

12) I teoremi inversi di quelli di DESARGUES conducono a numerosi corollari, quando si particolarizzi l'involuzione; così segue subito: le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto; o, ciò che fa lo stesso: se due coppie di lati opposti di un quadrangolo completo si compongono di rette perpendicolari, anche la terza coppia di lati opposti si comporrà di rette perpendicolari.

13) Se in un quadrangolo completo le bisettrici dell'angolo determinato da due lati opposti sono parallele alle bisettrici dell'angolo di altri due lati opposti, anche la terza coppia di lati opposti dà luogo a bisettrici aventi le stesse direzioni, e il quadrangolo è iscrittibile in un cerchio; e viceversa.

14) Se si congiungono i vertici di un triangolo con un punto del piano, e pel punto si conducono le perpendicolari alle congiungenti, queste vanno ad incontrare i lati rispettivamente opposti del triangolo in tre punti allineati.

15) Se dai vertici di un triangolo partono tre raggi luminosi concorrenti in un punto di una retta del piano, i raggi riflessi da questa (prolungati se occorre) incontreranno i lati opposti del triangolo in tre punti allineati.

16) Dall'ultimo teorema si può dedurre una dimostrazione del teorema di SIMSON (cfr. n. 152, es. 9)), anzi del teorema più generale: « se da un punto del cerchio circoscritto ad un triangolo si conducono tre rette inclinate ai lati di questo sotto lo stesso angolo (in valore e segno), esse determinano sui lati tre punti allineati ».

17) Se due quadrangoli completi, situati in un piano, sono così riferiti che cinque lati dell'uno siano perpendicolari ai cinque lati omologhi dell'altro, anche i sesti lati dei due quadrangoli risulteranno perpendicolari tra loro.

18) Se due triangoli ABC, $A'B'C'$ sono così situati che le perpendicolari calate dai vertici A, B, C del primo sui lati $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ del secondo passino per uno stesso punto, anche le perpendicolari calate dai vertici A', B', C' del secondo sui lati BC, CA, AB del primo passeranno per uno stesso punto (cfr. n. 33, es. 9)).

IV. — 19) Una involuzione circolare, o simmetrica, in un fascio proprio di rette sega sopra una circonferenza, condotta per il centro del fascio, una involuzione che può chiamarsi collo stesso nome. Dove sta il polo? Dove l'asse?

20) Le tangenti ad un cerchio nelle coppie di punti di una involuzione si segano sull'asse (n. 188). Viceversa: « se dai punti di una retta si conducono le tangenti ad un cerchio, le coppie di punti di contatto appartengono ad una involuzione, di cui la retta è l'asse ».

21) Se A, B, C sono tre elementi di una forma di prima specie (ad es. punti di una circonferenza), ed A', B', C' sono i coniugati armonici di quelli rispetto

alle coppie BC, CA, AB ordinatamente, le coppie AA', BB', CC' appartengono ad una stessa involuzione, ed i gruppi $AA'B'C'$, $BB'C'A'$, $CC'A'B'$ sono armonici (cfr. n. 179, es. 38), 39)).

V. — 22) Dati due angoli retti, a lati non paralleli, ed un parallelogramma, costruire colla sola riga la retta uscente da un punto dato e perpendicolare ad una data retta (es. 12) e n. 126, es. 25)).

23) In particolare: dato un quadrato, condurre colla sola riga da un punto dato la perpendicolare ad una retta assegnata (STEINER). (Si supponga anzitutto che la retta passi per il centro del quadrato, e che il punto cada nel centro stesso; per la intersezione della retta con un lato si conduca la perpendicolare a questo lato fino ad incontrare il lato opposto, poi la parallela ad una diagonale del quadrato...).

24) Dato un quadrato, bisecare colla sola riga un angolo retto (il cui vertice può supporsi cada nel centro del quadrato).

25) Dato un quadrato ed un angolo $\widehat{ab}$, costruire colla sola riga un angolo $\widehat{a'b'} = \widehat{ab}$, di cui sia assegnato un lato a' ed il vertice. (Supposto che i due angoli abbiano lo stesso vertice, tutto si riduce a costruire la involuzione simmetrica di cui $a'b$ è una coppia; ora le rette perpendicolari ad a' e b costituiscono una seconda coppia della detta involuzione...).

26) Dato un quadrato, verificare colla sola riga se due dati segmenti AB, EF siano uguali; (si costruisca un parallelogramma $ABCD$, di cui il lato BC sia uguale e parallelo ad EF, e si considerino le diagonali...).

27) Dato un quadrato, e determinato un cerchio coll'assegnarne il centro O ed un punto A, oppure tre punti A, B, C, costruire colla sola riga l'ulteriore intersezione del cerchio con una retta arbitraria condotta per A; variando la retta si ottengono, senza compasso, quanti punti si desiderano del detto cerchio.

VI. *Problemi di secondo grado.*[1] — 28) In ogni involuzione ellittica esiste una coppia di elementi coniugati e reali, che divide armonicamente un'altra coppia assegnata della involuzione.

29) Data una proiettività tra due fasci propri di rette, determinare (analiticamente e graficamente) una coppia di rette perpendicolari dell'un fascio, a cui corrisponda una coppia di rette pure perpendicolari dell'altro fascio; esiste in ciascun fascio una sola coppia di rette reali soddisfacenti al problema, a meno che i due fasci non siano uguali. (Nella risoluzione grafica conviene supporre collocati i due fasci in posizione prospettiva).

30) L'esercizio precedente permette di risolvere i problemi seguenti: « dato un fascio di rette ed un fascio proiettivo di piani, segare quest'ultimo con un piano, in modo da ottenere un fascio di rette uguale al fascio dato (n. 126, es. 10)) », e in particolare « segare un prisma triangolare con un piano, in guisa da ottenere

[1] Dicesi *di secondo grado* un problema, la cui risoluzione, condotta analiticamente, dipenda dalla risoluzione di una equazione quadratica. Tale è la ricerca degli elementi uniti di una proiettività tra forme sovrapposte; ed a questo problema si dimostra potersi ricondurre ogni altro problema di secondo grado. Un problema di secondo grado ammette due soluzioni, che possono essere o reali e distinte, o reali e coincidenti, o immaginarie. Per posizioni particolari dei dati possono anche esistere infinite soluzioni; ciò accade quando l'equazione suddetta si riduce ad una identità. (Maggiori notizie trovansi nell'articolo *Sui problemi geometrici* inserito alla fine di questo Volume).

un triangolo simile ad un triangolo dato »; « dati due fasci propri proiettivi di rette, collocarli in tal posizione da formare una involuzione (n. 181) ».

31) Date due punteggiate proiettive non sovrapposte, per un punto assegnato nel loro piano condurre una trasversale che le seghi in punti corrispondenti; problema duale.

32) *Problemi di* APOLLONIO: fissati su due rette distinte due punti A, B', condurre per un punto dato nel loro piano una trasversale secante le due rette in punti X, X' tali che sia $AX + B'X' = k$, oppure $AX \cdot B'X' = k$ (*sectio spatii*), oppure $\frac{AX}{B'X'} = k$ (*sectio rationis*); k è una costante assegnata, misura di un segmento o di un'area nei primi due casi. (Preso un punto M ad arbitrio sulla prima retta, si costruisca M' sulla seconda in guisa che sia verificata la prima, o la seconda, o la terza relazione; al variare di M e di M' sorge una proiettività, facilmente costruibile, tra le due punteggiate; con ciò si è ricondotti all'es. 31). Questo *metodo*, che approfitta di uno o più tentativi per risolvere il problema, dicesi *di falsa posizione*).

33) Per un punto del piano condurre una retta, che formi con due rette date un triangolo di area data.

34) Date due rette, per un punto assegnato nel loro piano condurre due trasversali che intercettino su quelle due segmenti di date lunghezze.

35) Data in un piano una retta e due punti fuori di essa, costruire sulla retta un segmento che venga visto dai due punti sotto angoli assegnati.

36) In un triangolo ABC iscrivere un parallelogramma di area assegnata, avente due lati sopra AB, AC ed un vertice sopra BC. Iscrivere nel triangolo un rettangolo d'area assegnata, un cui lato cada su AB ed i due vertici del lato opposto su CA, CB.

37) In una proiettività fra punteggiate sovrapposte determinare (analiticamente e graficamente) due punti corrispondenti che abbiano una data distanza. Qual'è il minimo valore assoluto della distanza di punti corrispondenti in una proiettività ellittica?

38) Dati due fasci di rette proiettivi, non sovrapposti, segarli con una trasversale in guisa da ottenere due punteggiate simili (n. 179, es. 31)), od anche due punteggiate inversamente (es. 5)), o direttamente uguali.

39) Date due punteggiate proiettive u, u' su rette distinte, proiettare la u sul sostegno della u' da un punto tale, che la nuova punteggiata risulti direttamente od inversamente uguale alla u'.

40) Date due coppie di elementi AA', BB' sopra una forma di prima specie, costruire una proiettività parabolica, in cui A e B abbiano per corrispondenti A' e B' (es. 4)). Come applicazione: dati due angoli collo stesso vertice, condurre per un dato punto una tal trasversale, che le corde intercettate entro agli angoli risultino direttamente uguali.

41) Dati tre segmenti sopra una retta, costruire un punto dal quale i segmenti siano visti sotto angoli uguali (n. 151, es. 44)).

42) Data una proiettività ellittica sopra una retta, esistono in ogni piano per la retta due punti, da ciascuno dei quali quella proiettività vien proiettata mediante una eguaglianza diretta nel fascio.

43) Costruire un triangolo, i cui vertici cadano su tre rette date u_1, u_2, u_3, ed i cui lati passino per tre punti dati S_{12}, S_{23}, S_{31}. (Preso ad arbitrio un punto M_1 su u_1, si costruiscano M_2, M_3, M_1' su u_2, u_3, u_1, in guisa che i lati della spezzata $M_1 M_2 M_3 M_1'$ passino ordinatamente per S_{12}, S_{23}, S_{31}, e si osservi che, al variare di M_1, M_1' descrive una punteggiata proiettiva e sovrapposta a quella descritta da M_1).

44) Il problema precedente ha i seguenti casi particolari notevoli: quando le tre rette concorrono in un punto, poichè allora una soluzione è degenere, e l'altra può costruirsi linearmente; quando i tre punti sono allineati, perchè si presenta un fatto analogo; quando ambedue le condizioni sono verificate insieme, perchè allora si hanno due soluzioni degeneri, e in generale nessuna vera soluzione, a meno che, per una posizione particolare dei dati, non esista una vera soluzione, nel qual caso esistono infinite soluzioni costituite da triangoli a due a due omologici rispetto al centro $u_1 u_2 u_3$ e all'asse $S_{12} S_{23} S_{31}$; finalmente quando le tre rette u e i tre punti S costituiscono due triangoli tali che i lati del secondo passino per i vertici del primo (precisamente $S_{31} S_{12}$ per il punto $u_2 u_3$, ecc.), perchè allora il problema ammette infinite soluzioni, come afferma l'enunciato: « se di due triangoli il primo è iscritto nel secondo, esistono infiniti triangoli iscritti nel primo e circoscritti al secondo ».

45) Siano date n rette $u_1, u_2, \dots, u_n$; da un punto incognito X_1 di u_1 parte un raggio luminoso x_1 in direzione assegnata, il quale si riflette sopra u_2; il raggio riflesso x_2 (o il suo prolungamento) si riflette sopra u_3, e così via finchè l'ultimo raggio riflesso x_n incontra di nuovo u_1; determinare X_1 in guisa, che l'incontro avvenga precisamente in X_1. È possibile determinare la direzione di x_1 in modo che risulti $\widehat{x_1 u_1} \equiv -\widehat{x_n u_1}$ (mod. π), sicchè x_n, riflettendosi sopra u_1, venga a fornire di nuovo $x_1 \dots$, ed il poligono venga percorso infinite volte dal raggio luminoso? (In quest'ultima ricerca occorre distinguere il caso di n pari da n dispari).

46) Iscrivere in un cerchio un n.gono semplice, i cui lati passino ordinatamente per n punti assegnati. Osservando che il problema si riduce a determinare i punti uniti della proiettività prodotto di n involuzioni note, esaminare quando esistano infinite soluzioni (e la proiettività risulti l'identità). Perchè ciò avvenga, si possono prendere ad arbitro $n-2$ degli n punti, purchè i rimanenti due vengano scelti convenientemente sopra una retta che rimane allora determinata. Esaminare, in particolare, i casi $n = 3$, 4, ed il caso di n pari quando gli n punti dati si trovano sopra una retta.

VII. *Rappresentazione geometrica degli elementi immaginari.* — 47) Date due involuzioni, entrambe iperboliche od ellittiche, sopra due rette distinte, determinare nel loro piano un punto, dal quale le coppie dell'una involuzione vengano proiettate nelle coppie dell'altra. (Il problema ammette due soluzioni reali X, Y, che si ottengono subito se le involuzioni sono iperboliche, mentre, quando siano ellittiche, conviene costruire in ciascuna due coppie separantisi armonicamente (es. 28)), e formanti due gruppi prospettivi). Problema duale.

48) Nel caso di involuzioni ellittiche il problema precedente può enunciarsi: date due coppie di punti immaginari coniugati MM_0, NN_0 sopra due rette distinte, determinare le quattro rette congiungenti i punti dell'una coppia coi punti del-

l'altra; queste rette sono immaginarie, ma MN, M_0N_0 sono immaginarie coniugate, secantisi in un punto reale X, e possono definirsi mediante una involuzione ellittica nel fascio X; similmente MN_0, M_0N si segano in un punto reale Y, ecc. Caso particolare: N, N_0 siano i punti ciclici del piano. Casi particolari del problema duale: una o tutte e due le coppie si compongano di rette isotrope uscenti da punti reali.

49) Segnate in un piano due rette perpendicolari Ox, Oy, i due numeri complessi coniugati $a + bi$, $a - bi$ si possono rappresentare in due modi diversi: sia, con GAUSS, mediante due punti reali P e Q del piano, sia, seguendo STAUDT, mediante quella involuzione ellittica sulla retta Ox, i cui punti doppi U, V hanno per ascisse quei numeri. Si dimostri ora che P e Q sono precisamente i due punti dai quali la involuzione ellittica su Ox è proiettata mediante una involuzione circolare (es. 7)); od anche, sono i due rimanenti vertici del quadrilatero completo, di cui una coppia di vertici opposti sta in U, V, e l'altra nei punti ciclici del piano (cfr. n. 39, es. 13)).

50) Data una proiettività P fra due punteggiate sovrapposte, si costruiscano di ogni punto A i corrispondenti A_1 ed A_{-1} nella P e nella inversa P^{-1}, e sia A_0 il coniugato armonico di A rispetto ad A_1, A_{-1}. Si dimostri analiticamente che le infinite coppie AA_0, che si ottengono al variare di A, costituiscono una involuzione avente come doppi i punti uniti della proiettività. Questa involuzione (*unita* per la P) rappresenta i detti punti uniti, quando siano immaginari.

51) Date due involuzioni sopra uno stesso sostegno, determinare quella terza involuzione i cui elementi doppi costituiscono la coppia comune alle due involuzioni date; (della involuzione richiesta, che è unita per una certa proiettività, si possono costruire linearmente quante coppie si vogliono).

CAPITOLO V.

Proiettività tra forme di seconda specie.

194. Definizione di proiettività fra due forme di seconda specie. — Fra due forme di seconda specie possono stabilirsi delle corrispondenze biunivoche, che hanno la massima analogia colla proiettività tra forme di prima specie.

L'esempio più semplice è fornito dalla proiezione di un piano π sopra un nuovo piano π', da un centro che non appartenga a nessuno dei due piani (n. 120). Ad ogni punto e ad ogni retta di π corrisponde rispettivamente *un* punto ed *una* retta di π', e viceversa; ad una punteggiata corrisponde una punteggiata *proiettiva* a quella, ad un fascio di rette un fascio *proiettivo*. Le stesse proprietà sussistono ancora, se si passa da un piano ad un altro mediante più operazioni successive di proiezione o sezione.

D'altra parte, mutando i nomi delle forme di seconda specie che si vogliono considerare, ed in conseguenza i nomi dei rispettivi elementi, si ottengono nuove corrispondenze che effettivamente possono costruirsi (come si vedrà), sebbene in modo meno semplice di quelle sopra indicate. Tutte queste corrispondenze rientrano nella famiglia delle *proiettività*, la cui definizione risulta dal seguente enunciato:

Due forme di seconda specie Σ, Σ' *diconsi riferite proiettivamente* (o *proiettive*), *quando ad ogni elemento di* Σ, *o* Σ', *corrisponde un unico elemento di* Σ', *o* Σ, *ed inoltre agli elementi di ogni forma di prima specie contenuta in* Σ, *o* Σ', *corrispondono in* Σ', *o* Σ, *elementi di una forma di prima specie proiettiva a quella;* due tali forme di prima specie, come pure i loro sostegni, diconsi *corrispondenti* nella proiettività fra Σ e Σ'.

È bene avvertire sin d'ora che le parole *proiettiva a quella,* con cui termina la definizione, potrebbero sopprimersi, giacchè, come vedremo, la proiettività tra forme corrispondenti di prima specie segue dalle premesse. Ma poichè, per giustificare questa asserzione, dovremo ricorrere a nozioni che non sono essenziali per il nostro corso, e poichè, d'altra parte, la proprietà in questione, sebbene importante sotto l'aspetto teorico, non interviene nelle applicazioni che seguono, sembra lecito ed opportuno di conservare alla definizione la forma sopra adottata.

195. Collineazioni e correlazioni. — È bene distinguere i vari casi, cui la definizione precedente dà luogo.

a) Se le forme di seconda specie sono due *piani punteggiati* π, π', allora la proiettività muta ogni punto A di π in *un* punto A' di π', ed i punti di una punteggiata di π nei punti di una punteggiata *proiettiva* di π'. Alla retta b, sostegno di quella, corrisponde dunque una retta b', sostegno di questa; e se il punto A appartiene a b, anche il punto A' apparterrà a b'. Segue che alle rette del fascio A corrispondono le rette del fascio A'. Ed i due fasci risultano proiettivi, giacchè essi segano rette corrispondenti, che non passino per i centri, in punteggiate corrispondenti, quindi proiettive. Ma una corrispondenza che muti ogni retta di π in una retta di π', ed ogni fascio di π in un fascio proiettivo di π', è, per definizione, una proiettività tra i *piani rigati* π, π'. Concludiamo che una proiettività fra due punti punteggiati trae con sè una proiettività fra i piani stessi, riguardanti come rigati, e viceversa; è dunque opportuno riunire le due proiettività sotto un unico nome. Una siffatta corrispondenza si suol chiamare *collineazione* (od *omografia*) fra i due piani π, π'; e si può definire direttamente dicendo che essa fa corrispondere ad ogni punto e ad ogni retta di π, rispettivamente *un* punto ed *una* retta di π', ad ogni punteggiata e ad ogni fascio di π, una punteggiata *proiettiva* ed un fascio *proiettivo* di π'. L'es. del n. 194 si riferisce appunto ad una collineazione.

b) Se una delle forme è un piano punteggiato e l'altra un piano rigato, la proiettività muta ogni punto ed ogni retta di ciascun piano rispettivamente in *una* retta ed in *un* punto dell'altro piano, ogni punteggiata in un fascio *proiettivo* ad essa, ogni fascio in una punteggiata *proiettiva*. La corrispondenza prende in tal caso il nome di *correlazione* o (*reciprocità*) tra i due piani; è indifferente quale dei due si riguardi come punteggiato o rigato. Porteremo in seguito esempi di correlazioni.

c) Una proiettività fra due stelle S, S' dicesi *collineazione*, se ad ogni retta o piano di S corrisponde rispettivamente *una* retta od *un* piano di S', ed alle rette od ai piani di un fascio corrispondono rette o piani di un fascio *proiettivo*. Una particolare collineazione fra due stelle S, S' si ottiene riguardando come corrispondenti due elementi (rette o piani), che proiettino da S, S' uno stesso elemento (punto o retta) di un piano ausiliare.

d) Una proiettività tra due stelle S, S' dicesi invece *correlazione*, se alle rette e ai piani di S corrispondono rispettivamente i piani e le rette di S', ed agli elementi di un fascio corrispondono gli elementi di un fascio proiettivo. Una particolare correlazione (ortogonale) fra due stelle proprie S, S' si ottiene, come vedremo, facendo corrispondere ad ogni retta o piano per S, il piano o la retta perpendicolare condotta per S'.

e), *f*) Finalmente, tra un piano π ed una stella S' si può fissare una proiettività in modo che ai punti ed alle rette di π corrispondano rispettivamente le rette ed i piani di S' (*collineazione*), oppure corrispondano i piani e le rette di S' (*correlazione*).

Il concetto di corrispondenza proiettiva fra due piani fu stabilito in tutta la sua generalità dal MÖBIUS (1827). Casi particolari erano noti anche prima; ad es., sotto l'aspetto metrico, l'uguaglianza, la similitudine e l'affinità (considerata già da EULERO, 1748); e, sotto l'aspetto proiettivo, la relazione prospettiva fra due piani, la omologia e la polarità rispetto ad una conica (studiate principalmente dal PONCELET, 1822).

196. Prodotto di proiettività. — Segue subito dalla definizione che *due forme di seconda specie, riferite proiettivamente ad una terza forma, sono riferite proiettivamente fra di loro.* In altre parole, chiamando *proiettività* l'operazione con cui si passa da una prima forma ad una seconda forma proiettiva (operazione distinta dalla *inversa*, con cui si ritorna dalla seconda alla prima), ed estendendo il concetto di *prodotto* di operazioni, già introdotto a proposito delle forme di prima specie (n. 166, Oss.), possiamo dire: *il prodotto di due o più proiettività tra forme di seconda specie è ancora una proiettività;* ed è precisamente una *collineazione* od una *correlazione*, secondo che il numero delle *correlazioni*, che entrano come fattori, è pari o dispari.

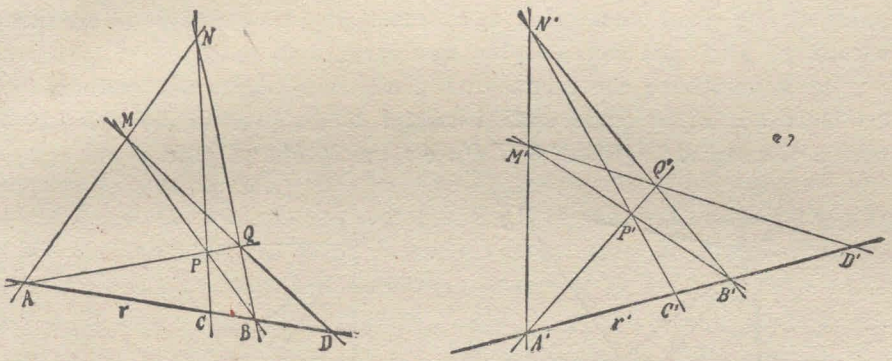
***197. Teorema di Staudt sulla proiettività tra forme di seconda specie.** — Abbiamo già affermato che la definizione di proiettività tra forme di seconda specie, da noi adottata, contiene una condizione superflua. Sussiste infatti il seguente notevolissimo teorema:

Una corrispondenza tra due forme di seconda specie, la quale muti ogni elemento (reale) dell'una in un unico elemento (reale) dell'altra, ed ogni forma di prima specie di quella in una forma di prima specie di questa, determina una proiettività tra le dette forme di prima specie.

Si tratti, ad es., di due piani punteggiati π, π' così riferiti, che ad ogni punto A e ad ogni punteggiata r di π corrisponda un punto A' ed una punteggiata r' di π'; quindi ad ogni retta di π una retta di π', ad un triangolo o quadrangolo ... di π, un triangolo o quadrangolo ... di π'. Si tratta di dimostrare che le due punteggiate r, r' sono riferite proiettivamente.

Dalla ipotesi segue anzitutto che la corrispondenza fra le due punteggiate è biunivoca.

Per affermare che si tratta di una proiettività occorrerebbe dimostrare che il birapporto di quattro punti arbitrari di r uguaglia il birapporto dei corrispon-



denti punti di r'. Ma così procedendo si urterebbe in una difficoltà grave, dipendente dal fatto che il birapporto fu da noi definito partendo da nozioni metriche, mentre la ipotesi del teorema è di natura puramente grafica. La difficoltà si supera, purchè si ricordi il teorema di Staudt sulle forme di prima specie (n. 171), il quale afferma che una corrispondenza biunivoca fra due punteggiate è proiettiva, se muta ogni gruppo armonico dell'una in un gruppo armonico dell'altra; e si ricordi inoltre che il gruppo armonico può definirsi graficamente servendosi del quadrangolo completo (n. 149). Siamo adunque condotti a chiederci se a quattro punti armonici A, B, C, D di r, corrispondano quattro punti armonici A', B', C', D' di r'.

Ora, se i punti A, B, C, D sono armonici, si può costruire (in infiniti modi) in π un quadrangolo completo, di cui due lati opposti passino per A, due lati opposti per B, e gli altri due lati passino per C e D rispettivamente. La corrispondenza, di cui parla l'enunciato, muta il detto quadrangolo in un quadrangolo completo di π', di cui due lati opposti passano per A', due lati opposti

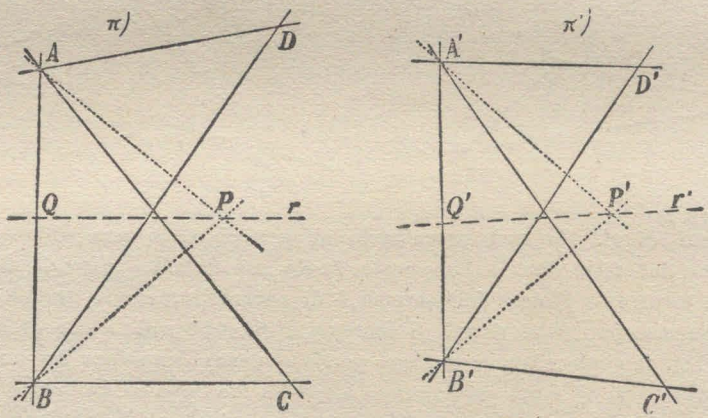
per B', un quinto lato per C' e il sesto per D'; ma allora A', B', C', D' sono quattro punti armonici, come si voleva dimostrare. E quindi si conclude che le due punteggiate r, r' sono riferite proiettivamente.

198. Determinazione e costruzione di una proiettività fra due forme di seconda specie. — Il teorema del n. 170, secondo il quale una proiettività tra due forme di prima specie è determinata da tre coppie di elementi omologhi, si estende nel modo seguente alle corrispondenze che ora stiamo esaminando:

Assegnate sopra due forme di seconda specie due quaterne di elementi A, B, C, D *e* A', B', C', D', *tali che i quattro elementi di una stessa forma abbiano lo stesso nome, e di essi mai tre appartengano ad una forma di prima specie, rimane individuata una proiettività fra le due forme primitive, che fa corrispondere ad* A, B, C, D, *rispettivamente* A', B', C', D'.

Noi dimostreremo in primo luogo che, ammessa l'esistenza di una siffatta proiettività, essa è unica; in secondo luogo, che quella proiettività certo esiste. E ragioneremo nella ipotesi che gli elementi nominati siano punti di due piani punteggiati π, π'; ma il ragionamento potrà estendersi a tutti gli altri casi con semplici cambiamenti di parole.

1) Ammettiamo che esista una proiettività, anzi una collineazione, fra i piani π, π', la quale muti i vertici di un quadrangolo $A\,B\,C\,D$ nei vertici di un quadrangolo $A'\,B'\,C'\,D'$; e siano P, P' due punti corrispondenti



arbitrari dei due piani. Posto, ad es., che P non appartenga al lato $A\,B$, sussisteranno, per definizione, le proiettività tra fasci

$$\alpha) \qquad A(B\,C\,D\,P) \overline{\wedge} A'(B'\,C'\,D'\,P'),$$

$$\beta) \qquad B(A\,C\,D\,P) \overline{\wedge} B'(A'\,C'\,D'\,P'),$$

le quali, dato P, *individuano* le rette $A'P'$, $B'P'$, e quindi il punto P' in π'. Non possono dunque esistere due diverse collineazioni soddisfacenti alle condizioni imposte.

2) Astraendo ora dalla ipotesi che esista la collineazione, si osservi che sempre le α) e β) fissano una *corrispondenza biunivoca* tra i piani π, π' descritti dai punti P, P', corrispondenza che muta i punti A, B, C, D nei punti A', B', C', D', ed ogni punto P, fuori di AB, in un punto P', fuori di $A'B'$ (e viceversa). Fanno, tutto al più, eccezione i punti generici di AB ed $A'B'$, giacchè le α), β) non determinano veramente una corrispondenza biunivoca tra queste due punteggiate; ma una tale eccezione verrà tolta fra poco.

La corrispondenza biunivoca fra π, π' è tale che, *se il punto P descrive una retta r in π, il punto P' descrive pure una retta r' in π'*. Ciò è evidente se r passa per A (o per B) ed è ad es. la AP, giacchè ad essa corrisponde la retta $A'P'$ in π'. Nella ipotesi opposta, si noti che, mentre P descrive la punteggiata r, le rette AP, BP generano due fasci proiettivi (anzi prospettivi)

$$A\,(BP\ldots) \overline{\wedge} B\,(AP\ldots).$$

Ma allora, applicando ai due fasci, rispettivamente, le proiettività α), β), risultano proiettivi in π' i due fasci

$$A'\,(B'P'\ldots) \overline{\wedge} B'\,(A'P'\ldots),$$

anzi prospettivi perchè hanno unita la retta $A'B'$; quindi il luogo del punto P' è una retta r', che corrisponde alla retta r di π. Le due punteggiate r, r' sono inoltre *proiettive,* perchè sezioni dei fasci proiettivi α).

Ed ora siamo in grado di completare la corrispondenza biunivoca tra i due piani punteggiati π, π', facendo vedere come di ogni punto Q di AB, si possa assegnare *il* punto corrispondente Q' di $A'B'$. Condotte infatti per Q più rette r, s,... in π, e dette r', s',... le rette corrispondenti in π', si osservi che queste passano per uno stesso punto Q' di $A'B'$; giacchè, se ad es. il punto $r's'$ non cadesse su $A'B'$, il punto corrispondente $Q \equiv rs$ non cadrebbe su AB, contro la ipotesi.

Con ciò risulta dimostrato che la corrispondenza stabilita fra i due piani π, π' mediante le α) e β) possiede tutti i caratteri della collineazione. E si ha pure il modo per *costruire* effettivamente una collineazione tra π, e π', quando si conoscano due quadrangoli corrispondenti.

Costruzioni analoghe, a cui si arriva con semplici cambiamenti dei nomi degli elementi e delle forme, si applicano agli altri casi di proiettività tra forme di seconda specie.

* **Osservazione.** — Ricorrendo alle coordinate proiettive, si può dimostrare la parte 2) del teorema precedente con una considerazione immediata. Si stabiliscano infatti nei piani π, π' due sistemi di coordinate proiettive (x, y, z) e (x', y', z'), assumendo ABC e $A'B'C'$ come triangoli fondamentali, D e D' come punti unità. Allora le relazioni

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

(o $x' : y' : z' = x : y : z$, che è lo stesso, data l'omogeneità) determinano una corrispondenza biunivoca tra i punti dei due piani, la quale trasforma $A\,B\,C\,D$ in $A'\,B'\,C'\,D'$. La corrispondenza inoltre muta una retta $ax + by + cz = 0$ di π in una retta $ax' + by' + cz' = 0$ di π'. Tanto basta per affermare che si tratta di una collineazione, se si vuol profittare del teorema n. 197. Se poi non si vuol ricorrervi, si osserverà che, presi quattro punti allineati in π, e costruiti i corrispondenti punti in π', che hanno le stesse coordinate di quelli, il birapporto dei primi quattro punti è certo uguale al birapporto degli ultimi quattro, poichè esso dipende soltanto dalle dette coordinate (n. 145, *b*)).

***199. Equazioni della collineazione fra due piani.** — Se due forme di seconda specie sono riferite proiettivamente, e su ciascuna di quelle è fissato un sistema di coordinate proiettive, si può chiedere di qual tipo siano le relazioni che legano le coordinate di elementi corrispondenti nelle due forme. Noi tratteremo la questione nella ipotesi che si abbiano due piani collineari; ma estenderemo subito il risultato ad ogni altro caso.

Siano adunque π e π' i due piani collineari, e $P\,(x, y, z)$, $P'\,(x', y', z')$ siano due punti corrispondenti di essi, riferiti a due sistemi di coordinate proiettive omogenee. Notiamo anzitutto che, se i punti fondamentali ed unità nei due piani si corrispondono, le relazioni richieste si riducono alle proporzioni (n. 198, Oss.)

$$x' : y' : z' = x : y : z.$$

Se invece, come generalmente succede, i sistemi di riferimento sono indipendenti, potremo considerare in π' un sistema ausiliare di coordinate proiettive (x_1, y_1, z_1), che abbia i punti fondamentali ed unità nei punti corrispondenti ai punti fondamentali ed unità di π. Allora le coordinate ausiliari (x_1, y_1, z_1) di P' saranno uguali, o proporzionali, alle coordinate (x, y, z) di P; mentre, per passare dalle coordinate ausiliari (x_1, y_1, z_1) alle coordinate primitive (x', y', z') dello stesso punto P', bisognerà ricorrere alle formole per la trasformazione delle coordinate proiettive, formole le quali (n. 160) costituiscono una sostituzione lineare ed omogenea, a determinante non nullo, fra le terne di variabili x_1, y_1, z_1 ed x', y', z'. Si conclude in fine che:

Ogni collineazione fra due piani, sopra cui siano fissati sistemi di coordinate proiettive ed omogenee, è rappresentata da relazioni del tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho\, x' = a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z, \\ \rho\, y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z, \\ \rho\, z' = a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z, \end{cases}$$

dove ρ è un coefficiente di proporzionalità qualsiasi, purchè non nullo, e le a_{ik} sono nove costanti, soggette alla condizione che il determinante di terzo ordine A, da esse formato, sia diverso da zero:

$$(2)\qquad A \neq 0.$$

E, più generalmente, si può dire che le (1), colla condizione (2), definiscono una proiettività fra due forme qualisivogliano di seconda specie, purchè si riguardino (x, y, z) ed (x', y', z') come coordinate proiettive degli elementi che si suppongono generare le due forme.

Osservazione. — Si noterà che le stesse equazioni (1) (formanti, come si disse, una sostituzione lineare ed omogenea fra due terne di variabili) danno luogo a due interpretazioni geometriche; giacchè esse servono a rappresentare, sia una trasformazione di coordinate proiettive in una unica forma di seconda specie, sia una proiettività fra due forme di seconda specie. La ragione di questa doppia interpretazione risulta dalle cose dette.

200. Ancora sulle equazioni della collineazione. — Dimostriamo ora direttamente, sebbene ciò risulti dal n. precedente, che *tre relazioni del tipo* (dove ϱ è un fattore di proporzionalità, non nullo)

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

colla condizione che il determinante delle a_{ik} non sia nullo,

$$(2)\qquad A \neq 0,$$

definiscono sempre una collineazione fra i piani π e π', descritti rispettivamente dai punti P e P' aventi le coordinate cartesiane omogenee (x, y, z) e (x', y', z').

Osserviamo, in primo luogo, che a tre numeri x, y, z, non tutti nulli, corrispondono, in virtù delle (1), tre numeri x', y', z', definiti a meno del fattore di proporzionalità ϱ, e certo non tutti nulli, giacchè per la (2) i tre trinomi a secondo membro delle (1) non possono annullarsi insieme. Dunque ad ogni punto P di π corrisponde *un* punto P' di π'.

Se poi risolviamo le (1) rispetto ad x, y, z (per il che basta sommare membro a membro le (1), dopo averle moltiplicate rispettivamente per i complementi algebrici degli elementi di una verticale nel determinante A), otteniamo le relazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma x = A_{11}x' + A_{21}y' + A_{31}z', \\ \sigma y = A_{12}x' + A_{22}y' + A_{32}z', \\ \sigma z = A_{13}x' + A_{23}y' + A_{33}z', \end{cases}$$

(dove A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik}, e $\sigma = \dfrac{A}{\varrho}$ è un coefficiente di proporzionalità non nullo), le quali esprimono le coordinate di un punto P di π, in funzione delle coordinate del punto corrispondente P' di π', e fanno vedere che ad ogni punto di π' corrisponde *un* punto di π.

Dimostriamo, in secondo luogo, che ad ogni retta dell'un piano corrisponde *una* retta nell'altro piano. Consideriamo a tal fine una retta, ad es. sul piano π', la quale abbia l'equazione

$$r')\qquad u'x' + v'y' + w'z' = 0$$

Mentre il punto (x', y', z') descrive questa retta, il punto corrispondente (x, y, z) descrive in π quel luogo, la cui equazione si ottiene sostituendo in r'), al posto di x', y', z', i loro valori espressi dalle (1).

Ordinando, la nuova equazione si presenta sotto la forma

$$r) \qquad (a_{11}u' + a_{21}v' + a_{31}w')x + (a_{12}u' + a_{22}v' + a_{32}w')y + (a_{13}u' + a_{23}v' + a_{33}w')z = 0,$$

e rappresenta quindi una retta del piano π.[1]

Resta finalmente da far vedere che forme corrispondenti nei due piani sono proiettive, per il che basta provare che due quaterne di punti allineati, corrispondentisi, hanno lo stesso birapporto. Presi infatti quattro punti allineati in π, di coordinate

$$(x, y, z), \qquad (x_1, y_1, z_1), \qquad (x + hx_1, \ldots), \qquad (x + kx_1, \ldots),$$

e calcolate (mediante sostituzione nelle (1), ove si ponga, com'è lecito, $\varrho = 1$) le coordinate dei corrispondenti punti di π', si trova che, dette (x', y', z') e (x_1', y_1', z_1') le coordinate dei primi due tra questi punti, le coordinate dei due rimanenti sono $(x' + hx_1', \ldots)$, $(x' + kx_1', \ldots)$. Ora il birapporto, sia della prima, sia della seconda quaterna di punti, vale $\frac{h}{k}$ (n. 145, *b*)). Sussiste quindi l'uguaglianza prevista.

Rimane così pienamente dimostrato che le relazioni (1) definiscono una collineazione fra i piani π, π'. Se poi si volesse far vedere che *ogni* collineazione tra i due piani può esser rappresentata a quel modo, basterebbe provare che si possono calcolare i nove coefficienti a_{ik} delle (1) in guisa che a quattro punti dati arbitrariamente in π corrispondano quattro punti dati arbitrariamente in π'. Trasformiamo a tal fine le (1) in coordinate non omogenee, il che si ottiene dividendo membro a membro la prima e seconda per la terza, e ponendo, ad es., $\frac{x'}{z'} = X'$, $\frac{y'}{z'} = Y'$, $\frac{x}{z} = X$, $\frac{y}{z} = Y$:[2]

$$(1') \qquad \begin{cases} X' = \dfrac{a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}}{a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}}, \\ Y' = \dfrac{a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}}{a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}}. \end{cases}$$

---

[1] Ricordando la definizione di coordinate di rette (n. 130), risulta che le coordinate (u, v, w) della retta sono legate alle coordinate (u', v', w') della retta r' dalle formole

$$(4) \qquad \begin{cases} \tau u = a_{11}u' + a_{21}v' + a_{31}w', \\ \tau v = a_{12}u' + a_{22}v' + a_{32}w', \\ \tau w = a_{13}u' + a_{23}v' + a_{33}w', \end{cases}$$

(dove τ è un coefficiente di proporzionalità non nullo). In modo analogo si ricaverebbero le coordinate u', v', w' in funzione delle u, v, w.

[2] È evidente l'analogia di queste formole colla (1') del n. 172, rappresentante la proiettività fra due forme di prima specie.

Osserviamo poi che le (1') dipendono effettivamente da *otto* costanti, giacchè si possono dividere i due termini di ciascuna frazione per uno stesso dei coefficienti che entrano a denominatore, purchè non sia nullo. Ora, ogniqualvolta si stabilisca che ad un punto *dato* (X, Y) di π debba corrispondere un punto *dato* (X', Y') in π', si ottengono *due* equazioni lineari fra quelle *otto* costanti (come risulta dalle (1') liberate da frazioni). Se adunque fossero date quattro coppie di punti corrispondenti, avremmo otto equazioni lineari rispetto ad otto quantità, le quali, in tal guisa, sarebbero generalmente determinate.

Osservazione I. — Lo stesso procedimento col quale, data l'equazione di una retta in uno dei due piani, si ottiene l'equazione della retta corrispondente nell'altro, permette di trovare la equazione di quella curva dell'un piano, che corrisponde ad una curva assegnata nell'altro. Poichè tutto si riduce ad eseguire una sostituzione lineare sulle coordinate omogenee di punti, si conclude (cfr. n. 44) che il grado di una equazione algebrica non si altera, e quindi *l'ordine di una curva algebrica non viene alterato da una collineazione;* o, brevemente, *l'ordine è un carattere proiettivo della curva.* In particolare: un cerchio, trasformato mediante una collineazione (od una proiezione), dà una curva di secondo ordine.[1]

* **Osservazione II.** — Nell'esaminare la collineazione definita dalle (1), noi abbiamo escluso la ipotesi $A = 0$, giacchè questa conduce ad una collineazione *degenere,* che è priva di interesse per il seguito del corso. Basti qui notare che, se $A = 0$, ma non sono nulli tutti i minori del secondo ordine di A (caratteristica $= 2$), esiste in π un punto *singolare* S, a cui corrisponde *ogni* punto di π', mentre, per ogni altro punto di π, il punto corrispondente è determinato ed appartiene ad una certa retta *singolare* s' di π'. Viceversa, ad un punto generico di π' corrisponde il solo punto S in π, ma ad un punto di π' preso sopra s' corrispondono tutti i punti di una retta uscente da S.

Se poi sono nulli tutti i minori del secondo ordine di A (caratteristica $= 1$), allora ad un punto generico di π corrisponde un unico punto *singolare* S' di π'; mentre i punti di π, che appartengono ad una retta *singolare* s, hanno il corrispondente indeterminato. Viceversa, ad un punto generico di π' corrisponde su π ogni punto della retta singolare s; ed al punto singolare S' di π' corrisponde ogni punto di π.

201. Affinità. — Vogliamo ora esaminare alcune particolarità metriche della collineazione tra due piani π, π'. Riprendiamo perciò le equazioni (1) del numero precedente, che legano le coordinate cartesiane omogenee di punti corrispondenti.

---

[1] Dualmente, adoperando le formole (4), anzichè le (1), risulta che *la classe di un inviluppo algebrico di rette non viene alterata da una collineazione,* è un carattere proiettivo dell'inviluppo. Ed è pur chiaro che la tangente ad una curva, od il punto di contatto di un inviluppo, si mutano, mediante una collineazione, nella tangente, o nel punto di contatto della curva o dell'inviluppo trasformato.

Alla retta all'infinito $z' = 0$ di π' corrisponde, nel piano π, una retta di equazione $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$, detta *retta limite* o *di fuga* (cfr. n. 120). E similmente alla retta all'infinito di π corrisponde la *retta limite* di π'. Le due rette limite sono generalmente proprie, ed hanno proprietà facili a stabilirsi, sulle quali però non vogliamo fermarci.

Interessa invece esaminare la ipotesi che le rette limite siano improprie, vale a dire che le *rette all'infinito dei piani* π, π' *si corrispondano*. In tal caso la collineazione prende il nome di *affinità*, ed *affini* diconsi i due piani. Per stabilire un'affinità fra due piani π, π' basta, ai tre vertici (propri) e quindi ai tre lati di un triangolo in π, far corrispondere in π' i tre vertici (propri) e quindi i tre lati di un triangolo.

Nell'affinità, punteggiate corrispondenti r, r' sono simili, (n. 173, *b*)), è dunque costante il *rapporto di similitudine* fra due segmenti corrispondenti qualisivogliano delle due punteggiate. A rette parallele di π corrispondono in π' rette parallele, ad un parallelogramma un parallelogramma. Quindi a due segmenti equipollenti (n. 24) fra loro in π, corrispondono due segmenti equipollenti fra loro in π'; ossia il rapporto di similitudine, relativo a due punteggiate corrispondenti r, r', non varia se r, e quindi r', si muove parallelamente a sè stessa; ma varia, generalmente, col variare della direzione di r o di r'.

Le equazioni dell'affinità fra due piani, in coordinate cartesiane omogenee (poichè a $z' = 0$ corrisponde $z = 0$) si riducono al seguente tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho z' = a_{33}z, \end{cases}$$

ossia, dividendo membro a membro la prima e la seconda per la terza e sostituendo ai rapporti $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, le coordinate *cartesiane ordinarie* x, y, x', y',

$$x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13},$$
$$y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23},$$

dove $\alpha_{11} = \frac{a_{11}}{a_{33}}$, ... sono sei costanti.

Le equazioni si semplificano ulteriormente se si suppone, come è lecito, che agli assi coordinati $x' = 0$, $y' = 0$ di π' corrispondano in π gli assi coordinati $x = 0$, $y = 0$; quelle formole infatti acquistano l'aspetto

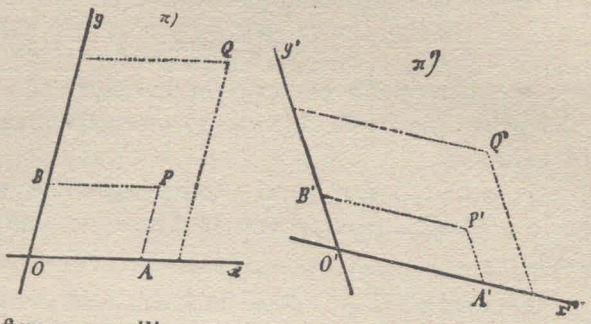
$$(2) \qquad x' = mx, \qquad y' = ny,$$

dove m, n sono due costanti (rapporti di similitudine relativi alle rette corrispondenti x, x', od y, y', rispettivamente). Le (2) lasciano vedere che, per passare da ogni punto P di π al punto corrispondente P' di π', basta

alterare l'ascissa di P in un rapporto costante, e l'ordinata di P in un altro rapporto costante. Per assegnare i valori dei due rapporti, basterebbe dare, oltre alle due coppie x, x' ed y, y' di rette corrispondenti, due punti corrispondenti non situati su quelle rette.

Un' altra proprietà notevole dell'affinità è la seguente:

È costante il rapporto fra le aree di figure corrispondenti in una affinità.



Basterà dimostrare il teorema per le aree triangolari, giacchè ogni poligono può spezzarsi in triangoli, e l'area di una figura curvilinea può riguardarsi come limite di aree di poligoni iscritti.

Siamo dunque (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) i vertici di un triangolo in π; l'area sarà data (n. 33) da

$$\Delta = \frac{\operatorname{sen} xy}{2} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il triangolo corrispondente in π', se l'affinità è rappresentata dalle (2), avrà i vertici $(mx, ny), \ldots$, e quindi l'area

$$\Delta' = \frac{\operatorname{sen} x'y'}{2} \begin{vmatrix} mx & ny & 1 \\ mx_1 & ny_1 & 1 \\ mx_2 & ny_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Portando in evidenza i fattori m, n, e dividendo membro a membro l'ultima relazione per la precedente, troviamo

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = m\,n\,\frac{\operatorname{sen} x'y'}{\operatorname{sen} xy},$$

a quale dimostra il teorema. Se, in particolare, questo rapporto vale ± 1, l'affinità dicesi *equivalente*.

202. Similitudine ed uguaglianza. — Un caso notevole di affinità fra due piani π, π' si presenta quando *ogni angolo di π uguaglia il corrispondente angolo di π'*. Allora ogni triangolo di π è simile al triangolo corrispondente di π'; e quindi il *rapporto di due segmenti corrispondenti dei due piani* (ossia il rapporto di similitudine delle punteggiate a cui quei segmenti appartengono) *è costante*, indipendente dalla direzione dei segmenti

stessi. Una siffatta collineazione, che non altera i valori degli angoli nè i rapporti fra segmenti, dicesi *similitudine.*[1]

Riferiti due piani *simili* a due sistemi corrispondenti di assi coordinati ($\widehat{xy} = \widehat{x'y'}$), e assunta una stessa unità di misura per valutare i segmenti dell'uno e dell'altro piano, le equazioni della similitudine sono

$$x' = mx, \quad y' = my,$$

dove m è il rapporto costante fra due segmenti corrispondenti del secondo e del primo piano; il rapporto costante fra aree corrispondenti si riconosce essere m^2.

Se $m = 1$, i due piani diconsi *uguali,* e con un movimento nello spazio è possibile sovrapporre le figure dell'uno alle figure corrispondenti dell'altro.

Osservazione. — Poichè una similitudine muta ogni angolo retto del piano π in un angolo retto di π', essa trasformerà involuzioni circolari di π in involuzioni circolari di π', rette isotrope in rette isotrope, e finalmente i punti ciclici di π nei punti ciclici di π' (n. 190).

Viceversa, *una collineazione tra due piani, che muti i punti ciclici dell'uno nei punti ciclici dell'altro, è una simitudine.* Segue dalla ipotesi che alla retta all'infinito e ad un angolo retto $\widehat{xy}$ di π corrispondono in π' la retta all'infinito ed un angolo retto $\widehat{x'y'}$. Scelti i lati dei due angoli come assi cartesiani nei due piani, le equazioni della collineazione (che è una particolare affinità) saranno del tipo

$$x' = mx, \quad y' = ny. \tag{1}$$

Ora le (1) mutano la retta isotropa $x' + iy' = 0$ di π' nella retta $mx + iny = 0$ di π, la quale deve pure esser isotropa, in virtù della ipotesi. Sarà dunque $\frac{m}{n} = \pm 1$; ed allora le (1) rappresentano una similiutdine, c. d. d.[2]

203. Elementi uniti di una collineazione. — Vogliamo ora occuparci di questioni relative alle particolari posizioni che possono avere due forme dello stesso nome (in particolare due piani) collineari. Chiameremo al solito (n. 167) *unito* un elemento comune alle due forme e tale che, considerato in una di esse, abbia per corrispondente sè stesso nell'altra. E potremo supporre che le due forme abbiano sostegni distinti, oppure siano

---

[1] Si osserverà che l'affinità fra due piani π, π', determinata coll'assegnare due triangoli *simili* corrispondenti (n. 201), è una similitudine; di qua segue, in base ad una considerazione di geometria elementare, che fra due piani π, π' si può stabilire, in due modi diversi, una similitudine, per la quale a due punti assegnati di π corrispondano due punti assegnati di π'.

[2] Il segno ambiguo del rapporto $m : n$ dipende esclusivamente dai versi che si fissano come positivi sugli assi x, y, x', y'.

sovrapposte; notando che, nell'ultima ipotesi, ogni elemento del sostegno comune deve esser considerato due volte, secondo la forma a cui si vuole attribuire quell'elemento.

Dalla definizione di elemento unito segue che, se P e Q sono due punti uniti in una collineazione fra due piani, la retta PQ è pure unita; ed i punti dei due piani, appartenenti a questa, si corrispondono in una proiettività, di cui P e Q sono punti uniti. In generale, nessun altro punto della retta è unito; ma se vi è un terzo punto unito, ogni altro punto è unito (n. 167), e la retta è *luogo di punti uniti.*

Questa osservazione (insieme alle analoghe) dà luogo all'enunciato: *se in una collineazione tra due forme di seconda specie sono uniti due elementi distinti, dello stesso nome, il sostegno della forma di prima specie a cui quegli elementi appartengono è pure unito. Se quest'ultima forma possiede un terzo elemento unito, ogni altro suo elemento è unito.*

Introducendo ora la ipotesi esplicita che le due forme di seconda specie siano sovrapposte, possiamo stabilire il seguente teorema:

Se in una collineazione tra due forme di seconda specie sovrapposte sono uniti quattro elementi dello stesso nome, dei quali tre qualunque non appartengano ad una forma di prima specie, ogni altro elemento è unito, e la collineazione è la identità.

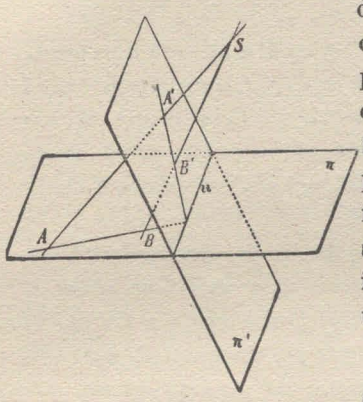
Infatti, se i quattro elementi uniti sono A, B, C, D, noi sappiamo (n. 198) che esiste *una sola* collineazione la quale fa corrispondere ad A, B, C, D, considerati come elementi della prima forma, gli elementi stessi della seconda forma. Ma una collineazione soddisfacente a queste condizioni è evidentemente *l'identità,* che fa corrispondere ad ogni elemento l'elemento stesso: dunque la nostra collineazione è l'identità.

Se quindi dalle nostre ricerche escludiamo la identità, la ipotesi di quattro elementi omonimi uniti in una collineazione porta di conseguenza che almeno tre fra quelli, ad es. A, B, C, appartengono ad una stessa forma di prima specie, la quale allora avrà unito ogni altro elemento. All'infuori di questa forma, vi sarà al più un ulteriore elemento unito dello stesso nome di A, B, C.

204. Piani prospettivi. — Fu già notato (n. 120, 194) che la proiezione di un piano π sopra un piano distinto π', da un centro S non appartenente a nessuno dei due piani, dà luogo ad una particolare collineazione (prospettiva) fra i piani stessi, nella quale sono uniti tutti i punti della $\pi\pi'$. Viceversa:

Se in una collineazione fra due piani distinti sono uniti tutti i punti della retta comune intersezione, le congiungenti i punti dell'un piano coi punti corrispondenti dell'altro passano per uno stesso punto, ed i due piani sono prospettivi rispetto a questo punto (centro di prospettiva).

Siano π, π' i due piani, $u \equiv \pi\pi'$ la retta di punti uniti. Presi sopra π e fuori di u due punti arbitrari A, B, e detti A', B' i corrispondenti in π', osserviamo anzitutto che le rette corrispondenti AB, $A'B'$ segano u in uno stesso punto; infatti il punto di incontro di AB con u, essendo unito, deve appartenere anche ad $A'B'$. Segue che le rette AA', BB', giacendo in un piano, si segano. Dunque le rette congiungenti i punti di π coi punti corrispondenti di π' si segano a due a due; e poichè non sono tutte in uno stesso piano, dovranno tutte passare per uno stesso punto (n. 124, γ')), c. d. d.



Osservazione I. — Da questo teorema, analogo a quello del n. 168 sulle punteggiate prospettive, si deduce similmente che *si può sempre passare dall'uno all'altro di due piani collineari mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.* Lasciamo al lettore la cura di dimostrare tale proprietà, seguendo le traccie indicate nell'es. 12) dopo il n. 209.

Osservazione II. — Facendo ruotare uno, π', di due piani prospettivi π, π', intorno alla comune intersezione u (senza che le figure di π' subiscano alterazioni), i piani rimangono collineari, e conservano, come uniti, tutti i punti di u; quindi sono sempre prospettivi rispetto ad un centro, che si muove al variare di π'. Quando però, dopo una conveniente rotazione, il piano π' viene ad adagiarsi su π, non potremo più chiamare *prospettivi* i due piani, almeno nel senso sopra adottato; ma dovremo dire che i due piani sovrapposti sono ancora collineari, ed hanno come uniti tutti i punti di una retta u, senza che per questo siano uniti tutti gli altri punti dei piani stessi.

205. Omologia piana. — L'ultima osservazione ci conduce allo studio di un tipo particolare di collinaazione, non identica, tra due piani sovrapposti, in cui sono uniti tutti i punti di una retta, o, dualmente, tutte le rette di un fascio. I due casi non differiscono però, in virtù del seguente teorema:

Se in una collineazione, non identica, fra due piani sovrapposti sono uniti tutti i punti di una retta, sono pure unite tutte le rette di un fascio; e viceversa.

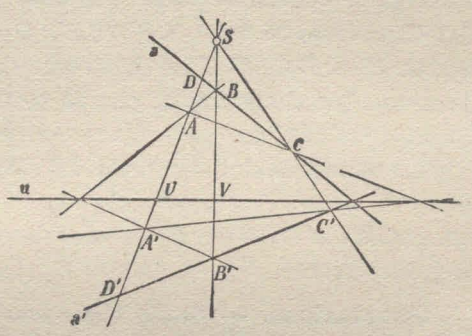
Basterà dimostrare la proposizione diretta, poichè da questa si deduce l'inversa per dualità piana. Sia u la retta luogo di punti uniti; presi due punti corrispondenti distinti A, A' nei piani π, π', e detto U il punto (unito) in cui la congiungente AA' sega u, si osservi che alla retta AU

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

di π corrisponde in π' la retta $A'U$, cioè la retta stessa. È dunque unita ognuna delle infinite rette congiungenti punti omologhi distinti; e di qua segue (n. 203), poichè la collineazione non è l'identità, che sono unite tutte le rette di un fascio, c. d. d.

Dicesi omologia (piana) una collineazione, non identica, fra due piani sovrapposti, in cui sono uniti tutti i punti di una retta e tutte le rette di un fascio; quella retta, luogo di punti uniti, dicesi *asse di omologia,* ed il punto, centro del fascio di rette unite, dicesi *centro di omologia.*

In una omologia piana, di centro S ed asse u, sono uniti tutti i punti dell'asse u, ed il centro S (generalmente esterno ad u), perchè in S si segano due, anzi infinite rette unite (n. 203); e sono unite tutte le rette per il centro S, e l'asse u. All'infuori di questi, l'omologia non possiede altri elementi uniti. Ciò è chiaro intanto se S non appartiene ad u, giacchè una collineazione non identica, fuori di una retta di punti uniti, ha al più *un* punto unito; e dualmente (n. 203). Se poi S cade in u, si osservi che, ammessa l'esistenza di un punto unito T fuori di u, ogni retta per T, congiungendo questo punto unito ad un punto unito di u, sarebbe unita, e quindi, fuori del fascio S di rette unite, esisterebbero effettivamente infinite rette unite, il che non è possibile.



206. Proprietà fondamentale e costruzione di una omologia. — Vale il teorema:

Punti distinti corrispondentisi in una omologia sono allineati col centro; rette distinte corrispondentisi si segano sull'asse.

Infatti, se A, A' sono due punti corrispondenti, ed a, a' due rette corrispondenti in una omologia di centro S ed asse u, la retta SA (uscente dal centro) è unita e, poichè contiene A, conterrà pure A'; similmente il punto ua (dell'asse) è unito e, appartenendo ad a, apparterrà pure ad a'.

Una omologia è individuata quando di essa si conoscano il centro, l'asse e due elementi corrispondenti distinti, che possono essere o punti allineati col centro, o rette secantisi sull'asse.

Ammesso in primo luogo, che esista una omologia avente il centro S, l'asse u, e due punti corrispondenti distinti A, A' allineati con S, vedremo che in un unico modo si può costruire quel punto B' di π', che corrisponde ad un dato punto di π. Infatti B' deve appartenere alla retta SB, ed inoltre alla retta omologa di AB, retta che passa per A' e per la intersezione di

AB con u. La costruzione indicata cadrebbe solo in difetto quando quel punto, sia D ad es., di cui si chiede l'omologo D', fosse scelto sopra la retta SA; ma allora basterebbe servirsi in quella costruzione, anzichè della coppia AA', di una coppia ausiliare di punti corrispondenti BB', fuori della retta SA. Se poi di una retta a si chiedesse la corrispondente a', basterebbe di un punto di a costruire il corrispondente, e congiungerlo col punto ua.

Dimostriamo, in secondo luogo, che esiste effettivamente una omologia, di cui sono assegnati arbitrariamente il centro S, l'asse u e due punti corrispondenti A, A' allineati con S, ma non cadenti nè in S, nè sopra u. A tal fine costruiamo (il che può farsi in infiniti modi) due triangoli ABC, $A'B'C'$ tali che le rette AA', BB', CC' passino per S e le coppie di lati AB, $A'B'$ e BC, $B'C'$ si incontrino sopra u. Consideriamo poi la collineazione ben determinata, che fa corrispondere le due quaterne di punti $SABC$, $SA'B'C'$ (n. 198). Questa ha come unite tre rette SAA', SBB', SCC', e quindi le infinite rette del fascio S; è dunque una omologia di centro S, di cui l'asse, dovendo contenere i punti di incontro di rette omologhe, $AB \cdot A'B'$, $BC \cdot B'C'$, coincide con u. Esiste per conseguenza l'omologia in discorso.

Osservazione. — Segue che anche le rette AC, $A'C'$ si segheranno sull'asse u. Risulta così dimostrato l'importante teorema dei triangoli omologici (DESARGUES; cfr. n. 135):

Se due triangoli situati in un piano sono così riferiti che le congiungenti i vertici dell'uno coi corrispondenti vertici dell'altro passino per uno stesso punto, le intersezioni dei lati corrispondenti appartengono ad una medesima retta.

Il ragionamento duale conduce al teorema duale e reciproco di questo.

207. Caratteristica di una omologia. — Dalla costruzione precedente segue che, detti U, V,... i punti in cui le rette SAA', SBB',... segano l'asse u, sono prospettivi i gruppi di punti $SUAA'$, $SVBB'$,...; mentre il gruppo $SUDD'$ è prospettivo al secondo di quelli. Valgono dunque le uguaglianze di birapporti.

$$(SUAA') = (SVBB') = (SUDD') = \ldots;$$

donde il teorema:

In una omologia è costante il birapporto formato da due punti omologhi qualunque, dal centro e dalla intersezione della congiungente i due punti coll'asse; ed ha lo stesso valore il birapporto formato da due rette omologhe, dalla congiungente la loro intersezione col centro, e dall'asse,

perchè due rette omologhe a, a' segano una retta per S in due punti omologhi.

Questo doppio rapporto costante dicesi *caratteristica* od *invariante assoluto* della omologia. La caratteristica ha pure un significato per le omologie *speciali* aventi il centro sull'asse; ma per queste ha sempre il valore $+1$.

Una omologia non speciale è determinata e può costruirsi quando sia dato il centro, l'asse e la caratteristica.

208. Proprietà e particolarità metriche di una omologia. — Alla retta all'infinito di due piani π, π' sovrapposti, legati da una omologia, corrispondono rispettivamente in π' e π due rette i' ed j, generalmente proprie, dette *rette limite* dei rispettivi piani; queste sono parallele all'asse (n. 206). Inoltre, poichè nella proiettività che la omologia subordina sopra una retta qualsiasi uscente dal centro S, i punti uniti stanno in S e sopra u, mentre i punti limite appartengono ad j ed i', segue (n. 176) la seconda parte del teorema:

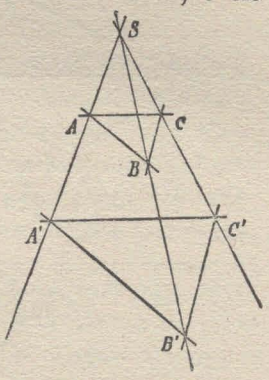
In una omologia le rette limite sono parallele all'asse; e la retta che biseca la striscia compresa fra quelle dista ugualmente (in versi opposti) dal centro e dall'asse.

Le rette limite sono improprie se la retta all'infinito è unita; e ciò può accadere:

a) quando la retta all'infinito è asse di omologia;

b) quando il centro di omologia è improprio;

c) quando le due particolarità si presentano insieme.



Esaminiamo staccatamente queste ipotesi.

a) Se l'asse di omologia è improprio, rette corrispondenti sono parallele, ed angoli corrispondenti sono uguali; i due piani π, π' sono *simili* (n. 202), ma, per mettere in luce il parallelismo accennato, si suol dire che sono *simili e similmente posti*, od *omotetici*.

Se S è il centro (supposto proprio) di omologia, o di *omotetia*, ed A, A'; B, B';... sono coppie di punti corrispondenti, si ha

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'} = \ldots = \text{caratteristica}.$$

Questo rapporto costante si chiama *rapporto di omotetia*, e la omotetia è *diretta* od *inversa*, secondo che il rapporto è positivo o negativo. Il rapporto tra le aree di figure corrispondenti (come sono ad es. i triangoli SAB, $SA'B'$) è il quadrato del rapporto di omotetia.

Preso S come origine di un sistema di coordinate cartesiane non omogenee, e dette (x, y), (x', y') le coordinate di due punti corrispondenti, la omotetia è rappresentata dalle equazioni

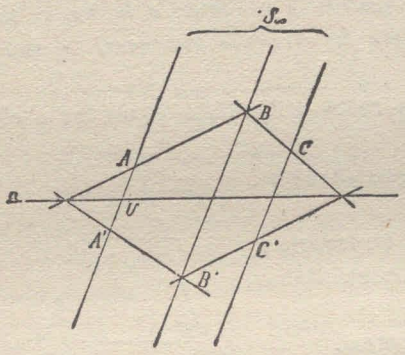
$$x' = m\,x, \quad y' = m\,y,$$

dove $\frac{1}{m}$ è il rapporto di omotetia.

Se il rapporto vale -1, la omotetia si riduce alla *simmetria rispetto ad un centro S;* figure corrispondenti sono *direttamente uguali,* ed una di esse può sovrapporsi all'altra mediante la rotazione di un angolo piatto intorno ad S.

(Talvolta si chiama pure *omotetia* una collineazione fra due piani paralleli *distinti,* in cui rette corrispondenti sono parallele. In una siffatta collineazione, caso particolare di similitudine, sono evidentemente uniti i punti all'infinito comuni ai due piani; e quindi i piani stessi son prospettivi; n. 204).

b) Se il centro di una omologia è improprio, S_∞, e l'asse proprio, u, la omologia prende il nome di *affinità omologica.* Le rette congiungenti punti omologhi sono tutte parallele fra loro; ed è costante il rapporto delle distanze di due punti omologhi A, A' dall'asse, perchè, detta U la intersezione di $A\,A'$ coll'asse, la caratteristica, *o rapporto di affinità,* diviene



$$(A\,A'\,S_\infty\,U) = \frac{A'\,U}{A\,U}.$$

Lo stesso rapporto intercede fra le aree di figure corrispondenti.

Casi particolari si presentano quando la direzione di S_∞ è normale all'asse (*affinità ortogonale*), o quando il rapporto di affinità vale -1 (*simmetria obliqua*). Se queste due condizioni si verificano insieme, si ha la *simmetria ortogonale rispetto ad un asse;* due figure corrispondenti sono inversamente uguali, e per ottenerne la sovrapposizione bisogna far ruotare di un diedro piatto il piano dell'una intorno all'asse.

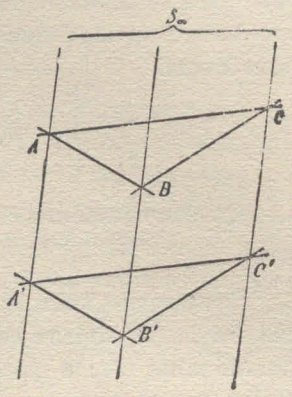
Un altro caso particolare (*affinità omologica speciale*) si presenta quando il centro S_∞ è il punto all'infinito dell'asse.

Per rappresentare analiticamente una affinità omologica non speciale, assumiamo l'asse di affinità come asse delle x, ed S_∞ come direzione dell'asse y, in un sistema di coordinate cartesiane non omogenee; troveremo subito le equazioni

$$x' = x, \quad y' = n\,y$$

essendo n il rapporto di affinità sopra menzionato.

c) Se finalmente il centro di omologia S_∞ e l'asse sono impropri, tutte le rette AA', BB',... congiungenti punti corrispondenti sono parallele, e sono pure parallele rette corrispondenti, come AB e $A'B'$. Segue che i segmenti AA', BB',... congiungenti punti omologhi sono uguali, paralleli ed ugualmente diretti, o, brevemente, *equipollenti;* altrettanto dicasi di segmenti corrispondenti, come AB ed $A'B'$. Ed *equipollenza* può chiamarsi questa speciale omologia. Figure corrispondenti $AB\ldots$ ed $A'B'\ldots$ sono eguali, e per sovrapporre la prima alla seconda basta effettuare una *traslazione* del piano su sè stesso nella direzione di S_∞ (movimento in cui tutti i punti descrivono segmenti equipollenti).



Riferendo il piano a coordinate cartesiane di cui l'asse x passi per S_∞, la equipollenza sarà rappresentata da relazioni del tipo

$$x' = x + a, \qquad y' = y$$

(a costante); o, se gli assi coordinati sono scelti comunque,

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b$$

(a e b costanti).

***209. Determinazione analitica degli elementi uniti di una collineazione fra piani sovrapposti.** — Riprendiamo in esame una collineazione qualsiasi fra due piani sovrapposti π, π', e proponiamoci di determinare gli elementi uniti, che, in generale, saranno in numero finito (al più tre punti e tre rette; n. 203). Volendo condurre la ricerca per via analitica, riferiamo i due piani ad uno *stesso* sistema di coordinate omogenee, ad es. cartesiane. Indichiamo con (x, y, z) le coordinate di un punto di π, con (x', y', z') le coordinate del punto corrispondente di π', e ricordiamo le equazioni della collineazione (n. 200):

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

Se x, y, z sono le coordinate di *un punto unito* nella collineazione, noi potremo nelle (1), al posto di x', y', z', scrivere x, y, z. Con ciò, portando tutti i termini in uno stesso membro, le (1) divengono

$$(2) \qquad \begin{cases} (a_{11} - \varrho)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - \varrho)y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - \varrho)z = 0. \end{cases}$$

Si tratta di ricavare x, y, z, (o, meglio, i rapporti $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$) dalle equazioni (2), che contengono inoltre la incognita ausiliare ϱ. Cominciamo a calcolare quest'ultima, osservando che, se esiste un punto unito, le (2) devono coesistere per valori non tutti nulli di x, y, z (coordinate del punto), e quindi deve aversi

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione è di *terzo grado* in ϱ, e fornisce tre radici

$$(4) \qquad \varrho_1, \ \varrho_2, \ \varrho_3.$$

Sostituendo nelle (2), al posto di ϱ, uno dei valori trovati, ad es. ϱ_1, una fra le (2) diviene conseguenza delle rimanenti due, per l'annullarsi del determinante (3); e queste due (siano, per fissar le idee, le due prime), risolte rispetto ad x, y, z, forniscono le coordinate richieste di un punto unito:

$$(5) \qquad x_1 : y_1 : z_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22}-\varrho_1 & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11}-\varrho_1 \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho_1 \end{vmatrix}.$$

Sostituendo poi, al posto di ϱ_1, successivamente ϱ_2 e ϱ_3, le (5) daranno le coordinate (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) di altri due punti uniti. Si conclude:

Una collineazione fra due piani sovrapposti ha, in generale, tre punti uniti, e (per dualità) *tre rette unite.*

Del resto, la determinazione delle rette unite si potrebbe ricavare dalle relazioni (4) stabilite al n. 200 (nota a pag. 294), le quali legano le coordinate (u, v, w), (u', v', w') di rette corrispondenti nei due piani. Ripetendo il ragionamento ora fatto, si trova che le coordinate di una retta unita devono soddisfare alle equazioni

$$(2') \qquad \begin{cases} (a_{11}-\varrho)u + a_{21}v + a_{31}w = 0, \\ a_{12}u + (a_{22}-\varrho)v + a_{32}w = 0, \\ a_{13}u + a_{23}v + (a_{33}-\varrho)w = 0, \end{cases}$$

dove ϱ è radice della equazione che si ottiene da queste mediante eliminazione di u, v, w. Ora, poichè la equazione in ϱ coincide colla (3), si conclude che ciascuna radice ϱ della (3) fornisce, secondo che vien sostituita nelle (2) o nelle (2'), le coordinate di un punto o di una retta unita. E si vede così che ad ogni punto unito è associata una retta unita, e viceversa.[1]

[1] Per quanto riguarda la mutua posizione dei punti e delle rette in questione, si può dimostrare che un punto ed una retta, corrispondenti a due diverse radici ϱ_1, ϱ_2 della (3), si appartengono. Si sostituiscano infatti nelle (2), al posto di ϱ, x, y, z, i simboli ϱ_1, x_1, y_1, z_1, ottenendo le relazioni che chiameremo (2_0), e

Accenniamo ora brevemente ai vari casi che si possono presentare, in relazione colle radici dell'equazione cubica (3), a coefficienti reali.

1) Le tre radici ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 possono esser reali e distinte; in tal caso *i punti uniti* U_1, U_2, U_3 *sono reali e distinti, vertici di un triangolo, i cui lati* u_1, u_2, u_3 (opposti ad U_1, U_2, U_3) *sono le rette unite.*

2) Delle tre radici, una ϱ_1 è reale, e due ϱ_2, ϱ_3 sono immaginarie coniugate; allora *un punto unito* U_1 *è reale, e gli altri due* U_2, U_3 *sono immaginari coniugati; una retta unita* $u_1 \equiv U_2 U_3$ *è reale, non passante per* U_1, *e le altre due* $u_2 \equiv U_1 U_3$, $u_3 \equiv U_1 U_2$ *sono immaginarie coniugate.*

3) Delle tre radici ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, due sono reali e coincidenti $\varrho_1 = \varrho_2$, la rimanente ϱ_3 è reale e distinta da queste; allora *dei tre punti uniti* (certo reali) *due coincidono in* $U_1 \equiv U_2$, *mentre* U_3 *è distinto da questi, e delle tre rette unite due* $u_1 \equiv U_2 U_3$, $u_2 \equiv U_1 U_3$ *coincidono, mentre l'altra* u_3 *è distinta da queste e passa per i punti uniti coincidenti.*

4) Le tre radici ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 sono reali e coincidenti; allora *i tre punti uniti coincidono in un punto reale* $U_1 \equiv U_2 \equiv U_3$, *e le tre rette unite coincidono in una retta reale* $u_1 \equiv u_2 \equiv u_3$ *passante per l'unico punto unito.*

5) Può anche succedere che una radice della equazione (3), ad es. ϱ_1, annulli tutti i minori del secondo ordine del determinante (3), nel qual caso ϱ_1 è radice almeno doppia (e quindi reale), $\varrho_1 = \varrho_2$, giacchè essa annulla pure la prima derivata del polinomio (3) (la quale è data dalla somma dei complementi algebrici relativi agli elementi della diagonale principale). Sostituendo ϱ_1 al posto di ϱ nelle (2), due di quelle equazioni divengono conseguenze della rimanente, di guisa che ogni sistema di valori (x, y, z) soddisfacente questa, soddisfa certo le altre due, e fornisce quindi un punto unito. *Esistono* adunque *infiniti punti uniti appartenenti ad una retta,* rappresentata da quella equazione. E dualmente *esistono* (come risulta sostituendo ϱ_1 al posto di ϱ nelle (2')) *infinite rette unite appartenenti ad un fascio.* Il centro del fascio è pure un punto unito, che si riconosce corrispondere alla terza radice ϱ_3, pure reale, della equazione (3) In questo caso adunque la collineazione è una *omologia* (n. 205), e precisamente una omologia generale (col centro fuori dell'asse) se $\varrho_3 \neq \varrho_1$, speciale se $\varrho_3 = \varrho_1 = \varrho_2$.

Esercizi. I. — 1) Costruire[1] la collineazione fra due piani sovrapposti determinata da due quadrangoli corrispondenti $A\,B\,C\,D$, $A'\,B'\,C'\,D'$, supponendo: *a*) che siano uniti tre, due, o uno dei punti dati; *b*) che i quattro punti A, B, A', B' siano allineati.

---

si sostituiscano nelle (2') al posto di ϱ, u, v, w, i simboli ϱ_2, u_2, v_2, w_2, ottenendo certe relazioni ($2_0'$); poi si moltiplichino le (2_0) per u_2, v_2, w_2, rispettivamente, e si sommino membro a membro. Risulterà, tenuto conto delle ($2_0'$),

$$(\varrho_2 - \varrho_1)(u_2 x_1 + v_2 y_1 + w_2 z_1) = 0,$$

la quale, poichè $\varrho_2 \neq \varrho_1$ dimostra che il punto unito (x_1, y_1, z_1) appartiene alla retta unita (u_2, v_2, w_2).

[1] Vuol dire che di più punti o rette assegnate nell'un piano, si chiedono gli elementi corrispondenti nell'altro; in particolare le rette limite.

2) Costruire l'affinità fra due piani determinata da due triangoli corrispondenti ABC, $A'B'C'$; nella ipotesi che i due piani siano sovrapposti, si supponga che sia unito il punto A, o la retta AB, o le due rette AB, AC.

3) Costruire una omologia determinata: *a*) mediante il centro, l'asse e due elementi omologhi; *b*) due triangoli omologici corrispondentisi.

4) Costruire una omologia speciale, o di data caratteristica (in particolare $= -1$), conoscendo: *a*) due punti corrispondenti e l'asse; *b*) due rette corrispondenti e il centro; *c*) due coppie di punti corrispondenti su rette distinte; *d*) due coppie di rette corrispondenti uscenti da punti distinti.

5) Costruire una omologia che trasformi un dato quadrilatero in: *a*) un parallelogramma; *b*) un rettangolo; *c*) una losanga; *d*) un quadrato.

6) Una omologia trasforma un cerchio in una ellisse, parabola, od iperbole, secondo che la retta limite del piano, cui appartiene il cerchio, è esterna, tangente, o secante rispetto al cerchio. Costruire effettivamente più punti e più tangenti della curva nei tre casi. In particolare, costruire gli asintoti della iperbole; dove deve trovarsi il centro di omologia, perchè questi riescano perpendicolari (e quindi la iperbole sia equilatera)?

II. — 7) In una collineazione fra due piani π, π' sovrapposti, occorre distinguere la operazione diretta K, con cui si passa da π a π', dalla operazione inversa K^{-1}, con cui si passa da π' a π. La collineazione (supposto che non sia l'identità) dicesi *involutoria* quando ogni punto ha lo stesso corrispondente in K e K^{-1}; quando dunque $K \equiv K^{-1}$ (cfr. n. 180). Una omologia di caratteristica -1 (n. 207) è evidentemente una collineazione involutoria, detta *omologia armonica* (od *involutoria*). Casi particolari di essa sono la simmetria rispetto ad un punto, e la simmetria obliqua od ortogonale rispetto ad una retta (n. 208).

8) Ora vale il teorema inverso: « Ogni collineazione involutoria fra piani sovrapposti è una omologia armonica ». (Risultano unite infatti tutte le rette congiungenti punti corrispondenti; quindi n. 203).

9) Teorema di Chasles: Se, di due piani prospettivi, uno ruota intorno alla comune intersezione, esso rimane prospettivo all'altro; ed il centro di prospettiva descrive un cerchio, il cui piano è normale alla detta intersezione, ed il cui centro trovasi sulla retta limite del piano fisso (cfr. n. 179, es. 2)).

10) Se, di due piani sovrapposti, legati da una omologia involutoria ad asse proprio, si fa ruotare uno di un diedro piatto intorno all'asse, si otterrà in fine una omologia speciale; e viceversa. In particolare, una simmetria obliqua rispetto ad un asse si muta in una affinità omologica speciale.

11) La simmetria obliqua rispetto ad un asse e la affinità omologica speciale sono trasformazioni *equivalenti*, le quali cioè non alterano il valore delle aree; e sono le sole affinità omologiche dotate di questa proprietà. Si dimostri ciò anche analiticamente, scrivendo le equazioni delle collineazioni nominate.

12) Si può sempre passare dall'uno all'altro di due piani collineari π, π' mediante un numero finito di proiezioni e sezioni; si trattino successivamente i seguenti casi, di cui ciascuno può ricondursi al precedente mediante una proiezione: *a*) tutti i punti della retta $\pi\pi'$ sono uniti (n. 204); *b*) un punto della retta $\pi\pi'$ è unito; *c*) nessun punto della retta $\pi\pi'$ è unito; *d*) i due piani sono sovrapposti.

13) Dati due piani collineari non affini, si determini nell'uno una punteggiata od un fascio di rette, a cui corrisponda nell'altro una punteggiata uguale od un fascio uguale. Ciascuno dei due problemi ammette sempre due soluzioni.

14) In base all'esercizio precedente si dimostri che due piani collineari non affini possono sempre situarsi in tal posizione, da riuscire prospettivi od omologici.

15) Due piani simili possono sempre situarsi in tal posizione da divenire omotetici.

16) Due piani affini (non simili) non sempre possono sovrapporsi in modo da dar luogo ad una affinità omologica; ciò è possibile soltanto (ed in infiniti modi) se il rapporto di similitudine relativo a due convenienti direzioni, corrispondentisi nei due piani, vale 1. Ora, date le equazioni dell'affinità $x' = mx$, $y' = ny$, dove si può supporre $\widehat{xy} = \widehat{x'y'} = \frac{\pi}{2}$, si esamini come vari quel rapporto, mentre rette corrispondenti ruotano intorno alle origini; si dimostri che vi sono due direzioni ortogonali, a cui corrisponde un valore massimo o minimo di quel rapporto, e che esistono punteggiate uguali nei due piani quando dei due numeri m, n uno sia (in valore assoluto) $\leqq 1$ e l'altro $\geqq 1$.

17) La condizione del precedente esercizio è sempre soddisfatta quando l'affinità tra i due piani sia *equivalente*. Dunque: due piani affini equivalenti possono sempre sovrapporsi in modo da dar luogo ad una affinità omologica, che sarà (es. 11)) o una simmetria (generalmente) obliqua, od una affinità omologica speciale. L'affinità equivalente fra due piani non differisce dalla simmetria obliqua rispetto ad una retta, se non per la mutua posizione dei due piani.

III. — 18) Se due figure piane sono omologiche ad una terza figura rispetto ad uno stesso asse (o centro), esse sono pure omologiche fra loro rispetto a questo asse (o centro); ed i tre centri (o assi) di omologia appartengono ad una stessa retta (o punto), a meno che non coincidano. La prima parte dell'enunciato può presentarsi così: due omologie aventi lo stesso asse (o centro) dànno per prodotto una omologia avente quell'asse (o centro). Quale relazione passa fra le caratteristiche delle tre omologie? In particolare, se le due prime omologie sono speciali, anche il prodotto sarà una omologia speciale; come si enuncia questo corollario se l'asse delle omologie speciali è all'infinito?

19) Due cerchi non concentrici di un piano si corrispondono in due diverse omotetie, i cui centri diconsi *centri di similitudine* dei due cerchi, e precisamente centro di similitudine *interno* od *esterno*, secondo la posizione che occupa rispetto ai centri dei cerchi stessi (cfr. n. 61, es. 14)).

20) Tre cerchi, presi a due a due, determinano, in generale, tre coppie di centri di similitudine; i tre centri esterni sono allineati, e due centri interni sono allineati col centro esterno relativo alla rimanente coppia di cerchi (es. 18); cfr. n. 61, es. 15)).

21) Se ABC è un triangolo, il prodotto di una omologia avente il centro A e l'asse BC, per una omologia avente il centro B e l'asse CA, è una collineazione avente il triangolo ABC come unito; ma se le due omologie hanno la stessa caratteristica k, il prodotto è una omologia di centro C, asse AB e caratteristica $\frac{1}{k}$. Vale dunque il teorema: il prodotto di tre omologie aventi ordinatamente

come centri i vertici di un triangolo, come assi i lati opposti, ed aventi la stessa caratteristica, è l'identità. Caso particolare $k = -1$; caso che B e C siano punti impropri, ad es. in direzioni ortogonali.

IV. — 22) Una collineazione, che trasformi *un* parallelogramma di π in *un* parellelogramma di π', è una affinità;[1] ed è una similitudine, se trasforma *un* quadrato in *un* quadrato. Una collineazione, che trasformi gli angoli retti di π negli angoli retti di π', è pure una similitudine.

23) Un'affinità, che trasformi *un* cerchio in *un* cerchio, è una similitudine. Ed una collineazione, che muti *un* cerchio di π in *un* cerchio di π' e il centro del primo cerchio nel centro del secondo, è pure una similitudine; (si dimostri anzitutto che si corrispondono i punti all'infinito di diametri corrispondenti).

24) Una collineazione, che trasformi i cerchi di π nei cerchi di π', è una similitudine; (può la retta limite di π esser propria?).

25) Due stelle proprie collineari diconsi uguali, se l'angolo di due rette qualisivogliano dell'una stella è uguale all'angolo delle rette corrispondenti dell'altra; e quindi diedri corrispondenti sono uguali. Ora si dimostri che due stelle sono uguali, se ad ogni triedro trirettangolo dell'una corrisponde un triedro trirettangolo dell'altra.

V. — 26) La uguaglianza fra due piani sovrapposti è *diretta* od *inversa*, secondo che angoli corrispondenti hanno lo stesso segno o segni opposti. Nel primo caso i punti ciclici sono uniti, nel secondo caso essi si corrispondono doppiamente.

27) Valendosi delle equazioni dell'uguaglianza diretta od inversa (n. 36) tra piani sovrapposti (o ricorrendo a considerazioni sintetiche), si determinino gli elementi uniti. Si troverà, nel primo caso, un solo punto unito reale e proprio, a meno che non siano uniti tutti i punti all'infinito (*equipollenza*). Nel secondo caso si troveranno due punti uniti distinti, reali ed impropri, e due rette unite distinte (di cui una all'infinito), a meno che non siano uniti tutti i punti di una retta (*simmetria ortogonale*). Si ritrovano così, come casi particolari della ricerca del n. 209, i risultati sulle figure direttamente o inversamente uguali di un piano, enunciati negli es. 8), 9), 10) del n. 39.

28) Due stelle proprie uguali, concentriche, ammettono sempre una retta (reale) unita tale, che facendo ruotare una stella di un diedro conveniente intorno a quella retta, essa viene a coincidere coll'altra stella, elemento per elemento; ogni rotazione di una figura intorno ad un punto equivale dunque ad una rotazione intorno ad una retta uscente dal punto. Se $abc\ldots$, $a'b'c'\ldots$ sono due figure appartenenti a due stelle (concentriche o distinte), e tali che $\widehat{ab} \equiv \widehat{a'b'}$, $\widehat{ac} \equiv \widehat{a'c'}$, ... (mod. π), si può, con un movimento conveniente, sovrapporre l'una figura all'altra; ma quest'ultimo fatto vale per figure composte di *intere* rette, e può cadere in difetto per figure composte di semirette (ad es. per i triedri della geometria elementare).

29) Le affinità fra due piani sovrapposti si distinguono in *dirette* ed *inverse*, secondo che aree di figure corrispondenti hanno segni uguali od opposti. Date le

[1] S'intende dire che basta la conoscenza di due parallelogrammi corrispondenti, per asserire che la collineazione è un'affinità; analogamente per gli enunciati successivi.

equazioni di una affinità (riferite ad un unico sistema di assi), dal segno di un certo determinante si deduce se l'affinità è diretta od inversa. Ogni affinità inversa subordina sulla retta all'infinito una proiettività discorde (n. 179, es. 32)), ed ha quindi all'infinito due punti uniti, sempre reali e distinti fra loro; un'affinità diretta può non avere punti uniti reali all'infinito, od averne uno solo, od averne due.

VI. — 30) Se i punti uniti di una collineazione fra due piani sovrapposti sono reali e distinti, assumendo quelli come punti fondamentali di un sistema di coordinate proiettive, le equazioni della collineazione prendono la forma

$$\rho x' = ax, \quad \rho y' = by, \quad \rho z' = cz,$$

(a, b, c costanti, ρ coeff. di proporzionalità).

31) Se dei tre punti uniti uno solo è reale, con una scelta conveniente del triangolo fondamentale si possono ricondurre le equazioni della collineazione al tipo

$$\rho x' = ax - by, \quad \rho y' = bx + ay, \quad \rho z' = cz.$$

32) Se dei tre punti uniti due coincidono, si possono scrivere le equazioni della collineazione sotto la forma

$$\rho x' = ax, \quad \rho y' = by, \quad \rho z' = cy + bz.$$

33) Se i tre punti uniti coincidono, le dette equazioni possono scriversi sotto la forma

$$\rho x' = ax, \quad \rho y' = bx + ay, \quad \rho z' = cx + dy + az.$$

34) Scelto come punto (0,0,1) il centro di una omologia, le equazioni dell'omologia assumono la forma

$$\rho x' = ax, \quad \rho y' = ay, \quad \rho z' = bx + cy + dz;$$

qual'è l'asse di omologia?

35) Se l'asse di omologia non passa per il centro, assumendolo come retta $z = 0$, le equazioni si semplificano e divengono

$$\rho x' = ax, \quad \rho y' = ay, \quad \rho z' = bz;$$

qual valore ha la caratteristica?

36) Se invece l'asse passa per il centro, si possono ricondurre le equazioni al tipo

$$\rho x' = ax, \quad \rho y' = ay, \quad \rho z' = by + az.$$

VII. *Sulle affinità circolari.* — 36) Dicesi (con Möbius) *affinità circolare* una corrispondenza biunivoca fra due piani punteggiati π, π', la quale trasformi i punti di un qualsiasi cerchio di π nei punti di un cerchio di π', e viceversa. In questa teoria le rette vengono ad essere riguardate come cerchi particolari; l'affinità circolare trasformerà dunque una retta in un cerchio o in una retta. Ora, se ogni retta di π viene trasformata in una retta di π', l'affinità circolare è una particolare collineazione (n. 197), e precisamente una similitudine (es. 24)).

37) Se, al contrario, le rette di π vengono trasformate in cerchi di π', dovranno questi segarsi a due a due in un solo punto variabile al variare dei detti cerchi, e precisamente in quel punto che corrisponde alla intersezione delle rette corri-

spondenti. Segue che i cerchi nominati passeranno tutti per uno stesso punto O' di π', detto *punto centrale* (o *fondamentale*); il punto O' fa eccezione alla univocità della corrispondenza fra π' e π, giacchè il suo corrispondente in π è indeterminato, e precisamente (come risulterà dal seguito) sulla retta all'infinito.[1] Similmente alle rette di π' corrispondono in π cerchi passanti per un punto centrale P.

38) Una particolare affinità circolare fra due piani sovrapposti π, π' è la *inversione* o *trasformazione per raggi vettori reciproci* (n. 61, es. 16)), nella quale i punti centrali O' e P vengono a coincidere nel *centro d'inversione*. Quella trasformazione coincide colla propria inversa, è involutoria.

39) Ciò posto, e detta $\mathbf{T}$ una affinità circolare qualsiasi che trasformi il piano π nel piano (arbitrario) π', si consideri in π' una inversione $\mathbf{I}$ avente come centro il punto centrale O' di $\mathbf{T}$, e si formi il prodotto $\mathbf{T} \cdot \mathbf{I}$. Questo prodotto è una collineazione, anzi una similitudine $\mathbf{S}$ (es. 36)); dunque $\mathbf{T} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{S}$, e moltiplicando ancora per $\mathbf{I}$ (a destra in ciascun membro), e ricordando che $\mathbf{I}^2 = 1$ (identità), si ha infine $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{I}$; *ogni affinità circolare può riguardarsi come prodotto di una similitudine per una inversione*. Il rapporto di similitudine dipende dal raggio del cerchio d'inversione, e, scegliendo questo opportunamente, quel rapporto può rendersi uguale ad 1. Dunque: *due piani legati da una affinità circolare possono sempre sovrapporsi in modo, che la corrispondenza divenga una inversione:* e viceversa. L'affinità circolare differisce dall'inversione soltanto per la mutua posizione dei sostegni.

40) Seguono le proprietà: *l'affinità circolare è una trasformazione conforme* (o *isogonale*); vale a dire l'angolo di due cerchi (o curve) in π uguaglia l'angolo dei cerchi (o curve) corrispondenti in π' (n. 61, es. 20)). Alle rette uscenti dal punto centrale P in π, corrispondono le rette uscenti dal punto centrale O' in π'; e l'angolo di due delle prime rette uguaglia l'angolo corrispondente. Inoltre, sopra due rette corrispondenti l'affinità circolare subordina punteggiate proiettive, aventi in P, O' rispettivamente i punti limite (donde risulta che a P di π corrispondono i punti all'infinito di π', ecc.). *Il prodotto delle distanze di punti corrispondenti dei due piani dai rispettivi punti centrali è costante.*

41) Una trasformazione biunivoca fra due piani punteggiati π, π', la quale trasformi le rette di π nei cerchi di π' passanti per uno stesso punto O', colla condizione che l'angolo di due rette qualisivogliano di π sia uguale all'angolo dei cerchi corrispondenti di π', è una affinità circolare. (Si moltiplichi infatti la trasformazione nominata per una inversione di centro O' in π'; il prodotto è una similitudine).

42) Sappiamo già (n. 179, es. 45)) che, se sopra due piani π, π' si rappresentano i numeri complessi $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ nel solito modo, una equazione bilineare (o trasformazione lineare) fra z, z' rappresenta una affinità circolare fra i due piani. Ora sussiste pure la proposizione inversa. Supposto infatti che π e π' siano legati da una affinità circolare, si assumano anzitutto come punti $z = 0$, $z' = 0$

[1] La eccezione potrebbe togliersi quando si riguardassero convenzionalmente i punti all'infinito di ciascun piano, ad es. di π, come riuniti in un *punto all'infinito* O_∞, corrispondente di O'; e le rette di π come cerchi passanti per O_∞. Ciò si suol fare talvolta in questa teoria, o quando si rappresentano sul piano i numeri complessi secondo GAUSS.

i punti centrali O, P'; si consideri poi un piano ausiliare π'', sovrapposto a π', il quale sia descritto da un punto z'' (riferito agli stessi assi x', y'), e sia legato da una similitudine a π, e da un'inversione di centro P' a π'; si avrà (n. 61, es. 16))

$$z = mz'', \qquad z'' = \frac{1}{\overline{z'}}, \qquad (m \text{ costante complessa}, \ \overline{z'} = x' - iy')$$

donde $\overline{z'} = \frac{m}{z}$, od anche $z' = \frac{m}{z}$, invertendo il verso positivo sull'asse y'. Se poi si trasportano parallelamente a sè stessi gli assi nei due piani, per liberarsi da ipotesi particolari, bisognerà sostituire a z, z', rispettivamente $z + h$, $z' + k$, dove h e k sono costanti complesse, e si avrà in fine una relazione del tipo

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \text{od anche} \qquad \alpha z z' + \beta z + \gamma z' + \delta = 0,$$

dove $a, \ldots$, oppure $\alpha \ldots$ sono costanti complesse, tali che $ad - bc \neq 0$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. (Ove non si possa disporre dei versi positivi sugli assi cartesiani in π, π', occorrerà talvolta sostituire $\overline{z'}$ a z'). *Una affinità circolare fra due piani si traduce dunque in una trasformazione lineare, a determinante non nullo, fra le variabili complesse rappresentate sui piani stessi; e viceversa.*

43) Le proprietà delle proiettività tra due punteggiate, ove si considerino anche i punti immaginari, dànno adunque proprietà della affinità circolare. Ad es.: *una affinità circolare è determinata pienamente quando di tre punti dell'un piano si assegnino i corrispondenti nell'altro, e si indichi inoltre quali versi di rotazione devono corrispondersi nei due piani.* Il birapporto di quattro punti dell'un piano è uguale al birapporto dei corrispondenti quattro punti dell'altro (n. 161, es. 43)); ecc.

*** 210. Correlazioni fra piani.** — Vogliamo ora occuparci in particolare delle correlazioni fra due forme di seconda specie, e specialmente fra due piani. Sappiamo già che una correlazione fra i piani π, π' muta una figura di π, composta di punti e rette (P, Q, ... p, q, ...), in una figura di π', composta di rette e punti (p', q', ... , P', Q', ...). Ogni proprietà grafica della prima figura si traduce in una proprietà grafica della seconda, purchè si scambino tra loro le parole *punto* e *retta*. Dimostrata sopra una figura la prima proprietà, si è dunque sicuri che la seconda proprietà, corrispondente a quella per *dualità piana* (n. 123), sussiste per una seconda figura. Ed in ciò si ha una nuova giustificazione della legge di dualità piana, giustificazione che, tradotta analiticamente, si riduce a quella esposta nel n. 134.

Per rappresentare analiticamente una correlazione fra due piani π, π', si stabiliscano, sopra questi, due sistemi di coordinate omogenee di punti e rette (per es. cartesiane e plückeriane); allora fra le coordinate (x, y, z)

di un punto P di π e le coordinate (u', v', w') della retta corrispondente p' di π' passeranno relazioni del tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho u' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho v' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho w' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases}$$

dove ϱ è un fattore di proporzionalità non nullo, e le a_{ik} sono nove costanti, costituenti un determinante di terzo ordine

$$(2)\qquad A \neq 0.$$

Le (1) si giustificano in modo perfettamente analogo a quello tenuto nei nn. 198, 200 a proposito della collineazione.

Risolvendo le (1) rispetto ad x, y, z, si ottengono le relazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} \sigma x = A_{11}u' + A_{21}v' + A_{31}w', \\ \sigma y = A_{12}u' + A_{22}v' + A_{32}w', \\ \sigma z = A_{13}u' + A_{23}v' + A_{33}w', \end{cases}$$

(dove i simboli hanno i soliti significati; cfr. n. 200), che dànno il punto P di π quando sia nota la retta p' di π'.

Se invece fosse dato nel piano π' un punto Q' di coordinate (x', y', z') e quindi di equazione, in coordinate di rette,

$$u'x' + v'y' + w'z' = 0,$$

e si chiedesse la retta corrispondente q in π, basterebbe trasformare l'ultima equazione eseguendo le sostituzioni (1) (cfr. n. 200). Ordinando rispetto alle variabili x, y, z l'equazione trasformata, si trovano, come coefficienti delle variabili, i trinomi scritti qui sotto, che sono proporzionali alle coordinate (u, v, w) della retta q:

$$(4)\qquad \begin{cases} \tau u = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z', \\ \tau v = a_{12}x' + a_{22}y' + a_{32}z', \\ \tau w = a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}z'. \end{cases}$$

Finalmente si potrebbero cercare le formole che esprimono x', y', z', coordinate di Q', in funzione di u, v, w, coordinate di q; il che sarà lasciato al lettore.

Mediante le formole precedenti si può, quando sia data la equazione di una curva in uno dei due piani, determinare sull'altro piano la equazione dell'inviluppo formato dalle rette corrispondenti ai punti della curva; e viceversa. E dall'essere lineari quelle formole risulta che *una curva algebrica d'ordine n viene trasformata da una correlazione in un inviluppo algebrico di classe n, e viceversa.*

*** 211. Correlazione fra piani sovrapposti.** — Supponiamo ora che i due piani correlativi π e π' siano sovrapposti, e vengano riferiti ad uno

stesso sistema di coordinate omogenee, sia di punti, sia di rette. Un punto $P\ (x, y, z)$ del sostegno sarà considerato una prima volta come punto di π; ad esso, in virtù della correlazione $\boldsymbol{K}$, con cui si passa da π a π', corrisponde in π' una certa retta $p'\ (u', v', w')$, le cui coordinate sono espresse dalle (1). Ma se consideriamo P una seconda volta come punto di π', nel qual caso potremo indicare il punto stesso con Q' e le sue coordinate con $x' = x,\ y' = y,\ z' = z$, dovremo cercare quella retta $q\ (u, v, w)$ di π, che corrisponde a Q' mediante la correlazione inversa $\boldsymbol{K}^{-1}$; le coordinate di q saranno date allora dalle (4). Il confronto fra le (1) e le (4) fa vedere che, generalmente, le due rette p' e q, corrispondenti allo stesso punto $P \equiv Q'$ nelle correlazioni $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}^{-1}$, sono distinte fra loro. Si presentano allora i due problemi seguenti:

1) esaminare se esistano punti particolari $P \equiv Q'$, ai quali corrisponda (*doppiamente*) un'unica retta $p' \equiv q$, nelle correlazioni $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}^{-1}$;

2) esaminare se esistano correlazioni $\boldsymbol{K}$ così particolari, che, comunque sia scelto il punto $P \equiv Q'$, sempre le due rette p' e q, corrispondenti in $\boldsymbol{K}$ e $\boldsymbol{K}^{-1}$, vengano a coincidere; vale a dire, esaminare se una correlazione $\boldsymbol{K}$ fra piani sovrapposti possa coincidere colla correlazione inversa, $\boldsymbol{K} \equiv \boldsymbol{K}^{-1}$.

Qui si osservi, sotto l'aspetto sintetico, che la retta q, quando venga trasformata mediante $\boldsymbol{K}$, dà il punto $Q' \equiv P$, il quale, trasformato ancora mediante $\boldsymbol{K}$, dà la retta p'; sicchè la retta q si muta nella p' mediante la *collineazione* $\boldsymbol{K}^2$. Quindi il primo problema si riduce, in sostanza, a determinare gli elementi uniti della detta collineazione; ed il secondo problema ad esaminare quando essa sia la identità.

Sotto l'aspetto analitico, il problema 1) porta ad esaminare per quali valori di x, y, z (coordinate di $P \equiv Q'$) le coordinate della retta p', che sono espresse (in forza delle (1)) da

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

risultino proporzionali alle coordinate della retta q, che sono espresse (in forza delle (4)) da

$$a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \quad a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \quad a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z.$$

Detto k il fattore incognito di proporzionalità, sottraendo dalle coordinate di p' le corrispondenti coordinate di q moltiplicate per k, si giunge al sistema di equazioni

$$(5) \qquad \begin{cases} (a_{11} - ka_{11})x + (a_{12} - ka_{21})y + (a_{13} - ka_{31})z = 0, \\ (a_{21} - ka_{12})x + (a_{22} - ka_{22})y + (a_{23} - ka_{32})z = 0, \\ (a_{31} - ka_{13})x + (a_{32} - ka_{23})y + (a_{33} - ka_{33})z = 0, \end{cases}$$

il quale contiene come incognite le coordinate x, y, z $\left(\text{od } \frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ del punto $P \equiv Q'$ richiesto, e la quantità ausiliare k. Eliminando x, y, z fra le (5), si ottiene

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - ka_{11} & a_{12} - ka_{21} & a_{13} - ka_{31} \\ a_{21} - ka_{12} & a_{22} - ka_{22} & a_{23} - ka_{32} \\ a_{31} - ka_{13} & a_{32} - ka_{23} & a_{33} - ka_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

equazione di terzo grado in k, che dà per k tre valori (uno dei quali si riconosce esser uguale ad 1). Ciascuno di questi, introdotto nelle (5), rende compatibili quelle equazioni per valori non tutti nulli di x, y, z, e quindi fornisce le coordinate di uno dei punti richiesti. Si conclude: *in una correlazione fra due piani sovrapposti esistono, in generale, tre punti, ciascuno dei quali corrisponde doppiamente ad una retta.* Un esame più attento farebbe vedere che, nel triangolo formato dai tre punti nominati U, V, W, un vertice, U ad es., corrisponde doppiamente al lato opposto VW, mentre gli altri due vertici V, W corrispondono ordinatamente, in modo duplice, ai lati UV, UW che passano per essi.

Non vogliamo discutere tutti i casi particolari che si possono presentare, nè la ipotesi che esista un valore di k, il quale annulli tutti i minori del secondo ordine del determinante (6) (ipotesi che porta l'esistenza di infiniti punti allineati, ciascuno dei quali corrisponde doppiamente ad una retta).

Esamineremo invece la ipotesi che esista un valore di k il quale annulli tutti gli elementi del determinante (6), vale a dire verifichi le nove relazioni

$$(7) \qquad a_{il} - ka_{li} = 0. \qquad (i, l = 1, 2, 3)$$

Per questo valore di k le tre equazioni (5) diventano identità, e sono soddisfatte dalle coordinate di ogni punto del piano; sicchè *ogni* punto corrisponde doppiamente ad una retta. In tal caso la correlazione K è identica alla sua inversa K^{-1}, è, come diremo, *involutoria*, e soddisfa dunque al problema 2).

Ora, se uno almeno dei tre elementi principali a_{11}, a_{22}, a_{33} del determinante A non è nullo, la corrispondente relazione (compresa nelle (7))

$$a_{ii} - ka_{ii} = 0$$

determina $k = 1$; e questo valore, sostituito nelle altre relazioni (7), ci dà

$$(8) \qquad a_{li} = a_{il} \qquad (i, l = 1, 2, 3).$$

Concludiamo che il determinante A della correlazione è, in tal caso, *simmetrico*.

Se invece $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, dovrà esser diverso da zero qualcuno degli altri elementi del determinante A, perchè si suppone sempre $A \neq 0$. Sia, per es., $a_{12} \neq 0$; allora una delle (7),

$$a_{12} - k a_{21} = 0,$$

ci dice anzitutto che k ed a_{21} sono diversi da zero. Moltiplicando ora, membro a membro, la stessa relazione scritta sotto la forma $a_{12} = k a_{21}$, per l'analoga $a_{21} = k a_{12}$, che è pur compresa fra le (7), si ottiene subito

$$k^2 = 1, \quad \text{ossia} \quad k = \pm 1.$$

La soluzione $k = 1$ ci dice nuovamente che A è simmetrico. La $k = -1$ ci dà invece

$$(8') \qquad a_{ii} = 0, \quad a_{il} = -a_{li} \qquad (i, l = 1, 2, 3)$$

e conduce ad un determinante A emisimmetrico. Ma è noto che un determinante emisimmetrico d'ordine dispari è nullo;[1] e perchè noi snpponiamo $A \neq 0$, dobbiamo respingere le soluzioni (8'). Concludiamo infine:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una correlazione fra due piani sovrapposti sia involutoria è che il determinante della sostituzione lineare rappresentante la correlazione sia simmetrico.

***212. Polarità piana.** — Una correlazione involutoria fra due piani sovrapposti si chiama *correlazione polare,* o brevemente *polarità* (piana). Essa è rappresentata da equazione del tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{cases} \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

colla condizione

$$(2) \qquad A \neq 0.$$

Un punto $P(x, y, z)$ ed una retta $p(u, v, w)$ corrispondentisi (doppiamente) nella polarità, si dicono rispettivamente *polo di p* e *polare di P.* È inutile distinguere in quale dei due piani si consideri il polo o la polare.

Se un secondo punto Q ha per polare q, e Q appartiene a p, dovrà (per la proprietà fondamentale della correlazione) q appartenere a P. Dunque:

Se di due punti il secondo appartiene alla polare del primo, il primo apparterrà alla polare del secondo; i due punti diconsi *coniugati,* o *reciproci,* nella polarità.

Se di due rette la seconda passa per il polo della prima, la prima passerà per il polo della seconda; le due rette diconsi *coniugate,* o *reciproche,* nella polarità.

[1] V. ad es. il *Corso di Analisi algebrica* del CESARO (1894), pag. 35. Per un determinante del 3° ordine la proprietà si verifica subito mediante sviluppo.

La condizione perchè due punti $P(x, y, z)$, $Q(x', y', z')$ siano coniugati nella polarità (1) si trova esprimendo che Q appartiene alla polare (u, v, w) di P, ossia che è

$$ux' + vy' + wz' = 0.$$

Sostituendo ad u, v, w le loro espressioni date dalle (1), si ottiene

$$(3) \qquad \begin{aligned} &a_{11}xx' + a_{22}yy' + a_{33}zz' + a_{12}(xy' + x'y) \\ &+ a_{13}(xz' + x'z) + a_{23}(yz' + y'z) = 0, \end{aligned}$$

la quale, come era prevedibile, contiene simmetricamente le coordinate dei due punti.

Ponendo nella (3) $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, troviamo la condizione perchè un punto $P(x, y, z)$ sia *autoconiugato*, vale a dire perchè esso appartenga alla propria polare. Giungiamo così al risultato:

Il luogo dei punti autoconiugati in una polarità è una curva del secondo ordine, rappresentata dall'equazione

$$(4) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0.$$

Questa curva dicesi *fondamentale* nella polarità, giacchè, come vedremo (e come risulterebbe pure dalle cose dette), non solo la curva è determinata dalla polarità, ma anche questa è determinata da quella, cioè da una curva *generale* di secondo ordine. È da notare che i punti della curva (4) potrebbero esser tutti immaginari.

Dualmente, se partiamo dalle equazioni della polarità risolte rispetto ad x, y, z,

$$(1') \qquad \begin{cases} \sigma x = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w, \\ \sigma y = A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w, \\ \sigma z = A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w, \end{cases} \qquad (A_{ik} = A_{ki})$$

dove le A_{ik} sono i soliti complementi algebrici estratti da A, possiamo scrivere la condizione affinchè due rette (u, v, w), (u', v', w') siano coniugate nella polarità sotto la forma

$$(3') \qquad \begin{aligned} &A_{11}uu' + A_{22}vv' + A_{33}ww' + A_{12}(uv' + u'v) \\ &+ A_{13}(uw' + u'w) + A_{23}(vw' + v'w) = 0. \end{aligned}$$

Le rette autoconiugate in una polarità, vale a dire le rette passanti per i propri poli, costituiscono un inviluppo di seconda classe, rappresentato dall'equazione

$$(4') \qquad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw = 0.$$

È questo l'*inviluppo fondamentale* della polarità, il quale potrebbe anche esser composto di rette tutte immaginarie. Vedremo nella teoria delle curve di secondo ordine lo stretto legame che passa tra la curva fondamentale (4) e l'inviluppo fondamentale (4').

Osservazione. — Avvertiamo (riservandoci di dimostrarlo in seguito) che una polarità ammette infiniti *triangoli autopolari* od *autoreciproci*, tali cioè che ciascun vertice sia polo del lato opposto e quindi i vertici (ed i lati) siano coniugati a due a due.

Le equazioni di una polarità si semplificano quando, come triangolo fondamentale del sistema di coordinate, si assuma un triangolo autopolare. Notando infatti che i punti fondamentali $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ hanno rispettivamente per polari le rette fondamentali $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, risulta che *la polarità sarà rappresentata da equazioni del tipo:*

$$u = ax, \qquad v = by, \qquad w = cz,$$

dove a, b, c sono tre costanti non nulle.

***213. Correlazione ortogonale fra due stelle.** — Abbiamo già definito la correlazione fra due stelle di centri S, S'. Se due figure delle due stelle si corrispondono in una correlazione, ad ogni retta e ad ogni piano della prima figura corrisponde un piano ed una retta della seconda; ed ogni proprietà grafica dell'una figura trova riscontro in una proprietà grafica dell'altra, proprietà che si ottiene dalla prima collo scambio delle parole *retta* e *piano*. Segue che anche per la stella vale una *legge di dualità*, in virtù della quale da ogni proprietà grafica di una figura composta di rette e piani di una stella, si può dedurre una seconda proprietà grafica col detto scambio di parole (n. 123). Ma, per la stella, possiamo estendere la validità di questa legge anche alle proprietà metriche, mediante le considerazioni seguenti.

Supposto che S ed S' siano due punti propri, facciamo corrispondere ad ogni retta a uscente da S, il piano α' che passa per S' ed è normale ad a. Con ciò veniamo a stabilire una corrispondenza biunivoca fra le rette di S ed i piani di S', corrispondenza che è una correlazione, perchè alle rette di un fascio nella stella S, situato in un piano β, corrispondono, nella stella S', i piani di un fascio avente per asse la retta b' normale a β; ed i due fasci risultano proiettivi. Questa particolare correlazione, che muta ogni retta ed ogni piano della prima stella, nel piano e nella retta rispettivamente normali appartenenti alla seconda stella, dicesi *ortogonale*. L'angolo di due rette nell'una stella è uguale (a meno di multipli di π) al diedro dei due piani corrispondenti nell'altra stella; e l'angolo di una retta con un piano in una stella uguaglia l'angolo del piano e della retta corrispondenti nell'altra stella. Dunque, se due figure di due stelle si corrispondono in una correlazione ortogonale, ogni proprietà *metrica* dell'una figura trova riscontro in una proprietà metrica dell'altra, proprietà che si ottiene dalla prima collo scambio delle parole *retta* e *piano*, *angolo di due rette* e *diedro di due piani*; dimostrata la prima proprietà, si è sicuri che è vera anche la seconda. In breve: *nella stella (propria) la legge di dua-*

lità vale, non solo per le proprietà grafiche, ma pure per le proprietà metriche. Di questa considerazione si fa uso anche nella geometria elementare (ad es. nella teoria dei triedri); coll'avvertenza che, per il modo come ivi si fissa la misura degli angoli (di semirette) e dei diedri (di semipiani), un angolo e un diedro corrispondenti risultano supplementari anzichè uguali.

*** 214. Polarità ortogonale nella stella o sul piano all'infinito.** — Le cose dette sussistono pure se le due stelle hanno lo stesso centro $S \equiv S'$. In tale ipotesi però la correlazione ortogonale riesce involutoria, è una *polarità nella stella;* infatti la stessa operazione di perpendicolarità, che conduce da una retta a di S al piano corrispondente α' di S', conduce pure (come si è visto) da una retta b' di S' al piano corrispondente β di S. Dunque:

In una stella propria esiste una particolare polarità, detta ortogonale o sferica, nella quale le rette corrispondono ai piani ad esse perpendicolari.

Se si nota che una polarità piana dà, mediante proiezione da un punto esterno S, una polarità nella stella, e viceversa, risulta che tutte le proprietà ed i concetti stabiliti nella polarità piana si trasportano subito alla polarità nella stella, pur di sostituire ai punti ed alle rette del piano, le rette e i piani della stella. Alla curva del secondo ordine (fondamentale di una polarità piana) bisognerà sostituire il *cono di secondo ordine,* costituito dalle rette proiettanti da S i punti della curva; ed all'inviluppo di rette di seconda classe (fondamentale) si sostituirà l'*inviluppo conico di seconda classe,* costituito dai piani proiettanti da S le rette di quell'inviluppo.

In particolare, osserveremo che *due rette coniugate o due piani coniugati nella polarità ortogonale di una stella sono perpendicolari fra loro, e viceversa.* Le coppie di rette coniugate appartenenti ad un fascio, cioè ad un piano della stella, generano in quello la involuzione circolare; quindi le rette autoconiugate nel piano sono le rette isotrope (n. 190) uscenti da S, nel detto piano. *L'insieme delle rette autoconiugate nella polarità ortogonale è il cono isotropo, che ha il vertice nel centro della stella* (n. 108, Oss.).

I piani autoconiugati (immaginari) *nella polarità ortogonale costituiscono un inviluppo conico di seconda classe.*

Triedri autopolari nella detta polarità sono trirettangoli, ecc.

Segando la polarità sferica nella stella S con un piano non passante per S, si ottiene su questo una particolare polarità piana, che viene spesso considerata nella Geometria descrittiva (sotto il nome di *antipolarità*).

Se poi per piano secante si assume il piano all'infinito, la polarità ottenuta non dipende più dal centro S della stella che si considera, e vien detta *polarità sferica,* od *assoluta,* nel piano all'infinito. *Sul piano all'infinito esiste una determinata polarità (assoluta), in cui si corrispondono sempre*

un punto improprio ed una retta impropria che definiscano, nello spazio una direzione ed una giacitura ortogonali. La curva (immaginaria) del secondo ordine, fondamentale nella detta polarità, dicesi (*cerchio*) *assoluto* dello spazio; ed è il luogo dei punti ciclici di tutti i piani dello spazio. Punti o rette coniugate nella polarità assoluta definiscono direzioni o giaciture ortogonali, ecc.

Possiamo confermare per via analitica le considerazioni precedenti. Scelto il centro della stella come origine O di un sistema cartesiano ortogonale nello spazio, e scritte le equazioni di una retta uscente da O

$$p) \qquad \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

e di un piano uscente da O

$$\pi) \qquad ux + vy + wz = 0,$$

ricordiamo che le condizioni di ortogonalità tra questi elementi possono scriversi così (n. 94):

$$(1) \qquad \varrho u = l, \qquad \varrho v = m, \qquad \varrho w = n.$$

Le (1) rappresentano la polarità ortogonale, e rientrano effettivamente nel tipo (1) del n. 212, purchè in queste si pongano $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{12} = \ldots = a_{23} = 0$, e si riguardino ora (l, m, n) ed (u, v, w) come coordinate (proiettive) della retta p e del piano π entro la stella O.

La condizione (3) (n. 212) di coniugio tra due rette p, p' diviene, nelle nuove ipotesi,

$$3 \qquad ll' + mm' + nn' = 0,$$

che è la nota condizione di ortogonalità fra rette (n. 91); e la condizione (3') (n. 212) di coniugio tra piani π, π' si riduce ora alla condizione di perpendicolarità fra piani (n. 95)

$$(3') \qquad uu' + vv' + ww' = 0.$$

Le rette (l, m, n) autoconiugate costituiscono il cono fondamentale

$$(4) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 0,$$

che, in coordinate di punti, tenuto conto delle p), ha l'equazione

$$(5) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

questa rappresenta, come è noto, il cono isotropo col vertice nell'origine (n. 108, Oss.). *Il cerchio assoluto è dunque rappresentato dalla* (5) *insieme alla* $t = 0$, equazione del piano all'infinito sopra cui esso giace.

Finalmente i piani autoconiugati nella polarità ortogonale soddisfano, colle loro tre prime coordinate plückeriane omogenee (u, v, w), all'equazione

$$(4') \qquad u^2 + v^2 + w^2 = 0,$$

che rappresenta l'inviluppo conico fondamentale della polarità; (la quarta coordinata dei detti piani è nulla, $r = 0$, poichè essi escono dall'origine; cfr. nn. 139, 140).[1]

Osservazione. Il cerchio assoluto (o la polarità assoluta) ha nella geometria solida lo stesso ufficio che i punti ciclici nella planimetria. *Ogni relazione proiettiva di una figura col cerchio assoluto può enunciarsi in forma metrica; e viceversa, ogni proprietà metrica della figura può riguardarsi come una relazione proiettiva di questa col piano all'infinito e col cerchio assoluto* (cfr. n. 190, Oss.). Incontreremo, nello studio delle superficie di secondo ordine, vari esempi che chiariranno questa affermazione.

Esercizi. I — 1) Se fra due piani π, π' passa una correlazione, a due punteggiate (di sostegni) a, b, di π corrispondono proiettivamente due fasci (di centri) A', B' di π'; ed al punto ab di quelle corrisponde la retta $A'B'$ in questi. Viceversa, una correlazione fra i piani π, π' è individuata quando si diano due punteggiate a, b in π, e due fasci ad esse ordinatamente proiettivi A', B' in π', colla condizione che al punto ab delle due punteggiate corrisponda la retta $A'B'$ dei due fasci (cfr. n. 198).

2) Se i due piani π, π' dell'es. precedente sono sovrapposti, si può supporre in particolare che il fascio A' sia prospettivo alla punteggiata a e B' prospettivo a b, e inoltre che la retta $A'B'$ passi per il punto ab. In tal caso la costruzione della correlazione si semplifica notevolmente. Si applichi, ad es., una siffatta correlazione a trasformare un cerchio di π; si otterrà in π' un inviluppo di seconda classe (formato, come poi si vedrà, dalle tangenti ad una curva del secondo ordine).

3) Se, in una correlazione K fra due piani sovrapposti π, π' vi è una punteggiata a di π che sia prospettiva al corrispondente fascio di rette A' di π', vi sarà, in generale, una seconda punteggiata b di π che riuscirà prospettiva al fascio di rette B' corrispondente in π'; e la retta $A'B'$ passerà per il punto ab. Ma, in casi particolari, le due punteggiate a, b possono coincidere, ed allora coincidono i due fasci A', B'; ed ogni punto P di a corrisponde doppiamente (cioè in K e K^{-1}) alla retta $A'P$ di A'. (Si applichi infatti la collineazione K^2 alle due forme prospettive a, A'...).

4) Se una correlazione muta un n.gono semplice $ABC \dots H$, sui lati del quale si trovano ordinatamente certi punti M, N, $\dots R$, in un n.latero $abc \dots h$, dai cui vertici escono le rette m, n, $\dots r$, sussiste la relazione fra rapporti semplici:

$$(ABM)\ (BCN) \dots (HAR) = (abm)\ (bcn) \dots (har).$$

(Si consideri infatti una trasversale secante i lati dell'n.gono in M', N', $\dots R'$; allora il primo membro della relazione precedente uguaglia il prodotto dei birapporti $(ABMM')\ (BCNN') \dots$, per l'es. 2) del n. 152; ma un birapporto non viene alterato da una correlazione; poi n. 152, es. 16)).

---

[1] La (4') presa isolatamente, cioè senza la $r = 0$, rappresenta, in coordinate plückeriane, un inviluppo doppiamente infinito di piani, e precisamente, come vedremo, l'insieme dei piani che toccano il cerchio assoluto sopra nominato (cfr. n. 140, nota).

II. — 5) Due relazioni del tipo

(1) $$u = x, \qquad v = y,$$

oppure

(2) $$u = -x, \qquad v = -y,$$

tra le coordinate cartesiane (x, y) di un punto e le coordinate plückeriane (u, v) di una retta, definiscono una polarità piana; qual'è la polare dell'origine? Se le coordinate sono ortogonali, la curva fondamentale è un cerchio, immaginario nel caso (1) che rappresenta una *antipolarità* (n. 214), reale nel caso (2) (*polarità circolare*). Nell'uno e nell'altro caso, la polare p di un punto P è normale alla retta OP congiungente il punto coll'origine O, e passa una semplice relazione fra le distanze di O da P e da p; ad es. nella polarità (2), il punto P è coniugato armonico del punto $p \cdot OP$, rispetto alle intersezioni di OP col cerchio fondamentale. L'angolo di due rette arbitrarie è uguale all'angolo sotto cui da O sono visti i relativi poli.

6) Sopra ogni retta di un piano, nel quale sia fissata una polarità, si trovano infinite coppie di punti coniugati; queste formano una involuzione, avente come doppi i punti autoconiugati appartenenti a quella retta. E dualmente; (si ricorra alle (3) o (3′) del n. 212, supponendo, il che è lecito, che la retta o il punto sia fondamentale nel sistema di coordinate).

7) Una correlazione fra due piani sovrapposti, π, π', la quale muti i vertici di un triangolo ABC di π nei lati opposti considerati in π', è una polarità avente il triangolo ABC come autopolare. Si dimostri il teorema per via sintetica ed analitica (assumendo ABC come triangolo fondamentale).

8) Una polarità è pienamente determinata quando si assegni (arbitrariamente) un triangolo autopolare ABC, ed inoltre di un punto P, non appartenente a nessun lato, si dia la retta polare p, non appartenente a nessun vertice. Sopra ciascun lato rimane così determinata la involuzione di punti coniugati nella polarità. Ora, o le tre involuzioni sono ellittiche, ed allora nessun punto reale del piano può appartenere alla propria polare, la cui curva fondamentale sarà dunque immaginaria; o di quelle tre involuzioni due sono iperboliche ed una ellittica, ed allora esistono infiniti punti reali del piano appartenenti alla propria polare, e la curva sopra nominata è reale.

9) Dato nel piano un pentagono semplice, esiste una determinata polarità che muta i vertici del pentagono nei lati opposti.

10) Se, in una correlazione fra due piani π, π', le rette all'infinito di π, π' hanno per corrispondenti in π', π due punti propri (*punti limite*), è possibile sovrapporre i due piani in guisa da ottenere una polarità; (si facciano coincidere anzitutto i punti limite, e si cerchi di formare un triangolo i cui vertici corrispondano ai lati opposti; n. 193, es. 29)).

11) In una polarità non ortogonale nella stella propria S esiste sempre un triedro trirettangolo autopolare, ed in generale uno solo; se ne esiste un secondo ve ne sono infiniti, i quali hanno tutti in comune uno spigolo e la faccia opposta. (Detta infatti Π la polarità data e Π' la polarità sferica, si consideri la collineazione $\Pi \cdot \Pi'$).

12) In una collineazioue, o correlazione, fra due stelle proprie S, S', esiste sempre (almeno) un triedro trirettangolo dell'una, cui corrisponde nell'altra un triedro, o trispigolo, trirettangolo. (Infatti, detta K la proiettività che fa passare da S ad S', esiste in S' una polarità Π, in cui si corrispondono sempre due elementi che provengano, mediante K, da due elementi ortogonali di S; ecc.).

13) Due stelle proprie correlative possono sempre sovrapporsi in modo da dar luogo ad una polarità (es. 12), 7)).

Capitolo VI.

Proiettività fra due spazi.

*** 215. Collineazioni e correlazioni nello spazio.** — La nozione di corrispondenza proiettiva fra due forme di seconda specie si estende, senza difficoltà, alle forme di terza specie (spazi di punti o piani). Di queste nuove corrispondenze tratteremo qui rapidamente, sia perchè l'analogia colle forme di seconda specie suggerisce subito gli sviluppi qui omessi, sia perchè solo pochi risultati occorrono nel seguito del corso.

Una *proiettività* tra due spazi Σ, Σ' (naturalmente sovrapposti), vale a dire una corrispondenza che muti ogni elemento (punto o piano) di Σ in un elemento di Σ', e forme di prima o seconda specie appartenenti a Σ, in forme della stessa specie appartenenti a Σ', può essere una *collineazione* od una *correlazione*.

a) *Due spazi* Σ, Σ' *diconsi collineari* (od *omografici*), *se ai punti, alle rette, ai piani di* Σ (*o* Σ') *corrispondono ordinatamente i punti, le rette, e i piani di* Σ' (*o* Σ), *e ad elementi che si appartengono nell'uno spazio corrispondono elementi che si appartengono nell'altro.* Ad ogni forma di prima o seconda specie di Σ corrisponde in Σ' una forma dello stesso nome, *proiettiva a quella.* Quest'ultima proprietà risulta dalle premesse, quando si tenga conto del teorema del n. 197. Se non si vuol ricorrere al detto teorema, si può riguardare la proprietà stessa come una condizione da aggiungere alla definizione; questa condizione risulterà poi verificata in tutti i casi che avremo da considerare.

b) *Due spazi* Σ, Σ' *diconsi correlativi* (*o reciproci*), *se ai punti, alle rette, ai piani di* Σ (*o* Σ') *corrispondono i piani, le rette, i punti di* Σ' (*o* Σ), *e ad elementi che si appartengono nell'uno spazio corrispondono elementi che si appartengono nell'altro.* Un piano (punteggiato o rigato) di Σ ha per corrispondente una stella (di piani o rette) in Σ'; e le due forme sono riferite *proiettivamente.* Una punteggiata di Σ ha per corrispondente un fascio di piani ad essa *proiettivo in* Σ'; un fascio di rette ha per corrispondente un fascio di rette *proiettivo,* ecc. Tutto ciò per dimostrazione

o per definizione, secondo che si adotta l'una o l'altra delle vie suggerite or ora.

È chiaro poi che il prodotto di due o più proiettività fra spazi è ancora una proiettività.

***216. Determinazione di una proiettività fra due spazi.** — *Una proiettività fra due spazi è pienamente determinata se di cinque elementi dello stesso nome (punti o piani) nell'uno spazio, tali che mai quattro appartengano ad una forma di seconda specie, sono assegnati i corrispondenti nell'altro spazio, soddisfacenti alle stesse condizioni* (cfr. n. 198).

Supposto, ad es., che in Σ siano dati cinque punti A, B, C, D, E, tali che mai quattro appartengano ad un piano, ed in Σ' siano dati cinque punti A', B', C', D', E', nelle stesse condizioni, si assuma il tetraedro $ABCD$ come fondamentale di un sistema di coordinate proiettive omogenee (x, y, z, t) in Σ, ed E come punto unità; e similmente si operi in Σ' per fissare il sistema di coordinate proiettive (x', y', z', t'). Allora le uguaglianze

$$(1) \qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t$$

(o le proporzioni equivalenti $x' : y' : \ldots = x : y : \ldots$, trattandosi di coordinate omogenee) definiscono una corrispondenza tra i due spazi, che è evidentemente una collineazione, e che muta i punti $A, \ldots, E$, in $A', \ldots, E'$. D'altra parte, supposto che esista tra i due spazi una collineazione che muti la prima quintupla di punti nella seconda, e detti $P\,(x, y, z, t)$, $P'\,(x', y', z', t')$ due ulteriori punti corrispondenti, dalla uguaglianza tra birapporti

$$(2) \qquad \overline{AB}\,(CDEP) = \overline{A'B'}\,(C'D'E'P'),$$

e dalle analoghe relative ai fasci $\overline{AC}$, $\overline{A'C'}$ e $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$, segue la relazione $y : z = y' : z'$ e le analoghe (n. 161), donde si traggono le proporzioni sopra scritte, equivalenti alle uguaglianze (1). Si conclude esser unica, e rappresentata dalle (1), la collineazione soddisfacente alle condizioni imposte.

La (2) e le due uguaglianze analoghe citate permettono anzi, dato P, di costruire il punto corrispondente P'.

217. Equazioni della collineazione tra due spazi. — Una collineazione tra due spazi, ove siano fissati due sistemi di coordinate omogenee cartesiane (o proiettive) di punti, (x, y, z, t), (x', y', z', t'), è rappresentata da quattro relazioni del tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho\, x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \varrho\, y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ \varrho\, z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ \varrho\, t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t, \end{cases}$$

dove ϱ è un fattore di proporzionalità non nullo (che può supporsi uguale ad 1), e le a_{ik} sono sedici costanti, elementi di un determinante del quarto ordine A, diverso da zero:

$$A \neq 0. \tag{2}$$

Viceversa, le (1), quando sussista la (2), rappresentano sempre una collineazione tra spazi.

Queste asserzioni si giustificano imitando l'analogo ragionamento fatto in geometria piana (n. 200).[1]

Per quella via si vede inoltre che le relazioni esprimenti x, y, z, t, in funzione di x', y', z', t' sono del tipo (1), e ne differiscono solo per lo scambio delle coordinate dei due spazi, e per la sostituzione di a_{ik} con A_{ki}, complemento algebrico di a_{ki} entro ad A (cfr. n. 200, (3)). E si otterrebbero pure, lasciandosi guidare dall'analogia, le relazioni, sempre lineari ed omogenee, fra le coordinate di due piani corrispondenti nei due spazi (cfr. n. 200, (4)).

Il carattere lineare di queste varie relazioni fa vedere che *una collineazione tra due spazi non altera l'ordine di una superficie algebrica, nè la classe di un inviluppo algebrico doppiamente infinito di piani.*

In altre parole: l'ordine e la classe sono *caratteri proiettivi* dei rispettivi enti; intendendo per *carattere proiettivo* di una figura solida ogni carattere che non venga alterato da una collineazione (cfr. n. 126).

*** 218. Casi particolari metrici di collineazioni fra spazi.** — Supposto che, nelle (1) del numero precedente, le coordinate siano effettivamente coordinate *cartesiane* omogenee, risulta che al piano all'infinito $t' = 0$ del secondo spazio Σ' corrisponde, nel primo spazio Σ, il piano $a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t = 0$, generalmente proprio, detto *piano limite*.

a) Se però i piani all'infinito dei due spazi si corrispondono, si ha un caso particolare di collineazione, detto *affinità*. Riferendo i punti di due spazi affini a due triedri cartesiani corrispondenti, l'affinità viene rappresentata, in coordinate cartesiane non omogenee, da equazioni del tipo

$$x' = lx, \quad y' = my, \quad z' = nz, \tag{1}$$

dove l, m, n sono tre costanti (cfr. n. 201).

Nell'affinità punteggiate corrispondenti sono simili, piani corrispondenti sono affini. Due rette o piani paralleli di Σ hanno per corrispondenti in Σ' rette o piani paralleli; ad un parallelepipedo corrisponde un parallelepipedo, ecc.

---

[1] Si può anche estendere il ragionamento più rapido contenuto nel n. 199, pur di valersi di coordinate proiettive.

È costante il rapporto tra i volumi di figure corrispondenti nei due spazi.

b) Un caso particolare notevole dell'affinità si presenta quando ogni angolo e (quindi) ogni diedro di Σ uguaglia il corrispondente angolo o diedro di Σ'; allora i due spazi diconsi *simili.*

Passa un rapporto costante k tra segmenti corrispondenti in una similitudine; aree corrispondenti hanno il rapporto costante k^2, e volumi corrispondenti stanno nel rapporto costante k^3. Le (1) rappresentano una similitudine se i due triedri coordinati sono uguali (ad es. ortogonali), e nelle (1) è $l = m = n\ (= k)$, le unità di lunghezza essendo le stesse per i due spazi.

c) Se finalmente il rapporto di similitudine k tra Σ e Σ' vale 1, i due spazi possono chiamarsi *uguali.* Devono però distinguersi la *uguaglianza diretta,* in cui figure corrispondenti sono sovrapponibili ed uno dei due spazi può considerarsi come una posizione assunta dall'altro mediante un movimento, e la *uguaglianza inversa,* in cui figure corrispondenti, pur avendo lati, angoli, diedri ordinatamente uguali, non sono in generale sovrapponibili, come avviene, ad es., per una figura solida e la sua immagine in uno specchio. Le relazioni

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

in coordinate cartesiane ortogonali, con una unica unità di lunghezza, rappresentano una uguaglianza diretta od inversa, secondo che i due triedri (formati dai semiassi positivi) xyz, $x'y'z'$ sono sovrapponibili o no (n. 99, *c*)).

Osservazione. — Una similitudine tra gli spazi Σ e Σ' determina una similitudine tra piani corrispondenti π, π'; essa dunque muta i punti ciclici di π nei punti ciclici di π' (n. 202, Oss.), e trasforma il luogo dei punti ciclici dello spazio, che è il *cerchio assoluto* all'infinito (n. 214), nel luogo stesso. Precisamente ogni punto dell'assoluto, considerato in Σ, sarà mutato dalla similitudine in un punto (generalmente diverso) dell'assoluto, considerato in Σ'. Viceversa: *una collineazione tra due spazi, che muti l'assoluto in sè stesso, è una similitudine.* Infatti, se π e π' sono due piani propri corrispondenti nella collineazione, i punti ciclici di π (comuni a π e all'assoluto) devono corrispondere ai punti ciclici di π' (comuni a π' e all'assoluto). Ma allora i due piani π, π' sono simili; angoli corrispondenti di essi sono uguali; donde si conclude, per l'arbitrarietà di π, che ogni angolo di Σ è uguale al corrispondente angolo di Σ', ecc.[1]

[1] Analiticamente il teorema si dimostra così. Premesso che la nostra collineazione deve mutare il piano dell'assoluto, cioè il piano all'infinito, in sè stesso, ed un triangolo su questo piano, autopolare rispetto all'assoluto, in un altro triangolo siffatto, quindi (n. 214) un triedro trirettangolo xyz, in un triedro trirettan-

*** 219. Elementi uniti in una collineazione.** — Diremo, al solito, che un elemento (punto, retta, o piano) è *unito* in una collineazione tra due spazi Σ, Σ', quando quell'elemento, considerato in Σ, ha per corrispondente sè stesso in Σ'.

La ricerca analitica dei punti uniti si compie collo stesso metodo seguito in geometria piana (n. 210). Posto che

$$\varrho x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \text{ ecc.} \tag{1}$$

siano le equazioni della collineazione (n. 217), si scrivano $x, \dots, t$ al posto di $x', \dots, t'$. Si otterranno così le equazioni

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} (a_{11}-\varrho)x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & + & a_{14}t & = & 0, \\ a_{21}x & + & (a_{22}-\varrho)y & + & a_{23}z & + & a_{24}t & = & 0, \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & (a_{33}-\varrho)z & + & a_{34}t & = & 0, \\ a_{41}x & + & a_{42}y & + & a_{43}z & + & (a_{44}-\varrho)t & = & 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

contenenti la incognita ausiliare ϱ, e le coordinate omogenee x, y, z, t di un punto unito. Eliminando queste ultime fra le (2), si perviene ad una equazione di quarto grado in ϱ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\varrho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-\varrho \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

la quale ha quattro radici $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3\ \varrho_4$. Sostituendo nelle (2), al posto di ϱ, uno dei valori trovati, ad es. ϱ_1, si ottengono quattro equazioni lineari ed omogenee in x, y, z, t, che si riducono a tre indipendenti (al più). Si potranno dunque calcolare i rapporti $x : y : z : t$, e si avrà in corrispondenza un primo punto unito. Analogamente, valendosi delle radici $\varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$, si trovano altri tre punti uniti. Dunque:

Una collineazione nello spazio ha (in generale) *quattro punti uniti, e* (per dualità) *quattro piani uniti.*

La determinazione analitica di questi ultimi si farebbe (cfr. n. 209, (2')) risolvendo il sistema delle quattro equazioni che si ottengono dalle (2),

---

golo $x'y'z'$, si assumano questi due triedri come fondamentali in due sistemi cartesiani di Σ, Σ'. Le equazioni della nostra collineazione (che è un'affinità) saranno allora del tipo

$$x' = lx, \quad y' = my, \quad z' = nz, \quad t' = t. \tag{1'}$$

Queste mutano l'assoluto di Σ', che ha le equazioni

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0, \quad t' = 0,$$

nella conica di Σ

$$l^2x^2 + m^2y^2 + n^2z^2 = 0, \quad t = 0.$$

Ma questa coincide coll'assoluto di Σ ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $t = 0$), solo quando $l^2 = m^2 = n^2$; ed allora le (1') rappresentano una similitudine.

sostituendo alle coordinate di punti le coordinate di piani, e mutando a_{ik} in a_{ki}; si arriverebbe dunque alla stessa equazione di quarto grado (3), di cui ogni radice fornisce insieme un punto unito ed un piano unito.

I quattro punti uniti di una collineazione, in generale distinti, sono vertici di un tetraedro, le cui facce sono i quattro piani uniti, ed i cui spigoli sono le sei rette unite della collineazione. I quattro punti, ed insieme i quattro piani, possono esser tutti reali, o due reali e due immaginari, o tutti immaginari. Ma può, in casi particolari, accadere che due, o tre, o quattro punti (e quindi piani) uniti vengano a coincidere, o che due punti (o piani) coincidano in un punto (piano), e due in un altro punto (piano); ciò, quando l'equazione (3) ha una radice doppia, tripla, quadrupla, o due radici doppie.

Particolarmente notevoli sono i casi, in cui la equazione (3) ammette una radice, sia ϱ_1, che annulli, non solo il determinante (3), ma pure tutti i minori del terzo ordine, od anche tutti i minori del secondo ordine, radice che, nel primo caso, si riconosce esser doppia, $\varrho_1 = \varrho_2$, e nel secondo caso tripla, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$. Sostituendo nelle (2) al posto di ϱ quella radice ϱ_1, delle quattro equazioni (2) due o, rispettivamente, tre diventano conseguenze delle rimanenti; ogni punto soddisfacente colle sue coordinat queste ultime equazioni soddisfa il sistema (2), ed è quindi unito. Nel primo caso dunque la collineazione ha, come uniti, tutti i punti di una retta, e (per la analogia che collega la ricerca analitica dei punti e piani uniti) tutti i piani passanti per una seconda retta; una tale collineazione dicesi *assiale*. Nel secondo caso la collineazione ha, come uniti, tutti i punti (e le rette) di un piano, e tutti i piani (e le rette) di una stella, e dicesi *omologia solida*.

A dimostrar la esistenza di questi due casi di collineazione, vale anche il ragionamento sintetico seguente.

*** 220. Omologia solida.** — Collo stesso ragionamento adoperato in geometria piana (n. 203) si dimostra che, se una collineazione tra due spazi ha cinque punti uniti, di cui mai quattro appartengano ad un piano, ogni altro punto è unito e la collineazione è la identità. Esclusa la identità dalle nostre considerazioni, la presenza di cinque o più punti uniti è possibile soltanto quando quattro almeno di questi punti stiano in un piano. Ma qui si possono fare due ipotesi:

a) o i quattro punti uniti, situati in un piano, sono tali che mai tre di essi siano allineati, ed allora ogni punto del piano è unito (n. 203);

b) oppure, dei quattro punti uniti, tre almeno stanno sopra una retta, ed allora ogni punto di questa è unito (n. 167).

Si conclude che una collineazione, non identica, nello spazio, la quale abbia più di quattro punti (o piani) uniti, ha come uniti tutti i punti di

(o i piani per) una retta, oppure tutti i punti di un piano (o i piani per un punto).

Esaminiamo anzitutto la ipotesi *a*), la quale conduce ad una particolare collineazione, detta omologia solida. Sia σ il *piano di omologia,* di cui sono uniti tutti i punti, e quindi tutte le rette. Presi nello spazio due punti corrispondenti distinti A, A', si dimostra, imitando l'analogo ragionamento di geometria piana (n. 205), che è unita la retta AA', ed è unito ogni piano per essa. La omologia possiede dunque infiniti piani uniti, i quali, per quanto sopra si disse, dovranno appartenere ad un fascio o ad una stella. Ma il primo caso si esclude, osservando che per un punto generico A dello spazio passano infiniti piani uniti. Si conclude dunque l'esistenza di un punto S, *centro di omologia,* tale che è unito ogni piano, e quindi ogni retta, per esso; anche il punto S è unito.

Risulta così che la omologia solida ha, come uniti, tutti i punti del piano di omologia σ, ed inoltre il centro di omologia S (che potrebbe eventualmente appartenere a σ); ha uniti tutti i piani per S ed il piano σ; finalmente ha unite tutte le rette di σ e le rette per S. All'infuori di questi, nessun altro elemento è unito nell'omologia; si dimostra col ragionamento analogo a quello tenuto in geometria piana (n. 205).

Procedendo come al n. 206, si dimostrano le seguenti proprietà dell'omologia:

Punti distinti, corrispondenti in una omologia solida, sono allineati col centro; piani distinti, corrispondenti, si segano sul piano di omologia; rette distinte, corrispondenti, si segano sul piano di omologia, e determinano un piano passante pel centro.

Una omologia è individuata quando di essa si conoscano il centro, il piano, e due punti corrispondenti allineati col centro, o due piani corrispondenti secantisi sul piano di omologia.

Un primo caso particolare metrico di omologia solida, detto *omotetia,* si presenta se il piano di omologia è all'infinito, mentre il centro è proprio. Nell'omotetia rette corrispondenti, o piani corrispondenti, sono paralleli tra loro; punti corrispondenti sono allineati col centro, e le loro distanze da questo stanno in un rapporto costante. Se, in particolare, questo rapporto vale — 1, i segmenti congiungenti punti omologhi sono bisecati dal centro, e la omotetia diventa la *simmetria rispetto ad un centro;* figure omologhe sono inversamente uguali.

Un secondo caso particolare metrico, detto *affinità omologica,* si presenta quando il centro di omologia è improprio ed il piano proprio. Tutti i segmenti che congiungono punti omologhi riescono paralleli, e sono divisi dal piano di omologia (ove lo incontrino) in un rapporto costante. Se questo rapporto vale — 1, e quei segmenti risultano perpendicolari al detto piano, si ha la *simmetria rispetto ad un piano,* nella quale figure corrispondenti sono inversamente uguali.

Finalmente, se il centro ed il piano di omologia sono impropri, la omologia diventa una *equipollenza,* collineazione nella quale tutti i segmenti congiungenti punti omologhi risultano equipollenti. Ogni figura può esser sovrapposta alla corrispondente mediante una *traslazione* (movimento in cui tutti i punti descrivono segmenti equipollenti); figure corrispondenti sono quindi direttamente uguali.

*** 221. Un esempio di collineazione assiale.** — Dovremmo discutere ora la ipotesi *b*) del n. precedente, relativa ad una collineazione che possiede una retta r composta di punti uniti. Si dimostra allora che la collineazione possiede pure una retta r', asse di un fascio di punti uniti. Ma poichè una siffatta collineazione, detta *assiale,* non interviene nel seguito del nostro corso, nè trova facili applicazioni, crediamo inutile di svilupparne la teoria, e preferiamo dimostrare sopra un esempio come essa possa realmente presentarsi.

Si immagini che lo spazio Σ (od una figura rigida in esso contenuta) ruoti di un certo diedro intorno ad una retta r, ed assuma, alla fine del movimento, la posizione Σ'. È chiaro che fra i due spazi Σ, Σ' passa una collineazione (uguaglianza), in cui sono uniti tutti i punti della retta r e tutti i piani normali ad r, i quali passano per una retta impropria r'_∞. Questa collineazione è dunque assiale.

Se però la rotazione è misurata da un diedro piatto, sono uniti inoltre tutti i punti di r'_∞ e tutti i piani per r, e si ha un esempio di una particolare collineazione (detta *biassale*), che ha, come uniti, tutti i punti di due rette r, r' e tutti i piani condotti per le rette stesse.

*** 222. Correlazioni nello spazio.** — Veniamo finalmente a trattare delle correlazioni nello spazio, di cui fu data la definizione al n. 215, *b*), e di cui il teorema del n. 216 dimostra l'esistenza.[1]

Un ragionamento, perfettamente analogo a quello tenuto nel n. 217, fa vedere che ogni correlazione fra lo spazio Σ descritto dal punto P (x, y, z, t), e lo spazio Σ' descritto dal piano π' (u', v', w', r'), è rappresentata da equazioni del tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho u' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \varrho v' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ \varrho w' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ \varrho r' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t, \end{cases}$$

[1] L'esistenza di una correlazione nello spazio (correlazione che muta una figura composta di n punti, n' rette, n'' piani, in una figura *duale* composta di n piani, n' rette, n'' punti) dà una nuova giustificazione della *legge di dualità nello spazio* (nn. 123, 139), giacchè ogni proprietà grafica della prima figura trova riscontro in una proprietà grafica duale della seconda.

dove ϱ è un fattore di proporzionalità non nullo, e le a_{ik} sono sedici costanti, costituenti un determinante del quarto ordine

$$A \neq 0. \tag{2}$$

Risolvendo le (1) rispetto ad x, y, z, t, si ottengono le relazioni

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma x = A_{11}u' + A_{21}v' + A_{31}w' + A_{41}r', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma t = A_{14}u' + A_{24}v' + A_{34}w' + A_{44}r', \end{array}\right. \tag{3}$$

(dove σ è un fattore di proporzionalità, e le A_{ik} sono i soliti complementi algebrici), le quali determinano il punto P di Σ quando sia noto il piano corrispondente π' di Σ'.

Finalmente se, dato un punto $R'(x', y', z', t')$ in Σ', si desidera il piano corrispondente $\varrho\ (u, v, w, r)$ in Σ, basta seguire il procedimento sviluppato in geometria piana al n. 210; si trovano così le formole

$$\left\{\begin{array}{l} \tau u = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' + a_{41}t', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau r = a_{14}x' + a_{24}y' + a_{34}z' + a_{44}t', \end{array}\right. \tag{4}$$

essendo τ un fattore di proporzionalità.

***223. Correlazioni involutorie.** — Stabilita una correlazione generica fra due spazi Σ, Σ' (che supporremo ora riferiti ad un unico triedro coordinato), un punto generico ha due piani corrispondenti *distinti*, secondo che quel punto vien considerato una prima volta in Σ, e trasformato mediante la correlazione diretta K, rappresentata dalle (1), colla quale si passa da Σ a Σ'; o vien considerato una seconda volta in Σ', e trasformato mediante la correlazione inversa K^{-1}, rappresentata dalle (4), che conduce da Σ' a Σ. Ciò risulta dalle formole stesse, perchè le (1) e le (4) forniscono risultati generalmente distinti (e non proporzionali), quando si ponga $x' = x,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t$.

Si può chiedere però se esista un punto $P \equiv R'$, tale che i due piani π' e ϱ, ad esso corrispondenti mediante K, K^{-1}, vengano a coincidere in un solo; nel qual caso potrà dirsi che quel punto corrisponde *doppiamente* a questo piano (cfr. n. 211). Ciò accade se le coordinate x, y, z, t del punto rendono proporzionali i secondi membri delle (1) e delle (4); vale a dire, indicando con k un fattore di proporzionalità non nullo, se quelle coordinate rendono

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = k(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z + a_{41}t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ossia

$$\left\{\begin{array}{l} (a_{11} - ka_{11})x + (a_{12} - ka_{21})y + (a_{13} - ka_{31})z + (a_{14} - ka_{41})t = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{41} - ka_{14})x + (a_{42} - ka_{24})y + (a_{43} - ka_{34})z + (a_{44} - ka_{44})t = 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

La coesistenza di queste equazioni, per valori non tutti nulli di x, y, z, t, esige l'annullarsi del determinante del sistema, cioè

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - ka_{11} & a_{12} - ka_{21} & a_{13} - ka_{31} & a_{14} - ka_{41} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{41} - ka_{14} & a_{42} - ka_{24} & a_{43} - ka_{34} & a_{44} - ka_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Si ha qui una equazione di quarto grado in k, la quale fornisce quattro radici k_1, k_2, k_3, k_4. Sostituendo nelle (5), al posto di k, una di queste radici, e risolvendo il sistema di equazioni che ne risulta, si trova un punto $(x : y : z : t)$ che soddisfa alla condizione richiesta. Dunque: *in una correlazione nello spazio esistono in generale quattro punti, ciascuno dei quali corrisponde doppiamente ad un piano.*

Può darsi però, in casi particolari, che esista un valore di k il quale annulli tutti i minori del terzo ordine, o del secondo ordine, od anche tutti gli elementi del determinante (6). Per quel valore di k il sistema (5) equivale, ordinatamente, ad un sistema di due, una, o nessuna equazione lineare omogenea in x, y, z, t (annullandosi nell'ultimo caso tutti i coefficienti delle (5)); il sistema stesso rappresenta dunque, rispettivamente, una retta, un piano, o lo spazio. Vuol dire che il punto generico di quella retta, o di quel piano, o dello spazio, gode la proprietà richiesta, cioè corrisponde doppiamente ad un piano.

Solo il terzo caso ci interessa. Quando esso si presenta, ogni punto dello spazio ha dunque un unico piano corrispondente, sia nella correlazione diretta K, sia nella inversa K^{-1}. Diremo allora che *la correlazione è involutoria* (identica colla sua inversa), adottando qui una locuzione che fu adoperata in casi analoghi (per es. al n. 211).

La condizione analitica affinchè tale sia la correlazione (1) è, come dicevamo, l'esistenza di un valore di k che annulli tutti gli elementi del determinante (6), vale a dire che soddisfi alle sedici relazioni

$$(7) \qquad a \quad - ka_{il} = 0, \qquad (i, l = 1, 2, 3, 4).$$

α) Ora, se uno almeno, a_{ii}, dei quattro elementi principali del determinante A non è nullo, la corrispondente relazione (compresa nelle (7))

$$a_{ii} - ka_{ii} = 0$$

ci fornisce $k = 1$; e questo valore, sostituito nelle altre relazioni (7), ci dà

$$(8) \qquad a_{il} = a_{li} \qquad (i, l = 1, 2, 3, 4).$$

Concludiamo che il determinante A della correlazione è, in tal caso, *simmetrico.*

β) Se invece $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$, dovrà esser diverso da

zero, per la (2), qualcuno degli altri elementi del determinante A. Sia, per es., $a_{12} \neq 0$. Allora la relazione

$$a_{12} - k a_{21} = 0,$$

compresa nelle (7), ci dice anzitutto che k ed a_{21} sono diversi da zero. Moltiplicando ora membro a membro la stessa relazione, scritta sotto la forma $a_{12} = k a_{21}$, per l'analoga $a_{21} = k a_{12}$, che è pur compresa fra le (7), si ottiene subito

$$k^2 = 1, \qquad \text{donde} \qquad k = \pm 1.$$

La soluzione $k = 1$ ci riconduce al caso α). La $k = -1$ ci dà invece

$$a_{ii} = 0, \quad a_{il} = -a_{li} \qquad (i, l = 1, 2, 3, 4) \tag{8'}$$

e conduce ad un determinante A *emisimmetrico*. Anche in geometria piana (n. 211) avevamo incontrato, accanto al caso α), questo secondo caso β); ma avevamo dovuto scartarlo, perchè allora A aveva l'ordine 3, ed i determinanti emisimmetrici d'ordine *dispari* sono nulli. Una tale esclusione non è più lecita nello spazio, perchè ora A è del *quarto* ordine, e non si annulla più in conseguenza delle sole ipotesi (8'). Dunque:

Nello spazio esistono due tipi, essenzialmente distinti, di correlazioni involutorie; il determinante della sostituzione lineare, rappresentante la correlazione, è simmetrico per le correlazioni del primo tipo, emisimmetrico per quelle del secondo tipo.

Le correlazioni del primo tipo, perfettamente analoghe a quelle esistenti nel piano (n. 212), prendono il nome di *correlazioni polari*, o *polarità nello spazio*. Le correlazioni del secondo tipo, che non hanno corrispondenze analoghe nel piano, diconsi, col MÖBIUS (1837), *correlazioni nulle* (per ragioni prese dalla statica, ove esse trovano applicazione), od anche *correlazioni focali*.[1]

È facile indicare un carattere geometrico, che permetta di distinguere le correlazioni polari dalle correlazioni nulle. Si ricerchi, a tal fine, il luogo di un punto (x, y, z, t) che appartenga al piano (u', v', w', r') ad esso corrispondente nella correlazione (1). Supposto di aver riferito i punti ed i piani ad un unico sistema di assi coordinati, e scritta quindi la condizione di appartenenza di punto e piano sotto la forma (n. 139)

$$u'x + v'y + w'z + r't = 0,$$

si osservi che questa, eseguendo le sostituzioni (1), diviene

$$a_{11}x^2 + \ldots + a_{44}t^2 + (a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz \ldots + (a_{34} + a_{43})zt = 0. \tag{9}$$

[1] Una corrispondenza di questo tipo fra punti e piani era già stata segnalata dal GIORGINI nel 1827.

Nelle ipotesi (8) la equazione stessa rappresenta una superficie del seeondo ordine

$$(10)\qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0.$$

Invece, nelle ipotesi (8'), si annullano tutti i coefficienti della (9), la quale è dunque soddisfatta delle coordinate di ogni punto dello spazio. Concludiamo:

Nella correlazione polare, quei punti che appartengono ai piani corrispondenti costituiscono una superficie di secondo ordine (superficie fondamentale della polarità). Al contrario, nella correlazione nulla ogni punto dello spazio appartiene al piano che gli corrisponde.

Le correlazioni nulle non intervengono nel seguito del corso; crediamo perciò inutile di esporne qui le proprietà, rinviando il lettore, che voglia formarsene un concetto, agli es. 16) — 19) seguenti il n. 224. Aggiungiamo invece qualche cenno sulle polarità, che ritroveremo poi nella teoria delle superficie del secondo ordine.

*** 224. Polarità nello spazio.** — Ricordo anzitutto che una polarità nello spazio è rappresentata da quattro relazioni del tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} \varrho u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varrho r = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t, \end{cases} \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

colla condizione

$$(2)\qquad A \neq 0,$$

o dalle relazioni, risolte rispetto alle coordinate di punti,

$$\begin{cases} \sigma x = A_{11}u + A_{21}v + A_{31}w + A_{41}r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma x = A_{14}u + A_{24}v + A_{34}w + A_{44}r. \end{cases} \qquad (A_{ik} = A_{ki})$$

Di due elementi, che si corrispondono in una correlazione polare, è inutile dire quale si consideri nel primo, e quale nel secondo dei due spazi sovrapposti; si dirà senz'altro che i due elementi sono mutuamente *polari*. Così, un punto ha un *piano polare* (determinato dalle (1)), un piano ha un *polo* (determinato dalle (3)), una retta r ha una *retta polare* r'.

La polarità, che muta una retta r nella retta r', muta ogni punto di r (o di r') in un piano passante per r' (o per r); dunque, *di due rette mutuamente polari ciascuna è il luogo dei poli dei piani passanti per l'altra.* Mentre un punto descrive la retta r, il piano polare ruota intorno alla retta r', generando un fascio proiettivo alla punteggiata su r.

In modo analogo si dimostrano i teoremi (cfr. n. 212):

Se di due punti il secondo appartiene al piano polare del primo, il primo apparterrà al piano polare del secondo; i due punti diconsi *coniugati,* o *reciproci,* nella polarità.

Se di due piani il secondo passa per il polo del primo, il primo passerà per il polo del secondo; i due piani diconsi *coniugati,* o *reciproci,* nella polarità.

Un punto è *autoconiugato* se esso appartiene al proprio piano polare; ora abbiamo visto, al n. 223, che *il luogo dei punti autoconiugati nella polarità* (1) *è la superficie del secondo ordine* (superficie *fondamentale* della polarità:

$$(10)\qquad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}t^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}xt+2a_{23}yz+2a_{24}yt+2a_{34}zt=0.$$

Dualmente un piano è *autoconiugato* se esso contiene il proprio polo. Per determinare l'inviluppo dei piani autoconiugati, si scriva la solita condizione di appartenenza di punto e piano $ux+vy+wx+rt=0$, ed in essa si sostituiscano, al posto delle coordinate (x, y, z, t) del polo, le loro espressioni (3). Fatti i calcoli, risulta l'equazione

$$(11)\qquad A_{11}u^2+A_{22}v^2+A_{33}w^2+A_{44}r^2+2A_{12}uv+2A_{13}uw+2A_{14}ur+2A_{23}vw+2A_{24}vr+2A_{34}wr=0,$$

rappresentante un inviluppo di seconda classe. Dunque: *i piani autoconiugati, in una polarità nello spazio, costituiscono un inviluppo doppiamente infinito di seconda classe* (inviluppo *fondamentale* della polarità).

Vedremo poi tra poco che, viceversa, una superficie di secondo ordine, od un inviluppo doppiamente infinito di seconda classe, determinano in generale una polarità di cui quella superficie, o questo inviluppo, sono fondamentali.

Esercizi. I. — 1) Una collineazione tra due spazi, la quale abbia come punti uniti i vertici di un tetraedro reale $XYZT$, è rappresentata da equazioni (*canoniche*) del tipo

$$(1)\qquad \rho x'=ax,\quad \rho y'=by,\quad \rho z'=cz,\quad \rho t'=dt,$$

quando i punti dei due spazi si riferiscano ad un unico sistema di coordinate proiettive avente quel tetraedro come fondamentale; a, b, c, d son costanti.

2) La collineazione (1) non ha altri punti uniti se a, b, c, d sono distinte fra loro. Ma se $a=b$, ogni punto $(x, y, 0, 0)$ dello spigolo XY è unito, ed è pure unito ogni piano $\lambda x+\mu y=0$ passante per lo spigolo opposto ZT. Si ha così un esempio di collineazione assiale; le rette congiungenti punti omologhi segano quest'ultimo spigolo, mentre le rette intersezioni di piani omologhi segano lo spigolo XY.

3) Si supponga ora che sia $a=b$, $c=d$, $a\neq c$; sono allora uniti tutti i punti e tutti i piani appartenenti all'uno, o all'altro, dei due spigoli XY, ZT, e

si ha una collineazione biassiale. Ogni retta congiungente due punti omologhi sega i due spigoli nominati in altri due punti, che con quelli formano un birapporto costante $\frac{a}{c}$ (*caratteristica*); la proprietà duale sussiste per la retta intersezione di piani omologhi.

4) Le proprietà enunciate permettono di costruire facilmente una collineazione biassiale determinata da due assi XY, ZT, reali e sghembi, e dal valore della caratteristica. Si esamini, in particolare, il caso che sia $a = -c$; allora le equazioni della collineazione possono scriversi sotto la forma

$$\rho x' = x, \quad \rho y' = y, \quad \rho z' = -z, \quad \rho t' = -t,$$

e la collineazione è *involutoria* (collineazione biassiale *armonica*). Si considerino inoltre i casi metrici che si presentano quando il sistema di coordinate è cartesiano ortogonale.

5) Se nelle (1) (es. 1)) si ha $a = b = c \neq d$, la collineazione, le cui equazioni possono scriversi sotto la forma

$$\rho x' = x, \quad \rho y' = y, \quad \rho z' = z, \quad \rho t' = kt,$$

è un'omologia col centro $(0, 0, 0, 1)$, col piano $t = 0$, e colla caratteristica k (cfr. n. 205). Se, in particolare, $k = -1$, l'omologia è *armonica* (cfr. n. 209, es. 7)), e fornisce un secondo tipo di collineazioni *involutorie* dello spazio. Si consideri, in particolare, la ipotesi che il tetraedro fondamentale abbia una delle sue facce (la $t = 0$, oppure la $z = 0$) all'infinito, nel qual caso le coordinate diventano cartesiane.

6) In coordinate cartesiane omogenee una omologia, il cui centro cada nell'origine, ha equazioni del tipo

$$\rho x' = x, \quad \rho y' = y, \quad \rho z' = z, \quad \rho t' = ax + by + cz + dt.$$

Qual'è il piano d'omologia? Qual'è la condizione perchè il detto piano passi per il centro d'omologia, e la omologia sia *speciale*?

7) Ogni collineazione involutoria dello spazio è una omologia armonica, o una collineazione biassiale armonica. [Sia K la collineazione involutoria, e siano AA', BB', ... coppie di punti distinti corrispondenti. Le rette AA', BB', ... sono unite. Se si segano a due a due, si ha una omologia (n. 220) armonica. Se invece due di esse sono sghembe, assumendo il tetraedro $AA'BB'$ come fondamentale di un sistema di coordinate proiettive, le equazioni della collineazione assumono la forma

$$\rho x' = ay, \quad \rho y' = bx, \quad \rho z' = ct, \quad \rho t' = dz,$$

dove $ab = cd$, perchè devono coincidere i punti corrispondenti al punto $(1, 1, 1, 1)$ in K e in K^{-1}. Mediante una trasformazione conveniente di coordinate, che alteri solo il punto unità, quelle equazioni si mutano nelle seguenti:

$$\rho X' = Y, \quad \rho Y' = \pm X, \quad \rho Z' = T, \quad \rho T' = \pm Z,$$

dove vanno scelti i segni superiori se $ab = cd > 0$, gli inferiori nel caso opposto. In ambedue i casi si ha una collineazione biassiale armonica, la quale, nel primo

caso, ha due assi reali ($X = Y$, $Z = T$), ($X = -Y$, $Z = -T$), e nel secondo due assi immaginari ($X = iY$, $Z = iT$), ($X = -iY$, $Z = iT$).

II. — 8) In una collineazione tra due spazi Σ, Σ', non affini, ogni punteggiata di Σ, parallela al relativo piano limite, è simile alla punteggiata corrispondente di Σ'. Ed in infiniti modi si possono costruire punteggiate corrispondenti uguali. Un piano di Σ, parallelo al relativo piano limite, è affine al piano corrispondente; e vi son due posizioni di quel piano per cui l'affinità riesce equivalente. In generale non esistono piani corrispondenti simili; se, in casi particolari, ne esiste una coppia, ne esistono infinite; allora si possono costruire piani corrispondenti uguali; e spostando lo spazio Σ', rispetto allo spazio Σ, si può ottenere che la collineazione diventi una omologia (cfr. n. 209, es. 13), 14)).

9) L'affinità tra due spazi Σ, Σ', riferiti a due triedri ortogonali corrispondenti, ha equazioni del tipo

$$x' = lx, \quad y' = my, \quad z' = nz.$$

Un segmento di Σ ha col corrispondente di Σ' un rapporto che dipende solo dalla direzione (cos α, cos β, cos γ) del primo segmento. Qual'è questo rapporto? quali sono le direzioni per cui il rapporto vale 1? Si troverà che le rette uscenti dalla origine di Σ, sostegni di punteggiate uguali alle corrispondenti in Σ', formano il cono di secondo ordine

$$(l^2 - 1)\,x^2 + (m^2 - 1)\,y^2 + (n^2 - 1)\,z^2 = 0,$$

cono immaginario se i tre coefficienti hanno lo stesso segno, reale in caso opposto, spezzato in due piani se uno dei coefficienti si annulla; nell'ultima ipotesi, ciascuno dei due piani è uguale al piano corrispondente. Si dimostri inoltre che ciascuno dei due piani

$$x\sqrt{l^2 - m^2} \pm z\sqrt{m^2 - n^2} = 0$$

(dove si può supporre $l \geqq m \geqq n$), e ciascuno dei piani paralleli in Σ, è simile al corrispondente piano in Σ'; il rapporto di similitudine vale m.

10) Riferiti due spazi affini Σ, Σ' ad un unico sistema di coordinate ortogonali, e scritte le equazioni della affinità sotto la forma

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b, \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, \end{aligned}$$

si osservi che le condizioni affinchè l'affinità muti il cerchio assoluto ($t = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$) in sè stesso sono

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = k^2, \quad \alpha_i\alpha_l + \beta_i\beta_l + \gamma_i\gamma_l = 0, \quad (i,\ l = 1,\ 2,\ 3)$$

dove k è una costante; il determinante dei coefficienti di x, y, z vale k^3. Soddisfatte quelle condizioni, ogni segmento di Σ' ha col segmento corrispondente di Σ il rapporto costante k; l'affinità è dunque una similitudine, e precisamente una uguaglianza se $k = 1$; nell'ultimo caso le formole scritte coincidono con quelle per la trasformazione ortogonale di coordinate (n. 100, es. 2)). La similitudine (od uguaglianza) è diretta od inversa, secondo che k è positivo o negativo.

11) Nell'uguaglianza diretta tra Σ e Σ' può esistere un punto unito reale e proprio U, nel qual caso esiste una retta u reale, uscente da U, i cui punti sono tutti uniti; facendo ruotare uno dei due spazi intorno ad u, di un angolo conveniente, si ottiene la sovrapposizione delle figure omologhe. Nella ipotesi opposta, esiste sempre almeno una retta reale propria unita u, sulla quale la corrispondenza tra Σ e Σ' subordina una uguaglianza diretta. Applicando ad uno dei due spazi un movimento di traslazione nella direzione u, si può ottenere che le due punteggiate uguali sopra u si sovrappongano, e si ricade nel caso precedente. Dunque: « Una figura nello spazio può sempre esser portata a coincidere con una seconda figura, direttamente uguale ad essa, mediante una traslazione parallela ad una retta determinata, seguita da una rotazione intorno a questa retta », o, brevemente, « mediante un movimento elicoidale intorno alla retta ». Si può anche dire: « ogni movimento nello spazio può essere sostituito da un movimento elicoidale intorno ad una retta determinata » (Mozzi, Chasles); il segmento che misura la traslazione, o l'angolo che misura la rotazione, si annullano in casi particolari. La retta nominata dicesi *asse* del movimento elicoidale; scegliendola come asse z, le relazioni che legano l'antica e la nuova posizione di uno stesso punto si presentano sotto la forma *c*) dell'es. 1) che segue il n. 100.

12) I segmenti AA', BB', ..., che congiungono punti corrispondenti di due figure direttamente uguali, hanno proiezioni ortogonali uguali sull'asse, e vengono proiettati dall'asse sotto angolo costante. I punti medi A_0, B_0, ... dei detti segmenti formano una nuova figura, che corrisponde alle due primitive in due affinità.

13) I segmenti congiungenti punti omologhi di due spazi, o di due figure, inversamente uguali, hanno i loro punti medi sopra uno stesso piano, o riuniti in un punto. Nell'ultimo caso le due figure sono simmetriche rispetto a questo punto; nel primo caso l'una figura può porsi in posizione simmetrica all'altra, rispetto a quel piano, mediante una rotazione intorno ad un asse normale al piano, o mediante una traslazione in una direzione parallela al piano.

III. — 14) Una correlazione tra due spazi Σ, Σ', la quale muti i vertici di un tetraedro, considerati in Σ, nelle facce opposte, considerate in Σ', è una polarità; assunto il tetraedro come fondamentale in un sistema di coordinate proiettive di punti e piani, le equazioni della correlazione prendono la forma

$$\rho u' = ax, \quad \rho v' = by, \quad \rho w' = cz, \quad \rho r' = dt,$$

dove a, b, c, d sono costanti (cfr. n. 214, es. 7)).

15) Una correlazione nulla è definita (n. 223) da equazioni del tipo:

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho u = & a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \rho v = -a_{12}x & + a_{23}z + a_{24}t, \\ \rho w = -a_{13}x - a_{23}y & + a_{34}t, \\ \rho r = -a_{14}x - a_{24}y - a_{34}z, \end{cases}$$

nell'ipotesi che il determinante dei coefficienti $(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})^2$ sia diverso da zero. Il piano π, che corrisponde al punto $P(x', y', z', t')$, ha, in coordinate variabili x, y, z, t, l'equazione

$$(2) \qquad \begin{aligned} &a_{12}(xy' - x'y) + a_{13}(xz' - x'z) + a_{14}(xt' - x't) + a_{23}(yz' - y'z) \\ &+ a_{24}(yt' - y't) + a_{34}(zt' - z't) = 0; \end{aligned}$$

il piano passa per il punto P, e dicesi *piano polare* del punto (*polo*) P nella correlazione nulla. Se il punto P descrive una retta r, il piano π ruota intorno ad una retta r' (*polare* di r), generando un fascio che è prospettivo alla punteggiata sopra r, se r ed r' sono sghembe. « Due rette polari, in una correlazione nulla, o sono sghembe, o coincidono ». Nell'ultimo caso r dicesi *direttrice* della correlazione nulla; ogni punto di r ha come polare un piano passante per r, e viceversa. « Ad ogni punto P, o ad ogni piano π, appartengono infinite direttrici formanti un fascio, il cui piano, o il cui centro, corrisponde nella correlazione al punto P, o al piano π ». L'insieme delle infinite direttrici di una correlazione nulla dicesi *complesso lineare di rette*; è questa la prima forma che si presenta nella geometria dello spazio rigato. La condizione perchè la retta congiungente i due punti (x, y, z, t), (x', y', z', t') sia direttrice della correlazione (1), è espressa dal verificarsi della (2).

16) Al piano all'infinito corrisponde, nella correlazione nulla, un punto improprio C_∞, *centro* della correlazione. Ogni retta s condotta per C_∞ (*diametro*) ha come polare una retta impropria s'_∞, e contiene quindi i poli di tutti i piani paralleli passanti per s'_∞. In particolare i piani normali ad uno, e quindi ad ogni diametro hanno i poli sopra un particolare diametro, che dicesi *asse* della correlazione nulla. Partendo dalle equazioni di questa, si troviuo le coordinate del centro e le equazioni dell'asse.

17) Assunto l'asse di una correlazione nulla come asse z di un sistema cartesiano ortogonale, le equazioni della correlazione prendono la forma

$$\rho u = a y, \quad \rho v = -a x, \quad \rho w = b t, \quad \rho r = -b z; \tag{1'}$$

quindi l'equazione non omogenea del piano polare del punto (x', y', z') è

$$(x y' - x' y) + k(z - z') = 0, \qquad \left(k = \frac{b}{a}\right); \tag{2'}$$

ed è pur questa la condizione perchè la retta congiungente i due punti (x, y, z), (x', y', z') sia direttrice. L'equazione (2') non si altera se al triedro degli assi si applica una traslazione parallela all'asse z, od una rotazione intorno all'asse z; ciò si verifica, sia eseguendo la relativa trasformazione di coordinate (che, ad es., nel primo caso è rappresentata dalle formole $z = Z + h$, $z' = Z' + h$), sia badando al significato geometrico dei binomi $xy' - x'y$, $z - z'$, il primo dei quali esprime il doppio della proiezione dí un'area triangolare, ecc. Segue che la correlazione nulla non è alterata nè da una traslazione parallela all'asse, nè da una rotazione intorno all'asse, nè, in generale, da un movimento elicoidale intorno all'asse. In altre parole: « un movimento elicoidale intorno all'asse, che porti un punto P in una nuova posizione P', sovrappone il piano polare di P al piano polare di P' ». Una qualsiasi retta perpendicolare all'asse può dunque scegliersi come asse coordinato x. Preso su questa retta il polo $(x', 0, 0)$, il piano polare ha, (2'), l'equazione $y = \frac{k}{x'} z$; esso passa per l'asse x, e forma col piano xy un diedro ω tale che $\operatorname{tg} \omega = \frac{x'}{k}$ (assumendo come positiva la rotazione che porta il piano xy a coincidere col piano xz). « Mentre un punto P descrive una retta per-

pendicolare all'asse di una correlazione nulla, il piano polare π di P ruota intorno a quella retta (che è una direttrice), ed il rapporto fra la distanza di P dall'asse e la tangente del diedro, che π forma con un piano normale all'asse, conserva un valore costante k» (MÖBIUS). La correlazione nulla è pienamente determinata quando sia noto l'asse ed il valore della costante k.

18) «Ad ogni spostamento di una figura nello spazio è collegata una determinata correlazione nulla, che ha per asse l'asse del movimento elicoidale atto a produrre quello spostamento (es. 11)); nella correlazione il punto medio del segmento, che congiunge le posizioni iniziale e finale di uno stesso punto mobile, ha come polare il piano perpendicolare al detto segmento nel punto medio nominato» (CHASLES). Se

$$x = X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi, \quad y = X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi, \quad z = Z + c$$

sono le relazioni che legano le posizioni iniziale e finale, ed (x_0, y_0, z_0) è il punto medio del segmento che le congiunge, il piano polare di esso ha l'equazione

$$(xy_0 - x_0y)\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \frac{c}{2}\ (z - z_0) = 0,$$

che definisce appunto la correlazione nulla.

PARTE QUARTA.

Curve di secondo ordine

Capitolo I.

Polarità definita dalla curva.

225. Cenno storico. — Più volte nel nostro corso ci accadde di nominare curve del secondo ordine. Tutti i metodi proposti per lo studio della geometria piana portarono il loro contributo alla teoria di queste curve, la quale può collocarsi tra le più perfette della Matematica. Accenniamo ai vari aspetti che la detta teoria successivamente assunse.

1) I geometri greci definivano le curve di secondo ordine come *sezioni piane del cono circolare,* proiettante un cerchio da un punto esterno al suo piano, vale a dire come curve prospettive di un cerchio; di qua il nome di *sezioni coniche,* o brevemente *coniche,* con cui le dette curve vennero indicate dai greci, nome che noi pure adotteremo. Le restrizioni relative alla natura del cono, od alla posizione del piano secante, che imponevano Menecmo (IV secolo av. Cr.) ed Euclide (verso il 300 av. Cr.), furono tolte da Apollonio (verso il 200 av. Cr.), il quale, nella sua grande opera sulle coniche (in otto libri, di cui sette sono pervenuti a noi), espose la maggior parte delle proprietà tuttora note di quelle curve, e propose i nomi di *ellisse, parabola* ed *iperbole,* per designarne le varie specie.

2) Apollonio deduceva dalla generazione delle coniche una proprietà che, tradotta coi simboli moderni, equivale ad una equazione di secondo grado fra le coordinate cartesiane di un punto descrivente la curva. E poichè, inversamente, ogni curva rappresentata da una equazione di secondo grado in coordinate cartesiane può riguardarsi (quando abbia punti reali) come sezione piana di un cono circolare, si definirono, in seguito a Fermat e Descartes (1637), le coniche come *curve del secondo ordine* (n. 43).

3) Introdotta sul principio del secolo XIX la nozione di corrispondenza proiettiva, dalla nota generazione del cerchio mediante due fasci uguali

di rette (n. 177), seguì subito che ogni conica, proiezione di un cerchio, poteva riguardarsi come *luogo delle intersezioni di rette corrispondenti in due fasci proiettivi.* Sussiste pure la proprietà inversa; quindi quella generazione può essere assunta come definizione delle coniche. Così fecero STEINER (nel 1832) e CHASLES (presso a poco nella stessa epoca) deducendo da essa, per via sintetica, tutte le proprietà delle dette curve.[1]

4) Nel piano di una conica, ad ogni punto corrisponde una determinata retta, *polare,* di cui si trova cenno in APOLLONIO, e di cui si occuparono DESARGUES (1639) e DE LA HIRE (1685). La correlazione polare, che lega le posizioni del punto e della retta, considerata da PONCELET e GERGONNE (fra il 1810 e il 1820), fu definita da STAUDT (1847) senza ricorrere alla teoria delle coniche (cfr. n. 212). Egli vide che il luogo di un punto appartenente alla propria retta polare è sempre una conica, e fu quindi condotto a definir le coniche come *curve fondamentali delle polarità piane,* offrendo così una ulteriore definizione di quelle curve, che presenta, sulle altre due definizioni sintetiche, il vantaggio di comprendere anche le coniche immaginarie.[2]

Noi però, disponendo delle coordinate, ricorreremo alla definizione analitica, che permette di ritrovare nel modo più semplice tutte le proprietà delle coniche.

226. Definizione delle coniche. — Noi adunque intendiamo per *conica* il luogo dei punti, reali o immaginari, soddisfacenti, colle loro coordinate cartesiane (ortogonali od oblique) x, y, ad una equazione di secondo grado a due variabili. L'equazione può contenere tre termini di secondo grado (x^2, xy, y^2), due termini di primo grado (x, y), un termine noto. La scriveremo così:

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$

le sei quantità a_{ik} sono coefficienti costanti che supporremo reali; alcune possono anche esser nulle.[3]

Talvolta ci converrà trasformare la (1) in coordinate cartesiane omogenee, il che si fa sostituendo, al posto di x, y, i rapporti $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, e moltiplicando per z^2; otteniamo così l'equazione *cartesiana omogenea* della conica

$$(1') \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

---

[1] Cfr. ad es. la *Geometria di posizione* di REYE.

[2] Si veda la *Geometria di posizione* di STAUDT, le *Lezioni di Geometria proiettiva* dell'ENRIQUES, ...

[3] La notazione a doppio indice adottata per i coefficienti, ed il fattore 2 premesso ad alcuni di quelli, giovano a dar maggiore simmetria alle formole.

la quale si presta a rappresentare anche i punti impropri della curva.[1] Ponendo 1 nella (1') al posto di z, si riproduce la (1).[2]

227. Esempi di coniche. — Per seguire sopra figure la teoria che esporremo ricordiamo che il cerchio è una particolare conica (n. 48); tali sono pure la ellisse, la parabola e la iperbole (n. 62).

Anche l'insieme di due rette

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$$

è una curva del secondo ordine (*degenere*) rappresentata dalla equazione (n. 43)

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)\ (\alpha' x + \beta' y + \gamma') = 0;$$

e viceversa, se il primo membro della (1) è il prodotto di due polinomi lineari in x, y, la linea corrispondente è una *coppia di rette*. Le due rette possono eventualmente coincidere, e si ha allora la *retta doppia*.

Avvertiamo infine che una conica, secondo la nostra definizione, può non possedere alcun punto reale (come ad es. la curva $x^2 + y^2 + 1 = 0$), o possederne uno solo (come la curva $x^2 + y^2 = 0$; cfr., per il cerchio, il n. 48). Tali curve immaginarie presentano in certe questioni lo stesso interesse delle curve reali; in altre, quando ad es. si tratti di costruzioni, saranno lasciate da parte.

228. Numero dei punti che individuano una conica. — Ci proponiamo ora di dedurre dall'equazione di una conica le principali proprietà della curva. Cominceremo a studiare le proprietà proiettive (Cap. I e II), dalle quali seguiranno facilmente le proprietà metriche.

Osserviamo anzitutto che l'equazione

$$(1) \qquad a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

di una conica dipende da sei coefficienti $a_{11}, \dots, a_{33}$, o, meglio, dai *cinque* rapporti di cinque di essi al rimanente, poichè tutta l'equazione può dividersi per questo, supposto non nullo. Segue che una conica può assoggettarsi a *cinque* condizioni, traducentisi in altrettante equazioni indipendenti fra i detti rapporti. Supponiamo, ad es., che siano dati cinque punti (x_i, y_i), dove $i = 1, 2, \dots 5$, per cui la conica (1) debba passare. Dovranno allora esser soddisfatte le cinque equazioni di condizione

$$a_{11} x_i^2 + 2 a_{12} x_i y_i + a_{22} y_i^2 + 2 a_{13} x_i + 2 a_{23} y_i + a_{33} = 0,$$

---

[1] La (1') fa vedere che gli indici 1, 2, 3 affissi ai coefficienti sono legati rispettivamente alle variabili x, y, z, di guisa che ciascun coefficiente ha gli indici relativi alle due variabili per cui viene moltiplicato; ad es., $a_{11} x x = a_{11} x^2$, $a_{12}(xy + yx) = 2 a_{12} xy$, ecc.

[2] Ricordando che il grado di una equazione non muta col passaggio da coordinate cartesiane a proiettive, potremo dire che la (1), o la (1'), rappresentano pure una conica, quando le variabili si riguardino come coordinate proiettive non omogenee, od omogenee.

le quali sono lineari ed omogenee rispetto ai coefficienti incogniti $a_{11}, \dots, a_{33}$.[1] Queste equazioni individueranno in generale i mutui rapporti delle incognite; ossia forniranno sei valori proporzionali ad $a_{11}, \dots, a_{33}$, valori che, sostituiti nella (1) al posto dei coefficienti, daranno l'equazione della conica richiesta. Dunque:

Per cinque punti del piano passa sempre una conica, ed in generale una sola.[2]

Osservazione. — La detta conica è unica, se le cinque equazioni di condizione sono indipendenti. Ma se una di esse è conseguenza delle altre quattro, allora succede che ognuna delle *infinite* coniche passanti per certi quattro A, B, C, D dei punti dati, passa per il quinto E. Ora ciò non è possibile se quei quattro punti sono vertici di un quadrangolo, perchè allora le due coniche composte, l'una delle rette AB, CD, l'altra delle rette AC, BD, non hanno un quinto punto E comune. E nemmeno ciò succede se i tre punti A, B, C appartengono ad una retta, non contenente nè D, nè E, perchè una conica composta di quella retta, e di una seconda retta condotta per D, ma non per E, passa per i primi quattro punti e non per il quinto. Ma se quattro almeno dei cinque punti sono allineati, allora esistono infinite coniche (spezzate in quella retta, e in una retta arbitraria per il punto rimanente) le quali contengono i cinque punti. Dunque: *la conica nominata nell'enunciato precedente è unica, tranne nel caso che quattro almeno dei cinque punti siano allineati.*

229. Intersezioni con una retta. — La ricerca delle intersezioni della conica (1) con una retta conduce a risolvere il sistema formato dalla (1) coll'equazione lineare della retta; se questa si risolve rispetto ad una variabile, ad es. rispetto alla y, e si sostituisce nella (1) il valore trovato al posto di y, si arriva in fine ad una equazione di secondo grado nella sola x. Segue di qua che le intersezioni cercate sono *due* (cfr. n. 45).

Volendo esaminare tutti i casi a cui il problema può dar luogo, supponiamo che la retta in questione sia l'asse delle x, $(y = 0)$; a questa ipotesi ogni altra può ridursi, pur di eseguire una trasformazione di coordinate, che non altera il grado della (1).

Posto $y = 0$ nella

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

otteniamo

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = 0, \tag{2}$$

---

[1] Ad es., la condizione perchè la conica (1) passi per l'origine (0, 0) è $a_{33} = 0$.

[2] Se dei cinque punti due cadono nei punti ciclici, si ha come corollario metrico (n. 129, Oss.) il noto teorema: *per tre punti passa un cerchio.*

equazione che dà due valori

$$x_1, x_2 = \frac{-a_{13} \pm \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}}{a_{11}},$$

ascisse delle intersezioni della conica coll'asse x. Queste sono reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie coniugate, secondo che $a_{13}^2 - a_{11}a_{33}$ è maggiore, uguale o inferiore a zero.

Se però nella (1) è $a_{11} = 0$, la (2) si abbassa a primo grado, e fornisce per x un solo valore $x = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}$; ma, ricorrendo allora all'equazione omogenea (1') della conica, si trova (per $y = 0$), in luogo della (2), l'equazione

$$(2') \qquad a_{11}x^2 + 2a_{13}xz + a_{33}z^2 = 0,$$

che rimane di secondo grado anche quando $a_{11} = 0$, e fornisce, in questa ipotesi, le due soluzioni

$$\left(\frac{x}{z} = -\frac{a_{33}}{2a_{13}}\right), \quad \left(x \text{ arbitrario}, z = 0\right).$$

La prima definisce il punto *proprio* già noto, mentre la seconda dà il punto *all'infinito* dell'asse x, che appartiene pure, nel caso presente, alla conica. Similmente, se $a_{11} = a_{13} = 0$, la (2) dà, in generale, un assurdo, mentre la (2') diviene $a_{33}z^2 = 0$ e fornisce (se $a_{33} \neq 0$) $z = 0$, x arbitrario; le due intersezioni della conica coll'asse x coincidono nel punto all'infinito del detto asse.

Le due ipotesi ora esaminate rientrano dunque, sotto l'aspetto proiettivo, nella teoria generale. L'unico caso di eccezione si presenta quando $a_{11} = a_{13} = a_{33} = 0$, perchè allora la (2), o (2'), diviene una identità, è soddisfatta da tutti i valori delle incognite. Vuol dire che ogni punto dell'asse x appartiene alla conica. D'altronde, in queste ipotesi, l'equazione (1) si riduce alla forma

$$y(2a_{12}x + a_{22}y + 2a_{23}) = 0,$$

e quindi la conica si spezza nelle due rette

$$y = 0, \qquad 2a_{12}x + a_{22}y + 2a_{23} = 0.$$

Estendendo ad una retta qualsiasi del piano i risultati ora ottenuti, concludiamo:

Una retta sega una conica in due punti, che possono esser reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati; a meno che la retta non abbia più di due, e quindi infiniti punti comuni colla conica, nel qual caso questa si spezza in quella retta e in una seconda retta (che potrebbe eventualmente coincidere colla prima).

Secondo che si presenta il primo, il secondo o il terzo dei tre casi enumerati nella prima parte dell'enunciato, la retta dicesi *secante, tangente*

od *esterna* (non secante) rispetto alla conica. E se è tangente, l'unico punto che essa ha in comune colla curva dicesi *punto di contatto*. Nel piano di una conica reale, non spezzata in rette, esistono rette secanti, tangenti ed esterne; e le tangenti rientrano, come risulterà in seguito, nella definizione che fu data al n. 47, partendo da concetti alquanto diversi.

Ma se la conica è tutta immaginaria, o si spezza in due rette, mancheranno alcune delle famiglie di rette sopra nominate. Così ad es., se la conica si compone di due rette reali uscenti da un punto O, ogni retta del piano è secante, tranne le rette del fascio O, che figurano come tangenti secondo la nuova definizione (mentre non soddisferebbero all'antica definizione di tangente).[1]

230. Le tre specie di coniche. — Abbandonando per un momento il campo proiettivo, cerchiamo le intersezioni di una conica colla retta all'infinito. Scritta perciò l'equazione della curva in coordinate *cartesiane omogenee*

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\,a_{12}xy + 2\,a_{13}xz + 2\,a_{23}yz = 0,$$

poniamo in questa $z = 0$. Troviamo[2]

$$(3') \qquad a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

donde si trae (se $a_{11} \neq 0$).

$$\frac{x}{y} = \frac{-\,a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}}}{a_{11}}.$$

Si hanno qui i rapporti delle prime due coordinate omogenee di due punti impropri. Questi sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati, secondo che l'espressione $a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}$ è positiva, nulla, o negativa.

Ora una conica dicesi *ellisse*, quando non sega in punti reali la retta all'infinito; *parabola*, quando la sega in due punti coincidenti, vale a dire quando la tocca in un punto; *iperbole*, quando sega quella retta in due punti reali e distinti.[3] Data l'equazione (1), o (1'), di una conica, si può subito assegnarne la specie in base al seguente criterio, dove la espressione sopra nominata apparisce col segno cambiato:

$$a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 \begin{cases} > 0 & \textit{ellisse}, \\ = 0 & \textit{parabola}, \\ < 0 & \textit{iperbole}. \end{cases}$$

---

[1] Questa contraddizione, limitata ad un caso particolarissimo, generalmente scartato, non dà mai luogo ad equivoci.

[2] L'equazione qui scritta, presa isolatamente, rappresenta le due rette proiettanti dall'origine i punti all'infinito della curva; presa insieme colla $z = 0$, definisce i punti all'infinito richiesti.

Queste definizioni si accordano con quelle del n. 62, come il lettore potrà verificare applicando il criterio ora stabilito alle equazioni ivi considerate.

La condizione per la parabola può anche esprimersi dicendo che il trinomio formato coi termini a secondo grado dell'equazione cartesiana non omogenea (1) deve essere un quadrato perfetto.

Le tre specie di coniche hanno le *identiche* proprietà proiettive, sicchè non occorrerà trattarle separatamente finchè rimarremo nel campo proiettivo; differiscono invece sia per la forma, sia per talune proprietà metriche.[1]

Esercizi. — I. 1) Scrivere le equazioni delle coniche passanti per i seguenti gruppi di cinque punti: *a*) (0, 0), (2, 0), (0, — 3), (1, 1), (1, — 1); *b*) (1, 0), (0, 2), (2, 3), punti all'infinito degli assi x, y; *c*) (0, 0), (1, 0), (0, — 3), punti all'infinito delle due bisettrici degli angoli $\widehat{xy}$.

2) Le coniche dell'es. 1) sono ellissi, parabole, o iperboli?

3) Determinare le intersezioni della conica $x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 6y + 3 = 0$ cogli assi coordinati, colle rette $x + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$, colla retta all'infinito.

4) Scrivere la equazione di una parabola passante per i punti (1, 0), (2, 0), (0, 1), (0, 4); quante soluzioni ha il problema?

5) Qual'è la condizione perchè la conica $a_{11}x^2 + \ldots = 0$ sia tangente all'asse x, o all'asse y? quali sono le condizioni perchè il punto di contatto abbia coordinate assegnate $(\alpha, 0)$, o $(0, \beta)$? quali condizioni perchè la conica tocchi la retta all'infinito in un dato punto $(\alpha, \beta, 0)$?

6) In particolare, come si presenta l'equazione di una conica che tocchi nell'origine l'asse x, o l'asse y? e la equazione di una conica che tocchi uno degli assi nel punto all'infinito?

7) Scrivere la equazione di una conica (iperbole) che passi per i punti (0, 1), (0, 3), (2, 2), e tocchi l'asse x nel punto all'infinito.

8) Scrivere la equazione di una parabola che passi per i punti (0, 0), (2, 0), (0, 3), e tocchi la retta all'infinito nel punto situato sulla bisettrice dell'angolo $\widehat{xy}$.

9) Dimostrare che la equazione di una conica tangente agli assi x, y nei loro punti all'infinito, vale a dire di una iperbole avente come asintoti[2] gli assi coordinati, si presenta sotto la forma $2a_{12}xy + a_{33} = 0$, ossia $xy =$ costante (cfr. n. 63, es. 2)). Quale proprietà ne segue relativamente al parallelogramma formato dalle coordinate di un punto?

10) Dimostrare che una parabola, la quale passi per l'origine toccando ivi l'asse y, e tocchi la retta all'infinito nel punto all'infinito dell'asse x, ha una equazione del tipo $a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$, ossia $y^2 = 2px$, dove p è una costante (cfr. n. 62); in questo sistema di riferimento l'ascissa è dunque proporzionale al quadrato dell'ordinata.

---

[1] Nella discussione si è supposto $a_{11} \neq 0$. Ma se fosse $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, si risolverebbe la (3') rispetto ad $\frac{y}{x}$, arrivando alle stesse conseguenze. Finalmente se $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$, risulta direttamente dalla (3') che la conica passa per i punti all'infinito degli assi, ed è quindi una iperbole, mentre, d'altra parte, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -a_{12}^2 < 0$.

[2] Per *asintoto* di una iperbole si intende, come poi diremo, la tangente alla conica in un punto all'infinito.

11) Scrivere la equazione di una parabola, che tocchi gli assi x, y in punti dati $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$, rispettivamente; si dimostri che, delle due equazioni soddisfacenti al problema, una rappresenta la congiungente i due punti contata due volte.

II. — 12) Si dimostri che la equazione, in coordinate proiettive omogenee, di una conica passante per i vertici del triangolo fondamentale si presenta sotto la forma

$$\alpha yz + \beta zx + \gamma xy = 0,$$

dove α, β, γ sono coefficienti.

13) Come si comporta la conica

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy = 0$$

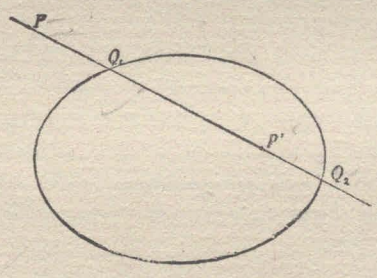
rispetto ai lati del triangolo fondamentale?

14) La equazione di ogni conica tangente ai due lati $x = 0$, $y = 0$ del triangolo fondamentale, nei vertici situati sopra il terzo lato $z = 0$, è $2\lambda xy + uz^2 = 0$.

231. Intersezioni di una conica colla retta congiungente due punti. — Il problema del n. 229 può esser pure trattato per la via seguente, che ha il pregio di condurre a notevoli proprietà delle coniche.

Partiamo dall'equazione della curva in coordinate omogenee (cartesiane o proiettive); se indichiamo brevemente con $f(x, y, z)$ il primo membro di quella, potremo scrivere

$$(1) \qquad f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0.$$



Nelle formole che troveremo converrà talvolta, per simmetria, scrivere a_{21}, a_{31}, a_{32} al posto di a_{12}, a_{13}, a_{23}; stabiliamo dunque che sia $a_{hk} = a_{kh}$ $(h, k = 1, 2, 3)$. Si fissi ora nel piano una retta coll'assegnare le coordinate di due suoi punti $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$; allora ogni punto Q della retta avrà coordinate nel tipo (n. 133, δ))

$$Q(kx + x', \quad ky + y', \quad kz + z'),$$

dove k è un parametro che varia da punto a punto. Volendo determinare le intersezioni della retta PP' colla conica (1), occorre esaminare per quali valori di k le coordinate di Q soddisfino la (1); per quali valori adunque risulti

$$f(kx + x', ky + y', kz + z') \equiv a_{11}(kx + x')^2 + \ldots = 0.$$

Sviluppando ed ordinando secondo le potenze decrescenti di k, si trova

$$(2) \qquad k^2 f(x, y, z) + 2kf\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} + f(x', y', z') = 0,$$

dove $f(x, y, z), f(x', y', z')$ sono i valori assunti dal polimonio (1) quando in luogo delle variabili si sostituiscano le coordinate di P o di P', e dove inoltre si è posto per brevità

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} &\equiv a_{11}xx' + a_{22}yy' + a_{33}zz' + a_{12}(xy' + yx') \\ &\quad + a_{13}(xz' + zx') + a_{23}(yz' + zy') \\ &\equiv (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)x' \\ &\quad + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)y' \\ &\quad + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)z' \\ &\equiv (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')x \\ &\quad + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')y \\ &\quad + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')z. \end{aligned}\right.$$

Sul polinomio stesso va notato:

1) che esso è lineare e simmetrico rispetto alle due terne di valori (x, y, z), (x', y', z'), prese separatamente (come dimostra la prima espressione del polinomio);

2) che, ordinato ad es. secondo x', y', z' (come nella seconda espressione), i coefficienti rispettivi sono le semiderivate parziali di $f(x, y, z)$, prese rispetto ad x, y, z; [1]

3) che, se si suppongono le tre quantità x', y', z' identiche rispettivamente alle tre x, y, z, il polinomio (3) si riduce al polinomio $f(x, y, z)$.

La (2) è una equazione di secondo grado in k. Se k_1, k_2 ne sono le radici, i punti Q_1, Q_2, comuni alla curva ed alla retta PP', avranno le coordinate

$$Q_1(k_1x + x', \quad k_1y + y', \quad k_1z + z'),$$
$$Q_2(k_2x + x', \quad k_2y + y', \quad k_2z + z').$$

Così, anche per questa via, resta confermato che una conica è segata in due punti (reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari) da una retta.

Osservazione. — Se si adottano i simboli $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ per indicare le derivate parziali del polinomio f prese rispetto ad x, o y, o z, e con $\frac{\partial f}{\partial x'}, \ldots$ si designano i valori assunti dalle derivate stesse quando al po-

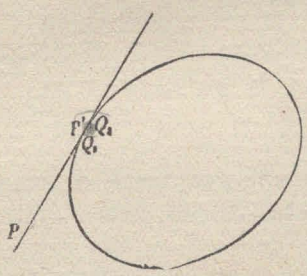
---

[1] Adottando la segnatura delle derivate parziali indicata al n. 47, la seconda espressione del polinomio $f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix}$ si presenta sotto la forma $\frac{1}{2}(x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z)$; e la terza espressione si deduce dalla seconda scambiando le x, y, z colle x', y', z'.

sto di x, y, z si sostituiscano x', y', z', le due ultime espressioni del polinomio (3) possono presentarsi così:

$$2f\begin{pmatrix} x, & y, & z, \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} \equiv x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$\equiv x \frac{\partial f}{\partial x'} + y \frac{\partial f}{\partial y'} + z \frac{\partial f}{\partial z'}.$$

232. Tangente. — Se il punto $P'(x', y', z')$ è un punto della conica, allora $f(x', y', z') = 0$; quindi l'equazione (2) manca del termine noto ed ha una radice $k_1 = 0$; il punto Q_1 coincide con P'. L'altra radice k_2, in generale diversa da zero, corrisponde alla seconda intersezione Q_2 di PP' colla curva.



Ma se anche $k_2 = 0$, le due intersezioni Q_1, Q_2 della retta PP' colla conica coincidono in P', e la retta è tangente ivi alla conica. D'altronde, in questa ipotesi, l'equazione (2), avendo nulle le due radici, mancherà pure del secondo termine. Ne segue che

$$(4) \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} = 0,$$

ossia

$$(4') \qquad (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\,x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\,y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\,z = 0,$$

od anche

$$(4'') \qquad \frac{\partial f}{\partial x'}x + \frac{\partial f}{\partial y'}y + \frac{\partial f}{\partial z'}z = 0$$

è la condizione affinchè il punto $P(x, y, z)$ stia sulla tangente alla conica nel punto $P'(x', y', z')$, è la *equazione della tangente alla curva* in questo punto.

Concludiamo: *fra le infinite rette passanti per un punto P' di una conica, ve n'è una determinata che tocca ivi la curva; e l'equazione di questa tangente si forma attribuendo come coefficienti alle variabili, x, y, z, i valori assunti dalle semiderivate, o derivate, parziali del polinomio $f(x, y, z)$, quando in esse si sostituiscano le coordinate del punto di contatto.*

La tangente in P' è indeterminata quando quelle tre semiderivate si annullano per le coordinate di P'; ciò, come vedremo, accade nel solo caso che la conica si spezzi in due rette uscenti da P'.

Osservazione. — Se la curva è data mediante una equazione in coordinate non omogenee, l'equazione della tangente in un suo punto $P'(x', y')$

si ottiene dalla (4') ponendo $z = z' = 1$. Si giunge pure a comporre questa equazione ricordando una delle due regole seguenti, che il lettore vedrà equivalere a quella sopra esposta (tenendo conto, per la prima di esse, che x', y' soddisfano l'equazione della curva).

1) Si formino le derivate, o semiderivate, parziali del primo membro dell'equazione della curva rispetto ad x, y, si sostituiscano in quelle le coordinate del punto di contatto, si moltiplichino ordinatamente i valori ottenuti per $x - x'$ ed $y - y'$, e si uguagli a zero la somma dei prodotti (cfr. n. 47, (3')); in simboli

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})\,(x - x') + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})\,(y - y') = 0$$

ossia, intendendo momentaneamente con $f(x, y)$ il primo membro dell'equazione *non omogenea* della conica,

$$\frac{\partial f}{\partial x'}(x - x') + \frac{\partial f}{\partial y'}(y - y') = 0.$$

2) Nella equazione della curva si sostituiscano:

al posto di	x^2,	$2xy$,	y^2,	$2x$,	$2y$,
rispettivamente	xx',	$xy' + yx'$,	yy',	$x + x'$,	$y + y'$.

e si troverà l'equazione sotto la forma

$$a_{11}xx' + a_{12}(xy' + yx') + a_{22}yy' + a_{13}(x + x') + a_{23}(y + y') + a_{33} = 0.$$

In un modo o nell'altro il lettore vedrà, ad es., che la conica passante per l'origine

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

ha come tangente ivi la retta

$$a_{13}x + a_{23}y = 0,$$

la cui equazione si ottiene annullando l'insieme dei termini a primo grado dell'equazione della curva.[1]

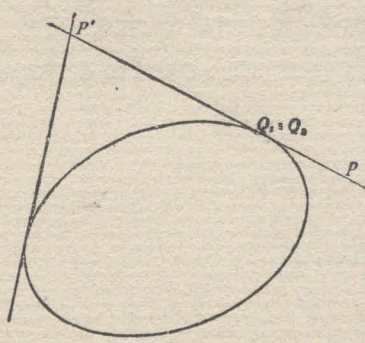
*** 233. Coppia di tangenti ad una conica uscenti da un punto.** — Ritornando alla (2) (n. 231), abbandoniamo la ipotesi che $P'(x', y', z')$ sia un punto della curva (1). Se $P(x, y, z)$ è un punto qualsiasi di una tan-

[1] Un altro esempio è offerto dall'equazione della tangente ad un cerchio, n. 55.

gente condotta da P' alla conica, le due intersezioni Q_1, Q_2 della retta PP' colla conica coincidono, e quindi l'equazione (2) ha una radice doppia. Ora, perchè ciò accada deve essere

$$(5) \qquad f(x, y, z) \cdot f(x', y', z') - \left\{ f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} \right\}^2 = 0.$$

Questa è una equazione di secondo grado in x, y, z, la quale è soddisfatta dalle coordinate di ogni punto P situato sopra una tangente condotta alla conica dal punto fisso P'. Dunque la (5) rappresenta il gruppo delle tangenti uscenti da P', anzi la *coppia* di tangenti, essendo la (5) di *secondo* grado. Concludiamo che: *da un punto (reale) del piano si possono condurre due tangenti ad una conica, le quali possono essere reali e distinte, o reali e coincidenti, o immaginarie* (coniugate). Nel primo caso il punto dicesi *esterno* rispetto alla curva, nel terzo caso *interno*, nel secondo caso (come risulterà dal seguito) il punto appartiene alla curva. È del resto evidente che, se P' appartiene alla conica, le due tangenti uscenti da P' coincidono colla tangente ivi; e la (5) si riduce a



$$\left\{ f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} \right\}^2 = 0,$$

che rappresenta appunto la detta tangente contata due volte.

Comunque sia situato P', i punti di contatto delle tangenti alla conica uscenti da esso devono avere tali coordinate (x, y, z) da soddisfare la (5) e la equazione della curva $f(x, y, z) = 0$. Tenuto conto dell'ultima relazione, la (5) si riduce a

$$(4) \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} = 0,$$

donde segue che le coordinate dei detti punti verificano anche la (4), la quale rappresenta una retta, quando si riguardino le x, y, z come variabili. I punti di contatto sono adunque le intersezioni della conica colla retta (4), di cui vedremo subito il significato geometrico

Osservazione. — Impareremo in seguito a spezzare una equazione di secondo grado rappresentante una coppia di rette, come la (5), nelle equazioni delle due rette componenti. Per ora, volendo le equazioni staccate dalle tangenti condotte da un punto P' ad una conica, potremo seguire

quest'altra via, che è spesso preferibile a quella sopra indicata quando l'equazione della curva sia data con coefficienti numerici, ad es. in coordinate non omogenee: $f(x, y, 1) = 0$. Riguardiamo come incognite le coordinate (x_0, y_0) di un punto di contatto. Scritta l'equazione della tangente in questo punto $f\begin{pmatrix} x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \end{pmatrix} = 0$, esprimiamo che essa deve passare per il punto $P'(x', y')$; troveremo così una prima equazione $f\begin{pmatrix} x', & y', & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \end{pmatrix} = 0$ (equivalente alla (4)), a cui devono soddisfare le incognite. Una seconda equazione tra queste è la $f(x_0, y_0, 1) = 0$, ottenuta esprimendo che il punto (x_0, y_0) sta sulla curva. Risolvendo insieme le due equazioni otterremo due sistemi di soluzioni (x_0, y_0), che, sostituiti successivamente nella equazione della tangente, daranno le due tangenti richieste.

234. Punti coniugati rispetto ad una conica. — Siamo ora condotti a chiederci quale sia il significato geometrico della relazione

$$f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} = 0, \tag{4}$$

nella ipotesi che $P'(x', y', z')$ sia un punto qualsiasi del piano.

Riprendiamo perciò la (2), (n. 231), da cui dipendono le intersezioni Q_1, Q_2 della retta PP' colla conica, e notiamo che, se sussiste la (4), le radici k_1 e k_2 della (2) sono uguali in valore assoluto, ma di segno opposto, ed il loro rapporto vale quindi -1. Vuol dire che i punti Q_1, Q_2 separano armonicamente i punti P e P' (n. 145, *b*)); od anche, che P e P' separano armonicamente le intersezioni Q_1, Q_2 della conica colla loro congiungente; e viceversa.

Ora si dice che *due punti P e P' sono coniugati (o reciproci) rispetto ad una conica, quando essi dividono armonicamente le intersezioni della loro congiungente colla curva.* Concludiamo che *la* (4) *esprime la condizione affinchè i punti (x, y, z) ed (x', y', z') siano coniugati rispetto alla conica* (1).

Sia dalla definizione, sia dalla simmetria con cui entrano nella (4) le due terne di coordinate, risulta che la condizione di coniugio di due punti P e P' è *simmetrica;* e si esprime pure dicendo che *P' è coniugato di P,* o che *P è coniugato di P'.*

Sopra ogni retta del piano esistono infinite coppie di punti coniugati, le quali formano una involuzione avente come punti doppi le intersezioni colla conica; l'involuzione è iperbolica, parabolica od ellittica, secondo che la retta è secante, tangente od esterna. I punti coniugati di sè stessi, od autoconiugati, sono i punti della conica; ciò risulta pure dal fatto che, se P' coincide con P, la (4) si identifica colla (1).

235. Polare di un punto; polo di una retta. — Su ciascuna retta uscente dal punto fisso $P'(x', y', z')$ esiste un punto $P(x, y, z)$ coniugato di P' rispetto alla conica. Qual'è il luogo dei punti P al variare della retta?

L'equazione (4), che è soddisfatta dalle coordinate variabili (x, y, z) di P, è lineare rispetto a queste, e può scriversi:

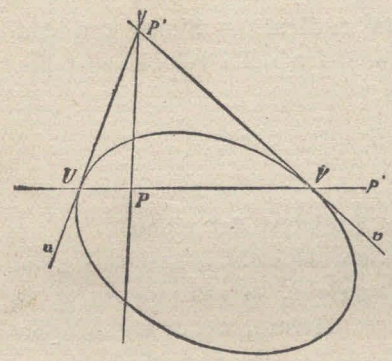
$$(4') \qquad (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\,x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z')\,y + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\,z = 0.$$

ossia

$$(4'') \qquad \frac{\partial f}{\partial x'}x + \frac{\partial f}{\partial y'}y + \frac{\partial f}{\partial z'}z = 0.$$

Essa rappresenta dunque una retta.

Il luogo dei punti coniugati di un punto fisso rispetto ad una conica è una retta, che dicesi la polare di quel punto rispetto alla conica. Il punto dicesi, alla sua volta, *polo* della retta.



L'equazione (4'), quando P' sia un punto della curva, rappresenta la tangente ivi alla curva; perciò riguarderemo *come polare di un punto della conica la tangente ivi alla conica.*

Ogni punto P' ha una determinata polare p'. L'affermazione soffrirebbe eccezione veramente se le coordinate di P' annullassero i tre trinomi che entrano nella (4'); ma allora dovrebbe esser nullo il determinante dei coefficienti di questi, caso che per ora escludiamo, come sarà avvertito tra poco.

Avrà ogni retta un determinato polo? Paragonando l'equazione della retta

$$u\,x + v\,y + w\,z = 0$$

colla (4'), vediamo che le coordinate (x', y', z') del polo devono soddisfare alle equazioni

$$(6) \qquad \begin{cases} \varrho\,u = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ \varrho\,v = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ \varrho\,w = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{cases}$$

dove ϱ è un coefficiente di proporzionalità. Le (6) determinano, a meno di un fattore, x', y', z', e quindi il polo della retta. Ciò almeno nella ipotesi che sia *diverso da* 0 il determinante

$$(7) \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ipotesi che sarà sottintesa nei paragrafi seguenti, finchè non si dichiari il contrario.[1]

Il determinante simmetrico A, che risulta dall'eliminazione delle variabili fra le tre semiderivate parziali della equazione (1), dicesi *discriminante della* (1), o della conica corrispondente.[2]

Le coordinate del polo, ottenute risolvendo le (6), sono espresse da

$$(8)\qquad \begin{cases} \sigma x' = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w, \\ \sigma y' = A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w, \\ \sigma z' = A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w, \end{cases}$$

dove A_{hk} $(= A_{kh})$ è il compimento algebrico dell'elemento a_{hk} $(= a_{kh})$ entro al determinante A, ed è σ un fattore di proporzionalità.

*** 236. Equazione tangenziale di una conica.** — Il polo (x', y', z') non appartiene in generale alla retta polare, le cui coordinate sono u, v, w (n. 130). Perchè vi appartenga, è necessario e sufficiente che sia (n. 132)

$$(9)\qquad u x' + v y' + w z' = 0.$$

Ora, se in questa sostituiamo, al posto di u, v, w, le loro espressioni (6) in funzione di x', y', z', troviamo che la (9) diviene $f(x', y', z') = 0$. Dunque: se un punto appartiene alla propria polare, esso sta sulla conica; e viceversa. Ciò, del resto, risultava pure dalla definizione di polare.

Noi possiamo però sostituire, una seconda volta, nella (9), al posto delle coordinate del polo x', y', z', le loro espressioni (8) in funzione delle coordinate della polare. Eseguiti gli sviluppi, vediamo che le coordinate u, v, w di ogni retta contenente il proprio polo soddisfano la equazione

$$(10)\qquad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw = 0.$$

Queste rette costituiscono adunque un inviluppo di seconda classe (n. 131), di cui è facile stabilire il significato geometrico. Notiamo perciò che, se una retta p appartiene al detto inviluppo, essa, per ipotesi, contiene il proprio polo P, il quale (giacendo sulla propria polare) starà sulla conica (1); ma allora p è tangente alla conica in P (n. 235); e viceversa. Dunque la (10) rappresenta l'inviluppo delle tangenti alla nostra conica (1); donde il risultanto fondamentale:

Le tangenti ad una conica (di discriminante non nullo) formano un inviluppo di seconda classe.

---

[1] Risulterà poi che con tale restrizione si escludono soltanto le coniche degeneri, le quali presentano interesse secondario.

[2] In generale, data una funzione razionale intera ed omogenea di n variabili, dicesi *discriminante* il risultante delle n derivate parziali della funzione rispetto alle variabili; il discriminante uguagliato a zero esprime dunque la condizione perchè quelle n derivate si annullino insieme per un sistema di valori non tutti nulli delle variabili. Ad es. il discriminante di $ax^2 + 2bxy + cy^2$ è il risultante delle due funzioni $ax + by$, $bx + cy$, ossia $ac - b^2$; ecc.

L'equazione (10) *di questo* (o, come si suol dire, l'equazione *tangenziale*, o *plückeriana*, della conica) *si ottiene dall'equazione puntuale* (1) *della conica, sostituendo alle coordinate di punti le coordinate di rette, ed ai coefficienti i rispettivi complementi algebrici estratti dal discriminante.*[1]

Sussiste pure la proposizione duale, che si dimostra con analoghe considerazioni: *I punti di contatto di un inviluppo di seconda classe (la cui equazione abbia il discriminante non nullo) formano una curva di secondo ordine.* L'equazione della curva si ricava dall'equazione dell'inviluppo in modo analogo a quello ora indicato. In particolare, si verifica che questo procedimento, applicato al primo membro della (10), riconduce al primo membro della (1) moltiplicato per A.

237. Polarità piana. — Riassumendo gli ultimi risultati possiamo dire:

Una conica (di discriminante non nullo) determina nel suo piano una corrispondenza, la quale muta ogni punto del piano nella propria polare, ed ogni retta nel proprio polo; in particolare, ogni punto della conica corrisponde alla propria tangente, e viceversa.

La corrispondenza di cui parla il teorema è una speciale correlazione detta *polarità*. Essa fu esaminata al n. 212. Ma, anche senza ricorrere alle considerazioni fatte allora, possiamo stabilirne direttamente le proprietà essenziali.

Dimostriamo, a tal fine, i due teoremi seguenti:

Se di due punti il secondo appartiene alla polare del primo, il primo apparterrà alla polare del secondo; i due punti sono *coniugati*, o *reciproci*, rispetto alla conica.

Se di due rette la seconda passa per il polo della prima, la prima passerà per il polo della seconda; le due rette diconsi *coniugate*, o *reciproche*, rispetto alla conica.

Il teorema di sinistra segue dal fatto che se il punto P' appartiene alla polare di P, il punto P' è coniugato di P (n. 235), quindi P è coniugato di P' e sta sulla polare di P'.

Si deduce per assurdo il teorema di destra; infatti, ammesso che di due rette p e p' la seconda contenesse il polo P della prima, ma non

[1] Un'altra forma sotto cui si suole scrivere l'equazione tangenziale della conica, è la seguente, che si riconosce, mediante sviluppo, non differire dalla (10):

$$\begin{vmatrix} 0 & u & v & w \\ u & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ v & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ w & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

questa il polo P' di quella, i due punti P e P' soddisferebbero all'ipotesi del teorema di sinistra, senza soddisfare alla tesi.[1]

Seguono i teoremi:

Se un punto descrive una punteggiata sopra una retta, la polare del punto ruota intorno al polo della retta, descrivendo un fascio proiettivo alla punteggiata.

Se una retta descrive un fascio intorno ad un punto, il polo della retta percorre la polare del punto, descrivendo una punteggiata proiettiva al fascio.

Che il fascio e la punteggiata siano proiettivi può dimostrarsi così. Siano

$$(x', y', z'), \quad (x'', y'', z''), \quad (x' + h x'', \ldots), \quad (x' + k x'', \ldots)$$

quattro punti allineati. Formiamo anzitutto, secondo la nota regola, le equazioni delle polari dei primi due punti ed indichiamole abbreviatamente con $p' = 0$, $p'' = 0$. Si vede allora che le polari degli ultimi due punti hanno le equazioni $p' + h p'' = 0$, $p' + k p'' = 0$, e si conclude che il birapporto $\frac{h}{k}$ dei quattro poli uguaglia il birapporto delle quattro polari (n. 145).

238. Metodo delle polari reciproche. — La polarità determinata da una conica trasforma una figura piana, composta di m punti ed n rette, in una figura (*polare* della prima rispetto alla curva) composta di m rette ed n punti; ad es., un poligono *iscritto* nella conica (avente cioè i suoi vertici sulla curva) ha come figura polare il moltilatero *circoscritto*, formato dalle tangenti nei vertici di quello. Due figure mutuamente polari hanno proprietà duali. Così, da ogni proprietà grafica (proiettiva) relativa ai punti di una conica si deduce, per dualità, una proprietà grafica relativa alle tangenti della curva.

Questa considerazione può applicarsi a tutte le proposizioni sulle coniche viste sinora. In particolare, la proprietà: « una retta ha in comune con una conica due punti (reali e distinti, o reali e coincidenti, o immaginari) », tradotta mediante la polarità, ci dice che *per un punto si possono condurre ad una conica due tangenti che sono reali e distinte, o reali e coincidenti, o immaginarie;* il punto nel primo caso dicesi *esterno*, nel terzo *interno*, mentre nel secondo caso sta sulla conica (cfr. n. 233).

---

[1] Le dimostrazioni possono anche darsi facilmente per via analitica facendo uso di coordinate di punti e di rette. Anzi per questa via si trova la condizione analitica di coniugio tra due rette (u, v, w), (u', v', w'):

$$A_{11} u u' + \ldots + A_{12} (u v' + u' v) + \ldots = 0, \tag{11}$$

e si scorge che essa è formata, a partire dall'equazione tangenziale (10) della conica, collo stesso procedimento che conduce dall'equazione puntuale (1) alla relazione (4) di coniugio tra punti. La (11) si ritroverebbe dunque trasformando per dualità le considerazioni dei nn. 231 e 234.

Si può precisare meglio il risultato, osservando che ogni retta passante per un punto P, nel piano della conica, ha il suo polo sulla polare p di P (n. 237); se quella retta è tangente alla conica, il polo sta anche sulla curva. Dunque (v. fig. di pag. 361):

Le tangenti ad una conica uscenti da un punto toccano la conica nelle intersezioni di questa colla polare del punto (cfr. n. 233). Supposta la conica reale, vediamo che *un punto esterno, od interno, ha, rispettivamente, come polare una retta secante, o non secante,* mentre i punti della curva hanno come polari le relative tangenti.

Se Q, R sono due punti di p coniugati rispetto alla conica, e quindi separati armonicamente dalle intersezioni U, V di p colla curva, la polare di Q passa per P ed R, e la polare di R coincide con PQ. Dunque le due rette PQ, PR, di cui ciascuna contiene il polo dell'altra, sono coniugate rispetto alla conica. Se poi si osserva che esse dividono armonicamente le due tangenti PU, PV, e che il ragionamento è invertibile, si conclude che *due rette coniugate rispetto ad una conica dividono armonicamente le tangenti condotte alla curva dalla loro intersezione;* risultato duale a quello che ci ha servito a definire la relazione di coniugio tra punti (n. 234) Segue il teorema:

Per ogni punto del piano passano infinite coppie di rette coniugate rispetto ad una conica, le quali formano una involuzione avente come rette doppie le tangenti condotte dal punto alla conica. La involuzione è iperbolica, parabolica od ellittica, secondo che il punto è esterno, sulla curva od interno.

Fu precisamente la considerazione di due figure mutuamente polari rispetto ad una conica che condusse il PONCELET (1818-24) a formulare, per la prima volta, la legge di dualità piana, da lui denominata *metodo delle polari reciproche* Solo qualche anno più tardi (1825-26) GERGONNE enunciò, sotto forma indipendente dalla teoria delle coniche, quella legge, che trovò la sua piena giustificazione nelle opere di MÖBIUS (1827) e PLÜCKER (1828).

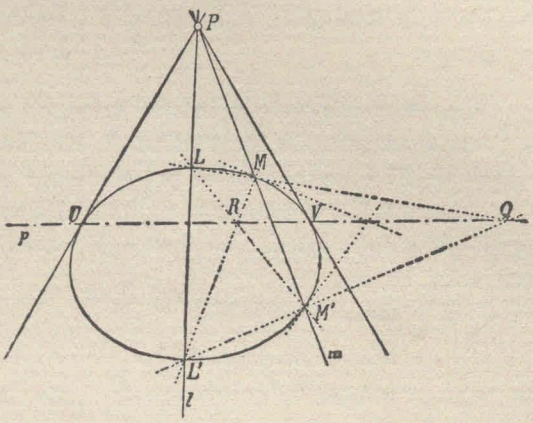
239. Costruzione della polare di un punto e del polo di una retta. — Ritorniamo alla definizione di polare di un punto (n. 225); da essa segue subito la costruzione della detta polare rispetto ad una conica reale, interamente tracciata.

Si conducano infatti per il polo P (che supporremo non stia sulla curva) più trasversali l, m, ..., che seghino la curva nelle coppie di punti LL', MM', ...; si determinino i punti

$$Q \equiv LM \cdot L'M', \quad R \equiv LM' \cdot L'M, \ \ldots;$$

la retta $p \equiv QR \ldots$, contenendo i coniugati armonici di P rispetto alle coppie di punti LL', MM', ..., sarà la polare richiesta. *La polare di un punto rispetto ad una conica contiene adunque due punti diagonali* (Q, R

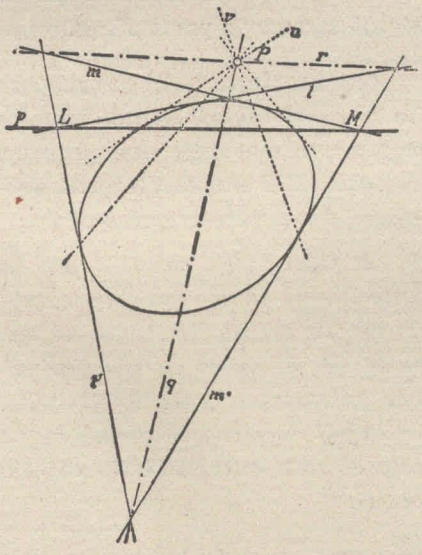
di ogni quadrangolo completo ($L\,L'\,M\,M'$) *iscritto nella conica, il cui terzo punto diagonale cada nel polo; contiene inoltre i punti di contatto* (U, V) *delle tangenti alla curva condotte dal polo, quando questo sia esterno* (n. 238); *contiene finalmente le intersezioni delle tangenti alla conica nelle coppie di punti* ($L\,L'$, $M\,M'$, ...) *allineati col polo.* L'ultima parte dell'enunciato segue dal fatto che le rette $L\,L'$, $M\,M'$, ... passanti per P, devono avere i loro poli sulla polare p (n. 237).



Dualmente, volendo costruire di una retta p il polo rispetto ad una conica, si assumano su p più punti (esterni) L, M, ..., dai quali si conducano le coppie di tangenti $l\,l'$, $m\,m'$, ... alla conica; si costruiscano le rette

$$q \equiv l\,m \cdot l'\,m', \quad r \equiv l\,m' \cdot l'\,m, \ \ldots;$$

il punto $P \equiv q\,r \ldots$, giacendo sulle rette $L\,P$, $M\,P$, ..., coniugate armoniche di p rispetto alle coppie di tangenti $l\,l'$, $m\,m'$ ..., sarà il polo richiesto di p. Dunque: *per il polo di una retta rispetto ad una conica passano due rette diagonali* (q, r) *di ogni quadrilatero completo* ($l\,l'\,m\,m'$) *circoscritto alla conica, la cui terza retta diagonale coincida colla polare; passano inoltre le tangenti* (u, v) *alla curva nelle intersezioni colla polare, quando questa sia secante* (n. 238); *passano finalmente le congiungenti i punti di contatto delle coppie di tangenti* ($l\,l'$, $m\,m'$, ...) *secantisi sulla polare.*



240. Triangoli autopolari — Si dice che un triangolo (o trilatero) è *autopolare* (od *autoconiugato, autoreciproco*) rispetto ad una conica, quando ciascun vertice è polo del lato opposto. I vertici sono dunque coniugati a due a due, e così pure i lati. Sono autopolari, ad es., il triangolo $P\,Q\,R$ ed il trilatero $p\,q\,r$ della

prima e (rispettivamente) seconda figura del numero precedente; donde i teoremi

Il triangolo diagonale di ogni quadrangolo iscritto in una conica è autopolare.

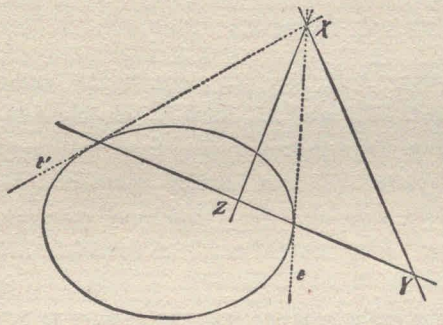
Il trilatero diagonale di ogni quadrilatero circoscritto ad una conica è autopolare.

Una conica possiede infiniti triangoli autopolari. Per costruirne uno si prenda ad arbitrio un vertice X, che non stia sulla conica, si tracci la polare di X, e su questa si prendano gli altri due vertici Y, Z, in modo che siano distinti e coniugati rispetto alla conica; ciò è possibile in infiniti modi, potendosi, ad es., assumere Y ad arbitrio sulla detta polare, purchè non sulla conica.

Ora è facile vedere che

In un triangolo autopolare rispetto ad una conica reale un vertice è interno e due sono esterni. | *un lato è esterno e due lati sono secanti.*

Se infatti il vertice X da cui si parte è, ad es., esterno, sarà il lato YZ secante (n. 238); ed i due punti Y, Z, dovendo separare armonicamente le intersezioni colla curva, saranno uno, ad es. Y, esterno, l'altro Z interno. Mentre, se si parte da un vertice Z interno, il lato opposto XY risulta esterno (n. 238), e quindi esterni saranno i punti X, Y.



Osservazione. — Si osservi però che in questo ragionamento si è fatto tacitamente uso delle due seguenti proposizioni di sinistra, le quali, sebbene suggerite dall'intuizione, devono essere dimostrate rigorosamente:

a) *Ogni punto giacente sopra una retta esterna ad una conica, è esterno alla curva.*

b) *Le intersezioni di una conica con una retta secante determinano su questa due segmenti proiettivi, di cui uno è composto di punti interni, l'altro di punti esterni.*

a') *Ogni retta passante per un punto interno ad una conica, è secante.*

b') *Le tangenti condotte ad una conica da un punto esterno determinano nel fascio avente ivi il centro due angoli completi, di cui uno è composto di rette esterne, l'altro di rette secanti.*

Queste proposizioni valgono per coniche reali, non degeneri.

Ora nel numero seguente dimostreremo per via analitica le dette proposizioni. Ma possiamo anche giustificarle, osservando anzitutto che esse

valgono certamente pel cerchio, in secondo luogo che esse sono di natura proiettiva, e quindi si trasportano ad ogni curva che possa dedursi dal cerchio mediante una proiezione. Vedremo d'altronde che ogni conica reale, non degenere, può riguardarsi come proiezione di un cerchio; quindi quelle proposizioni valgono per ogni conica siffatta.

***241. Equazione di una conica riferita ad un triangolo autopolare.** – È interessante esaminare come si presenti la equazione di una conica, quando essa venga riferita ad un sistema di coordinate proiettive (x, y, z) avente come fondamentale un triangolo autopolare $X\,Y\,Z$. Posto che sia

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0 \tag{1}$$

l'equazione della curva, osserviamo che i punti fondamentali $X(1, 0, 0)$, $Y(0, 1, 0)$, $Z(0, 0, 1)$ hanno, rispetto alla (1), le rette polari

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0. \end{aligned}$$

Ora queste rette devono coincidere ordinatamente colle rette fondamentali

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Perciò deve aversi $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Con ciò la (1) si riduce alla forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0, \tag{2}$$

che si suol dire *equazione normale,* o *canonica,* della conica.

L'equazione puntuale di una conica, riferita ad un triangolo autopolare come fondamentale, contiene solo i quadrati delle coordinate.

Esaminiamo ora i casi che la (2) può presentare. Supponiamo diversi da zero i tre coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{33}; (nella ipotesi opposta, se ad es. fosse $a_{11} = 0$, si annullerebbe il discriminante $A = a_{11}a_{22}a_{33}$ della (2), e la curva si spezzerebbe nelle due rette $\sqrt{a_{22}}\,y \pm \sqrt{-a_{33}}\,z = 0$, armoniche rispetto ai lati $X\,Y$, $X\,Z$ del triangolo fondamentale). I tre coefficienti della (2) avranno lo stesso segno, oppure due avranno un segno ed il rimanente il segno opposto. Ma nella prima ipotesi la conica non ha nessun punto reale, è una *conica immaginaria,* giacchè allora il primo membro della (2) ha l'unica soluzione reale $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, terna di valori a cui non corrisponde alcun punto del piano.

Supponiamo invece che due coefficienti della (2), ad es. a_{11}, a_{22}, abbiano lo stesso segno, che potremo ritenere positivo (cambiando segno ove occorra al primo membro della equazione), e sia a_{33} negativo. Per tener presenti queste ipotesi poniamo

$$a_{11} = \alpha^2, \quad a_{22} = \beta^2, \quad a_{33} = -\gamma^2,$$

dove α, β, γ sono quantità reali positive, e scriviamo la (2) sotto la forma

$$\alpha^2x^2 + \beta^2y^2 - \gamma^2z^2 = 0. \tag{3}$$

La conica ha certo punti reali, potendosi assegnare valori arbitrari (non entrambi nulli) ad x, y, pur di calcolare convenientemente z. La conica (3) sega il lato $x = 0$ del triangolo autopolare in due punti reali e distinti, dati da

$$\beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 = 0, \quad \text{ossia} \quad \frac{y}{z} = \pm\frac{\gamma}{\beta};$$

e sega pure il secondo lato $y = 0$ in punti reali e distinti, dati da $\frac{x}{z} = \pm\frac{\gamma}{\alpha}$; ma non ha punti reali comuni col terzo lato $z = 0$ $\left(\text{perchè si avrebbe } \frac{x}{y} = \pm i\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Dunque dei tre lati del triangolo autopolare XYZ, due ZX, ZY sono secanti e il terzo XY esterno; e (per polarità) dei tre vertici, due X, Y sono esterni ed uno Z interno. Ciò conferma il risultato del numero precedente, relativo alla posizione di un triangolo autopolare rispetto ad una conica reale.

Per il vertice Z, che è poi un punto qualsiasi interno alla nostra conica (3), conduciamo una retta ad arbitrio $y = kx$. Questa sega la curva (3) in due punti (x, kx, z), tali che

$$(\alpha^2 + \beta^2 k^2) x^2 - \gamma^2 z^2 = 0,$$

donde

$$\frac{x}{z} = \frac{\gamma}{\pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 k^2}},$$

valori certamente *reali*. La retta è adunque secante; e ciò dimostra il lemma a') della Oss. del numero precedente.

Se invece consideriamo un punto esterno alla curva, qual'è il punto fondamentale X (v. la fig. di pag. 362), e per esso conduciamo una retta $z = ky$, le intersezioni (x, y, ky) di questa colla conica (3) sono date da

$$\alpha^2 x^2 + (\beta^2 - \gamma^2 k^2) y^2 = 0,$$

ossia da

$$\frac{x}{y} = \frac{\pm\sqrt{\gamma^2 k^2 - \beta^2}}{\alpha};$$

esse sono reali e distinte, reali e coincidenti o immaginarie coniugate, secondo che

$$k \gtrless \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ai valori $k = \pm\frac{\beta}{\gamma}$ corrispondono dunque le due *tangenti* t, t' (di equazioni $\beta y \pm \gamma z = 0$) uscenti da X; ai valori di k compresi fra $-\frac{\beta}{\gamma}$ e $+\frac{\beta}{\gamma}$ corrispondono le rette del fascio X che appartengono ad uno degli angoli completi $\widehat{tt'}$ (precisamente a quello in cui sta il lato XY, per cui $k = 0$), rette che, in virtù della nostra disuguaglianza, sono *esterne* rispetto alla conica; finalmente ai valori rimanenti di k corrispondono le rette dell'altro angolo completo $\widehat{tt'}$, le quali sono *secanti* della conica. E con ciò rimane giustificato anche il lemma b') del n. 240. (Le proposizioni a), b) seguono per dualità).

242. Coniche degeneri. — Nello studiare la polarità determinata da una conica, abbiamo lasciato da parte il caso che sia nullo il discriminante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Vogliamo ora esaminare quale particolarità presenti la curva

(1) $$f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

quando è verificata la relazione

(2) $$A = 0.$$

È noto che la (2) è condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano tre numeri, non tutti nulli, x_0, y_0, z_0, tali da soddisfare alle tre equazioni

(3) $$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0, \end{cases}$$

ottenute annullando le tre semiderivate parziali del polinomio (1); precisamente si ha, quando non siano nulli tutti i minori del secondo ordine di A,

$$x_0 : y_0 : z_0 = A_{11} : A_{12} : A_{13} = A_{21} : A_{22} : A_{23} = A_{31} : A_{32} : A_{33}.$$

Consideriamo ora quel punto V che ha le coordinate (x_0, y_0, z_0). Esso intanto sta sulla curva (1), perchè se, dopo aver sostituito nelle (3) al posto delle variabili le x_0, y_0, z_0, moltiplichiamo le tre identità così ottenute per x_0, y_0, z_0 e sommiamo, risulta

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Se invece moltiplichiamo le stesse identità rispettivamente per x, y, z, coordinate di un punto arbitrario P, e sommiamo, avremo

$$f\begin{pmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ x, & y, & z \end{pmatrix} = 0.$$

Approfittando di queste uguaglianze, cerchiamo le intersezioni della curva (1) colla retta VP. Se

$$Q(kx + x_0, \quad ky + y_0, \quad kz + z_0)$$

è una tra queste, il parametro k deve soddisfare all'equazione (cfr. n. 231)

(4) $$k^2 f(x, y, z) + 2kf\begin{pmatrix} x_0, & y_0, & z_0 \\ x, & y, & z \end{pmatrix} + f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

la quale, avendo nulli il termine noto e il coefficiente di $2k$, fornirà per k due valori uguali a zero. Segue che le intersezioni della retta VP colla curva (1) coincidono in V; a meno che il punto $P(x, y, z)$ stesso non

appartenga alla curva, nel qual caso, avendosi pure $f(x, y, z) = 0$, la (4) diviene una identità, ed è soddisfatta da ogni valore di k, sicchè la retta VP appartiene allora alla curva. Tutto ciò dimostra che la curva (1) è costituita da due rette; queste si ottengono, ad es., proiettando da V le intersezioni della curva stessa con una trasversale qualsiasi non passante per V. Viceversa, se una equazione (1) rappresenta una coppia di rette, invertendo il ragionamento ora fatto, si trova che deve esser nullo il discriminante. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una equazione di secondo grado, in coordinate di punti, rappresenti una coppia di rette è che sia zero il discriminante; le coordinate omogenee della intersezione delle due rette (punto doppio della conica) sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di una stessa linea nel discriminante.[1]

Le due rette componenti la coppia possono esser reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie coniugate. Il caso intermedio va però considerato in modo speciale, come risulta da ciò che segue.

Noi abbiamo supposto, nella discussione precedente, che non siano tutti nulli i minori del secondo ordine di A. Esaminiamo ora la ipotesi opposta. Allora le equazioni (3) vengono verificate da ogni terna di valori (x_0, y_0, z_0) soddisfacenti una di esse, che non sia una identità. Sarà questa, ad es., la prima delle (3), quando non siano tutti nulli i coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{13}. Questa equazione rappresenta una retta, di cui ogni punto (x_0, y_0, z_0) ha le proprietà che prima spettavano al punto V. Perciò la (1) rappresenta la retta stessa contata due volte (*retta doppia*). Ciò d'altronde risulta subito dall'identità che segue, o da una delle analoghe, facilmente dimostrabili nelle ipotesi $A_{hk} = 0$ in cui ci siamo posti:

$$a_{11} f(x, y, z) \equiv (a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z)^2.$$

Concludiamo che: *una equazione di secondo grado, in coordinate di punti, il cui discriminante abbia nulli tutti i minori di secondo ordine, rappresenta una retta doppia; e viceversa.*[2]

La coppia di rette distinte e la retta doppia sono varietà di luoghi (*degeneri*) del secondo ordine.

243. Ricerca delle rette componenti una conica degenere. — Verificato che la equazione di secondo grado (1), o, in coordinate cartesiane ordinarie,

$$(1') \qquad a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0,$$

[1] In linguaggio algebrico, l'annullarsi del discriminante della (1) è la condizione perchè il polinomio (1) sia il prodotto di due funzioni lineari omogenee di x, y, z.

[2] In altri termini, le relazioni $A_{hk} = 0$ danno le condizioni (tre indipendenti) perchè il polinomio (1) sia il quadrato di una funzione lineare ed omogenea di x, y, z.

rappresenta una coppia di rette, si possono chiedere le equazioni staccate delle due rette costituenti la coppia. A tal fine si ordini la (1') rispetto ad una delle variabili, ad es. rispetto ad x, e si risolva come se x fosse la sola incognita; si troverà, quando $a_{11} \neq 0$,

$$x = \frac{-(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{(a_{12}y + a_{13})^2 - a_{11}(a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33})}}{a_{11}},$$

ossia

$$x = \frac{-(a_{12}y + a_{13}) \pm \sqrt{-A_{33}y^2 + 2A_{23}y - A_{22}}}{a_{11}}.$$

Ora il trinomio sotto al radicale è il quadrato esatto di un binomio lineare in y $\left(\text{del tipo } \alpha y + \beta, \text{ dove } \alpha = \sqrt{-A_{33}},\ \beta = \frac{A_{23}}{\alpha}\right)$, perchè si ha

$$A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = a_{11}A = 0.$$

L'espressione di x può dunque scriversi sotto la forma

$$x = \frac{-(a_{12}y + a_{13}) \pm (\alpha y + \beta)}{a_{11}},$$

che rappresenta, prendendo l'uno o l'altro segno, le due rette richieste. Queste sono reali o immaginarie, secondo che α e β sono reali o immaginarie.

Il procedimento ora indicato cade in difetto se $a_{11} = a_{22} = 0$; (se fosse $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, si potrebbe risolvere la (1') rispetto ad y). Ma allora, ricordando la ipotesi

$$A \equiv a_{12}(2a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33}) = 0,$$

e supponendo $a_{12} \neq 0$ (perchè il polinomio (1') non si abbassi a primo grado), si riconosce direttamente che la (1') può scriversi sotto la forma

$$2a_{12}\left(x + \frac{a_{23}}{a_{12}}\right)\left(y + \frac{a_{13}}{a_{12}}\right) = 0,$$

e quindi rappresenta le due rette

$$a_{12}x + a_{23} = 0, \qquad a_{12}y + a_{13} = 0.$$

244. Particolari coppie di rette. — Talvolta il semplice aspetto dell'equazione di una conica lascia vedere che la curva si spezza in due rette. Così, un'equazione di secondo grado ed omogenea, in coordinate cartesiane ordinarie,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

rappresenta due rette uscenti dall'origine (n. 42), di equazioni

$$\frac{x}{y} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Ed una equazione quadratica del tipo

$$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0,$$

dove x_0, y_0 sono costanti, rappresenta due rette uscenti dal punto (x_0, y_0), delle quali si ottengono le equazioni staccate scrivendo, nella penultima formola, $\frac{x - x_0}{y - y_0}$ al posto di $\frac{x}{y}$; le due nuove rette sono parallele alle antiche.

245. Polarità rispetto ad una coppia di rette. — Rispetto ad una conica $f(x, y, z) = 0$, spezzata in due rette uscenti da un punto $V(x_0, y_0, z_0)$, ogni punto $P'(x', y', z')$ del piano, distinto da V, ha ancora una determinata retta polare che si definisce nel solito modo (n. 235), ed ha l'equazione

$$f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{pmatrix} = 0.$$

Questa retta passa sempre per il punto V, come risulta da considerazioni sia geometriche, sia analitiche (n. 242). La detta polare è coniugata armonica della retta VP', rispetto alle due rette componenti la coppia. Mentre il punto P' descrive una retta uscente da V, la polare non varia; manca qui adunque la corrispondenza biunivoca fra polo e polare, che sussiste per le coniche a discriminante non nullo. E la polare di V è indeterminata, perchè il polinomio $f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ x_0, & y_0, & z_0 \end{pmatrix}$ è identicamente nullo (n. 242). Viceversa, una retta non passante per V ha sempre come polo, rispetto alla coppia di rette, il punto V, mentre una retta uscente da V ha infiniti poli, appartenenti alla coniugata armonica di essa rispetto alle due rette della coppia.

***246. Inviluppi degeneri.** — I risultati precedenti possono subito trasformarsi per dualità. Così si ottiene il teorema:

Un'equazione di secondo grado in coordinate di rette, il cui discriminante sia nullo, rappresenta un inviluppo che si scinde in due punti (o, meglio, *in due fasci*); *i due punti coincidono se sono nulli inoltre tutti i minori di secondo ordine estratti dal discriminante.*

La *coppia di punti distinti* e il *punto doppio* sono varietà di inviluppi *degeneri* della seconda classe.

Conviene qui ricordare (n. 236) che, se il discriminante A di una curva del secondo ordine

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

non è zero, alla curva è legato un inviluppo di seconda classe costituito dalle infinite tangenti, il quale ha l'equazione

$$(I) \qquad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw + 2A_{23}vw = 0.$$

Ora se $A = 0$, che cosa rappresenta quest'equazione? Si osservi che, nella ipotesi attuale, il discriminante della (I)

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

ha nulli tutti i minori di secondo ordine; quindi la (I) *rappresenta un inviluppo, che degenera nel punto*

$$A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w = 0,$$

ossia nel punto (A_{11}, A_{12}, A_{13}), *da contarsi due volte*;[1] questo punto è, come sappiamo, il punto doppio della coppia di rette. Ciò del resto si poteva prevedere, perchè una coppia di rette è segata in punti coincidenti dalle sole rette che passano per il punto doppio.

Se però la curva (1) degenera in due rette coincidenti, sono nulli tutti i coefficienti dell'equazione (I), e l'equazione stessa diviene una identità. *Al luogo non è più legato un inviluppo di seconda classe* (come risulta pure dal fatto che *ogni* retta del piano sega una retta doppia in due punti coincidenti).

Per dualità: *Ad un inviluppo di seconda classe, che degenera in due punti, si può considerare collegato il luogo costituito dalla retta congiungente i due punti, contata due volte. Ma se i due punti coincidono, all'inviluppo non è più collegato un determinato luogo di secondo ordine.*

Esercizi I. — 1) Scrivere le equazioni delle tangenti alla conica

$$x^2 + 2xy - y^2 - 2x - 4y = 0$$

nell'origine e nei punti in cui essa sega ulteriormente gli assi coordinati.

2) Equazione della tangente alla curva $2x^2 - xy + y^2 - 3x - 1 = 0$ nel punto (1, 2).

3) La curva $2xy + 4x - 2y + 5 = 0$ passa per i punti all'infinito degli assi; determinare le tangenti in quei punti (asintoti). La stessa questione per la curva $2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

4) Scrivere la equazione di una parabola che passi per l'origine, toccando ivi la retta $3x - y = 0$, e passi per il punto (1, 2), toccando ivi la retta $4x - y - 2 = 0$; il problema ha due soluzioni, delle quali però una è degenere.

5) Scrivere la equazione di una iperbole che passi per i punti all'infinito degli assi, toccando ivi le rette $y + 1 = 0$, $x - 2 = 0$ rispettivamente, e passi inoltre per il punto (3, 5).

6) Determinare l'equazione complessiva delle tangenti condotte alla conica $a_{11}x^2 + \ldots = 0$ dall'origine, o dal punto all'infinito di uno degli assi. Si deduca che l'origine è esterna, od interna alla conica, secondo che $a_{33}A < 0$, oppure > 0.

[1] Se A_{11}, A_{12}, A_{13} fossero tutti nulli, si prenderebbero gli elementi della seconda o terza orizzontale

7) Si determinino, per la conica dell'es. 2), le tangenti uscenti dall'origine, o le tangenti parallele all'asse delle x; si trovino di queste i punti di contatto, e si verifichi che la congiungente i punti di contatto, in ciascuna coppia di tangenti, è la polare del punto da cui escono le tangenti.

8) Tangenti condotte dal punto (2, 3) alla conica dell'es. 1) e polare del punto stesso.

9) Quante tangenti parallele ad una data retta si possono condurre ad una conica, in generale?; o ad una parabola, in particolare? Determinare le tangenti alla conica $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$, che sono parallele alla retta $2x + 3y = 0$.

10) Assegnare due punti (o rette) coniugati rispetto ad una conica luogo (o inviluppo) equivale ad imporre *una* condizione, traducentesi in *una* equazione lineare tra i coefficienti. Si esprima, ad es., la condizione affinchè i punti ciclici siano coniugati rispetto alla conica $a_{11}x^2 + \ldots = 0$, vale a dire affinchè i punti all'infinito di questa definiscano direzioni ortogonali; si troverà $a_{11} + a_{22} = 0$.

11) Una conica è determinata, in generale, quando siano date cinque coppie di punti coniugati rispetto ad essa, od $n < 5$ coppie siffatte e $5 - n$ punti della curva. Ed è pure determinata se di un punto del piano si conosce la polare, e inoltre sono dati tre punti della curva; ecc. Si scriva l'equazione di una conica, sapendo che l'origine ha rispetto ad essa la polare $x - y + 1 = 0$, e che la curva passa per i punti all'infinito degli assi e per il punto (2, 1).

12) Scrivere la equazione tangenziale del cerchio (in assi ortogonali)

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0,$$

sia per la via generale (n. 236), sia determinando centro e raggio, e ricordando la proprietà geometrica delle tangenti.

13) Scrivere le equazioni tangenziali delle coniche $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, $\lambda yz + \mu zx + \nu xy = 0$, $z^2 - 2kxy = 0$; se le coordinate sono proiettive, dalla seconda equazione richiesta si deduca, per dualità, l'equazione puntuale di una conica tangente ai lati del triangolo fondamentale (n. 230, es. 13)).

14) Verificare che le equazioni

$$3x^2 - 5xy - 2y^2 + x + 5y - 2 = 0, \quad 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

rappresentano coppie di rette, e scrivere le equazioni staccate delle rette stesse.

15) Quale speciale inviluppo rappresenta la equazione tangenziale $u^2 + v^2 = 0$, supposti gli assi ortogonali? Qual'è la condizione affinchè le due rette

$$ax + by + c = 0, \quad a'x + b'y + c' = 0$$

siano coniugate rispetto a quell'inviluppo?

16) Quale angolo formano (in assi ortogonali) le rette costituenti la coppia $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$? qual'è la condizione di perpendicolarità? Ricordando che esse vanno ai punti all'infinito della conica $a_{11}x^2 + \ldots + a_{33} = 0$ (n. 230), si deduca nuovamente (cfr. es. 10)) la condizione affinchè essa sia una iperbole equilatera.

II. — 17) La polarità rispetto ad una conica presenta notevoli particolarità metriche quando la conica sia un cerchio (*polarità circolare*). Infatti: la polare di un punto qualsiasi è normale alla retta congiungente il punto col centro O de

cerchio; ed il prodotto delle distanze di O dal polo e dalla polare è costante; l'angolo di due rette arbitrarie è uguale all'angolo sotto cui da O sono visti i relativi poli; ogni triangolo autopolare ha l'ortocentro in O (PONCELET). Queste proprietà si verificano anche analiticamente, osservando che, preso come fondamentale il cerchio $x^2 + y^2 - 1 = 0$, la polarità è rappresentata dalle equazioni $x = -u, y = -v$ (cfr. n. 214, es. 5)).

18) La polarità circolare permette di dedurre, da note proprietà metriche di una figura, nuove proprietà della figura polare. Come si trasformano ad es. i teoremi: le tre altezze di un triangolo passano per uno stesso punto; gli ortocentri dei quattro triangoli formati prendendo, tre a tre, quattro rette date, sono allineati?

19) Mentre un punto descrive una conica K, la polare di esso, rispetto ad una seconda conica Ω (*direttrice*), inviluppa una terza conica K', *polare di* K, e le tangenti di K hanno come poli i punti di K'. Data la equazione cartesiana (o plückeriana) di K, e supposto che Ω sia il cerchio $x^2 + y^2 - 1 = 0$, si scriva l'equaziona plückeriana (o cartesiana) di K'.

20) Supposto che anche la conica K dell'es. precedente sia un cerchio $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$, di centro C, si troverà che K' è la conica

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{r^2}(\alpha x + \beta y - 1)^2,$$

luogo di un punto (x, y) le cui distanze dall'origine O e dalla retta $\alpha x + \beta y - 1 = 0$ hanno un rapporto costante $\frac{OC}{r}$; la conica ha (n. 63, *b*)) come fuoco O e come direttrice la polare di C rispetto al cerchio fondamentale Ω. Dunque «la polare di un cerchio rispetto ad un altro cerchio è una conica, che ha un fuoco nel centro di questo; e viceversa». (L'HOSPITAL, PONCELET).

III. — 21) Data una conica $f(x, y, z) = 0$ e due punti $P(x, y, z)$, $P'(x', y', z')$, la cui congiungente seghi la curva in Q_1, Q_2, l'equazione (2) del n. 231 fornisce subito il birapporto $\rho = (PP'Q_1Q_2)$. Qual'è il luogo di P, quando P' sta fisso e ρ rimane costante? Si troverà una conica, la quale passa per le intersezioni di f colla polare di P, ed ha ivi le stesse tangenti di f. Per $\rho = -1$, si ha la detta polare contata due volte; per $\rho = 1$, la coppia delle tangenti nominate.

22) Data una conica $f(x, y, 1) = 0$ in coordinate cartesiane ordinarie, e due punti $P(x, y, 1)$, $P'(x', y', 1)$, la cui congiungente seghi la curva nei punti Q_1, Q_2, si dimostri che il prodotto dei rapporti semplici $(PP'Q_1) \cdot (PP'Q_2)$ è espresso dal quoziente $f(x, y, 1) : f(x', y', 1)$; (si ricorra alla (2) del n. 231).

23) Un risultato analogo si ottiene procedendo dualmente, se, come coordinate u, v, w di una retta, si assumono i coefficienti della equazione normale (n. 30) della retta. Infatti, se $F(u, v, w) = 0$ è la equazione tangenziale di una conica e $p(u, v, w)$, $p'(u', v', w')$ sono due rette, dalla cui intersezione escano le tangenti q_1, q_2 alla curva, si ha $(pp'q_1) \cdot (pp'q_2) = F(u, v, w) : F(u', v', w')$.

24) Dall'es. 22) segue il teorema di CARNOT (cfr. n. 152, es. 13)): «il prodotto dei $2n$ rapporti semplici, determinati sui lati di un n.gono semplice dalle intersezioni con una conica, è uguale a $+1$». Ed un teorema, che può riguardarsi come duale di questo (relativo a rapporti semplici formati da coppie di lati con tangenti alla conica), si ottiene all'es. 23), oppure valendosi dell'es. 4) del n. 214.

25) Il teorema di CARNOT e il suo duale sono invertibili per $n = 3$. Segue che le coppie di tangenti condotte ad una conica dai vertici di un triangolo segano i lati opposti in sei punti di una conica; e viceversa. In particolare, le rette congiungenti i vertici di un triangolo con due punti del piano segano i lati opposti in sei punti di una conica; e dualmente.

26) Dal teorema di CARNOT può dedursi il teorema di PASCAL (cfr. 152, es. 14)): « se un esagono è iscritto in una conica, le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno in linea retta ». E dualmente (o trasformando questo teorema mediante la polarità definita dalla conica) si ottiene il teorema di BRIANCHON sul seilatero circoscritto ad una conica.

27) Se un triangolo è circoscritto ad una conica, le congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati opposti passano per uno stesso punto (CEVA) (es. 24); cfr. n. 152, es. 16)). E dualmente: se un triangolo è iscritto in una conica, le intersezioni dei lati colle tangenti nei vertici opposti stanno sopra una stessa retta (CARNOT).

28) Se due n.goni semplici $A\,B\,C\,\ldots\,K$, $A'\,B'\,C'\,\ldots\,K'$ sono iscritti in una conica e si indicano con $M, N, \ldots, R$ le intersezioni dei lati corrispondenti $A\,B \cdot A'\,B'$, $B\,C \cdot B'\,C', \ldots, K\,A \cdot K'\,A'$, sussiste la relazione

$$(\alpha) \qquad (A\,B\,M)\ (A'\,B'\,M)\ (B\,C\,N)\ (B'\,C'\,N)\ \ldots\ (K\,A\,R)\ (K'\,A'\,R) = 1\,;$$

viceversa, se questa relazione si verifica per due n.goni, dei quali $2n - 1$ vertici complessivamente appartengano ad una conica, anche l'ultimo vertice appartiene alla conica. (Si applichi il teorema di CARNOT all'n.gono di cui son lati successivi $A\,A', B\,B', \ldots, K\,K'$, ricordando l'es. 2) del n. 152).

Dualmente: se due n.lateri semplici $a\,b \ldots, a'\,b' \ldots$ sono circoscritti ad una conica, sussiste la relazione

$$(\beta) \qquad (a\,b\,m)\ (a'\,b'\,m)\ \ldots = 1,$$

dove $m \equiv a\,b \cdot a'\,b'$, ecc.; e viceversa, nel senso sopra spiegato.

29) Ora si ricordi che la relazione (α) trae con sè la (β), se $a, b, \ldots, a', b', \ldots$ indicano i lati $A\,B$, $B\,C, \ldots$, $A'\,B'$, $B'\,C', \ldots$ dei due n.goni (n. 152 es. 20)). Segue l'importante teorema di PONCELET:[1] « Se due coniche sono così situate che esista un n.gono semplice iscritto nella prima e circoscritto alla seconda, esisteranno allora infiniti n.goni iscritti nella prima conica e circoscritti alla seconda », ogni punto della prima potendosi assumere come primo vertice A' di un cosiffatto n.gono.

IV. — 30) La polarità determinata da una conica trasforma un quadrangolo iscritto nel quadrilatero formato dalle tangenti nei vertici di quello, e trasforma in sè stesso il triangolo diagonale (n. 240). Segue: « un quadrangolo iscritto in una conica, ed il quadrilatero circoscritto formato dalle tangenti nei vertici di quello, posseggono lo stesso triangolo diagonale ».

31) Se r, r' sono due rette non coniugate rispetto ad una conica, ogni punto di r è coniugato ad un solo punto di r'; e le punteggiate r, r' risultano riferite

[1] La dimostrazione qui accennata è dovuta a P. SERRET.

proiettivamente se si fanno corrispondere punti coniugati appartenenti ad esse. Le punteggiate sono anzi prospettive se il punto rr' appartiene alla conica; qual'è il centro di prospettiva?

32) Segue il teorema (di SEYDEWITZ): « Se un triangolo è iscritto in una conica, ogni retta coniugata ad un lato sega gli altri due in punti coniugati rispetto alla curva ». Teorema duale.

33) Variando il vertice comune a questi due lati, si ottiene: « Le rette, che proiettano da due punti fissi di una conica un punto variabile lungo la curva, descrivono due fasci proiettivi » (STEINER, CHASLES). Teorema duale.

V. — 34) I due teoremi dell'es. 27) possono riunirsi, dicendo che « un triangolo iscritto in una conica, ed il triangolo circoscritto formato dalle tangenti nei vertici del primo, sono omologici, ed il centro di omologia è polo dell'asse di omologia ». Ora questo teorema si dimostra facilmente per via analitica, adoperando la equazione della conica in coordinate proiettive, riferita al triangolo iscritto, scelto come fondamentale (n. 230, es. 12)).

35) Il teorema precedente è caso particolare di questo: « Due triangoli, polari l'uno dell'altro rispetto ad una conica, sono omologici; il centro e l'asse di omologia sono mutuamente polari » (CHASLES); si intende che si corrispondono nella omologia due vertici, dei quali ciascuno abbia come lato opposto la retta polare dell'altro. Viceversa: « se due triangoli sono omologici, esiste una conica rispetto alla quale i triangoli sono polari l'uno dell'altro ». (Anche qui si assuma uno dei triangoli come fondamentale di un sistema di coordinate proiettive).

36) Dal teorema dell'es. 35) segue facilmente che « se due coppie di lati opposti di un quadrangolo completo si compongono di rette coniugate rispetto ad una conica, anche la terza coppia si comporrà di rette coniugate rispetto a quella curva » (STAUDT, HESSE). Ora questo teorema può anche dimostrarsi direttamente per via sintetica (considerando la polare di un vertice e le coppie di lati opposti del quadrangolo...); e dal teorema stesso si può risalire a quello dell'es. 35). Teorema duale sul quadrilatero. Queste proposizioni fanno vedere che, in casi particolari, tre coppie di punti, o di rette, coniugati rispetto ad una conica, luogo od inviluppo, possono imporre alla conica due sole condizioni indipendenti.

37) Assunto un triangolo XYZ come fondamentale per un sistema di cooordinate proiettive, si esprimano le condizioni: *a*) perchè un secondo triangolo $P_1P_2P_3$ (i cui vertici abbiano date coordinate) sia iscritto in una conica passante per XYZ (n. 230, es. 12)); *b*) perchè $P_1P_2P_3$ sia autopolare rispetto ad una conica avente come autopolare anche XYZ (n. 241). Dal paragone delle due condizioni risulta il teorema:

38) « Due triangoli autopolari rispetto ad una stessa conica sono iscritti in una seconda conica, e (per dualità) circoscritti ad una terza ». E viceversa: « due triangoli, che sono iscritti in (o circoscritti ad) una conica, sono autopolari rispetto ad un'altra conica » (STEINER).

39) Segue inoltre: « due triangoli iscritti in una stessa conica sono circoscritti ad un'altra, e viceversa » (BRIANCHON). « Date due coniche, non esiste in generale un triangolo che sia iscritto nell'una e circoscritto all'altra; ma se, per una particolare posizione delle due coniche, esiste un triangolo siffatto, ne esistono infiniti altri » (caso particolare del teorema di PONCELET, contenuto nell'es. 29)).

Capitolo II.

Costruzione di coniche.

Teoremi di Pascal, Brianchon, Desargues.

247. Generazione di una conica mediante forme proiettive. — Ci occuperemo nel presente Capitolo di varie proprietà proiettive delle coniche, che permettono di descrivere *per punti* o *per tangenti* una curva determinata da un numero sufficiente di condizioni; di costruire cioè punti o tangenti della conica considerata, in numero grande quanto si voglia.

Stabiliamo anzitutto il teorema fondamentale seguente, dovuto a Steiner e Chasles:

I punti d'incontro di rette corrispondenti in due fasci proiettivi, situati in un piano ma non sovrapposti, costituiscono una curva di secondo ordine, che passa per i centri dei due fasci.

Siano S, S' i centri dei due fasci, l, m, n tre rette per S, cui debbano corrispondere nella detta proiettività le rette l', m', n' del fascio S'. Se indichiamo brevemente con $l = 0$, $m = 0$ le equazioni cartesiane delle due prime rette del fascio S, la terza retta n avrà una equazione del tipo $l + \mu m = 0$. Ma noi possiamo riscrivere la equazione abbreviata della seconda retta, dopo aver introdotto μ come fattore nei coefficienti del polinomio m; in altri termini possiamo *preparare* la equazione di quella retta in guisa, che l'equazione della retta n si ottenga *sommando membro a membro* le equazioni delle rette l, m. Ripetendo la stessa considerazione per il fascio S', potremo scrivere le equazioni delle sei rette date sotto la forma:

$$S) \qquad l = 0, \quad m = 0, \quad l + m = 0,$$
$$S') \qquad l' = 0, \quad m' = 0, \quad l' + m' = 0.$$

Nella proiettività, che le due terne determinano, alla retta generica $l + km = 0$ del primo fascio corrisponderà, nel secondo fascio, una certa retta $l' + k' m' = 0$; ma il birapporto di quattro rette del fascio S deve essere uguale al birapporto delle corrispondenti rette dell'altro fascio S', perciò sarà (n. 145, *c*)) $k = k'$. Siamo così condotti a cercare la equazione del luogo descritto dalla intersezione delle due rette corrispondenti di S, S':

$$(1) \qquad \begin{cases} l + km = 0, \\ l' + km' = 0, \end{cases}$$

le quali variano insieme al variare del parametro k. Questa equazione si otterrà eliminando k fra le equazioni (1) (n. 51). Risulta

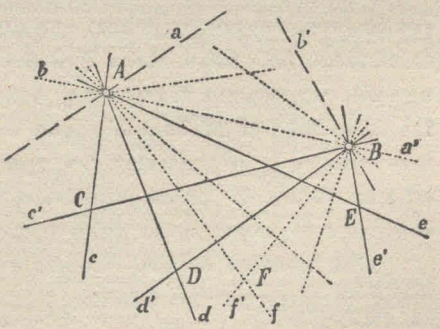
$$lm' - l'm = 0. \tag{2}$$

La (2) è di secondo grado nelle coordinate x, y (che entrano linearmente nei polinomi l, m, l', m'); il luogo nominato è dunque una curva di *secondo ordine*. I centri S, S' dei due fasci appartengono poi al luogo, perchè le coordinate del punto S, ad esempio, annullano i polinomi l, m, e quindi soddisfano alla (2).[1]

248. Costruzione di una conica determinata da cinque punti. — Ricordiamo ora che una conica è pienamente determinata quando si conoscano cinque dei suoi punti, di cui mai tre siano allineati (n. 228). Sarà possibile disporre i due fasci proiettivi, di cui parla il teorema precedente, in guisa che la conica da essi generata passi per cinque punti reali assegnati?

Scelti due, A e B, dei cinque punti come centri dei due fasci, proiettiamo da essi gli altri tre C, D, E, mediante le due terne di rette c, d, e; c', d', e'; e riferiamo proiettivamente i due fasci A, B, in guisa che queste terne si corrispondano (n. 170). *Il luogo della intersezione F di rette corrispondenti f, f' dei due fasci è una conica che* (venendo a passare per i cinque punti dati) *risolve il problema.*

Facendo variare le rette corrispondenti f, f', si ottengono quanti punti si vogliano della nostra curva. La costruzione di ciascun punto F porta dunque a determinare la ulteriore intersezione della curva con una retta f, uscente da uno, A ad es., dei cinque punti dati; un siffatto problema si risolve colla sola riga.



La seconda intersezione F della retta f colla curva è, in generale, distinta dalla prima intersezione A. Ma se la retta f, descrivendo il fascio A, assume quella posizione a che corrisponde alla retta $BA \equiv a'$ del fascio B, le sue intersezioni colla curva vengono a coincidere in A;

[1] Se la retta SS' comune ai due fasci fosse unita, rappresentando con $l = 0$ quella retta, il polinomio l' si potrebbe ritener identico al polinomio l, e la equazione (2) del luogo assumerebbe la forma

$$l(m - m') = 0.$$

Ora questa rappresenta l'insieme delle due rette

$$l = 0, \qquad m - m' = 0,$$

di cui la prima è la SS', mentre la seconda sarà il luogo delle intersezioni di rette corrispondenti non unite. Si ritrova così la proprietà (n. 168) che i due fasci-proiettivi S, S', aventi una retta unita, sono prospettivi (essendo $m - m' = 0$ l'asse di prospettiva).

dunque a è *tangente* alla conica in A. *Se una conica è generata mediante fasci proiettivi, alla congiungente i centri dei due fasci, considerata in uno di essi, corrisponde nell'altro fascio la tangente alla conica nel centro di questo.*

Segue di qua il modo di costruire la tangente in uno, A, dei punti dati. Ma segue pure che: *una conica è pienamente determinata e può costruirsi mediante fasci proiettivi, quando di essa si conoscano quattro punti e la tangente in uno di essi, o tre punti e le tangenti in due di essi.* Infatti, dette a, b' le tangenti in A e B, e detta $a' \equiv b$ la retta AB, considerata rispettivamente nei fasci B, A, ricorreremo, per il primo problema, alla proiettività che muta a, c, d in a', c', d'; per il secondo, alla proiettività che muta a, b, c in a', b', c'.

249. Punteggiata sopra una conica e inviluppo delle tangenti alla curva. — Poichè una conica è determinata da cinque quali si vogliano dei suoi punti, e, dati questi, la curva può costruirsi mediante fasci proiettivi, si conclude:

Una curva di secondo ordine (reale) può sempre riguardarsi come luogo delle intersezioni di rette corrispondenti in due fasci proiettivi, i cui centri siano due punti generici della curva; od anche:

Le rette, che proiettano un punto mobile lungo una conica da due punti fissi di questa, descrivono due fasci proiettivi.

Il teorema fu già dimostrato per il cerchio (n. 177), che è una conica particolare. Le conseguenze, che ne deducemmo allora (indipendenti, come fu notato, dal fatto che i due fasci risultavano, non solo proiettivi, ma uguali), si possono trasportare senz'altro alle coniche. Colle stesse parole ivi adoperate si possono dunque definire il birapporto di quattro punti di una conica, la proiettività fra una punteggiata tracciata sopra una conica ed una forma di prima specie, o tra due punteggiate sopra una stessa conica, e la involuzione sulla conica.

Dal teorema stesso, enunciato sotto la seconda forma, possiamo dedurre la proposizione duale:

I punti in cui una tangente mobile di una conica sega due tangenti fisse di questa descrivono due punteggiate proiettive.

Siano infatti s e t due tangenti alla conica nei punti S_1, T_2; prendiamo sulla curva altri punti A, B, C, ... Sussiste intanto la proiettività tra fasci

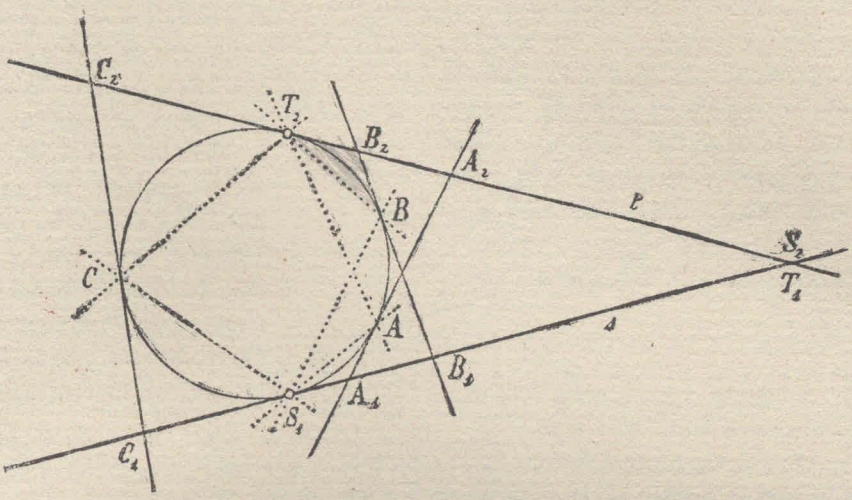
$$(1) \qquad S_1 (A\,B\,C\,...) \overline{\wedge} T_2 (A\,B\,C\,...).$$

Ma il primo fascio è proiettivo alla punteggiata $A_1\,B_1\,C_1$ ... segata su s dalle tangenti in A, B, C, ..., perchè quei punti sono i poli delle rette

S_1A, S_1B, S_1C, ... (n. 237). Per la stessa ragione il secondo fascio è proiettivo alla punteggiata $A_2\,B_2\,C_2$ ... segata dalle tangenti su t. Segue

$$(2) \qquad A_1\,B_1\,C_1 \ldots \overline{\wedge}\; A_2\,B_2\,C_2 \ldots$$

che dimostra appunto il teorema.



Ricordando che alla retta s del fascio S_1 corrisponde la $T_2\,S_1$ nel fascio S_2 e considerando i poli delle due rette, si conclude inoltre che al punto di incontro (T_1 o S_2) delle due tangenti s e t, considerato sopra una di queste, corrisponde sull'altra tangente il punto di contatto (T_2 o S_1).

Tenendo conto di questa osservazione, si può dimostrare il duale del teorema di STEINER-CHASLES:

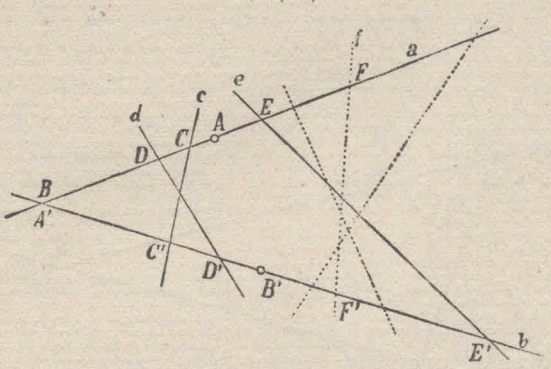
Le rette congiungenti punti corrispondenti in due punteggiate proiettive, situate in un piano ma non sovrapposte, toccano una stessa conica che ha pure per tangenti i sostegni delle due punteggiate.

Siano s e t i sostegni di due punteggiate proiettive (2), che supporremo non prospettive, escludendo così un caso privo di interesse. Detti S_1, T_2 i punti di s e t che corrispondono alla comune intersezione $S_2 \equiv T_1$, costruiamo la conica che passa per S_1, T_2 tocca ivi le rette s, t e tocca inoltre la retta $A_1\,A_2$. Questa costruzione, come poi vedremo (n. 254), può farsi senza ricorrere al teorema in esame. Le tangenti alla detta conica segano su s e t due punteggiate legate da una proiettività che, avendo comune colla (2) tre coppie: $S_1\,S_2$, $T_1\,T_2$, $A_1\,A_2$, coincide con essa. Dunque le rette B_1B_2 $C_1\,C_2$, ... toccano quella stessa conica.

250. Costruzione di una conica determinata da cinque tangenti. — L'ultimo teorema ci permette di risolvere il problema seguente, duale di quello trattato al n. 248: *date cinque tangenti di una conica, costruire quante*

altre tangenti si vogliano alla curva; brevemente, *costruire la conica per tangenti.*

Siano a, b, c, d, e le cinque tangenti date (che supporremo reali). Assunte due tra quelle, ad es. a e b, come sostegni di punteggiate, si seghino con esse le tre rette c, d, e; si otterranno le terne di punti $C\,D\,E$, $C'\,D'\,E'$.



Si costruisca ora la proiettività tra le due punteggiate determinata da queste due terne: ogni nuova coppia di punti F, F', corrispondenti in essa, darà una nuova tangente $f \equiv F\,F'$ alla conica richiesta. Ciascuna costruzione porta dunque a condurre, per un punto F di una tangente a assegnata, l'ulteriore tangente f alla conica; la costruzione si eseguisce colla sola riga.

Quella tangente f differisce, in generale, dalla tangente data a uscente dallo stesso punto F; la f viene però a coincidere colla a se il punto F, descrivendo a, si porta in quel punto A che ha per corrispondente su b la intersezione $A' \equiv a\,b$ dei due sostegni. Dunque A è il punto di contatto della conica con a. Similmente al punto $B \equiv a\,b$, considerato in a, corrisponde su b il punto di contatto B'. Segue di qua che *una conica è determinata e può costruirsi per tangenti, quando di essa siano date quattro tangenti e il punto di contatto sopra una di esse, o tre tangenti e i punti di contatto sopra due di esse.*

Osservazione. — Riassumendo i risultati dell'ultimo numero e del n. 248, possiamo dire di saper costruire una conica di cui si conoscano *cinque* elementi fra punti e tangenti, purchè ciascuna tangente data passi per uno dei punti dati, se prevale il numero di questi, o dualmente; nel primo caso la conica si costruirà per punti, valendosi di due fasci proiettivi; nel caso duale si costruirà per tangenti, valendosi di due punteggiate proiettive.

251. Teoremi di PASCAL **e** BRIANCHON. — Dalla generazione del cerchio mediante due fasci proiettivi (uguali) abbiamo dedotto (n. 179) il teorema di PASCAL sull'esagono iscritto in un cerchio. Lo stesso teorema e la stessa dimostrazione si trasportano alle coniche. Ma per queste curve il teorema è invertibile, e dà quindi la condizione necessaria e sufficiente perchè sei punti appartengano ad una conica. Per metter ciò in luce riproduciamo qui la dimostrazione. Trasformando poi questa per dualità piana,

si perviene al teorema di destra, che il BRIANCHON dedusse dal teorema di PASCAL, mutando l'esagono iscritto in un seilatero circoscritto mediante la polarità determinata dalla conica.

Teorema di PASCAL (1640):

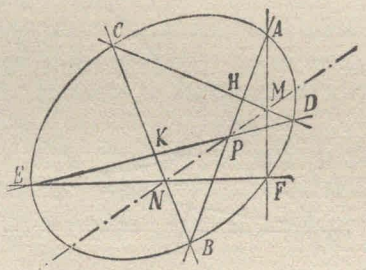
Se un esagono semplice è iscritto in una conica, le intersezioni delle tre coppie di lati opposti stanno sopra una stessa retta (detta di PASCAL); e viceversa, *se in un esagono semplice si verifica l'ultima proprietà, i vertici di esso appartengono ad una stessa conica,* che può anche degenerare in due rette.

Teorema di BRIANCHON (1806):

Se un seilatero semplice è circoscritto ad una conica, le congiungenti le tre coppie di vertici opposti passano per uno stesso punto (detto di BRIANCHON); e viceversa, *se in un seilatero semplice si verifica l'ultima proprietà, i lati di esso toccano una stessa conica* (inviluppo), che può anche degenerare in due punti.

Dimostreremo il teorema di sinistra. Consideriamo sei punti A, B, C, D, E, F, dei quali supporremo (lasciando da parte i casi di degenerazione) che mai tre siano allineati. Da due di questi, A, E, proiettiamo gli altri quattro; sappiamo che la condizione necessaria e sufficiente affinchè i sei punti appartengano ad una conica è

(1) $\qquad A(CBDF) \overline{\wedge} E(CBDF).$



Segando il primo fascio colla retta CD, il secondo colla CB, la condizione si traduce nell'altra

(2) $\qquad CHDM \overline{\wedge} CBKN,$

dove H, M, K, N indicano punti sezioni delle rette cui corrispondono. Le due punteggiate riescono anzi prospettive, perchè C è punto unito; quindi la condizione (2) esprime che le congiungenti punti omologhi HB, DK, MN passano per uno stesso punto P; od in altre parole, che il punto P, intersezione delle due prime rette, si trova allineato coi punti M ed N. Ora i punti

$$P \equiv AB \cdot DE, \qquad N \equiv BC \cdot EF, \qquad M \equiv CD \cdot FA$$

sono le intersezioni delle coppie dei lati opposti (1° e 4°, 2° e 5°, 3° e 6°) dell'esagono semplice $ABCDEF$. Si conclude che la condizione primitiva equivale a quella espressa dal verificarsi del teorema di PASCAL.

Osservazione I. — La dimostrazione del teorema di PASCAL continua a sussistere se il vertice B coincide con A, purchè per retta AB si intenda la tangente in A alla conica; ed anche se inoltre il vertice D coincide con E, facendo un'analoga convenzione per la retta DE. Si otten-

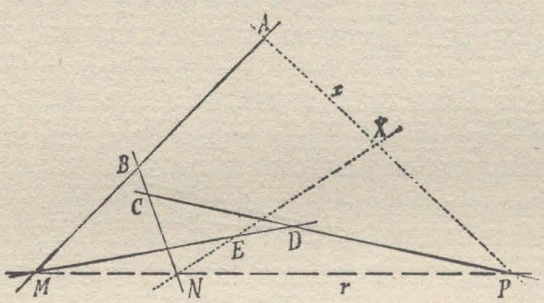
gono così proprietà di un pentagono o quadrangolo iscritto in una conica, che possono dar luogo a speciali enunciati. È preferibile però ricorrere sempre all'enunciato del teorema di PASCAL, ricordando che coppie di vertici successivi possono venire a coincidere, pur di sostituire ad ogni lato che sparisce, la tangente che esso ha per limite. Considerazioni analoghe (duali) si ripetono per il teorema di BRIANCHON.

Enunceremo soltanto, per la loro semplicità, i corollari seguenti, cui le dette considerazioni di continuità condurrebbero, e che giustificheremo presto per altra via.

Se un triangolo è iscritto in una conica, le tangenti nei vertici di esso segano i lati opposti in tre punti di una retta.

Se un trilatero è circoscritto ad una conica, i punti di contatto dei suoi lati, congiunti coi vertici opposti, danno tre rette passanti per uno stesso punto.

Osservazione. II. — Il teorema di PASCAL (o BRIANCON) permette di risolvere i problemi trattati nel n. 248 (o 250) per una via diversa, almeno nel linguaggio, da quella ivi esposta.



Si voglia, ad es., costruire una conica, di cui son noti cinque punti A, B, C, D, E. Per uno di essi, A, si condurrà una retta ad arbitrio x, sulla quale si determinerà la ulteriore intersezione X con la conica, in guisa che l'esagono $ABCDEX$ verifichi la proprietà assegnata dal teorema di PASCAL. La figura qui di fronte indica i particolari della costruzione. Variando x intorno ad A, si ottengono quanti si vogliano punti della curva.

Esercizi.[1] I. — 1) Corollari della costruzione delle coniche mediante fasci proiettivi sono i seguenti:

a) è costante l'area del parallelogramma che ha due lati sopra gli asintoti di una iperbole ed un vertice variabile sulla curva;

b) se da due punti fissi di una iperbole si proietta, sopra un asintoto, un punto mobile lungo la curva, la distanza delle due proiezioni è costante;

c) una iperbole ed i suoi asintoti determinano sopra ogni trasversale due segmenti aventi lo stesso punto medio; in particolare, il tratto di tangente ad una iperbole compreso fra gli asintoti è diviso per metà dal punto di contatto.

[1] Per le costruzioni di coniche definite da cinque elementi, v. gli esercizi in fine di questo Capitolo.

2) Corollari della costruzione delle coniche mediante punteggiate proiettive sono i seguenti:

a) una tangente variabile ad una parabola sega sopra due tangenti fisse punteggiate simili;

b) è costante l'area del triangolo formato dagli asintoti di una iperbole con una tangente variabile.

3) Mentre due fasci direttamente uguali (nè sovrapposti, nè prospettivi) generano un cerchio, due fasci inversamente uguali (soddisfacenti alle stesse condizioni) generano una iperbole equilatera, le cui tangenti nei centri dei fasci sono parallele tra loro. Viceversa, i punti di una iperbole equilatera sono proiettati da due suoi punti, le cui tangenti siano parallele, mediante due fasci inversamente uguali.

4) Il luogo di un punto, da cui le due coppie di vertici opposti di un parallelogramma sono proiettate mediante coppie di rette appartenenti ad una involuzione simmetrica, è una iperbole equilatera circoscritta al parallelogramma.

5) Se un angolo di data grandezza si muove in un piano in guisa che il vertice descriva una retta fissa ed un lato passi per un punto fisso, l'altro lato inviluppa una parabola, che tocca pure la retta fissa.

6) Se due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ di data grandezza ruotano intorno ai loro vertici fissi S, S' in modo che il punto aa' percorra una retta, il punto bb' descriverà una conica passante per S, S' (*descrizione organica* delle coniche di NEWTON).

7) Il luogo di un punto, dal quale i vertici di un quadrangolo vengono proiettati mediante quattro rette formanti un birapporto assegnato, è una conica circoscritta al quadrangolo; come si costruisce la tangente in un vertice di questo, ed in conseguenza la curva?

8) Questione duale. In particolare: le rette sulle quali due angoli di un triangolo determinano due segmenti di dato rapporto, inviluppano una parabola iscritta nel triangolo; per un punto del piano passano dunque al più due rette siffatte, ed una sola se il punto è improprio.

9) Dato un triangolo, condurre una retta sulla quale due angoli di quello intercettino due segmenti di lunghezza assegnata (n. 179, es. 14)).

10) Due triangoli iscritti in una conica sono circoscritti ad un'altra; e viceversa (cfr. n. 246, es. 40)); (detti ABC, DEF i due triangoli, si considerino i due fasci proiettanti da A e D gli altri quattro punti, e si seghino con BC, EF, rispettiv.; ecc.).

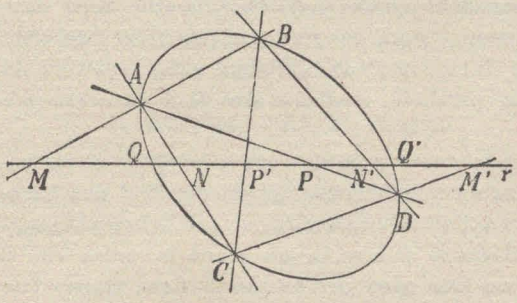
11) Due triangoli autopolari rispetto ad una conica sono iscritti in una seconda conica, e circoscritti ad una terza (cfr. n. 246, es. 38)); (si consideri il fascio $A(BCEF)$ e la punteggiata dei poli,...).

II. — 12) Le coppie di punti segate sopra una conica dalle coppie di una involuzione in un fascio avente il vertice sulla curva stanno su rette passanti per uno stesso punto, *polo* della involuzione (cfr. n. 188, oss. I).

13) In particolare: le corde di una conica che sono viste da un punto fisso della curva sotto un angolo retto, passano per uno stesso punto (detto *punto di* FRÉGIER) situato sulla normale alla curva nel punto primitivo. Se la conica è una iperbole equilatera, il punto di FRÉGIER è improprio, e tutte quelle corde sono parallele alla normale.

14) Si trasformi per dualità l'es. 12). Si deduca, in particolare, che « il luogo di un punto, dal quale si possono condurre tangenti perpendicolari fra loro ad una parabola, è una retta (*direttrice*) ».

252. Teorema di Desargues sulle coniche. — Per costruire una conica determinata da cinque condizioni conviene spesso ricorrere al seguente teorema, dovuto a Desargues (1639), di cui sussiste pure il teorema duale:



Una trasversale sega una conica, e le coppie di lati opposti di un quadrangolo iscritto, in coppie di una stessa involuzione.

Sia $ABCD$ il quadrangolo iscritto, ed r una trasversale che seghi la curva nei punti QQ' reali e distinti, e le tre coppie di lati opposti del quadrangolo (AB, CD), (AC, BD), (AD, BC) nelle tre coppie di punti MM', NN', PP'. Da due vertici del quadrangolo, ad es. da A e B, proiettiamo gli altri due vertici ed i punti QQ'; otterremo

$$A(CDQQ') \overline{\wedge} B(CDQQ'),$$

e, segando con r,

$$NPQQ' \overline{\wedge} P'N'QQ',$$

donde (n. 147, I)

$$NPQQ' \overline{\wedge} N'P'Q'Q.$$

Questa ci dice che NN', PP', QQ' sono tre coppie di una involuzione (n. 181). Alla quale appartiene pure la coppia MM', come risulta, sia dal teorema del n. 185, sia dal ragionamento ora fatto, applicato ad altri due centri di proiezione, A e C, ad es.

Per i quattro punti A, B, C, D passano infinite coniche, ciascuna delle quali sega sulla retta r (ove la incontri) una coppia della involuzione determinata dalle coppie MM', NN', PP'. Possiamo dunque enunciare il teorema di sinistra:

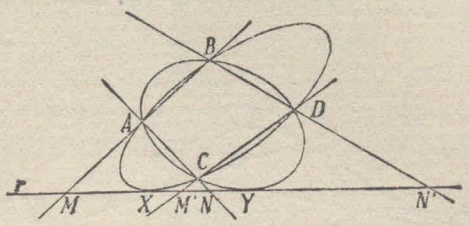
Le infinite coniche circoscritte ad un quadrangolo segano sopra una trasversale coppie di una involuzione, a cui appartengono le coppie segate sulla trasversale dalle tre coppie di lati opposti del quadrangolo (le quali sono coniche degeneri circoscritte al quadrangolo).

Le coppie di tangenti, che da un punto si possono condurre alle infinite coniche iscritte in un quadrilatero,[1] *formano una involuzione, a cui appartengono le coppie proiettanti dal punto le tre coppie di vertici opposti del quadrilatero* (le quali sono coniche inviluppi degeneri iscritte nel quadrilatero).

[1] Una conica dicesi *iscritta* in un n. latero quando ne tocca i lati.

I teoremi di DESARGUES sulla involuzione (n. 185) sono evidentemente inclusi in questi.

253. Costruzione di una conica che passi per quattro punti e tocchi una retta; problema duale. — La involuzione sopra la trasversale r, di cui parla il teorema di sinistra, può essere iperbolica, od ellittica (parabolica solo nel caso che la trasversale passi per un vertice del quadrangolo). Supposta iperbolica, e detti X, Y i punti doppi reali, la conica determinata dai cinque punti A, B, C, D ed X sega la trasversale r in un secondo punto, che non può differire dal primo X; dunque, tra le coniche passanti per A, B, C, D, ve n'è una tangente alla r in X, ed una seconda tangente in Y. Si ha così il modo di risolvere il problema di sinistra, determinando i punti doppi X, Y di una certa involuzione (problema questo di secondo grado), e poi riducendosi a costruzioni note (n. 248):



Costruire una conica che passi per quattro punti, e tocchi una retta non contenente alcuno di quelli.

Costruire una conica che tocchi quattro rette, e passi per un punto non appartenente ad alcuna di quelle.

Il problema ammette due soluzioni, o nessuna.

Caso particolare metrico del problema di sinistra (supponendo la retta all'infinito) è il seguente: *costruire una parabola che passi per quattro punti assegnati.*

254. Corollari del teorema di DESARGUES. — La dimostrazione del teorema di DESARGUES, e le conseguenze che ne abbiamo dedotte, continuano a sussistere se il vertice C del quadrangolo viene a coincidere con A, purchè per retta AC si intenda la tangente alla conica in A; si può inoltre far coincidere D con B, intendendo per retta BD la tangente in B. In quest'ultimo caso, invece di infinite coniche circoscritte ad un quadrangolo, avremo infinite coniche tangenti a due rette fisse AS, BS in due punti fissi A, B; e la involuzione segata da quelle sopra una trasversale r sarà determinata dalla coppia NN', traccia delle tangenti fisse AS, BS (costituenti una prima conica degenere), e dal punto doppio $M \equiv M'$, traccia della retta $AB \equiv CD$ (la quale, contata due volte, dà una seconda conica degenere). Abbiamo così il teorema di sinistra:

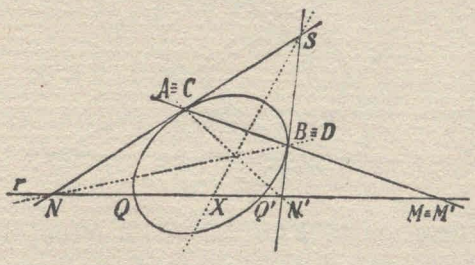
Le infinite coniche, che toccano due lati di un triangolo nei vertici situati sopra il terzo lato, segano so-

Le coppie di tangenti condotte da un punto alle infinite coniche, che toccano due lati di un triangolo nei

pra una trasversale coppie di una involuzione, cui appartengono la coppia segata dai primi due lati del triangolo, ed un punto doppio segato dal terzo lato.

vertici situati sul terzo lato, formano una involuzione, cui appartengono la coppia di rette proiettanti quei due vertici, ed una retta doppia proiettante il terzo vertice.

Fra le coniche nominate nel teorema di sinistra ve n'è una sola (oltre alla retta doppia $A\,B$) che tocchi la trasversale r. Il punto di contatto X, doppio per la involuzione, è coniugato armonico dell'altro punto doppio M rispetto alla coppia $N\,N'$; esso dunque si costruisce tirando le rette $A\,N'$, $B\,N$, e congiungendone la intersezione ad S mediante la retta $S\,X$. Segue di qua che, se una conica è iscritta nel triangolo $S\,N\,N'$, le congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati opposti concorrono in un punto. Con ciò rimane giustificato uno dei teoremi enunciati nella Oss. I al n. 251; l'altro segue per dualità.



255. Intersezioni di due coniche. — I risultati degli ultimi numeri (nn. 252-254) possono confermarsi ed estendersi per via analitica. A tal fine conviene premettere alcune considerazioni sul sistema di due coniche.

Date le equazioni di due coniche

$$(1)\quad f(x,\,y) \equiv a_{11}x^2 + 2\,a_{12}x\,y + a_{22}y^2 + 2\,a_{13}x + 2\,a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$(2)\quad \varphi(x,\,y) \equiv b_{11}x^2 + 2\,b_{12}x\,y + b_{22}y^2 + 2\,b_{13}x + 2\,b_{23}y + b_{33} = 0,$$

proponiamoci di determinare i punti ad esse comuni.

Dovremo risolvere il sistema delle due equazioni nelle incognite x, y; perciò immaginiamole ordinate rispetto ad una delle incognite, ad esempio rispetto ad y, ed eliminiamo y tra quelle. Otterremo una equazione *risultante*, contenente la sola x, la quale vi comparirà a grado $2 \cdot 2 = 4$, in virtù del teorema di BÉZOUT.[1] L'equazione risolta fornirà dunque quattro valori per la x; siano x_1, x_2, x_3, x_4. Sostituendo nelle (1), (2), al posto di x, uno di questi valori, ad es. x_1, si ottengono due equazioni quadratiche nella sola y, le quali hanno una radice comune y_1 (e in generale una sola), che si determina con una operazione di massimo comun divisore tra

[1] In generale quel teorema dice che, se le due equazioni primitive sono dei gradi m, n, l'equazione risultante sarà di grado $m\,n$; donde segue che *due curve algebriche di ordini m, n, hanno m n intersezioni*. V., a questo proposito, CAPELLI, *Istituzioni di analisi algebrica* (1902), pag. 573, dove il caso che a noi interessa è trattato in tutti i particolari.

i due primi membri. Così si sarà ottenuta una prima intersezione (x_1, y_1) delle due coniche; e similmente si troveranno altre tre intersezioni (x_2, y_2) (x_3, y_3), (x_4, y_4). Concludiamo che *due coniche si segano in quattro punti;* a meno che le coniche non coincidano, o non si spezzino in due coppie di rette aventi una retta comune.

La determinazione analitica dei quattro punti dipende dunque dalla risoluzione di una equazione di quarto grado ad una incognita, equazione i cui coefficienti sono reali se tali sono, come supporremo, i coefficienti della (1) e (2). Le particolarità che possono presentare le radici di una siffatta equazione (radici reali, o immaginarie coniugate, distinte o coincidenti) si traducono in particolarità relative ai quattro punti nominati. Ci limitiamo ad enumerarle qui, riservandoci di esaminare più accuratamente qualche caso nel seguito.

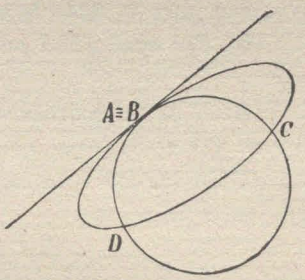
a) Le quattro intersezioni A, B, C, D di due coniche possono esser tutte distinte (caso generale), e precisamente:

1) tutte reali; è il caso di due coniche circoscritte ad un quadrangolo;

2) due A, B reali, e due C D immaginarie coniugate; tale caso si presenta, ad es., per due cerchi intersecantisi in due punti A, B (allora C, D cadono nei punti ciclici);

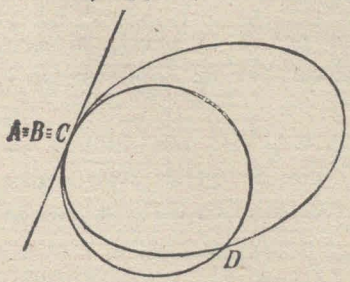
3) tutte immaginarie, A coniugata con B, e C con D; si considerino, ad es., due cerchi non secantisi.

b) Delle quattro intersezioni alcune possono coincidere. Se due o più coincidono in A, si dice che le due coniche *si toccano* in A, e si dimostra che hanno ivi la stessa tangente; vanno qui distinti i casi seguenti:



4) due intersezioni $A \equiv B$ coincidono in un punto reale, dove si ha un *contatto semplice* (o *del primo ordine,* o *bipunto*), e le altre due intersezioni C, D sono reali e distinte, come nella figura qui tracciata;

5) oppure, oltre al contatto semplice $A \equiv B$, si hanno due intersezioni immaginarie coniugate, come ad es. nel caso di due cerchi tangenti;



6) tre intersezioni $A \equiv B \equiv C$ coincidono in un punto reale, dove le coniche hanno un *contatto del secondo ordine* (o *tripunto,* o *punto di osculazione*), e la quarta intersezione D è reale e distinta da quelle; si dimostra poi che nel punto A le coniche, oltre a toccarsi, si attraversano, come nella figura qui accanto;

7) le quattro intersezioni $A \equiv B \equiv C \equiv D$ coincidono in un punto reale, dove si ha un *contatto del terzo ordine* (o *quadripunto*);

8) possono finalmente due intersezioni $A \equiv B$ coincidere in un primo punto, e le altre due $C \equiv D$ in un secondo punto, nel qual caso le coniche diconsi *bitangenti;* ma i due punti di contatto A e C possono essere: o reali e distinti, come nelle coniche di cui parla il teorema del n. 254;

9) oppure immaginari e coniugati; ciò, ad es., accade per due cerchi concentrici, i quali, come vedremo, si toccano nei punti ciclici.

256. Fascio di coniche. — Qualunque sia il caso in cui si trovino le due coniche (1) e (2), è facile scrivere la equazione di ogni altra conica passante per le loro intersezioni. Si formi infatti una combinazione lineare delle (1) e (2), adoperando due parametri λ, μ, non entrambi nulli. Si otterrà una equazione

$$\lambda f(x, y) + \mu \varphi(x, y) = 0, \tag{3}$$

di secondo grado in x, y, la quale rappresenta dunque una conica. Al variare di λ e μ, o meglio del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$, si hanno infinite coniche, tra le quali la (1) ($\lambda \neq 0$, $\mu = 0$) e la (2) ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$); esse formano un sistema detto *fascio di coniche* (cfr. n. 49).[1]

Proprietà fondamentali del fascio sono le seguenti:

a) *Ogni punto (reale o immaginario) comune alle coniche* (1) *e* (2) *appartiene pure a tutte le coniche del fascio;*

b) *Per ogni altro punto del piano passa una, ed una sola conica del fascio.*

Infatti, se le coordinate (x', y') di un punto P annullano insieme i polinomi (1) e (2), esse annulleranno pure il polinomio (3), donde il teorema *a*). Se invece i valori $f(x', y')$, $\varphi(x', y')$ non sono entrambi nulli, allora dalla relazione.

$$\lambda f(x', y') + \mu \varphi(x', y') = 0$$

si potrà ricavare in modo perfettamente determinato, il rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ $\left(\text{o } \frac{\mu}{\lambda}\right)$; sostituendo il valore trovato nella (3), divisa per μ (o per λ), si avrà l'equazione di quella conica del fascio che passa per P; donde segue il teorema *b*).

I quattro punti comuni alle curve (1), (2), e quindi alle infinite coniche del fascio, si chiamano *punti base* del fascio. Se questi sono reali e distinti, vertici di un quadrangolo, il fascio è costituito da tutte le coniche circoscritte al quadrangolo.

---

[1] Il caso particolare del fascio di cerchi fu già studiato al n. 52.

Le coniche di un fascio segano sopra una retta del piano infinite coppie di punti. Se tale retta è, ad es., l'asse x (come può sempre supporsi, eseguendo, ove occorra, una trasformazione di coordinate, che muta la (3) in una equazione dello stesso tipo), la coppia segata dalla (3) sarà data (per $y = 0$) da

$$\lambda f(x, 0) + \mu \varphi(x, 0) = 0$$

ossia

$$\lambda (a_{11} x^2 + 2 a_{13} x + a_{33}) + \mu (b_{11} x^2 + 2 b_{13} x + b_{33}) = 0.$$

Ma, al variare di $\frac{\lambda}{\mu}$, questa coppia di punti descrive sull'asse x una involuzione (n. 184). Concludiamo dunque col seguente enunciato, che presenta sotto la forma più generale (dovuta a STURM) il teorema di DESARGUES (n. 252):

Le infinite coniche di un fascio segano sopra una trasversale coppie di una involuzione.

***257. Coniche degeneri in un fascio.** — La conica

$$f(x, y) + k \varphi(x, y) = 0 \tag{3'}$$

$\left(\text{dove } k = \frac{\mu}{\lambda}\right)$ è degenere se si annulla il suo discriminante, se è dunque

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k b_{11} & a_{12} + k b_{12} & a_{13} + k b_{13} \\ a_{21} + k b_{21} & a_{22} + k b_{22} & a_{23} + k b_{23} \\ a_{31} + k b_{31} & a_{32} + k b_{32} & a_{33} + k b_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Ora questa è una equazione di terzo grado in k, la quale fornisce per k tre valori. Perciò, *in un fascio di coniche si trovano tre coniche degeneri* (a meno che tutte le coniche del fascio non siano degeneri).

Se i punti base del fascio A, B, C, D sono tutti distinti, vertici di un quadrangolo, le tre coniche degeneri son date dalle tre coppie di lati opposti del quadrangolo

$$AB, CD; \qquad AC, BD; \qquad AD, BC. \tag{5}$$

E sono tutte reali se quei punti sono reali; oppure una sola reale (ad es. la prima), e le altre due immaginarie, se due soli di quei punti (ad es. A, B) sono reali, o se sono tutti immaginari (ad es. A coniugato con B, e C con D); nell'ultimo caso però sono reali i tre punti doppi delle coniche degeneri

$$M \equiv AB \cdot CD, \qquad N \equiv AC \cdot BD, \qquad P \equiv AD \cdot BC,$$

mentre nel penultimo caso è reale solo il punto M. Il triangolo diagonale MNP del quadrangolo $ABCD$, iscritto in tutte le coniche del fascio, è autopolare (n. 240) rispetto alle dette coniche; e si dimostra, nel caso di punti base distinti, che è l'unico triangolo godente siffatta proprietà.

Nel caso di punti base non tutti distinti, le tre coniche degeneri del fascio vengono in parte, o tutte, a coincidere. Qui basterà notare (v. n. 258) che le dette coniche sono ancora fornite dallo schema (5), purchè si intenda, al solito, per retta congiungente due punti base coincidenti, la tangente comune ivi alle coniche del fascio; (sicchè, se $A \equiv B$, delle tre coniche degeneri una è formata dalla tangente in A presa colla retta CD, e le altre due coincidono nella coppia $AC \cdot BD \equiv AD \cdot BC$). Il triangolo autopolare comune degenera, o diviene indeterminato; quest'ultimo caso si presenta se le coniche del fascio si toccano in due punti $A \equiv B$, $C \equiv D$ perchè allora il punto $M \equiv AB \cdot CD$, insieme con due punti qualsivogliano di AC che siano coniugati armonici rispetto ad A e C, fornisce un siffatto triangolo.

Osservazione. — Per determinare i punti A, B, C, D comuni alle due coniche $f = 0, \varphi = 0$, si può (anzichè seguire la via indicata al n. 255) risolvere l'equazione cubica (4), sostituirne una radice k_1 nella (3'), e scrivere le equazioni staccate delle due rette, ad es. AB, CD, componenti la corrispondente conica degenere del fascio, il che si ottiene risolvendo una equazione di secondo grado ad una incognita (n. 243). Le intersezioni A, B e C, D di quelle rette colla conica $f = 0$ (o $\varphi = 0$), le cui coordinate si ricavano risolvendo altre due equazioni quadratiche ad una incognita, sono i punti cercati. Oppure possiamo valerci di due radici distinte k_1, k_2 (se esistono) della (4), scrivere le equazioni staccate delle rette AB, CD e AC, BD componenti le relative coniche degeneri (per il che basta risolvere due equazioni quadratiche), e determinare le intersezioni delle rette di una coppia colle rette dell'altra. In ogni caso: *la risoluzione della equazione di 4° grado, a cui conduce il detto problema trattato direttamente* (n. 255), *può farsi dipendere dalla risoluzione di una equazione di 3° e di due o tre equazioni quadratiche;* ciò d'accordo colla teoria delle equazioni di quarto grado ad una incognita.

* **258. Contatti di due coniche.** — Per giustificare alcune affermazioni contenute negli ultimi numeri, esaminiamo i vari contatti che due coniche possono avere in un punto. Assumiamo il punto, supposto reale, come origine, e la tangente alla prima conica in esso come asse y. Allora risulta facilmente che l'equazione di questa conica è del tipo

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x = 0, \tag{1}$$

dove si suppone $a_{22} \neq 0$, $a_{13} \neq 0$, per evitare casi di spezzamento. Si abbia poi una seconda conica, la quale passi per l'origine,

$$b_{11} x^2 + 2 b_{12} xy + b_{22} y^2 + 2 b_{13} x + 2 b_{23} y = 0. \tag{2}$$

Per trovare le tre rimanenti intersezioni delle due curve, qui conviene ridurre omogenee le equazioni (1), (2); fatto ciò, la terza coordinata z comparirà come fattore nell'ultimo termine della (1) e negli ultimi due ter-

mini della (2). Eliminando poi z fra le due equazioni, troveremo come risultante

$$(3) \qquad \begin{aligned}&(b_{13}x + b_{23}y)\,(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\\ &- a_{13}x\,(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2) = 0.\end{aligned}$$

Questa equazione, omogenea e di terzo grado in x, y, fornisce per il rapporto $\frac{x}{y}$ tre valori k_1, k_2, k_3, e quindi rappresenta tre rette $\frac{x}{y} = k_1, k_2, k_3$, uscenti dall'origine e passanti per le tre intersezioni richieste A, B, C. Queste si otterranno dunque determinando i punti in cui quelle tre rette segano (oltre che in O) una delle due coniche date, ad es. la (1).

Ora se si suppone che, delle tre intersezioni A, B, C, una, ad es. A, coincida con O, vuol dire che una OA delle tre rette nominate non incontra la (1) fuori di O, e viene quindi a coincidere coll'asse y, tangente alla (1) in O. Allora la (3) deve esser soddisfatta ponendo $x = 0$, y qualsiasi; deve esser cioè $b_{23}a_{22} = 0$; e siccome è per ipotesi $a_{22} \neq 0$, dobbiamo ritenere $b_{23} = 0$. Questa ci dice che la seconda conica, la cui equazione diviene

$$(2') \qquad b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x = 0,$$

(con $b_{22} \neq 0$, $b_{13} \neq 0$, per evitare casi di spezzamento) ha in O la stessa tangente $x = 0$ della prima conica; la riunione in O di due intersezioni delle due curve (*contatto di 1° ordine*) porta dunque, come si è affermato (n. 255, *b*)), che queste abbiano ivi la stessa tangente.

Riprendiamo la (3) che, nella ipotesi $b_{23} = 0$, sopprimendo il fattor comune x, assume la forma

$$(3') \qquad \begin{aligned}&(a_{11}b_{13} - a_{13}b_{11})x^2 + 2(a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12})xy\\ &+ (a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22})y^2 = 0,\end{aligned}$$

e rappresenta due rette OB, OC, congiungenti O colle altre due intersezioni delle due curve. Se una B di queste viene ancora a coincidere con O, la (3') deve fornire una radice $\frac{x}{y} = 0$; donde segue $a_{22}b_{13} - a_{13}b_{22} = 0$, ossia

$$(4) \qquad \frac{a_{22}}{b_{22}} = \frac{a_{13}}{b_{13}}.$$

Se finalmente anche l'ultima intersezione C viene a coincidere con O, i due valori di $\frac{x}{y}$ forniti dalla (3') saranno nulli, e si verificherà, oltre la condizione già scritta, anche la $a_{12}b_{13} - a_{13}b_{12} = 0$; si avranno insomma le due condizioni

$$(5) \qquad \frac{a_{12}}{b_{12}} = \frac{a_{22}}{b_{22}} = \frac{a_{13}}{b_{13}},$$

(dove a_{12}, b_{12} devono ritenersi o entrambi diversi da zero, o entrambi nulli). *La* (4), *o rispettivamente le* (5), *dànno le condizioni affinchè le due coniche* (non degeneri) (1) *e* (2') *abbiano in O un contatto di secondo ordine* (*punto d'osculazione*), *o di terzo ordine.*

Se moltiplichiamo i due membri della (2') per il fattore non nullo, nè infinito, $\frac{a_{13}}{b_{13}}$, possiamo anche presentare i risultati ottenuti dicendo che: *la equazione di una conica non degenere, avente nell'origine un contatto di primo, secondo, o terzo ordine colla* (1), *si può scrivere sotto la prima, la seconda, o la terza forma, rispettivamente*:

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \tag{6}$$

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \tag{7}$$

$$a'_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0, \tag{8}$$

dove le a' hanno valori arbitrari.

Se formiamo una combinazione lineare, mediante un parametro k, della (1) colla (6), o colla (7), o colla (8), riconosciamo anzitutto che due coniche generiche del fascio hanno tra loro un contatto del 1°, 2°, o 3° ordine, rispettivamente. Uguagliando poi a zero il discriminante della combinazione lineare, troviamo nel primo caso la relazione

$$(1+k)^2(a_{22}+k\,a'_{22}) = 0,$$

e, negli altri due,

$$(1+k)^3 = 0.$$

Ricaviamo di qua che, nel fascio delle coniche aventi un semplice contatto in O, e secantisi ulteriormente in B, C, due delle tre coniche degeneri coincidono colla coppia di rette OB, OC (corrispondente alla radice doppia $k = -1$), e la terza è formata dalla tangente in O e dalla retta BC (e corrisponde a $k = -\frac{a_{22}}{a'_{22}}$). Invece nel fascio delle coniche che hanno in O un contatto del secondo, o del terzo ordine, le tre coniche degeneri ($k = -1$) coincidono colla coppia formata dalla tangente in O e dalla retta congiungente O colla ulteriore intersezione C, distinta o coincidente con O. Tutto ciò d'accordo colle affermazioni fatte nel n. 257.

Osservazione. — Per fare un'applicazione metrica delle cose dette, notiamo che, tra le coniche osculatrici alla (1) in un punto O di essa, vi è *un* cerchio, *cerchio osculatore*. L'equazione di questo si ottiene, nella ipotesi di *coordinate ortogonali*, ponendo nella (7) $a'_{11} = a'_{22}$, $a'_{12} = 0$, e può scriversi sotto la forma

$$x^2 + y^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{\cdot\cdot}}x = 0, \tag{7'}$$

la quale mostra che il cerchio osculatore ha il centro nel punto $\left(-\frac{a_{13}}{a_{22}}, 0\right)$ dell'asse x, *normale* alla curva in O (cioè perpendicolare alla tangente), ed ha il raggio uguale al valore assoluto di $\frac{a_{13}}{a_{22}}$.

259. Equazione di una conica soggetta a date condizioni. — La considerazione dei fasci di coniche permette spesso di scrivere, nel modo più rapido, l'equazione di una conica che debba soddisfare a cinque condizioni assegnate. Se infatti quattro di queste son tali che le infinite coniche soddisfacenti ad esse formino un fascio (il che accade quando le condizioni siano lineari, cioè traducentisi in eqnazioni lineari tra i coefficienti della conica richiesta), si scriverà l'equazione della conica generica del fascio valendosi ad es. delle equazioni di due coniche degeneri di esso, e poi si calcolerà il parametro ancora disponibile in guisa da soddisfare alla quinta condizione.

Così, se le prime quattro condizioni importano il passaggio della conica per quattro punti dati A, B, C, D, si potranno scrivere anzitutto le equazioni delle rette AB, CD, AC, BD; siano, in forma abbreviata, $l = 0$, $l' = 0$, $m = 0$, $m' = 0$, ordinatamente. Allora ogni conica passante per i detti punti avrà una equazione del tipo

$$l l' + \mu m m' = 0,$$

dove μ è un parametro di cui si dispone.

Similmente, una conica che debba toccare i lati $l = 0$, $l' = 0$ di un triangolo nei vertici situati sul terzo lato $m = 0$, ha un'equazione del tipo

$$l l' + \mu m^2 = 0.$$

***260. Schiera di coniche.** — Le considerazioni degli ultimi numeri (nn. 255-259) si traducono subito per dualità. Limitiamoci qui a rilevare che due coniche (inviluppi), rappresentate dalle equazioni in coordinate di rette

$$f(u, v) = 0, \qquad \varphi(u, v) = 0.$$

hanno quattro tangenti comuni (fra reali, immaginarie, distinte e coincidenti); queste son pure tangenti alle infinite coniche date dall'equazione

$$\lambda f(u, v) + \mu \varphi(u, v) = 0.$$

al variare dei parametri λ, μ. Le coniche, che così si ottengono, formano una *schiera* (sistema duale del fascio), di cui le quattro tangenti nominate si chiamano *rette basi. Ogni altra retta del piano è tangente ad una, e ad una sola conica della schiera;* (mentre per un punto del piano passano due coniche della schiera, reali od immaginarie). Una schiera è costituita, ad es., da tutte le coniche iscritte in un quadrilatero (n. 252).

Le coppie di tangenti, condotte da un punto del piano alle infinite coniche di una schiera, formano una involuzione. Questo teorema corrisponde per dualità a quello di DESARGUES, sotto la forma generale del n. 256.

Osservazione. — Le coniche di un fascio generalmente non formano una schiera, giacchè, tra quelle, *due* toccano in generale una stessa retta del piano. Però è fascio e schiera ad un tempo il sistema delle coniche che hanno due contatti semplici in due punti fissi (*fascio-schiera delle coniche bitangenti*, cfr. n. 254), ed il sistema delle coniche che hanno un contatto quadripunto in un punto fisso.

Esercizi. I. — 1) Costruire mediante fasci proiettivi, o mediante il teorema di PASCAL:

a) una parabola, dati tre punti propri e il punto all'infinito;

b) una iperbole, dati tre punti propri e le direzioni degli asintoti (costruendo in particolare gli asintoti);

c) una iperbole, di cui siano dati tre punti propri ed un asintoto (cfr. n. 251, es. 1, *b*)), od un punto proprio e i due asintoti (cfr. n. 251, es. 1, *c*));

2) Costruire mediante punteggiate proiettive, o mediante il teorema di BRIANCHON:

a) una parabola, di cui siano date quattro tangenti (costruendo in particolare il punto all'infinito della curva, la tangente parallela ad una retta assegnata ...) ;

b) una iperbole, di cui siano date tre tangenti ed un asintoto, od una tangente e i due asintoti.

3) Costruire una conica, essendo dati tre punti di essa, e di un punto del piano conoscendosi la polare; (ciascuno dei punti dati quanti altri punti fornisce? è sempre determinato il problema?). Problema duale.

4) Costruire una conica, conoscendone un triangolo autopolare, ed inoltre due punti di essa, o due tangenti, od un punto colla relativa tangente; (quanti altri elementi della curva possono subito costruirsi? in qual caso il problema è indeterminato?).

5) Determinata una conica mediante cinque punti (o 4, 3 punti e le tangenti in 1, 2 di essi), costruire linearmente di un punto arbitrario la polare rispetto alla curva. Problema duale.

6) Rispetto alla conica dell'es. precedente, costruire il polo di una retta data (si costruiranno le polari di due punti scelti convenientemente sulla retta). Problema duale.

7) Costruire le intersezioni di una retta data con una conica determinata mediante cinque punti, o quattro punti e la tangente in uno di essi, o tre punti e le tangenti in due di essi. (Determinata la proiettività tra due fasci, che conduce a generare la conica, si seghino quelli colla retta data ...).

8) Caso particolare metrico: decidere se una conica, di cui si conoscono cinque punti (o quattro punti e la tangente in uno di essi, ...), sia un ellisse, una parabola, od una iperbole (cfr. n. 179, es. 31)).

9) Problema duale: condurre per un punto le tangenti ad una conica determinata mediante cinque tangenti (oppure quattro tangenti e il punto di contatto sopra una di esse, ...); in particolare, costruire le tangenti parallele ad una retta data.

10) Come applicazione del teorema di DESARGUES, o del duale, costruire:

a) una parabola, di cui sono dati quattro punti propri, o tre punti propri e la tangente in uno di essi;

b) una iperbole, di cui son dati due punti propri, un asintoto e una tangente:

c) una parabola, di cui son date tre tangenti ed un punto.

11) Costruire una conica che passi per tre punti A, B, C, e tocchi due rette r, s non appartenenti ad alcuno di quelli. Il problema ammette *quattro* soluzioni reali, o nessuna, secondo che A, B, C appartengono, o no, ad uno stesso dei due angoli completi rs. (Detti R, S i punti di contatto incogniti con r, s, si osservi che le infinite coniche tangenti a queste rette in quei punti segano sopra AB una involuzione nota (n. 254), di cui la retta RS contiene un punto doppio ... Ragionando analogamente sopra AC, si riesce a costruire RS in quattro modi diversi).

12) Problema duale del precedente.

II. — 13) Parecchi dei problemi grafici risolti nel testo, o in qualcuno dei precedenti esercizi, possono pure risolversi senza difficoltà anche quando, in luogo di una o più coppie di punti (o rette) reali, si assegnino una o più coppie di punti (o rette) immaginari (sottinteso *coniugati*, in senso algebrico), ciascuna coppia essendo definita mediante una involuzione ellittica sopra una retta (o in un fascio) reale, come al n. 193. Così si può « costruire la conica che passa per tre punti reali A, B, C, e per due punti immaginari appartenenti ad una retta r ». (Dei punti $AB \cdot r$, $AC \cdot r$ si costruiscano le polari rispetto alla curva; poi es. 3); la costruzione cade in difetto se A e B coincidono, ed è AC la polare di $AB \cdot r$, ma allora serve il teorema del n. 246, es. 32)). Caso particolare: « costruire colla sola riga, dato un quadrato, quanti punti si vogliano del cerchio determinato da tre punti A, B, C » (cfr. n. 193, es. 27)).

14) Problema duale. In particolare: costruire la conica che tocca tre rette reali a, b, c, e tocca inoltre le rette isotrope uscenti da un punto F; vale a dire: « costruire la conica, dato un fuoco F e tre tangenti ».[1]

15) Costruire la conica che passa per un punto reale A e per due coppie di punti immaginari, appartenenti a due rette reali r, s. (Del punto $P \equiv rs$ si conosce intanto la polare p, e quindi dal punto reale A si ricava un secondo punto reale B della conica; per determinare le intersezioni reali X, Y di p colla curva — problema di 2° grado — si applichi al triangolo AXY ed alle trasversali r, s il teorema del n. 246, es. 32); oppure, senza costruire X, Y, si determini la involuzione che ha per punti doppi X, Y — problema di 1° grado; n. 193, es. 51) —

[1] Dicesi *fuoco* di una conica, come vedremo nel Cap. V, un punto F tale che le tangenti da esso condotte alla curva passino per i punti ciclici. Sebbene alcuni di questi problemi sui fuochi vengano riprodotti in quel capitolo e risolti con mezzi speciali, stimiamo utile far vedere qui come essi rientrino, quali casi particolari metrici, in problemi proiettivi.

ed a questa ed ai punti A, B si applichi nuovamente il teorema del n. 246, es. 32). Un'altra costruzione di secondo grado consiste nel determinare il triangolo diagonale, reale, del quadrangolo avente per vertici i quattro punti immaginari dati; n. 193, es. 48); poi es. 4) del presente n.).

16) Casi particolari metrici del problema precedente e del duale sono: « costruire il cerchio passante per un punto reale e per una coppia di punti immaginari »; « costruire la conica, dati i due fuochi ed una tangente reale ».

17) Costruire una conica che tocchi una retta t, e passi per due punti reali e per una coppia di punti immaginari, o per due coppie di punti immaginari. Si troveranno due soluzioni al più (cfr. n. 253). (Si determini la involuzione, che sopra t segano le coniche per i quattro punti dati, delle quali coniche una degenere è già nota, ed un'altra può costruirsi mediante l'es. 13) o 15), prendendo ad arbitrio un punto su t; ecc.).

18) In particolare: « costruire un cerchio, che passi per due punti (reali) e tocchi una retta (reale) »; « costruire una conica, conoscendone un fuoco, un punto (reale) e due tangenti (reali) »; ecc.

19) Costruire una conica che passi per tre punti reali, e tocchi una coppia di rette immaginarie; quattro soluzioni (si applichi il procedimento dell'es. 11); poi es. 13)).

20) In particolare: « costruire una conica, dato un fuoco e tre punti (reali) »; « costruire un cerchio tangente a tre rette (reali) assegnate (cerchio iscritto od ex-iscritto a un triangolo) ».

21) Costruire una conica che passi per un punto reale, per una coppia di punti immaginari, e tocchi due rette reali; quattro soluzioni. (Della corda di contatto si determina facilmente un punto reale e la polare di esso rispetto alla conica, della quale si costruirà quindi un secondo punto reale, es. 3); poi es. 17)).

22) In particolare: « costruire un cerchio che passi per un punto (reale) e tocchi due rette (reali) »; « costruire una conica, che abbia un dato fuoco, una data tangente (reale), e passi per due dati punti (reali) ».

23) Costruire una conica che passi per tre punti (ad es. reali), e riesca bitangente ad una conica data; quattro soluzioni. (Il ragionamento dell'es. 11) si applica anche a questo caso). Problema duale.

III. — 24) I problemi precedenti si risolvono pure per via analitica, facendo uso, ad es., del procedimento indicato al n. 259; dati numerici potranno trovarsi negli es. 1), 4), 7), 8) del n. 230.

25) In particolare: « si scriva la equazione di una conica, che passi per tre punti e tocchi due rette date ». (Supposto anzitutto che le due rette siano gli assi coordinati, e che $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ sia la congiungente i punti di contatto, si osserverà che l'equazione della conica può scriversi sotto la forma: $\pm\sqrt{xy} = \alpha x + \beta y + \gamma$, nella quale i coefficienti α, β, γ si calcoleranno tenendo conto dei tre punti $P_i\,(x_i, y_i)$, per cui la curva deve passare. In generale, se le due tangenti date, reali o immaginarie, hanno le equazioni $l = 0$, $m = 0$, sotto il radicale comparirà il prodotto $l\,m$; sicchè $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha x + \beta y + \gamma$ rappresenterà, in assi ortogonali, una conica avente un fuoco nell'origine, ecc. (Si dimostri che tutti questi problemi hanno quattro soluzioni).

26) Equazione della conica che passa per tre punti dati, ed è bitangente ad una conica data $f(x, y) = 0$. (L'equazione sarà del tipo $\pm \sqrt{f(x, y)} = \alpha x + \beta y + \gamma$).

27) Equazione di una conica avente un contatto quadripunto con una data conica in un dato punto (ad es. nell'origine) e soddisfacente ad una ulteriore condizione, come è quella di essere una parabola od una iperbole equilatera (n. 246, es. 10)).

IV. — 28) Due coniche $ABCDE$, $ABCHK$, determinate ciascuna mediante cinque punti, di cui tre comuni, si segano in un quarto punto; costruirlo linearmente. (Si consideri la involuzione che le due coniche determinano sulla retta DH, ecc.). Problema duale.

29) Il problema si risolve in modo analogo (tenendo presente l'es. 13)), anche se i due punti B, C sono immaginari; in particolare: « costruire linearmente (dato un quadrato) la seconda intersezione dei due cerchi ADE, AHK ».

30) Come applicazione dell'es. 28): dati cinque punti $MNPQR$, di cui mai tre allineati, costruire il punto dal quale essi vengono proiettati mediante un gruppo di rette proiettivo ad un gruppo di cinque elementi assegnati di una forma di prima specie (cfr. n. 251, es. 7)). In particolare, se Q, R cadono nei punti ciclici: « costruire linearmente (dato un quadrato) il punto, da cui due segmenti MN, MP, aventi un estremo comune, sono visti sotto angoli assegnati (in valore e segno) ».

31) Date quattro rette $mnpq$, lati di un quadrilatero, costruire linearmente una retta, sopra cui quelle seghino una quaterna di punti simile ad una quaterna di punti assegnata.

32) Due coniche $ABCDE$, $ABHKL$, determinate ciascuna mediante cinque punti, di cui due comuni, si segano in altri due punti X, Y; costruire linearmente la retta XY, e poi (risolvendo un problema di secondo grado) i due punti stessi. (Si costruisca l'involuzione determinata dalle due coniche sulla retta CH, ecc.). In particolare: « costruire linearmente, dato un quadrato, l'asse radicale di due cerchi CDE, HKL ». La risoluzione del problema generale può anche fondarsi sul teorema seguente.

33) Le coniche di un fascio segano sopra una conica fissa, passante per due punti base del fascio, coppie di punti le cui congiungenti concorrono in uno stesso punto allineato cogli altri due punti base. Od anche: « se tre coniche hanno due punti comuni, le tre coppie di intersezioni residue delle curve a due a due stanno su rette passanti per uno stesso punto ». Il teorema sussiste anche se le intersezioni delle coniche sono in parte, o tutte, coincidenti, o immaginarie, come si dimostra, ad es., per via analitica. Come si enuncia il teorema se i due punti comuni alle tre coniche sono i punti ciclici? (cfr. n. 161).

34) Il problema di determinare le *quattro* intersezioni di due coniche K, K' può risolversi con riga e compasso nei seguenti due casi:

a) Se è dato il triangolo autopolare comune alle due curve (n. 257), ciascuna conica essendo ulteriormente determinata mediante due punti o tangenti; (si osservi infatti che una conica degenere del fascio KK' sega sopra ogni trasversale una coppia, che, oltre ad appartenere alla involuzione segata dal fascio, è divisa armonicamente da due lati del triangolo dato ...).

b) Quando siano note due tangenti comuni alle due coniche, ciascuna di queste essendo inoltre determinata, ad es., mediante la polare del punto comune alle tangenti ed un punto ulteriore; (si osservi infatti che una conica degenere del fascio KK' si compone di due rette le quali dividono armonicamente le dette polari, e segano sopra una trasversale qualsiasi una coppia appartenente ad una involuzione nota).

Si trattino questi due casi anche per via analitica (con una opportuna scelta del sistema di coordinate), dimostrando che le coordinate delle quattro intersezioni possono calcolarsi, partendo dai coefficienti delle equazioni delle coniche, mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate.

Caso particolare del problema *b*) è il seguente: « costruire le intersezioni di due coniche aventi un fuoco comune, di ciascuna curva essendo data inoltre la polare del fuoco (direttrice) ed un punto ». Caso particolare del problema duale: « determinare le tangenti comuni a due cerchi » (ed i centri di similitudine, per cui quelle passano).

V. — 35) Le tangenti condotte ad una parabola dall'ortocentro di un triangolo ad essa circoscritto, sono perpendicolari tra loro (n. 252). Di qua e dall'es. 14) del n. 251 segue che « gli ortocentri degli infiniti triangoli circoscritti ad una parabola stanno sopra una stessa retta (direttrice) », ed in particolare « gli ortocentri dei quattro triangoli formati coi lati di un quadrilatero, presi tre a tre, sono per diritto » (STEINER; v. anche n. 170, es. 9)).

36) Del teorema di DESARGUES (n. 252) sussiste pure l'inverso, che può enunciarsi così: « le coniche condotte per tre punti fissi e per le coppie di una involuzione giacente sopra una retta, passano per un quarto punto fisso, che si può costruire linearmente ». Il teorema serve a costruire una conica determinata mediante quattro o tre dei suoi punti, ed una o due coppie di punti coniugati rispetto ad essa. Proposizioni duali.

37) Corollario del teorema precedente: « le iperboli equilatere circoscritte ad un triangolo passano per l'ortocentro di questo » (BRIANCHON e PONCELET); e viceversa, ogni conica passante per i vertici e per l'ortocentro di un triangolo è una iperbole equilatera.

38) La proposizione precedente si dimostra facilmente per via analitica, ricordando la condizione perchè una iperbole di data equazione sia equilatera (n. 246, es. 10)), e dimostrando in conseguenza che in un fascio di coniche vi è, generalmente, una sola iperbole equilatera; ma se ve ne sono due, ogni conica del fascio è una iperbole equilatera, ed allora le coniche degeneri si compongono di rette ortogonali, ecc.

VI. — 39) Se $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$ sono due punteggiate proiettive situate sopra una conica K, le rette AA', BB', $CC'\ldots$ inviluppano una seconda conica K_0, bitangente alla data nelle intersezioni di questa coll'asse di proiettività (od avente con K un contatto quadripunto, se il detto asse è tangente a K).[1] (Infatti le punteggiate segate da BB', $CC'\ldots$ su AA', e da AB', $AC'\ldots$ sull'asse di proiettività risultano proiettive...; dove sta il punto di contatto di K_0 con AA'?). Teorema duale.

[1] L'inviluppo si riduce ad un fascio, se la proiettività è involutoria (n. 251, es. 12).

40) Viceversa: se le due coniche K, K_0 sono bitangenti (od hanno un contatto quadripunto), le tangenti a K_0 determinano su K, qualora la incontrino, coppie AA', BB'... di punti corrispondentisi in una proiettività. Teorema duale.

41) Dall'es. 39) seguono i corollari: « Le corde di una conica, che sono viste da un punto O di questa sotto angolo costante, inviluppano una seconda conica, bitangente alla data in due punti (immaginari), le cui tangenti si segano nel punto di FRÉGIER relativo ad O (n. 251, es. 13)) ». Il luogo del vertice di un angolo di grandezza costante circoscritto ad una parabola è una conica, e precisamente una iperbole, i cui asintoti formano un angolo doppio del dato (PONCELET); si dimostra poi che il fuoco e la direttrice (polare di esso) relativi alla parabola, sono pure fuoco e direttrice della iperbole.

42) Le corde di una conica K, i cui estremi sono proiettati da un punto O, non appartenente a K, mediante coppie di una involuzione, inviluppano una seconda conica K_0, la quale tocca le rette doppie della involuzione nei punti ove queste segano la polare di O rispetto a K. (Siano infatti OMN, $OM'N'$ due secanti di K coniugate nella involuzione: una retta t, che seghi K in due punti proiettati da O mediante una seconda coppia della involuzione, incontra pure le rette MM', NN' in due punti godenti la stessa proprietà (n. 252), i quali al variare di t descrivono due punteggiate proiettive, ecc.).

43) Segue il corollario: « Le corde di una conica K, che sono viste sotto angolo retto da un punto O non appartenente a quella, inviluppano una seconda conica K_0, che ha un fuoco in O, e come polare di O (direttrice) la polare di O rispetto a K ». La conica K_0 è un cerchio col centro in O se O è centro (polo della retta all'infinito) per la prima conica; è una parabola se la prima conica è una iperbole equilatera; degenera se i due casi si presentano insieme.

44) Dal duale del teorema 42) si deduce: « il luogo del vertice di un angolo retto circoscritto ad una ellisse, od iperbole, è un cerchio concentrico alla curva, detto *cerchio principale* ». (DE LA HIRE). Per la parabola il luogo è una retta (n. 251, es. 14)).

VII. — 45) « Le polari di un punto P, rispetto alle coniche di un fascio, formano un fascio intorno ad un punto P' (*polo coniugato* di P) (cfr. n. 193, es. 9)); e le polari di P' passano per P », sicchè tra i punti P e P' viene a stabilirsi una corrispondenza (non proiettiva) biunivoca e involutoria.[1] Le coniche del fascio che passano per P o P', toccano ivi la retta PP'. Fa eccezione solo il caso che il punto P sia vertice del triangolo autopolare comune a due, e quindi a tutte le coniche del fascio (n. 228), chè allora tutte le polari di P coincidono col lato opposto del detto triangolo. Dualmente: « i poli di una retta, rispetto alle coniche di una schiera, appartengono ad una retta »; ecc. (PONCELET).

46) Se il punto P varia, il fascio delle polari varia, mantenendosi però proiettivo a sè stesso. Segue che « il luogo dei poli di una retta, rispetto alle coniche di un fascio, è una conica, la quale passa per i tre punti diagonali del quadrangolo base, e per i sei poli della retta rispetto alle coppie di vertici del detto qua-

[1] Come degenera la corrispondenza se si tratta di un fascio-schiera (n. 160)?

drangolo ». La conica sega la retta nei punti ove questa è toccata da una curva del fascio. Teorema duale.

47) In altre parole: « la corrispondenza (*quadratica*) fra P e P' è tale che, se P descrive una retta, P' descrive una conica; alle infinite rette corrispondono le infinite coniche circoscritte ad un triangolo (autopolare del fascio), ed alla intersezione P di due rette corrisponde la ulteriore intersezione P' delle due coniche corrispondenti ». Se il triangolo autopolare ha un vertice proprio, e gli altri due nei punti ciclici del piano (come accade quando il fascio si compone di iperboli equilatere concentriche), la corrispondenza quadratica rientra nelle affinità circolari considerate al n. 209, es. 36).

48) L'equazione $\lambda l l' + \mu m m' = 0$ di ogni conica circoscritta al quadrangolo avente per lati le rette $l = 0$, ecc. (n. 259), interpretata geometricamente, conduce al teorema (di Pappo): « se una conica è circoscritta ad un quadrangolo semplice, il prodotto delle distanze di un punto variabile sulla curva da due lati opposti di quello serba un rapporto costante al prodotto delle distanze dagli altri due lati ». E dualmente. Caso particolare che $m = 0$ ed $m' = 0$ coincidano.

49) Nella ipotesi che $l = 0, \ldots$ siano equazioni normali, si cerchi la condizione perchè al quadrangolo si possa circoscrivere un cerchio; si deduca che: « se un quadrangolo completo è iscritto in un cerchio, le bisettrici dell'angolo formato da due lati opposti sono parallele alle bisettrici relative alle altre due coppie di lati opposti ».

50) Scritte le equazioni dei lati di due trilateri omologici sotto la forma adottata nel n. 135, si vedrà che la equazione

$$(r + \lambda l)\ (r + \mu m)\ (r + \nu n) + \rho l m n = 0$$

rappresenta, per ogni valore del parametro ρ, una curva (del 3° ordine) passante per le nove intersezioni dei due trilateri. Ora, se $\rho = -\lambda\mu\nu$, quella curva si spezza nella retta r, asse di omologia, ed in una conica; donde il teorema: « se due triangoli sono omologici, le sei intersezioni delle coppie di lati non omologhi appartengono ad una conica, e (dualmente) le sei congiungenti delle coppie di vertici non omologhi toccano una conica ». Questo riassume gli inversi dei teoremi di Pascal e Brianchon; da esso i teoremi diretti seguono per assurdo.

VIII. — 51) Se $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ sono tre coniche non appartenenti ad un fascio, le infinite coniche rappresentate dall'equazione

$$\lambda f + \mu\varphi + \nu\psi = 0,$$

dove λ, μ, ν sono parametri, formano un sistema (∞^2) detto *rete*. Per un punto generico del piano passano infinite coniche della rete, costituenti un fascio, che ha come base quel punto ed altri tre; per due punti generici del piano passa *una* conica della rete. Procedendo dualmente, si definisce un sistema di coniche-inviluppi detto *rete tangenziale* o *falange*.

52) Se un punto è comune alle tre coniche $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$, esso è comune a tutte le coniche della rete. Una particolare rete è costruita dalle coni-

che circoscritte ad un triangolo. Se $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ sono le equazioni dei lati di questo, la rete può rappresentarsi mediante l'equazione

$$\lambda mn + \mu nl + \nu lm = 0.$$

Quali sono le coniche degeneri di questa rete?

53) Supposto che $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ siano equazioni normali (in coordinate ortogonali), si determinino λ, μ, ν in guisa che la conica precedente sia un cerchio. L'equazione cui si arriva, interpretata geometricamente, conduce al teorema di SIMSON sul cerchio circoscritto al triangolo (cfr. n. 52, es. 13)).

54) Un'altra rete particolare (*puntuale* e *tangenziale* ad un tempo) è costituita dalle coniche che hanno un dato triangolo come autopolare. Se $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ sono i lati del triangolo, la rete è rappresentata dall'equazione (n. 241)

$$\lambda l^2 + \mu m^2 + \nu n^2 = 0.$$

Quali sono le coniche, luoghi od inviluppi, degeneri della rete?

55) Le coniche dell'ultima rete, che passano per un punto generico P del piano, passano per gli altri tre vertici del quadrangolo che ha un vertice in P e il triangolo dato come diagonale; e se P appartiene ad un lato del detto triangolo? Teorema duale.

56) Segue: «se due quadrangoli (o quadrilateri) completi hanno lo stesso triangolo diagonale, i loro otto vertici (o lati) appartengono ad (o toccano) una stessa conica».

57) E come corollario: «gli otto punti di contatto delle quattro tangenti comuni a due coniche appartengono ad una stessa conica»; «le otto tangenti nei punti comuni a due coniche toccano una stessa conica» (STAUDT).

58) In particolare: due rette secanti di una conica e le quattro tangenti nelle intersezioni colla curva, toccano una stessa conica; e dualmente.

59) Nella rete delle coniche aventi uno stesso triangolo autopolare vi è generalmente un solo cerchio; quale ne è il centro, quale il raggio? Quale la equazione (in assi ortogonali), supposto che $l = 0, \ldots$ siano equazioni normali? Quando è reale? Quale particolarità deve presentare il triangolo, perchè esistano infiniti cerchi siffatti?

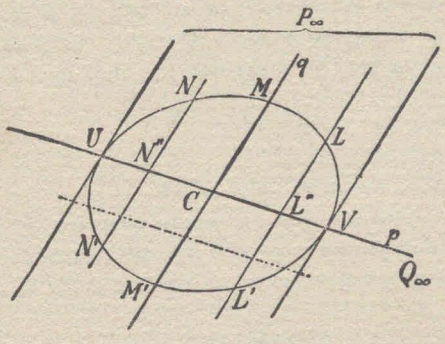
60) Nella detta rete esistono infinite parabole, formanti una schiera; quali ne sono le rette basi? Si deduca che «i punti medi dei lati di un triangolo autopolare rispetto ad una parabola, sono vertici di un triangolo circoscritto alla curva».

61) Nella rete stessa esistono infinite iperboli equilatere, formanti un fascio che ha per punti base i centri dei cerchi iscritto ed ex-iscritti nel triangolo primitivo: segue che «i centri dei cerchi iscritto ed ex-iscritti in un triangolo autopolare di una iperbole equilatera stanno sulla curva».

Capitolo III.

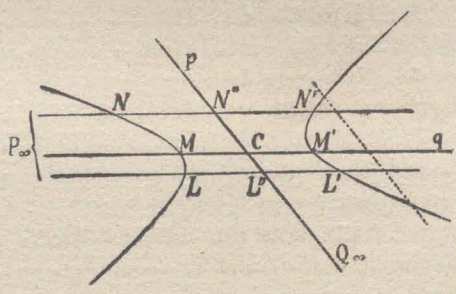
Proprietà diametrali.

261. Diametri di una conica. — Dalle proprietà proiettive delle coniche, che abbiamo studiato sinora, possiamo dedurre facilmente proprietà metriche, attribuendo agli elementi delle nostre figure relazioni speciali colla retta all'infinito. Applichiamo questa considerazione alla teoria della polarità.



Scelto nel piano di una conica un punto all'infinito P_∞, la polare p di esso rispetto alla curva conterrà tutti i punti medi delle corde LL', MM', NN',... appartenenti alle rette parallele uscenti da P_∞, e segherà la curva (ove la incontri) nei punti U, V di contatto delle tangenti condotte da P_∞ (nn. 235, 238). Dunque:

I punti medi delle corde di una conica aventi una stessa direzione stanno sopra una retta; questa dicesi *diametro* della conica, e precisamente diametro *coniugato* con ciascuna di quelle corde, d'accordo col n. 237. La costruzione di un diametro risulta senz'altro dalla definizione.



Partendo dall'equazione della curva in coordinate *cartesiane omogenee*

$$(1) \qquad f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

ossia, in coordinate *cartesiane ordinarie,*

$$(1') \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

e dette $(m, n, 0)$ le coordinate di P_∞, punto all'infinito della retta

$$(2) \qquad \frac{x}{y} = \frac{m}{n}$$

e delle parallele (n. 127), l'equazione del diametro coniugato con queste è (n. 235)

$$f\begin{pmatrix} x, & y, & z \\ m, & n, & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

ossia

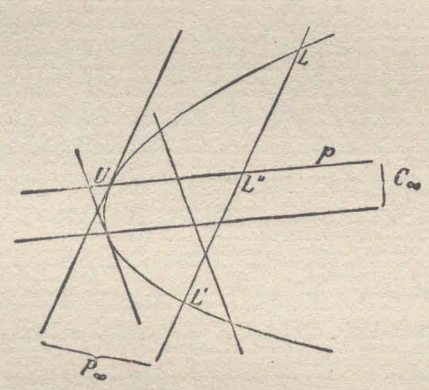
$$(3) \qquad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\ m + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\ n = 0.$$

Per enunciare il risultato si osservi che, in coordinate cartesiane (cioè per $z = 1$), *i diametri coniugati coll'asse x* ($m \neq 0$, $n = 0$), *e coll'asse y* ($m = 0$, $n \neq 0$), *hanno rispettivamente le equazioni*

$$(4) \qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

ottenute annullando le semiderivate parziali, rispetto ad x e rispetto ad y, del primo membro dell'equazione della conica; mentre l'equazione di ogni altro diametro è una combinazione lineare di quelle due.

262. Centro. — Dall'ultima osservazione risulta che gli infiniti diametri formano un fascio; ed anzi, notando che i loro poli appartengono alla retta all'infinito, si conclude (n. 237): *tutti i diametri di una conica passano per uno stesso punto, che è il polo della retta all'infinito.* Questo punto C è improprio per la parabola, che tocca la retta all'infinito, e coincide col punto di contatto; *i diametri di una parabola sono tutti paralleli tra loro.* Il punto C è invece proprio per la ellisse e per la iperbole, interno alla prima curva, esterno alla seconda (n. 238; v. figure di pag. 400). Ogni retta condotta per C sega una di queste due curve in due punti, ad es. M, M', che separano armonicamente C dal punto all'infinito della retta, e sono adunque simmetrici rispetto a C. *Il punto C è centro di simmetria per la ellisse e per la iperbole*, e dicesi *centro* della curva.[1] La parabola non ha centro di simmetria; tuttavia, per estensione di linguaggio, si chiama talvolta *centro* della parabola il punto all'infinito C_∞ della curva.



Il centro di una conica si costruisce conducendo due diametri. E le coordinate di esso si ottengono risolvendo le equazioni di due diametri,

[1] Che una ellisse ed una iperbole abbiano un unico centro di simmetria, risulta dal fatto che un tal centro deve aver come polare la retta all'infinito.

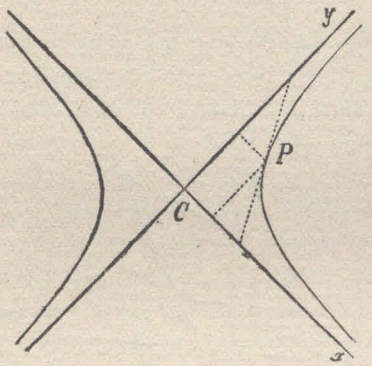
BIBLIOTECA NACIONAL DE MAESTROS

ad es. le (4) del n. 261 (o scrivendo le coordinate del polo della retta all'infinito secondo le formole del n. 235). Così troviamo l'ascissa e l'ordinata del centro

$$(5) \qquad x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \qquad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}},$$

dove le A_{ik} sono i soliti minori del discriminante. Il centro è improprio quando $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, quando cioè (n. 230) la conica è una parabola, ed allora ha le coordinate omogenee $(A_{13}, A_{23}, 0)$. È indeterminato quando $A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0$, nel qual caso risulta pure $A = 0$, e la conica si scinde in due rette (n. 242) aventi un unico punto all'infinito, cioè in due rette parallele; una tal figura ha effettivamente infiniti centri di simmetria.

263. Asintoti. — Limitiamoci pel momento alle *coniche a centro*, che sono ellissi od iperboli. Fra le rette passanti per il centro (diametri) ve ne sono due che toccano la conica, ed hanno i punti di contatto sulla polare del centro, cioè nei punti all'infinito della curva (n. 262). Queste tangenti diconsi *asintoti*.[1] *L'iperbole ha due asintoti reali, l'ellisse due asintoti immaginari.*



Volendo l'equazione complessiva degli asintoti per la curva (1') del n. 261, basta ricordare che la coppia di rette proiettanti dall'origine i punti all'infinito della curva è rappresentata dall'equazione

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

ricavata dalla (1) col porre $z = 0$ (n. 230); sicchè la coppia degli asintoti, parallele condotte dal centro (x_0, y_0) alle rette nominate, sarà data (n. 244) da

$$(6) \qquad a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0.$$

Osservazione. — Un altro procedimento per ottenere (sotto una forma diversa) l'equazione complessiva degli asintoti, consiste nell'osservare che le infinite coniche rappresentate dall'equazione

$$f(x, y, z) + kz^2 = 0,$$

dove k è un parametro variabile, hanno tutte le stesse tangenti nei punti situati sulla retta all'infinito $z = 0$, hanno dunque gli stessi asintoti (n. 257). Ora in quel

[1] In generale, dicesi *asintoto* ad una curva qualsiasi una retta che tocchi la curva in un punto all'infinito.

fascio si trovano due coniche degeneri, una (corrispondente a $k = \pm\infty$) formata dalla retta all'infinito contata due volte, $z^2 = 0$, l'altra composta degli asintoti. Quest'ultima corrisponde al valore di k che annulla il discriminante della equazione scritta, valore che si riconosce esser $k = -\frac{A}{A_{33}}$. Sostituendo a k questo valore, o, ciò che fa lo stesso, *aggiungendo al termine noto dell'equazione cartesiana* (1′) *di una conica la quantità* $-\frac{A}{A_{33}}$, *si ottiene la equazione complessiva degli asintoti.*

264. Diametri coniugati. — Due diametri p, q di una conica a centro diconsi *coniugati* (n. 237), se uno, e quindi ciascuno, contiene il polo dell'altro (che sarà il punto all'infinito di quello); o, ciò che fa lo stesso, se ciascuno biseca le corde parallele all'altro. Le tangenti negli estremi di un diametro (punti d'incontro colla curva) sono parallele al diametro coniugato (v. fig. di pag. 400).

Una conica a centro possiede infinite coppie di diametri coniugati, formanti una involuzione, le cui rette doppie sono gli asintoti; la involuzione è ellittica od iperbolica, secondo che la conica è una ellisse ed una iperbole.[1] Tutto ciò segue subito da un teorema del n. 238, applicato al centro della curva.

Due diametri coniugati e la retta all'infinito, polare del centro, formano un triangolo autopolare rispetto alla conica; e viceversa, se un triangolo autopolare ha un lato all'infinito, gli altri due sono diametri coniugati. Di qua, e da un teorema del n. 240, segue che due diametri coniugati di una ellisse reale sono entrambi secanti (com'è del resto ogni diametro della ellisse), mentre, di due diametri coniugati distinti di una iperbole, uno è secante (o *trasverso*), e l'altro non secante (o *non trasverso*).

Sotto l'aspetto analitico si osservi che i due diametri

$$m(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + n(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) = 0,$$
$$m'(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + n'(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) = 0,$$

della conica (1) (n. 261) sono coniugati se il polo $(m, n, 0)$, del primo appartiene al secondo, cioè se

$$a_{11}mm' + a_{12}(mn' + m'n) + a_{22}nn' = 0,$$

od anche

$$a_{11}\frac{m}{n}\frac{m'}{n'} + a_{12}\left(\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}\right) + a_{22} = 0,$$

donde si ricava nuovamente (n. 182) che i diametri coniugati formano una involuzione, le cui rette doppie (asintoti) si ottengono ponendo $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$. Di qui sarebbe facile ritrovare l'equazione complessiva (6) degli asintoti.

[1] Si ha qui la ragione dell'aggettivo *ellittica* o *iperbolica*, attribuito ad una involuzione.

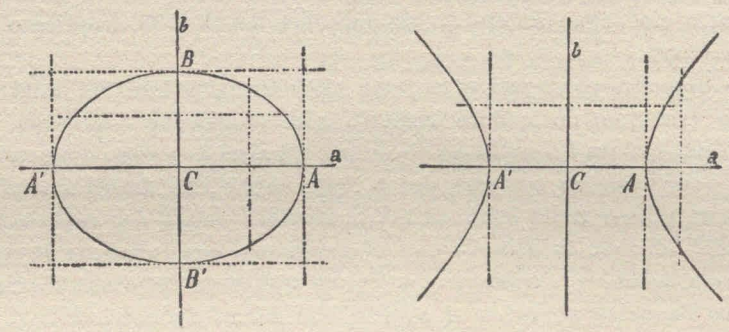
La definizione permette, dato un diametro, di costruire il coniugato. D'altra parte, nella costruzione di coppie di diametri coniugati giovano talora le seguenti proposizioni, che discendono dai teoremi del n. 240 sul quadrangolo iscritto o sul quadrilatero circoscritto ad una conica, quando si introduca la ipotesi che un lato del triangolo, o trilatero, diagonale sia all'infinito:

Le linee mediane di un parallelogramma iscritto in una conica sono diametri coniugati. Le diagonali di un parallelogramma circoscritto sono pure diametri coniugati.

La prima proposizione si enuncia pure così:

Le corde congiungenti un punto di una conica cogli estremi di un diametro (corde *supplementari*) *sono parallele a due diametri coniugati.*

265. Assi di una conica. — Riprendiamo le tre specie di coniche. Sappiamo che un diametro qualsiasi biseca un sistema di corde parallele tra loro, le quali, generalmente, riusciranno oblique rispetto al diametro.



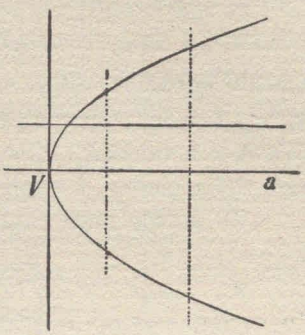
Sorge ora la questione *se vi sia qualche diametro particolare, il quale bisechi le corde perpendicolari ad esso.* Un tal diametro (se esiste) è asse di simmetria ortogonale per la curva, e dicesi *asse* (o *diametro principale*) della conica; i punti in cui esso incontra la curva, chiamansi *vertici.* La tangente in un vertice è perpendicolare al relativo asse.

Nella ricerca degli assi per via sintetica, conviene trattare separatamente le coniche a centro e la parabola.

Per le prime si osservi che, se la retta a è un asse, il diametro b, perpendicolare ad a, è coniugato con a (n. 264); quindi anche b biseca le corde parallele ad a, ossia perpendicolari a b, anche b è un asse. Viceversa, se a e b sono due diametri coniugati e perpendicolari, ciascuno di essi è asse della conica. Sappiamo d'altra parte che in una involuzione nel fascio, com'è quella dei diametri coniugati, esiste sempre una coppia reale, e generalmente una sola (n. 192), di rette coniugate e perpendicolari; concludiamo perciò che:

Una conica a centro possiede sempre due assi, e generalmente due soli. Per la *iperbole* questi coincidono colle bisettrici degli angoli degli asintoti, e sono l'uno secante (*trasverso*), l'altro non secante (*non trasverso*), sicchè la curva ha *due vertici reali e due immaginari;* per la *ellisse* i due assi sono secanti, ed *i quattro vertici reali.*

Fa eccezione al teorema precedente il solo caso, in cui l'involuzione dei diametri coniugati è *circolare*, chè allora ogni diametro è asse di simmetria della curva, la quale (come risulta da semplici considerazioni geometriche, e come presto dimostreremo analiticamente) è un *cerchio.*



Quanto alla parabola, se ricordiamo che tutti i diametri sono paralleli, per determinare un asse basterà condurre il sistema di corde perpendicolari agli infiniti diametri; i punti medi di queste staranno appunto sopra un *asse*, *a*, della parabola. E sarà questo, come è chiaro, l'unico asse. L'asse sega la parabola nel punto all'infinito della curva ed in un punto proprio *V*, *vertice* della parabola. *La parabola ha un solo asse ed un sol vertice.*

Osservazione. — Le considerazioni precedenti permettono di costruire gli assi di una data conica; per es., se si tratta di una conica a centro, basterà conoscere due coppie di diametri coniugati, e costruire, nella involuzione determinata da queste, la coppia di rette coniugate e ortogonali (n. 192).

Ma se la conica è interamente descritta, si può anche tracciare il cerchio che ha per diametro un diametro della curva; esso sega ancora la curva negli estremi di un secondo diametro, simmetrico del primo rispetto agli assi; questi saranno dunque le mediane del rettangolo avente per diagonali i due diametri nominati.

266. Determinazione analitica degli assi. — Data l'equazione di una conica qualsiasi

$$(1') \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

in coordinate cartesiane che, per semplicità, supporremo *ortogonali*, proponiamoci di scrivere le equazioni degli assi. Ricordiamo a tal fine che il diametro coniugato alla retta

$$(2) \qquad y = kx,$$

ed alle parallele, ha l'equazione (n. 261, ponendovi $k = \frac{n}{m}$)

$$(3) \qquad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0,$$

ossia

$$(3') \qquad (a_{11} + ka_{21})x + (a_{12} + ka_{22})y + (a_{13} + ka_{23}) = 0.$$

Il diametro è un asse se riesce perpendicolare alla retta (2), se è verificata dunque la condizione

$$k(a_{11} + ka_{21}) - (a_{12} + ka_{22}) = 0,$$

ossia

$$(4) \qquad a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0.$$

Questa equazione di secondo grado ha sempre due radici reali e distinte, k_1, k_2, perchè il prodotto $k_1 k_2 = -1$ è negativo. Sostituendo nella (3), o (3'), a k i valori k_1, k_2, successivamente, si ottengono le equazioni dei due assi della conica, i quali dunque risultano sempre reali.

Va notato però che, se la (1') rappresenta una parabola, avendosi allora $\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$, una radice della (4) è, come si verifica, $k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$. In corrispondenza a questa radice si annullano i coefficienti di x ed y nella (3'), la quale (ridotta omogenea) rappresenta la retta all'infinito del piano. Lasciando da parte questa soluzione, che non soddisfa pienamente al problema, rimane per la parabola un solo asse, la cui equazione è data dalla (3'), quando per k si ponga la seconda radice della (4), $k = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$; con facili calcoli si può porre tale equazione sotto la forma seguente :

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0.$$

Se invece la (1') è una conica a centro, osserveremo che le due rette $y = k_1 x$, $y = k_2 x$, perpendicolari rispettivamente ai due assi della conica, sono inoltre perpendicolari tra loro, essendo $k_1 k_2 = -1$. Dunque ciascuna di quelle rette è parallela ad uno degli assi; e le equazioni di questi possono scriversi anche sotto la forma

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = k,$$

dove (x_0, y_0) sono le coordinate del centro, e $k = k_1$, k_2 è una radice della (4). Sostituendo nella (4), al posto di k, la frazione, e mandando via i denominatori, otteniamo l'equazione complessiva degli assi :

$$a_{12}(x - x_0)^2 - (a_{11} - a_{22})(x - x_0)(y - y_0) - a_{12}(y - y_0)^2 = 0.$$

267. Caso particolare del cerchio. — Va considerata a parte la ipotesi che siano nulli coefficienti e termine noto della (4), che sia dunque

$$a_{11} = a_{22}, \qquad a_{12} = 0;$$

allora la (4) è soddisfatta da ogni valore di k. Ed ogni diametro della conica è un asse. D'altronde la curva in tal caso è un cerchio, giacchè le condizioni scritte sono precisamente quelle che distinguono il cerchio dalle altre coniche (n. 48). Concludiamo che *per il cerchio* (*e per questa sola conica*) *ogni diametro è asse*, è dunque perpendicolare al diametro coniugato; *la involuzione dei diametri coniugati è circolare;* e *gli asintoti di un cerchio* (rette doppie di tale involuzione, n. 263) *sono le rette isotrope uscenti dal centro* (n. 190). Ritroviamo così il risultato già noto: *tutti i cerchi segano la retta all'infinito nei punti ciclici del piano* (n. 129, Oss.). E vediamo inoltre che due cerchi concentrici hanno gli stessi asintoti, cioè si toccano nei punti ciclici.

Esercizi I. — 1) Determinare le coordinate del centro, e le equazioni staccate degli asintoti e degli assi per le coniche (in coordinate ortogonali)

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 3 = 0,$$
$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 3y + 5 = 0.$$

2) Determinare l'equazione dell'asse e le coordinate del vertice della parabola (in coordinate ortogonali)

$$4x^2 + 4xz + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

3) Costruire il centro, la involuzione dei diametri coniugati, gli asintoti e gli assi di una conica, data mediante cinque punti $ABCDE$; (si costruiscano ad es. le corde DF, DG parallele alle corde AB, AC, ecc.).

4) Lo stesso problema, quando la conica è definita mediante cinque delle sue tangenti. (Si costruiscano due parallelogrammi circoscritti alla curva, n. 264).

5) Costruire l'asse e il vertice di una parabola, determinata da quattro tangenti, o da tre punti propri e dal punto improprio.

6) Dati in grandezza e posizione due diametri coniugati di una conica a centro, costruire gli asintoti e gli assi (n. 264).

7) Le rette che proiettano dagli estremi A, A' di un diametro trasverso di una conica a centro un punto variabile lungo la curva, segano sopra il diametro coniugato BB' una involuzione, che ha per centro il centro della curva, e per punti doppi (nella ellisse), o punti coniugati (nella iperbole) gli estremi di questo diametro. Ed una tangente variabile alla curva sega sopra le due tangenti in A, A' una coppia di punti, proiettati dal centro mediante due diametri coniugati della curva (n. 246, es. 32)).

8) L'esercizio precedente permette di costruire per punti e tangenti una conica a centro, di cui siano noti in grandezza e direzioni due diametri coniugati. (Infatti ogni coppia MM' della involuzione nominata sul diametro BB' fornisce due punti della curva, le cui tangenti sono le diagonali del parallelogramma formato dalle parallele a BB' condotte per AA', e dalle parallele ad AA' condotte per M, M').

9) Costruire una conica, di cui siano dati il centro, le direzioni di due diametri coniugati, ed inoltre due punti o due tangenti (cfr. n. 260, es. 4); oppure

si determinino le lunghezze dei due diametri, cercando una coppia di punti coniugati su ciascuno di essi; poi es. 8)).

10) Costruire una conica, conoscendone in posizione due coppie di diametri coniugati ed un punto; (del diametro, che passa per il punto, si determini il coniugato in posizione e grandezza; poi es. 8)).

11) In un triangolo iscritto in una conica, di cui ciascun lato sia parallelo alla tangente nel vertice opposto, il baricentro coincide col centro della curva; e viceversa. Segue l'esistenza di infiniti triangoli siffatti nella ellisse, potendosi un vertice assumere ad arbitrio sulla curva, con che il triangolo è determinato; invece ogni triangolo di tal natura è parzialmente immaginario nella iperbole, o degenere nella parabola.

II. — 12) Il luogo dei centri delle coniche di una schiera è una retta, la quale biseca le tre diagonali del quadrilatero base, e passa per il punto all'infinito dell'unica parabola appartenente alla schiera (Newton) (cfr. n. 260, es. 45)). Segue che i punti medi delle tre diagonali suddette appartengono ad una retta, *mediana* del quadrilatero (cfr. n. 198, es. 10)), e che le cinque mediane relative ai quadrilateri determinati da cinque rette, prese a quattro a quattro, concorrono in un punto. Si ha qui un nuovo modo per costruire il centro di una conica determinata da cinque tangenti.

13) Il luogo dei centri delle coniche di un fascio è una conica (detta dei *nove punti*) (cfr. n. 260, es. 46)), la quale passa per i punti diagonali del quadrangolo; i punti all'infinito di questa conica sono i centri delle due parabole appartenenti al fascio, ed il suo centro cade nel baricentro del quadrangolo base (Pfaff).

14) Cercando la condizione perchè la conica dei nove punti sia un cerchio non degenere, si vede che il fascio deve comporsi di iperboli equilatere. Dunque: «il luogo dei centri delle iperboli equilatere di un fascio è un cerchio» (Brianchon e Poncelet). Se i punti base del fascio sono reali, si ricava di qua, e dall'es. 37) del n. 260, che «in un triangolo i piedi delle altezze, i punti medi dei lati e i punti medi dei segmenti compresi fra i vertici e l'ortocentro appartengono ad uno stesso cerchio», detto *cerchio dei nove punti*, o *cerchio di* Feuerbach.

15) Segue pure che il luogo dei centri delle iperboli equilatere aventi un dato triangolo come autopolare (n. 260), es. 61)) è il cerchio circoscritto al triangolo; ossia: «il cerchio circoscritto ad un triangolo autopolare rispetto ed una iperbole equilatera passa per il centro della curva». (Brianchon e Poncelet).

16) La conica dei nove punti è una iperbole equilatera se fra le coniche del fascio vi è un cerchio, e viceversa.

17) Se tra le coniche di un fascio vi è un cerchio, gli assi di quelle hanno direzioni costanti (De la Hire e Huygens), e sono paralleli alle bisettrici delle coppie di lati opposti del quadrangolo base (Poncelet) ed agli asintoti della iperbole equilatera dell'es. 16).

18) Segue una costruzione delle direzioni degli assi di una conica determinata da cinque punti; si conduca infatti un cerchio per tre di essi, e si determini (n. 260, es. 32)) la quarta intersezione del cerchio colla conica, ecc.

19) I cerchi passanti per due punti fissi di una conica segano ulteriormente la curva in due punti, la cui congiungente ha una direzione costante, che si costruisce subito quando siano noti gli assi.

20) Segue che i cerchi bitangenti ad una conica hanno i centri sopra l'uno o l'altro degli assi; e se un cerchio ha un contatto quadripunto colla curva, il punto di contatto cade in un vertice.

21) Segue ancora che, se un cerchio oscula una conica in un punto P, e la sega ulteriormente in Q, la tangente in P e la retta PQ formano angoli uguali, ma opposti, con ciascun asse. E di qua si deduce una costruzione del cerchio osculatore ad una conica in un dato punto. La costruzione cade in difetto soltanto se P sta in un vertice, e quindi il cerchio ha un contatto quadripunto; questo caso sarà trattato in seguito.

22) Se $PP'P''$ è un triangolo iscritto in una ellisse, avente i lati paralleli alle tangenti nei vertici opposti (es. 11)), i cerchi osculatori in P, P', P'', passano per uno stesso punto Q della curva, che appartiene pure al cerchio $PP'P''$. E poichè il ragionamento può invertirsi, si conclude: «Per un punto di una ellisse passano tre cerchi che osculano altrove la curva; i tre punti di osculazione stanno in un cerchio col punto primitivo, e formano un triangolo che ha per baricentro il centro della curva» (Steiner). Per la iperbole, o parabola, dei tre punti di osculazione due sono immaginari, o cadono nel centro all'infinito della curva.

23) Il luogo dei centri delle iperboli equilatere iscritte in un triangolo è il cerchio, rispetto a cui è autopolare il triangolo (Seydewitz). (Infatti la costruzione dell'es. 12) del n. 260, applicata ad una iperbole di cui siano date tre tangenti ed i due punti impropri in direzioni ortogonali, fa vedere che i centri delle quattro soluzioni appartengono ad un cerchio; ecc.).

24) Ad una schiera di coniche appartengono due iperboli equilatere; i loro centri stanno sui quattro cerchi rispetto a cui sono autopolari, ordinatamente, i triangoli formati colle quattro rette basi prese a tre a tre, sul cerchio circoscritto al triangolo diagonale del quadrilatero base (es. 15)) e sulla retta mediana del quadrilatero (es. 12)). Segue che in un qualsiasi quadrilatero i cinque cerchi nominati appartengono ad un fascio, di cui l'asse radicale è la retta mediana, e l'asse centrale contiene gli ortocentri dei quattro triangoli suddetti.

Capitolo IV.

Forme ridotte delle equazioni delle coniche.

268. Coniche riferite a particolari sistemi cartesiani. — Ripren diamo la equazione cartesiana di una conica

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Sinora gli assi coordinati x, y potevano esser rette arbitrarie del piano. Supporremo in questo Capitolo che essi abbiano speciali relazioni metriche colla curva, ed esamineremo in corrispondenza come l'equazione di questa si semplifichi. A tal fine ci converrà tener presenti le equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

rappresentanti i diametri della conica (1) coniugati coll'asse x, e coll'asse y, rispettivamente (n. 261).

a) Esclusa per ora la parabola, si supponga che l'origine delle coordinate cada nel centro della conica (1); allora i due diametri (2) devono passare per l'origine, quindi $a_{13} = a_{23} = 0$, e la (1) si riduce al tipo

$$(a) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

Viceversa, da questa forma di equazione si risale alla ipotesi, sicchè:

L'equazione di una conica, riferita ad un sistema di coordinate di cui l'origine cade nel centro, manca dei termini a primo grado; e viceversa.

b) Si supponga inoltre che x, y siano diametri coniugati della conica; allora le equazioni (2) devono rappresentare, rispettivamente, l'asse y e l'asse x, quindi alle condizioni sopra trovate va aggiunta l'altra $a_{12} = 0$; e l'equazione (*a*) assume la forma

$$(b) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0;$$

e, viceversa, da questa si risale all'ipotesi.

L'equazione di una conica, riferita a due diametri coniugati come assi coordinati, contiene solo i quadrati delle variabili e il termine noto; e viceversa.

In particolare, se come assi coordinati si scelgono gli assi della conica, l'equazione conserva la forma (*b*), ma si ha il vantaggio derivante dall'ortogonalità del sistema coordinato.

L'equazione di ogni conica a centro può sempre ridursi alle forme (*a*) e (*b*).

c) Per la *iperbole* si può, alla ipotesi *a*) aggiungere l'altra che gli assi coordinati coincidano cogli asintoti (ciascuno dei quali è diametro coniugato di sè stesso). Allora le equazioni (2) devono rappresentare, rispettivamente, l'asse x e l'asse y, e perciò si deve avere $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = 0$. L'equazione (1) si riduce alla forma

$$(c) \qquad 2a_{12}xy + a_{33} = 0,$$

ossia

$$(c') \qquad -\frac{a_{33}}{2a_{12}} = xy = k \quad \text{(costante)}.$$

L'equazione di una iperbole, riferita ai suoi asintoti come assi coordinati, contiene solo il prodotto delle variabili e il termine noto; e viceversa.

d) Allo scopo di procurarci una forma ridotta valida per tutte le tre specie di coniche, ed in particolare per la parabola, assumiamo ora come origine un punto (proprio) O qualsiasi della conica, come asse x il diametro passante per O, come asse y la tangente in O. Allora, data la posizione dell'origine, dovrà porsi nella (1) $a_{33} = 0$; e pel fatto che il dia-

metro coniugato alla retta y, rappresentato dalla seconda delle (2), coincide coll'asse x, sarà inoltre $a_{12} = a_{23} = 0$. In conseguenza la (1) diviene

$$(d) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0.$$

Se poi supponiamo che la curva sia una parabola, e che quindi l'asse x seghi quella nell'origine e nel punto all'infinito, dovrà la (d) mancare del termine in x^2 (n. 229) e ridursi quindi al tipo

$$(e) \qquad a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0,$$

ossia

$$(e') \qquad y^2 = 2px \qquad (p \text{ costante}).$$

L'equazione di una parabola, riferita ad un diametro come asse x e alla tangente nell'estremo proprio di questo come asse y, contiene solo il quadrato della y ed un termine di primo grado in x; e viceversa.

La stessa equazione (e') vale se x è l'asse della parabola, O è il *vertice*, y la tangente nel vertice; allora il sistema di coordinate è ortogonale.

Osservazione. — La equazione (d), risolta rispetto ad y^2, si presenta sotto la forma.

$$(d') \qquad y^2 = 2px + mx^2,$$

dove $p = -\frac{a_{13}}{a_{22}}$ è una quantità (detta *parametro* relativo al diametro assunto come asse x) che può supporsi positiva, pur di fissare opportunamente il verso positivo sull'asse x; ed $m = -\frac{a_{11}}{a_{22}}$ è positivo, nullo o negativo, secondo che si tratta di una iperbole, parabola, od ellisse, rispettivamente, come risulta applicando alla (d') la condizione del n. 230. Ne viene che, per le tre specie di coniche, il quadrato dell'ordinata (y^2) supera, uguaglia, od è inferiore al rettangolo dell'ascissa e del doppio parametro ($2px$), ordinatamente. Da questa proprietà, nota ai greci, provengono (secondo PAPPO) i nomi di *iperbole, parabola, ellisse*.

269. Discussione dell'equazione normale di una conica a centro. — Le equazioni ridotte delle coniche si prestano allo studio della forma e delle proprietà metriche di quelle curve.

Volendoci occupar anzitutto delle coniche a centro, partiamo dalla equazione

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0,$$

che la curva assume quando venga riferita ai due assi (o in generale a due diametri coniugati), equazione detta *normale* o *canonica* (cfr. n. 241).

Possiamo lasciar da parte la ipotesi che uno (o più) tra i coefficienti della (1) sia nullo, giacchè si cadrebbe in evidenti casi di degenerazione,

privi d'interesse. Dividendo i due membri della (1) per $-a_{33}$ l'equazione assume la forma

$$m x^2 + n y^2 = 1, \tag{2}$$

dove m, n sono quantità reali, non nulle. Ora sui segni di queste si possono fare le seguenti ipotesi:

	m	n		
I.	+	+	$m n > 0$.	Ellisse.
II.	−	−		
III.	+	−	$m n < 0$.	Iperbole
IV.	−	+		

Le prime due ipotesi conducono ad una ellisse, le ultime due ad una iperbole (n. 230).

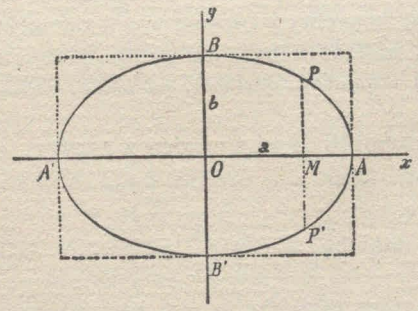
270. Ellisse. — I) Se nella (2) si suppongono $m > 0$, $n > 0$, la curva sega l'asse x in due punti reali A, A', di ascisse

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{m}} = \pm a,$$

e l'asse y in due punti reali B, B', di ordinate

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{n}} = \pm b,$$

dove a, b indicano i valori assoluti dei radicali. I punti A, A', B e B' sono, se $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, *vertici* della ellisse, ed $a = OA$, $b = OB$ sono le lunghezze dei semiassi. Esprimendo m, n in funzione di a e b, e sostituendo nella (2), si ottiene la *equazione della ellisse riferita ai propri assi, di lunghezza* $2a$, $2b$:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{I}$$

(La stessa equazione, se $\widehat{xy}$ non fosse retto, rappresenterebbe una ellisse riferita a due diametri coniugati di lunghezze $2a$, $2b$).

Ora la (1), nella ipotesi $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, fu già discussa al n. 62; vedemmo allora che la ellisse è una curva chiusa, contenuta nel rettangolo che ha per mediane i segmenti AA', BB', i lati del quale toccano la curva nei vertici.

Se $a = b$, $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, la ellisse si riduce ad un cerchio con centro nell'origine e raggio a.

II) Se nella (2) facciamo la ipotesi II: $m < 0$, $n < 0$, il primo membro della (2) ha valor negativo per ogni coppia di valori reali di x, y, mentre il secondo membro è positivo; la conica, la cui equazione potrebbe porsi sotto la forma

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

non ha punti reali, e dicesi *ellisse immaginaria.*

271. Iperbole. — III). Veniamo alla ipotesi III: $m > 0$, $n < 0$. Allora la curva (2) sega l'asse x in due punti *reali* A, A', di ascisse

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{m}} = \pm a,$$

e l'asse y in due punti *immaginari* di ascisse

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{n}} = \pm bi,$$

dove si è posto $b = \sqrt{\frac{1}{-n}}$, $i = \sqrt{-1}$. Giova tuttavia nelle costruzioni portare sopra y due segmenti OB, OB' uguali a $\pm b$. I punti A, A' diconsi, se $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$, *estremi dell'asse trasverso* e sono effettivi *vertici* della iperbole, mentre B, B' diconsi *estremi dell'asse non trasverso*, sebbene la curva non passi per essi. Esprimendo m ed n mediante a e b, otteniamo *l'equazione di una iperbole riferita all'asse trasverso x di lunghezza $2a$, e all'asse non trasverso y di lunghezza $2b$:*

$$\text{(III)} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(La stessa equazione, in assi obliqui, rappresenterebbe una iperbole, riferita a due diametri coniugati, uno x *trasverso* di lunghezza $2a$, l'altro y *non trasverso* di lunghezza $2b$, estendendosi ai diametri definizioni analoghe a quelle date sopra per gli assi).

La equazione (III) (nella ipotesi $\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}$) fu discussa al n. 62; vedemmo allora che la iperbole si compone di due rami staccati prolungantisi all'infinito, ed esterni alla striscia formata dalle parallele ad y condotte per A, A', che sono tangenti alla iperbole nei vertici.

Gli asintoti della iperbole (III) hanno la equazione complessiva (n. 263)

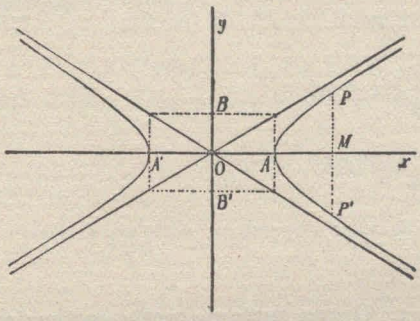
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

e quindi le equazioni separate

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Il secondo di essi passa per i vertici (a, b), $(-a, -b)$ del parallelogramma che ha per mediane AA', BB'; mentre il primo passa per gli altri due vertici $(-a, b)$, $(a, -b)$. E poichè questa osservazione vale qualunque sia l'angolo $\widehat{xy}$, si conclude:



Gli asintoti di una iperbole sono le diagonali di ogni parallelogramma avente come mediane (in grandezza e posizione) due diametri coniugati, uno trasverso e l'altro non trasverso.

Resterebbe ora da discutere la ipotesi IV: $m < 0$, $n > 0$; ma questa evidentemente conduce ad una iperbole avente come asse (o diametro) trasverso la retta y, e come asse (o diametro) non trasverso la retta x, e non dà quindi nulla di nuovo.

272. Iperbole equilatera. — Un caso particolare notevole d'iperbole si presenta quando gli asintoti sono perpendicolari tra loro; la iperbole si dice allora *equilatera.* L'ultimo teorema del n. precedente ci dice che, in tale ipotesi, il parallelogramma avente per mediane due diametri coniugati (o i due assi) è equilatero ($a = b$), perchè le diagonali sono perpendicolari. Segue dunque che, *in una iperbole equilatera, ogni diametro è uguale al coniugato;* e inoltre che *la equazione di una iperbole equilatera, riferita ai due assi, o a due diametri coniugati, si presenta sotto la forma*

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Si riconosce poi facilmente che gli asintoti di una iperbole equilatera bisecano gli angoli formati dalle coppie di diametri coniugati (n. 264).

273. Alcune formole relative all'equazione normale di una conica a centro. — Giova ricordare alcune formole relative ad una conica, nel caso che questa sia rappresentata mediante l'equazione normale.

L'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

rappresenta una *ellisse,* od una *iperbole* riferita agli assi $\left(\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}\right)$, secondo che si prenda il segno superiore, o l'inferiore. Mantenendo la stessa convenzione per le formule seguenti, noteremo che la *tangente alla curva nel punto* (x', y') ha l'equazione (n. 232)

$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1, \tag{2}$$

la quale rappresenta pure la polare di un punto (x', y') qualsiasi del piano.

La normale alla curva in (x', y'), cioè la perpendicolare alla tangente nel punto di contatto, è rappresentata dalla equazione

$$\frac{a^2(x - x')}{x'} = \pm \frac{b^2(y - y')}{y'}; \tag{3}$$

e questa rappresenta pure la perpendicolare condotta da un punto qualsiasi (x', y') alla propria polare.

* *L'equazione tangenziale* della (1) si riconosce essere (n. 236)

$$a^2u^2 \pm b^2v^2 = 1, \tag{4}$$

o, in coordinate omogenee di rette,

$$a^2u^2 \pm b^2v^2 = w^2. \tag{4'}$$

Questa è dunque la condizione affinchè la retta $ux + vy + w = 0$ tocchi la (1). Ora, ricavando dalla (4') w mediante u, v, e sostituendo nell'equazione della retta, risulta che *l'equazione cartesiana di una tangente alla conica* (1) può porsi sotto la forma

$$ux + vy = \sqrt{a^2u^2 \pm b^2v^2}; \tag{5}$$

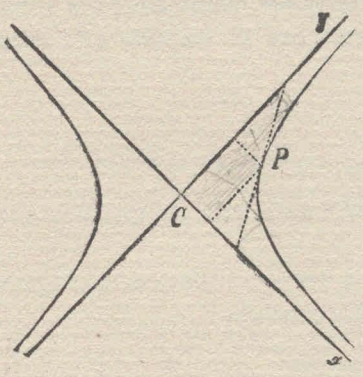
al radicale si intende premesso il doppio segno, qualunque sia la conica. Le quantità u, v sono costanti arbitrarie; se si considerano come date, *la* (5) (col doppio segno premesso al radicale) *rappresenta le due tangenti alla* (1) *parallele alla retta* $ux + vy = 0$.

274. Iperbole riferita agli asintoti. — Alcune proprietà dell'iperbole scaturiscono facilmente dall'equazione che assume la curva, quando si prendano come assi coordinati gli asintoti:

$$xy = k, \tag{1}$$

dove k è una costante, che può ritenersi positiva, pur di scegliere convenientemente i versi positivi sugli assi. In tale ipotesi, dei due rami dell'iperbole, uno cade nell'angolo delle semirette positive x, y, l'altro nell'angolo opposto al vertice.

La (1) riceve una immediata interpretazione: *il parallelogramma avente due lati sugli asintoti di una iperbole, ed un vertice mobile lungo la curva ha l'area costante* ($= k \operatorname{sen} xy$).



Se nella (1) una delle coordinate, ad es. la y, va crescendo senza limite in valore assoluto, l'altra x tende a zero; segue che un punto, il quale descriva un ramo di iperbole allontanandosi da un vertice, si avvicina sempre più ad uno degli asintoti.

La tangente alla curva (1) nel punto (x', y') ha l'equazione

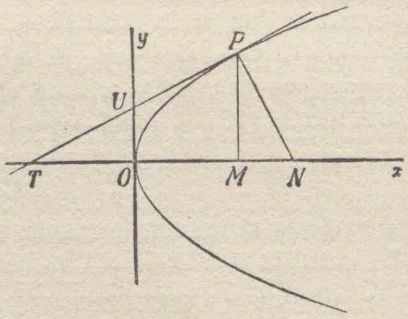
$$xy' + yx' = 2k$$

e stacca sugli asintoti i segmenti $2k : y' = 2x'$, e $2k : x' = 2y'$. Segue facilmente che *il segmento di una tangente ad una iperbole compreso fra gli asintoti è diviso per metà dal punto di contatto;* ed inoltre che *una tangente variabile all'iperbole forma cogli asintoti un triangolo di area costante* ($= 2k \operatorname{sen} xy$).[1]

275. Parabola. Proprietà della tangente e della normale. — Sappiamo già che l'equazione di una parabola, riferita all'asse e alla tangente nel vertice come rette x, y rispettivamente, $\left(\widehat{xy} = \frac{\pi}{2}\right)$, ha la forma

$$y^2 = 2px, \tag{1}$$

dove p è una costante detta parametro,[2] che può sempre riguardarsi come positiva, pur di fissare convenientemente il verso positivo sull'asse x.



Lo studio dell'equazione (1), fatto al n. 62, ci ha già indicato che la parabola si compone di un sol ramo estendentesi all'infinito, e giacente tutto da una banda dell'asse y.

---

[1] Ciò risulta pure dalla equazione tangenziale della iperbole

$$uv = \frac{1}{4k}.$$

[2] Alcuni autori chiamano (con DESARGUES) parametro la quantità $2p$ (*latus rectum* per gli antichi geometri).

La tangente alla parabola (1) nel punto $P(x', y')$ ha la equazione (n. 232)

$$yy' = p(x + x'), \tag{2}$$

che rappresenta pure la polare di un punto (x', y') qualsiasi. E *la normale alla curva* in P, o, in generale, la perpendicolare calata dal polo sulla polare, è data da

$$\frac{x - x'}{p} + \frac{y - y'}{y'} = 0. \tag{3}$$

La tangente e la normale segano l'asse x in due punti T, N, le cui ascisse sono

$$OT = -x', \quad ON = x' + p.$$

Se si indica con M la proiezione ortogonale di P sopra l'asse x, queste formule ci dicono che

$$OT = -OM, \quad MN = p.$$

Ora i due segmenti TM, MN, proiezioni ortogonali sull'asse x dei tratti di tangente e normale compresi fra il punto della curva a cui si riferiscono e l'asse, vengono detti, rispettivamente, *sottotangente* e *sottonormale*. Concludiamo:

In una parabola la sottotangente di un punto qualsiasi è divisa per metà dal vertice; e la sottonormale è costante ed uguale al parametro.

Si può anche dire che *la tangente in un punto qualsiasi* (cioè il tratto PT di una tangente compreso fra il punto di contatto e l'asse x) *è divisa per metà dalla tangente nel vertice.*

* L'equazione tangenziale della parabola (1) si presenta sotto la forma

$$v^2 = \frac{2}{p} u. \tag{4}$$

Rendendo questa omogenea e ricavando il valore di w, si trova, col procedimento indicato nel n. 273, che l'*equazione della* (unica) *tangente alla parabola parallela ad una retta data* $ux + vy = 0$, può porsi sotto la forma

$$ux + vy + \frac{pv^2}{2u} = 0. \tag{5}$$

276. Metodi per ridurre a forma semplice l'equazione di una conica. — Negli ultimi numeri abbiamo visto quali termini formino parte dell'equazione di una conica riferita a particolari rette, scelte come assi cartesiani. Se però si suppone data inizialmente la curva mediante una equazione generale

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

riferita ad assi x, y comunque fissati nel piano, sorge il problema di *calcolare* i coefficienti che entreranno nell'equazione ridotta della curva, quando questa venga riferita a particolari assi X, Y. Si tratta insomma di applicare realmente al polinomio (1) la trasformazione di coordinate, con cui si passa dagli assi x, y agli assi X, Y.

Ragioniamo, per fissar le idee, sopra un esempio particolare. Supponiamo che la (1) sia una conica a centro, riferita ad assi *ortogonali* qualsivogliano x, y; e che si voglia scrivere la equazione normale della conica stessa, riferita ai propri *assi* (di simmetria) X, Y.

Trattandosi di passare da uno ad altro sistema ortogonale, le formole per la trasformazione saranno del tipo (n. 34)

$$(a) \qquad \begin{cases} x = \alpha + X\cos\varphi - Y\operatorname{sen}\varphi, \\ y = \beta + X\operatorname{sen}\varphi + Y\cos\varphi, \end{cases}$$

dove (α, β) sono le coordinate antiche della nuova origine, ed è $\varphi = \widehat{xX}$.

Ora noi sappiamo calcolare, mediante i coefficienti della (1), tanto α e β, coordinate del centro della conica (n. 262), quanto φ, angolo che uno degli *assi* X di questa forma coll'asse coordinato x (n. 266). Determinate così le costanti che compariscono nelle (a), basterà fare le sostituzioni (a) nella (1), ed eseguire i calcoli, per giungere alla equazione normale richiesta.

Si può anche, senza premettere la determinazione di α, β, φ, sostituire subito le (a) nella (1), considerando queste tre quantità come indeterminate; si ricorderà poi che, nella equazione finale in X, Y, devono annullarsi i coefficienti di XY, X, Y (n. 268); e si approfitterà delle tre equazioni di condizione esprimenti questo fatto, per calcolare effettivamente α, β e φ.

Comunque si proceda, le operazioni qui indicate, semplici come concetto, conducono a calcoli alquanto lunghi; questi possono evitarsi seguendo il procedimento indiretto che ora passiamo ad esporre. Premetteremo alcuni lemmi relativi a particolari trasformazioni di coordinate.

277. Modo di comportarsi di una conica rispetto a particolari trasformazioni di coordinate. — Ricordiamo che le formole per la trasformazione di coordinate cartesiane sono del tipo

$$(2) \qquad x = \alpha + \alpha' X + \alpha'' Y, \quad y = \beta + \beta' X + \beta'' Y,$$

dove le sei quantità α, β... sono costanti (n. 35); se muta l'origine ma non le direzioni degli assi, quelle formole divengono

$$(2') \qquad x = \alpha + X, \quad y = \beta + Y,$$

essendo (α, β) le coordinate antiche della nuova origine; se invece l'origine rimane fissa, si ha

$$(2'') \qquad x = \alpha' X + \alpha'' Y, \quad y = \beta' X + \beta'' Y.$$

Ciò posto, dimostriamo che:

I. *Una trasformazione di coordinate, nella quale muti l'origine ma non le direzioni degli assi, lascia inalterati i coefficienti dei termini a secondo grado nell'equazione di una conica.*

Infatti la

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

mediante le formole (2'), diviene

$$a_{11}(X+\alpha)^2 + 2a_{12}(X+\alpha)(Y+\beta) + a_{22}(Y+\beta)^2 + \ldots + a_{33} = 0,$$

ossia

$$(1') \qquad \begin{cases} a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 \\ + 2(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13})X + 2(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23})Y \\ + (a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33}) = 0, \end{cases}$$

dove i coefficienti dei termini a secondo grado sono ancora a_{11}, $2a_{12}$, a_{22}.

II. *Una trasformazione di coordinate, che lasci ferma la origine, non altera il termine noto dell'equazione di una conica.*

Infatti la (1), mediante le formole (2''), diviene

$$a_{11}(\alpha' X + \alpha'' Y)^2 + 2a_{12}(\alpha' X + \alpha'' Y)(\beta' X + \beta'' Y) + \ldots$$
$$+ 2a_{13}(\alpha' X + \alpha'' Y) + \ldots + a_{33} = 0,$$

dalla quale apparisce che i termini a secondo e primo grado del polinomio (1) dànno, rispettivamente, termini di secondo e primo grado del polinomio trasformato; il termine noto di questo è dunque a_{33}, come nel polinomio (1).

Ci servirà pure il lemma seguente, relativo ad un particolare binomio di secondo grado:

III. *Una trasformazione ortogonale di coordinate, che lasci ferma l'origine, muta l'espressione* $x^2 + y^2$ (formata colle antiche coordinate di un punto) *nella espressione analoga* $X^2 + Y^2$ (formata colle nuove coordinate dello stesso punto).

Infatti le due espressioni forniscono il quadrato della distanza del punto, che ha le antiche coordinate (x, y) e le nuove (X, Y), dalla origine comune dei due sistemi (n. 25).

Se la trasformazione di coordinate non fosse ortogonale, i due binomi ora scritti dovrebbero venire sostituiti dai trinomi $x^2 + 2xy\cos xy + y^2$, $X^2 + 2XY\cos XY + Y^2$, come risulta dallo stesso ragionamento.

278. Invarianti di una conica relativamente ad una trasformazione di coordinate. — Premessi questi lemmi, ritorniamo al nostro problema. È data l'equazione di una conica riferita a certi assi x, y,

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Eseguiamo una trasformazione di coordinate, adoperando le formole (2) del n. 277; giungeremo così ad una equazione

$$(3) \qquad a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + a'_{22}Y^2 + 2a'_{13}X + 2a'_{23}Y + a'_{33} = 0,$$

della quale ci interessa conoscere i coefficienti. A tal fine cerchiamo di stabilire *a priori* qualche relazione tra i coefficienti della (1) e della (3).

Supponiamo perciò di eseguire sui coefficienti della (1) una certa serie di operazioni algebriche, il cui risultato potrà indicarsi con $\varphi(a_{11}, \ldots, a_{33})$. Se le stesse operazioni, nello stesso ordine, si eseguiscono sui coefficienti della (3), si otterrà un nuovo risultato $\varphi(a'_{11}, \ldots, a'_{33})$. I due risultati differiranno, se il complesso di operazioni indicato simbolicamente con φ è scelto a caso. Ma si può chiedere se esista qualche funzione φ tale, che risulti sempre (qualunque sia la equazione quadratica (1) e la trasformazione di coordinate (2) adoperata)

$$(4) \qquad \varphi(a_{11}, \ldots, a_{33}) = \varphi(a'_{11}, \ldots, a'_{33}).$$

Se la (4) è soddisfatta, si dirà che l'espressione φ è un *invariante*[1] *della* (1), *rispetto alle trasformazioni di coordinate,* vale a dire una espressione che ha lo stesso valore, quando esso venga formata coi coefficienti dell'equazione primitiva, o con quelli della trasformata.

La esistenza di siffatti invarianti può prevedersi *a priori*, poichè tale proprietà gode ogni espressione composta coi coefficienti della (1), la quale ci dia il valore di una grandezza geometrica appartenente alla curva (1), ma indipendente dal sistema di coordinate a cui la curva vien riferita (ad es. la lunghezza di un asse, l'angolo degli asintoti, ecc.). Ora si tratta di vedere come si possano formare effettivamente alcuni di questi invarianti. Ma è chiaro sin d'ora che, ogniqualvolta se ne conoscerà uno, si potrà scrivere una relazione del tipo (4), in cui il primo membro sarà noto, poichè formato coi coefficienti della (1), mentre il secondo membro dipenderà dai coefficienti incogniti della equazione (3). Questi potranno calcolarsi, quando si abbia un numero sufficiente di relazioni analoghe alla (4).

Noi ora indicheremo come si possano ottenere gli invarianti che interessano. Per semplicità di formole, ci limiteremo al caso delle trasformazioni ortogonali di coordinate, ed accenneremo poi come i risultati possano estendersi al caso più generale.

Supponiamo anzitutto che la trasformazione di coordinate, con cui si passa dall'equazione (1) alla (3), lasci ferma l'origine, e sia quindi del

[1] La nozione di *invariante* è sorta dalla considerazione di trasformazioni lineari generali di variabili noi dunque adottiamo questo nome in un senso molto particolare. Il lettore potrà vedere i fondamenti della teoria degli invarianti nei trattati di Algebra del CAPELLI, CESARO,...

tipo (2'') (n. 277). Tenuto conto di quelle formole e del lemma III (n. 277), possiamo scrivere le seguenti identità:

$$(5)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \ldots + a_{33} \equiv a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + a'_{22}Y^2 + \ldots + a'_{33},$$

$$(6)\qquad x^2 + y^2 \equiv X^2 + Y^2,$$

nella prima delle quali è anzi $a'_{33} = a_{33}$ (lemma II, n. 227). Insieme a quelle sussisterà pure la identità che si ottiene aggiungendo ai due membri della (5) i due membri della (6) moltiplicati per uno stesso parametro arbitrario λ:

$$(7)\qquad (a_{11}+\lambda)x^2 + 2a_{12}xy + (a_{22}+\lambda)y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \equiv (a'_{11}+\lambda)X^2 + 2a'_{12}XY + (a'_{22}+\lambda)Y^2 + 2a'_{13}X + 2a'_{23}Y + a'_{33}.$$

I due membri della (7), uguagliati a zero, rappresentano una stessa conica K, riferita una prima volta agli assi antichi x, y, una seconda volta agli assi nuovi X, Y. La conica K varierà però al variare di λ, descrivendo un fascio. Ora, se vogliamo determinare i valori di λ a cui corrispondono *parabole*, possiamo servirci, sia della equazione di K in x, y, sia di quella in X, Y. Dalla prima ricaviamo che il parametro λ deve soddisfare alla condizione (n. 220)

$$(a_{11}+\lambda)(a_{22}+\lambda) - a_{12}^2 = 0,$$

ossia

$$(8)\qquad \lambda^2 + \lambda(a_{11}+a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0;$$

mentre, valendoci della equazione di K in X, Y, troviamo analogamente la condizione

$$(8')\qquad \lambda^2 + \lambda(a'_{11}+a'_{22}) + (a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}) = 0.$$

Ora le due equazioni di condizione (8) ed (8') devono fornire per λ gli stessi valori; dunque esse avranno i coefficienti proporzionali; sussisteranno cioè le eguaglianze

$$(9)\qquad \begin{cases} a_{11}+a_{22} = a'_{11}+a'_{22}, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}. \end{cases}$$

Queste ci dicono che le espressioni a primo membro non mutano valore se vengono formate (anzichè coi coefficienti della (1)) coi coefficienti della (3); quelle espressioni sono *invarianti* relativi ad una trasformazione ortogonale di coordinate, che non muti l'origine.

Un terzo invariante si ottiene in modo analogo, determinando λ in guisa che la conica corrispondente K si scinda in due rette. Se infatti si ricorre all'equazione di K in x, y, si trova la condizione (n. 242)

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia sviluppando e indicando con C il coefficiente della prima potenza di λ, che poco interessa,

$$a_{33}\lambda^2 + C\lambda + A = 0, \tag{10}$$

dove A è il discriminante della (1). Similmente, partendo dall'equazione di K in X, Y, si ottiene

$$a'_{33}\lambda^2 + C'\lambda + A' = 0, \tag{10'}$$

dove A' è il discriminante della (3). Esprimendo la proporzionalità tra i coefficienti della (10) e (10'), ricordando che $a_{33} = a'_{33}$, e notando che questa quantità può sempre supporsi diversa da zero (visto che, in caso opposto, è lecito aggiungere una stessa costante non nulla ai due membri della identità (7)), si ottiene un terzo *invariante*[1]

$$A = A'. \tag{11}$$

Vediamo così che le tre espressioni

$$a_{11}+a_{22}, \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2, \quad A \tag{12}$$

non variano quando mutano gli assi, restando ferma l'origine. Vogliamo ora dimostrare che esse rimangono immutate anche per una traslazione di assi. Fatto ciò, la stessa conclusione varrà per *ogni* trasformazione ortogonale di coordinate cartesiane, la quale può sempre decomporsi in una trasformazione ortogonale coll'origine fissa, seguìta da una traslazione. Ora, che le prime due espressioni (12) non si alterino per una traslazione di assi, segue dal fatto che i coefficienti a_{11}, a_{22}, a_{12}, mediante cui son composte, non mutano nella traslazione (n. 277, lemma I). Quanto alla terza espressione, si osservi che, essendo la traslazione rappresentata dalle formole (2') del n. 277, il discriminante della equazione trasformata (1') del n. 277, è

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

---

[1] Si potrebbe anche scrivere l'uguaglianza $C' = C$; ma questa ha poco interesse, giacchè l'espressione a primo membro si altera per una traslazione di assi, mentre, come vedremo, le tre espressioni (12) sono invarianti anche rispetto alle traslazioni.

dove

$$a'_{13} = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}, \qquad a'_{23} = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23},$$
$$a'_{33} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 + 2a_{13}\alpha + 2a_{23}\beta + a_{33}$$
$$= a'_{13}\alpha + a'_{23}\beta + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}).$$

Se ora dalla terza verticale del determinante A' sottragghiamo la prima moltiplicata per α e la seconda moltiplicata per β, e nel determinante così ottenuto ripetiamo le stesse operazioni sulle orizzontali, anzichè sulle verticali, giungiamo infine alla uguaglianza $A' = A$, che volevamo giustificare.

Ponendo per brevità

$$I = a_{11} + a_{22},$$

e ricordando che $A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ è un minore del discriminante, possiamo dire che le tre espressioni

$$I, \quad A_{33}, \quad A \tag{12'}$$

sono *invarianti* rispetto ad ogni trasformazione ortogonale di coordinate. Tenuto conto dei gradi con cui compariscono in esse i coefficienti della (1), le chiameremo ordinatamente: *invariante lineare, quadratico, cubico.*

Conviene ricordare, sotto la forma seguente, il risultato cui siamo pervenuti: *in una trasformazione ortogonale di coordinate, rimangono inalterati il discriminante dell'equazione di una conica, il complemento algebrico del termine noto, e la somma dei coefficienti dei quadrati delle coordinate.*

Osservazione. — Occorre tener presente che le uguaglianze (9) ed (11), a cui gli invarianti dànno luogo, sussistono quando si confrontano due equazioni, come la (1) e la (3), una delle quali sia ottenuta dall'altra colla semplice applicazione delle formole per la trasformazione delle coordinate, *avendo cura di non introdurre nè togliere fattori.* È infatti evidente che, se tutti i coefficienti dell'equazione di una conica vengono moltiplicati per uno stesso fattore t, i tre invarianti, lineare, quadratico e cubico, non rimangono inalterati, ma vengono moltiplicati per t, t^2, t^3, rispettivamente.

Il procedimento che precede si trasporta subito al caso di assi obliqui, pur di sostituire all'identità (6) la

$$x^2 + 2xy\cos xy + y^2 \equiv X^2 + 2XY\cos XY + Y^2. \tag{6*}$$

Colle considerazioni già fatte si trovano allora, in luogo delle uguaglianze (9), (11), le seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{I}{\operatorname{sen}^2 xy} = \dfrac{I'}{\operatorname{sen}^2 XY}, & \dfrac{A_{33}}{\operatorname{sen}^2 xy} = \dfrac{A'_{33}}{\operatorname{sen}^2 XY}, \\ \dfrac{A}{\operatorname{sen}^2 xy} = \dfrac{A'}{\operatorname{sen}^2 XY}, \end{cases} \tag{12*}$$

dove

$$I = a_{11} + a_{22} - 2\,a_{12}\cos xy,$$

I' ha l'analoga espressione, ed A_{33}, A'_{33}, A, A' hanno i significati suesposti. I primi membri delle (12*) forniscono gli invarianti per la più generale trasformazione di coordinate cartesiane.

279. Formazione della equazione ridotta di una conica col mezzo degli invarianti. — Mostriamo, sopra due esempi, come gli invarianti si applichino al calcolo effettivo dei coefficienti dell'equazione ridotta di una conica, della quale si conosca l'equazione generale. Sia questa

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\,a_{13}x + 2\,a_{23}y + a_{33} = 0,$$

dove le a_{ik} sono quantità note, e le x, y coordinate cartesiane, che per semplicità supporremo *ortogonali*. Calcoliamo anzitutto gli invarianti della (1)

$$I = a_{11} + a_{22}, \qquad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \qquad A,$$

che sono *quantità note*.

Trattiamo ora i seguenti casi.

α) *Riduzione agli assi dell'equazione di una conica a centro.* — Qui i nuovi assi coordinati X, Y (assi di simmetria della (1)) sono pure *ortogonali*; rispetto ad essi la conica ha una equazione del tipo (n. 268, (*b*))

$$(2) \qquad a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33} = 0,$$

i cui coefficienti sono incogniti. Per calcolarli, formiamoci gli invarianti della (2)

$$I' = a'_{11} + a'_{22}, \qquad A'_{33} = a'_{11}a'_{22}, \qquad A' = a'_{11}a'_{22}a'_{33}.$$

Paragonandoli cogli invarianti della (1), abbiamo (n. 278) le relazioni

$$(3) \qquad a'_{11} + a'_{22} = I, \qquad a'_{11}a'_{22} = A_{33}, \qquad a'_{11}a'_{22}a'_{33} = A,$$

le quali dicono che

$$(4) \qquad a'_{33} = \frac{A}{A_{33}},$$

e che a'_{11}, a'_{22} sono le radici dell'equazione quadratica

$$(5) \qquad t^2 - It + A_{33} = 0.$$

È indifferente assumere per coefficiente di X^2 (o di Y^2) nella (2) l'una o l'altra delle due radici, essendo in arbitrio la scelta dell'uno o dell'altro asse della conica come asse delle X o delle Y.

β) *Riduzione dell'equazione di una parabola all'asse e alla tangente nel vertice.* — Se come assi coordinati X, Y si assumono l'asse della curva e la tangente nel vertice $\left(\widehat{XY} = \frac{\pi}{2}\right)$, l'equazione della parabola assume la forma (n. 268, (*e*));

$$(2') \qquad a'_{22}Y^2 + 2\,a'_{12}X = 0.$$

Paragonando gli invarianti di questa agli invarianti della (1), nell'ipotesi che la (1) rappresenti una parabola, e sia dunque $A_{33} = 0$, troviamo le relazioni

$$(3') \qquad a'_{22} = I, \qquad -a'^{2}_{13}\, a'_{22} = A,$$

(oltre all'identità $0 = 0$ fornita dagli invarianti quadratici). Le (3') ci dànno a'_{22}, ed il valore dell'altro coefficiente incognito

$$a'_{13} = \pm\sqrt{-\frac{A}{I}},$$

il doppio segno dipendendo dal verso che si assume come positivo sull'asse X.

280. Significato geometrico dell'annullarsi di un invariante. — Poichè il valore di un invariante non si altera per una trasformazione di coordinate (e si altera per un fattore t, t^2 o t^3, quando tutto il primo membro dell'equazione della curva venga moltiplicato per una quantità arbitraria t), si prevede che l'annullarsi di un invariante debba corrispondere ad una particolarità della conica, indipendente dalla posizione degli assi coordinati.

Ed infatti sappiamo già che l'annullarsi dell'invariante cubico, ossia la condizione $A = 0$, significa che la conica si spezza in due rette (n. 242); e l'annullarsi dell'invariante quadratico, $A_{33} = 0$, esprime che la conica è una parabola (n. 230).

Supponiamo ora nullo l'invariante lineare, $I = 0$. Riferita la conica ad assi ortogonali x, y arbitrari, e scrittane l'equazione sotto la forma consueta

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{12}\, xy + a_{22}\, y^2 + \ldots = 0$$

sarà $a_{11} + a_{22} = 0$; donde segue che a_{11} e a_{22} hanno segni opposti, e che $A_{33} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2$ è negativo; la conica è dunque una iperbole (n. 230). L'equazione normale della iperbole sarà del tipo

$$a'_{11}\, x^2 + a'_{22}\, y^2 + a'_{33} = 0,$$

ossia, poichè $a'_{11} + a'_{22} = I = 0$,

$$x^2 - y^2 = -\frac{a'_{33}}{a'_{11}}.$$

La iperbole è dunque *equilatera* (n. 272); e viceversa. *La condizione perchè una iperbole sia equilatera è espressa dall'annullarsi dell'invariante lineare.*

Osservazione. — Cumulando due delle condizioni sopra nominate, si trovano ulteriori particolarità. Così, se $A = A_{33} = 0$, la conica si spezza in due rette parallele; se $A = I = 0$, la conica si spezza in due rette

perpendicolari. Le condizioni $A_{33} = 0$, $I = 0$ sono incompatibili (per coniche rappresentate da equazioni a coefficienti reali), a meno che la retta all'infinito non formi parte della curva, nella quale ipotesi l'equazione cartesiana si abbassa a primo grado.

*** 281. Teoremi di Apollonio.**[1] — Possiamo valerci degli invarianti per dimostrare due teoremi, dovuti ad Apollonio, sui diametri coniugati di una conica a centro.

Partendo dall'equazione della curva riferita a due assi ortogonali qualsiansi, calcoliamo gli invarianti I, A_{33}, A. Riferiamo poi la curva a due diametri coniugati X, Y; troveremo una equazione del tipo

$$a'_{11} X^2 + a'_{22} Y^2 + a'_{33} = 0, \tag{1}$$

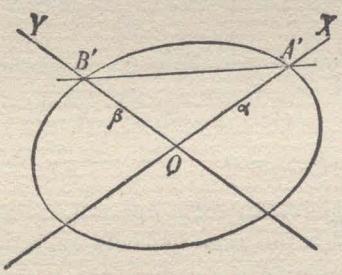
i cui invarianti valgono (n. 280, (12*))

$$\frac{a'_{11} + a'_{22}}{\operatorname{sen}^2 XY}, \quad \frac{a'_{11} a'_{22}}{\operatorname{sen}^2 XY}, \quad \frac{a'_{11} a'_{22} a'_{33}}{\operatorname{sen}^2 XY}.$$

Uguagliando queste espressioni ad I, A_{33}, A, risultano le relazioni

$$a'_{11} + a'_{22} = I \operatorname{sen}^2 XY, \quad a'_{11} a'_{22} = A_{33} \operatorname{sen}^2 XY, \quad a'_{33} = \frac{A}{A_{33}}. \tag{2}$$

D'altra parte, se indichiamo con α, β i valori dei semidiametri della conica (1) situati rispettivamente sulla retta X e sulla retta Y (dei quali semidiametri supporremo ad es. il secondo non trasverso, nel caso della iperbole), ricaviamo dalla (1), ponendo successivamente $Y = 0$ ed $X = 0$,



$$\left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= -\frac{a'_{33}}{a'_{11}}, \\ \pm\beta^2 &= -\frac{a'_{33}}{a'_{22}}, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

nella seconda delle quali il segno superiore si riferisce alla ellisse, l'inferiore alla iperbole. Sommando, o moltiplicando membro a membro le (3), otteniamo

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = -a'_{33} \frac{a'_{11} + a'_{22}}{a'_{11} a'_{22}}, \qquad \pm\alpha^2 \beta^2 = \frac{a'^2_{33}}{a'_{11} a'_{22}},$$

e, tenendo conto delle (2),

$$\alpha^2 \pm \beta^2 = -\frac{A I}{A_{33}^2}, \tag{4}$$

$$\pm\alpha^2 \beta^2 = \frac{A^2}{A_{33}^3 \operatorname{sen}^2 XY},$$

[1] Una dimostrazione elementare dei teoremi di Apollonio è suggerita dall'es. 9) che segue questo n.

la seconda delle quali può scriversi così (purchè si premetta un segno conveniente al radicale):

$$(5) \qquad \alpha\,\beta \operatorname{sen} XY = \frac{A}{\sqrt{\pm A_{33}^{\,3}}}.$$

Ora i secondi membri delle (4) e (5) non dipendono evidentemente dagli assi coordinati X, Y; segue che anche i primi membri conservano valori inalterati, quando alla coppia X, Y di diametri coniugati si sostituisca un'altra coppia di diametri siffatti. Questa osservazione dà luogo ai teoremi:

I. *In una ellisse è costante la somma dei quadrati di due semidiametri coniugati; in una iperbole è costante la differenza dei quadrati di due semidiametri coniugati.* E questa somma o differenza uguaglia, in particolare, la somma o differenza dei quadrati dei semiassi.

II. *In una conica a centro è costante l'area del triangolo avente per lati due semidiametri coniugati,* ed è uguale all'area del triangolo costruito sopra i due semiassi.

Osservazione I. — Le formole (4), (5) ci dànno la interpretazione geometrica di certi rapporti di invarianti. Era da prevedersi che una siffatta interpretazione non appartenesse agli invarianti stessi I, A_{33}, A, i quali si alterano per un fattore, t, t^2, t^3, quando i coefficienti della equazione della curva vengono moltiplicati per t (mentre la curva resta inalterata); quel fattore sparisce evidentemente dai rapporti suddetti, pel modo come sono formati.

Osservazione II. — Se la conica è una ellisse reale, $\alpha^2 + \beta^2$ è certo positivo, e quindi, in virtù della (4), il prodotto AI è negativo; e viceversa. Dunque le condizioni perchè una conica sia una ellisse reale sono (n. 230) $A_{33} > 0$, $AI < 0$; e le condizioni per una conica immaginaria: $A_{33} > 0$, $AI > 0$.

Esercizi. I. — 1) Scrivere le equazioni, riferite agli assi, delle coniche rappresentate in coordinate ortogonali da:

a) $4x^2 - 4xy + 4y^2 + 16x - 8y + 7 = 0$,

b) $3x^2 - 8xy + 3y^2 - 6x - 3 = 0$,

c) $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x = 0$,

d) $5x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 5 = 0$.

2) Supposto che la conica $a_{11}x^2 + \ldots = 0$ sia una iperbole, calcolare, col mezzo degli invarianti, i coefficienti dell'equazione $2\,a'_{12}XY + a_{33} = 0$ riferita agli asintoti, e determinare l'angolo formato da questi.

3) Applicare il procedimento dell'es. precedente alle iperboli *b*) e *c*) dell'es. 1).

4) Scrivere l'equazione riferita all'asse e alla tangente nel vertice della parabola

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4y + 6 = 0.$$

5) Qual'è il parametro, quale l'equazione ridotta della parabola

$$\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)^2-\frac{2x}{\alpha}-\frac{2y}{\beta}+1=0,$$

se x, y sono coordinate ortogonali? E se $\widehat{xy}$ ha un valore arbitrario ω?

II. — 6) Partendo dall'equazione di una iperbole riferita agli asintoti, si dimostri che «una iperbole e la coppia dei suoi asintoti determinano sopra ogni trasversale due segmenti, che hanno lo stesso punto medio» (cfr. n. 251, es. 1, c)).

7) Dalla stessa equazione si deduca che «le rette proiettanti un punto mobile di una iperbole da due punti fissi della curva intercettano sopra un asintoto un segmento di lunghezza costante» (cfr. n. 251, es. 1, b)).

8) Le tangenti alla parabola $y^2=2px$ nei punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) si incontrano nel punto di coordinate $\left(\frac{y_1 y_2}{2p}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Mediante queste formole si dimostri che «l'area di un triangolo circoscritto ad una parabola è la metà dell'area del triangolo formato dai punti di contatto» (Gregory).

III. — 9) Date le coordinate (x', y') di un punto P di una conica a centro riferita agli assi, si scriva l'equazione del diametro QOQ' coniugato al diametro POP', si determinino le coordinate di Q e Q', le lunghezze a', b' dei due semidiametri coniugati OP, OQ (si troverà $b'^2=\frac{b^2}{a^2}x'^2+\frac{a^2}{b^2}y'^2$), e si dimostrino direttamente i teoremi di Apollonio del n. 281.

10) Si dimostri che la distanza del centro dalla tangente nel punto P dell'es. precedente vale $ab:b'$ (dove a, b sono i semiassi); da questa formola segue nuovamente il teorema di Apollonio relativo alle aree.

11) Mediante i teoremi di Apollonio si calcolino, in funzione dei semiassi a, b, le lunghezze a', b' di due semidiametri coniugati formanti un angolo ω assegnato. Si dimostri che ω può avere un valore qualsiasi nella iperbole, mentre, per la ellisse, il minimo angolo acuto ω incluso da due semidiametri coniugati è tale che $\operatorname{tg}\omega=\frac{2ab}{a^2-b^2}$; i relativi diametri risultano uguali fra loro $(=\sqrt{2(a^2+b^2)})$, e giacciono sulle diagonali del rettangolo formato dalle tangenti nei vertici. È questa l'unica coppia di diametri coniugati uguali di una ellisse; assumendoli come assi coordinati, la equazione della ellisse assume la forma $X^2+Y^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

12) Accanto ai teoremi di Apollonio va considerato il seguente: «in una conica a centro è costante la somma dei quadrati delle inverse di due semidiametri perpendicolari» (Bobillier), cioè $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=$ cost., dove α, β vanno presi algebricamente, e quindi nella iperbole possono esser reali o immaginari. Si dimostri il teorema, sia ricorrendo agli invarianti, per la qual via si vedrà che quella costante vale $-IA_{33}:A$ (nella ipotesi del n. 281), sia adoperando l'equazione polare della curva, preso per polo il centro.

13) Detto *parametro relativo ad un diametro* di una parabola la costante p' che figura nell'equazione $Y^2=2p'X$ della curva riferita a quel diametro e alla tangente all'estremo di esso, si dimostri, col mezzo degli invarianti, che «in una parabola è costante il prodotto del parametro p' relativo a un diametro per il

quadrato del seno dell'angolo che quel diametro forma colla relativa tangente, ed è uguale al parametro principale p (relativo all'asse)». Si ha dunque $p' \geq p$, e la differenza $p' - p$ è uguale al doppio della distanza dell'estremo del diametro dalla tangente nel vertice.

14) Ogni coppia di diametri coniugati di una conica determina sopra una tangente due punti, le cui distanze dal punto di contatto hanno un prodotto costante ed uguale al quadrato del semidiametro parallelo alla tangente. (Si dimostri, sia sinteticamente, sia analiticamente riferendo la curva al diametro che passa per il punto di contatto ed al coniugato).

15) Partendo dall'es. precedente, si giustifichi la seguente costruzione (di CHASLES) degli assi di una ellisse, di cui son noti in grandezza e posizione due semidiametri coniugati OP, OQ. «Si conducano per P la parallela e la perpendicolare ad OQ, le quali risultano tangente e normale alla conica in P; sulla normale si prendano due segmenti $PH = PK = OQ$; il cerchio che passa per H, K ed O, sega la tangente nominata in due punti M, N che, congiunti con O, dànno, in posizione, gli assi (i quali sono altresì bisettrici dell'angolo HOK). Per ottenere le grandezze $2a$, $2b$ di questi, si osserverà che uno dei due segmenti OH, OK vale $a + b$, e l'altro $a - b$ (n. 281), donde segue una immediata costruzione.

IV. — 16) Nel punto $P(x', y')$ della conica $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, riferita agli assi, si conduca la normale, la quale seghi in N, N' gli assi x, y. Si dimostrino le uguaglianze $PN = bb' : a$, $PN' = ab' : b$, dove b' è la lunghezza del semidiametro coniugato ad OP (es. 9)); segue che «in una conica a centro i due segmenti di una qualsiasi normale, compresi fra il *piede* (P) e gli assi, hanno un rapporto costante, $b^2 : a^2$, ed un prodotto uguale al quadrato del semidiametro perpendicolare alla normale».

17) La ricerca dei piedi $P(x, y)$ delle normali ad una conica a centro K uscenti da un dato punto S del piano, conduce a risolvere due equazioni quadratiche in x, y, delle quali una rappresenta la K, e l'altra una iperbole equilatera passante per S, per il centro O di K, ed avente gli asintoti paralleli agli assi di K. Segue che «da un punto del piano si possono condurre ad una conica quattro normali (di cui due almeno reali); i piedi di esse sono le intersezioni della conica data con una certa iperbole equilatera» (APOLLONIO). Questa iperbole può generarsi come luogo della intersezione di una retta variabile uscente da S col diametro di K coniugato alla direzione normale a quella retta. Essa è inoltre il luogo dei centri delle coniche di ogni fascio determinato da K insieme ad un cerchio qualsiasi di centro S (CHASLES) (cfr. n. 267, es. 16); quindi è luogo dei punti medi delle corde comuni a K ed ai singoli cerchi di centro S. Come degenera la iperbole, se S appartiene ad uno degli assi di K?

18) Dati sulla conica K dell'es. precedente due punti P_1, P_2, si possono costruire, risolvendo un problema di secondo grado, due nuovi punti P_3, P_4 di K, tali che le normali a K in P_1, P_2, P_3, P_4 formino fascio; anzi la retta $P_3 P_4$ si determina linearmente partendo dalla retta $P_1 P_2$ (n. 260, es. 32)). Dalla costruzione segue che «dei quattro piedi delle normali condotte ad una conica da un punto, tre qualsivogliano determinano un cerchio, che sega inoltre la conica nel punto diametralmente opposto al quarto piede» (JOACHIMSTHAL).

19) Da un punto generico S del piano si possono condurre tre normali ad una parabola; i loro piedi sono le intersezioni della curva con una iperbole equilatera che passa per S, ed ha uno degli asintoti sopra l'asse della parabola. L'iperbole può generarsi in modi analoghi a quelli dell'es. 17). « Il cerchio determinato dai tre piedi delle normali alla parabola uscenti da un punto, passa per il vertice della curva; e viceversa, ogni cerchio passante pel vertice sega la parabola in tre punti, le cui normali concorrono in un punto ». Quest'ultimo teorema può dimostrarsi ricorrendo all'osservazione seguente.

V. — 20) Un cerchio sega una parabola in quattro punti, le cui ordinate (rispetto all'asse) dànno una somma nulla, e viceversa; in altri termini « la condizione, affinchè un quadrangolo iscritto in una parabola sia pure iscrittibile in un cerchio, è che il suo baricentro cada sull'asse ». Per i vertici di un quadrangolo iscrittibile in un cerchio passano due parabole, i cui assi si segano ad angolo retto (n. 267, es. 17)) nel baricentro del quadrangolo.

21) Un cerchio sega la iperbole equilatera $xy = k$ in quattro punti, le cui ascisse e le cui ordinate dànno prodotti uguali a k^2; e viceversa. La iperbole stessa è segata da un'altra iperbole equilatera qualsiasi in quattro punti, le cui ascisse e le cui ordinate danno prodotti uguali a $-k^2$; e viceversa. Dall'ultima proprietà segue che, delle quattro intersezioni, tre determinano la quarta nel modo noto (n. 260, es. 37)); e ricordando la prima proprietà, si ha: « Se di quattro punti di una iperbole equilatera ciascuno è ortocentro nel triangolo degli altri tre, allora ciascuno ha come diametralmente opposto un punto, che appartiene al cerchio passante per gli altri tre; e viceversa ».

VI. — 22) Si dimostri analiticamente che « il luogo di un punto da cui si possono condurre tangenti perpendicolari tra loro ad una ellisse od iperbole è un cerchio, detto *cerchio principale*, concentrico alla conica e di raggio $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ » (cfr. n. 260, es. 44)). Nella ellisse, il cerchio è circoscritto al rettangolo formato dalle tangenti nei vertici; per la iperbole, è reale o immaginario, secondo che l'angolo degli asintoti, in cui è contenuta la curva, è acuto od ottuso, e si riduce al solo centro se la iperbole è equilatera. « Nella parabola $y^2 = 2px$, il luogo dei punti da cui escono tangenti perpendicolari è la retta $x + \frac{p}{2} = 0$, detta *direttrice* » (cfr. n. 251, es. 14)). (Si approfitti della (5) del n. 233; o si scrivano le equazioni di due tangenti ortogonali, di cui una sia la (5) del n. 273, o la (5) del n. 275).

23) Il luogo di un punto da cui si possono condurre ad una parabola tangenti formanti un angolo ω assegnato è una iperbole, i cui asintoti includono l'angolo 2ω; essa ha uno degli assi sopra l'asse della parabola, e tocca questa curva in due punti (immaginari) situati sulla direttrice (cfr. n. 260, es. 41)). Il luogo analogo per una conica a centro è una curva del quarto ordine.

24) Un punto generico P del piano di una conica K è vertice di infiniti triangoli autopolari rispetto a K, nei quali gli altri due vertici P', P'' sono coniugati in una involuzione sulla polare p di P. I cerchi circoscritti ai detti triangoli formano un fascio (n. 260, es. 36)), il cui asse radicale passa per il centro O di K. Di qua segue che gli infiniti cerchi, ciascuno dei quali è circoscritto ad uno, e quindi (n. 246, es. 39)) ad infiniti triangoli autopolari rispetto a K, hanno

a due a due un asse radicale passante per il punto O, e formano una rete di cui O è il centro radicale (n. 61, es. 11)). Il centro O, se è proprio, ha la stessa potenza rispetto a quei cerchi; questa si può calcolare, riferendosi ad es. al cerchio circoscritto a un triangolo $PP'P''$ formato da un punto P di un asse e da P' e P'' coincidenti in uno dei punti Kp, e si riconosce uguale ad $a^2 + b^2$. Risulta di qua il teorema di FAURE: «I cerchi circoscritti ai triangoli autopolari rispetto ad una conica a centro segano ortogonalmente il cerchio principale della conica; e viceversa. I cerchi analoghi relativi alla parabola segano ortogonalmente la direttrice, che è il luogo dei loro centri; e viceversa». Nella iperbole equilatera, ad es., quei cerchi passano per il centro della curva (cfr. n. 267, es. 15)).

VII. — 25) Si scriva l'equazione del cerchio osculatore ad una conica in un punto P, assumendo come assi coordinati il diametro passante pel punto e la tangente ivi (cfr. n. 258); si dimostri che il raggio del detto cerchio, per una conica a centro (*raggio di curvatura* della conica in P), è espresso $\rho = \frac{b'^2}{a' \operatorname{sen} \omega}$, dove a' è il semidiametro passante per P, b' è il semidiametro coniugato, ed ω è l'angolo dei due semidiametri. Si può anche scrivere $\rho = \frac{b'^3}{ab}$, ed esprimere ρ mediante le coordinate x', y' di P (es. 9)). Se P ad es. è un vertice della curva, estremo del semiasse a, si ha $\rho = \frac{b^2}{a}$, raggio del cerchio che ha ivi un contatto quadripunto colla conica.

26) Mediante il valore trovato per ρ, si giustifichi la seguente costruzione del centro del cerchio osculatore (*centro di curvatura*) in un punto P di una conica a centro: condotta la normale in P, la quale seghi in N, N' gli assi della curva, si tiri nel centro O la perpendicolare al diametro OP fino a segare in H la normale, e si porti su questa il segmento $N'C = -NH$; C è il centro richiesto.

27) Un'altra costruzione del cerchio osculatore in P, nella quale si adoperano soltanto il semidiametro OP ed il semidiametro coniugato OQ, è la seguente: sui due semidiametri OP, OQ si costruisca il parallelogramma $OPRQ$, e dal vertice R si conducano le perpendicolari al lato PO e alla diagonale PQ; queste perpendicolari intercettano sulla normale in P (perpendicolare a PR) un segmento uguale al raggio di curvatura in P. In particolare, se OP e OQ sono semiassi, la perpendicolare calata da R su PQ incontra gli assi nei centri dei cerchi osculatori relativi ai vertici P e Q.

28) Il centro del cerchio osculatore nel punto (x', y') di una conica a centro, riferita agli assi, ha le coordinate

$$X = -\frac{c^2}{a^4} x'^3, \qquad Y = -\frac{c^2}{b^4} y'^3,$$

dove si è posto $c^2 = a^2 \pm b^2$ per la ellisse od iperbole, rispettivamente. Mentre il punto (x', y') descrive la conica, il punto (X, Y) descrive la curva del sesto ordine

$$\left(\frac{X}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

dove $\alpha = c^2 : a$, $\beta = c^2 : b$; questa curva, luogo dei centri di curvatura, dicesi *evoluta* della conica data; (essa possiede quattro cuspidi nei centri di curvatura relativi ai vertici, ed ha come tangente in ogni suo punto (X, Y) la normale alla conica nel punto corrispondente (x', y')).

29) Il procedimento dell'es. 25), applicato alla parabola, dà il raggio di curvatura nel punto $P\,(x', y')$, sotto la forma $\rho = \dfrac{p'}{\operatorname{sen}\omega} = \dfrac{p}{\operatorname{sen}^3\omega}$, dove p' è il parametro relativo al diametro uscente da P (es. 13)), p è il parametro principale, ω è l'angolo della tangente in P con un diametro qualsiasi. In particolare, il raggio di curvatura nel vertice è uguale al parametro. Per costruire il centro del cerchio osculatore (o di curvatura) in P, si conduca ivi la normale, che seghi l'asse in N, e si porti sull'asse, da banda opposta al vertice, un segmento NH uguale al doppio dell'ascissa di P (cioè alla sottotangente di P); la perpendicolare all'asse in H sega PN nel centro richiesto.

30) Le coordinate del centro di curvatura della parabola nel punto (x', y') sono

$$X = p + 3x', \quad Y = -y'^3 : p^2,$$

e l'equazione dell'*evoluta*, luogo del detto centro, è

$$27\,p\,Y^2 = 8\,(X - p)^3;$$

si tratta di una curva del terzo ordine, detta *parabola semicubica* (cfr. n. 47, es. 1)), avente una cuspide nel punto $(p, 0)$.

VIII. — 31) Le coordinate di un punto P, che descriva una ellisse riferita agli assi, possono esprimersi in funzione di un angolo variabile φ, detto *anomalia eccentrica* (Keplero), mediante le seguenti *equazioni parametriche*

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\operatorname{sen}\varphi;$$

φ è l'angolo formato dall'asse x col raggio del cerchio $x^2 + y^2 = a^2$, passante pel punto di esso che ha la stessa ascissa di P.

32) Due punti P e Q della ellisse, che siano estremi di due semidiametri coniugati, corrispondono a due valori del parametro φ differenti per $\dfrac{\pi}{2}$; di qua seguono nuovamente i teoremi di Apollonio (n. 281).

33) Se due punti P_1, P_2 di una ellisse si muovono in modo che la retta $P_1 P_2$ si mantenga parallela a sè stessa, la somma $\varphi_1 + \varphi_2$ delle loro anomalie eccentriche rimane costante. E se le due corde $P_1 P_2$, $P_3 P_4$ di una ellisse formano angoli uguali, ma opposti, con ciascun asse, tra le anomalie eccentriche dei quattro punti passa la relazione $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Segue (n. 263, es. 17)) che «la condizione necessaria e sufficiente, affinchè quattro punti di una ellisse appartengano a un cerchio, è che la somma delle loro anomalie eccentriche sia nulla (a meno di multipli di 2π)» (Joachimsthal).

34) Segue ancora che il cerchio osculatore alla ellisse nel punto (di anomalia) α sega ulteriormente la curva nel punto $\beta = -3\alpha$. E che per il punto β passano tre cerchi, osculanti la curva nei punti

$$-\frac{\beta}{3}, \quad -\frac{\beta + 2\pi}{3}, \quad -\frac{\beta + 4\pi}{3},$$

i quali punti, col punto primitivo, stanno in un cerchio (n. 268, es. 22)).

35) Per la iperbole si possono assumere le seguenti equazioni parametriche:

$$x = a \sec \varphi, \quad y = b \operatorname{tg} \varphi.$$

Il diametro trasverso, che ha un estremo nel punto (x, y), ha come coniugato il diametro non trasverso di cui un estremo è il punto $x' = a \operatorname{tg} \varphi$, $y' = b \sec \varphi$.

IX. — 36) Per un punto O del piano di una conica si conducano due trasversali arbitrarie a segar la curva, la prima in M, M', la seconda in N, N'; si dimostri che «il rapporto $\frac{OM \cdot OM'}{ON \cdot ON'}$ non varia se il punto O si sposta comunque, purchè le due trasversali conservino inalterate le loro direzioni» (Apollonio). (Si assumano ad es. le trasversali come assi coordinati; n. 277, I)).

37) In conseguenza: se due rette ruotano intorno a due punti fissi O, o, restando parallele tra loro, i prodotti dei segmenti, che la conica segna su quelle, serbano un rapporto costante $\frac{OM \cdot OM'}{om \cdot om'}$.

38) Seguono i corollari: Il prodotto dei segmenti di una secante, che ruoti intorno ad un punto fisso, è proporzionale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa. I due tratti di tangenti, compresi fra un punto esterno ad una conica ed i punti di contatto, sono proporzionali ai semidiametri ad essi paralleli.

39) Dalla proposizione dell'es. 36) segue facilmente il teorema di Carnot sul poligono segato da una conica (n. 246, es. 24)); (basta condurre per un punto arbitrario O trasversali parallele ai lati del poligono, ecc.). Viceversa, quella proposizione può dedursi come caso limite dal teorema di Carnot relativo ad un triangolo, un cui vertice si faccia allontanare all'infinito.

Capitolo V.

Proprietà focali delle coniche.

282. Definizione di fuoco. — Noi sappiamo (n. 237) che da un punto qualsiasi del piano di una conica escono infinite coppie di rette coniugate rispetto alla curva, formanti una involuzione, che ha per rette doppie le tangenti dal punto alla conica. Tra quelle coppie ve ne sarà dunque una, e in generale una sola (n. 192), composta di rette (reali) perpendicolari fra loro. Siamo ora condotti a chiedere se vi sia qualche punto particolare, tale che per esso passino più di una, e quindi infinite coppie di rette coniugate rispetto alla conica e perpendicolari fra loro. Un punto siffatto si dirà *fuoco;* per noi dunque (adottando la definizione di Poncelet):

Fuoco di una conica è un punto tale che la involuzione delle rette uscenti da esso e coniugate rispetto alla curva sia circolare. Se ricordiamo che le rette doppie (immaginarie) di una involuzione circolare passano per i punti ciclici del piano, possiamo anche definire il fuoco come un punto

tale che le tangenti da esso condotte alla curva passino per i punti ciclici del piano.

Poichè le dette tangenti sono immaginarie, deve intanto ogni fuoco esser *interno* alla conica. Esso coincide col centro (supposto proprio) di questa solo quando la involuzione dei diametri coniugati sia circolare, cioè nel cerchio (n. 267). Ed è sempre un punto proprio, eccettuato al più il caso della parabola, il cui punto all'infinito può, sotto alcuni rispetti, esser riguardato come fuoco, sebbene ciò non si soglia fare.

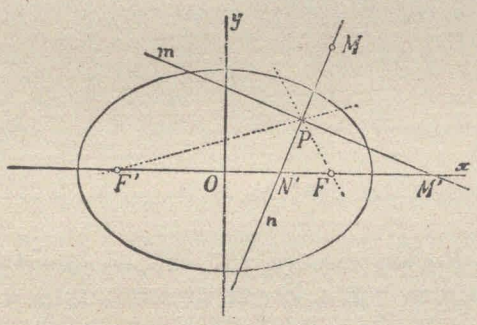
Escluso il cerchio, congiungiamo un fuoco F (supposto proprio) col centro O della conica. Fra le corde, parallele tra loro, coniugate col diametro OF, quella passante per F deve esser perpendicolare ad OF (per definizione di fuoco); dunque OF è un *asse* della conica (n. 265), dunque ogni fuoco appartiene ad un asse.

Volendo proseguire per via analitica la ricerca dei fuochi, conviene staccare le coniche a centro dalla parabola.

283. Ricerca dei fuochi della ellisse e della iperbole. — Partiamo dall'equazione della curva riferita agli assi (n. 273)

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

dove, in questa e nelle formole successive, il segno superiore si riferisce all'ellisse, l'inferiore alla iperbole. Nel caso della ellisse supporremo $a \geqq b$; sopra x si trova dunque l'asse maggiore della ellisse, trasverso della iperbole.



Scriviamo anzitutto le equazioni di due rette m, n, coniugate rispetto alla conica e perpendicolari tra loro. Una di esse, ad es. la m, sarà arbitraria, mentre n sarà la perpendicolare calata su m dal polo M di m (n. 237). Se chiamiamo (x', y') le coordinate di M (che supporremo diverse da zero), le equazioni delle due rette saranno (n. 273)

$$m) \qquad \frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1,$$

$$n) \qquad \frac{a^2(x - x')}{x'} = \pm \frac{b^2(y - y')}{y'}.$$

Seghiamo le due rette con uno degli assi della conica, ad es. coll'asse x; troveremo due punti M', N' aventi come ascisse

$$OM' = \frac{a^2}{x'}, \qquad ON' = \frac{x'}{a^2}(a^2 \mp b^2).$$

I due punti M', N' variano col mutare delle due rette m, n, coniugate e perpendicolari; ma il prodotto

$$OM' \cdot ON' = a^2 \mp b^2$$

rimane costante; ciò dimostra che M', N' si mantengono coniugati in una involuzione avente il centro O e la potenza $a^2 \mp b^2$ (n. 189, *a*)). Nella ipotesi fatta, la potenza è positiva e si suole indicare con c^2, ponendo

$$(2) \quad \begin{cases} \text{per la ellisse,} & c^2 = a^2 - b^2, \\ \text{per la iperbole,} & c^2 = a^2 + b^2; \end{cases} \qquad (a > b)$$

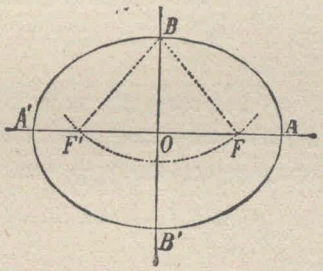
la involuzione dunque è iperbolica, ed ha due punti doppi F, F' di ascisse c, $-c$, sull'asse x. Segue poi dalle cose dette che, se per uno di essi, ad es. per F, si conduce una retta m ad arbitrio, la retta n coniugata e perpendicolare passerà pure per F. Ciò prova che F ed F' sono *fuochi* della conica, sono anzi i soli fuochi situati sull'asse x.

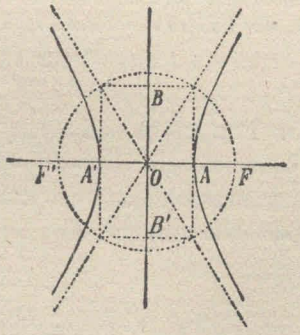
Se lo stesso procedimento si ripete per l'asse y, si trova che la involuzione, cui appartengono le coppie di intersezioni di y con m ed n, è ellittica, di potenza $-c^2$; si conclude che sull'asse y stanno due fuochi *immaginari* di ordinate $+ci$, $-ci$.

Limitandoci a considerare i fuochi reali, che soli hanno interesse, concludiamo:

Una conica a centro possiede due fuochi, situati sopra uno degli assi (asse focale o principale), che è l'asse maggiore per l'ellisse e l'asse trasverso per la iperbole. I fuochi sono simmetrici rispetto al centro, e la loro distanza da questo punto (distanza focale) è $c = \sqrt{a^2 \mp b^2}$.

Il valore della distanza focale giustifica senz'altro le seguenti costruzioni dei fuochi.





Se la curva è una *ellisse*, si descriva il cerchio che ha per centro un vertice dell'asse minore e per raggio il semiasse maggiore; questo cerchio sega l'asse maggiore nei fuochi.

Se la curva è una *iperbole,* si circoscriva un cerchio al rettangolo che ha per mediane gli assi AA', BB' della curva; quel cerchio sega l'asse trasverso nei fuochi.

284. Alcune proprietà angolari dei fuochi. — Risulta dalle considerazioni precedenti che:

a) *Le coppie di rette coniugate rispetto ad una conica, e perpendicolari tra loro, segano sull'asse focale coppie di punti separati armonicamente dai fuochi.*

Considerando il gruppo armonico, che due rette siffatte m, n formano colle congiungenti il punto $P \equiv mn$ ai fuochi, si vede subito (n. 152) che m, n bisecano l'angolo $F\widehat{P}F'$.

Ora due rette coniugate e perpendicolari sono, ad es., la tangente e la normale in un punto della curva; quindi:

b) *La tangente e la normale in un punto di una conica a centro sono le bisettrici dell'angolo, sotto cui i fuochi sono visti dal punto.* La tangente è bisettrice esterna del detto angolo nella ellisse, e bisetttrice interna nella iperbole; infatti la tangente sega la retta FF' in un punto esterno alla conica, il quale si troverà dunque fuori del segmento finito FF' nella ellisse, dentro nella iperbole.

È conseguenza del precedente teorema il noto fenomeno, secondo cui i raggi luminosi, o termici ..., emessi da un fuoco, vengono riflessi dal perimetro della ellisse in raggi passanti per l'altro fuoco; donde il nome di *fuochi* dato da KEPLERO a questi punti, le cui proprietà erano già note ad APOLLONIO.

In generale, se il punto P sopra nominato è esterno alla curva, si dimostra mediante analoghe considerazioni il seguente teorema:

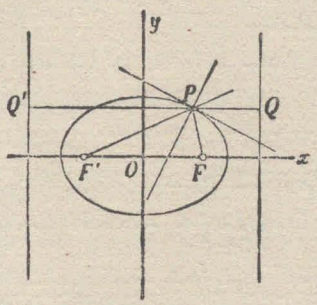
c) *I due angoli formati, l'uno dalle tangenti ad una conica a centro condotte da un punto esterno, l'altro dalle rette congiungenti quel punto ai fuochi, hanno le stesse bisettrici* (che sono le rette m, n uscenti da P).

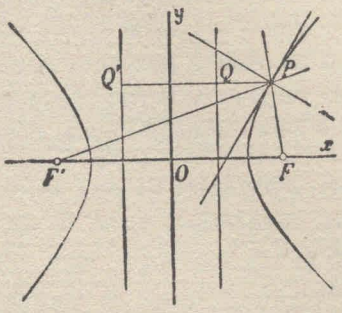
285. Proprietà dei raggi focali. — In varie formole relative ai uochi comparisce il rapporto della distanza focale al semiasse focale (maggiore o trasverso), rapporto che si chiama *eccentricità,* e si suole indicare con e, ponendo dunque

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a} = \sqrt{1 \mp \frac{b^2}{a^2}}. \tag{3}$$

L'eccentricità è nulla per il cerchio, inferiore ad 1 per la ellisse (ma tanto maggiore quanto più la ellisse differisce da un cerchio), superiore ad 1 per la iperbole.

Ciò premesso, assumiamo un punto $P\ (x, y)$ qualsiasi sulla conica, e proponiamoci di calcolare le distanze del punto P dai fuochi, o, come bre-





vemente diremo, *i raggi focali* (o *vettori*) del punto P. Ricordando che le coordinate di P soddisfano all'equazione (1) della conica, ossia che

$$y^2 = \pm b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

e tenendo presenti le (2) del n. 283 e la (3), avremo

$$\overline{PF}^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 \left(1 \mp \frac{b^2}{a^2}\right) - 2cx + (c^2 \pm b^2)$$

$$= \frac{c^2}{a^2} x^2 - 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a} x - a\right)^2 = (ex - a)^2.$$

Concludiamo che la lunghezza PF (presa aritmeticamente) è uguale al valore assoluto del binomio $ex - a$.

Ora per la *ellisse* è $e < 1$, $x \leqq a$, e quindi $ex - a < 0$; sarà dunque

$$PF = a - ex. \tag{4}$$

Analogamente si trova, considerando l'altro fuoco F',

$$PF' = a + ex;$$

donde

$$PF + PF' = 2a.$$

Per la *iperbole* invece $e > 1$, ed $x \geqq a$ se P appartiene al ramo i cui punti hanno ascissa positiva; è poi $x \leqq -a$ per l'altro ramo; sarà duuque

$$PF = \pm (ex - a), \tag{4'}$$

dovendosi prendere esternamente il segno che ha x. Similmente

$$PF' = \pm (ex + a),$$

e infine

$$PF' - PF = \pm 2a.$$

Si giunge così all'importante teorema:

Nella ellisse è costante la somma dei due raggi focali di un punto, ed è uguale all'asse maggiore. Nella iperbole è costante la differenza dei raggi focali di un punto, ed è uguale all'asse trasverso.

Del teorema è pur vero l'inverso; sappiamo infatti (n. 63, *a*)) che il luogo di un punto, le cui distanze da due punti fissi abbiano una data somma o una data differenza, è una ellisse od una iperbole.

286. Direttrici di una conica a centro. — Riprendiamo la espressione del raggio focale PF di un punto P (x, y), cioè, facendo astrazione dal segno,

$$PF = a - ex. \tag{4}$$

Essa contiene linearmente le coordinate del punto P (e ciò qualunque siano gli assi coordinati, a cui la conica venga riferita; n. 35). Ora questo fatto algebrico (che vale a caratterizzare i fuochi) trova una semplice interpretazione geometrica. Si consideri infatti quella retta, la cui equazione si ottiene uguagliando a zero la espressione nominata; nel nostro caso la retta

$$a - ex = 0, \tag{5}$$

ossia

$$x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}.$$

La distanza PQ del punto P (x, y) dalla retta (5) differisce solo per un fattore dal valore che assume il primo membro della (5) quando al posto delle variabili si pongano le coordinate di P (n. 31); e precisamente (fatta astrazione dal segno):

$$PQ = \frac{a - ex}{e} = \frac{a}{e} - x,$$

come risulta pure dalle figure di pag. 437. Questa relazione, ricordando la (4), ci dà

$$\frac{PF}{PQ} = e,$$

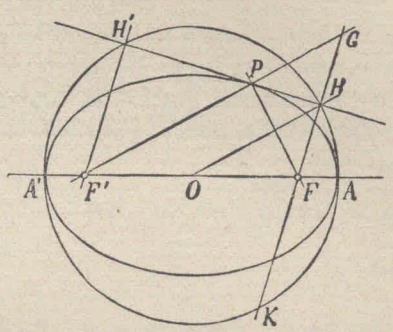
indipendente dalla posizione di P.

Per enunciare il risultato, si osservi che la retta (5) (la cui equazione può anche scriversi sotto la forma $\frac{cx}{a^2} = 1$) è la polare del fuoco F $(c, 0)$ rispetto alla conica. Ora le polari dei fuochi si sogliono chiamare *direttrici*. Una conica a centro ha due direttrici, esterne rispetto alla curva, e normali all'asse focale. Possiamo così affermare che:

Il rapporto delle distanze di un punto qualsiasi di una conica (a centro) da un fuoco e dalla corrispondente direttrice è costante, ed uguale alla eccentricità.

Sappiamo poi, inversamente (n. 63, *b*)), che il luogo di un punto, le cui distanze da un punto fisso e da una retta fissa abbiano un rapporto costante e, è una conica, e precisamente una ellisse se $e < 1$, una iperbole se $e > 1$ [1].

287. Altre proprietà focali delle coniche a centro. — Dalle proprietà precedenti dedurremo alcuni corollari per via geometrica, lasciando al lettore la cura di ritrovarli analiticamente.[2]



Condotta la tangente ad una conica a centro in un punto P di essa, costruiamo il punto G, simmetrico di un fuoco F rispetto alla detta tangente. Congiungendo il punto P con F, F' e G risulta subito, dall'uguaglianza di certi tre angoli col vertice in P (n. 284, *b*)), che i punti F', P e G sono allineati, e che $PG = PF$, donde segue, in valore assoluto, per la ellisse e per la iperbole,

$$F'G = F'P \pm PG = F'P \pm FP = 2a.$$

Dunque:

a) *Il luogo del punto simmetrico di un fuoco, rispetto ad una tangente variabile di una conica a centro, è il cerchio che ha per centro l'altro fuoco e per raggio l'asse focale.*

Il segmento che congiunge il punto H, medio di FG, col centro O, medio di FF', vale $\frac{1}{2}F'G = a$; e in conseguenza:

b) *Il luogo del piede della perpendicolare calata da un fuoco sopra una tangente variabile ad una conica a centro* (brevemente *la podaria di un fuoco) è il cerchio descritto sull'asse focale come diametro.* Questo cerchio è pure (per ragioni di simmetria) luogo del piede H' della perpendicolare calata da F' sulla detta tangente.

Ora se si prolunga la FH fino ad incontrare nuovamente il cerchio in K, sarà (per la simmetria della figura rispetto ad O) $FK = F'H'$; ma d'altra parte, in valore assoluto,

$$FH \cdot FK = FA \cdot FA' = \pm (a - c)(a + c) = b^2.$$

---

[1] Risulta dalle cose dette che l'equazione (in coordinate ortogonali)

$$\pm \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = ax + by + c$$

rappresenta una conica avente il fuoco (α, β), la direttrice $ax + by + c = 0$, e l'eccentricità $\sqrt{a^2 + b^2}$.

[2] Giova a tal fine ricorrere all'equazione della tangente scritta sotto la forma (5) del n. 273.

Si conclude:

Il prodotto delle distanze dei fuochi di una conica a centro da una tangente variabile è costante, ed uguale al quadrato del semiasse secondario (non focale).

288. Fuoco della parabola. — Prendiamo ora in esame la parabola, che supporremo riferita all'asse e alla tangente nel vertice,

(1) $$y^2 = 2px,$$

e vediamo come a questa curva si adattino le proprietà focali delle coniche a centro. Seguendo lo stesso procedimento tenuto nel n. 282, scriviamo le equazioni di due rette coniugate e perpendicolari, quali sono la retta polare di un punto qualsiasi M (x', y') (cfr. n. 275)

m) $$yy' = p\,(x + x'),$$

e la normale ad essa condotta da M

n) $$\frac{x - x'}{p} + \frac{y - y'}{y'} = 0.$$

Le due rette m, n segano l'asse della curva $(y = 0)$ in due punti M', N' aventi le ascisse

$$OM' = -x', \qquad ON' = p + x'.$$

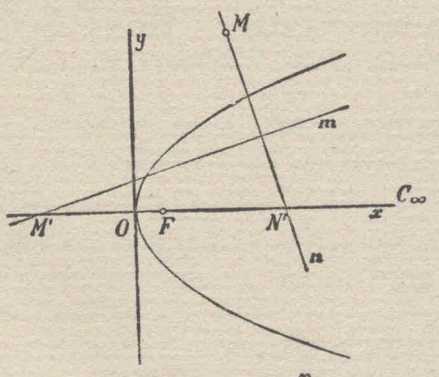
Ora la somma

$$OM' + ON' = p$$

è indipendente dalla coppia di rette m, n, coniugate e perpendicolari, che si considerano. Risulta di qua che i punti M', N' dell'asse x sono coniugati in una involuzione simmetrica, che ha per punti doppi il punto medio F fra M', N', avente la ascissa

(2) $$OF = \frac{p}{2},$$

ed il punto all'infinito C_∞ dell'asse, ossia della parabola. Il punto F è *fuoco* della curva, mentre il punto C_∞ possiede solo alcune delle proprietà spettanti ai fuochi. Si suol dire perciò che:



La parabola possiede un solo fuoco, situato sull'asse, interno alla curva, e avente dal vertice una distanza uguale a metà del parametro.

Il fuoco può costruirsi conducendo pel vertice la retta $y = 2x$. la quale sega ulteriormente la curva (1) in un punto di ascissa $\frac{p}{2}$, situato adunque sulla perpendicolare all'asse condotta pel fuoco.

Dalle cose dette risulta che:

a) *Le coppie di rette coniugate rispetto ad una parabola e perpendicolari tra loro segano sull'asse coppie di punti simmetrici rispetto al fuoco.* E di qua, collo stesso ragionamento fatto per le coniche a centro, si trae che:

b) *La tangente e la normale ad una parabola in un punto sono le bisettrici dell'angolo formato dalla retta congiungente il punto al fuoco e dal diametro uscente dal punto* (retta parallela all'asse).

E vale pure per la parabola un risultato analogo all'ultimo teorema del n. 284, come il lettore vedrà facilmente.

289. Altre proprietà focali della parabola. — Preso un punto P (x, y) sulla parabola, calcoliamo il *raggio focale* PF. Si ha (tenendo conto dell'equazione della curva)

$$\overline{PF}^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

e quindi

$$PF = x + \frac{p}{2}. \tag{3}$$

Per interpretare questo risultato, si consideri la retta

$$x + \frac{p}{2} = 0, \qquad \text{ossia} \qquad x = -\frac{p}{2},$$

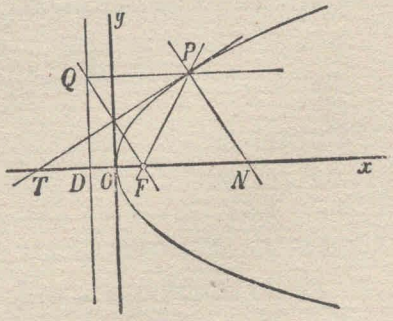
che è la polare del fuoco, e si chiama *direttrice* della parabola. La distanza di P da questa retta ha (come risulta dalla figura) il valore assoluto

$$PQ = x + \frac{p}{2} = PF.$$

Dunque:

a) *I punti della parabola sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice;* e viceversa (n. 63, *b*)).

Questa proposizione si suole riunire all'analoga, enunciata per le coniche a centro (n. 286), convenendo che la eccentricità della parabola valga 1. Così, anche sotto questo aspetto, la parabola appare come forma intermedia tra le ellissi e le iperboli.



Se si osserva che il triangolo FPT è isoscele col vertice in F, e che la base è dimezzata dall'asse y (n. 275), si ha:

b) *Il luogo del piede della perpendicolare calata dal fuoco di una parabola sopra una tangente variabile è la tangente nel vertice;* ed il luogo del simmetrico del fuoco rispetto alla detta tangente è la direttrice (cfr. n. 287, *a*)).

290. Equazione polare di una conica rispetto al fuoco. — Giova talora (ad es. nell'astronomia, in relazione colla prima legge di KEPLERO sul movimento ellittico dei pianeti) l'equazione polare di una conica, assumendo il fuoco come polo; come asse polare prenderemo l'asse focale, diretto dal fuoco verso la corrispondente direttrice.

Dette ϱ e φ le coordinate polari di un punto P, per la *ellisse* si ha (n. 285)

$$\varrho = PF = a - ex = a - e(c + \varrho \cos\varphi) = \frac{b^2}{a} - e\varrho\cos\varphi,$$

e di qua si ricava

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{1}$$

dove si è posto

$$\frac{b^2}{a} = p \quad (\textit{parametro}). \tag{2}$$

Per la *iperbole*, considerando anzitutto il ramo che avvolge il fuoco scelto per polo,

$$\varrho = FP = ex - a = e(c - \varrho\cos\varphi) - a,$$

donde nuovamente, fatta la posizione (2),

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}. \tag{1}$$

Per l'altro ramo d'iperbole si otterrebbe similmente

$$\varrho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \qquad \text{ossia} \qquad -\varrho = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \pi)},$$

la quale può ritenersi contenuta nella (1), quando si riguardi come negativo un raggio vettore situato sul prolungamento della semiretta relativa a un dato valore di φ.

Finalmente per la *parabola* (n. 289)

$$\varrho = FP = x + \frac{p}{2} = \left(\frac{p}{2} - \varrho\cos\varrho\right) + \frac{p}{2},$$

ossia

$$\varrho = \frac{p}{1 + \cos\varphi}, \tag{1'}$$

che rientra pure nella (1) per $e = 1$.

Le (1) ed (1'), per $\varphi = \frac{\pi}{2}$, dànno $\varrho = p$, donde segue che *il parametro, per una qualsiasi conica, è l'ordinata relativa al fuoco,* ossia metà della ghezza della corda condotta pel fuoco normalmente all'asse focale.

291. Coniche confocali. — Si dicono *confocali* (od *omofocali*) due coniche a centro che abbiano gli stessi fuochi, o due parabole che abbiano lo stesso fuoco e lo stesso punto all'infinito.

Due coniche a centro confocali hanno in comune il centro e le direzioni degli assi. Assunti l'asse focale e l'asse secondario come assi coordinati delle x, y rispettivamente, l'equazione di una delle coniche sarà del tipo

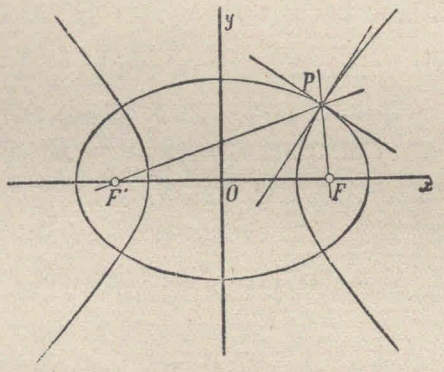
$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1, \tag{1}$$

dove potremo supporre $\alpha > \beta$.

Se α e β sono positivi, la (1) rappresenta una ellisse: se $\alpha > 0$, $\beta < 0$, si tratta di una iperbole; in ogni caso è $c = \sqrt{\alpha - \beta}$ la distanza focale. Ne viene che ogni conica confocale alla (1) avrà una equazione del tipo

$$\frac{x^2}{\alpha + k} + \frac{y^2}{\beta + k} = 1, \tag{2}$$

dove k è un parametro variabile da conica a conica. Si ottengono in corrispondenza infinite curve, formanti un sistema di *coniche confocali;* queste sono ellissi reali se $k > -\beta$, iperboli se $-\alpha < k < -\beta$, ellissi immaginarie se $k < -\alpha$ (coniche degeneri se $k = -\alpha$, o $k = -\beta$).



a) *Per un punto generico P del piano passano due curve del sistema, e precisamente una ellisse ed una iperbole,* luoghi dei punti i cui raggi focali hanno la somma o la differenza uguale a $PF \pm PF'$; *quelle due coniche si segano ortogonalmente in P* (e negli altri tre punti simmetrici rispetto agli assi od al centro), giacchè hanno per tangenti in P le bisettrici dell'angolo $F\widehat{P}F'$. In generale: *una ellisse (reale) ed una iperbole confocale si segano sempre (ortogonalmente) in quattro punti reali, mentre due coniche confocali dello stesso nome non si segano in punti reali;* segue facilmente dalle relazioni che legano i raggi focali delle due curve in questione.

La prima parte del teorema *a*), interpretata algebricamente, ci dice che la (2), quando ad x ed y si attribuiscano due valori costanti, coordinate di P, e si riguardi k come incognita, fornisce per k due valori reali, radici dell'equazione

$$k^2 + (\alpha + \beta - x^2 - y^2)\, k + \alpha\beta - \beta x^2 - \alpha y^2 = 0,$$

dei quali valori uno k' (corrispondente alla ellisse) è superiore a $-\beta$, l'altro k'' (corrispondente all'iperbole) è compreso fra $-\alpha$ e $-\beta$. Giova in

talune ricerche riguardare k', k'' come particolari coordinate, dette *ellittiche,* del punto P; dato il punto, le coordinate sono pienamente determinate, e date queste, entro ai limiti nominati, è determinato un solo punto P in ciascuno dei quattro quadranti limitati dagli assi.

Per quanto riguarda le parabole confocali, osserviamo che una parabola, riferita a coordinate ortogonali di cui l'origine cada nel fuoco e l'asse delle x coincida coll'asse della curva, ha una equazione del tipo

$$y^2 = 2px + p^2,$$

e che una equazione siffatta, al variare di p, rappresenta infinite parabole confocali.

b) *Per ogni punto del piano passano due parabole del sistema, le quali si tagliano ortogonalmente in quel punto e nel simmetrico rispetto all'asse.*

* È interessante esaminare il sistema delle coniche confocali ricorrendo a coordinate di rette. Supponendo che si tratti di coniche a centro, ricordiamo (n. 273) che la (2) ha l'equazione tangenziale

$$(\alpha + k)\, u^2 + (\beta + k)\, v^2 = 1,$$

ossia

$$(\alpha u^2 + \beta v^2 - 1) + k\,(u^2 + v^2) = 0. \tag{3}$$

Ora, al variare di k, questa rappresenta le coniche (inviluppi) di una *schiera* (n. 260), alla quale appartengono la conica $\alpha u^2 + \beta v^2 - 1 = 0$, ossia la (1), e la $u^2 + v^2 = 0$ che si spezza nei due punti

$$u + iv = 0, \qquad u - iv = 0,$$

di coordinate cartesiane omogenee (n. 132)

$$(1,\ i,\ 0), \qquad (1, -i,\ 0).$$

Questi sono i punti ciclici del piano (n. 127, Oss.), i quali costituiscono dunque una conica degenere della schiera. Le altre due coniche degeneri sono la coppia dei fuochi reali (corrispondenti a $k = -\beta$), e la coppia dei fuochi immaginari (corrispondenti a $k = -\alpha$). E le quattro rette basi della schiera, tangenti alle infinite coniche confocali, sono (come poteva prevedersi per via geometrica (n. 282)) le rette proiettanti i punti ciclici dai fuochi. Concludiamo:

c) *Le coniche confocali formano una schiera, le cui tre coniche degeneri sono costituite dalla coppia dei punti ciclici, dalla coppia dei fuochi reali e dalla coppia dei fuochi immaginari. Ogni retta generica del piano è toccata da una, e da una sola conica del sistema.*

d) *Le coppie di tangenti condotte da un punto alle infinite coniche confocali formano una involuzione simmetrica, cui appartengono le congiungenti il punto coi fuochi* (n. 260).

I due ultimi teoremi valgono anche per le parabole confocali, purchè si tenga presente che uno dei fuochi reali coincide col punto all'infinito delle parabole, ed i fuochi immaginari cadono nei punti ciclici del piano.

Esercizi I. — 1) Costruire per punti, o per tangenti, una conica a centro, di cui siano dati i fuochi e l'asse focale (nella seconda costruzione si approfitti della podaria dei fuochi).

2) Costruire per punti una conica, di cui sian dati un fuoco, la relativa direttrice, e l'eccentricità od un punto.

3) Costruire per tangenti una parabola, data mediante il fuoco e la direttrice (n. 289, *b*)).

4) Dati i fuochi e l'asse focale di una conica a centro, condurre a questa le tangenti da un punto assegnato, o le tangenti parallele ad una retta data (si costruiscano i simmetrici di un fuoco rispetto alle tangenti richieste, n. 287, *a*)).

5) Determinata una parabola mediante il fuoco e la direttrice, condurre ad essa le tangenti da un punto dato, o la tangente parallela ad una retta data.

6) Dati i fuochi e l'asse focale di una conica a centro, costruire le intersezioni con una retta r assegnata. (Il simmetrico di un fuoco F, rispetto alla tangente in uno dei punti richiesti, è punto di contatto di due cerchi, di cui uno è noto (n. 287, *a*)), mentre l'altro, passante per F e avente il centro su r, può costruirsi, n. 61, es. 13)).

7) Determinare le intersezioni di una retta data con una parabola, di cui si conoscano il fuoco e la direttrice.

8) Costruire una conica, di cui siano dati un fuoco e tre tangenti (si può determinare l'altro fuoco (n. 284, *c*)); oppure la podaria dei fuochi).

9) Le intersezioni di due coniche aventi un fuoco comune possono costruirsi mediante riga e compasso (cfr. n. 260, es. 34, *b*)). Si risolva ad es. il problema supponendo definite le coniche mediante il fuoco comune, le rispettive direttrici e le eccentricità. (Si determineranno anzitutto due rette formanti fascio colle direttrici, e contenenti, ciascuna, due dei punti incogniti; ecc.).

10) Valendosi della costruzione precedente, e ricordando l'es. 7) del n. 63, si può risolvere (con NEWTON) il *problema di* APOLLONIO: « descrivere un cerchio che tocchi tre cerchi assegnati ». Il problema ammette al più otto soluzioni.

II. — 11) Il segmento di una tangente variabile di una conica, compreso fra le tangenti negli estremi dell'asse focale, è visto da ciascun fuoco sotto angolo retto (n. 246, es. 32)). Questa proposizione serve ad APOLLONIO per definire e costruire i fuochi. Essa sussiste pure se all'asse focale si sostituisce una qualsiasi corda passante per quel fuoco ove sta il centro di vista.

12) Una corda qualsiasi di una conica è vista da un fuoco sotto un angolo, le cui bisettrici passano, l'una per il polo della corda, l'altra per la intersezione della corda colla direttrice relativa a quel fuoco. Caso particolare che la corda passi per quel fuoco.

13) Il teorema precedente permette di: « costruire una conica, di cui siano noti un fuoco e tre punti ». Si può infatti costruire la direttrice relativa al fuoco. Nel caso generale esistono quattro coniche reali soddisfacenti al problema, delle quali tre sono iperboli, e la rimanente è una ellisse, parabola od iperbole, secondo

la posizione dei dati; (ciò risulta osservando che i punti di una ellisse, o parabola, stanno tutti da una stessa banda di una direttrice). Si confronti la risoluzione qui indicata del problema con quella suggerita nell'es. 10) del n. 260. Si riprenda pure la risoluzione analitica del problema indicata nell'es. 25) del n. 260).

14) Dall'es. 12) segue il teorema (di PONCELET): «il segmento di una tangente variabile ad una conica, compreso fra due tangenti fisse, è visto da un fuoco sotto un angolo costante», il quale è la metà dell'angolo formato dalle congiungenti il fuoco coi punti di contatto delle tangenti fisse.

15) Nella parabola l'angolo nominato nel teorema precedente è uguale (o supplementare) all'angolo delle due tangenti fisse; donde il teorema (di LAMBERT): «il cerchio circoscritto al triangolo formato da tre tangenti ad una parabola passa per il fuoco». Quel cerchio è il luogo dei fuochi delle infinite parabole tangenti alle tre rette (formanti una schiera).

16) Segue la costruzione del fuoco della parabola tangente a quattro rette date, ed incidentalmente si ricava: «i quattro cerchi circoscritti ai triangoli formati prendendo a tre a tre i lati di un quadrilatero passano per uno stesso punto F; i piedi delle perpendicolari da esso calate sopra i lati del quadrilatero stanno sopra una retta y (tangente alla parabola nel vertice); gli ortocentri dei quattro triangoli nominati stanno sopra una seconda retta d (direttrice della parabola, n. 260, es. 35)), la quale è parallela ad y, e dista da y quanto y dista da F».

17) Dal teorema dell'es. 12) e dal n. 284, *b*) può pure dedursi il teorema di CHASLES: «le quattro rette proiettanti i due fuochi di una conica da due punti della curva toccano uno stesso cerchio, il cui centro è la intersezione delle tangenti nei detti punti».

III. — 18) Il prodotto dei raggi focali di un punto di una conica a centro è uguale al quadrato del semidiametro b', coniugato a quello passante pel punto (n. 281, es. 9)).

19) Detti H, H' i piedi delle normali condotte dai fuochi F, F' di una conica a centro sulla tangente in un punto P qualsiasi della curva, si ha $FH = \frac{b}{b'} FP$, $F'H' = \frac{b}{b'} F'P$, dove b è il semiasse secondario, e b' ha il significato dell'es. precedente. Moltiplicando si ritrova la nota proprietà (n. 287, *c*)) $FH \cdot F'H' = b^2$; dividendo invece si ha $FH : F'H' = FP : F'P$, donde risulta nuovamente che la tangente in P forma coi raggi focali del punto angoli uguali, il cui seno vale $\frac{b}{b'}$.

20) Tenendo conto di quest'ultimo valore e della espressione del raggio di curvatura in un punto (n. 281, es. 25)), si giustifichi la seguente costruzione (di STEINER) del centro di curvatura in P: «condotta la normale in P, la quale seghi in N l'asse focale, si conduca la perpendicolare in N a PN fino ad incontrare la FP in M, e poi per M la perpendicolare ad FP; questa sega PN nel centro di curvatura richiesto».

21) Si dimostri che la stessa costruzione vale anche per la parabola.

22) Nella parabola il raggio di curvatura di un punto è doppio del segmento della normale compreso tra il punto e la direttrice.

IV. — 23) Partendo dall'equazione polare di una conica riferita al fuoco e all'asse focale, e detta *corda focale* una corda passante pel fuoco, si dimostri che

« la media armonica (n. 156) tra i segmenti, in cui una corda focale è divisa dal fuoco, è costante ed uguale al parametro » (n. 290). I segmenti vanno presi però collo stesso segno, o con segni opposti, secondo che il fuoco è interno, o esterno alla corda.

24) Le corde focali di una conica a centro sono proporzionali ai quadrati dei diametri paralleli. Segue che « è costante la somma di due corde focali parallele a due diametri coniugati (cfr. n. 281); ed è pur costante la somma dei valori inversi di due corde focali perpendicolari fra loro » (cfr. n. 281, es. 12)).

V. *Sui cerchi focali.* — 25) Un fuoco F di una conica può riguardarsi come un cerchio di raggio nullo (spezzato nelle due rette isotrope uscenti da P), il quale tocca la conica nelle intersezioni di questa colla direttrice, polare di F. Questa nozione può estendersi (con Bobillier, e Steiner), considerando un cerchio qualsiasi bitangente alla curva; un tale cerchio si dirà *focale*, e la retta congiungente i punti di contatto (reali o immaginari) colla curva sarà la *direttrice relativa a quel cerchio*. Una data conica possiede infiniti cerchi focali; se essa ha centro, i detti cerchi si distribuiscono in due serie, gli uni (*cerchi focali principali*) avendo i centri sull'asse principale e le direttrici parallele all'asse secondario, gli altri (*c. f. secondari*) avendo i centri sull'asse secondario, ecc. (n. 267, es. 20)). Partendo dall'equazione ridotta della curva, si scrivano le equazioni dei cerchi dell'una e dell'altra serie.

26) Se da un punto P di una conica si conduce la tangente PT ad un cerchio focale e la perpendicolare PQ alla relativa direttrice, il rapporto $PT : PQ$ dei segmenti così ottenuti non varia al variare del punto; ed è precisamente uguale all'eccentricità della conica $e = \sqrt{a^2 \pm b^2} : a$ se si tratta di un cerchio principale, o ad $e' = \sqrt{b^2 \pm a^2} : b$ se si tratta di un cerchio secondario (per la ellisse e' è immaginario).

27) Viceversa: se un punto varia in modo che la tangente [1] da esso condotta ad un cerchio fisso serbi un rapporto costante colla distanza del punto da una retta fissa, quel punto descrive una conica, bitangente al cerchio nelle intersezioni colla retta; la conica è una ellisse, una parabola od una iperbole, secondo che il detto rapporto (supposto reale) è inferiore, uguale, o superiore ad 1.

28) È costante la somma, o differenza, delle tangenti PT, PT' condotte da un punto P, variabile sopra una conica, a due cerchi focali di una stessa serie; precisamente, detto k il valore della costante (che dipende dai cerchi considerati), è $PT + PT' = k$ per quei punti P della curva che si trovano nella striscia compresa fra le direttrici relative ai due cerchi; mentre $PT - PT' = \pm k$ per i punti esterni alla detta striscia. In particolare, se le due direttrici sono esterne alla curva, è costante sempre la somma, o sempre la differenza (il primo caso potendosi presentar solo nella ellisse).

29) Viceversa: se un punto si muove in modo che rimanga costante la somma o la differenza delle tangenti da esso condotte a due cerchi fissi, il punto descrive una conica bitangente a ciascuno dei due cerchi.

---

[1] Qui, e nei seguenti esercizi, per *tangente* si intende il segmento di tangente compreso fra il punto da cui quella esce ed il punto di contatto.

30) La equazione dei cerchi focali secondari fa vedere che i loro raggi sono proporzionali alle distanze dei rispettivi centri da un fuoco F della conica. Segue che, se al cerchio (compreso tra quelli) avente per diametro l'asse focale della conica si fa subire una rotazione intorno ad F di un angolo arbitrario α, e successivamente un omotetia di centro F e rapporto $\frac{1}{\cos\alpha}$, quel cerchio si trasforma in altro cerchio focale secondario. Ricordando una proprietà del primo cerchio (n. 287, *b*)), risulta il teorema (PONCELET, STEINER): «il luogo dei punti di incontro delle tangenti ad una conica a centro colle rette che escono da un fuoco e segano quelle sotto angolo costante è un cerchio bitangente alla conica ed avente il centro sull'asse secondario». Viceversa: «se un angolo di grandezza costante si muove in modo che il vertice descriva un cerchio, ed un lato passi per un punto fisso, l'altro lato inviluppa una conica bitangente al cerchio». Teoremi analoghi valgono per la parabola, sostituendo al cerchio (bitangente) una retta (tangente) alla curva (cfr. n. 251, es. 5)).

VI. *Sulle coniche confocali.* — 31) Il luogo dei poli di una retta, rispetto ad una schiera di coniche confocali, è una retta perpendicolare a quella (n. 260, es. 45)); le due rette dividono armonicamente i fuochi. Se due rette perpendicolari sono coniugate rispetto ad una conica, esse son pure coniugate rispetto ad ogni conica confocale con quella; le due coniche della schiera passanti per la intersezione delle due rette, hanno ivi come tangente (e normale) l'una o l'altra delle rette. E se due rette sono coniugate rispetto a due coniche confocali, esse sono coniugate rispetto a tutte le altre coniche confocali, e sono perpendicolari tra loro.

32) Le polari di un punto P, rispetto ad una schiera di coniche confocali, inviluppano una parabola, che tocca gli assi delle dette coniche, ed ha come direttrice la congiungente P col centro (n. 260, es. 46)). Le quattro tangenti comuni alla parabola e ad una conica della schiera hanno come punti di contatto $P_1, \ldots, P_4$ su questa conica i piedi delle normali condotte da P alla conica stessa (CHASLES, STEINER). Per ciascuno P_i di quei punti passa un'altra conica della schiera, che ha ivi come tangente la retta PP_i. Segue che il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da P alle coniche confocali, od anche il luogo dei piedi delle normali uscenti da P alle coniche stesse, è la podaria di P rispetto alla parabola sopra nominata; questo luogo è una curva del terzo ordine.

33) L'inviluppo ed il luogo dell'es. precedente degenerano se P sta sopra un asse, o sulla retta all'infinito. Si dimostri ad es. che «il luogo dei punti di contatto delle tangenti (e dei piedi delle normali) condotte ad una schiera di coniche confocali da un punto P di un asse, è (fatta astrazione dall'asse) un cerchio che passa per P ed ha il centro sul detto asse. Il cerchio divide armonicamente i fuochi, se P sta sull'asse principale; passa invece per i fuochi, se P sta sull'asse secondario».

34) Se P è improprio, il luogo in questione è una iperbole equilatera che passa per P e per i fuochi, sia reali, sia immaginari, delle coniche confocali. Segue ad es. che una conica a centro qualsiasi è segata da ogni iperbole equilatera, passante per i suoi fuochi reali e immaginari, in quattro punti, le cui tangenti formano un rettangolo circoscritto alla conica.

35) Sopra due ellissi confocali diconsi *corrispondenti* due punti aventi la stessa

anomalia eccentrica (n. 281, es. 31)). Il luogo dei punti corrispondenti ad un punto P assegnato, in una serie di ellissi confocali, è la iperbole confocale che passa per P, anzi quel tratto d'iperbole che sta nel quadrante $\widehat{xy}$ contenente P.

36) Se P e Q sono due punti arbitrari di una ellisse, e P', Q' sono i due punti corrispondenti sopra una ellisse confocale, si ha $PQ' = P'Q$ (IVORY); in altre parole: «in un rettangolo curvilineo formato da due ellissi e da due iperboli confocali, le diagonali (rettilinee) sono uguali tra loro». Le dette diagonali toccano inoltre una medesima ellisse confocale con quelle.

37) I lati di un angolo circoscritto ad una conica segano una conica confocale in quattro punti tali, che le tangenti a questa in due di essi, non appartenenti ad uno stesso lato, si incontrano sopra una bisettrice dell'angolo. Od anche: il quadrilatero formato dalle tangenti alla seconda conica nei detti punti ha come rette diagonali le due bisettrici dell'angolo, e la polare del vertice rispetto alla conica stessa. (Si consideri il triangolo diagonale comune del quadrilatero nominato e del quadrangolo dei quattro punti (n. 246, es. 30)), e si osservi che due lati del triangolo sono coniugati rispetto alle due coniche; poi es. 31)).

39) Da questo teorema e dal n. 291, *c*), segue che «le tangenti condotte ad una conica da due punti di una conica confocale toccano uno stesso cerchio, il cui centro è l'intersezione delle tangenti alla seconda conica nei punti nominati» (CHASLES; cfr. es. 17)).

30) Se P_1 e P_2 sono due punti di una ellisse, dai quali si conducano le tangenti P_1T_1, P_1U_1 e P_2T_2, P_2U_2 ad una ellisse interna, confocale alla prima, e si pone $P_1T_1 \cdot P_2T_2 \equiv M_1$, $P_1U_1 \cdot P_2U_2 \equiv N_1$, segue dal teorema precedente la relazione

$$P_1M_1 + P_1N_1 = P_2M_1 + P_2N_1,$$

od anche

$$P_1T_1 + P_1U_1 - (T_1M_1 + M_1T_2) = P_2T_2 + P_2U_2 - (U_1N_1 + N_1U_2).$$

Siano ora $T_1, T_2, T_3, \dots T'$ ed $U_1, U_2, U_3, \dots U'$ due gruppi di punti sulla ellisse interna, tali che le tangenti in punti omologhi dei due gruppi si seghino in punti $P_1, P_2, P_3, \dots P'$ della ellisse esterna. Quelle tangenti costituiscono due spezzate $T_1M_1M_2M_3 \dots T'$ ed $U_1N_1N_2N_3 \dots U'$ circoscritte alla ellisse interna, ed aventi perimetri le cui lunghezze indicheremo brevemente con (T_1T') ed (U_1U'). Applicando più volte l'ultima relazione, si trova

$$P_1T_1 + P_1U_1 - (T_1T') = P'T' + P'U' - (U_1U'),$$

e ciò qualunque sia il numero dei lati di ciascuna spezzata. Ora facendo crescere questo numero, vale a dire intercalando tra P_1 e P', sulla ellisse esterna, un numero sempre crescente di punti $P_2 \dots$, i perimetri di quelle spezzate hanno per limiti le lunghezze degli archi T_1T' ed U_1U' della ellisse interna; sussiste dunque la relazione

$$P_1T_1 + P_1U_1 - \text{arc. } T_1T' = P'T' + P'U' - \text{arc. } U_1U',$$

e togliendo dai due membri arc. $T'U'$,

$$P_1T_1 + P_1U_1 - \text{arc. } T_1U_1 = P'T' + P'U' - \text{arc. } T'U',$$

la quale esprime il teorema di GRAVES.[1] « La somma delle tangenti condotte ad una ellisse da un punto variabile sopra una ellisse confocale, e l'arco (minore) di quella compreso fra i punti di contatto, hanno una differenza costante ».

40) È dunque costante la somma delle due tangenti nominate e dell'arco maggiore compreso fra i punti di contatto. Segue che « una punta, la quale si muova tendendo un filo chiuso, di lunghezza costante, avvolto parzialmente intorno ad una ellisse, descrive una ellisse confocale ». Questa costruzione, nella ipotesi che la prima ellisse si riduca ad un segmento FF' contato due volte, ha come caso particolare la nota costruzione mediante i fuochi.

41) Da un punto P_1 di una ellisse si conduca una tangente ad una ellisse confocale interna, e sia P_2 la seconda intersezione della tangente colla prima ellisse; da P_2 si conduca la ulteriore tangente P_2P_3 all'ellisse interna, e così si continui. Si otterrà una spezzata $P_1P_2P_3 \ldots$ iscritta nella ellisse esterna, e circoscritta alla ellisse interna. Ora, se la spezzata si chiude pel fatto che ad es. il vertice P_{n+1} viene a coincidere con P_1, lo stesso fatto accade qualunque sia il punto P_1 della conica esterna da cui si parte. Si hanno allora infiniti n.goni semplici iscritti nella conica esterna, e circoscritti alla interna (cfr. n. 246, es. 29)). « I perimetri di tutti questi n.goni sono uguali tra loro » (e si dimostra altresì che quel perimetro è maggiore del perimetro di ogni altro n.gono iscritto nella conica esterna, e minore del perimetro di ogni altro n.gono circoscritto alla conica interna; CHASLES).

42) Nella spezzata o nel poligono dell'es. precedente, la bisettrice di ciascun angolo è normale alla conica esterna nel relativo vertice (n. 291, *c*)); se adunque P_1P_2 è un raggio luminoso uscente dal punto P_1, allora P_2P_3, P_3P_4, ecc., sono i successivi raggi riflessi sul contorno della conica esterna. E poichè una retta qualsiasi P_1P_2 tocca una conica confocale colla data, segue: « un raggio luminoso, il quale parta da un punto di una ellisse, e venga sempre nuovamente riflesso dal contorno della curva, tocca con tutte le sue successive posizioni una conica confocale alla data »; anche la nuova conica è una ellisse, se il raggio primitivo lascia i fuochi da una stessa banda.

CAPITOLO VI.

Trasformazione di una conica mediante una collineazione.

292. Coniche collineari. — L'argomento, a cui quest'ultimo Capitolo è dedicato, mentre ci fornirà alcune proprietà delle coniche, utili nello studio delle superficie del secondo ordine, ci condurrà d'altra parte a riassumere e riordinare varie nozioni acquistate nei Capitoli precedenti.

Una collineazione stabilita fra due piani π, π' trasforma, come già sappiamo (n. 200, Oss. I.), una conica K di π in una conica K' di π'; e

[1] La dimostrazione qui accennata è dovuta a REYE.

se la prima curva è reale, non degenere, come supporremo sempre nel seguito, tale sarà pure la seconda. *Ogni proprietà proiettiva di K si trasporta inalterata a K'.* Dunque una retta di π' che sia secante, tangente od esterna a K, ha per corrispondente in π' una retta che si comporta nello stesso modo rispetto a K'; un punto esterno od interno a K si trasforma in un punto esterno od interno a K'. A punti o rette coniugate rispetto a K, corrispondono punti o rette coniugate rispetto a K'; e tutte le proprietà dei poli e delle polari si conservano nella trasformazione.

Al contrario, le proprietà metriche generalmente si perdono. Così, l'esser K' una ellisse, parabola od iperbole non dipende già dalla specie cui K appartiene, ma soltanto dal fatto che la retta limite di π sia esterna, tangente o secante di K, rispettivamente; ed il centro di K' corrisponde al polo della retta limite rispetto a K; ecc.

La questione inversa di quella ora trattata ammette la seguente risposta: *Esistono infinite collineazioni tra due piani π, π' che trasformano una conica K di π in una conica K' di π'; la collineazione è pienamente determinata, quando si esiga che a tre punti (o tangenti) arbitrari di K corrispondano in K' tre punti (o tangenti) fissati pure ad arbitrio.*

Infatti una collineazione che muti K in K', ed i punti A, B, C di quella nei punti A', B', C' di questa, deve mutare la intersezione D delle tangenti in A, B nella intersezione D' delle tangenti in A', B'. Viceversa, la collineazione determinata (n. 198), che muta il quadrangolo $A\,B\,C\,D$ nel quadrangolo $A'\,B'\,C'\,D'$, trasforma K in una conica che, dovendo passare per A', B', C' e toccare nei primi due punti le rette $A'\,D'$, $B'\,D'$, coincide con K'.

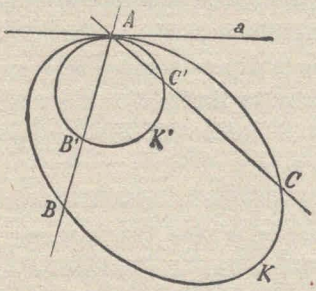
L'ultimo teorema può anche enunciarsi così: *stabilita una proiettività* (n. 249) *tra le punteggiate sostenute da due coniche K, K' (o tra gli inviluppi delle tangenti a queste), rimane determinata una collineazione che muta K in K', ed ogni punto (o tangente) di K nel punto (o tangente) corrispondente di K'.*

293. Coniche omologiche. — Se due coniche K, K' di uno stesso piano si corrispondono in una omologia (n. 205), esse ne segano l'asse negli stessi due punti; e se questi sono reali e distinti, quel tratto di asse che è interno a K è pure interno a K'. Dualmente, le tangenti condotte dal centro di omologia a K e K' sono comuni, e le due coniche appartengono ad uno stesso dei due angoli completi formati dalle dette tangenti, ove siano reali e distinte. Se la conica K passa per il centro di omologia, la K' passerà pure per quel punto, ed avrà ivi la stessa tangente; e se K tocca l'asse di omologia, K' toccherà pure l'asse in quel punto.

L'ultima osservazione si inverte subito: *Se due coniche (di un piano) si toccano in un punto, esistono due omologie, generalmente distinte, che tra-*

sformano l'una conica nell'altra; una delle omologie ha per centro il punto di contatto delle coniche, l'altra ha per asse la tangente comune. Dimostreremo l'esistenza della prima omologia; il ragionamento duale condurrebbe all'altra.

Detto A il punto di contatto delle coniche K, K', noi possiamo riferire proiettivamente le due curve, riguardando come corrispondenti due punti di esse, come B e B', o C e C', ecc., che si trovino sopra rette uscenti da A (n. 250); in particolare, il punto A risulterà unito nella corrispondenza, in virtù della tangente comune a. Esiste dunque (n. 292) una collineazione, che muta K in K', ed i punti $A, B, C \ldots$ nei punti $A', B', C' \ldots$; ma la collineazione è ora una omologia di centro A, perchè le rette a, $ABB', ACC' \ldots$ risultano unite (n. 205). Si noti che l'asse di omologia conterrà le rimanenti due intersezioni di K e K'; si ha così un modo semplice per determinarle, e per riconoscere se le due coniche hanno in A un contatto di primo, secondo o terzo ordine (n. 225).



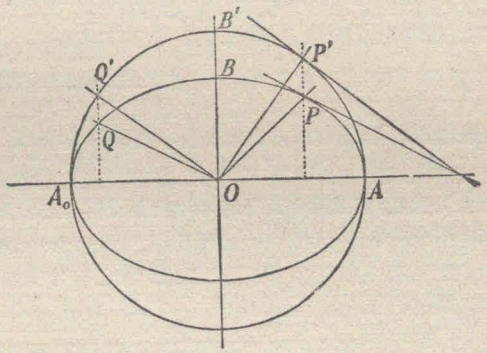
Osservazione. — Detto u l'asse di una delle omologie che mutano K in K', si faccia ruotare di un diedro arbitrario il piano di K' intorno ad u, in guisa che si stacchi dal piano di K. Nella nuova posizione le due coniche sono prospettive (n. 204); una di esse, ad es. K, può riguardarsi come proiezione dell'altra K' da un centro S situato fuori dei loro piani, o come sezione piana del *cono* proiettante K' da S. Se, in particolare, K' è un cerchio, risulta che *ogni conica (reale non degenere) può ottenersi come sezione piana di un cono circolare* (cono proiettante un cerchio). Si vede così che la definizione delle coniche data da APOLLONIO (n. 225) conduce agli stessi enti da noi studiati, scartate naturalmente le coniche immaginarie.

294. Coniche affini. — Una affinità (n. 201), la quale trasformi una conica K del piano π in una conica K' di π', conserva non solo tutti i caratteri proiettivi della curva, ma pure una parte dei caratteri metrici, e precisamente tutti quelli che si riattaccano alla retta all'infinito, ma sono indipendenti dai punti ciclici. Così, K e K' saranno della stessa specie (cioè ambedue ellissi, o parabole, o iperboli); e si corrisponderanno i centri, gli asintoti, le coppie di diametri coniugati delle due curve; però agli assi di K non corrisponderanno generelmente gli assi di K', nè ai fuochi, i fuochi.

Viceversa: *esistono infinite affinità che trasformano l'una nell'altra due coniche di uno stesso nome.*

Infatti, se le due coniche K, K' sono iperboli, o parabole, esse si corrispondono in infinite collineazioni, le quali mutano i punti all'infinito di K nei punti all'infinito di K' (n. 292), e quindi la retta all'infinito di π nella retta all'infinito di π'. Se poi si tratta di due ellissi, detti OA, OB due semidiametri coniugati di K, ed $O'A'$, $O'B'$ due semidiametri coniugati di K', quella affinità che trasforma il triangolo OAB nel triangolo $O'A'B'$ (n. 201), muta K in una conica che, avendo comune con K' due diametri coniugati (in grandezza e posizione), coincide con essa.

In particolare: *una ellisse può sempre riguardarsi come affine ad un cerchio.* Anzi, se il cerchio ha per diametro un asse AOA_0 della ellisse, l'una curva si trasforma nell'altra mediante una affinità omologica ortogonale (n. 208, *b*)) di asse AA_0; il rapporto di affinità tra ellisse e cerchio è il rapporto $\frac{OB}{OB'} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}$ dei due semiassi della ellisse. Ogni punto P' del cerchio fornisce un punto P della ellisse, quando l'ordinata di P', rispetto all'asse AA_0, venga diminuita nel rapporto $\frac{b}{a}$ (cfr. n. 62, I). E la ellisse può costruirsi per punti in modo semplice quando si noti che le rette omologhe $B'P'$ e BP si segano sull'asse di affinità. Su quest'asse si segano pure le tangenti in P, P', donde una costruzione della tangente all'ellisse in P. A diametri perpendicolari del cerchio corrispondono diametri coniugati della ellisse.



Si osservi inoltre che lo stesso rapporto costante $\frac{b}{a}$ passa fra le aree di due figure corrispondenti, l'una appartenente al piano della ellisse, l'altra al piano (sovrapposto) del cerchio (n. 208, *b*)). Segue che l'area della ellisse sta all'area del cerchio come b sta ad a, e quindi vale $\pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi a b$; *l'area di una ellisse è uguale all'area del rettangolo dei due semiassi moltiplicata per* π (ARCHIMEDE). Segue ancora che è costante $\left(= \frac{1}{2} ab\right)$ l'area del triangolo che ha per lati due semidiametri coniugati della ellisse (d'accordo col n. 281).

295. Coniche simili. — Se una similitudine muta la conica K nella conica K', allora (accanto alle osservazioni relative all'affinità) va notato che gli assi di K corrispondono agli assi di K', e son proporzionali a questi,

quando si tratti di coniche a centro; i fuochi corrispondono ai fuochi; e se K è un cerchio od una iperbole equilatera, tale sarà anche K'. In breve la similitudine conserva tutti i caratteri delle coniche (a parte le lunghezze assolute dei segmenti).

Viceversa: *due coniche a centro dello stesso nome, aventi gli assi omonimi proporzionali, sono simili* (si corrispondono in una similitudine). Infatti se

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{X^2}{\alpha^2} \pm \frac{Y^2}{\beta^2} = 1 \tag{1}$$

sono le equazioni delle due curve riferite agli assi (dovendosi prendere insieme i segni superiori o gli inferiori), ed è

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = k,$$

la similitudine

$$x = k\,X, \quad y = k\,Y \tag{2}$$

trasforma la prima conica nella seconda.

Due parabole qualisivogliano sono simili; infatti la similitudine (2) trasforma l'una nell'altra le parabole

$$y^2 = 2\,px, \quad Y^2 = 2\,P\,X, \tag{3}$$

quando si prenda $k = \frac{p}{P}$.

296. Coniche omotetiche. — Se la similitudine è una omotetia fra piani sovrapposti o paralleli, coniche corrispondenti K, K' hanno gli stessi punti all'infinito; e gli asintoti, gli assi, le coppie di diametri coniugati dell'una, sono paralleli agli asintoti, agli assi, alle coppie di diametri coniugati dell'altra; due diametri paralleli sono insieme trasversi o non trasversi.

Queste osservazioni, invertite, conducono al seguente teorema:

Due coniche situate in uno stesso piano, o in piani paralleli, le quali abbiano gli stessi punti all'infinito, reali o immaginari, colla condizione, nel primo caso, che il tratto di retta all'infinito interno all'una conica sia pure interno all'altra, sono omotetiche.

Si osservi che, in virtù della ipotesi, le due coniche sono della stessa specie, e gli asintoti e gli assi dell'una sono paralleli agli asintoti e agli assi dell'altra, e precisamente sono paralleli tra loro gli assi trasversi quando si tratti di iperboli. Supposto anzitutto che le due coniche abbiano centro, riferendole ai rispettivi assi, x, y per l'una, X, Y, paralleli a quelli, per l'altra, avremo due equazioni come le (1) del n. precedente. Ora gli asintoti delle due curve sono dati, se si tratta di iperboli, dalle equazioni

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{a}{b}, \qquad \frac{X}{Y} = \pm \frac{\alpha}{\beta}.$$

mentre, se si tratta di ellissi, nei secondi membri comparisce ancora il fattore $i = \sqrt{-1}$. In ogni caso, per il parallelismo dei primi asintoti coi secondi occorre che sia $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$. Ma allora, indicando con k il valore comune dei due rapporti, si vede che le due coniche si mutano l'una nell'altra mediante le sostituzioni (2) del n. precedente, le quali definiscono questa volta una omotetia fra i piani xy ed XY. Se poi si tratta di due parabole come le (3) del n. precedente, si osserverà che la similitudine ivi considerata, che trasforma l'una parabola nell'altra, è una omotetia quando siano paralleli gli assi x, X delle due curve e le rette y, Y, tangenti nei vertici.

Esercizi I. — 1) Una conica mediante una omologia, il cui centro stia in un fuoco della curva, si muta in una conica avente ancora un fuoco in quel punto.

2) In particolare: una omologia, avente il centro nel centro di un cerchio, trasforma questo in una conica avente ivi un fuoco. Viceversa: una conica qualsiasi può esser trasformata in un cerchio mediante una omologia avente il centro in un fuoco di quella; quale sarà la retta limite nel piano della conica?

3) Mediante questa relazione, dalle proprietà del cerchio possono dedursi varie proprietà focali delle coniche, ad es. il teorema del n. 291, es. 14); od anche il seguente: «le corde di una conica, che son viste da un fuoco sotto un angolo costante, inviluppano una seconda conica che ha comune colla prima quel fuoco e la relativa direttrice.

4) Data una conica ed una retta esterna, trasformare quella in un cerchio mediante una omologia avente la retta data come una retta limite (del piano della conica). Come si determina il centro di omologia? (n. 193, es. 7)). Il problema può anche enunciarsi così: data una conica ed un punto interno, trasformare mediante una omologia quella in un cerchio, ed il punto nel relativo centro.

5) Data una conica ed un punto S su questa, costruire una seconda conica che abbia colla prima un contatto bipunto, tripunto o quadripunto in S, e passi inoltre per tre, due, od un punto assegnato. (La conica richiesta può riguardarsi come omologica alla data...).

6) Dei punti assegnati fuori di S due possono anche esser immaginari coniugati. Come caso particolare si ha il seguente: «data una conica ed un punto S su questa, costruire il cerchio osculatore alla conica in S, riguardandolo come omologico alla conica rispetto al centro S». Il centro del cerchio è omologo al punto di Frégier di S rispetto alla conica (n. 251, es. 13)).

7) Costruire, mediante l'omologia, una parabola od una iperbole equilatera avente un contatto quadripunto con una data conica in un *punto assegnato*.

8) Il problema del n. 260, es. 11): «costruire una conica passante per tre punti e tangente a due rette» può anche risolversi riguardando la conica come omologica di un cerchio tangente alle due rette.

9) Se due coniche di un piano segano una stessa retta negli stessi due punti, reali o immaginari, colla condizione (nel primo caso) che il tratto di retta interno all'una conica sia interno anche all'altra, esistono due omologie generalmente distinte, le quali trasformano l'una conica nell'altra. (Il teorema può dedursi col

metodo della proiezione centrale dal n. 296. Direttamente si dimostra conducendo da un punto della retta nominata, u, che sia esterno alle due coniche, le tangenti a queste, e costruendo una omologia di asse u, in cui i punti di contatto sull'una conica corrispondano ai punti di contatto sull'altra...).

10) Si enunci e si dimostri il teorema duale.

11) Valendosi di questo, si risolva nuovamente il problema del n. 260, es. 34 *b*): «determinare le intersezioni di due coniche, conoscendo due tangenti comuni ad esse».

12) Dati due cerchi K, K' non concentrici, esistono quattro omologie che mutano K in K'; di queste, due sono omotetie ed hanno come centri i centri di similitudine dei due cerchi (n. 209, es. 19)); le altre due, non omotetiche, hanno ancora quegli stessi centri, ma come asse hanno l'asse radicale dei due cerchi (n. 57). Segue che, se una trasversale condotta ad arbitrio per un centro di similitudine sega K in A, B e K' in A', B', allora le tangenti in A, B a K saranno parallele, in ordine conveniente, ad es. nell'ordine scritto, alle tangenti in A', B' a K', mentre le due prime tangenti segheranno rispettivamente le tangenti in B', A' al secondo cerchio K' in punti dell'asse radicale; in breve, le quattro tangenti formano una parallelogramma, una cui diagonale sta sull'asse radicale. E se da un punto dell'asse radicale si conducono le tangenti ai due cerchi, i quattro punti di contatto formano un quadrangolo completo, il cui triangolo diagonale ha due vertici nei centri di similitudine ed il terzo vertice sull'asse radicale, nel punto coniugato armonico del primitivo rispetto alle intersezioni dei due cerchi.

II. — 13) Una collineazione tra due piani sovrapposti, la quale muti una conica in sè stessa, determina una proiettività (n. 250) fra due serie di punti (o tangenti) della conica. E viceversa, ogni proiettività siffatta determina una collineazione che trasforma la conica in sè. I due punti uniti (reali o immaginari) della proiettività, e la intersezione (sempre reale) delle tangenti in quelli, sono punti uniti della collineazione, che, in generale, non ha altri punti uniti; l'asse di proiettività e quelle tangenti sono rette unite.

14) Se la collineazione suddetta possiede altri elementi uniti, essa è una omologia, e precisamente una omologia armonica (n. 209, es. 7)), il cui centro ed il cui asse sono mutuamente polari rispetto alla conica. La proiettività determinata da quella collineazione sulla conica è in tal caso una involuzione; e viceversa. Esistono dunque infinite omologie armoniche trasformanti una conica in sè stessa.

15) Esistono infinite affinità che trasformano in sè stessa una conica a centro; esse o lasciano fissi i punti all'infinito della curva (affinità *dirette*), o li scambiano tra loro (affinità *inverse*). Ogni affinità diretta determina sulla curva una proiettività avente come asse la retta all'infinito; ogni affinità inversa determina una involuzione avente come asse un diametro e come polo un punto improprio; le affinità inverse sono dunque le simmetrie oblique determinate dai singoli diametri, e trasformanti la conica in sè stessa. Fissati ad arbitrio sulla conica due punti A, A', esistono due affinità, una diretta e l'altra inversa, che mutano A in A', e trasformano la curva in sè stessa.

16) Il prodotto di due affinità inverse trasformanti una conica in sè è una affinità diretta godente la stessa proprietà; e viceversa, ognuna di queste affinità dirette può riguardarsi come prodotto di due di quelle affinità inverse, delle quali anzi una può scegliersi ad arbitrio.

17) Ogni affinità trasformante una conica a centro in sè è *equivalente* (n. 201); essa lascia inalterati o inverte i segni delle aree, secondo che è diretta od inversa (d'accordo colla locuzione introdotta nell'es. 29) del n. 209). Da questo teorema sarebbe facile ricavar nuovamente il secondo teorema di APOLLONIO (n. 281).

18) Detto *segmento* (AB) l'area compresa fra la corda AB di una curva e l'arco minimo di curva che ne congiunge gli estremi, si dimostri (es. 15), 17)) che due segmenti (AB), $(A'B')$, di una stessa ellisse od iperbole, sono (direttamente) equivalenti se le rette AB', $A'B$ riescono parallele: ed allora sono pure equivalenti i settori AOB, $A'OB'$ limitati dai semidiametri che congiungono il centro O agli estremi degli archi AB, $A'B'$.

19) Nella ipotesi dell'es. precedente, posto che si tratti di una iperbole, si conducano da A, B, A', B' le parallele ad un asintoto, fino ad incontrare in A_0, B_0, A'_0, B'_0 l'altro asintoto; si dimostri che sono uguali le due aree trapezoidali AA_0B_0B, $A'A'_0B'_0B'$, limitate ciascuna da tre lati rettilinei e da un arco AB, o, rispettivamente, $A'B'$. Si può anche dire che le due aree nominate sono equivalenti se sussiste la proporzione $AA_0 : BB_0 = A'A'_0 : B'B'_0$. Segue che, se in una iperbole riferita agli asintoti si considera una serie di punti le cui ordinate formino una progressione geometrica, le aree trapezoidali racchiuse tra le coppie di ordinate successive sono tutte uguali.

20) Esistono infinite affinità, che trasformano una parabola in sè stessa, e per fissarne una si possono dare sulla curva, ad arbitrio, *due* coppie di punti corrispondenti. Segue che in una parabola passa un rapporto costante k fra l'area di un *segmento* (AB), e l'area del triangolo PAB formato dalla corda AB colle tangenti in A e B. Per calcolare k si consideri quel punto C della parabola (situato sul diametro uscente da P), la cui tangente RCS è parallela ad AB. Confrontando i segmenti (AC), (CB) coi corrispondenti triangoli RAC, SCB, si ottiene facilmente una relazione fra aree triangolari, da cui si ricava $k = \frac{2}{3}$. Dunque: «l'area di un segmento parabolico è uguale ai due terzi dell'area del triangolo racchiuso dalla corda limitante il segmento e dalle tangenti negli estremi di essa» (ARCHIMEDE). Quell'area vale precisamente $\frac{\delta^3}{12p}$, dove δ è la differenza fra le ordinate (rispetto all'asse) degli estremi della corda; essa dipende quindi soltanto dalla detta differenza.

21) L'area del settore compreso fra l'asse di una parabola, il raggio focale di un punto P e la curva, è uguale ad un terzo dell'area del trapezio formato dall'asse, dal diametro passante per P, dal raggio focale nominato e dalla direttrice.

22) Fra le (∞^3) affinità che mutano una parabola in sè stessa, ve ne sono infinite (∞^1) che lasciano inalterati i valori delle aree. Queste affinità equivalenti si dividono in due famiglie: *affinità dirette*, che subordinano sulla parabola proiettività paraboliche aventi l'unico punto unito all'infinito, e *affinità inverse*, che sono simmetrie oblique rispetto ai singoli diametri della parabola; (cfr. es. 15)).

III. — 23) Data una conica a centro, esistono infinite coniche omotetiche e concentriche con quella; esse appartengono ad un fascio-schiera (n. 260, Oss.) di

coniche bitangenti nei punti all' infinito.[1] Supposta nota l'equazione normale della prima conica, come si scrivono le equazioni delle coniche omotetiche e concentriche?

24) Un fascio-schiera, che ha proprietà analoghe, è pure costituito dalle parabole aventi un contatto quadripunto (n. 255) nel loro punto comune all'infinito. Queste parabole hanno lo stesso asse, e sono uguali tra loro; due di esse, prese ad arbitrio, possono sovrapporsi mediante una traslazione parallela all'asse comune.

25) Una trasversale qualsiasi intercetta, entro le coniche degli es. 23) e 24), corde aventi lo stesso punto medio; in altre parole: se una retta sega una di quelle coniche in M, M', e una seconda conica in N, N', si ha $MN = -M'N'$; e se la retta tocca la seconda conica, il punto di contatto è medio per la corda MM'.

26) I poli di una retta, rispetto alle infinite coniche degli es. 23 e 24), stanno sopra una retta, che è il diametro coniugato colla direzione della retta primitiva rispetto a ciascuna di quelle curve (n. 210, es. 45)). Che cosa formano le polari di un punto rispetto alle coniche stesse?

27) Ogni affinità che trasformi una conica a centro in sè stessa, trasforma pure in sè ogni conica omotetica e concentrica con quella; (si confrontino infatti i diametri sovrapposti delle due coniche; oppure analiticamente). Segue che l'area del *segmento* compreso fra una conica K ed una tangente ad una seconda conica K', omotetica, concentrica ed interna alla prima, non varia al variare della tangente. Le stesse proprietà sussistono per le parabole aventi un contatto quadripunto all'infinito, purchè dopo la parola *affinità* si aggiunga *equivalente* (es. 22)).

28) Date due coniche omotetiche e concentriche K, K' (o due parabole aventi un contatto quadripunto all'infinito), di cui una, ad es. la prima, contenga nel suo interno la seconda, e scelto su K un punto P_1 qualsiasi, si conduca da P_1 una tangente a K', la quale incontri nuovamente K in P_2; poi da P_2 si conduca la ulteriore tangente P_2P_3 a K' e così si prosegua. Si otterrà una spezzata $P_1P_2P_3\ldots$ iscritta in K e circoscritta a K'. Vale ora la proprietà che la tangente a K in un vertice P_i della spezzata è parallela alla retta $P_{i-1}P_{i+1}$ congiungente i due vertici contigui, ed anche alle rette $P_{i-2}P_{i+2}$, ecc.

29) Nella ipotesi che K e K' siano ellissi, può accadere (in relazione a valori particolari del rapporto di omotetia) che la spezzata si chiuda, venendo ad es. a coincidere il vertice P_n col punto di partenza P_1. In tal caso, comunque si scelga il punto P_1 su K_1, la spezzata n.latera avente ivi l'origine si chiude, ed esistono infiniti n.goni semplici iscritti nella conica K e circoscritti alla conica K' (cfr. n. 246, es. 29). « Tutti questi n.goni hanno la stessa area »; e, supposto che si tratti di n.goni convessi, si dimostra che quell'area è massima fra le aree degli n.goni iscritti in K, e minima fra le aree degli n.goni circoscritti a K'. I detti n.goni hanno tutti come baricentro il centro delle ellissi K, K'; (per $n = 3$ si riducono a quei triangoli considerati nell'esercizio 11) del n. 267).

30) Le ultime proposizioni possono facilmente dedursi dalla seguente: una affinità, che trasformi una ellisse K in un cerchio K_0, trasforma le ellissi omotetiche e concentriche a K in cerchi concentrici a K_0; e muta quindi i poligoni suddetti in poligoni regolari iscritti in K_0.

---

[1] Se la conica primitiva è una iperbole ($xy = k$), il fascio-schiera contiene, oltre alle iperboli omotetiche con quella ($xy = k'$, dove k' è un numero arbitrario che ha il segno di k), una seconda famiglia di iperboli ($xy = -k'$) omotetiche tra loro, ma non colle precedenti; le iperboli delle due famiglie sono, per dir così separate dagli asintoti. Varie proprietà contenute negli es. 25) e seguenti si estendono anche alle curve di questa seconda famiglia.

PARTE QUINTA.

Superficie di secondo ordine

Capitolo I.

Polarità definita dalla superficie.

297. Definizione ed esempi di quadriche. — Una *superficie del secondo ordine,* o, come diremo brevemente, una *quadrica,* è il luogo dei punti (reali o immaginari) dello spazio soddisfacenti, colle loro coordinate cartesiane x, y, z, ad una equazione di secondo grado a tre variabili. Una equazione siffatta può contenere sei termini di secondo grado (x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz), tre termini di primo grado (x, y, z), e un termine noto; essa avrà la forma

$$(1) \qquad \begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ &+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned}$$

dove le a sono coefficienti costanti, che supporremo reali, quando non si dica il contrario; alcuni possono anche esser nulli.

Spesso conviene adoperare la equazione della superficie in coordinate omogenee x, y, z, t; col solito procedimento (n. 138) applicato alla (1), si ottiene questa equazione sotto la forma

$$(1') \qquad \begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz \\ &+ 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0; \end{aligned}$$

ponendo in questa $t = 1$, si riproduce la (1).[1]

La equazione generale (1) delle quadriche non si presta allo studio della forma di siffatte superficie, studio che verrà fatto in seguito, partendo da equazioni contenenti un minor numero di termini. È bene però, nei para-

[1] È bene notare, sebbene non occorra per il seguito, che la (1) o (1') rappresentano una quadrica, anche se le variabili si riguardano come coordinate proiettive non omogenee, od omogenee.

grafi seguenti, riferirsi ad alcuni tipi di quadriche facilmente costruibili, per potervi applicare i risultati a cui giungeremo. Tali tipi sono la sfera (n. 108), l'ellissoide rotondo, i due iperboloidi rotondi, il paraboloide rotondo (n. 113). Appartengono pure alla famiglia delle quadriche i *coni* e i *cilindri di secondo ordine*, proiettanti una conica da un punto, proprio od improprio, esterno al piano della curva (come si verifica scrivendo le relative equazioni); in particolare, il cono ed il cilindro rotondo della geometria elementare. Ed una quadrica particolare è la *coppia di piani*, rappresentata dall'equazione che si ottiene moltiplicando tra di loro, membro a membro, le equazioni dei due piani, ridotte ad aver 0 nel secondo membro.

D'altra parte, va notato che una quadrica può non avere alcun punto reale (ad es. $x^2+y^2+z^2=-1$), od averne uno solo (ad es. $x^2+y^2+z^2=0$).

Ai greci erano note soltanto le quadriche rotonde, escluso l'iperboloide ad una falda, che fu considerato da WREN (1699). Lo studio delle quadriche, partendo dall'equazione generale, fu inaugurato da EULERO (1748), e condotto a fine da MONGE e dalla sua scuola (1801), cui son dovuti i nomi ora adottati delle varie specie di quadriche.

298. Numero dei punti che individuano una quadrica. — Poichè l'equazione (1) di una quadrica contiene *dieci* coefficienti, e quindi dipende da *nove* costanti (i rapporti di nove tra i coefficienti al rimanente), si conclude, imitando il ragionamento fatto per le coniche al n. 228, che *per nove punti dello spazio passa sempre una quadrica ed in generale una sola.*

Per nove punti passano più di una, e quindi infinite quadriche, quando i punti stessi occupano tali posizioni particolari, che tutte le quadriche passanti per alcuni di essi vengano, in conseguenza, a passare per i rimanenti. Ciò accade se i nove punti sono scelti sopra la curva di intersezione di due quadriche $f(x,y,z)=0$, $\varphi(x,y,z)=0$, giacchè allora per quei punti passano le due quadriche nominate, ed anzi, come poi si vedrà, ognuna delle infinite quadriche rappresentate dall'equazione $f+\lambda\varphi=0$, al variare del parametro λ. Ma su questi casi di indeterminazione non possiamo qui trattenerci.

299. Intersezioni con una retta. — Le intersezioni della quadrica (1) (n. 297) colla retta $x=lz+p$, $y=mz+q$ si determinano sostituendo nella (1), al posto di x, y, le loro espressioni in funzione di z, risolvendo la equazione risultante di secondo grado in z, e sostituendone successivamente le radici z_1, z_2 nelle espressioni di x e di y. Si ottengono così, in generale, *due* punti.

Per fare una discussione minuziosa del problema, conviene adoperare, come retta secante, uno degli assi coordinati, ad es. l'asse x ($y=0$, $z=0$):

ipotesi questa cui ci si può sempre ridurre, operando, ove occorra, una trasformazione di coordinate.

Posto $y = z = 0$ nella (1), questa diviene

$$a_{11}x^2 + 2a_{14}x + a_{44} = 0; \tag{2}$$

di qua si ricavano le ascisse x_1, x_2 delle due intersezioni della quadrica coll'asse x. Ora, sulla (2), si possono ripetere le osservazioni fatte trattando la questione analoga relativa alle coniche (n. 229). Basterà dunque enunciare il risultato:

Una retta sega una quadrica in due punti (propri od impropri), che possono essere reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari coniugati; a meno che la retta non abbia più di due punti in comune colla superficie, nel qual caso tutta la retta giace nella superficie. Va notato, in quest'ultimo caso, che (al contrario di ciò che accade per le coniche) una quadrica non si spezza necessariamente per il fatto di contenere una retta. Ad es. un cono, superficie non spezzata, contiene infinite rette; altri esempi, più notevoli, di quadriche contenenti rette saranno visti in seguito.

Una retta, che tagli una quadrica in due punti reali e distinti, dicesi *secante*; in due punti immaginari, dicesi *non secante*; in due punti reali e coincidenti, dicesi *tangente* alla quadrica nel punto (*di contatto*) ove quei due coincidono.

300. Intersezione con un piano. — Supponiamo, per semplicità, che si tratti di un piano coordinato, ad esempio del piano xy ($z = 0$), avvertendo che ogni piano (proprio) potrebbe assumersi come piano xy, pur di eseguire una conveniente trasformazione di coordinate.[1]

La curva intersezione della quadrica (1) (n. 297) col piano xy si ottiene ponendo $z = 0$ nella (1); si giunge così all'equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0, \tag{3}$$

la quale, nel piano xy (cioè insieme alla $z = 0$), rappresenta *una conica*.[2] Il risultato vale anche se uno o più (ma non tutti i) coefficienti della (3) sono nulli; giacchè, ad es., ove fossero $a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$, ricorrendo all'equazione omogenea (1') della quadrica (n. 297) e ponendovi $z = 0$, si troverebbe, in luogo della (3), la equazione

$$t(2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44}t) = 0,$$

rappresentante, nel piano xy, due rette, tra cui la retta all'infinito $t = 0$.

---

[1] La curva intersezione di una quadrica $f(x, y, z) = 0$ con un piano generico $z = ax + by + c$ è già rappresentata dalle due equazioni scritte; volendo la proiezione della curva sul piano xy, dal punto all'infinito dell'asse z, basta (n. 104) eliminare z tra le due equazioni; si ottiene così l'equazione $f(x, y, ax + by + c) = 0$ che è di secondo grado in x, y e rappresenta, nel piano xy, una conica; donde si conclude che anche la curva obbiettiva è una conica.

[2] La (3), presa a sè, rappresenta, nello spazio, un cilindro (n. 103) colle generatrici parallele all'asse z, passante per la conica nominata.

Se però tutti i coefficienti della (3) sono nulli, ogni punto $(x, y, 0)$ del piano xy appartiene alla superficie. Questa contiene dunque il piano xy, e si spezza nel piano stesso ed in un secondo piano (distinto o coincidente col primo), come prova la equazione (1), la quale, nelle ipotesi in cui ci troviamo, diviene

$$z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_{34}) = 0,$$

e rappresenta i due piani $z = 0$, $2a_{13}x + \ldots + 2a_{34} = 0$. Concludendo:

Un piano sega una quadrica lungo una conica; a meno che tutto il piano non formi parte della quadrica, la quale allora si spezza in quel piano ed in un secondo piano (che può eventualmente coincidere col primo).

Esclusa l'ultima ipotesi, la curva intersezione di una quadrica con un piano può presentare, sotto l'aspetto proiettivo, i seguenti tre casi:

1) può essere una conica reale non degenere, nel qual caso il piano dicesi *secante;*

2) può essere una conica completamente immaginaria; il piano allora dicesi *non secante* od *esterno;*

3) può esser finalmente una conica degenere, cioè una coppia di rette (reali e distinte, o reali e coincidenti, o immaginarie coniugate); il piano allora, per ragioni che ora esporremo, dicesi *tangente.*

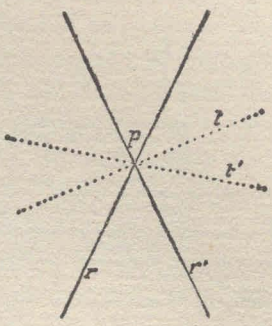
Qualunque di questi tre casi si presenti, è evidente che una retta tracciata in quel piano sega la quadrica nei punti stessi ove la retta sega la conica intersezione. Segue che una retta reale di un piano secante può essere secante, non secante o tangente, rispetto alla superficie; e le rette tangenti, situate nel piano, formano un inviluppo di seconda classe. In un piano esterno ogni retta reale è non secante rispetto alla superficie.[1] Esamineremo ora quali particolarità presentino le rette di un piano tangente.

301. Piano tangente. — Supponiamo dunque che un piano π seghi una quadrica lungo due rette r, r', che possono esser reali e distinte, o reali e coincidenti, o immaginarie coniugate. In ogni caso le due rette hanno (almeno) un punto reale P comune. Ogni altra retta t, condotta per P nel piano π, sega la conica degenere rr', e quindi la quadrica, in due punti riuniti in P; la retta t è dunque tangente alla quadrica in P (n. 299). Sicchè sul piano π esiste un fascio, di centro P, composto di rette tangenti in P alla quadrica (tra le quali, due, r ed r', appartengono alla quadrica). Questo fatto spiega la denominazione di *piano tan-*

[1] Il lettore seguirà nel miglior modo queste considerazioni immaginando, ad es., una sfera in relazione con un piano che la seghi lungo un cerchio, o che non la incontri affatto.

gente alla quadrica in P, che, secondo il n. precedente, viene attribuita al piano π. Diremo dunque:

Se un piano sega una quadrica lungo due rette (reali o immaginarie) ogni retta del piano passante per il (o per ogni) punto comune alle due rette tocca ivi la quadrica, ed il piano stesso è tangente ivi alla superficie.



Il piano è tangente alla superficie nel punto $P \equiv rr'$, se le due rette sono distinte; in *ogni* punto di $r \equiv r'$, se le due rette coincidono.

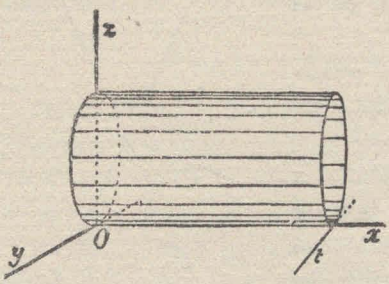
Viceversa, supponiamo che in un piano π esista un fascio di centro P, composto di rette tangenti alla superficie in P. Anzi supponiamo, giacchè basta al nostro scopo, che almeno *due* rette t, t' del fascio (P, π) tocchino la quadrica in P. Il piano π sega la quadrica lungo una conica, che ha in comune, tanto con t, quanto con t', due punti riuniti in P. Ora una tal conica deve spezzarsi in due rette r, r' (reali o immaginarie) uscenti da P, giacchè, in tutti gli altri casi, esisterebbe *una sola* retta tangente alla conica in P (n. 232).

Dunque il piano π è tangente alla quadrica in P, e contiene infinite rette tangenti alla superficie nel punto stesso. In conclusione:

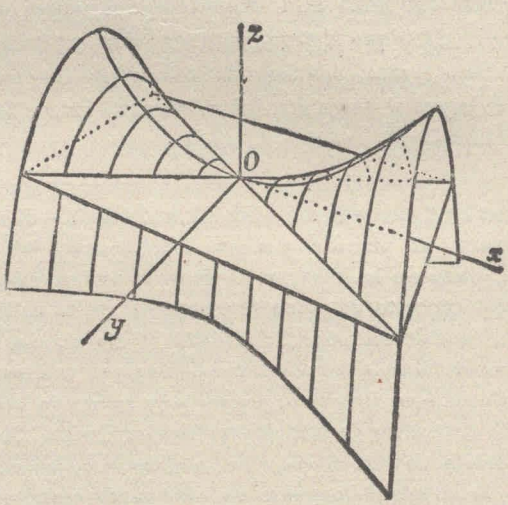
Il piano determinato da due rette tangenti ad una quadrica in uno stesso punto, contiene infinite altre tangenti alla quadrica in quel punto; il piano è tangente ivi alla quadrica, e la sega lungo due rette (reali o immaginarie) uscenti da quel punto.

Osservazione. — La definizione data di piano tangente, in virtù dei due teoremi precedenti, equivale a questa: « dicesi tangente ad una quadrica in un punto un piano contenente infinite rette ivi tangenti alla superficie ». Ora quella definizione ha bisogno di qualche avvertenza, quando si voglia metterla d'accordo col concetto di piano tangente suggerito dall'intuizione. Infatti noi siamo abituati a considerare superficie (come la sfera), che appariscono dovunque *convesse* ad un osservatore situato esternamente; per tali superficie un piano tangente, secondo il concetto intuitivo, ha un solo punto in comune colla superficie e lascia tutta la superficie da una stessa banda. Questo fatto si presenta appunto nelle quadriche dovunque convesse, coll'avvertenza che una tal quadrica ha in comune con un piano tangente *un solo punto reale,* che è il punto di contatto, ed inoltre *infiniti punti immaginari,* situati su due rette uscenti dal detto punto. Si consideri, ad esempio, una sfera posata sul piano xy, in modo da toccarlo nell'origine; il centro della sfera starà sull'asse z (nella ipotesi di assi ortogonali); se è, ad es., il punto $(0, 0, 1)$, la sfera ha l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$, e sega il piano xy nella conica $x^2 + y^2 = 0$, cioè nelle due rette immaginarie $x \pm iy = 0$ uscenti dal punto di contatto O; la sfera tocca poi evidentemente ogni altra retta del piano xy uscente da O.

Consideriamo ora un secondo caso. Si tratti di un cono, o di un cilindro, posato sopra un piano che ne contenga una generatrice; sia, ad es., il cilindro circolare retto $y^2 + z^2 - 2z = 0$, che ha per base, sul piano yz, il cerchio di centro (0, 0, 1) e di raggio 1. Questo cilindro sega il piano xy lungo la conica $y^2 = 0$, che si riduce all'asse x contato due volte. Il cilindro tocca dunque il piano xy in ogni punto dell'asse x, secondo la nostra dicitura, ed anche secondo il linguaggio ordinario; ogni altra retta t del piano xy tocca il cilindro in un punto dell'asse x.



Meno facile a concepirsi è il terzo caso, che si presenta per le quadriche *convesso-concave*, le quali hanno in ogni loro punto la forma di una sella. Tali sono, ad es., l'iperboloide rotondo ad una falda (n. 113), generato da una iperbole rotante intorno all'asse non trasverso, od il paraboloide iperbolico $x^2 - y^2 = z$, di cui parleremo in seguito. Consideriamo, ad es. quest'ultima superficie. Essa è segata dal piano xy lungo la conica $x^2 - y^2 = 0$, composta delle due rette reali $x \pm y = 0$ uscenti dalla origine. Il piano xy tocca dunque la superficie, secondo la definizione da noi data; ed effettivamente una retta generica del piano xy uscente da O, retta di equazioni $y = kx$, $z = 0$, tocca la superficie in O, come subito si verifica. In realtà, il piano xy spezza la superficie in due parti, di cui una ($x > y, z > 0$) sta al disopra del piano xy, l'altra ($x < y, z < 0$) sta al disotto. Per questa superficie adunque il linguaggio geometrico è in disaccordo col linguaggio ordinario, il quale non distingue i piani secanti la superficie lungo due rette reali (piani *tangenti*, secondo i geometri) dagli altri piani secanti la superficie lungo coniche non degeneri (piani *secanti*).[1]



302. Per costruire il piano π tangente ad una quadrica in un punto dato P, basta conoscere, secondo l'ultimo teorema del n. precedente, due rette t, t' tangenti alla quadrica in P. Queste si ottengono segando la quadrica con due piani

[1] Piani tangenti ad una superficie *convesso-concava* furono considerati da EULERO (1760) e MEUSNIER (1776). Il teorema, secondo cui un piano tangente ad una quadrica siffatta sega la superficie lungo due rette reali, è dovuto a DUPIN (1813).

arbitrari passanti per P, e conducendo le tangenti t, t' in P alle coniche sezioni; sarà poi $\pi \equiv tt'$ il piano tangente richiesto.

La costruzione di π, a dir vero, non esclude che possano esistere altri piani tangenti alla quadrica in P, oltre π. Ciò accadrebbe se fuori del fascio (P, π) esistesse almeno una ulteriore retta u tangente alla quadrica in P. Ma allora ogni fascio determinato dalla u con una retta generica del fascio (P, π) conterrebbe due, e quindi (n. 301) infinite rette tangenti alla quadrica in P; ogni retta della stella P sarebbe ivi tangente alla quadrica, o vi apparterrebbe; ogni piano per P toccherebbe ivi la quadrica, e la segherebbe (n. 301) lungo due rette (reali o immaginarie) uscenti da P. La quadrica risulterebbe dunque costituita da infinite rette uscenti da P, sarebbe un *cono di secondo ordine* di vertice P, formato dalle rette proiettanti da P una conica (reale, o immaginaria, o spezzata in rette). Siamo quindi autorizzati a concludere:

Una quadrica ha, in ogni suo punto, un unico piano tangente, il quale contiene tutte le rette tangenti in quel punto alla superficie; fa eccezione solo il caso che la quadrica sia un cono, ed il punto ne sia il vertice. In realtà, ogni piano condotto per il vertice V di un cono, segando la superficie in due rette uscenti da V, va considerato, secondo la nostra definizione, come piano tangente al cono nel vertice; badiamo però che, d'ordinario, si dice *tangente ad un cono* un piano che passi per il vertice, ed abbia in comune col cono due generatrici *coincidenti* (piano proiettante dal vertice una retta tangente ad una conica sezione). Un siffatto piano tocca il cono in ogni punto della generatrice, colla quale le due coincidono.

303. I risultati precedenti ci dimostrano la presenza di rette reali, od immaginarie, sopra una quadrica. Studieremo in un successivo capitolo la distribuzione di queste rette. Per ora limitiamoci a notare che *ogni piano, condotto per una retta di una quadrica, sega la quadrica lungo una seconda retta (che può anche coincidere colla prima), e tocca la superficie nel punto (od in ogni punto) comune alle due rette.* Infatti la intersezione della quadrica con quel piano deve essere una conica (n. 300), della quale forma parte la prima retta; la conica quindi si spezza in questa retta ed in una seconda retta, ed il piano riesce tangente.

Il teorema è sopratutto interessante nel caso che la prima retta ed il piano siano reali; giacchè allora è reale anche la seconda retta (componente colla prima una conica, la cui equazione ha coefficienti reali).

304. Intersezioni di una quadrica colla retta congiungente due punti. — Abbandoniamo, per il momento, le considerazioni sintetiche precedenti, che verranno riprese in seguito, e cerchiamo di confermare, per via analitica, alcuni dei risultati ottenuti. Ci varremo di un metodo

già adoperato nella teoria delle coniche (n. 231 e seg.), il quale ci fornirà molte altre proprietà notevoli.

Partiamo dall'equazione di una quadrica in coordinate omogenee:

$$(1)\qquad f(x,y,z,t)\equiv a_{11}x^2+\ldots+a_{44}t^2+2a_{12}xy+\ldots+2a_{34}zt=0,$$

e conveniamo subito di porre $a_{hk}=a_{kh}$ $(h,k=1,2,3,4)$, ogniqualvolta la simmetria lo consigli. Siano poi $P(x,y,z,t)$, $P'(x',y',z',t')$ due punti dello spazio. Cerchiamo le intersezioni della retta PP' colla quadrica (1). Notiamo, a tal fine, che ogni punto Q della retta PP' ha coordinate del tipo (n. 139, a))

$$Q(kx+x',\ldots,kt+t'),$$

e che il punto appartiene alla quadrica se queste coordinate soddisfano la equazione (1). Sostituendo nella (1) le coordinate di Q, sviluppando ed ordinando rispetto a k, otteniamo l'equazione

$$(2)\qquad k^2f(x,y,z,t)+2kf\begin{pmatrix}x,&y,&z,&t\\x',&y',&z',&t'\end{pmatrix}+f(x',y',z',t')=0.$$

In questa il coefficiente di k^2 e il termine noto sono i valori assunti dal polinomio (1) in relazione alle coordinate di P e P', mentre il coefficiente di $2k$ può scriversi per disteso sotto una delle forme seguenti (cfr. n. 231):

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} f\begin{pmatrix}x,&y,&z,&t\\x',&y',&z',&t'\end{pmatrix} &\equiv a_{11}xx'+\ldots+a_{44}tt'+a_{12}(xy'+x'y)\\ &\qquad +\ldots+a_{34}(zt'+z't)\\ &\equiv (a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t)x'\\ &\quad +(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t)y'\\ &\quad +(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t)z'\\ &\quad +(a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t)t'\\ &\equiv (a_{11}x'+\ldots+a_{14}t')x+(a_{21}x'+\ldots+a_{24}t')y\\ &\quad +(a_{31}x'+\ldots+a_{34}t')z+(a_{41}x'+\ldots+a_{44}t')t. \end{aligned}\right.$$

Sul polinomio stesso si osserverà:

1) che esso è bilineare e simmetrico rispetto ai due gruppi di valori (x,y,z,t), (x',y',z',t');

2) che, ordinato ad es. secondo x',y',z',t', i coefficienti rispettivi sono le semiderivate parziali di $f(x,y,z,t)$ rispetto ad x,y,z,t;

3) che, posto $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=t$, il polinomio (3) si riduce al polinomio (1).

La (2) è una equazione quadratica in k. Se k_1, k_2 sono le radici, le intersezioni Q_1, Q_2 della quadrica colla retta PP' hanno le coordinate

$$Q_1(k_1x+x',\ldots,k_1t+t'),$$
$$Q_2(k_2x+x',\ldots,k_2t+t').$$

Le intersezioni sono *due* come sapevamo. Si ha indeterminazione, vale a dire la retta PP' appartiene alla quadrica, quando coesistono le relazioni

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x', & y', & z', & t' \end{pmatrix} = 0, \qquad f(x', y', z', t') = 0,$$

di cui la prima e terza esprimono che i punti P e P' stanno, come è naturale, sulla superficie.

305. Equazione del piano tangente. — Se il punto P' sta sulla quadrica, nella (2) manca il termine noto $f(x', y', z', t')$; una delle radici, ad es. k_1, si annulla, ed il punto Q_1 coincide con P'. La seconda intersezione Q_2 della retta PP' colla quadrica viene essa pure a coincidere con P', cioè la retta $P'P$ riesce tangente alla quadrica in P, quando risulti anche $k_2 = 0$, quando dunque, nella (2), si annulli inoltre il coefficiente di $2k$:

$$f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x', & y', & z', & t' \end{pmatrix} = 0, \tag{4}$$

ossia

$$(a_{11}x' + \ldots)x + (a_{21}x' + \ldots)y + (a_{31}x' + \ldots)z + (a_{41}x' + \ldots)t = 0, \tag{4'}$$

od anche (cfr. n. 232)

$$\frac{\partial f}{\partial x'}x + \frac{\partial f}{\partial y'}y + \frac{\partial f}{\partial z'}z + \frac{\partial f}{\partial t'}t = 0. \tag{4''}$$

La (4), o (4'), è dunque la condizione cui devono soddisfare le coordinate (x, y, z, t) del punto P, affinchè esso stia sopra una tangente alla quadrica nel punto assegnato $P'(x', y', z', t')$. Poichè l'equazione (4') contiene linearmente quelle coordinate, essa rappresenta un piano. E così rimane confermato che *le infinite rette tangenti ad una quadrica in un punto stanno in un piano* (piano tangente), *la cui equazione si forma attribuendo come coefficienti alle variabili* (x, y, z, t) *i valori assunti dalle semiderivate o derivate prime del polinomio* $f(x, y, z, t)$, *quando in esse si sostituiscano le coordinate del punto di contatto.*

Il piano tangente in P' è indeterminato soltanto quando quelle semiderivate si annullino insieme per le coordinate di P'; ciò, come vedremo, accade nel solo caso che la quadrica sia un cono col vertice P' (d'accordo col teorema del n. 302).

Osservazione. — In coordinate cartesiane ordinarie x, y, z, conviene talvolta scrivere la equazione del piano tangente ad una quadrica, nel punto $P'(x', y', z')$, sotto una delle due forme seguenti:

$$\begin{aligned} &(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})(x - x') \\ &+ (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24})(y - y') \\ &+ (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})(z - z') = 0, \end{aligned} \tag{α}$$

che si dimostra equivalente alla (4'), ridotta in coordinate non omogenee, quando si tenga conto che la equazione della superficie è soddisfatta dalle coordinate di P';

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} &a_{11}xx' + \ldots + a_{33}zz' + a_{12}(xy' + x'y) + \ldots + a_{23}(yz' + y'z) \\ &+ a_{14}(x + x') + \ldots + a_{34}(z + z') + a_{44} = 0, \end{aligned}$$

la quale si forma tenendo presente la regola esposta per le coniche nella Oss. seguente il n. 232.

Valendosi dell'una o dell'altra formula, il lettore vedrà che, se la quadrica passa per l'origine (se dunque $a_{44} = 0$), l'equazione del piano tangente ivi si ottiene uguagliando a zero il complesso dei termini lineari nell'equazione non omogenea della superficie.

*** 306. Cono circoscritto alla quadrica da un punto.** — Tolta ora la restrizione che il punto $P'(x', y', z', t')$ appartenga alla quadrica (1), osserviamo che la retta $P'P$ del n. 304 tocca in un punto $Q_1 \equiv Q_2$ la superficie quando l'equazione (2) in k ha una radice doppia, ossia quando

$$(5) \qquad f(x, y, z, t) \cdot f(x', y', z', t') - \left\{ f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x', & y', & z', & t' \end{pmatrix} \right\}^2 = 0;$$

e viceversa. Supposto fisso il punto $P'(x', y', z', t')$, la (5) rappresenta dunque il luogo dei punti P che si trovano sulle tangenti alla quadrica uscenti da P'; questo luogo è evidentemente un cono di vertice P', cono di *secondo* ordine, perchè tale è il grado della (5) nelle coordinate di P. Dunque: *le tangenti ad una quadrica uscenti da un punto qualsiasi dello spazio costituiscono un cono del secondo ordine,* che dicesi *cono circoscritto alla superficie dal punto.*

Ritorneremo tra poco (n. 313) su questo risultato, per esaminarlo con maggior cura.

307. Punti coniugati rispetto ad una quadrica. — Riprendiamo la equazione (2) (n. 304) nella ipotesi che il punto P' occupi una posizione generica nello spazio, e supponiamo ora che in quella equazione sia

$$(4) \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x', & y', & z', & t' \end{pmatrix} = 0.$$

Vuol dire che le due radici k_1, k_2 della (2) sono uguali in valore assoluto ma di segno opposto, e, in conseguenza, che le due intersezioni Q_1, Q_2 della retta PP' colla quadrica sono divise armonicamente da P e P' (cfr. n. 234). Diremo che *due punti sono coniugati* (o *reciproci*) *rispetto ad una quadrica, quando essi dividono armonicamente le intersezioni della loro congiungente colla superficie.* Dunque *la* (4) *esprime la condizione perchè i due punti* (x, y, z, t), (x', y', z', t') *siano coniugati* rispetto alla nostra superficie.

La condizione di coniugio è *simmetrica* rispetto ai due punti, cui si riferisce. *Sopra ogni retta dello spazio, che non appartenga alla superficie, esistono infinite coppie di punti coniugati, le quali formano una involuzione, avente come punti doppi le intersezioni colla quadrica.*

Sopra una retta della superficie la definizione geometrica di punti coniugati diventa illusoria; ma, in quel caso, conviene riguardare come coniugati due punti comunque presi sulla retta; ciò per il fatto che la condizione analitica (4) è verificata da due punti arbitrari di quella retta (n. 304).

I punti autoconiugati sono i punti della superficie.

308. Piano polare di un punto. — *Il luogo dei punti* $P(x, y, z, t)$ *coniugati ad un punto fisso* $P'(x', y', z', t')$, *rispetto ad una quadrica,* è rappresentato dalla (4), o dalla

$$(4') \qquad (a_{11}x' + \ldots)x + (a_{21}x' + \ldots)y + (a_{31}x' + \ldots)z + (a_{41}x' + \ldots)t = 0,$$

ossia dalla

$$(4'') \qquad \frac{\partial f}{\partial x'}x + \frac{\partial f}{\partial y'}y + \frac{\partial f}{\partial z'}z + \frac{\partial f}{\partial t'}t = 0,$$

ove si riguardino come variabili x, y, z, t; *è* dunque *un piano, che dicesi piano polare del punto fisso rispetto alla quadrica.* Esso è anche il sostegno delle rette polari di P', rispetto alle coniche segate sulla superficie dai piani passanti per P'. Il punto P' dicesi *polo* di quel piano.

Se il polo appartiene alla quadrica, il piano polare coincide col piano tangente ivi (n. 305).

Dato il polo $P'(x', y', z', t')$, il piano polare π' è individuato dalla (4'). Inversamente, se è dato un piano

$$\pi) \qquad ux + vy + wz + rt = 0,$$

il polo di esso deve aver tali coordinate x', y', z', t' da soddisfare alle

$$(6) \qquad \begin{cases} \varrho u = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14}t', \\ \varrho v = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24}t', \\ \varrho w = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34}t', \\ \varrho r = a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}t', \end{cases}$$

dove ϱ è un fattore di proporzionalità.

Queste determinano (a meno di un fattore) le coordinate x', y', z', t', quando *sia diverso da zero il discriminante* dell'equazione (1) (o della quadrica relativa), cioè il determinante

$$(7) \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

questa ipotesi sarà sottintesa nel seguito, finchè non si dichiari il contrario.

Si ha precisamente

$$(8)\qquad \begin{cases} \sigma x' = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w + A_{14}r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma t' = A_{41}u + A_{42}v + A_{43}w + A_{44}r, \end{cases}$$

ove le A_{hk} sono i soliti complementi algebrici tratti da A.

*** 309. Equazione tangenziale di una quadrica.** — Il polo (x', y', z', t') non appartiene in generale al piano polare, le cui coordinate sono (u, v, w, r). Perchè vi giaccia è necessario e sufficiente che sia

$$(9)\qquad ux' + vy' + wz' + rt' = 0.$$

Ora se in questa sostituiamo, al posto di u, v, w, r, le loro espressioni fornite dalle (6), troviamo $f(x', y', z', t') = 0$, la quale ci dice (come sapevamo) che i punti appartenenti ai propri piani polari stanno sulla quadrica.

Se invece si sostituiscono nella (9), al posto di x', y', z', t', le loro espressioni (8), si arriva all'equazione

$$(10)\qquad \begin{aligned} &A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + A_{44}r^2 + 2A_{12}uv + 2A_{13}uw \\ &+ 2A_{14}ur + 2A_{23}vw + 2A_{24}vr + 2A_{34}wr = 0, \end{aligned}$$

la quale rappresenta l'inviluppo, doppiamente infinito, costituito dai piani che contengono i propri poli. Imitando il ragionamento tenuto a proposito delle coniche (n. 236), si vede che questi piani sono tangenti alla quadrica, e si conclude:

I piani tangenti ad una quadrica (di discriminante non nullo) costituiscono un inviluppo doppiamente infinito di seconda classe. La equazione di questo inviluppo (brevemente, *l'equazione tangenziale,* o *plückeriana,* della quadrica) *si ottiene dall'equazione puntuale* (1) *sostituendo alle coordinate di punti le coordinate di piani, ed ai coefficienti i rispettivi complementi algebrici estratti dal discriminante.*

310. Polarità determinata da una quadrica. — Riassumendo gli ultimi risultati, possiamo dire:

Una quadrica (di discriminante non nullo) determina nello spazio una corrispondenza, la quale muta ogni punto nel proprio piano polare ed ogni piano nel proprio polo; in particolare, ogni punto della quadrica corrisponde al proprio piano tangente, e viceversa.

La corrispondenza qui nominata è una correlazione, anzi una *polarità.* Essa presenta alcune particolarità, in relazione al fatto che il determi-

nante (7) è simmetrico. Queste particolarità (di cui fu già parlato al n. 224) si ritrovano anche direttamente, stabilendo i seguenti teoremi:

Se di due punti il secondo appartiene al piano polare del primo, il primo apparterrà al piano polare del secondo; i due punti sono *coniugati*, o *reciproci*, rispetto alla quadrica.

Se di due piani il secondo passa per il polo del primo, il primo passerà per il polo del secondo; i due piani diconsi *coniugati*, o *reciproci*, rispetto alla quadrica.

I teoremi si dimostrano imitando il procedimento seguito nella teoria delle coniche (n. 237). Si trova così che la condizione di coniugio di due punti non differisce da quella esposta al n. 307; mentre la condizione di coniugio di due piani si deduce da quella mediante trasformazione per dualità. E di qua segue: *due piani coniugati rispetto ad una quadrica dividono armonicamente i piani tangenti alla superficie condotti per la loro intersezione.*[1]

Ed in conseguenza:

Per una retta generica dello spazio passano infinite coppie di piani coniugati rispetto ad una quadrica, le quali formano una involuzione avente, come doppi, i piani tangenti condotti dalla retta alla quadrica.

Mentre un punto descrive una retta r, il piano polare del punto, in forza della correlazione polare, dovrà descrivere un fascio, che sarà anzi proiettivo alla punteggiata su r (n. 222). Se r' è l'asse del fascio, ogni punto di r è, per definizione, coniugato con ogni punto di r'. Ma poichè la relazione di coniugio è simmetrica, si conclude che il piano polare di un qualsiasi punto di r' passa per r. Se chiamiamo mutuamente *polari* le due rette r, r', vediamo che: *se due rette sono polari rispetto ad una quadrica, ogni punto di ciascuna ha il piano polare che passa per l'altra; ed ogni piano per l'una ha il suo polo sull'altra.*[2]

311. Piani tangenti ad una quadrica condotti per una retta. — Se un piano per la retta r è tangente alla quadrica, il polo di esso, cioè il punto di contatto, appartiene tanto alla quadrica, quanto alla retta r' polare di r. Dunque:

Per una retta si possono condurre ad una quadrica due piani tangenti, i cui punti di contatto stanno sulla retta polare della data; i due piani sono reali e distinti, reali e coincidenti, o immaginari, secondo che la retta polare è secante, tangente, o non secante, rispetto alla superficie; nel caso

[1] Che i piani tangenti per una retta generica siano due, risulta dalla dualità e sarà confermato nel numero seguente.

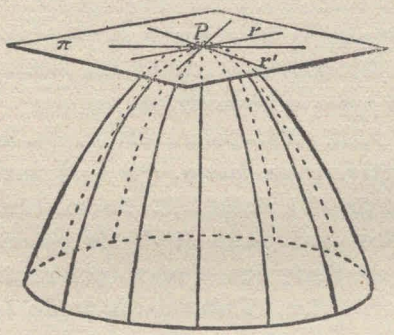
[2] Un'altra generazione della retta r', polare di una retta r, è la seguente, che il lettore potrà giustificare da sè: *la retta polare di una retta r è il luogo dei poli di r rispetto alle coniche sezioni della quadrica dei piani passanti per r.* Questa generazione cade in difetto se r appartiene alla quadrica.

intermedio, come vedremo, la retta primitiva è essa pure tangente alla superficie. *Fa solo eccezione la ipotesi che la retta appartenga alla superficie, giacchè allora* (n. 303) *ogni piano per essa è tangente alla superficie.* e la retta (come sarà dimostrato) coincide colla propria polare.

312. Tangenti coniugate ad una quadrica in un punto. — Per esaurire la discussione del numero precedente, è necessario esaminare quali posizioni particolari possano assumere due rette mutuamente polari r, r'.

Due rette siffatte, in generale, sono sghembe. Vediamo ora quando esse si incontrino.

Supposto anzitutto che le due rette r, r' non coincidano, chiamiamo P il punto e π il piano comuni alle rette stesse. Poichè P appartiene ad r e ad r', il piano polare di P dovrà passare per r' ed r, dovrà dunque coincidere con π. Ma P e π si appartengono; in conseguenza P è un punto della quadrica, π è il relativo piano tangente, r ed r' sono tangenti alla superficie in uno stesso punto P.



Viceversa si dimostra, invertendo il ragionamento, che una retta r, tangente ad una quadrica in un punto P, ha come polare una nuova tangente r' alla superficie nello stesso punto P.

Supponiamo che la tangente r descriva il fascio di centro P e piano π; la tangente r' descriverà un fascio sovrapposto, proiettivo al precedente, perchè la polarità determinata dalla quadrica muta l'un fascio nell'altro. La proiettività tra i due fasci è anzi una involuzione, giacchè la relazione fra due rette polari r, r' è scambievole.

Sia u una retta doppia della involuzione, vale a dire una retta coincidente colla propria polare. Ogni punto Q di u ha il piano polare che passa per u, e quindi per Q; ne viene che Q è un punto della quadrica, e che la retta u stessa appartiene alla quadrica. Le rette doppie della involuzione sopra considerata sono adunque le due rette (reali o immaginarie) costituenti la sezione della quadrica col piano tangente π. Concludiamo:

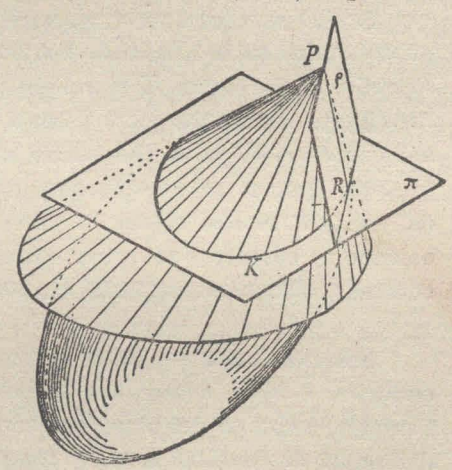
Una retta tangente ad una quadrica in un punto ha come polare una seconda retta tangente alla quadrica nel punto stesso; nel fascio di rette che ha per centro quel punto e per piano il relativo piano tangente, viene così a stabilirsi una corrispondenza tra rette mutuamente polari, che è una involuzione avente per rette doppie le due rette comuni al piano ed alla quadrica.

Due tangenti mutuamente polari (aventi dunque lo stesso punto di contatto) si chiamano di solito *tangenti coniugate,* adottando per le quadriche una denominazione che il DUPIN ha introdotto per una superficie

qualsiasi, algebrica o trascendente; la involuzione, di cui parla l'enunciato, si dice, in conseguenza, *involuzione delle tangenti coniugate in un punto.* Essa è ellittica (parabolica), o iperbolica, secondo che le due rette sezioni della quadrica col piano tangente sono immaginarie (reali e coincidenti), o reali e distinte.[1] E il punto di contatto, come sarà ripetuto anche in seguito, si dice ordinatamante *punto ellittico* (*parabolico*), o *iperbolico.* Va notato però che il caso intermedio, della involuzione parabolica, esigerebbe un esame speciale, sul quale non intendiamo ora fermarci, perchè, come vedremo, quel caso si presenta solo nelle quadriche a discriminante nullo, che sono escluse dalle nostre attuali considerazioni.

Osservazione. — La polarità determinata dalla quadrica muta la punteggiata sopra una retta u, appartenente alla superficie, nel fascio dei relativi piani tangenti, i quali passano tutti per u. Quella punteggiata e quel fascio, di sostegno u, sono adunque riferiti proiettivamente. In altre parole: *mentre un punto descrive una retta di una quadrica, il piano tangente in esso ruota intorno alla retta, e genera un fascio proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto.*

313. Piani tangenti passanti per un punto. — Per un punto P dello spazio, che non appartenga ad una quadrica, passano infiniti piani (reali o immaginari) tangenti alla superficie. Se ϱ è uno tra questi, il punto di contatto R, essendo polo di ϱ, sta sul piano polare π di P, quindi sulla conica K in cui π sega la quadrica. Viceversa, il piano tangente alla quadrica in un punto R di K passa per P. La retta $\pi\varrho$, che giace nel piano tangente ϱ, e passa per il punto di contatto R, tocca in R la quadrica, e quindi la conica K. Segue:



I piani tangenti ad una quadrica, che passano per un punto dello spazio, si ottengono proiettando dal punto le tangenti a quella conica, lungo cui il piano polare del punto sega la quadrica. Quei piani tangenti formano, come diremo, un *inviluppo* (semplicemente infinito) *conico di seconda classe* (n. 140).

La retta PR, che va dal punto P ad un punto qualsiasi R della conica K, tocca in R la quadrica, perchè giace nel piano ϱ tangente alla

[1] Ad es., sulla sfera, che è segata dai piani tangenti lungo rette isotrope (n. 301, Oss.), la involuzione delle tangenti coniugate è circolare.

quadrica in R. Possiamo dunque enunciare il teorema (dovuto a MONGE, 1798-99):

Per un punto passano infinite rette (reali o immaginarie) *tangenti ad una quadrica, le quali costituiscono il cono di secondo ordine che proietta dal punto la conica sezione della quadrica col piano polare del punto stesso; la detta conica è il luogo dei punti di contatto delle generatrici del cono.* È questo il *cono circoscritto alla quadrica,* del quale abbiamo già scritto l'equazione al n. 306.

Ogni piano tangente alla quadrica condotto per P, contenendo una tangente alla conica K, sega il cono circoscritto lungo due generatrici coincidenti, ossia tocca il cono lungo tutta una generatrice (n. 301). Segue che l'inviluppo conico di vertice P, di cui parla il primo enunciato, è costituito dai piani tangenti, lungo generatrici, al cono circoscritto dal punto P.

Un punto P dicesi *esterno,* od *interno,* rispetto ad una quadrica, secondo che il cono circoscritto da P è reale o immaginario, ossia secondo che è secante, o non secante, il piano π polare di P. Nel primo caso, la conica di contatto K separa sulla quadrica (supposta opaca) la regione visibile dalla regione invisibile, rispetto ad un osservatore situato in P; perciò quella conica dicesi *contorno apparente* della quadrica, rispetto al centro di vista P.

Si può chiedere come si modifichino i risultati precedenti quando il punto P sta sulla quadrica, nel qual caso il piano π è ivi tangente alla superficie, e la conica K si scinde in due rette. È facile vedere che allora l'inviluppo conico dei piani uscenti da P, e tangenti alla quadrica, si scinde nei due fasci di piani che hanno per assi le rette costituenti la conica K (n. 303) Quanto al cono formato dalle rette tangenti alla quadrica uscenti dal punto P, esso si riduce al piano π (o meglio al fascio di rette di centro P e piano π) contato due volte, come si può verificare per via analitica, ricorrendo all'equazione (5) del n. 306.

Osservazione. — Nella ipotesi che il punto P non appartenga alla quadrica, è bene notare che la polarità determinata da questa trasforma l'inviluppo conico dei piani tangenti condotti da P, nella conica K formata dai punti di contatto in π, e trasforma il cono circoscritto di vertice P, considerato come costituito da infinite rette, nella conica K, considerata come inviluppo delle sue tangenti; se poi il cono stesso si riguarda come luogo degli infiniti suoi punti, situati su quelle rette (generatrici), l'ente polare sarà formato dagli infiniti piani passanti per le tangenti alla conica K. Queste relazioni ci mostrano come gli inviluppi conici ed i coni si trasformino per dualità nello spazio.

Segue ancora che le generatrici del cono hanno come tangenti coniu-

gate (o polari), rispetto alla quadrica, le tangenti alla conica K nei rispettivi punti di contatto.

314. Figure autoconiugate rispetto ad una quadrica. — Si hanno talvolta da considerare figure autoconiugate rispetto ad una quadrica, tali cioè che i vertici, o le facce, siano coniugate a due e due.

Precisamente, dicesi *autoconiugato rispetto ad una quadrica:*

un triangolo, quando ciascun vertice è coniugato dei rimanenti due ed ha quindi il piano polare passante per il lato opposto.

Un triangolo autoconiugato è autopolare rispetto alla conica che il suo piano sega sulla quadrica (n. 240).

un triedro, quando ciascuna faccia è coniugata delle rimanenti due ed ha quindi il polo sopra lo spigolo opposto.

Un triedro autoconiugato è autopolare rispetto al cono circoscritto dal suo vertice alla quadrica.[1]

Si dice poi che un tetraedro è *autopolare* (od autoconiugato) *rispetto ad una quadrica*, se ciascun vertice di esso ha per piano polare la faccia opposta. In un siffatto tetraedro i vertici sono coniugati a due a due e così pure le facce; tre vertici, o tre facce, costituiscono un triangolo, o un triedro, autoconiugato.

Esistono infiniti tetraedri autopolari. Per costruirne uno si prenda ad arbitrio un vertice A, che non appartenga alla quadrica, e si costruisca il piano α polare di A; su questo piano si prenda ad arbitrio un secondo vertice B, non appartenente alla quadrica, e si costruisca il piano β polare di B; sulla retta $\alpha\beta$ si prenda ad arbitrio un terzo vertice C, non appartenente alla quadrica, e si costruisca il piano γ polare di C; il punto $D \equiv \alpha\beta\gamma$, che ha per piano polare $\delta \equiv ABC$, sarà il quarto vertice del tetraedro richiesto.

315. Superficie di secondo ordine degeneri. — Negli ultimi paragrafi furono escluse le quadriche aventi il discriminante nullo. Dobbiamo ora esaminare quale particolarità presenti la superficie

$$(1) \qquad f(x, y, z, t) \equiv a_{11}x^2 + \ldots + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{34}zt = 0,$$

quando

$$(2) \qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

[1] L'enunciato di destra risulterà chiaro, quando avremo parlato della polarità rispetto ai coni (n. 317).

Ricordiamo che la (2) è la condizione perchè esista un sistema di valori, non tutti nulli, (x_0, y_0, z_0, t_0), soddisfacenti alle quattro equazioni

$$(3) \qquad a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4}t = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

quei valori saranno proporzionali ai complementi algebrici (supposti non tutti nulli) degli elementi di una stessa linea in A. Ora si dimostra (imitando il ragionamento svolto per le coniche, n. 242) che le quantità x_0, y_0, z_0, t_0 rendono

$$f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0, \qquad f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x_0, & y_0, & z_0, & t_0 \end{pmatrix} = 0,$$

nella seconda delle quali x, y, z, t hanno valori arbitrari. La prima di queste ha un immediato significato geometrico, giacchè si dice che il punto V, di coordinate (x_0, y_0, z_0, t_0), appartiene alla quadrica (1).

Cerchiamo ora le intersezioni della superficie colla retta VP, congiungente il punto $V(x_0, y_0, z_0, t_0)$ con un punto arbitrario $P(x, y, z, t)$. Sappiamo (n. 344) che queste dipendono dall'equazione

$$(4) \qquad k^2 f(x, y, z, t) + 2k f\begin{pmatrix} x, & y, & z, & t \\ x_0, & y_0, & z_0, & t_0 \end{pmatrix} + f(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0,$$

la quale però ha nulli il termine noto e il coefficiente di $2k$. Segue che la retta VP sega la quadrica (1) in due punti riuniti in V; a meno che il punto $P(x, y, z, t)$ non appartenga esso pure alla quadrica, nel qual caso la (4) diviene una identità, ed ogni punto della retta VP appartiene alla superficie. Questa è dunque costituita dalle infinite rette congiungenti il punto V coi punti che la superficie ha in comune con un piano generico, non passante per V; poichè questi punti costituiscono una conica (n. 303), la superficie sarà un *cono* (reale o immaginario) di vertice V.[1]

Il ragionamento sussiste pure nella ipotesi che siano nulli tutti i minori del terzo ordine del determinante A. In questo caso però due delle quattro equazioni (3) sono conseguenze delle rimanenti due, le quali rappresentano una retta v; ogni punto di questa (avendo coordinate soddisfacenti il sistema (3)) gode le proprietà che prima spettavano all'unico punto V. Vuol dire che tutte le rette congiungenti i punti di v con un punto P della quadrica, fuori di v, formano parte della quadrica; questa dunque contiene il piano vP, e, in generale, un secondo piano passante per v e distinto dal primo. La quadrica si riduce ad una *coppia di piani.*

Finalmente, se tutti i minori di secondo ordine di A sono nulli (ma non tutti gli elementi), tre delle quattro equazioni (3) sono conseguenze

[1] In questa discussione, d'indole proiettiva, i cilindri non sono distinti dai coni; la superficie sarebbe un cilindro, se V fosse un punto improprio.

della rimanente; questa rappresenta un piano, di cui ogni punto gode la proprietà del vertice V. La quadrica si riduce allora a quel piano contato due volte, cioè ad un *piano doppio*. Nell'ultimo caso è facile verificare che il primo membro dell'equazione della superficie è il quadrato di un polinomio di primo grado in x, y, z, t; si ha infatti, nell'ipotesi $a_{11} \neq 0$,

$$a_{11} f(x, y, z, t) \equiv (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t)^2.$$

Riassumendo:

Una quadrica, la cui equazione puntuale abbia il discriminante nullo, è un cono, il cui vertice ha coordinate proporzionali ai complementi algebrici degli elementi di una stessa linea del discriminante; se si annullano inoltre tutti i minori del terzo ordine del discriminante, la quadrica si scinde in due piani; se finalmente si annullano tutti i minori del secondo ordine, la quadrica si riduce ad un piano doppio. E viceversa, perchè i ragionamenti, che precedono, sono tutti invertibili.

Il *cono,* la *coppia di piani* ed il *piano doppio* costituiscono i tre successivi casi di degenerazione di una superficie (luogo di punti) di secondo ordine.

316. Talvolta il semplice aspetto dell'equazione di una quadrica lascia vedere che la superficie è un cono. Così, una equazione di secondo grado omogenea, in coordinate cartesiane ordinarie (x, y, z):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

rappresenta un cono avente il vertice nell'origine (n. 103).

E la equazione ottenuta dalla precedente, col sostituire $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ al posto di x, y, z, rappresenta un cono di vertice (x_0, y_0, z_0), avente la stessa conica all'infinito del cono suddetto.

317. Polarità rispetto ad un cono. — Rispetto ad un cono $f(x, y, z, t) = 0$ di vertice $V(x_0, y_0, z_0, t_0)$, ogni punto $P'(x', y', z', t')$ dello spazio, distinto da V, ha ancora un determinato piano polare π', che si definisce nel solito modo (n. 308), ed ha l'equazione

$$f\begin{pmatrix} x, y, z, t \\ x', y', z', t' \end{pmatrix} = 0.$$

Questo piano passa sempre per il punto V (giacchè l'equazione è soddisfatta dalle coordinate di V) e contiene le infinite rette coniugate armoniche di VP' rispetto alle coppie di rette secondo cui il cono è segato dai piani passanti per VP'. Mentre il polo P' descrive una retta p' uscente da V, il piano polare π' non varia, al contrario di ciò che accade per una quadrica generale; il piano polare del vertice V è indeterminato, perchè la precedente equazione è identicamente soddisfatta quando si ponga

$x' = x_0, \ldots, t' = t_0$. Viceversa, un piano qualsiasi non passante per V ha sempre come polo il punto V. Invece un piano π passante per V ha infiniti poli, situati sopra una retta p' uscente da V.

La polarità degenere, determinata da un cono, viene adunque a stabilire una corrispondenza biunivoca tra le rette p' ed i piani π' della stella V. Ed è facile persuadersi che tale corrispondenza è *una polarità nella stella V*, di cui si è dato un cenno nelle prime righe del n. 214; è precisamente quella polarità che si ottiene proiettando da V la polarità piana definita da una conica, sezione del cono con un piano non passante per V.

Ogni piano passante per V sega il cono lungo due generatrici (reali o immaginarie); se le due generatrici coincidono, il che accade quando il piano passa per una tangente della conica sopra nominata, il piano è tangente al cono lungo tutta quella generatrice (n. 302). Dunque: *il piano tangente ad un cono in un punto, diverso dal vertice, passa per il vertice, e tocca il cono lungo tutta la generatrice contenente il punto assegnato.* Nel vertice non v'è un piano tangente determinato.

Per una retta generica p', uscente dal vertice di un cono, passano due piani (reali od immaginari) tangenti al cono; le generatrici di contatto appartengono al piano π' polare di p'. Due piani per p', che dividano armonicamente quei piani tangenti, sono *coniugati* rispetto al cono, e formano con π' un *triedro autopolare rispetto al cono*, tale cioè che ciascuno spigolo ha per piano polare la faccia opposta. Esistono infiniti triedri siffatti; essi si ottengono proiettando dal vertice V i triangoli autopolari rispetto ad una sezione piana del cono.

***318. Inviluppi di seconda classe degeneri.** — Una equazione di secondo grado in coordinate di piani, $F(u, v, w, r) = 0$, rappresenta, quando il discriminante del polinomio F sia nullo, l'ente duale di un cono, di cui si è parlato nella Oss. al n. 313. Mentre un cono (riguardato come luogo di punti) si compone di infinite punteggiate, i cui sostegni hanno un punto (vertice) in comune, l'inviluppo duale si compone di infiniti fasci di piani, i cui assi stanno in un medesimo piano, e toccano in questo piano una conica (cfr. n. 140). Un siffatto inviluppo degenere, costituito dagli infiniti piani che passano per le infinite tangenti ad una conica, fu detto (da HESSE, 1861) *quadrica limite*, alludendo al fatto che l'inviluppo dei piani tangenti ad una quadrica degenererebbe a quel modo, se la quadrica si schiacciasse, in guisa da ricoprire due volte la regione piana interna, od esterna, ad una conica.

Se la conica inviluppo si scinde in due punti distinti (n. 246), la quadrica inviluppo degenere si scinde in due stelle di piani, aventi quei due punti come centri, e prende il nome di *coppia di punti;* i due punti (o le due stelle) possono anche coincidere, e allora si ha il *punto doppio.*

Riassumendo:

Una equazione di secondo grado in coordinate di piani, il cui discriminante sia nullo, rappresenta una quadrica limite; se son nulli tutti i minori del terzo ordine del discriminante, l'inviluppo si scinde in due punti (o, meglio, *in due stelle*); *i due punti coincidono se sono nulli inoltre tutti i minori del secondo ordine del discriminante.*

La *quadrica limite*, la *coppia di punti* ed il *punto doppio* costituiscono i tre successivi casi di degenerazione di una quadrica inviluppo.

Come una equazione di secondo grado, omogenea in x, y, z, rappresenta (n. 316) un cono col vertice nell'origine ($x = y = z = 0$), così una equazione di secondo grado, omogenea in u, v, w, rappresenta una quadrica limite giacente sul piano all'infinito ($u = v = w = 0$). In modo analogo, scambiando coordinate di piani, si rappresenterebbe una quadrica limite appartenente ad uno dei piani coordinati.

Aggiungeremo l'osservazione seguente, lasciando al lettore la cura di giustificarla (cfr. n. 246). È noto che, se

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + \ldots + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{34}zt = 0$$

è l'equazione di una quadrica, a discriminante non nullo, l'inviluppo dei piani tangenti alla (1) è rappresentato dall'equazione

$$(I) \qquad A_{11}u^2 + \ldots + A_{44}r^2 + 2A_{12}uv + \ldots + 2A_{34}wr = 0,$$

formata nel modo indicato al n. 309.

Ora, se la (1) è l'equazione di un cono, la (I) rappresenta il vertice del cono, come *punto doppio*; se poi la (1) è una coppia di piani distinti o coincidenti, la (I) perde ogni significato, perchè tutti i suoi coefficienti si annullano.

Valgono pure le osservazioni duali.

Esercizi. I. — 1) Si scriva l'equazione di una quadrica passante per l'origine, per i punti (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), (0, −1, 2), (2, 0, −3), (3 − 2, 0), e per i punti all'infinito delle rette $x = y = z$, $x = y = -z$.

2) La condizione per una quadrica di toccare, in un dato punto, una retta, od un piano assegnato, equivale a due, o rispettivamente a tre relazioni lineari fra i coefficienti dell'equazione della quadrica. Si scriva, ad es., l'equazione della quadrica che tocca gli assi coordinati nei punti (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), ed il piano all'infinito nel punto improprio della retta $x = y = z$.

3) Perchè una quadrica contenga una data retta, o una data conica, devono esser soddisfatte rispettivamente tre, o cinque condizioni lineari. Si scriva l'equazione di una quadrica, che passi per l'asse x, per la retta all'infinito del piano yz, e per i tre punti (0, 1, 2), (1, −1, 1), (2, 2, −1).

4) Si scriva l'equazione di una quadrica, che seghi il piano xy lungo la conica $x^2 + y^2 - xy + 2x - 1 = 0$, tocchi l'asse z nel punto (0, 0, 1) e passi per i punti (0, −1, 2), (2, 0, 3).

5) Data la quadrica $xy + xz + yz - x - 2y - 3z + 6 = 0$, trovare: *a*) le equazioni dei piani tangenti nei punti ove essa sega gli assi coordinati; *b*) il piano polare del punto (2, 1, 1); *c*) i piani tangenti condotti per la retta $\frac{x}{2} = -y = z$; *d*) la retta polare della retta precedente; *e*) l'equazione del cono circoscritto dall'origine alla quadrica.

6) Determinare il termine noto della equazione $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz + 2x - 6y + k = 0$, in modo che essa rappresenti un cono. Quale ne è il vertice?

II. — 7) L'equazione di un cono circoscritto al triedro degli assi coordinati è del tipo $ayz + bzx + cxy = 0$. Scrivere le equazioni dei piani tangenti lungo gli spigoli del triedro, e dimostrare che quelli segano le facce opposte in tre rette di un piano (cfr. n. 246, es. 27)).

8) Le equazioni, in coordinate di piani, di un cono tangente ai tre piani coordinati, sono del tipo $avw + bwu + cuv = 0$, $r = 0$. Si deduca che la equazione del cono, in coordinate cartesiane, è

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 2bcyz - 2cazx - 2abxy = 0.$$

Si trovino le equazioni delle generatrici di contatto, e si dimostri che i piani che le congiungono cogli spigoli opposti del triedro xyz passano per una stessa retta.

9) Un cono, avente il triedro degli assi come autopolare, ha l'equazione

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0.$$

10) Una quadrica passante per l'origine, ed avente ivi come tangente il piano xy, ha una equazione del tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{34}z = 0.$$

Si determinino le rette che la quadrica ha in comune col piano tangente, e la involuzione delle tangenti coniugate in O; si dimostri che la condizione perchè gli assi x, y siano coniugati è $a_{12} = 0$.

11) Una quadrica passante per l'origine e per i punti all'infinito degli assi coordinati, o, in coordinate proiettive, una quadrica circoscritta al tetraedro fondamentale, ha una equazione del tipo

$$a_{12}xy + a_{13}xz + a_{14}xt + a_{23}yz + a_{24}yt + a_{34}zt = 0.$$

Quali sono i piani tangenti nei quattro punti fondamentali?

12) In coordinate di piani, l'equazione di una quadrica tangente alle facce del tetraedro fondamentale si ottiene dalla precedente sostituendo ad x, y, z, t le coordinate u, v, w, r. Si deduca l'equazione puntuale della quadrica stessa, e le coordinate dei punti di contatto.

13) L'equazione di una quadrica tangente ai sei spigoli del tetraedro fondamentale (in particolare ai tre assi cartesiani e alle rette improprie dei piani coordinati) è del tipo

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + d^2t^2 - 2abxy - \ldots = 0.$$

Si determinino i punti di contatto con questi spigoli, e i relativi piani tangenti, e si dimostri che le tre rette congiungenti i punti di contatto degli spigoli opposti

concorrono in un punto, mentre le tre rette intersezioni dei piani tangenti condotti per gli spigoli opposti stanno in un piano.

14) Scritta l'equazione di una quadrica che contenga l'asse delle x, si determini, in un punto P generico di questo, il piano tangente π, che passa pure per l'asse x. Si dimostri analiticamente che, mentre P descrive una punteggiata su questa retta, il piano π ruota intorno alla retta, generando un fascio proiettivo alla punteggiata.

15) Si scriva l'equazione di una quadrica che passi per gli assi x, y; come si semplifica l'equazione se la quadrica contiene inoltre la retta all'infinito del piano xz? e se contiene anche la retta all'infinito del piano yz? Nell'ultimo caso l'equazione si presenta sotto la forma $axy + bzt = 0$. In coordinate proiettive, l'equazione stessa rappresenta una quadrica contenente gli spigoli del quadrilatero sghembo $XTYZ$. Qual'è l'equazione tangenziale di questa quadrica? Quante quadriche contenenti quegli spigoli passano per un punto generico dello spazio, o toccano un piano generico?

16) L'equazione (*canonica*) di una quadrica avente il tetraedro fondamentale come autopolare è del tipo (cfr. n. 241)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0.$$

Determinare le intersezioni cogli spigoli, e i rispettivi piani tangenti. Qual'è l'equazione tangenziale della quadrica stessa?

17) Le quadriche, rispetto alle quali un determinato tetraedro è autopolare, formano un tal sistema che per tre punti generici dello spazio passa una sola quadrica del sistema; e vi è pure una sola quadrica del sistema che tocca tre piani generici assegnati.

18) Si estendano alle quadriche gli es. 21), 22), 23) del n. 246, e si stabilisca, in particolare, il teorema di CARNOT, relativo alle intersezioni di una quadrica coi lati di un n.gono semplice sghembo. Si deduca, nel caso $n = 4$, che le otto intersezioni di una quadrica coi lati di un quadrilatero sghembo sono tali, che ogni quadrica passante per sette di esse contiene, in conseguenza, l'ottava.

19) L'es. 38) del n. 246 dà, mediante proiezione da un punto, il teorema: « due triedri autopolari rispetto ad un cono quadrico (che abbia con essi il vertice comune) sono iscritti in un secondo cono quadrico, e circoscritti ad un terzo ». Segue, in particolare (n. 214): « due triedri trirettangoli collo stesso vertice sono iscritti in un cono del secondo ordine, e circoscritti ad un altro » (STEINER).

20) Le terne di punti A, B, C di una quadrica, che sono viste da un punto fisso O della superficie mediante terne di rette mutuamente perpendicolari, stanno in piani ABC passanti per un unico punto, situato sulla normale alla quadrica (cioè al piano tangente) in O. (Cfr. n. 251, es. 13). Per la dimostrazione analitica giova assumere O come origine, e la normale come uno degli assi. Per la dimostrazione sintetica, si faccia ruotare il triedro $OABC$ intorno allo spigolo OA, e si osservi che, in corrispondenza, il piano ABC descrive un fascio, il cui asse AA' sega la detta normale, ecc.).

III. — 21) La polarità (*sferica*) determinata da una sfera Ω (ad es. dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$) ha notevoli particolarità metriche. Il piano polare di un punto qualsiasi è normale alla retta congiungente quel punto col centro O

della sfera; il diedro di due piani è uguale all'angolo sotto cui da O sono visti i rispettivi poli; due rette mutuamente polari sono ortogonali; in un tetraedro autopolare le altezze si segano nel punto O (cfr. n. 246, es. 17)).

22) Se un punto P descrive una conica K, il piano polare π', rispetto alla sfera Ω, inviluppa un cono; questo cono, ed il cono proiettante K da O, sono *supplementari,* tali cioè che ogni generatrice dell'uno è normale ad un piano tangente all'altro. Segue che, se uno dei due coni è rotondo, sarà rotondo anche l'altro, intorno ad un asse parallello all'asse del primo.

23) Se un punto descrive una quadrica Q, il piano polare rispetto ad Ω inviluppa una seconda quadrica Q' (*polare* di Q), i cui punti hanno come polari i piani tangenti a Q. In particolare: « se Q è una sfera di centro C, la quadrica polare Q' è rotonda intorno all'asse $O\,C$, ed è generata precisamente da una conica avente in O un fuoco, la quale ruoti intorno al suo asse focale $O\,C$ ». Il punto O dicesi *fuoco* per la quadrica rotonda, ed il piano polare di O rispetto ad essa (che è pure piano polare di C rispetto ad Ω) dicesi *piano direttore,* e contiene una *direttrice* di ciascuna conica meridiana. Il cono circoscritto dal fuoco O alla quadrica rotonda Q' si compone delle rette isotrope uscenti da O. La quadrica Q' ha poi un secondo fuoco ed un secondo piano direttore, provenienti dall'altro fuoco e dall'altra direttrice della conica meridiana. Viceversa, ogni quadrica Q', rotonda intorno all'asse focale della conica meridiana, è trasformata in una sfera dalla polarità rispetto ad una sfera Ω che abbia il centro O in un fuoco di Q'. Questi risultati si confermano analiticamente, ricordando che l'equazione di una quadrica rotonda, la cui conica meridiana abbia un fuoco in O e l'asse focale z, è del tipo $x^2 + y^2 + z^2 = (a\,z + b)^2$. In generale, l'equazione di una quadrica rotonda avente un fuoco nell'origine, può scriversi sotto la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z + \delta)^2;$$

qual'è il piano direttore? quale l'asse? quale l'interpretazione geometrica di questa equazione? (cfr. n. 286).

24) Dal fatto che ogni cono circoscritto alla sfera Ω è rotondo, segue (es. 22)) che « ogni sezione piana della quadrica Q' è proiettata da un fuoco O della quadrica mediante un cono rotondo », che ha per asse la congiungente di O col polo (rispetto a Q') del piano secante. « Le coppie di tangenti coniugate a Q', in un suo punto qualsiasi, sono proiettate dal fuoco O mediante coppie di piani perpendicolari ». « Ogni conica di Q', il cui piano passi per O, ha un fuoco in O » (Dupin). Mediante analoghe considerazioni seguono le proprietà: « Ogni piano condotto per il fuoco O è normale alla retta che congiunge O col polo del piano rispetto alla quadrica ». « Le coppie di rette, mutuamente polari rispetto alla quadrica Q', sono proiettate da O mediante coppie di piani perpendicolari ».

25) Due quadriche rotonde aventi un fuoco O comune si segano lungo due coniche, i cui piani formano un gruppo armonico coi rispettivi piani direttori.

26) Ad un tetraedro si possono circoscrivere, in generale, otto quadriche rotonde aventi un dato fuoco; come si costruiscono i relativi piani direttori, e come sono situati rispetto alle facce del tetraedro? (cfr. n. 98, es. 23)).

27) Una omologia, che abbia il centro nel centro di una sfera, trasforma questa in una quadrica rotonda avente ivi un fuoco (n. 296, es. 2)).

Capitolo II.

Rette di una quadrica — Generazione delle quadriche rigate. Fasci e schiere di quadriche.

319. Punti ellittici, parabolici, iperbolici. — Abbiamo già visto, nel Capitolo precedente (n. 301), che sopra una quadrica esistono rette reali od immaginarie; sappiamo anzi che per ogni punto della superficie passano, in generale, due rette, costituenti la intersezione della quadrica col piano tangente in quel punto. Volendo ora approfondire lo studio delle rette situate sulla superficie, dobbiamo chiederci anzitutto se esistano, sopra una quadrica, punti *singolari,* per cui passino più di due rette della quadrica. Supposto che per un punto P passino almeno tre rette di una quadrica, notiamo che, se queste stanno in un piano, il piano stesso forma parte della quadrica (n. 300), la quale si spezza allora in due piani (distinti o coincidenti); se poi le tre rette non appartengono ad un piano, i tre piani che esse determinano a due a due toccano in P la quadrica, la quale è un cono col vertice in P (n. 302). Dunque: *per un punto di una quadrica passano due, e due sole rette appartenenti ad essa; a meno che la quadrica non si spezzi in due piani, o non sia un cono col vertice in quel punto.*

Scartando questi evidenti casi di eccezione, dobbiamo considerare le ipotesi che le due rette di una quadrica, uscenti da un punto di essa, siano reali e distinte, reali e coincidenti, o immaginarie. Nella prima ipotesi il punto, come già sappiamo (n. 312), dicesi *iperbolico,* nella seconda *parabolico,* nella terza *ellittico.* Si potrebbe pensare che, sopra una stessa quadrica, si trovassero punti delle tre specie. Dimostreremo, al contrario, la proprietà seguente:

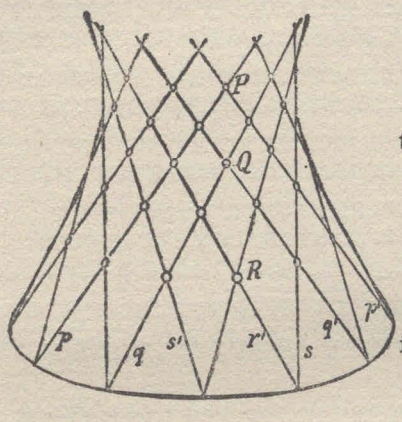
Secondo che un punto di una quadrica è iperbolico, parabolico od ellittico, tale sarà, rispettivamente, ogni altro punto (non singolare) *della quadrica;* saremo così condotti a distinguere *quadriche a punti iperbolici, quadriche a punti parabolici,* e *quadriche a punti ellittici.*

Il teorema precedente considera tre ipotesi; basterà esaminare la prima e la seconda, giacchè seguirà poi per assurdo che il teorema è vero anche quando è soddisfatta la terza ipotesi.

320. Quadriche a punti parabolici. — Esaminiamo anzitutto la seconda ipotesi del teorema precedente. Supponiamo dunque che un punto P di una quadrica sia parabolico; vuol dire che il piano π, tangente alla

quadrica in P, sega la superficie lungo due rette reali e coincidenti $p \equiv p'$ uscenti da P, e tocca la quadrica in ogni punto di p (n. 303). Conduciamo per p un secondo piano arbitrario ϱ; questo tocca la quadrica in un qualche punto R di p (n. 303). Allora però la quadrica ammette in R due piani tangenti distinti π e ϱ, ed è quindi un cono col vertice in R (n. 302). D'altra parte ogni punto di un cono è parabolico (n. 317), all'infuori del vertice, punto singolare. Concludiamo che il teorema precedente sussiste nel caso dei punti parabolici; vediamo inoltre che *le quadriche a punti parabolici sono i coni* (o cilindri).

321. Quadriche a punti iperbolici. — Supponiamo ora, in secondo luogo, che un punto P di una quadrica sia iperbolico; da P usciranno due rette reali e distinte p e p' appartenenti alla quadrica, e costituenti la intersezione di questa col piano tangente in P. Dobbiamo dimostrare che ogni altro punto Q della quadrica è iperbolico.



È iperbolico intanto ogni altro punto di p, o p'; infatti un punto di p (ad es.) non può esser ellittico, giacchè per esso passa una prima retta reale p, nè può esser parabolico, chè tale sarebbe allora il punto P (n. 320). Possiamo dunque supporre che il punto considerato Q stia fuori di p, p', e quindi fuori del piano pp'. Consideriamo allora il piano Qp; questo sega la quadrica lungo p, e lungo una seconda retta reale q' (n. 303), la quale dovrà contenere il punto Q, che appartiene al piano ed alla quadrica, ma non a p. Similmente, segando la quadrica col piano Qp', otteniamo una seconda retta reale q della quadrica, pure passante per Q. In conclusione, per Q passano due rette reali della quadrica q, q', certo distinte, chè altrimenti Q, e quindi anche P, sarebbe parabolico, contro l'ipotesi. Con ciò il teorema enunciato alla fine del n. 319 è dimostrato anche nella ipotesi dei punti iperbolici, e quindi sussiste in ogni caso.

322. I due sistemi di rette di una quadrica rigata. — Riprendiamo in esame l'ultima ipotesi: da un punto P di una quadrica escano due rette reali e distinte, p, p', appartenenti alla superficie. La costruzione del numero precedente ci ha mostrato che, per ogni altro punto Q della quadrica passano due rette reali e distinte q, q'; delle quali le prima, q, appartenendo al piano Qp', sega la retta p', mentre la seconda, q', sega la retta p. Prendiamo ora sulla superficie un terzo punto R; colla costru-

zione analoga otteniamo due rette reali e distinte r, r' uscenti da R, delle quali la prima sega p', mentre la seconda sega p.

Così continuando, vediamo che sulla superficie esistono infinite rette reali; di queste alcune

$$p,\ q,\ r,\ s,\ \ldots \text{ segano } p';$$

le altre

$$p',\ q',\ r',\ s',\ \ldots \text{ segano } p.$$

Chiameremo *primo sistema* (o *serie*, o *schiera*) l'insieme delle rette che incontrano p'; *secondo sistema* l'insieme delle rette che segano p; avvertendo sin d'ora che i due sistemi hanno proprietà simmetriche, sicchè sarà lecito scambiare la denominazione di *primo* e *secondo* sistema. Ora, ai due sistemi spettano le seguenti notevoli proprietà.

1) *Due rette di uno stesso sistema sono sghembe tra loro.* Supposto infatti, ad es., che q ed r si segassero, poichè entrambe segano p', seguirebbe che le tre rette q, r, p' dovrebbero appartenere ad un medesimo piano, o ad un medesimo punto (n. 124). Nel primo caso quel piano formerebbe parte della quadrica; nel secondo caso la quadrica sarebbe un cono col vertice in quel punto (n. 319). Ma queste conclusioni sono evidentemente in contraddizione colle ipotesi in cui ci siamo posti.

2) *Due rette di sistemi diversi si segano* (in un punto proprio od improprio). Ciò risulta chiaro intanto per le coppie di rette p, p'; q, q'; r, r'; ..., che escono, per costruzione, dai punti P, Q, R, ... assunti sulla superficie, e costituiscono le intersezioni di questa coi piani tangenti nei punti nominati. Consideriamo ora, ad es., le due rette q, r'. La r' sega il piano qq' in un punto, che, appartenendo alla quadrica, dovrà stare su q o su q'; ma non può stare su q', per il lemma precedente; dunque deve stare su q.

Riassumendo questi risultati, insieme ai precedenti, possiamo dire:

Una quadrica a punti iperbolici possiede infinite rette reali, che si distribuiscono in due sistemi; due rette di uno stesso sistema sono sghembe, due rette di sistemi diversi si segano; ad ogni punto della superficie, e ad ogni piano tangente alla superficie appartengono due rette, una del primo, l'altra del secondo sistema.[1]

Per questa proprietà, una quadrica a punti iperbolici dicesi *quadrica rigata*, od anche *doppiamente rigata*.

323. Costruzione di una quadrica rigata. — Si conoscano della quadrica tre rette p, q, r, appartenenti ad uno stesso (*primo*) sistema, e quindi sghembe a due a due. Le rette p', q', r' ... del *secondo* sistema de-

[1] Proprietà analoghe, quando si sostituisca l'aggettivo *reale* con *immaginario*, sussistono pure per le quadriche a punti ellittici, ma presentano minore interesse, mancando allora la intuizione geometrica.

vono segar quelle tre (n. 322); viceversa, ognuna delle infinite rette che incontrano p, q, r (n. 124) ha tre punti (uno su ciascuna di esse) in comune colla superficie, e quindi vi giace per intero, ed appartiene al secondo sistema perchè sega p. Dunque tutte le rette del secondo sistema si ottengono conducendo le rette che si appoggiano a p, q, r. Ed in modo analogo, quando si siano costruite tre rette p', q', r' del secondo sistema, si potranno ottenere le infinite rette del primo sistema, tra le quali si trovano p, q, r.

Una quadrica rigata è dunque pienamente determinata da tre sue rette di uno stesso sistema. Anzi, per costruire una quadrica rigata, si può partire da tre rette arbitrarie p, q, r dello spazio, purchè sghembe a due a due. Infatti, per nove punti, di cui tre appartengano a p, tre a q, e tre ad r, passa sempre una quadrica (n. 298), la quale contiene quelle rette (n. 299) come rette di uno stesso sistema. Che poi la quadrica sia unica, risulta dalla conclusione precedente. Dunque:

Tre rette, sghembe a due a due, individuano una quadrica rigata, la quale contiene le infinite rette che si appoggiano a quelle tre, ed infinite altre rette, tra cui le tre primitive.

Quando una quadrica è generata partendo da tre rette p, q, r, e costruendo le infinite rette p', q', r', ..., che si appoggiano a quelle, si dice che le rette costruite sono *generatrici* della superficie, e le rette date sono *direttrici*. Ed i due sistemi di rette della superficie si chiamano talora *sistema delle generatrici*, e *sistema delle direttrici*; ma i due nomi possono evidentemente scambiarsi tra loro.

Osservazione. — Segue indirettamente, dai risultati ottenuti, una notevole proprietà del sistema delle infinite rette che si appoggiano a tre rette sghembe a due a due; vediamo infatti che ogni retta, la quale seghi tre di quelle infinite rette, segherà, in conseguenza, tutte le altre.

Segue inoltre che il problema di *condurre una retta, la quale seghi quattro rette date sghembe a due a due,* ammette, in generale, due soluzioni reali o immaginarie. Si consideri infatti la quadrica che ha come direttrici tre, a, b, c, delle rette date; essa segherà la quarta retta d in due punti (reali o immaginari), per ciascuno dei quali passa una generatrice della quadrica, soddisfacente al problema. Fa eccezione solo il caso che d sia anch'essa direttrice della quadrica nominata, perchè allora il problema ammette infinite soluzioni. Il problema è di secondo grado, e la sua risoluzione grafica può ricondursi, in virtù delle considerazioni che seguono, alla determinazione dei punti uniti di una proiettività tra punteggiate sovrapposte.

324. Generazione delle quadriche rigate mediante forme proiettive. — Per costruire le generatrici di una quadrica rigata, ossia le rette

che segano tre rette (direttrici) p, q, r sghembe a due a due, si può procedere, come sappiamo (n. 124), in due modi duali l'uno dell'altro.

Si può infatti, in primo luogo, scegliere su p un punto variabile P, e costruire la retta p' intersezione dei piani Pq, Pr. Questi, mentre P descrive la punteggiata p, generano due fasci proiettivi tra loro, perchè prospettivi a quella punteggiata. Dunque le generatrici p', q', r' ... di una quadrica rigata possono riguardarsi come intersezioni di coppie di piani omologhi in due fasci proiettivi, aventi per assi due direttrici q, r.

Dualmente, per costruire una generatrice qualsiasi possiamo condurre per p un piano variabile π, e tracciare la retta p' congiungente i due punti $q\pi$, $r\pi$. Questi, al variare di π, descrivono, su q, r, due punteggiate proiettive, e le generatrici appariscono come congiungenti punti omologhi.

Riassumendo possiamo dire che

Un sistema di rette di una quadrica rigata può considerarsi

sia come l'insieme delle rette intersezioni di piani omologhi in due fasci proiettivi, aventi per assi due rette sghembe.

sia come l'insieme delle rette congiungenti punti omologhi in due punteggiate proiettive, aventi per sostegni due rette sghembe.

Le rette sghembe, qui nominate, sono due rette arbitrarie dell'altro sistema.

Viceversa: *due fasci proiettivi di piani ad assi sghembi, o due punteggiate proiettive a sostegni sghembi, generano, nel modo ora indicato, un sistema di rette di una quadrica rigata,* alla quale appartengono, come rette dell'altro sistema, i due assi dei fasci, o i due sostegni delle punteggiate. Ciò risulta dalle considerazioni che precedono, e può dimostrarsi, nel modo più semplice, per via analitica.

Consideriamo infatti, ad esempio, due fasci proiettivi di piani, che possiamo rappresentare mediante due equazioni del tipo

$$(1) \qquad L + kM = 0, \qquad L' + kM' = 0,$$

dove L, M, L', M' sono polinomi lineari in x, y, z, e k è un parametro variabile, ad ogni valore del quale corrisponde una coppia di piani omologhi (cfr. n. 242). L'equazione della superficie costituita dalle rette (1) (*generatrici*), intersezioni di piani omologhi, si otterrà eliminando il parametro k; si giunge così all'equazione di secondo grado, in x, y, z,

$$(2) \qquad LM' - L'M = 0,$$

che rappresenta una quadrica. La superficie contiene evidentemente la retta $L = M = 0$ asse del primo fascio, e la retta $L' = M' = 0$ asse del secondo fascio; queste sono due *direttrici* della quadrica. Si noterà poi che la stessa quadrica (2) è pur generata dai due fasci proiettivi di piani

$$(3) \qquad L + hL' = 0, \qquad M + hM' = 0,$$

i quali hanno per assi due generatrici $L = L' = 0$, $M = M' = 0$ (rappresentate dalle (1) per $k = 0, \infty$), ed i cui piani omologhi si segano nelle singole direttrici (3) della superficie. Da questa doppia generazione risulta la presenza sulla superficie dei due sistemi di rette. E sarebbe facile ritrovare la proprietà di questi, facendo uso delle equazioni (1), (3) di una generatrice o, rispettivamente, di una direttrice arbitraria. Ma ciò può esser lasciato al lettore.

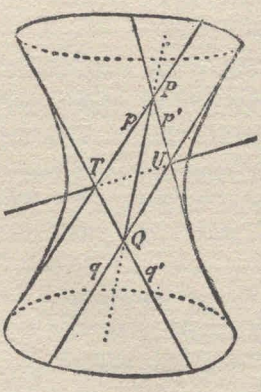
Osservazione. — Se gli assi di due fasci proiettivi di piani si segano in un punto V, le rette intersezioni di piani omologhi costituiscono un cono del secondo ordine col vertice in V; i due fasci generano dunque una superficie del secondo ordine degenere.

Dualmente, se i sostegni di due punteggiate proiettive stanno in un piano ω, le rette congiungenti punti omologhi inviluppano una conica di ω, ed i piani per esse costituiscono una quadrica limite (n. 318), cioè un inviluppo di piani degenere, di seconda classe.

325. Qualche proprietà delle quadriche rigate. — Poichè una retta reale sega un piano reale in un punto reale, segue che *ogni piano (reale) sega una quadrica rigata lungo una conica reale, che può anche scindersi in due rette reali;* il piano è dunque secante o tangente.

Dualmente: *per un punto (reale) dello spazio passano infiniti piani reali (e quindi infinite rette reali) che toccano una quadrica rigata; quei piani costituiscono* (n. 313) *un inviluppo conico reale di seconda classe, che può anche scindersi in due fasci di piani.* In altre parole, *ogni punto è esterno ad una quadrica rigata, o sta sulla superficie.*

I piani tangenti alla quadrica condotti per un punto V dello spazio, non situato sulla superficie, sono i piani proiettanti da V le rette della superficie (n. 303); ciascuno di essi contiene due rette della quadrica, una del primo e l'altra del secondo sistema. Segue che le proiezioni sopra un piano arbitrario di ω, da un punto generico V, delle rette di una quadrica rigata toccano una conica di ω, che è sezione del cono circoscritto alla quadrica da V, ed è proiezione da V del contorno apparente della superficie (relativo al punto V) (n. 313).



Siano P, Q due punti di una quadrica rigata, dai quali escano, rispettivamente, le rette p, q del primo sistema e le rette p', q', del secondo sistema. Queste quattro rette sono lati di un quadrilatero sghembo $pq'\,qp'$, del quale due vertici opposti sono $P \equiv pp'$, $Q \equiv q'q$, e gli altri due sono $T \equiv pq'$, $U \equiv p'q$. I piani pp', qq', tangenti alla quadrica in P e Q, si segano lungo la retta TU; e i

piani tangenti in T, U si segano lungo PQ. Dunque le due diagonali PQ, TU del quadrilatero sono rette mutuamente polari rispetto alla quadrica. Segue che *una retta secante, rispetto ad una quadrica rigata, ha per polare una nuova retta secante,* e, in conseguenza, *una retta non secante ha per polare una retta non secante.* In altre parole: *per una retta si possono condurre, o no, piani tangenti reali ad una quadrica rigata, secondo che la retta sega, o no, in punti reali la superficie.*

Al contrario, si dimostra che, per una quadrica reale non rigata (ad es. per una sfera), una retta secante ha come polare una retta non secante, e viceversa; sicchè per le rette non secanti possono condursi piani tangenti reali, non già per le rette secanti.

Le proprietà generali delle quadriche rigate furono scoperte da MONGE (1794) e dalla sua Scuola. La generazione mediante forme proiettive fu indicata da STEINER (1832).

***326. Fascio di quadriche.** — Prima di abbandonare le proprietà proiettive delle quadriche (rigate o no), vogliamo dar un cenno dei fasci e delle schiere di quadriche, limitandoci a considerare il caso generale.

Due quadriche

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + \ldots + 2\,a_{12}xy + \ldots + a_{44} = 0, \\ \varphi(z, y, z) \equiv b_{11}x^2 + \ldots + 2\,b_{12}xy + \ldots + b_{44} = 0, \end{cases}$$

hanno in comune infiniti punti (reali o immaginari), costituenti una curva sghemba, che è rappresentata dal sistema delle equazioni (1). Un piano generico sega le due quadriche in due coniche, e quella curva nelle *quattro* intersezioni di queste coniche (n. 255). Perciò la curva dicesi *del quarto ordine.* Essa può presentare vari casi, che non staremo a distinguere; in particolare, essa può scindersi in due coniche giacenti in piani distinti e secanti la retta intersezione negli stessi due punti, od anche può comporsi dei lati di un quadrilatero sghembo, ecc.

Consideriamo ora le infinite quadriche rappresentate dall'equazione di secondo grado

$$(2)\qquad \lambda f(x, y, z) + \mu\varphi(x, y, z) = 0,$$

o, ciò che fa lo stesso, dalla

$$(2')\qquad f(x, y, z) + k\varphi(x, y, z) = 0,$$

al variare del parametro $k = \frac{\mu}{\lambda}$. Queste quadriche, tra cui si trovano le due date, costituiscono un fascio (cfr. n. 256). Esse passano tutte per la curva del quarto ordine nominata (che dicesi *curva base* del fascio), perchè le coordinate di un punto qualsiasi di questa annullano i polinomi (1), e quindi il polinomio (2).

a) *Per ogni punto dello spazio, che non appartenga alla curva base, passa una ed una sola quadrica del fascio;* giacchè, sostituendo nella (2'), al posto di x, y, z, le coordinate del punto, rimane determinato il parametro k.

b) *Le quadriche di un fascio segano sopra una retta generica coppie di una involuzione;* se, ad es., come retta si assume l'asse x $(y = z = 0)$, il che non costituisce una restrizione (cfr. n. 256), la coppia di punti segata dalla quadrica (2') è rappresentata da

$$(3) \qquad (a_{11} x^2 + 2 a_{14} x + a_{44}) + k (b_{11} x^2 + 2 b_{14} x + b_{44}) = 0,$$

e, al variare di k, descrive una involuzione (n. 184).[1]

Dal teorema b) segue:

c) *Entro un fascio esistono due quadriche che toccano una retta generica assegnata; i punti di contatto sono coniugati rispetto a tutte le quadriche del fascio.* Infatti questi punti sono doppi nella involuzione sopra nominata. Si ricordi che le due quadriche, di cui parla questo enunciato, possono esser rappresentate anche da equazioni a coefficienti immaginari; una simile osservazione si applica a vari enunciati seguenti.

d) *Le quadriche di un fascio segano sopra un piano generico coniche di un fascio.* Supposto che il piano secante sia il piano xy $(z = 0)$, il che non costituisce una restrizione, la conica sezione della quadrica (2') sarà

$$(4) \qquad f(x, y, 0) + k \varphi (x, y, 0) = 0;$$

essa descrive effettivamente un fascio[2] (n. 256) al variare di k.

In un fascio di coniche esistono generalmente tre coniche degeneri (n. 257), i cui punti doppi costituiscono un triangolo autopolare rispetto a tutte le coniche del fascio. Ora, se una quadrica del nostro fascio sega

---

[1] Può accadere tuttavia, per particolari posizioni della retta, che le due coppie

$$a_{11} x^2 + 2 a_{14} x + a_{44} = 0, \qquad b_{11} x^2 + 2 b_{14} x + b_{44} = 0$$

vengano a coincidere, nel qual caso si ha

$$a_{11} : a_{14} : a_{44} = b_{11} : b_{14} : b_{44},$$

ed ogni coppia (3) viene a coincidere con quelle. Allora però il valore $k = -\frac{a_{11}}{b_{11}} = -\frac{a_{14}}{b_{14}} = -\frac{a_{44}}{b_{44}}$ rende la (3) una identità, e la quadrica del fascio, corrispondente a quel valore di k, contiene la retta. Il caso eccezionale si presenta dunque se la retta appartiene ad una quadrica del fascio; quella retta ha due punti (reali o immaginari) comuni colla curva base, è una *corda* di questa curva. Sorvoliamo sul caso, privo di interesse, che la retta appartenga a tutte le quadriche del fascio.

[2] Se però il piano $\pi \equiv xy$ forma parte di una quadrica del fascio (la quale si scinde allora in due piani π, π'), quel piano sarà segato da tutte le quadriche del fascio in una stessa conica, che forma parte della curva base del fascio. Questa allora si scinde in quella conica di π, ed in una seconda conica di π', per la quale passano pure tutte le quadriche del fascio. Viceversa, se due quadriche si segano in una conica situata in un piano π, vi è una quadrica del fascio che si scinde nel piano π ed in un secondo piano π'; questo è segato in una stessa conica dalle due quadriche primitive e da ogni quadrica del fascio. Segue di qua il notevole teorema: *se due quadriche passano per una stessa conica, esse si segano lungo una seconda conica, che ha colla prima due punti comuni (o coincide con essa).*

il piano xy lungo una di quelle coniche degeneri, la quadrica tocca il piano nel punto doppio della conica, e viceversa (n. 301). Dunque:

e) *Entro un fascio esistono tre quadriche che toccano un piano generico; i punti di contatto costituiscono un triangolo autoconiugato rispetto a tutte le quadriche del fascio (ed alle coniche che esse segano sul piano).*

Quante quadriche di un fascio degenerano in coni? Sappiamo (n. 315) che la quadrica (2') è un cono se si annulla il discriminante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+kb_{11} & \dots & a_{14}+kb_{14} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{41}+kb_{41} & \dots & a_{44}+kb_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Abbiamo qui una equazione di quarto grado in k, la quale fornisce quattro valori di k, e, in corrispondenza, quattro coni. Dunque (PONCELET, 1822):

f) *Entro un fascio di quadriche esistono, in generale, quattro coni.* Questo numero subisce riduzioni se una, o più quadriche del fascio degenerano in coppie di piani.

g) *I vertici dei quattro coni appartenenti ad un fascio di quadriche formano un tetraedro autopolare rispetto a tutte le quadriche del fascio.* Per dimostrare il teorema si osservi, in primo luogo, che il piano polare di un punto generico P dello spazio, rispetto alla quadrica $f+k\varphi=0$ del fascio, ha un'equazione del tipo

$$(5) \qquad (\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z+\alpha_4)+k(\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z+\beta_4)=0,$$

supposto che $\alpha_1 x+\ldots=0$ e $\beta_1 x+\ldots=0$ rappresentino i piani polari di P rispetto alle quadriche $f=0$, $\varphi=0$; ciò si verifica scrivendo per disteso le dette equazioni, secondo la nota regola (n. 308). Ne viene che « i piani polari di un punto generico, rispetto alle quadriche di un fascio, formano un fascio ». Se però il punto P è vertice di un cono appartenente al fascio, cono che corrisponderà a un certo valore di k, il piano polare di P rispetto al cono è indeterminato (n. 317), e la equazione (5), per quel valore di k, diviene una identità. Ciò è possibile soltanto, se

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 = \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 : \beta_4;$$

ma allora i piani polari di P, rispetto alle quadriche $f=0$ $\varphi=0$, e a tutte le altre quadriche del fascio, coincidono. Sicchè « il vertice di un cono, appartenente ad un fascio di quadriche, ha lo stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio ». Fra queste quadriche, oltre al cono di vertice P, si trovano altri tre coni, i cui vertici siano Q, R, S. Il piano polare di P, rispetto a tutte le quadriche del fascio e quindi anche rispetto al cono Q, deve passare per il vertice Q del cono (n. 317), e deve passare analogamente per R, S; sarà dunque il piano QRS. Risulta

così dimostrato che, nel tetraedro $P\,Q\,R\,S$, ciascun vertice ha come piano polare la faccia opposta rispetto a tutte le quadriche del fascio.

h) *Ogni piano tangente, lungo una generatrice, ad uno dei coni appartenenti al fascio di quadriche, sega le quadriche lungo coniche che si toccano in due punti fissi; i due punti appartengono a quella generatrice.* Infatti il fascio delle coniche sezioni col piano nominato possiede una conica (sezione del cono) che degenera in una retta doppia; quel fascio è, in conseguenza, un fascio-schiera di coniche bitangenti (nn. 254; 260, Oss.).

Il ragionamento che precede è invertibile; si conclude che

i) *I piani secanti le quadriche di un fascio* (od anche due quadriche assegnate) *in coniche bitangenti si distribuiscono in quattro inviluppi conici di seconda classe, precisamente nei quattro inviluppi di piani tangenti ai quattro coni del fascio.*

***327. Schiera di quadriche.** — I risultati precedenti si traducono subito per dualità, pur di considerare due *quadriche inviluppi*, definite da equazioni di secondo grado in coordinate $(u,\ v,\ w)$ di piani

$$f(u,\ v,\ w) = 0, \qquad \varphi(u,\ v,\ w) = 0, \tag{1}$$

insieme alle infinite quadriche rappresentate dall'equazione

$$f(u,\ v,\ w) + k\,\varphi(u,\ v,\ w) = 0, \tag{2}$$

contenente il parametro k. Queste quadriche costituiscono, come si suol dire, una *schiera*, ente duale del fascio (n. 260). Gli infiniti piani tangenti alle due quadriche (1) toccano pure tutte le quadriche della schiera, e formano un inviluppo semplicemente infinito, *inviluppo base* della *quarta classe;* esprimendo, con questa locuzione, il fatto, che per ogni punto dello spazio passano quattro piani dell'inviluppo.

Le proprietà delle schiere di quadriche si deducono per dualità dalle proprietà dei fasci; basterà dunque raccogliere qui gli enunciati, lasciando al lettore la cura di trasformare anche le dimostrazioni. Dei risultati, cui perveniamo, sarà fatta in seguito una importante applicazione metrica.

a) *Ogni piano dello spazio, che non appartenga all'inviluppo base, riesce tangente ad una e ad una sola quadrica della schiera.*

b) *Le coppie di piani tangenti, condotti alle quadriche di una schiera per una retta generica, formano una involuzione.*

c) *Una retta generica è toccata da due quadriche della schiera; i relativi piani tangenti* (*passanti per la retta*) *sono coniugati rispetto a tutte le quadriche della schiera.*

d) *I coni circoscritti alle quadriche di una schiera, da un punto generico, formano una schiera* (cioè toccano quattro piani fissi uscenti dal punto).

e) *Per un punto generico passano tre quadriche della schiera; i relativi piani tangenti, in quel punto, costituiscono un triedro autoconiugato*

rispetto a tutte le quadriche della schiera (ed ai coni ad esse circoscritti dal punto).

f) *In una schiera di quadriche esistono, in generale, quattro quadriche inviluppi degeneri* (n. 318), *cioè quattro coniche considerate come inviluppi di piani.*

g) *I piani delle quattro coniche formano un tetraedro autopolare rispetto a tutte le quadriche della schiera.*

h) *I coni circoscritti alle quadriche di una schiera, da un punto qualsiasi* (P) *di una di quelle coniche* (K), *si toccano lungo due generatrici, hanno cioè, lungo queste, gli stessi piani tangenti; i due piani tangenti si segano nella tangente alla detta conica* (K) *in quel punto* (P).

i) *Le quattro coniche, appartenenti alla schiera, costituiscono il luogo dei punti da cui si possono circoscrivere alle quadriche della schiera coni che si tocchino tra loro lungo due generatrici.*

Esercizi I. — 1) Costruire, mediante fasci di piani proiettivi, una quadrica rigata conoscendo: *a*) due generatrici e tre punti; *b*) una conica e due generatrici secanti la curva; *c*) una conica, una generatrice che vi si appoggi, e due punti A, B; *d*) una generatrice, una direttrice e quattro punti A, B, C, D; *e*) una generatrice e sei punti A, B, C, D, E. F; (nel problema *c*) si costruiscano le due direttrici passanti per A, B; nel problema *d*) la conica segata dal piano ABC; nel problema *e*) la generatrice uscente da A, dalla quale i cinque punti $BCDEF$ sono proiettati mediante un gruppo di piani proiettivo ad un gruppo noto (n. 260, es. 30)).

2) Due stelle T, T', legate da una correlazione, generano, come luogo della intersezione di elementi (retta e piano) corrispondenti, una quadrica che passa per T e T'. Ed ogni quadrica a punti reali può esser generata mediante due stelle correlative aventi i centri in due punti arbitrari della superficie (Seydewitz). (Scelto T come origine delle coordinate, e T' come centro della stella di piani $\lambda L + \mu M + \nu N = 0$, che è correlativa alla stella di rette $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$, la superficie generata ha l'equazione $xL + yM + zN = 0$. D'altra parte, l'equazione di ogni quadrica passante per l'origine può, in infiniti modi, porsi sotto quella forma, donde segue la seconda parte del teorema).

II. — 3) L'equazione canonica (n. 318, es. 16)) di una quadrica, riferita ad un tetraedro autopolare,

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + d t^2 = 0$$

si presta per classificare le quadriche sotto l'aspetto proiettivo. Considerati anzitutto i casi di degenerazione, in cui uno, due o tre coefficienti si annullano, si esaminino le ipotesi: 1) i quattro coefficienti hanno lo stesso segno (quadrica a punti immaginari); 2) tre hanno lo stesso segno, e il rimanente il segno opposto (quadrica a punti ellittici; tali sono infatti i punti reali in cui certi spigoli del tetraedro segano la superficie); 3) due coefficienti hanno un segno e due il segno opposto (quadrica a punti iperbolici).

4) Indicando con X, Y, Z coordinate cartesiane ortogonali, si applichi alla quadrica precedente la collineazione

$$X=\sqrt{\pm\frac{a}{d}}\frac{x}{t},\quad Y=\sqrt{\pm\frac{b}{d}}\frac{y}{t},\quad Z=\sqrt{\pm\frac{c}{d}}\frac{z}{t},$$

dove i segni vanno scelti in modo che i radicali risultino reali. Si vedrà che «ogni quadrica a punti ellittici è collineare ad una sfera, ed ogni quadrica a punti iperbolici è collineare ad un iperboloide rotondo ad una falda».

5) In un tetraedro autopolare rispetto ad una quadrica a punti ellittici, un vertice è interno e gli altri sono esterni; i tre spigoli uscenti dal primo vertice sono secanti e i tre rimanenti no; una faccia è esterna e le rimanenti sono secanti. Se invece la quadrica ha punti iperbolici, i quattro vertici del tetraedro sono esterni, le quattro facce sono secanti, due coppie di spigoli opposti sono secanti, mentre la terza coppia si compone di rette non secanti.

6) Di due rette mutuamente polari, rispetto ad una quadrica a punti ellittici, una è secante e l'altra no; mentre, se la quadrica ha punti iperbolici, le due rette sono insieme secanti, oppure no.

7) Se due tetraedri $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono mutuamente polari rispetto ad una quadrica Q (in guisa che A abbia per piano polare $\alpha' \equiv B'C'D'$, ecc.), le rette AA', BB', CC', DD', congiungenti vertici omologhi, sono generatrici di una quadrica rigata: e la stessa proprietà spetta alle rette $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, intersezioni di facce corrispondenti (Chasles). (Per dimostrare la seconda parte, si osservi che le tre facce α', β', γ' del secondo tetraedro segano sulla faccia δ del primo un triangolo, che è polare di ABC rispetto alla sezione di Q; l'asse di omologia dei due triangoli (n. 246, es. 35)) incontra dunque le rette $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$; similmente si ottengono altre rette secanti queste quattro, donde segue il teorema).

8) In particolare: se una quadrica è circoscritta a un tetraedro, i piani tangenti nei vertici segano le facce opposte in quattro generatrici di una quadrica rigata; e dualmente (Bobillier).

9) Se la quadrica Q dell'es. 7) è una sfera col centro in D, segue: le quattro altezze di un tetraedro sono generatrici di una stessa quadrica rigata.

III. — 10) Se due quadriche si toccano in un punto O, vale a dire hanno ivi lo stesso piano tangente ω, ogni quadrica del fascio determinato da quelle due ha in O il piano tangente ω; dei quattro coni del fascio, due coincidono in un cono di vertice O, che sega il piano ω lungo due rette generalmente distinte r, s; gli altri due coni hanno i vertici su ω, in due punti P, Q, generalmente distinti da O, e toccano il piano ω lungo le rette OP, OQ, rispettivamente, le quali sono tangenti coniugate rispetto ad ogni quadrica del fascio. Un piano generico condotto per O sega le quadriche lungo coniche che hanno in O un contatto semplice; ma se il piano passa per una delle rette r, s sopra nominate, il contatto è di secondo ordine (n. 258). (Si assuma O come origine, ω come piano xy).

11) Il fascio determinato da una quadrica e da un cono del secondo ordine, che abbia il vertice in un punto O di quella, si compone di quadriche toccantisi in O, ed ha le proprietà sopra esposte.

12) Se due quadriche hanno una retta comune (ad es. l'asse x), esse si toccano generalmente in due punti di questo; negli stessi due punti si toccano tutte le altre quadriche del fascio determinato da quelle; e quei punti sono vertici di due coni appartenenti al fascio, ciascuno dei quali assorbe due dei quattro coni che si presentano in un fascio generale. Il fascio particolare suddetto è anche determinato da due coni che abbiano una generatrice in comune, ma non lo stesso vertice.

13) Può anche accadere che due quadriche, aventi una retta comune, si tocchino in più di due punti della retta, nel qual caso esse si toccano in ogni punto della retta. Lo stesso fatto si verifica per tutte le altre quadriche del fascio, una delle quali si spezza in due piani passanti per la retta. La curva base del fascio si compone di questa retta, contata due volte, e di due rette secanti quella, ma sghembe tra loro. Un fascio siffatto è pur determinato da una quadrica e da una coppia di piani passanti per una retta della superficie.

14) Se due quadriche hanno in comune una conica, e quindi una seconda conica secante la prima in due punti O, P, le quadriche si toccano in questi due punti, ed ivi si toccano tutte le quadriche del fascio determinate da quelle. Al fascio appartengono la coppia dei piani delle due coniche, e due coni, ciascuno dei quali proietta l'una conica nell'altra. I vertici dei due coni sono separati armonicamente dai piani delle due coniche.

15) Se due quadriche si toccano in due punti O, P, ed è M un ulteriore punto ad esse comune, il piano OPM sega le quadriche lungo due coniche, che hanno due punti comuni in O, due in P ed un quinto in M. Le due coniche quindi o coincidono, o degenerano in due coppie di rette aventi una retta comune. Nel primo caso le due quadriche si segano lungo due coniche secantisi in O e P (es. 14)), nel secondo caso si segano lungo una retta ed una curva residua del 3° ordine (cubica sghemba; es. 12)).

16) Se due quadriche si toccano in tre punti O, P, Q, questi appartengono ad una retta, o determinano un piano. Nel primo caso le due quadriche si toccano in tutti i punti di quella retta (es. 13)). Nel secondo caso esse segano il piano OPQ lungo una stessa conica. Se la conica non si spezza, le quadriche si toccano in ogni punto di essa; la conica stessa, contata due volte, costituisce la totale intersezione delle due quadriche. Ma la conica può spezzarsi in due rette OP, OQ, ed allora le quadriche hanno in comune queste rette, ed inoltre una conica (di un secondo piano) passante per P e Q.

17) Due quadriche possono toccarsi al più in quattro punti O, P, Q, R, senza toccarsi in infiniti punti; ciò accade se le quadriche passano per gli spigoli di un quadrilatero sghembo semplice, avente i vertici in quei punti. Al fascio determinato dalle due quadriche appartengono due coppie di piani. Una correlazione muta un fascio siffatto in un sistema dello stesso tipo; sicchè quel fascio è insieme fascio e schiera. Quali ne sono le quadriche inviluppi degeneri?

18) Se $f = 0$ è l'equazione di una quadrica, ed $U = 0$, $V = 0$ sono le equazioni di due piani, sotto la forma $f + \lambda UV = 0$ si può rappresentare ogni quadrica, che passi per le coniche intersezioni di f con quei due piani.

19) Tre quadriche contenenti una stessa conica, prese a due a due, dànno come ulteriori intersezioni tre coniche, i cui piani passano per una stessa retta. Quale corollario si ottiene se la conica primitiva è l'assoluto?

20) L'equazione $f + \lambda U^2 = 0$ rappresenta una quadrica tangente alla $f = 0$ lungo la conica che questa quadrica ha in comune col piano $U = 0$. Al variare di λ, si ottiene un fascio di quadriche, a cui appartiene un cono ed un piano doppio $U^2 = 0$. Un piano generico sega il fascio lungo coniche di un fascio-schiera (n. 260, Oss.) aventi due tangenti comuni, le quali si segano nel punto ove il piano è toccato da *una* quadrica del fascio; le due tangenti sono anzi le generatrici di questa quadrica. Questo sistema di quadriche è duale di sè stesso; è, nel tempo stesso, un fascio ed una schiera. I coni circoscritti alle quadriche del sistema da un punto formano un fascio-schiera di coni, che si toccano tutti lungo due generatrici, le quali appartengono alla quadrica del sistema passante per il punto.

21) Due quadriche Q', Q'', le quali tocchino, rispettivamente, una terza quadrica Q lungo le coniche K', K'', si segano in due coniche, i cui piani formano un gruppo armonico coi piani di K', K'' (MONGE, CHASLES). Caso particolare: la quadrica Q sia un cono; questione duale.

22) I coni circoscritti ad una stessa quadrica da due punti si segano lungo due coniche.

23) Se due quadriche Q', Q'' sono iscritte in uno stesso cono Q, esse sono iscritte in un secondo cono Q_1 (teorema duale di quello contenuto nella nota [2] a pag. 490). Le due quadriche Q', Q'' si segano lungo due coniche, i cui piani dividono armonicamente i piani delle coniche $Q'Q$, $Q''Q$, ed i piani delle coniche $Q'Q_1$, $Q''Q_1$. (Il caso particolare, che Q sia il cono delle rette isotrope uscenti da un punto conduce al risultato del n. 318, es. 25)).

24) Dualmente: due quadriche che si seghino lungo due coniche sono iscritte in due coni. Caso particolare che una delle coniche sia il cerchio assoluto.

25) Dati quattro punti, esistono in generale otto quadriche che passano per quelli, e toccano, ciascuna lungo una conica, un cono od una quadrica Q assegnata. Come si possono costruire i piani delle otto coniche? Come si scrive la equazione di una quadrica soddisfacente al problema? (Cfr. n. 260, es. 23)). Caso particolare che Q sia il cono delle rette isotrope uscenti da un punto (n. 318, es. 26)).

26) Tradurre per dualità il risultato generale precedente; si vedrà, in particolare, che per una conica passano generalmente otto quadriche tangenti a quattro piani assegnati. Come caso più particolare, si conclude che in un tetraedro si possono iscrivere otto sfere.

IV. — 27) I piani polari di un punto, rispetto alle quadriche di un fascio, formano un fascio (n. 326). I fasci di piani, che si ottengono al variare del punto, sono riferiti proiettivamente tra loro, quando si riguardino come corrispondenti i piani polari relativi ad una stessa quadrica. In particolare, i quattro piani, di uno di quei fasci, che passano per i vertici del tetraedro autopolare rispetto alle quadriche del fascio formano un birapporto costante; donde segue una proprietà notevole degli assi di quei fasci di piani, in relazione al detto tetraedro (n. 152, es. 30)).

28) Dualmente: i poli di un piano, rispetto alle quadriche di una schiera, formano una punteggiaia sopra una retta, che sega il piano nel punto ove esso è toccato da una quadrica della schiera. Al variare del piano varia la retta; ma

le punteggiate che così si ottengono sono tutte proiettive tra loro. Sui relativi sostegni le quattro facce del tetraedro autopolare, rispetto alle quadriche della schiera, determinano un birapporto costante.

29) Le rette polari di una retta fissa, rispetto alle quadriche di un fascio (o di una schiera), costituiscono un sistema di rette di una quadrica rigata, che passa per i vertici (o tocca le facce) del tetraedro autopolare.

30) In un fascio di quadriche vi sono generalmente tre quadriche che toccano un dato piano (n. 326, e)); i punti di contatto determinano un triangolo tale, che i lati uscenti da un vertice sono tangenti coniugate rispetto alla quadrica del fascio passante per quel vertice.

31) Dualmente: in una schiera di quadriche vi sono generalmente tre quadriche che passano per un dato punto; i relativi piani tangenti formano un triedro tale, che gli spigoli giacenti in una faccia sono tangenti coniugate rispetto alla quadrica della schiera che tocca quella faccia.

32) Poichè i piani tangenti a due quadriche, in un punto ad esse comune, si segano in una retta che è tangente alla curva intersezione, il risultato precedente può enunciarsi così: « sopra una quadrica Q di una schiera le altre quadriche della schiera segano un sistema di curve tale, che per ogni punto della quadrica Q passano due curve del sistema, le cui tangenti, in quel punto, sono coniugate rispetto a Q ».

33) Se, in particolare, la quadrica Q è una sfera, le due curve del sistema uscenti da un punto generico di Q si segano ivi ortogonalmente.

Capitolo III.

Proprietà diametrali.

328. Sezione di una quadrica col piano all'infinito. — Dobbiamo ora occuparci delle proprietà metriche delle superficie di secondo ordine, vale a dire delle relazioni di una quadrica col piano all'infinito e col cerchio assoluto dello spazio.

Una quadrica

$$(1)\qquad \begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ &+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned}$$

sega il piano all'infinito lungo la conica

$$(2)\qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$

come risulta trasformando la (1) in coordinate omogenee (x, y, z, t) (n. 297), e ponendo poi $t = 0$. A dir vero, la conica è rappresentata dalla (2) insieme all'equazione $t = 0$; la (2), presa a sè, rappresenta nello spazio un cono del secondo ordine col vertice nell'origine O (n. 316), precisamente il cono proiettante da O la conica all'infinito della superficie.

Questa conica (o quel cono) può essere reale e non degenere, immaginaria e non degenere, oppure spezzata in due rette.[1] In corrispondenza distingueremo tre specie di quadriche, delle quali possiamo esaminare sin d'ora la natura delle sezioni piane; ci appoggeremo, a tal fine, sulla osservazione che i punti all'infinito della conica K, sezione di una quadrica con un piano proprio π, cadono nelle intersezioni della retta all'infinito p_∞ di π colla conica all'infinito H_∞ della superficie. La conica K è adunque ellisse, parabola, o iperbole, secondo che la retta p_∞ è esterna, tangente, o secante rispetto alla conica H_∞.

1) Se la conica all'infinito della superficie, H_∞, è immaginaria non degenere, la superficie non ha punti reali impropri e dicesi *ellissoide.* Essa può avere punti reali propri (*ellissoide reale;* fig. 1),[2] o può non averne alcuno (*ellissoide immaginario*).[3] *Le sezioni piane di un ellissoide sono ellissi* (reali o immaginarie). Il piano tangente all'ellissoide in un punto sega la superficie lungo due rette immaginarie; tutti i punti di un ellissoide sono ellittici; *l'ellissoide non possiede rette reali.*

2) Se la conica all'infinito, H_∞, è reale non degenere, la superficie dicesi *iperboloide. Un iperboloide possiede, come sezioni piane, ellissi, parabole, ed iperboli,* secondo la posizione del piano secante. Il piano tangente ad un iperboloide in un punto può segare (come vedremo in seguito) la superficie lungo rette reali od immaginarie.

Nel primo caso quel punto, e quindi ogni punto della superficie è iperbolico; la superficie contiene rette reali, e dicesi *iperboloide rigato,* o *iperboloide ad una falda* (fig. 2). Nel secondo caso ogni punto della superficie è ellittico; si ha allora l'*iperboloide non rigato,* o *iperboloide a due falde* (fig. 3).

3) Supponiamo infine che la conica all'infinito, H_∞, si scinda in due rette. La superficie tocca allora il piano all'infinito nel punto (o nei punti) che le due rette hanno in comune, e dicesi *paraboloide.*

Vanno qui distinti tre casi, secondo la natura delle due rette componenti H_∞. Infatti le due rette possono esser reali e distinte, secantesi in un punto C_∞; questo punto, e quindi ogni altro punto della superficie è iperbolico, e la superficie dicesi *paraboloide iperbolico,* o *paraboloide rigato* (fig. 5). *La sezione piana generica di una paraboloide iperbolico è una iperbole; risulta una parabola se il piano passa per* C_∞. Oppure le due

---

[1] Trattandosi di una conica all'infinito, vanno presi in esame solo i caratteri *proiettivi* di essa.

[2] Le figure, qui indicate, si trovano riunite nella Tavola annessa a questo volume. Esse sono riproduzioni di modelli appartenenti al Gabinetto di Geometria dell'Università di Roma, e provenienti dalla Casa Martin Schilling in Halle a. S. (già L. Brill in Darmstadt). Il Sig. Schilling ha gentilmente accordato il permesso di questa riproduzione.

[3] Ad es., trattando delle sfere, che sono particolari ellissoidi, abbiano distinto sfere reali e sfere immaginarie.

rette componenti la conica H_∞ sono immaginarie, secantisi in un punto reale C_∞; la superficie, di cui ogni punto è ellittico, dicesi allora *paraboloide ellittico*, o *paraboloide non rigato* (fig. 4). *La sezione piana generica di un paraboloide ellittico è una ellisse; solo i piani passanti per C_∞ segano la superficie lungo parabole.* Finalmente, le due rette componenti H_∞ possono essere reali e coincidenti; in tal caso ogni punto della superficie è parabolico, e la superficie è un cono (n. 320) col vertice all'infinito (sulla retta in cui quelle due coincidono), ossia un cilindro, e precisamente un *cilindro parabolico*, perchè le sezioni piane generiche del cilindro sono parabole.

A parte quest'ultimo caso, nella discussione non abbiamo tenuto conto delle quadriche degeneri. Il lettore vedrà però subito che un cono a vertice proprio appartiene alla categoria degli ellissoidi o degli iperboloidi, secondo che il cono non ha od ha punti reali fuori del vertice, secondo che il cono è *immaginario* o *reale;* un piano generico sega un cono immaginario secondo una conica (ellisse) immaginaria, e un cono reale secondo una conica reale, che può esser ellisse, parabola od iperbole, in relazione alla posizione del piano. Un cono a vertice improprio, ossia un cilindro, appartiene alla categoria dei paraboloidi iperbolici se il piano all'infinito sega il cilindro lungo rette reali e distinte, nel qual caso le sezioni piane generiche sono iperboli (*cilindro iperbolico*); alla categoria dei paraboloidi ellittici se il piano all'infinito sega il cilindro secondo rette immaginarie, nel qual caso le sezioni piane del cilindro sono ellissi (*cilindro ellittico*); finalmente il cilindro è *parabolico*, come sopra si disse, se il piano all'infinito lo tocca lungo una generatrice.

Osservazione. — Si possono chiedere i criteri analitici che valgono a decidere se una quadrica data appartiene all'una o all'altra delle famiglie sopra considerate. Questi criteri saranno stabiliti in seguito, come pure in seguito si ritornerà sulla discussione precedente, allo scopo di esaminare con cura le forme delle superficie sopra nominate. Per ora limitiamoci a notare che la quadrica (1) è un paraboloide se la sua conica all' infinito (2) si scinde in due rette; dovrà a tal fine annullarsi il discriminante della (2) (n. 242), cioè il determinante

$$A_{44} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

che si riconosce essere il complemento algebrico di a_{44} nel discriminante della (1). Dunque: *la condizione perchè la quadrica* (1) *sia un paraboloide è espressa da*

$$A_{44} = 0.$$

329. Sezioni di una quadrica con piani paralleli. — Si considerino le coniche segate sopra una quadrica da una serie di piani paralleli. Queste coniche hanno gli stessi punti all'infinito, precisamente quei punti ove la retta all'infinito, comune ai loro piani, incontra la conica all'infinito della superficie; in conseguenza quelle coniche sono tutte della stessa specie (ellissi, iperboli o parabole). Si suol dire inoltre, tenendo conto del n. 296, che *le coniche segate sopra una quadrica da piani paralleli sono omotetiche.* Occorre tuttavia avvertire che una omotetia reale, trasformante una conica nell'altra, esiste soltanto se le due coniche che si considerano sono entrambe reali (o entrambe immaginarie), e se inoltre, quando siano iperboli, il tratto di retta all'infinito, interno all'una conica, riesca pure interno all'altra.[1] In ogni caso, confrontando due di quelle coniche, è sempre vero che gli asintoti dell'una sono paralleli agli asintoti dell'altra, e diametri coniugati dell'una sono paralleli a diametri coniugati dell'altra.

Sotto questa forma la proprietà sussiste pure se una delle due coniche degenera, nel qual caso il relativo piano è tangente alla quadrica, e le coppie di diametri coniugati divengono coppie di tangenti coniugate (n. 312). Risulta così che *le coppie di tangenti coniugate ad una quadrica in un punto sono parallele alle coppie di diametri coniugati di una conica segata da un piano parallelo al piano tangente in quel punto.*

330. Piani diametrali. — Un punto all'infinito P_∞ ha, rispetto ad una quadrica, un piano polare, che contiene i punti medi di tutte le corde avente la direzione di P_∞. Dunque:

I punti medi di un sistema di corde parallele di una quadrica stanno in un medesimo piano, che dicesi *piano diametrale,* precisamente piano diametrale coniugato con ciascuna di quelle corde. La conica (reale od immaginaria), secondo cui la quadrica è segata da un piano diametrale, è luogo dei punti di contatto delle tangenti parallele alle corde che il piano biseca.

Sia

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + \ldots + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{14}x + \ldots + a_{44} = 0$$

la equazione della quadrica in coordinate cartesiane ordinarie, e sia

$$(2) \qquad \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$$

una retta uscente dall'origine. Il piano polare del punto all'infinito $(l, m, n, 0)$ della retta, ossia il piano diametrale coniugato alla retta (2) ed alle parallele, ha l'equazione (n. 308)

$$(3) \qquad \begin{aligned} &l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) \\ &\quad + n(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0. \end{aligned}$$

[1] Il caso opposto, come si vedrà, può presentarsi nelle quadriche rigate (iperboloide o paraboloide).

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

Considerando, in particolare, i punti all'infinito degli assi cartesiani (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), si ha il risultato: *i piani diametrali coniugati cogli assi x, y, z hanno, rispettivamente, le equazioni*

$$(3)\qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0, \end{cases}$$

ottenute annullando le semiderivate parziali, rispetto ad x, y, z, del polinomio (1); *l'equazione di ogni altro piano diametrale è una combinazione lineare di quelle tre.*

331. Centro. — *Gli infiniti piani diametrali di una quadrica* (ossia i piani polari dei punti all'infinito) *passano per uno stesso punto, polo del piano all'infinito*, che dicesi *centro* della quadrica. Il centro C è proprio negli ellissoidi e negli iperboloidi, che non toccano il piano all'infinito, ed è centro di simmetria per la superficie; ogni corda di questa, passante per C, ha in C il punto medio, ed ogni conica segata da un piano per C ha in C il suo centro. Al contrario, nei paraboloidi (non degeneri), che toccano in un punto il piano all'infinito, il centro C coincide con questo punto improprio, e non dà luogo evidentemente ad una simmetria. D'accordo con ciò, si dice talora che gli ellissoidi e gli iperboloidi sono superficie dotate di centro, i paraboloidi sono privi di centro; altre volte si dice che questi ultimi hanno il centro improprio. *I piani diametrali di un paraboloide formano una stella impropria.*

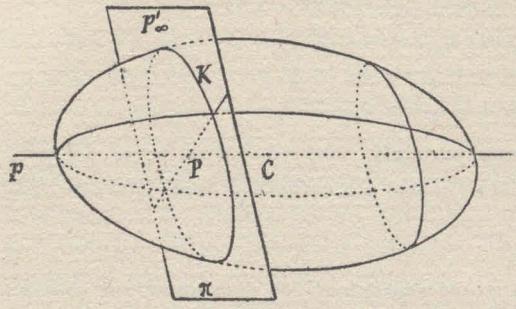
Le coordinate del centro della quadrica (1) si ottengono risolvendo le equazioni di tre piani diametrali, che non formino fascio, ad es. dei tre piani (4) del n. precedente. Si trovano così le coordinate

$$(5)\qquad x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \qquad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \qquad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}},$$

dove le A_{ik} sono i soliti minori del discriminante. Il centro è improprio quando $A_{44} = 0$, quando cioè la quadrica è un paraboloide (n. 328, Oss.), ed ha allora le coordinate omogenee $(A_{14}, A_{24}, A_{34}, 0)$. È indeterminato quando $A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{44} = 0$, nel qual caso risulta pure $A = 0$, e la quadrica (che appartiene alle categorie dei paraboloidi e dei coni) è un cilindro; un cilindro ha effettivamente infiniti centri situati sopra una retta, propria se il cilindro è ellittico o iperbolico, impropria se il cilindro è parabolico. In un cono a vertice proprio il centro coincide col vertice.

332. Diametri. — Le rette passanti per il centro di una quadrica diconsi *diametri. I diametri di un paraboloide sono tutti paralleli tra loro.*

Poichè ogni diametro p passa per il centro O della quadrica, la retta p', polare di p rispetto alla superficie, starà nel piano polare di O, cioè nel piano all'infinito; e viceversa. I diametri possono dunque definirsi come le rette polari delle rette all'infinito.



Sia p un diametro, e p'_∞ ne sia la retta polare. Ogni punto P di p è coniugato, rispetto alla superficie, ad ogni punto P'_∞ di p'_∞; in P cade dunque il punto medio della corda intercettata dalla superficie sulla retta PP'_∞. Segue che P è centro della conica K, segata sulla superficie dal piano $\pi \equiv Pp'_\infty$.

Facendo variare il punto P lungo p, risulta che il *luogo dei centri delle sezioni di una quadrica, ottenute con una serie di piani paralleli, è un diametro*, il quale dicesi *coniugato* con ciascuno di quei piani. Due, tra i detti piani, toccano la superficie nei punti ove questa è segata dal diametro.

333. Cono asintotico. — Il ragionamento precedente cade in difetto se il diametro p sega la retta polare p'_∞. In tal caso p è tangente alla superficie nel punto all'infinito pp'_∞ (n. 312).

I diametri tangenti ad una quadrica costituiscono il cono circoscritto alla quadrica dal centro, cono che tocca la superficie lungo la conica all'infinito di questa, e dicesi *cono asintotico*. Scartando il caso del paraboloide (per cui il detto cono degenera nel piano all'infinito contato due volte), risulta che il cono asintotico si ottiene proiettando dal centro la conica all'infinito della quadrica, od anche conducendo per il centro le parallele alle rette (reali od immaginarie) che la superficie possiede. Il detto cono è reale negli iperboloidi, immaginario negli ellissoidi. I piani tangenti al cono, lungo le singole generatrici, toccano la superficie nei punti all'infinito di queste, e diconsi *piani asintotici*; ciascuno di essi sega la superficie lungo due rette parallele (reali od immaginarie).

Un piano generico dello spazio sega la quadrica ed il cono asintotico in due coniche, che hanno gli stessi punti all'infinito e gli stessi asintoti (sezioni del detto piano coi piani asintotici, che toccano la quadrica in quei due punti). *Le due coniche sono adunque concentriche ed omotetiche* (n. 296); l'affermazione vale tenendo presente però la restrizione esposta al n. 329.

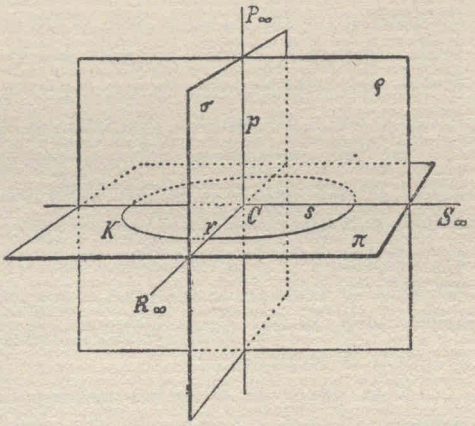
Data la equazione (1) (n. 328) di una quadrica, per formare l'equazione del cono asintotico si ricordi che la (2) del n. 328 rappresenta il

cono proiettante dall'origine la conica all'infinito della superficie. Si trasporti ora questo cono parallelamente a sè stesso, finchè il vertice coincida col centro (x_0, y_0, z_0) della quadrica (n. 331, (5)); si otterrà il cono asintotico, la cui equazione è dunque (cfr. n. 263) [1]

$$(6)\quad a_{11}(x-x_0)^2+a_{22}(y-y_0)^2+a_{33}(z-z_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)$$
$$+2a_{13}(x-x_0)(z-z_0)+2a_{23}(y-y_0)(z-z_0)=0.$$

334. Coppie di piani diametrali coniugati. — Due piani diametrali di una quadrica qualsiasi diconsi *coniugati* se ciascuno contiene il polo dell'altro (n. 310), in altre parole, se ciascuno è parallelo alle corde bisecate dall'altro. *Per un diametro passano infinite coppie di piani diametrali coniugati; esse formano una involuzione, i cui piani doppi sono i piani* (asintotici ossia) *tangenti condotti per quel diametro* (n. 310).

Per costruire una coppia di piani diametrali coniugati, passanti per un diametro p, conviene proceder così. Si costruisca anzitutto un piano π coniugato a p, contenente cioè la retta p'_∞ polare di p. Il piano π sega la quadrica lungo una conica K, che ha il centro nel punto $C \equiv p\pi$ (n. 332). Si conducano ora due diametri coniugati r, s della conica K, e siano R_∞, S_∞ i loro punti all'infinito. Poichè la retta polare di R_∞ rispetto a K è la s, il piano polare di R_∞ rispetto alla quadrica passerà per s; esso passa inoltre per p, giacchè R_∞ sta su p'_∞; il detto piano sarà dunque $\varrho \equiv ps$. Similmente si vede che il piano polare di S_∞ rispetto alla quadrica è $\sigma \equiv pr$. E si conclude che i due piani diametrali ϱ e σ, di cui ciascuno contiene il polo dell'altro, sono coniugati. In breve: *i piani diametrali coniugati passanti per un diametro p si ottengono congiungendo p colle coppie di diametri coniugati della conica K segata da un piano coniugato a p.*



335. Terne di piani diametrali coniugati. — Esaminiamo, in particolare, il caso che la quadrica abbia centro proprio C; allora, tra i piani

[1] Se $f(x, y, z) = 0$ è l'equazione della quadrica, l'equazione del cono asintotico può pure scriversi sotto la forma

$$f(x, y, z) - \frac{A}{A_{44}} = 0,$$

che si giustifica imitando il ragionamento esposto nella Oss. al n. 263.

coniugati col diametro p, ve ne sarà uno (proprio) π passante per il centro C. Questo piano *diametrale* π dicesi *coniugato* col diametro p, e p è il diametro *coniugato* col piano diametrale π. *In una quadrica a centro, ad ogni diametro corrisponde un piano diametrale coniugato, il quale ha il polo nel punto all'infinito del diametro, e biseca le corde parallele a questo.* Il punto all'infinito del diametro e la retta all'infinito del piano diametrale si corrispondono nella polarità piana determinata dalla conica all'infinito della superficie; o, in altre parole, il diametro ed il piano diametrale si corrispondono nella polarità che il cono asintotico determina entro la stella C. Applichiamo ora al piano diametrale π ed alla conica K, che esso sega sulla superficie, le considerazioni del numero precedente. Se r, s sono due diametri coniugati di K, vale ancora il risultato che i loro punti all'infinito R_∞, S_∞ hanno come piani polari $\varrho \equiv ps$, $\sigma \equiv pr$. Ma, questa volta, si può aggiungere che il punto all'infinito P_∞ di p ha come piano polare $\pi \equiv rs$. Il triedro prs ha dunque la proprietà che ogni sua faccia ha per polo il punto all'infinito dello spigolo opposto, e biseca le corde parallele a questo spigolo; esso è un *triedro diametrale autoconiugato* (n. 314), le sue facce costituiscono una *terna di piani diametrali coniugati*, i suoi spigoli *una terna di diametri coniugati*. Ciascuna faccia del triedro sega la quadrica in una conica, di cui due diametri coniugati sono gli spigoli giacenti su quella faccia.

Se poi, insieme al triedro, consideriamo il piano all'infinito, che è il piano polare del vertice, abbiamo un particolare tretraedro autopolare rispetto alla quadrica (n. 314); i vertici all'infinito di esso formano un triangolo autopolare rispetto alla conica all'infinito della superficie. Viceversa, un siffatto triangolo, insieme al centro della superficie, dà un tetraedro autopolare, le cui facce proprie sono tre piani diametrali mutuamente coniugati. Si conclude:

Una quadrica a centro possiede infinite terne di piani diametrali coniugati; queste si ottengono proiettando dal centro gli infiniti triangoli autopolari rispetto alla conica all'infinito della superficie.

Osservazione. — La nozione di piani diametrali coniugati vale anche per i coni a vertice proprio, e non differisce dalla nozione di piani coniugati cui conduce la teoria della polarità rispetto al cono (n. 317). In particolare, si noti che due o tre piani diametrali mutuamente coniugati, rispetto ad una quadrica a centro, sono pure coniugati rispetto al cono asintotico, e viceversa.

336. Piani principali. — Sappiamo (n. 330) che ogni piano diametrale divide per metà le corde aventi una data direzione. Se quel piano è perpendicolare a queste corde, esso dicesi *piano principale*, ed è un piano di simmetria della superficie. Sappiamo inoltre (n. 332) che ogni

diametro contiene i centri delle coniche segate dai piani (coniugati con esso) aventi una data giacitura. Se quel diametro è perpendicolare a questi piani, esso dicesi *asse* della superficie, ed è un asse di simmetria per la quadrica. Noi ci proponiamo ora la ricerca analitica dei piani principali e degli assi di una quadrica.

Ricordiamo a tal fine che, data la equazione di una quadrica

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + \ldots + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{14}x + \ldots + a_{44} = 0,$$

il piano diametrale coniugato alla retta

$$(2) \qquad \frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n},$$

ed alle sue parallele ha (n. 330) l'equazione

$$(3) \quad (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})\,l + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})\,m + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})\,n = 0,$$

ossia, ordinando rispetto a x, y, z,

$$(3') \quad (a_{11}l + a_{21}m + a_{31}n)\,x + (a_{12}l + a_{22}m + a_{32}n)\,y + (a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n)\,z + (a_{14}l + a_{24}m + a_{34}n) = 0.$$

Affinchè il piano (3') risulti perpendicolare alla retta (2) deve essere, nella ipotesi di coordinate ortogonali,

$$\frac{a_{11}l + a_{21}m + a_{31}n}{l} = \frac{a_{12}l + a_{22}m + a_{32}n}{m} = \frac{a_{13}l + a_{23}m + a_{33}n}{n}.$$

Indicando con k il valore comune delle tre frazioni, sviluppando e ordinando rispetto a l, m, n, otteniamo le equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} (a_{11} - k)\,l + a_{21}m + a_{31}n = 0, \\ a_{12}l + (a_{22} - k)\,m + a_{32}n = 0, \\ a_{13}l + a_{23}m + (a_{33} - k)\,n = 0, \end{cases}$$

le quali, oltre alle incognite l, m, n di cui interessano solo i rapporti, contengono l'incognita ausiliare k. Per risolvere un siffatto sistema conviene eliminare anzitutto l, m, n; si ottiene così l'equazione di terzo grado in k

$$(5) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0,$$

che interviene ad ogni passo nello studio delle proprietà metriche delle quadriche, e si suole indicare brevemente con

$$(5) \qquad \Delta(k) = 0.$$

Sviluppata e ordinata rispetto a k, essa si presenta sotto la forma

$$k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0, \tag{5'}$$

dove A_{44} è il noto determinante del terzo ordine, e dove si è posto, per brevità,

$$\left\{\begin{array}{l} I = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \quad = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2. \end{array}\right. \tag{6}$$

Indichiamo con k_1, k_2, k_3 le radici dell'equazione (5). Una qualsiasi di esse, ad es. k_1, sostituita al posto di k nelle (4), fa sì che una delle (4) diventi conseguenza delle rimanenti due; si potranno dunque calcolare valori non tutti nulli di l, m, n che verifichino insieme le (4). Questi valori, sostituiti nella (3) o (3'), dànno l'equazione di un piano principale. Concludiamo che una quadrica possiede, in generale, *tre piani principali.*

Ma si può affermar di più, che *questi piani sono sempre reali.* Basta perciò assicurarsi che siano tali le tre radici k_1, k_2, k_3 della (5). Ora, che così sia risulta da un noto teorema d'algebra, il quale insegna che la equazione di grado n (qui $n = 3$), ottenuta uguagliando a zero un determinante simmetrico di ordine n (ad elementi tutti reali) ai cui elementi principali sia aggiunta la incognita (qui $-k$), ha tutte le sue n radici reali.[1]

Però, nel caso presente, non occorre nemmeno ricorrere a quel teorema, bastando al nostro scopo il ragionamento che segue, nel quale dovremo tuttavia distinguere le quadriche a centro dai paraboloidi.

337. Piani principali delle quadriche a centro. — Supposto che la nostra superficie abbia un centro proprio C, si osservi anzitutto che è certo reale una delle radici dell'equazione (5), o (5'), *di grado dispari a coefficienti reali.* A questa radice corrisponde un piano principale *reale* π, piano proprio giacchè contiene il centro C; il diametro p coniugato a π,

---

[1] Fra le tante dimostrazioni che furono date di quel celebre teorema, riproduciamo qui, per comodità del lettore, la seguente, limitandoci al caso particolare che ci interessa.

Supposto di aver calcolato una radice k della (5), ed i corrispondenti valori non tutti nulli di l, m, n, soddisfacenti al sistema (4) in cui al posto di k si sia sostituito il valore trovato, indichiamo con l', m', n' i valori coniugati di l, m, n (valori che coincidono con l, m, n, se questi sono reali). Ora moltiplichiamo ordinatamente le (4) per l', m', n', e sommiamo membro a membro. Otterremo

$$a_{11}ll' + a_{22}mm' + a_{33}nn' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{13}(ln' + l'n) + a_{23}(mn' + m'n) = k(ll' + mm' + nn'),$$

nella quale il primo membro ed il coefficiente di k sono certamente reali, perchè tali sono ll', ..., $lm' + l'm$, ... (anche quando l, m, n fossero complessi). Inoltre ll', mm', nn' sono ≥ 0, e certo non tutti e tre nulli, chè altrimenti sarebbe $l = m = n = 0$, contro la ipotesi; dunque il coefficiente di k è diverso da zero. Ora l'equazione precedente, risolta rispetto a k, dà per k un valore reale; è quindi vero ciò che si era affermato.

è, per ipotesi, perpendicolare a π (v. fig. di pag. 503). Il piano π sega la quadrica lungo una conica K, che ha il centro C. Questa conica possiede certo due diametri reali r, s coniugati e perpendicolari tra loro, che sono *assi* della conica (n. 265). Consideriamo ora il triedro reale, trirettangolo, prs; esso è autoconiugato rispetto alla superficie (n. 335); ciascuna faccia dunque divide per metà le corde parallele allo spigolo opposto, cioè perpendicolari alla faccia stessa; ciascuna faccia è, in conseguenza, un piano principale della superficie. E si hanno così i tre piani principali che una quadrica possiede. Concludiamo:

Una quadrica a centro possiede tre piani principali reali, i quali costituiscono un triedro trirettangolo, autoconiugato rispetto alla superficie. È questa, in generale, la sola terna di piani diametrali mutuamente coniugati e perpendicolari.

Gli spigoli del triedro, cioè i diametri coniugati e perpendicolari ai singoli piani principali, sono *assi* della superficie (n. 336); *vertici* diconsi i punti ove gli assi segano la quadrica. Il piano tangente alla quadrica in un vertice è perpendicolare al relativo asse. Gli assi ed i vertici situati in un piano principale sono assi e vertici per la conica *sezione principale* della quadrica con quel piano.

Osservazione. — Il teorema e le considerazioni precedenti sussistono anche per i coni a vertice proprio. Ogni cono siffatto possiede tre piani reali di simmetria, o *piani principali*, passanti per il vertice. I piani principali di una quadrica a centro sono pure piani principali del cono asintotico.

338. Piani principali di un paraboloide. — Esaminiamo, in secondo luogo, il caso dei paraboloidi. Riprendiamo l'equazione

$$\Delta(k) = 0 \tag{5}$$

del n. 336, ed osserviamo che, nella ipotesi attuale, la (5) ha una radice $k_1 = 0$, perchè il termine noto A_{44} della (5') si annulla quando la quadrica è un paraboloide (n. 328, Oss.).

Sostituiamo ora la radice $k_1 = 0$, al posto di k, nelle (4) del n. 336; esse divengono

$$\begin{cases} a_{11}\,l + a_{12}\,m + a_{13}\,n = 0, \\ a_{21}\,l + a_{22}\,m + a_{23}\,n = 0, \\ a_{31}\,l + a_{32}\,m + a_{33}\,n = 0, \end{cases} \tag{4'}$$

e coesistono, nel nostro caso, per valori non tutti nulli di l, m, n. Calcolati questi valori, formiamo con essi l'equazione (3') del n. 336, la quale rappresenta, secondo la teoria generale, un piano principale. Attualmente però la (3'), tenuto conto delle (4'), diviene

$$0\,x + 0\,y + 0\,z + (a_{14}\,l + a_{24}\,m + a_{34}\,n) = 0,$$

e rappresenta (supposto non nullo il trinomio tra parentesi, con che vengono scartati i cilindri, n. 331) il piano all'infinito, come risulta introducendo coordinate omogenee. Un tal piano si riguarda però come una soluzione estranea del problema, e ci si limita a considerare i due piani principali provenienti dalle due radici non nulle della (5). Che questi siano reali, risulta dalla considerazione geometrica seguente, oltre che dal teorema algebrico menzionato alla fine del n. 336.

Ricordando che i diametri di un paraboloide sono tutti paralleli tra loro, consideriamo i piani perpendicolari ad essi, e costruiamo il diametro p che è coniugato a quei piani; esso sarà un asse, anzi il solo *asse* del paraboloide (n. 336). L'asse sega il paraboloide in un punto proprio, detto *vertice*, ove il piano tangente è normale all'asse, e nel centro all'infinito della quadrica. Sia poi π uno dei piani perpendicolari a p, e sia K la conica segata da esso sulla superficie, conica che ha il centro nel punto proprio $p\pi$ (v. fig. di pag. 503). Se r ed s sono gli assi, certo reali, di K, e R_∞, S_∞ sono i loro punti all'infinito, sappiamo già (n. 334) che i piani polari di R_∞, S_∞ sono $\varrho \equiv ps$, $\sigma \equiv pr$. Questi piani, essendo rispettivamente coniugati e normali alle rette r, s, sono *i piani principali* del paraboloide. Osservando che essi sono coniugati e perpendicolari tra loro, concludiamo:

Un paraboloide possiede, in generale, due piani principali reali, che sono coniugati e perpendicolari tra loro; essi si segano lungo un diametro, detto asse, che è coniugato ai piani perpendicolari ad esso.

Osservazione. — Le considerazioni precedenti si applicano, con qualche modificazione, ai cilindri. È chiaro però, direttamente, che un cilindro ammette come piani di simmetria ogni piano normale alle generatrici, ed i piani paralleli a queste condotti per gli assi di una sezione normale. Di quest'ultimi piani ve n'è uno solo se la sezione è una parabola (cilindro parabolico), ve ne son due se è una conica a centro (cilindro ellittico od iperbolico); la retta in cui questi due si segano dicesi *asse* del cilindro.

339. Casi particolari; quadriche rotonde; sfera. — Noi abbiamo visto nei nn. 337, 338 che, nota una radice dell'equazione $\Delta(k) = 0$ (ad es. la radice $k_4 = 0$ nel caso dei paraboloidi), la determinazione dei due piani principali corrispondenti alle altre due radici è ridotta alla determinazione degli assi di una certa conica K, assi che, congiunti colla retta p normale al piano π di K nel centro della conica, forniscono i piani principali nominati. Ora può accadere che la conica K sia un cerchio, nel qual caso ogni suo diametro è asse. Il ragionamento fatto sopra prova allora che ogni piano per p è piano principale; la quadrica possiede dunque infiniti piani principali passanti per un asse p, e, quando

la quadrica abbia centro, un ulteriore piano principale perpendicolare all'asse. D'altra parte, ogni piano normale a p sega la quadrica lungo una conica simile a K (n. 329), cioè lungo un cerchio che ha il centro su p (n. 332). La quadrica è dunque *rotonda;* essa può generarsi facendo ruotare intorno a p (*asse di rotazione*) la conica (*meridiano*) secondo cui la superficie è segata da un piano qualsiasi condotto per p. Ritroviamo così le quadriche rotonde, di cui si è discorso al n. 113, superficie che hanno evidentemente infiniti piani di simmetria.

Se poi, in un caso più particolare, la conica meridiana è un cerchio, la quadrica sarà una *sfera.* Ogni piano diametrale della sfera è piano principale, o piano di simmetria; ogni diametro è asse, coniugato al piano diametrale perpendicolare ad esso. Per la sfera adunque la polarità che si genera nella stella avente per centro il centro della sfera, quando ad ogni diametro si associ il piano diametrale coniugato (n. 335), è la polarità *ortogonale* o *sferica* (n. 214); il cono asintotico della sfera, che determina quella polarità, è dunque *il cono delle rette isotrope* uscenti dal centro; e la conica all'infinito della sfera, anzi di ogni sfera, è *il cerchio assoluto dello spazio* (n. 214). Le sfere (superficie caratterizzate da una proprietà metrica) rientrano dunque nella famiglia delle quadriche (superficie definite da caratteri proiettivi), come quadriche costrette a contenere il cerchio assoluto dello spazio.

Ritornando al problema dei piani principali, possiamo ora affermare:

Una quadrica possiede più di tre, anzi infiniti piani principali solo quando essa è rotonda, nel qual caso sono principali tutti i piani passanti per l'asse di rotazione, e, se la quadrica ha centro, un piano ulteriore perpendicolare al detto asse. Ogni piano diametrale della quadrica è principale se essa è una sfera.

Osservazione. — Si può chiedere quale particolarità offra l'equazione

$$(5) \qquad \Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0,$$

da cui dipendono i piani principali di una quadrica, quando questa è rotonda. Notiamo perciò che la (5) non può avere più di tre radici, e che ad una k_1 di queste corrisponde (n. 336) un solo piano principale se le equazioni (4) (n. 336), ove sia posto $k = k_1$, determinano i rapporti $l : m : n$. Perchè si abbiano infiniti piani principali, dovranno dunque quelle equazioni (4), in corrispondenza a un particolar valor di k, lasciare indeterminati i rapporti $l : m : n$. Ciò accade se due delle (4) diventano conseguenze della rimanente, ossia se esiste un valore di k_1 di k che annulli tutti i minori del secondo ordine del determinante (5). In tal caso si dimostra che k_1 è radice doppia dell'equazione (5); e, viceversa, una radice doppia

gode quella proprietà.[1] Un caso di maggiore indeterminazione si presenta se una radice k della (5) annulla tutti gli elementi del determinante (5), e rende quindi identicamente verificate le (4); allora infatti ogni piano diametrale è principale. D'altra parte, affinchè ciò accada, occorre e basta che siano verificate le condizioni

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \qquad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

le quali esprimono che la superficie è una sfera (n. 108); in tal caso $k_1 = a_{11}$ è radice tripla della (5). Viceversa, si dimostra che, se la (5) ha una radice tripla, son verificate le ultime condizioni e la quadrica è una sfera.[2] In conclusione:

Se l'equazione $\Delta(k) = 0$ *ammette una radice che annulli tutti i minori del secondo ordine del determinante* $\Delta(k)$ (*ossia se ha una radice doppia*), *la quadrica è rotonda; se ammette una radice che annulli tutti gli elementi del determinante* (*ossia se ha una radice tripla*), *la quadrica è una sfera; e viceversa.*

340. I piani principali di una quadrica in relazione col cerchio assoluto. — La ricerca analitica dei piani principali di una quadrica (n. 336) vien messa in luce più viva mediante le considerazioni geometriche seguenti.

Si considerino insieme la conica all'infinito H_∞ della quadrica, ed il cerchio assoluto Ω_∞; queste due coniche si segano in quattro punti immaginari, i quali (provenendo dalla risoluzione di due equazioni a coefficienti reali) si distribuiscono in due coppie (M, M'), (N, N') di punti immaginari coniugati. I punti stessi determinano un quadrangolo completo, in cui una coppia di lati opposti si compone di rette reali (MM', NN') (n. 38), e le altre due coppie si compongono, ciascuna, di rette immaginarie coniugate

---

[1] Indicando brevemente con Δ il determinante (5), con δ_{il} un suo elemento, e con Δ_{il} il relativo complemento algebrico, si osservi che l'equazione cubica in k, $\Delta = 0$, dà, derivata rispetto a k, l'equazione quadratica $\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = 0$. Ora, se un valore k_1 di k annulla il determinante Δ e tutti i minori Δ_{il}, certo k è radice doppia dell'equazione $\Delta = 0$, perchè ne annulla il primo membro e la funzione derivata.

Si supponga ora, inversamente, che un valore k_1 di k sia radice doppia dell'equazione $\Delta = 0$, e quindi semplice dell'equazione $\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = 0$. Indicando con ilm una permutazione dei numeri 1, 2, 3, e tenendo conto dell'identità $\Delta_{ii}\,\Delta_{ll} - \Delta_{il}^2 = \delta_{mm}\Delta$, la quale, per $k = k_1$, diviene $\Delta_{ii}\,\Delta_{ll} = \Delta_{il}^2$, possiamo affermare che k_1 rende

$$(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33})\,\Delta_{ii} = \Delta_{1i}^2 + \Delta_{2i}^2 + \Delta_{3i}^2 = 0,$$

e quindi (trattandosi di quantità reali) $\Delta_{1i} = 0$, $\Delta_{2i} = 0$, $\Delta_{3i} = 0$, per $i = 1, 2, 3$. Sicchè k_1 annulla tutti i minori del secondo ordine di Δ.

[2] Infatti, se k_1 è radice tripla dell'equazione $\Delta = 0$, essa verifica l'equazione prima derivata, ed annulla quindi (in virtù della nota precedente) tutti i minori Δ_{il}; essa verifica inoltre l'equazione seconda derivata $\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 0$. Moltiplicando i due membri di questa per δ_{ii}, e ricordando che $\delta_{ii}\,\delta_{ll} - \delta_{il}^2 = \Delta_{mm}$, ossia $= 0$ per $k = k_1$, si vede che k_1 rende

$$(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33})\,\delta_{ii} = \delta_{1i}^2 + \delta_{2i}^2 + \delta_{3i}^2 = 0,$$

e quindi $\delta_{1i} = 0$, $\delta_{2i} = 0$, $\delta_{3i} = 0$, per $i = 1, 2, 3$.

(come ad es. MN', $M'N$). È dunque reale (n. 38) il triangolo diagonale PRS del quadrangolo, ed è autopolare rispetto alle due coniche H_∞, Ω_∞ (n. 240). Ne viene che il piano polare di P rispetto alla quadrica, cioè il piano diametrale coniugato alla direzione di P, passa per RS, ed è normale alla detta direzione (n. 214). Quel piano è dunque piano principale della quadrica. Risulta così nuovamente che una quadrica ha tre piani principali reali, che sono i piani polari di P, R, S; se la quadrica ha centro, essi si ottengono proiettando dal centro i lati del triangolo PRS; se la quadrica è un paraboloide, nel qual caso H_∞ degenera in due rette (lati opposti del quadrangolo nominato) secantisi in un vertice P del triangolo diagonale, il piano principale che è polare di P coincide col piano all'infinito, e restano due piani principali propri, passanti per PR, PS, rispettivamente.

Può darsi che le quattro intersezioni M, M', N, N' delle coniche H_∞, Ω_∞ non siano tutte distinte; non può però M coincidere col punto immaginario coniugato M', se non in un punto reale, mentre Ω_∞ non ha punti reali; dovrà dunque M coincidere, ad es., con N, e, in conseguenza, M' andrà a coincidere con N'; le due coniche allora si toccano in due punti immaginari coniugati $M \equiv N$, $M' \equiv N'$. Le tangenti (immaginarie coniugate) in questi punti si segheranno in un punto reale P. Ora, questa volta, il punto P con una qualsiasi delle infinite coppie di punti R, S, dividenti armonicamente MM', dà un triangolo autopolare rispetto alle due coniche. Esistono dunque infiniti triangoli siffatti, col vertice P; e la nostra quadrica possiede infiniti piani principali, di cui tutti, tranne uno, passano per P; la quadrica, in breve, è rotonda intorno ad un asse passante per P. Osservando che questi ragionamenti sono invertibili, si giunge al notevole risultato: *condizione necessaria e sufficiente perchè la quadrica sia rotonda è che la sua conica all'infinito tocchi in due punti il cerchio assoluto.*

Se poi H_∞ ed Ω_∞ coincidono, si ha il caso della sfera.

Volendo porre sotto forma analitica queste considerazioni, si osservi che (ove si rappresenti la quadrica colla solita equazione $a_{11}x^2 \ldots = 0$) le coniche H_∞ ed Ω_∞ hanno (sul piano all'infinito $t = 0$) le equazioni (nn. 328, 214).

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Per determinare il triangolo autopolare comune alle due coniche, conviene (n. 257) determinare le coniche degeneri del fascio $(H_\infty, \Omega_\infty)$:

$$(a_{11} - k)x^2 + (a_{22} - k)y^2 + (a_{33} - k)z^2$$
$$+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0.$$

Occorre dunque annullare il discriminante dell'ultima equazione, e con ciò si ottiene precisamente la $\Delta(k) = 0$, di cui ora apparisce il significato geometrico.

Se poi le due coniche H_∞, Ω_∞ si toccano in due punti, la retta che li congiunge, contata due volte, fornisce una conica degenere del fascio precedente; deve esister dunque un valore di k che annulli non solo il discriminante, ma pure tutti i minori del secondo ordine (n. 242). E così si ritrovano le condizioni analitiche perchè una quadrica sia rotonda.

I piani principali di una quadrica, di cui si serve già EULERO (1748) per semplificare l'equazione della superficie, furono definiti, nel modo qui adottato (n. 536), da BINET (1809). L'equazione $\Delta(k) = 0$, da cui essi dipendono, appare sotto forma sviluppata in una nota di HACHETTE e PETIT (1812), e sotto forma di determinante in CAUCHY (1829). Le considerazioni dell'ultimo numero sono dovute a PONCELET (1822), nel caso di una quadrica generale; ma l'osservazione che una quadrica rotonda è bitangente al cerchio assoluto fu fatta da STAUDT (1856).

Esercizi. I. — 1) Determinare i centri delle quadriche seguenti:

$$\begin{aligned}
&2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 6x - 6y + 1 = 0,\\
&2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy + 8xz - 4yz - 2x - 5y = 0,\\
&2xy - xz + yz - 2x + 2y - 3z - 2 = 0,\\
&x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz - 4yz + 2x - 2y - 2z = 0,\\
&x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y - 2z = 0.
\end{aligned}$$

Per quelle, tra queste quadriche, che hanno centro proprio, si determini il cono asintotico; per le altre si diano le equazioni delle rette all'infinito.

II. — 2) Data una quadrica ed un punto P, che non vi appartenga, si possono costruire infinite corde della superficie aventi in P il punto medio; esse appartengono tutte ad un piano che sega la quadrica lungo una conica avente il centro P. Ma, se per P passano tre corde non situate in un piano ed aventi ivi il punto medio, P è punto medio di ogni corda condotta per esso, ed è il centro della quadrica.

3) Rispetto ad una quadrica $a_{11}x^2 + \ldots = 0$, ogni direzione (l, m, n) ha come coniugato un determinato piano diametrale. Quali sono le condizioni perchè i piani diametrali coniugati alle direzioni

$$(l, m, n), \quad (l_1, m_1, n_1), \quad (l_2, m_2, n_2),$$

siano coniugati tra loro a due a due?

4) Date le equazioni di una quadrica e di un piano, si scrivano le equazioni del diametro coniugato con quel piano.

5) Il piano suddetto sega la quadrica lungo una conica; si cerchino le coordinate del centro di questa, e si esamini se la curva sia una ellisse, una parabola, od una iperbole. (Si può sostituire a quella curva la sua proiezione sul piano xy, parallelamente a z).

6) Il luogo dei punti medi delle corde di una quadrica Q, uscenti da un punto fisso arbitrario P, è una quadrica Q', la quale passa per il centro C di Q, per il punto P, e sega Q lungo la conica all'infinito e lungo il contorno apparente di Q rispetto al punto P. La quadrica Q' è anche il luogo dei centri delle coniche di Q i cui piani passano per P.

7) Se il punto P dell'es. precedente varia descrivendo una retta p, la quadrica Q' varia descrivendo un fascio, la cui curva base si compone della conica all'infinito di Q e di una seconda conica, che giace nel piano diametrale coniugato con p, passa per il centro O e per i punti di contatto dei piani tangenti condotti per p, e sega in un punto la retta p e in due punti la conica all'infinito di Q. Segue che il luogo dei centri delle coniche segate sopra una quadrica dai piani di un fascio è una conica giacente nel piano diametrale coniugato coll'asse del fascio, ecc.

III. — 8) In un fascio di quadriche vi sono, generalmente, tre paraboloidi, tra cui uno almeno è iperbolico; i centri di quelli sono proiettati dal centro di ciascuna quadrica del fascio mediante una terna di diametri coniugati.

9) Se tra le quadriche di un fascio vi è una sfera, gli assi di quelle hanno direzioni costanti; i relativi punti all'infinito sono centri dei tre paraboloidi appartenenti al fascio. Sopra un piano le quadriche segano coniche, i cui assi hanno direzioni costanti (n. 267, es. 17)).

10) Nel fascio determinato da una quadrica rotonda con una sfera, ogni quadrica è rotonda; e gli assi di rotazione sono tutti paralleli, e stanno in uno stesso piano. Al fascio appartengono tre coni rotondi, ed un cilindro parabolico, che tocca il piano all'infinito lungo la retta impropria comune ai piani dei paralleli. Viceversa, un cilindro parabolico ed una sfera determinano un fascio composto di quadriche rotonde.

11) Si può sempre costruire una sfera che tocchi una quadrica rotonda lungo un parallelo assegnato. Viceversa, se una quadrica è toccata lungo una conica da una sfera, la quadrica è rotonda, quella conica è un parallelo, ed il centro della sfera sta sull'asse di rotazione (cfr. n. 267, es. 20)). Segue che l'equazione di ogni quadrica rotonda, avente per asse la retta $\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$, può scriversi sotto la forma

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \lambda P^2 + 2\mu P + \nu,$$

dove λ, μ, ν sono tre parametri, e P indica il trinomio $lx + my + nz$ (cfr. n. 113, es. 16)).

12) I centri delle quadriche di una schiera si trovano sopra una retta, che passa per il centro improprio del paraboloide appartenente alla schiera, e per i centri delle quattro coniche, inviluppi di piani, che appartengono alla schiera.

13) In particolare: *a*) Il luogo dei centri delle quadriche, che toccano un dato cono lungo una conica fissa, è la retta congiungente il vertice del cono col centro della conica. *b*) Il luogo dei centri delle quadriche, che passano per gli spigoli di un quadrilatero semplice sghembo $ABCD$, è la retta che congiunge i punti medi delle due diagonali AC, BD. Segue che ogni segmento, avente gli estremi sulla coppia di spigoli opposti AB, CD (oppure BC, AD) e secante quella retta, ha ivi il suo punto medio.

14) Il luogo dei centri delle quadriche di un fascio è, in generale, una curva sghemba (del terzo ordine). Ma, per fasci particolari, il luogo può ridursi ad una conica o ad una retta. L'ultimo caso si presenta nei fasci-schiere considerati

nell'es. precedente. Porteremo ora qualche esempio di fasci, per cui ha luogo il secondo caso.

Se ad un fascio di quadriche appartiene un cilindro, il vertice di esso ha lo stesso piano polare rispetto a tutte le quadriche del fascio; questo piano, che è un piano diametrale comune, contiene i centri delle dette quadriche, i quali formano la *conica dei nove punti* (n. 267, es. 13)) del fascio di coniche segato su quel piano dalle quadriche. Ad es., nel fascio di quadriche rotonde considerato nell'es. 10) il luogo dei centri è una iperbole equilatera (n. 267, es. 16)).

15) Il luogo dei centri delle quadriche che passano per due coniche aventi due punti M, N comuni, è una conica situata nel piano polare del punto all'infinito della retta MN, rispetto ad ogni quadrica del fascio; ed è precisamente la conica dei nove punti del fascio di coniche segato su quel piano. Se le due coniche primitive sono cerchi, il luogo dei centri delle quadriche è una iperbole equilatera.

Capitolo IV.

Equazioni ridotte delle quadriche.

341. Quadriche riferite a particolari sistemi cartesiani. — L'equazione cartesiana di una quadrica

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + \ldots + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{14}x + \ldots + a_{44} = 0$$

si semplifica notevolmente se gli assi coordinati hanno particolari relazioni colla superficie (cfr. n. 268). Discuteremo qui i casi più interessanti, tenendo presenti le equazioni dei tre piani diametrali della (1) coniugati cogli assi x, y, z, rispettivamente:

$$(2) \qquad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{1}z + a_{14} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases}$$

a) Supposto anzitutto che si tratti di una quadrica a centro, e che l'origine delle coordinate cada nel centro, si osserverà che i piani diametrali (2) devono passare per l'origine, donde le condizioni

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0;$$

l'equazione di una quadrica a centro manca dei termini a primo grado se l'origine delle coordinate cade nel centro; e viceversa.

b) Supposto inoltre che i tre piani coordinati costituiscano una terna di piani diametrali coniugati (n. 335), i tre piani diametrali (2) devono coincidere ordinatamente coi piani coordinati yz, zx, xy, donde le condizioni

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0,$$

da aggiungersi altre tre precedenti. L'equazione (1) della superficie si riduce, in conseguenza, alla forma *normale*, o *canonica*,

$$(b) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0.$$

L'equazione di una quadrica a centro, riferita ad una terna di piani diametrali coniugati, contiene solo i quadrati delle coordinate e il termine noto; e viceversa.[1]

Al tipo (b) si riduce, in particolare, l'equazione di una quadrica a centro riferita ai tre piani principali: si ha allora il vantaggio che il sistema delle coordinate è ortogonale.

c) Per ottenere un sistema di riferimento che si applichi anche ai paraboloidi, scegliamo come origine O un punto della quadrica, come piano xy il piano tangente in O, come piani xz, yz due piani diametrali coniugati passanti per O, e, in conseguenza, come asse z il diametro passante per O, il quale è coniugato a quel piano tangente.

Allora i punti all'infinito degli assi x, y hanno come piani polari, rispettivamente, i piani yz, xz; dunque le due prime equazioni (2) rappresentano i piani $x = 0, y = 0$, ordinatamente, donde le condizioni:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} = 0,$$

alle quali va aggiunta l'altra

$$a_{44} = 0,$$

esprimente che l'origine sta sulla superficie. L'equazione (1) di questa si riduce, in conseguenza, al tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{34}z = 0.$$

Se poi si fa la ipotesi che la quadrica sia un paraboloide, nel quale caso l'asse z (diametro) sega la superficie nell'origine ed in un punto improprio, si trova inoltre $a_{33} = 0$, e si conclude:

L'equazione di un paraboloide, riferito a due piani diametrali coniugati (xz, yz), ed al piano (xy) tangente nell'estremo proprio del diametro z, assume la forma

$$(c) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{34}z = 0.$$

Alla stessa forma si riduce, in particolare, l'equazione di un paraboloide riferito ai due piani principali (xz, yz) ed al piano (xy) tangente nel vertice; si ha allora il vantaggio che il sistema di coordinate è ortogonale.

---

[1] Adoperando coordinate proiettive omogenee, si dimostra (cfr. n. 241) che l'equazione di una quadrica si riduce a contener solo i quadrati delle quattro coordinate quando il tetraedro fondamentale sia autopolare rispetto alla superficie. Nel caso del testo, il detto tetraedro si compone dei tre piani diametrali mutuamente coniugati e del piano all'infinito.

342. Discussione dell'equazione normale di una quadrica a centro. — Abbiamo visto che ogni quadrica a centro può rappresentarsi, in coordinate cartesiane *ortogonali*, mediante una equazione (normale) del tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} = 0 ; \tag{1}$$

basta a tal fine riferire la superficie ai tre piani principali.[1] Le varie forme delle quadriche a centro dipendono dai segni che possono ricevere i quattro coefficienti della (1), o meglio, i loro mutui rapporti.

Osserviamo prima però che alcuni coefficienti della (1), possono anche esser nulli; in corrispondenza, la quadrica risulta degenere. Così, se $a_{44} = 0$, si ha l'equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0, \tag{1'}$$

rappresentante un *cono* col vertice nell'origine (n. 316), riferito ai tre piani principali. Il cono ha tutti i punti immaginari, fuori del vertice (*cono immaginario*), se a_{11}, a_{22}, a_{33} hanno lo stesso segno, giacchè non si può allora soddisfare la (1') con valori reali, diversi da zero, di x, y, z. Il cono (1') ha invece infiniti punti reali (*cono reale*), se uno dei cofficienti della (1') ha segno opposto agli altri due. Notiamo inoltre che, se due coefficienti della (1') sono uguali, ad es. se $a_{11} = a_{22}$, il cono è *rotondo* intorno ad un asse coordinato, che, nel caso presente, è quello delle z, giacchè ogni piano $z = k$, perpendicolare a questo asse, sega il cono (1') lungo il cerchio $a_{11}(x^2 + y^2) + a_{33}k^2 = 0$ che ha il centro sopra l'asse stesso.

Se fosse invece, nella (1), $a_{33} = 0$, si avrebbe il *cilindro*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{44} = 0 \tag{1''}$$

colle generatrici parallele all'asse z, cilindro *ellittico* od *iperbolico*, secondo che la (1''), nel piano xy, rappresenta una ellisse o una iperbole, secondo che dunque a_{11} ed a_{22} hanno segni uguali od opposti. In particolare, se $a_{11} = a_{22}$, si ha un *cilindro rotondo*.

Sarebbe facile similmente esaminare gli ulteriori casi di degenerazione che si presentano se due o tre coefficienti della (1) si annullano; ma questa ricerca può essere lasciata al lettore.

Supposto ora che tutti i coefficienti della (1) siano diversi da zero, la (1), mediante divisione dei due membri per $-a_{44}$, assume la forma

$$mx^2 + ny^2 + pz^2 = 1, \tag{2}$$

dove m, n, p sono tre quantità reali, non nulle. Riguardo ai loro segni, si possono fare le seguenti ipotesi essenzialmente distinte tra loro, alle quali

[1] Se la superficie possedesse infiniti piani principali, si assumerebbero, come coordinati, tre di quei piani mutuamente perpendicolari.

ogni altra può ridursi, scambiando opportunamente i nomi degli assi coordinati:

	m	n	p	
I.	+	+	+	Ellissoide reale,
II.	−	−	−	Ellissoide immaginario,
III.	+	+	−	Iperboloide ad una falda,
IV.	+	−	−	Iperboloide a due falde.

I nomi delle superficie ora scritti vengono giustificati dalla discussione che segue.

343. Ellissoide. — I) Se, nella (2), si suppongono $m > 0, n > 0, p > 0$ la superficie sega l'asse x in due punti reali A, A', di coordinate

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{m}} = \pm a,$$

l'asse y in due punti reali B, B', di coordinate

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{n}} = \pm b,$$

e l'asse z in due punti reali C, C', di coordinate

$$z = \pm \sqrt{\frac{1}{p}} = \pm c,$$

dove a, b, c sono i valori assoluti dei radicali. I sei punti A, A', B, B', C, C', sono i *vertici* della superficie, ed a, b, c sono le lunghezze dei *semiassi*. Esprimendo m, n, p in funzione di a, b, c e sostituendo nella (2), la equazione della nostra superficie diviene

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Da questa è facile dedurre la forma della superficie.

Osserviamo infatti che il piano $xy\,(z = 0)$ sega la quadrica lungo la conica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che è una ellisse $ABA'B'$ di semiassi $OA = a$, $OB = b$. Un piano parallelo, $z = k$, sega la quadrica lungo l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2},$$

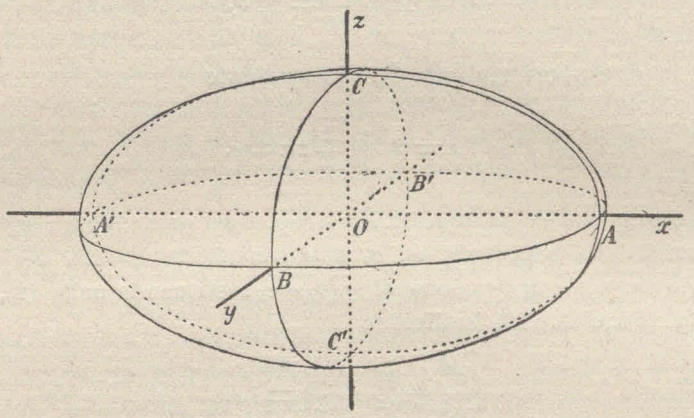
ossia

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{k^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{k}{c^2}\right)}=1,$$

i cui semiassi valgono

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-k^2}, \qquad \frac{b}{c}\sqrt{c^2-k^2}.$$

Mentre k cresce in valore assoluto da 0 a c, i semiassi vanno diminuendo, e precisamente, per $k=\pm c$, l'ellisse si riduce ad una coppia di rette immaginarie, ed il corrispondente piano è tangente (in C, o C') alla superficie. Se poi k, in valore assoluto, supera c, l'ellisse sezione è immaginaria. Si conclude che la quadrica non ha punti reali fuori dello strato compreso tra i piani condotti per C e C' parallelamente al piano xy. Risultati analoghi si ottengono considerando, in luogo del piano xy, ciascuno degli altri due piani coordinati; alla fine si vede che tutta la quadrica è contenuta entro un parallelepipedo, di cui AA', BB', CC' sono linee mediane.



La quadrica, non avendo punti reali all'infinito, è effettivamente un *ellissoide* (reale) (n. 328). Ogni punto dell'ellissoide è *ellittico* (n. 319), giacchè tale è il punto C, o C', come ora si è visto.

Casi particolari si ottengono supponendo due, o tre semiassi uguali tra loro. Se $a=b$, il piano $z=0$ ed i suoi paralleli segano l'ellissoide lungo cerchi; quindi l'ellissoide, la cui equazione assume la forma

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

è *rotondo* intorno all'asse z (n. 113).

Se $a = b = c$, l'equazione diviene

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

e rappresentata una *sfera* di raggio a.

II) Passiamo alla ipotesi $m < 0$, $n < 0, p < 0$. Non esistono allora valori reali di x, y, z soddisfacenti la (2); perciò diremo che essa rappresenta un *ellissoide immaginario.*

344. Iperboloide ad una falda. — III) Discutiamo ora la ipotesi III: $m > 0, n > 0, p < 0$. La superficie (2) sega ancora l'asse x in due punti reali A, A', a distanza $\pm\sqrt{\frac{1}{m}}$ da O, e l'asse y in due punti reali B, B', a distanza $\pm\sqrt{\frac{1}{n}}$ da O. Ma poichè $\pm\sqrt{\frac{1}{p}}$ è immaginario, l'asse z non sega la quadrica in punti reali.

Posto

$$a = \sqrt{\frac{1}{m}}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{-p}},$$

l'equazione (2) diventa

$$\text{(III)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Il piano $z = 0$ sega la quadrica lungo la ellisse ($ABA'B'$ della figura)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

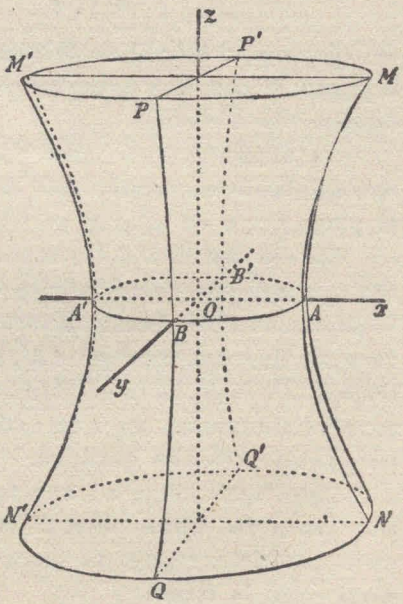
di semiassi a, b, che dicesi *ellisse di gola* dell'iperboloide, perchè si riconosce esser la più piccola ellisse tracciata sulla superficie. Il piano $z = k$ sega la superficie lungo la ellisse ($MPM'P'$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2},$$

i cui semiassi

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + k^2}, \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + k^2}$$

vanno crescendo mentre k cresce in valore assoluto, vale a dire, mentre il piano $z = k$ si allontana dal piano $z = 0$.



Il piano $y = 0$ invece sega la quadrica lungo la iperbole $(M\,A\,N\,M'A'\,N')$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

di cui l'asse trasverso AA' è situato lungo la retta x, mentre su z sta l'asse non trasverso. Anche il piano parallelo $y = k$ sega la quadrica lungo una iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2},$$

ossia

$$\frac{x^2}{a^2\,\dfrac{b^2 - k^2}{b^2}} - \frac{z^2}{c^2\,\dfrac{b^2 - k^2}{b^2}} = 1,$$

la quale iperbole ha l'asse trasverso parallelo ad x finchè $|\,k\,| < b$, mentre l'asse trasverso diventa parallelo a z se $|\,k\,| > b$. Nel caso intermedio, $k = \pm b$, l'equazione dell'iperbole si riduce a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

e quindi la curva si spezza nelle due rette reali

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

del piano $y = \pm b$; il detto piano è tangente alla quadrica (in B o B'), e il punto di contatto è iperbolico; quindi (n. 311) la quadrica che stiamo esaminando è rigata.

Le ultime considerazioni andrebbero ripetute, senza sostanziali differenze, quando si esaminasse il modo di comportarsi della quadrica rispetto al piano $z = 0$ ed ai suoi paralleli.

Da ciò che si è detto segue che la quadrica si compone di una *sola falda,* che si estende all'infinito dall'una e dall'altra banda del piano $z = 0$; la superficie (III) dicesi *iperboloide ad una falda,* o *iperboloide rigato.* Esso ha due *assi trasversi* AA', BB', di lunghezza $2a$, $2b$, e quattro vertici reali A, A', B, B'; si suol dire talora che sopra z giace un *asse non trasverso* di lunghezza $2c$, i cui estremi sarebbero i punti $(0, 0, \pm c)$ non appartenenti però alla quadrica.

Che l'iperboloide ad una falda (III) contenga infinite rette reali, si può anche dimostrare direttamente, senza ricorrere alle proprietà generali delle quadriche rigate. Si osservi infatti che la equazione (III) può scriversi sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

ossia

$$(III_a) \qquad \left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right);$$

essa quindi è soddisfatta ogni qualvolta sussistano insieme le due equazioni

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{y}{b}\right),$$

dove λ è un parametro arbitrario. Ora queste rappresentano una retta; ogni punto di essa sta dunque sull'iperboloide. Al variare di λ, la prima equazione lineare ci dà un piano variabile in un fascio, mentre la seconda equazione dà pure un piano variabile in un secondo fascio, proiettivo al primo; le infinite rette intersezioni di piani corrispondenti stanno sulla superficie, e costituiscono un primo sistema di rette. Al secondo sistema si giunge osservando che l'iperboloide (III_a) contiene pure la retta

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{y}{b}\right),$$

qualunque sia il parametro μ.

L'iperboloide ad una falda (III) può esser rotondo; ciò accade se $a=b$, nel qual caso la equazione (III) assume la forma

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

la superficie è generata (n. 113) da una iperbole ruotante intorno all'asse non trasverso (asse delle z); od anche da una retta qualsiasi dell'iperboloide, ad es. dalla retta $y=\frac{a}{c}z$, $x=a$, quando si faccia ruotare intorno all'asse z, che è sghembo con quella retta e si suppone rigidamente collegato con essa.

345. Iperboloide a due falde. — IV) Rimane la ipotesi IV: $m>0$, $n<0$, $p<0$. In corrispondenza la superficie (2) sega l'asse delle x in due punti reali A, A', a distanza $\pm\sqrt{\frac{1}{m}}$ da O; ed ha in comune punti immaginari cogli altri due assi.

Posto

$$a=\sqrt{\frac{1}{m}}, \qquad b=\sqrt{\frac{1}{-n}}, \qquad c=\sqrt{\frac{1}{-p}},$$

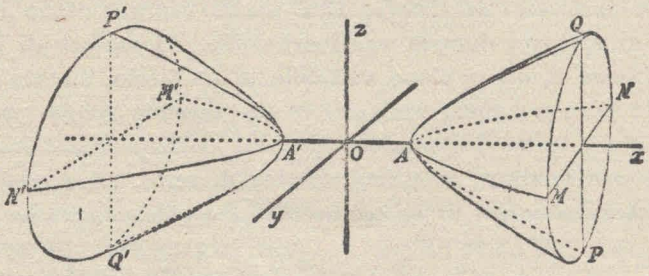
l'equazione (2) diviene

$$(IV) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Il piano $z = 0$ sega la quadrica (IV) lungo la iperbole ($M A N M' A' N'$ della figura)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

che ha l'asse trasverso AA' sopra x, e l'asse non trasverso sopra y. I piani paralleli $z = k$ segano pure la quadrica lungo iperboli, i cui assi



trasversi conservano la stessa direzione, e crescono al crescere di k (in valore assoluto).

Osservazioni analoghe valgono per il piano $y = 0$ (che sega lungo la iperbole $PA\,Q\,P'A'Q'$) e per i piani paralleli.

Invece il piano $x = 0$ sega sulla quadrica l'ellisse immaginaria

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

ed il piano parallelo $x = k$ sega la ellisse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1,$$

ossia

$$\frac{y^2}{b^2\dfrac{k^2-a^2}{a^2}} + \frac{z^2}{c^2\dfrac{k^2-a^2}{a^2}} = 1,$$

la quale è immaginaria finchè $|k| < a$, si riduce ad una coppia di rette immaginarie se $k = \pm a$ (sicchè il piano corrispondente tocca la superficie in A od A', e questi punti, insieme agli altri punti della superficie, sono ellittici), è finalmente reale se $|k| > a$; gli assi di quest'ultima ellisse sono paralleli alle rette x, y, e vanno crescendo al crescere di $|k|$; (si veda l'ellisse $QNPM$ della figura).

Segue da questa discussione che la quadrica (IV) si compone di due falde distinte, esterne allo strato compreso fra i piani condotti per A, A' parallelamente ad yz; le due falde si estendono all'infinito. Perciò la super-

ficie (IV) prende il nome di *iperboloide a due falde* (o *iperboloide non rigato*). Il detto iperboloide ha un solo *asse trasverso* AA', di lunghezza $2a$, e due vertici reali A, A'; esso possiede inoltre due *assi non trasversi*, di lunghezze $2b$, $2c$, situati lungo y, z, rispettivamente.

L'iperboloide a due falde (IV) è rotondo se $b = c$, nel qual caso l'equazione diviene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1;$$

l'asse di rotazione è, questa volta, x, e la superficie è generata da una iperbole ruotante intorno al suo asse trasverso (n. 113).

346. Alcune formole relative all'equazione normale di una quadrica a centro. — Dalle discussioni fatte risulta che la equazione di ogni quadrica reale, a centro, può porsi sotto la forma

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

dove i segni superiori corrispondono all'*ellissoide*, il segno superiore davanti a un termine e l'inferiore davanti all'altro portano all'*iperboloide ad una falda*, mentre i segni inferiori conducono all'*iperboloide a due falde*. Conservando le stesse convenzioni nelle formole seguenti, osserviamo che *il piano tangente alla quadrica nel punto* (x', y', z') (o, in generale, il piano polare di questo punto, comunque scelto) ha l'equazione (n. 305)

$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} \pm \frac{zz'}{c^2} = 1; \tag{2}$$

e la *normale alla superficie* nel punto stesso, cioè la perpendicolare ivi al piano tangente, ha le equazioni

$$\frac{a^2(x-x')}{x'} = \pm\frac{b^2(y-y')}{y'} = \pm\frac{c^2(z-z')}{z'}, \tag{3}$$

(le quali rappresentano, in generale, la perpendicolare condotta dal polo al piano polare).

Il diametro

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} \tag{4}$$

ha il piano diametrale coniugato (n. 330)

$$\frac{lx}{a^2} \pm \frac{my}{b^2} \pm \frac{nz}{c^2} = 0. \tag{5}$$

Posto che l, m, n siano proprio i coseni di direzione del diametro, il valore comune delle tre frazioni (4) è la distanza ρ dell'origine, centro

della superficie, dal punto (x, y, z) (n. 90); se questo punto sta sulla superficie, e ϱ misura quindi un semidiametro, le coordinate $x = l\varrho$, $y = m\varrho$, $z = n\varrho$ devono soddisfare la (1). Sostituendo e dividendo per ϱ^2, si ricava

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{l^2}{a^2} \pm \frac{m^2}{b^2} \pm \frac{n^2}{c^2}, \tag{6}$$

relazione che, in certo senso, può riguardarsi come la *equazione polare* della quadrica rispetto al centro. I tre coseni di direzione l, m, n sono legati dalla condizione $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, tenendo conto della quale la (6) può trascriversi, nel caso dell'ellissoide, sotto la forma

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) m^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) n^2.$$

Questa, nella ipotesi $a \geqq b \geqq c$, fa vedere che si ha sempre $\frac{1}{\varrho^2} \geqq \frac{1}{a^2}$, ossia $\varrho \leqq a$ (in valore assoluto). Se invece avessimo supposto che a fosse il minore dei tre semiassi, sarebbe risultato, dalla stessa relazione, $\varrho \geqq a$. Concludendo: *fra tutti i semidiametri di un ellissoide, il massimo e il minimo coincidono col maggiore e col minore dei tre semiassi.*

Considerazioni analoghe, che lascieremo al lettore, possono esser applicate agli iperboloidi; esse fanno vedere che, *di tutti i semidiametri di un iperboloide ad una falda, il minimo coincide col minore dei due semiassi trasversi; e di tutti i semidiametri di un iperboloide a due falde, il minimo coincide col semiasse trasverso.* Non si parla del massimo semidiametro, perchè gli iperboloidi posseggono semidiametri infiniti (asintoti).

Il *cono asintotico* della quadrica (1) ha l'equazione (n. 333)

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{7}$$

* Finalmente l'*equazione tangenziale della quadrica* (1), in coordinate non omogenee u, v, w, di piani, è (n. 309)

$$a^2 u^2 \pm b^2 v^2 \pm c^2 w^2 = 1. \tag{8}$$

Osservazione. — Alcune formule precedenti si trasportano subito al cono

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{1'}$$

reale o immaginario, secondo che si prende il segno $-$ o $+$ davanti all'ultimo termine. In particolare, se $P\,(x', y', z')$ è un punto del cono, il piano tangente in quel punto, e in ogni altro punto della generatrice OP, ha l'equazione

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} \pm \frac{zz'}{c^2} = 0. \tag{2'}$$

* Dette u, v, w, r le coordinate del detto piano, si hanno dunque le relazioni

$$u = \frac{x'}{a^2}, \qquad v = \frac{y'}{b^2}, \qquad w = \pm\frac{z'}{c^2}, \qquad r = 0;$$

ricavando x', y', z' dalle prime tre di queste, e sostituendone i valori nella (1'), che è soddisfatta dalle coordinate di P, si trova la equazione

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 \pm c^2 w^2 = 0, \tag{8'}$$

che è verificata dalle prime tre coordinate omogenee di ogni piano tangente al cono. La (8'), insieme colla $r = 0$, esprimente che la quarta coordinata del detto piano è nulla (in relazione col fatto che il piano stesso passa per l'origine, n. 139), rappresenta il cono in coordinate di piani. *Un cono ha due equazioni tangenziali,* come era prevedibile, visto che i piani tangenti ad un cono (lungo le generatrici) formano un *inviluppo semplicemente infinito* (n. 140).

La (8'), considerata isolatamente, è soddisfatta dalle coordinate dei piani tangenti al cono (1') e dei piani a questi paralleli, vale a dire, dalle coordinate dei piani che toccano la conica all'infinito del cono (1'). In breve, la (8') *rappresenta la quadrica limite* (n. 318) *inviluppo dei piani che toccano una conica situata sul piano all'infinito.*

347. Discussione dell'equazione ridotta di un paraboloide. — Abbiamo già visto che l'equazione di un paraboloide, in coordinate cartesiane ortogonali, può sempre ridursi alla forma

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2 a_{34} z = 0; \tag{1}$$

basta perciò assumere come origine il vertice della superficie, come asse z l'asse della superficie, come piani xz, yz i due piani principali, e come piano xy il piano tangente nel vertice.

Nell'equazione (1) qualche coefficiente può anche essere zero; ma la quadrica allora degenera. Così, se $a_{34} = 0$, il paraboloide si riduce ad una coppia di piani

$$\sqrt{a_{11}}\, x \pm \sqrt{-a_{22}}\, y = 0.$$

Se invece è $a_{22} = 0$, l'equazione

$$a_{11} x^2 + 2 a_{34} z = 0, \tag{1'}$$

a cui la (1) si riduce, rappresenta un *cilindro parabolico* avente le generatrici parallele ad y, e secante sul piano xz la parabola rappresentata dalla (1').

Lasciando da parte questi ed altri evidenti casi di degenerazione, supporremo diversi da zero i tre coefficienti della (1). Dividendone i due membri per $-a_{34}$, possiamo porre quell'equazione sotto la forma

$$m x^2 + n y^2 = 2 z, \tag{2}$$

dove m, n sono due quantità reali, non nulle. Anzi una di queste, ad es. m, può sempre supporsi positiva, giacchè, in caso opposto, si muterebbe il segno ai due membri della (2), e si invertirebbe il verso positivo sull'asse z, cambiando z in $-z$. Dunque i casi distinti, che, rispetto ai segni, possono presentare i coefficienti della (2), sono raccolti nella tabella seguente:

	m	n	
I.	+	+	Paraboloide ellittico.
II.	+	−	Paraboloide iperbolico.

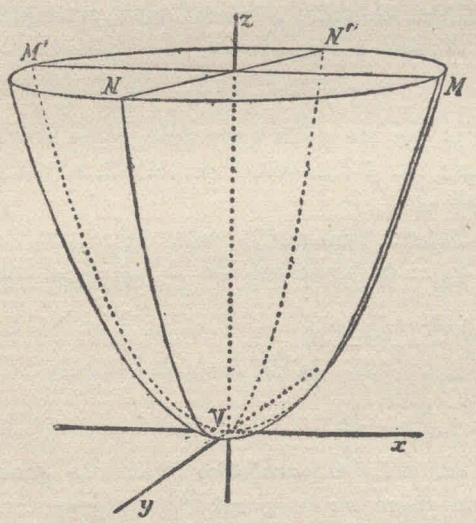
348. Paraboloide ellittico. — I) Discutiamo anzitutto la ipotesi $m > 0$, $n > 0$. Porremo, per comodità, $m = \frac{1}{p}$, $n = \frac{1}{q}$, dove p, q sono due quantità *positive*, parametri (come vedremo) delle due sezioni principali della superficie. Con ciò la (2) diviene

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Il piano $z = 0$ sega il paraboloide lungo la coppia di rette immaginarie

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0,$$

uscenti dal vertice V; questo punto, come ogni altra della superficie, è dunque ellittico, ed il paraboloide è *ellittico* (o *non rigato*). Un piano $z = k$, parallelo a quello, sega il paraboloide lungo la ellisse



$$\frac{x^2}{2pk} + \frac{y^2}{2qk} = 1,$$

che è reale se $k > 0$ (l'ellisse $M N M' N'$ della figura), ed ha gli assi paralleli ad x, y, e crescenti con k; la ellisse è invece immaginaria se $k < 0$. Segue che tutta la superficie sta al disopra del piano xy.

Il piano $y = 0$ dà come sezione la parabola ($M V M'$)

$$x^2 = 2pz,$$

mentre il piano parallelo $y = k$ dà pure una parabola

$$x^2 = 2pz - \frac{pk^2}{q}.$$

Questa, colla traslazione di assi $x = X$, $z = Z + \frac{k^2}{2q}$, si riconosce essere uguale alla precedente, ed aver per vertice il punto (nuova origine) $x = 0$, $y = k$, $z = \frac{k^2}{2q}$, il cui luogo (al variare di k) è la curva $x = 0$, $y^2 = 2qz$.

Ora quest'ultima curva è la parabola ($N\,V\,N'$) intersezione del paraboloide (I) col piano $x = 0$; i piani paralleli $x = k$ segano poi la superficie lungo parabole uguali a quella, aventi i vertici sulla parabola $M\,V\,M'$ sopra considerata.

Segue di qua che il paraboloide ellittico può costruirsi così: si assumano due parabole invariabili di forma $M\,V\,M'$, $N\,V\,N'$, e si dispongano anzitutto in modo che esse abbiano lo stesso vertice V, lo stesso asse Vz, diretto ugualmente, ed i rispettivi piani perpendicolari; si tenga poi fissa una delle due parabole, e si faccia variar l'altra con moto traslatorio (cioè parallelamente a sè stessa), in modo che il suo vertice percorra la parabola fissa; la parabola mobile descriverà il paraboloide.

Riprendiamo l'equazione (I); se $p = q$ essa diviene

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

e rappresenta un paraboloide *rotondo* intorno all'asse z (n. 113), generato da una parabola ruotante intorno al suo asse.

349. Paraboloide iperbolico. — II) Se, nella (2), è $m > 0$, $n < 0$, porremo $m = \frac{1}{p}$, $n = -\frac{1}{q}$, dove p, q sono ancora quantità *positive*, e scriveremo quell'equazione così:

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Il piano $z = 0$ sega la superficie lungo due rette reali ($H\,V\,H'$, $K\,V\,K'$) uscenti dal vertice V, aventi, su quel piano, le equazioni

$$\frac{x}{\sqrt{p}} \pm \frac{y}{\sqrt{q}} = 0.$$

Il punto V dunque, come ogni altro punto della superficie, è iperbolico, ed il paraboloide (II) è *iperbolico* (o *rigato*). Un piano parallelo $z = k$ lo sega lungo la iperbole

$$\frac{x^2}{2pk} - \frac{y^2}{2qk} = 1,$$

il cui asse trasverso è parallelo ad x se $k > 0$ (come nella iperbole $P\,N\,Q\;P'\,N'\,Q'$), ed è invece parallelo ad y se $k < 0$ (come nell'iperbole

$R\,T\,R'\;S\,U\,S'$); in ogni caso l'asse trasverso va crescendo mentre k cresce in valore assoluto.

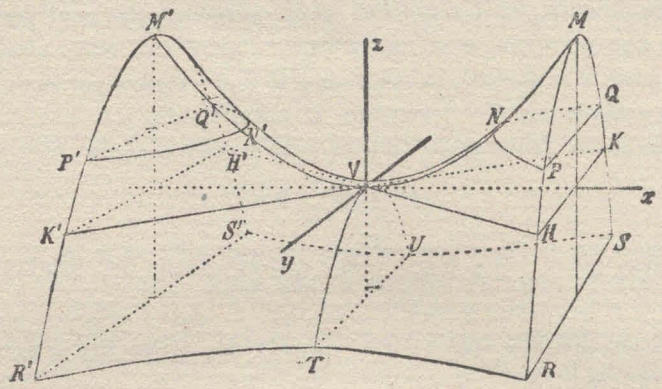
Il piano $y = 0$ sega la superficie lungo la parabola $(M\,V\,M')$

$$x^2 = 2\,p\,z,$$

di cui l'asse coincide con z; precisamente, la porzione di asse interna alla curva è la semiretta positiva z. I piani paralleli segano il paraboloide lungo parabole uguali e similmente poste, i cui vertici formano la parabola $(T\,V\,U)$

$$y^2 = -2\,q\,z$$

che è sezione del paraboloide col piano $x = 0$. Anche questa parabola ha l'asse sopra la retta z; ma ora (essendo negativo il coefficiente $-2\,q$) è interna alla curva la semiretta negativa z. Finalmente, i piani paral-



leli $x = \text{cost.}$ segano la superficie lungo parabole uguali e similmente poste all'ultima considerata (come, ad es., la $R\,M\,S$ o $R'\,M'\,S'$), i vertici delle quali costituiscono la parabola $M\,V\,M'$, di cui sopra si è discorso.

Risulta di qua che anche il paraboloide iperbolico può esser generato mediante la traslazione di una parabola rigida, in modo analogo a quello visto per il paraboloide ellittico; colla differenza che qui la parabola mobile, ad es. $U\,V\,T$, e la fissa, ad es. $M\,V\,M'$, hanno gli assi diretti in verso opposto.

Per procurarci le equazioni delle rette di un paraboloide iperbolico scriveremo la (II) sotto la forma

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\,z.$$

Si vede allora che il paraboloide contiene le infinite rette rappresentate, al variare di λ, dalla coppia di equazioni

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 2\,\lambda\,z, \qquad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = \frac{1}{\lambda},$$

come pure le infinite rette rappresentate, al variare di μ, dalle equazioni

$$\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=\mu, \qquad \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=\frac{2}{\mu}z.$$

Le rette del primo sistema sono tutte parallele al piano $\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0$; quelle del secondo sistema sono parallele al piano $\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0$. I due piani diconsi *piani direttori* del paraboloide; le loro rette all'infinito appartengono alla superficie, e precisamente al secondo ed al primo sistema.

Poichè due rette di uno stesso sistema di una quadrica rigata sono segate dalle rette dell'altro sistema in punteggiate proiettive (n. 364), e tra queste rette vi è ora una retta impropria, segue (n. 173, *b*)) che *due rette di uno stesso sistema di un paraboloide iperbolico sono segate in parti proporzionali dalle rette dell'altro sistema:* e, viceversa, le rette che congiungono punti omologhi di due punteggiate simili (od uguali) a sostegni sghembi costituiscono un paraboloide iperbolico.

Un paraboloide iperbolico non può mai esser rotondo, giacchè le sue sezioni piane sono soltanto iperboli o parabole (n. 338), non mai cerchi.

350. Alcune formole relative all'equazione ridotta dei paraboloidi. — Limitiamoci a ricordare che, data l'equazione di un paraboloide

$$\frac{x^2}{p}\pm\frac{x^2}{q}=2z, \tag{1}$$

il *piano tangente* alla superficie nel punto (x', y', z') (o il piano polare del detto punto) ha l'equazione (n. 305)

$$\frac{xx'}{p}\pm\frac{yy'}{q}=z+z', \tag{2}$$

e la normale nel punto stesso (o la perpendicolare dal punto al piano polare) ha le equazioni

$$\frac{p(x-x')}{x'}=\pm\frac{q(y-y')}{y'}=-(z-z'). \tag{3}$$

* La *equazione tangenziale* del paraboloide, in coordinate u, v, w di piani, si riconosce essere (n. 309)

$$pu^2\pm qv^2=2w. \tag{4}$$

351. Effetto di particolari trasformazioni di coordinate sulla equazione di una quadrica. — Nel n. 341 abbiamo visto quali termini entrino nell'equazione di una quadrica riferita a particolari sistemi di

coordinate. Rimane però da esaminare come si possano calcolare i coefficienti della equazione nominata, quando la quadrica sia inizialmente data mediante l'equazione generale

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + \ldots + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{14}x + \ldots + a_{44} = 0;$$

rimane, in sostanza, da eseguire la trasformazione di coordinate, con cui si passa dall'antico sistema generale x, y, z ad un nuovo sistema particolare X, Y, Z. Riserbandoci di indicare un metodo che dispensi dai calcoli laboriosi a cui la trasformazione diretta condurrebbe, notiamo alcuni casi ove il risultato è facilmente prevedibile (cfr. n. 277).

I. *Una trasformazione di coordinate, nella quale muti l'origine ma non le direzioni degli assi, lascia inalterati i coefficienti dei termini a secondo grado nell'equazione di una quadrica.*

Una siffatta trasformazione è espressa infatti dalle formole (n. 99)

$$x = \alpha + X, \quad y = \beta + Y, \quad z = \gamma + Z,$$

dove α, β, γ sono costanti; eseguendo queste sostituzioni nella (1), sviluppando e ordinando rispetto ad X, Y, Z, si trova un'equazione del tipo

$$(2) \qquad a'_{11}X^2 + \ldots + 2a'_{12}XY + \ldots + 2a'_{14}X + \ldots + a'_{44} = 0,$$

dove si riconosce essere

$$a'_{ik} = a_{ik}, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

$$a'_{i4} = a_{i1}\alpha + a_{i2}\beta + a_{i3}\gamma + a_{i4}, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$a'_{44} = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{12}\alpha\beta + 2a_{13}\alpha\gamma + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{14}\alpha + 2a_{24}\beta + 2a_{34}\gamma + a_{44}.$$

Le uguaglianze contenute nella prima orizzontale dimostrano il lemma.

II. *Una trasformazione di coordinate, che lasci ferma l'origine, non altera il termine noto dell'equazione di una quadrica.*

Si riconosce direttamente, eseguendo sulla (1) la trasformazione (n. 99)

$$x = \alpha' X + \alpha'' Y + \alpha''' Z,$$
$$y = \beta' X + \beta'' Y + \beta''' Z,$$
$$z = \gamma' X + \gamma'' Y + \gamma''' Z,$$

dove le α, β, γ sono costanti; (cfr. per le coniche, n. 277, II).

III. *Una trasformazione ortogonale, che lasci ferma l'origine, muta il trinomio $x^2 + y^2 + z^2$ nel trinomio $X^2 + Y^2 + Z^2$.*

Infatti entrambi i trinomi esprimono il quadrato della distanza della origine dal punto che ha le antiche coordinate (x, y, z), e le nuove (X, Y, Z).

352. Invarianti di una quadrica rispetto ad una trasformazione ortogonale di coordinate. — Riprendiamo l'equazione di una quadrica

$$(1) \qquad a_{11}x^2 + \ldots + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{14}x + \ldots + a_{44} = 0,$$

e supponiamo che, mediante una qualsiasi trasformazione di coordinate, essa si muti nella

$$(2) \qquad a'_{11}X^2 + \ldots + 2a'_{12}XY + \ldots + 2a'_{14}X + \ldots + a'_{44} = 0.$$

Cerchiamo di formare, coi coefficienti della (1), certe espressioni *invarianti* rispetto alla trasformazione, tali cioè che non mutino valore quando vengano formate coi coefficienti della (2), anzichè coi coefficienti della (1), e ciò qualunque sia la trasformazione impiegata, o la quadrica a cui si applica (cfr. n. 278). Noi però, per maggiore semplicità, ci limiteremo a considerare *trasformazioni ortogonali*. E supporremo anzitutto che la trasformazione con cui si passa dalla (1) alla (2) non alteri l'origine, riserbandoci di togliere poi quest'ultima restrizione.

Tenendo conto delle formole rappresentanti quella trasformazione, e del lemma III (n. 351), possiamo scrivere le seguenti identità:

$$(3) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \ldots + a_{44}$$
$$\equiv a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + 2a'_{12}XY + 2a'_{13}XZ + 2a'_{23}YZ + \ldots + a'_{44}$$

$$(4) \qquad x^2 + y^2 + z^2 \equiv X^2 + Y^2 + Z^2,$$

nella prima delle quali è anzi $a_{44} = a_{44}'$ (lemma II, n. 351). Insieme alle due identità scritte sussiste pure la identità che da quelle si ottiene aggiungendo ai due membri della (3) i due membri della (4), moltiplicati per uno stesso parametro arbitrario $-k$:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_{11}-k)x^2 + (a_{22}-k)y^2 + (a_{33}-k)z^2 \\ + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \ldots + a_{44} \\ \equiv (a'_{11}-k)X^2 + (a'_{22}-k)Y^2 + (a'_{33}-k)Z^2 \\ + 2a'_{12}XY + 2a'_{13}XZ + 2a'_{23}YZ + \ldots + a'_{44}. \end{array} \right.$$

I due membri della (5), uguagliati a zero, rappresentano una stessa quadrica Q, riferita una volta agli assi x, y, z, una seconda volta agli assi X, Y, Z, quadrica che varia in un fascio al variare di k. Volendo determinare, ad es., per quali valori di k la quadrica Q divenga un paraboloide, possiamo valerci sia dell'equazione in x, y, z, sia di quella in X, Y, Z. La prima equazione ci fornisce, per k, la equazione di condizione (n. 328, Oss.)

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0,$$

equazione che abbiamo già trovato al n. 336 ed abbiamo indicato con $\Delta(k) = 0$, e che, sviluppata, assume la forma

$$(7) \qquad k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0.$$

dove A_{44} è il noto determinante di terzo ordine, e si è posto inoltre

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} I = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ J = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \quad = a_{11}\,a_{22} + a_{11}\,a_{33} + a_{22}\,a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2. \end{array}\right.$$

Se invece avessimo adoperata l'equazione della quadrica Q in X, Y, Z, si sarebbe trovata, per k, la condizione

$$(7')\qquad k^3 - I'k^2 + J'k - A'_{44} = 0,$$

dove I', J', A'_{44} sono ciò che divengono I, J, A_{44} quando si formino colle a'_{ik}, coefficienti della (2), anzichè colla a_{ik}, coefficienti della (1).

Le due equazioni di condizione (7) e (7') devono fornire per k gli stessi valori; esse avranno dunque i coefficienti proporzionali, anzi uguali perchè coincidono i coefficienti di k^3. Sussistono dunque le uguaglianze

$$(9)\qquad I = I', \quad J = J', \quad A_{44} = A'_{44},$$

le quali dicono che le espressioni I, J, A_{44} non mutano valore, sia che vengano formate coi coefficienti della (1), sia coi coefficienti della (2). In breve, quelle espressioni sono *invarianti* relativi ad una trasformazione ortogonale di coordinate, che non sposti l'origine.

Un quarto invariante si ottiene imponendo alla quadrica variabile Q, sopra considerata, la condizione perchè essa degeneri in un cono. Se si opera sulla equazione di Q in x, y, z, la detta condizione è espressa dall'annullarsi del discriminante del primo membro della (5):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando e mettendo in evidenza il termine con k^3 e il termine noto, che solo interessano nel nostro caso, la detta condizione assume la forma

$$(10)\qquad -a_{44}k^3 + \ldots + A = 0.$$

Operando similmente sulla equazione di Q in X, Y, Z, troviamo l'equazione di condizione

$$(10')\qquad -a'_{44}k^3 + \ldots + A' = 0,$$

dove A' è il discriminante della (2). Poichè la (10) e la (10') devono avere le stesse radici, poichè inoltre a_{44}, a'_{44} sono uguali, come fu già notato, e possono ritenersi diverse da zero (chè altrimenti si aggiungerebbe ai

due membri della (5) una stessa costante non nulla), si conclude che sarà pure

$$A = A'. \tag{11}$$

Vediamo così che le quattro espressioni

$$I,\ J,\ A_{44},\ A \tag{12}$$

non variano quando mutano gli assi coordinati ortogonali, restando ferma l'origine. Ma quelle espressioni non si alterano nemmeno per una traslazione di assi. Ciò è chiaro per le prime tre, le quali dipendono dai soli coefficienti dei termini a secondo grado della (1), coefficienti che non si alterano in conseguenza di una traslazione di assi (n. 351, lemma II). Quanto ad A, l'asserzione si verifica direttamente collo stesso procedimento che fu usato nella teoria delle coniche (n. 278, pag. 529), formando cioè il determinante A' colle espressioni delle a'_{ik} contenute nelle formole del n. 351, I, e mostrando che, mediante semplici trasformazioni, A' si riduce ad A.

Visto ciò, si conclude (con CAUCHY, 1826) che le espressioni (12) sono effettivamente invarianti rispetto ad *ogni* trasformazione ortogonale di coordinate. In parole:

Nel passaggio da assi ortogonali ad assi ortogonali rimangono immutati i valori delle quattro espressioni seguenti, formate coi coefficienti dell'equazione di una quadrica:

1) *il discriminante A dell'equazione* (*invariante biquadratico*);

2) *il complemento algebrico A_{44} del termine noto entro al discriminante* (*invariante cubico*);

3) *la somma J dei complementi algebrici degli elementi principali in A_{44}* (*invariante quadratico*);

4) *la somma I degli elementi principali di A_{44}, ossia la somma dei coefficienti dei quadrati nell'equazione della quadrica* (*invariante lineare*).

Naturalmente (come fu già notato in geometria piana, n. 278, Oss.) l'invarianza delle quattro espressioni suddette vale, ove si paragonino due equazioni (1), (2), dedotte una dall'altra mediante una trasformazione ortogonale, *avendo cura di non introdurre nè togliere fattori.*

Osservazione. — Abbiamo già notato che l'equazione (6), da cui hanno origine tre invarianti, coincide coll'equazione (5) del n. 336, da cui dipendono i piani principali di una quadrica. Di questa coincidenza non dobbiamo sorprenderci. Infatti, nel presente numero, noi abbiamo considerato un fascio di quadriche Q, secanti sul piano all'infinito un fascio di coniche determinato dalla conica all'infinito della quadrica (1) ($k = 0$) e dall'assoluto ($k = \pm\infty$). Chiedere quali quadriche Q divengano paraboloidi, equivale a chiedere quali coniche del detto fascio si spezzino in due rette; la (6) esprime appunto la condizione di spezzamento.

Ora si è visto (n. 340) che anche il problema dei piani principali di una quadrica porta a determinare le coniche degeneri del fascio nominato.

Dunque le due questioni trattate nel n. 336 e nel numero presente, sebbene in apparenza molto distinte, portano ad uno stesso problema di geometria piana. Aggiungeremo qui che, come sono invarianti i coefficienti dell'equazione $\Delta(k) = 0$, così ne sono invarianti le radici k_1, k_2, k_3, di cui ora vedremo il significato geometrico. Esse però non si possono esprimere razionalmente mediante i coefficienti della (1), sono, come talora si dice, *invarianti irrazionali.*

353. Calcolo dei coefficienti dell'equazione ridotta di una quadrica col mezzo degli invarianti. — Ritornando ora al problema enunciato nelle prime righe del n. 351, proponiamoci di convertire in forma ridotta l'equazione data di una quadrica, riferita ad un sistema qualsiasi di coordinate ortogonali:

$$a_{11}x^2 + \ldots + 2a_{12}xy + \ldots + 2a_{14}x + \ldots + a_{44} = 0. \tag{1}$$

Calcolati gli invarianti

$$I,\quad J,\quad A_{44},\quad A$$

della (1) (n. 352), che sono *quantità note,* dobbiamo distinguere due casi.

α) *La quadrica* (1) *abbia centro proprio;* sia dunque $A_{44} \neq 0$. Come equazione ridotta prenderemo l'equazione normale

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + a'_{44} = 0, \tag{2}$$

che la quadrica assume ove venga riferita ai suoi piani principali; i coefficienti della (2) sono incogniti. Per calcolarli, formiamo gli invarianti della (2); essi risultano espressi da

$$I' = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33}, \qquad J' = a'_{11}a'_{22} + a'_{11}a'_{33} + a'_{22}a'_{33},$$
$$A'_{44} = a'_{11}a'_{22}a'_{33}, \qquad A' = a'_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44}.$$

Paragonandoli cogli invarianti della (1), troviamo quattro equazioni fra quattro incognite:

$$\begin{cases} a'_{11} + a'_{22} + a'_{33} = I, \\ a'_{11}a'_{22} + a'_{11}a'_{33} + a'_{22}a'_{33} = J, \\ a'_{11}a'_{22}a'_{33} = A_{44}, \\ a'_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44} = A. \end{cases} \tag{3}$$

Le ultime due ci dànno

$$a'_{44} = \frac{A}{A_{44}}, \tag{4}$$

mentre le prime tre ci dicono che a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} sono le radici della nota equazione cubica

$$k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0, \tag{5}$$

ossia (nn. 336, 352):

$$(6) \qquad \Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0.$$

Indicando con k_1, k_2, k_3 le radici della (5) o (6), che sappiamo già esser reali (n. 336), *l'equazione normale della nostra quadrica assume la forma*

$$(7) \qquad k_1 X^2 + k_2 Y^2 + k_3 Z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0.$$

β) *La quadrica* (1) *sia un paraboloide;* si abbia dunque $A_{44} = 0$. Come equazione ridotta prenderemo la

$$(2') \qquad a'_{11} X^2 + a'_{22} Y^2 + 2 a'_{34} Z = 0,$$

che il paraboloide assume ove venga riferito ai due piani principali ed al piano tangente nel vertice. Calcoliamo gli invarianti della (2'), ed uguagliamoli agli invarianti già noti della (1); trascurando la relazione $A_{44} = A'_{44}$ che diviene nel caso presente $0 = 0$, otteniamo le tre relazioni

$$(3') \qquad a'_{11} + a'_{22} = I, \qquad a'_{11} a'_{22} = J, \qquad -a'_{11} a'_{22} a'^2_{34} = A.$$

Le ultime due ci danno

$$(4') \qquad a'_{34} = \pm \sqrt{-\frac{A}{J}},$$

(dove il segno del radicale è indifferente, potendosi mutare il segno di a'_{34} coll'invertire il verso positivo sull'asse Z). La prima e seconda delle (3') ci dicono poi che a'_{11}, a'_{22} sono radici dell'equazione quadratica

$$(5') \qquad k^2 - I k + J = 0,$$

o, se si vuole, sono le due radici non nulle, k_1, k_2, della solita equazione cubica $\Delta(k) = 0$, la quale, questa volta, ha come terza radice $k_3 = 0$ (n. 338).

L'equazione ridotta del paraboloide è dunque

$$(7') \qquad k_1 X^2 + k_2 Y^2 \pm 2 \sqrt{-\frac{A}{J}} Z = 0.$$

Osservazione I. — I procedimenti ora indicati per formare l'equazione ridotta di una quadrica non degenere si applicano, almeno in parte, anche alle quadriche degeneri. Così, per il *cono a vertice proprio,* la cui equazione normale ha la forma

$$a'_{11} X^2 + a'_{22} Y^2 + a'_{33} Z^2 = 0,$$

si trova, col ragionamento fatto in α), che a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} sono le radici k_1, k_2, k_3 della equazione cubica $\Delta(k) = 0$.

Per il *cilindro ellittico* o *iperbolico,* che ha l'equazione normale

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{44} = 0,$$

risulta che a'_{11} e a'_{22} sono le due radici non nulle dell'equazione $\Delta(k) = 0$, di cui la terza radice è nulla, perchè $A_{44} = 0$; ma il termine noto a'_{44} non si può calcolare mediante la espressione (4), la quale assume ora la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; si giunge a calcolarlo mediante un altro procedimento, che esporremo nell'esercizio 4) dopo il n. 356.

Finalmente, per il *cilindro parabolico,* la cui equazione può ridursi al tipo

$$a'_{11}X^2 + 2a'_{34}Z = 0,$$

si vede che a'_{11} è l'unica radice non nulla dell'equazione (6), la quale ha, questa volta, due radici nulle, perchè $J = A_{44} = 0$. Il coefficiente a'_{34} non viene determinato dalla espressione (4'), che assume ora l'aspetto $\frac{0}{0}$; se ne calcolerà il valore eseguendo direttamente la trasformazione di coordinate.

Lasciamo al lettore le analoghe considerazioni per le quadriche spezzate in due piani.

Osservazione II. — Se l'equazione $\Delta(k) = 0$ ha una radice doppia $k_1 = k_2$, la quadrica (7), o (7'), risulta rotonda intorno all'asse Z; e se la $\Delta(k) = 0$ ha una radice tripla $k_1 = k_2 = k_3$, la quadrica risulta una sfera. Rimangono così confermate, per altra via, le asserzioni del n. 339, Oss.

354. Classificazione delle quadriche partendo dalla equazione generale. — I risultati del numero precedente possono riassumersi così.

Data l'equazione generale di una quadrica

$$a_{11}x^2 + \ldots + a_{44} = 0, \tag{1}$$

si formi l'equazione cubica

$$k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0, \tag{5}$$

ossia

$$\Delta(k) = 0, \tag{6}$$

e se ne calcolino le radici k_1, k_2, k_3.

α) Se queste sono tutte diverse da zero, se dunque $A_{44} \neq 0$, l'equazione della quadrica può porsi sotto la forma

$$k_1X^2 + k_2Y^2 + k_3Z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0. \tag{7}$$

Ricordando ora la discussione fatta al n. 342, si vede che, nella ipotesi $A \neq 0$, la superficie è un ellissoide reale, un iperboloide ad una falda,

un iperboloide a due falde, od un ellissoide immaginario, secondo che tre, due, una, o nessuna delle radici della (6) hanno il segno di $-\frac{A}{A_{44}}$. Se invece $A = 0$, la quadrica è un cono immaginario o reale, secondo che le dette radici hanno tutte lo stesso segno, oppur no.

β) Se una delle radici della (6) è nulla, ad es. $k_3 = 0$, ed è quindi $A_{44} = 0$, la quadrica è un paraboloide; la sua equazione, nella ipotesi $A \neq 0$, può porsi sotto la forma

$$k_1 X^2 + k_2 Y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{A}{J}}\, Z = 0, \tag{7'}$$

sicchè il paraboloide è ellittico od iperbolico, secondo che k_1 e k_2 hanno lo stesso segno, oppur no. Se invece $A = 0$, la quadrica è un cilindro, la cui equazione può porsi sotto la forma

$$k_1 X^2 + k_2 Y^2 + a'_{44} = 0$$

quando k_1, k_2 siano diverse da zero; il cilindro è ellittico od iperbolico, secondo che k_1, k_2 hanno lo stesso segno, oppur no. Finalmente, se due radici della (6) si annullano, ad es. $k_2 = k_3 = 0$, la quadrica è un cilindro parabolico.

Tutta questa discussione (ove son lasciati da parte i casi di spezzamento della quadrica in piani; n. 315) può riassumersi nella tabella seguente. Nella quale è da avvertire che, *ove si incontrino, in una stessa orizzontale, due o più doppi segni, devono prendersi contemporaneamente i segni superiori, o gl'inferiori.*

k_1	k_2	k_3	A_{44}	A	
$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$+$	Ellissoide immaginario.
				0	Cono immaginario.
				$-$	Ellissoide reale.
$\pm$	$\mp$	$\mp$	$\pm$	$+$	Iperboloide ad una falda.
				0	Cono reale.
				$-$	Iperboloide a due falde.
$\pm$	$\pm$	0	0	$-$	Paraboloide ellittico.
				0	Cilindro ellittico.
$\pm$	$\mp$	0	0	$+$	Paraboloide iperbolico.
				0	Cilindro iperbolico.
$\pm$	0	0	0	0	Cilindro parabolico.

Le radici indicate con k_1, k_2, k_3 si intendono disposte in tal ordine da verificare uno dei casi contenuti nella tabella, il che è sempre possibile.[1]

[1] Nella formazione della tabella, il lettore osserverà che il segno di A_{44} dipende dai segni di k_1, k_2, k_3, perchè è $A_{44} = k_1 k_2 k_3$ (vedi n. 353, eq. (5)); inoltre che, quando $k_3 = 0$, e $k_1 k_2 = J$ (n. 353, eq. (5')), il segno di A è opposto al segno di $k_1 k_2$, come risulta dalla (4') del n. 353, la quale deve fornire per a'_{34} un valore reale.

Delle tre radici k_1, k_2, k_3 dell'equazione

$$k^3 - Ik^2 + Jk - A_{44} = 0, \tag{5}$$

interessano, come si disse, solo i segni. Ora, poichè l'equazione ha tutte le sue radici reali, tante sono le radici positive, quante sono le variazioni di segno nella serie dei coefficienti $1, -I, J, -A_{44}$,[1] ossia, quante sono le permanenze nella serie

$$+1, \quad I, \quad J, \quad A_{44}.$$

L'esame di tutti i casi possibili conduce, tenendo conto della tabella precedente, a stabilire i seguenti criteri, dove, relativamente ai doppi segni, è rispettata la convenzione fatta sopra:

I	J	A_{44}	A	
$\pm$	$+$	$\pm$	$+$	Ellissoide immaginario.
			0	Cono immaginario.
			$-$	Ellissoide reale.
altri casi		$\pm$	$+$	Iperboloide ad una falda.
			0	Cono reale.
			$-$	Iperboloide a due falde.
$\pm$	$+$	0	$-$	Paraboloide ellittico.
			0	Cilindro ellittico.
arbitrario	$-$	0	$+$	Paraboloide iperbolico.
			0	Cilindro iperbolico.
$\pm$	0	0	0	Cilindro parabolico.

355. Significato del segno del discriminante. — Dall'esame delle tabelle precedenti risulta che le quadriche per cui $A > 0$ sono o immaginarie (ellissoide immaginario), o rigate (iperboloide ad una falda, paraboloide iperbolico), mentre le quadriche per cui $A < 0$ sono reali non rigate (ellissoide reale, iperboloide a due falde, paraboloide ellittico). Si ha dunque il seguente notevole criterio:

Una quadrica non degenere, a punti reali, è rigata o non rigata, secondo che il discriminante di essa è positivo o negativo.

Ora questo teorema può pure dimostrarsi, in modo diretto, per la via seguente.[2]

Data l'equazione generale di una quadrica a punti reali, il cui discriminante A sia diverso da zero, si trasportino gli assi coordinati (supposti ortogonali) in guisa che l'origine O si porti in un punto O' della superficie, ed il piano xy si porti nel piano XY ivi tangente, il sistema restando

[1] V. ad es. CAPELLI, *Istituzioni di analisi algebrica*, 1902, pag. 382.

[2] BIANCHI, *Lezioni di geometria analitica*, 1915, pag. 420.

ortogonale; con ciò il valore del discriminante non muta (n. 352). La nuova equazione della superficie mancherà del termine noto e dei termini lineari in X, Y (perchè la parte a primo grado, uguagliata a zero, deve rappresentare il piano tangente nell'origine, che è $Z = 0$); l'equazione avrà dunque la forma

$$(1) \qquad a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33}Z^2 + 2a'_{12}XY + 2a'_{13}XZ + 2a'_{23}YZ + 2a'_{34}Z = 0.$$

Calcoliamo il discriminante di questa equazione, ed uguagliamolo ad A; sarà

$$A = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & 0 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ 0 & 0 & a'_{43} & 0 \end{vmatrix} = -a'^2_{34}(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}).$$

Vediamo dunque che A ha lo stesso segno della espressione $a'^2_{12} - a'_{11}a'_{22}$. Se ora cerchiamo la intersezione della quadrica (1) col piano tangente $Z = 0$, troviamo la coppia di rette

$$a'_{11}X^2 + 2a'_{12}XY + a'_{22}Y^2 = 0,$$

ossia

$$\frac{X}{Y} = \frac{-a'_{12} \pm \sqrt{a'^2_{12} - a'_{11}a'_{22}}}{a'_{11}},$$

coppia che è reale od immaginaria, secondo che l'espressione sotto il radicale risulta positiva o negativa. Dunque il punto O', che è un punto arbitrario della superficie, è iperbolico od ellittico, secondo che A è positivo o negativo; il che si doveva appunto dimostrare.

Nella dimostrazione figura la ipotesi che il sistema di coordinate, cui vien riferita la quadrica, sia ortogonale. Sarebbe facile però stabilire che il teorema sussiste pure in coordinate oblique; sussiste anzi, in generale, quando la quadrica si riferisca ad un sistema di coordinate proiettive qualsiasi. Ma su questa estensione, che è legata colle considerazioni del numero seguente, non vogliamo qui trattenerci.

356. Classificazione proiettiva delle quadriche. — La classificazione delle quadriche contenuta nelle tabelle precedenti è fondata sopra criteri metrici. Sotto l'aspetto proiettivo, quando si riguardino come equivalenti due quadriche trasformabili l'una nell'altra mediante una collineazione reale (rappresentata cioè da una sostituzione lineare a coefficienti reali), si è condotti a distinguere un minor numero di tipi. Precisamente: *le quadriche non degeneri, sotto l'aspetto proiettivo, si distribuiscono nelle tre famiglie seguenti:* 1) *quadriche a punti immaginari;* 2) *quadriche a punti reali ellittici* (*o non rigate*); 3) *quadriche a punti reali iperbolici* (*o rigate*). Ogni quadrica

di una di queste famiglie è trasformata da una collineazione in una quadrica della famiglia stessa; ciò è evidente, quando si pensi che una collineazione muta punti e rette reali di una quadrica in punti e rette reali della quadrica trasformata. Ma, viceversa, si dimostra (e qui basti l'enunciato) che, *date due quadriche di una stessa famiglia, si può sempre formare (e in infiniti modi) una collineazione che muti l'una quadrica nell'altra.* Per esempio ogni quadrica reale non rigata (ellissoide reale, iperboloide a due falde, paraboloide ellittico) può esser sempre trasformata in una sfera reale, mediante una collineazione (cfr. n. 327, es. 3), 4)).

La prima e la terza delle tre famiglie sopra indicate corrispondono a valori positivi del discriminante A; per la seconda famiglia invece è $A < 0$.

Esercizi. I. — 1) Determinare i piani principali delle quadriche seguenti, e ridurne le equazioni a forma canonica:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 6x - 6y + 1 = 0,$$
$$10(x^2 + y^2 + z^2) + 8xz + 6yz - 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xz + 2yz - 1 = 0,$$
$$xy + xz + yz - 4 = 0,$$
$$x^2 + yz \pm 1 = 0,$$
$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 4y - z + 1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y - 2z = 0.$$

2) Ogni iperboloide riferito a tre asintoti, come assi coordinati, ha un'equazione della forma

$$a_{12}xy + a_{13}xy + a_{23}yz + k = 0;$$

si dimostri che l'iperboloide (anche nella ipotesi di assi obliqui) è rigato o no, secondo che il prodotto $a_{12}a_{13}a_{23}$ ha il segno di k o il segno opposto. (Si seghi la superficie col piano tangente nel punto all'infinito dell'asse z).

3) Si dimostri che la superficie

$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1$$

è un iperboloide ad una o due falde, secondo che la somma $a + b + c$ è positiva o negativa, ed è un cilindro iperbolico se quella somma è nulla. La condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie sia rotonda è $ab + bc + ca = 0$.

4) Per determinare il termine noto dell'equazione canonica di un cilindro ellittico od iperbolico (n. 353, Oss. I), di cui è data l'equazione generale, si trasportino parallelamente due piani coordinati, ad es. xz, yz, lasciando fisso il terzo xy, e si scelga come nuova origine il centro della conica che il cilindro sega sul piano xy. Il termine noto della nuova equazione (che si può calcolare col mezzo degli invarianti della detta conica) è il termine noto dell'equazione canonica richiesta (n. 351, II). Si applichi questo procedimento al cilindro

$$x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z = 5.$$

II. — 5) In un ellissoide (di semiassi a, b, c) è costante

$$\left(= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

la somma dei quadrati dei valori inversi di tre semidiametri mutuamente perpendicolari (CHASLES). Come si esprime questa somma mediante gli invarianti della superficie? (cfr. n. 281, es. 12)) [1]

6) È pure costante $\left(= 4\left(\frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} + \frac{1}{a^2 b^2}\right)\right)$ la somma dei quadrati dei valori inversi delle aree di tre triangoli, determinati da tre semidiametri mutuamente perpendicolari presi a due a due (CHASLES).

7) Nello studio delle proprietà metriche di un ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

conviene adoperare le seguenti equazioni parametriche:

$$x = a\cos\alpha, \qquad y = b\cos\beta, \qquad z = c\cos\gamma,$$

dove α, β, γ sono gli angoli che una retta variabile forma con tre rette mutuamente perpendicolari. A queste formule si arriva direttamente, se si stabilisce l'affinità $x = aX$, $y = bY$, $z = cZ$ tra l'ellissoide dato e la sfera $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Mediante quella affinità il punto sopra considerato dell'ellissoide si muta nel punto $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ della sfera.

8) A tre punti dell'ellissoide, che siano estremi di tre semidiametri mutuamente coniugati, corrispondono, nell'affinità nominata, tre punti dalla sfera appartenenti a tre raggi mutuamente perpendicolari. Dalle formole esprimenti questo fatto si ricavino i seguenti tre teoremi, che estendono all'ellissoide le relazioni di APOLLONIO per la ellisse (n. 281).

9) In un ellissoide è costante $(= a^2 + b^2 + c^2)$ la somma dei quadrati di tre semidiametri mutuamente coniugati (LIVET).

10) È costante $\left(= \frac{1}{4}(b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2)\right)$ la somma dei quadrati delle aree di tre triangoli determinati da tre semidiametri mutuamente coniugati, presi a due a due (BINET).

11) È costante $\left(= \frac{1}{6} abc\right)$ il volume del tetraedro, di cui tre spigoli sono tre semidiametri mutuamente coniugati (LIVET).

12) È costante la somma dei quadrati delle proiezioni ortogonali di tre semidiametri coniugati sopra una retta (PETIT), o sopra un piano assegnato (CHASLES).

13) L'affinità che lega un ellissoide ad una sfera permette di dedurre il volume di quello dal volume di questa. Si trova così che il volume racchiuso da un ellissoide di semiassi a, b, c, è $\frac{4}{3}\pi abc$ (cfr. n. 294).

---

[1] I risultati relativi all'ellissoide, contenuti in questo e nei successivi esercizi, si estendono alle altre quadriche a centro pur di considerare i semidiametri in valore *algebrico* (reale o immaginario).

III. — 14) Se p è la distanza del centro da un piano tangente all'ellissoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, e λ, μ, ν sono gli angoli che la normale al piano forma cogli assi, si ha

$$p^2 = a^2\cos^2\lambda + b^2\cos^2\mu + c^2\cos^2\nu.$$

Applicando questa formola a tre piani tangenti, mutuamente perpendicolari, risulta

$$p^2 + p_1^2 + p_2^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

e si conchiude: «il luogo dei punti da cui si possono condurre ad un ellissoide terne di piani tangenti perpendicolari è una sfera di raggio $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, concentrica all'ellissoide» (MONGE); (cfr. n. 281, es. 22)). Il cono circoscritto all'ellissoide, da un punto qualsiasi della sfera, è tale che ad esso sono circoscritti infiniti triedri trirettangoli.

15) Il teorema precedente vale anche per i due iperboloidi $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}-\frac{z}{c^2}=1$, per i quali la sfera di MONGE ha il raggio $\sqrt{a^2\pm b^2-c^2}$, e può quindi essere immaginaria. La sfera di MONGE non sega in punti reali l'ellissoide, o l'iperboloide a due falde. Essa sega l'iperboloide ad una falda lungo una curva reale, se $a>c$; «questa curva (del quarto ordine) è il luogo di un punto da cui escono due rette della superficie perpendicolari tra loro».

16) Rispetto al paraboloide $\frac{x^2}{p^2}\pm\frac{y^2}{q^2}=2z$, il luogo dei punti da cui si possono circoscrivere terne di piani tangenti mutuamente perpendicolari è il piano $2z+p\pm q=0$. Esso sega il paraboloide iperbolico lungo una iperbole, in ogni punto della quale si incontrano due rette della superficie mutuamente perpendicolari.

IV. — 17) Se in un cono si può iscrivere un triedro trirettangolo, è nullo l'invariante lineare I; viceversa, se $I=0$, si possono iscrivere nel cono infiniti triedri trirettangoli, donde risulta che «se in un cono si può iscrivere un triedro trirettangolo, si possono iscrivere nel cono infiniti triedri siffatti» (cfr. n. 318, es. 19)). (Per dimostrare il teorema diretto, si riferisca il cono al triedro trirettangolo; per l'inverso, si assuma una generatrice come asse x, e si ricordi il n. 280).

18) Dicesi *equilatero* un cono, od una quadrica (iperboloide o paraboloide iperbolico) che abbia nullo l'invariante lineare. Il cono asintotico di un iperboloide equilatero è equilatero. I piani direttori di un paraboloide equilatero sono perpendicolari. La sezione piana di un iperboloide (o cono) equilatero con un piano perpendicolare ad un asintoto (o ad una generatrice) è una iperbole equilatera; tale è pure la sezione di un paraboloide equilatero con ogni piano normale all'asse.

19) In un iperboloide equilatero ad una falda ciascuna generatrice è segata ortogonalmente da due direttrici, che formano tra loro un angolo retto. La direttrice e le due generatrici, che son parallele a quelle tre rette, formano con esse un seilatero semplice sghembo, i cui lati appartengono alla superficie, ed i cui angoli sono retti; lati opposti del seilatero sono paralleli.

20) In un paraboloide (rigato) equilatero la generatrice (o direttrice) uscente dal vertice sega ortogonalmente tutte le direttrici (o generatrici). Viceversa, se una retta di un paraboloide ha questa proprietà, esso è equilatero.

21) Segue che le perpendicolari calate sopra una retta dai punti di una retta sghemba con quella formano un paraboloide equilatero, cui appartengono le rette date.

22) In un fascio di quadriche vi è, in generale, una sola quadrica equilatera; se ve ne son due, ogni quadrica del fascio è equilatera. Se le quadriche del fascio sono coni equilateri collo stesso vertice, le quattro generatrici base del fascio formano un quadrispigolo in cui le coppie di faccie opposte si segano ortogonalmente. Ad un triedro generico si possono circoscrivere infiniti coni equilateri; questi contengono tutti la retta ove si segano i piani condotti per i tre spigoli perpendicolarmente alle facce opposte (cfr. n. 260, es. 37)).

23) Un cono (od un iperboloide) dicesi *dualmente equilatero* se è nullo il suo invariante quadratico J. Ad un cono siffatto possono circoscriversi infiniti triedri trirettangoli; e viceversa. Un iperboloide dualmente equilatero possiede infinite terne di piani asintotici mutuamente perpendicolari. La sfera di Monge (es. 14), 15)) di un tale iperboloide ha raggio nullo.

24) Il luogo dei vertici dei coni dualmente equilateri circoscritti ad una quadrica è la sfera di Monge (es. 14)). Partendo dalla condizione $J = 0$ ora esposta, si ritrovi l'equazione di questa sfera.

25) Il luogo di un punto da cui si possono condurre ad una quadrica a centro terne di tangenti mutuamente perpendicolari, ossia il luogo dei vertici dei coni equilateri circoscritti alla quadrica, è una quadrica concentrica alla data, cogli assi ugualmente diretti. Se la quadrica primitiva è un paraboloide, il detto luogo è un paraboloide rotondo collo stesso asse.

V. — 26) In una quadrica a centro il segmento di una normale qualsiasi compreso fra il piede ed un piano principale, moltiplicato per la distanza del centro dal relativo piano tangente, dà un prodotto costante (uguale al quadrato del semiasse perpendicolare al piano principale considerato).

27) Segue che i segmenti di una normale compresi fra il piede e le intersezioni coi piani principali hanno rapporti che non variano al variare della normale.

28) Da un punto generico S dello spazio si conducano le normali ad una quadrica a centro. Dalle equazioni, cui devono soddisfare le coordinate dei piedi di quelle, si deduca che per questi punti passano tre cilindri di secondo ordine, di cui ciascuno contiene uno degli assi, i punti all'infinito degli altri due assi, ed il punto S. Due di questi cilindri hanno in comune una retta impropria ed una curva sghemba del 3° ordine, la quale contiene i piedi delle dette normali. Osservando che i due cilindri e la quadrica data hanno in comune complessivamente otto punti, si conclude che «per un punto si possono condurre sei normali ad una quadrica a centro, i cui piedi stanno sopra una curva del terzo ordine che passa per il punto dato, per il centro e per i punti all'infinito degli assi».

Per i sei piedi (e per quella curva) passano infinite quadriche, le cui equazioni si ottengono combinando linearmente le equazioni dei tre cilindri; tra queste quadriche si trova un cono, col vertice nel centro della quadrica data, ed un

cono col vertice in S. Segue: « le sei normali, condotte da un punto ad una quadrica a centro, appartengono ad un cono (equilatero) del secondo ordine col vertice in quel punto » (CHASLES).

29) Per un punto generico dello spazio si possono condurre cinque normali ad un paraboloide; il cono del secondo ordine che esse determinano contiene la parallela all'asse del paraboloide condotta per il punto.

CAPITOLO V.

Sezioni circolari. — Quadriche confocali.

357. Sezioni circolari di una quadrica; ricerca sintetica. — Esporremo in quest'ultimo Capitolo alcune proprietà metriche, che mettono in luce le relazioni di una quadrica col cerchio assoluto dello spazio.

Proponiamoci anzitutto il problema delle *sezioni circolari*: « data una quadrica (che non sia una sfera), determinare i piani che la segano lungo cerchi, o, brevemente, i *piani ciclici* ». Ricordiamo che la conica K, segata sopra una quadrica da un piano π, ha come punti all'infinito le intersezioni della retta all'infinito p_∞ del piano colla conica all'infinito H_∞ della superficie. Ora, se K è un cerchio, quei punti all'infinito devono esser i punti ciclici di π (n. 129, Oss.), devono adunque trovarsi (oltre che su H_∞) sul cerchio assoluto dello spazio, Ω_∞, che è il luogo dei punti ciclici di tutti i piani dello spazio. Quei due punti saranno perciò intersezioni delle coniche H_∞, Ω_∞; e la retta p_∞ del piano π richiesto sarà la congiungente di due tali intersezioni.

Ora fu già notato (n. 340) che le due coniche H_∞, Ω_∞ si segano in quattro punti immaginari, i quali si distribuiscono in due coppie (M, M'), (N, N') di punti immaginari coniugati. Il quadrangolo completo, che ha quei punti come vertici, ha due lati opposti reali MM', NN' e gli altri quattro immaginari. È però reale il triangolo diagonale PRS del quadrangolo, ed ha come vertici i punti all'infinito degli assi della quadrica.

Ricordando che ciascuno dei sei lati nel detto quadrangolo è retta impropria di uno, anzi di infiniti piani ciclici paralleli, concludiamo:

Una quadrica è segata lungo cerchi dai piani di sei fasci impropri, dei quali però due soli si compongono di piani reali. I piani di ciascuno dei sei fasci sono paralleli ad uno degli assi della quadrica, mentre ogni asse è parallelo ai piani di due dei sei fasci. In particolare, i piani ciclici reali sono paralleli ad uno stesso asse.

Il risultato vale anche per i coni (a vertice proprio). In particolare, ogni cono reale ammette due serie di sezioni circolari reali, e può quindi

riguardarsi come *cono circolare*, ottenuto mediante la proiezione di un cerchio da un punto esterno al piano di questo.

L'enunciato esige invece qualche avvertenza, sopra cui ritorneremo, nel caso dei paraboloidi. Fermandoci ora sulle quadriche a centro, possiamo anche dire:

Fra i piani diametrali di una quadrica a centro sei, di cui due reali, segano la superficie lungo cerchi; per ogni asse della superficie passano due di quei sei piani; in particolare, per uno degli assi passano i due piani ciclici reali, i quali (come è chiaro) risultano simmetrici rispetto ai due piani principali secantisi lungo quell'asse.

I piani ciclici di un fascio segano la quadrica lungo cerchi, i cui centri stanno sopra il diametro coniugato con quei piani, cioè sulla retta polare della retta impropria comune ai piani stessi (n. 332). Poichè quest'ultima retta passa per il punto improprio di un asse della quadrica, quel diametro giacerà nel piano principale perpendicolare all'asse. In corrispondenza ai sei fasci di piani ciclici, avremo dunque sei diametri, giacenti, a coppie, nei tre piani principali della quadrica; tra questi diametri due soli sono reali, e stanno in uno stesso piano principale. Ciascuno dei sei diametri incontra la quadrica in due punti, reali o immaginari, i cui piani tangenti segano la superficie lungo cerchi di raggio nullo, vale a dire lungo coppie di rette isotrope (n. 48). Ora un punto di una quadrica, il cui piano tangente seghi la superficie lungo due rette isotrope, dicesi *punto circolare* od *ombelico;* in esso la involuzione delle tangenti coniugate (n. 312) è circolare. Concludiamo:

Una quadrica a centro possiede dodici ombelichi, situati a coppie sopra sei diametri; ogni piano principale contiene quattro di quei punti. Dei dodici ombelichi quattro al più sono reali, e stanno in uno stesso piano principale (perpendicolare all'asse per cui passano due piani ciclici reali). Precisamente, ricordando le relazioni tra rette polari esposte al n. 325, si dimostra che *una quadrica a punti ellittici possiede effettivamente quattro ombelichi reali, mentre sopra una quadrica a punti iperbolici gli ombelichi sono tutti immaginari;* (ciò è chiaro, perchè un ombelico reale è un punto ellittico). La sfera naturalmente non è compresa in questo enunciato, giacchè ogni punto di essa è un ombelico.

Vediamo ora come questi risultati si modifichino nel caso dei paraboloidi. La conica all'infinito H_∞ di un paraboloide si scinde, come sappiamo, in due rette, reali o immaginarie secondo che il paraboloide è iperbolico od ellittico. Queste costituiscono una coppia di lati opposti del quadrangolo $MM'NN'$ sopra considerato; ma i piani passanti per una di quelle rette non segano il paraboloide lungo cerchi propriamente detti, bensì lungo la retta impropria nominata ed una retta propria. Scartando questi piani, risulta che *un paraboloide possiede quattro fasci impropri di*

piani ciclici, dei quali fasci due si compongono di piani reali se il paraboloide è ellittico, e nessuno se il paraboloide è iperbolico.[1] I quattro fasci si distribuiscono in due coppie, in guisa che i piani di ciascuna coppia sono paralleli ad una delle rette ove il piano tangente nel vertice del paraboloide è segato dai piani principali; ad una delle coppie appartengono i piani ciclici reali del paraboloide ellittico.

Il diametro coniugato ai piani ciclici di un fascio sega il paraboloide nel centro improprio ed in un punto proprio, che è un ombelico della superficie; dunque: *un paraboloide possiede quattro ombelichi, situati a coppie nei due piani principali; di questi punti due (appartenenti ad uno stesso piano principale) sono reali nel paraboloide ellittico, nessuno nel paraboloide iperbolico.*

Osservazione. — Noi abbiamo tacitamente supposto che le quattro intersezioni M, M', N, N' della conica all'infinito H_∞ di una quadrica coll'assoluto Ω_∞ siano distinte tra loro. Ora fu già osservato (n. 340) che può M venire a coincidere con N, e nel tempo stesso M' con N'; allora le due coniche H_∞, Ω_∞ si toccano nei due punti $M \equiv N, M' \equiv N'$, e la superficie è rotonda intorno ad un asse che passa per il polo P della retta $MM' \equiv NN'$ rispetto alle dette coniche. In tal caso, le due serie di piani ciclici reali vengono a coincidere nell'unico fascio improprio dei piani passanti per la retta MM'; questi piani sono perpendicolari all'asse di rotazione, e segano la quadrica rotonda lungo i cerchi *paralleli* (n. 112). I punti di incontro dell'asse colla quadrica (ove esistano) sono gli ombelichi reali della superficie.

358. Sezioni circolari; ricerca analitica. — Le considerazioni precedenti possono tutte interpretarsi col mezzo delle coordinate. La ricerca analitica dei piani ciclici di una quadrica di data equazione porta, in sostanza, alla ricerca delle coniche degeneri nel fascio determinato dalla conica all'infinito H_∞ della superficie insieme coll'assoluto, porta dunque a risolvere quell'equazione cubica $\Delta(k) = 0$ che abbiamo già incontrato più volte (nn. 336, 352). Il procedimento si semplifica notevolmente se si parte dall'equazione normale della quadrica. Noi lo esporremo nel caso dell'ellissoide, ed enunceremo i risultati relativi agli altri casi.

Sia dato un ellissoide non rotondo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

[1] L'ultimo risultato è evidente, perchè il paraboloide iperbolico è segato dai piani reali lungo iperboli o parabole (n. 328).

i cui assi possiamo supporre scelti in guisa che sia

$$a > b > c. \tag{2}$$

La conica all'infinito H_∞ dell'ellissoide ha (nel piano $t = 0$) l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{3}$$

mentre (nello stesso piano) l'assoluto Ω_∞ ha l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0. \tag{4}$$

La conica generica del fascio determinato da H_∞, Ω_∞

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - k\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

ossia

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - k\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - k\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - k\right) = 0,$$

degenera in corrispondenza ai tre valori del parametro

$$k = \frac{1}{a^2}\,,\ \frac{1}{b^2}\,,\ \frac{1}{c^2}\,.$$

Essa, ad es., per il valore $k = \dfrac{1}{b^2}$ si scinde nelle due rette

$$x\sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}} \pm z\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} = 0,$$

ossia

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} \pm \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2} = 0, \tag{5}$$

rette che son reali in virtù delle (2); agli altri due valori di k corrispondono invece, come subito si vede, coppie di rette immaginarie. *La stessa equazione* (5), ove si faccia astrazione dalla $t = 0$, rappresenta i due piani proiettanti dall'origine quelle due rette, *rappresenta i due piani ciclici reali condotti per il centro dell'ellissoide. Essi si segano lungo l'asse y, che è l'asse di lunghezza intermedia.*

I diametri coniugati ai due piani (5) hanno le equazioni (n. 330)

$$y = 0,\quad \frac{x}{a\sqrt{a^2 - b^2}} = \pm\frac{z}{c\sqrt{b^2 - c^2}},$$

e segano l'ellissoide (1) in quattro punti, le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema formato dalle due equazioni ora scritte (presa la seconda coll'uno o coll'altro segno) e dall'equazione (1). Fatti i calcoli, si trovano così *le coordinate dei quattro ombelichi reali dell'ellissoide:*

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},\quad 0,\quad \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\right).$$

Similmente si dimostra che *i piani ciclici reali condotti per il centro di un iperboloide ad una falda passano per il maggiore dei due assi trasversi; e gli analoghi piani, relativi all'iperboloide a due falde, passano per il maggiore dei due assi non trasversi.* Dei due iperboloidi solo il secondo ha quattro ombelichi reali, nel piano principale perpendicolare all'asse nominato.

Per il paraboloide ellittico

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

con $p > q > 0$, i due piani ciclici reali uscenti dal vertice hanno le equazioni

$$y\sqrt{p-q} \pm z\sqrt{q} = 0,$$

e i due ombelichi reali, propri, hanno le coordinate

$$\left(0, \pm\sqrt{q\,(p-q)}, \frac{1}{2}(p-q)\right).$$

Le due serie di sezioni circolari del cono generale di 2° ordine furono scoperte da DESCARTES (1648), mentre APOLLONIO aveva insegnato a determinare una delle serie quando l'altra era nota. D'ALEMBERT (1780) dimostrò che anche l'ellissoide possiede due serie di sezioni circolari. La ricerca generale, per tutte le specie di quadriche, fu fatta da MONGE e HACHETTE (1802); le considerazioni sintetiche del n. 357 sono dovute a PONCELET (1822).

*** 359. Quadriche a centro confocali.** — Ad una nuova serie di proprietà metriche notevoli delle quadriche si giunge quando si cerchi di estendere a queste superficie la nozione di fuochi, che presenta tanto interesse nello studio delle coniche. Giova qui, per procedere nel modo più semplice, partire dal concetto di *coniche confocali*, e cercare l'equivalente nello spazio.

Ricordiamo perciò (n. 291) che quelle coniche formano una schiera, alla quale appartiene, come conica inviluppo degenere, la coppia dei punti ciclici. Ora, similmente, possiamo formare la schiera di quadriche (n. 327) che è determinata da una quadrica generica assegnata e dal cerchio assoluto, riguardato come *quadrica limite*, ossia quadrica inviluppo degenere; tutte le quadriche della schiera si diranno *confocali*. In altre parole: *due quadriche si dicono confocali se della schiera che le contiene fa parte il cerchio assoluto.*

Le numerose proprietà delle quadriche confocali si ottengono subito, ricordando le proprietà proiettive delle schiere di quadriche (n. 327), e tenendo conto della particolarità metrica che caratterizza la schiera di cui ora vogliamo occuparci. Ma per procedere nel modo più completo, cominceremo collo stabilire le equazioni delle quadriche confocali.

Partiamo dall'equazione di una quadrica in coordinate di punti; supporremo, per semplicità, ridotta la equazione a forma normale, e lasceremo da parte per il momento il caso dei paraboloidi. Non occorre invece distinguere tra le varie specie di quadriche a centro, giacchè, come vedremo, ogni schiera di quadriche a centro confocali contiene ellissoidi ed iperboloidi delle due specie. Possiamo dunque, senza introdurre restrizioni, supporre che la superficie data sia un ellissoide reale

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

i cui assi riterremo scelti in guisa, che sia

$$a>b>c; \tag{2}$$

(veniamo così ad escludere il caso delle quadriche rotonde, che presenta minor interesse). Il nostro ellissoide, considerato come inviluppo di piani, ha (n. 346) l'equazione

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1. \tag{3}$$

D'altra parte, l'assoluto è rappresentato, in coordinate di piani, da

$$u^2+v^2+w^2=0, \tag{4}$$

come risulta dall'Oss. del n. 346 applicata al cono

$$x^2+y^2+z^2=0.$$

Le quadriche inviluppi (3), (4) determinano una schiera, la cui quadrica generica ha l'equazione plückeriana

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1-k(u^2+v^2+w^2)=0,$$

ossia

$$(a^2-k)u^2+(b^2-k)v^2+(c^2-k)w^2-1=0, \tag{5}$$

e quindi l'equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1. \tag{6}$$

Al variare di k la quadrica (5), o (6), descrive la schiera delle quadriche confocali alla data.

La (6) ci fa vedere anzitutto che *le quadriche confocali hanno lo stesso centro e gli stessi piani principali; esse segano ciascuno di questi in una schiera di coniche confocali;* ad es., le sezioni col piano xy hanno, come fuochi, due punti sull'asse x, di ascisse $\pm\sqrt{a^2-b^2}$.

La (6) fa vedere, in secondo luogo, che tra quelle quadriche vi sono effettivamente quadriche a centro di tutte le specie, come avevamo affermato. Infatti, tenendo conto delle disuguaglianze (2), apparisce che ai

valori di k compresi negli intervalli qui sotto indicati, corrispondono le quadriche nominate di fronte:

$-\infty < k < c^2$, ... ellissoidi reali,
$c^2 < k < b^2$, ... iperboloidi ad una falda,
$b^2 < k < a^2$, ... iperboloidi a due falde,
$a^2 < k < +\infty$, ... ellissoidi immaginari.

Ai limiti degli intervalli corrispondono quadriche inviluppi degeneri, cioè coniche riguardate come inviluppi di piani. Ad es., per $k = c^2$, la (5) ci dà

$$(a^2 - c^2)\,u^2 + (b^2 - c^2)\,v^2 = 1,$$

che è (n. 273) l'equazione plückeriana della ellisse reale

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1,$$

situata nel piano $z = 0$. Si può formar così la tabella:

$k = c^2$, . . . ellisse reale $\dfrac{x^2}{a^2 - c^2} + \dfrac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$ nel piano xy,

$k = b^2$, . . . iperbole $\dfrac{x^2}{a^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$ nel piano xz,

$k = a^2$, . . . ellisse immag. $\dfrac{y^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - c^2} = -1$ nel piano yz,

$k = \pm\infty$, . . . cerchio assoluto nel piano all'infinito.

Son queste le quattro coniche costituenti le quadriche inviluppi degeneri che una schiera, come già sappiamo, contiene (n. 327, *f*)). Le prime tre di esse, o talora solo le prime due, che sono reali, diconsi *coniche focali* della schiera. Dunque:

Una schiera di quadriche a centro confocali possiede tre coniche focali appartenenti ai tre piani principali; due di queste coniche sono reali, e precisamente una ellisse situata nel piano che contiene l'asse maggiore e l'asse medio di un qualsiasi ellissoide della schiera, ed una iperbole nel piano dell'asse maggiore e dell'asse minore del detto ellissoide.

La ellisse focale

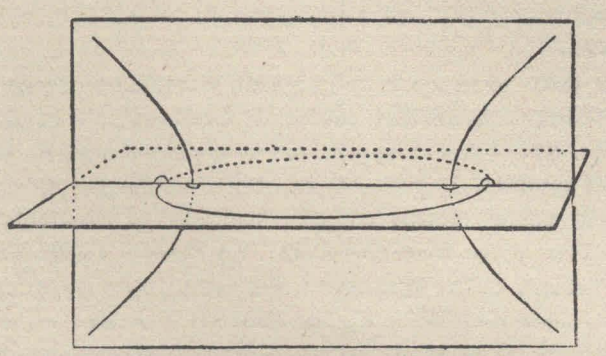
$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad z = 0 \tag{7}$$

ha i fuochi nei punti $(\pm\sqrt{a^2 - b^2},\ 0,\ 0)$, ove cadono i fuochi delle coniche segate sul piano xy dalle quadriche confocali; gli stessi punti sono vertici dell'asse trasverso nella iperbole focale

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad y = 0, \tag{8}$$

i cui fuochi $(\pm\sqrt{a^2-c^2}, 0, 0)$ sono, alla lor volta, i vertici dell'asse maggiore della ellisse (2), e son pure i fuochi delle sezioni delle quadriche confocali col piano xz. Conviene ricordare una parte di questo risultato così:

La ellisse e la iperbole focale hanno gli assi focali situati sopra una stessa retta, ove sta l'asse maggiore di ogni ellissoide della schiera; i fuochi di ciascuna delle due curve sono vertici dell'asse focale per l'altra.



Riprendendo ora in esame le due tabelle precedenti, ove son considerate le variazioni del parametro k, noi possiamo raffigurarci, nel seguente modo, un sistema di quadriche a centro confocali.[1] Si attribuisca anzitutto a k un valore compreso tra $-\infty$ e c^2; la (6) ci darà in corrispondenza un ellissoide, i cui semiassi valgono

$$\sqrt{a^2-k}, \quad \sqrt{b^2-k}, \quad \sqrt{c^2-k},$$

e decrescono al crescere di k. Quando k raggiunge il valore c^2, il minore dei tre semiassi, $\sqrt{c^2-k}$, diretto secondo z, si annulla, l'ellissoide si schiaccia e si riduce ad un disco, che ricopre due volte la regione del piano xy interna alla ellisse focale (7). Continuando k a crescere nell'intervallo da c^2 a b^2, si ottengono iperboloidi ad una falda di semiassi trasversi decrescenti $\sqrt{a^2-k}$, $\sqrt{b^2-k}$, diretti secondo x, y; le ellissi di gola di questi iperboloidi cadono tutte nell'interno della ellisse focale. Se poi k raggiunge il valore b^2, il minore dei due semiassi trasversi, $\sqrt{b^2-k}$, si annulla e l'iperboloide si schiaccia sul piano xz, e viene a ricoprire doppiamente la regione di questo piano esterna alla iperbole focale (8). Finalmente, quando k cresce da b^2 ad a^2, si hanno iperboloidi a due falde, in cui l'unico semiasse trasverso, $\sqrt{a^2-k}$, va decrescendo, ed è diretto secondo x; questi iperboloidi segano il piano xz lungo iperboli giacenti nella regione ora nominata. Per $k = a^2$ si ha l'ellisse immaginaria del piano yz, e per $k > a^2$ si ottengono quadriche immaginarie.[2]

[1] Si possono seguire queste osservazioni, e le successive, sulla fig. 6 dalla Tavola annessa al volume, la qual figura rappresenta tre quadriche confocali, delle tre specie.

[2] Se si fa invece decrescere k da a^2 a $-\infty$, si ottiene anzitutto un iperboloide a due falde, che per $k = b^2$ viene a ricoprire due volte la regione del piano xz *interna* all'iperbole focale (8), poi un iperboloide ad una falda, che per $k = c^2$ si schiaccia sulla regione del piano xy *esterna* all'ellisse focale (7), finalmente un ellissoide reale.

Premesse queste nozioni, veniamo a tradurre, pel nostro caso, le proprietà generali delle schiere di quadriche.

La proprietà *a*) del n. 327 ci dà:

a) *Tra le infinite quadriche confocali a una data ve n'è una sola che tocca un piano generico assegnato; quella superficie è sempre reale, se tale è il piano,* giacchè essa corrisponde a quel valore di k (certo minore di a^2) che soddisfa la (5), ove siano poste, in luogo di u, v, w, le coordinate del piano.

Per una retta generica r dello spazio conduciamo le coppie di piani tangenti alle singole quadriche confocali; quelle coppie costituiscono una involuzione (n. 327, *b*)), cui appartiene la coppia dei piani passanti per r e tangenti all'assoluto. I piani doppi dell'involuzione, dovendo dividere armonicamente anche questa coppia, risultano perpendicolari tra loro e reali; essi d'altra parte toccano (n. 327, *c*)) l'una o l'altra delle due quadriche della schiera che sono tangenti alla retta. Seguono dunque i teoremi:

b) *Le coppie di piani tangenti, condotti per una retta alle infinite quadriche confocali (e alle loro coniche focali), formano una involuzione simmetrica* (cfr. n. 291, *c*)).

c) *Fra le infinite quadriche confocali ve ne son due, sempre reali, che toccano una retta generica assegnata; i relativi piani tangenti, passanti per la retta, sono perpendicolari tra loro.*

Il teorema *d*) del n. 327 ci dà:

d) *I coni circoscritti, da un punto generico dello spazio, alle quadriche confocali formano una schiera, cui appartiene il cono delle rette isotrope uscenti dal punto;* una siffatta schiera dicesi *schiera di coni confocali.*

Per quel punto passano (n. 327, *e*)) tre delle quadriche confocali, i cui piani tangenti nel punto costituiscono un triedro autoconiugato rispetto alle quadriche stesse ed ai coni nominati. Il triedro è dunque trirettangolo (perchè autoconiugato rispetto al cono isotropo), ed è formato dai piani principali, sempre reali, di ciascuno di quei coni (n. 340). Dunque:

e) *Fra le infinite quadriche confocali ve ne sono tre, sempre reali, che passano per un punto generico assegnato; i relativi piani tangenti in quel punto sono perpendicolari a due a due.*

Segue che, se due quadriche confocali si segano lungo una curva, i rispettivi piani tangenti, in ciascun punto di questa, sono perpendicolari; le due quadriche *si segano ortogonalmente* lungo la curva. Il fatto che per ogni punto dello spazio passano tre quadriche confocali, secantisi ivi ortogonalmente a due a due, si esprime dicendo che le quadriche confocali formano un (particolare) *sistema triplo ortogonale di superficie.*

Ridimostriamo, e completiamo per via analitica, la prima parte del teorema *e*). Le quadriche confocali passanti per un punto generico assegnato corrispondono a quei valori di k che soddisfano l'equazione (6), nella

quale x, y, z indichino le coordinate nel punto dato. Liberando da frazioni la (6), si ottiene

$$(9) \qquad \begin{aligned}&(a^2-k)\,(b^2-k)\,(c^2-k) - x^2(b^2-k)\,(c^2-k)\\ &- y^2(c^2-k)\,(a^2-k) - z^2(a^2-k)\,(b^2-k) = 0,\end{aligned}$$

equazione cubica in k, che ha tre radici *reali* k_1, k_2, k_3, perchè il primo membro assume valori di segni alternati $(+, -, +, -)$ quando a k si attribuiscano successivamente i valori $-\infty$, c^2, b^2, a^2. Dagli intervalli, ove vengono a trovarsi le radici, si deduce che:

e') *Le tre quadriche confocali reali passanti per un punto generico assegnato sono: un ellissoide, un iperboloide ad una falda, ed un iperboloide a due falde.*[1] Donde segue che quadriche confocali dello stesso nome non si segano in punti reali, mentre si vedrebbe che quadriche confocali di nome diverso si segano lungo curve reali.

Ad ogni punto $P(x, y, z)$ dello spazio corrispondono, mediante la (9), tre valori reali k_1, k_2, k_3, appartenenti agli intervalli $(-\infty, c^2)$, (c^2, b^2), (b^2, a^2), e relativi alle tre quadriche confocali che passano per il punto. Viceversa, dati tre valori reali k_1, k_2, k_3, appartenenti a quegli intervalli, si hanno tre quadriche confocali, che si segano in otto punti $P(\pm x, \pm y, \pm z)$, dei quali uno solo sta, ad es., nel triedro che ha come spigoli i tre semiassi positivi. In virtù di questa corrispondenza, si assumono talora i tre numeri k_1, k_2, k_3 come coordinate di un punto P variabile nello spazio, o nel triedro suddetto. Il sistema delle *coordinate ellittiche*, a cui così si perviene, viene applicato utilmente in alcune questioni di geometria, di meccanica, ecc.

Riprendiamo in esame le proprietà generali delle schiere di quadriche. I teoremi f), g) del n. 327 ci condurrebbero alle coniche focali della nostra schiera, delle quali abbiamo già discorso. Il teorema h) (n. 327) ci dà invece una notevolissima proprietà delle dette coniche. Si assuma infatti sopra una, K, delle coniche focali un punto P, e da esso si circoscrivano coni alle quadriche confocali; questi, tra cui si trova il cono isotropo di vertice P, hanno in comune, secondo il teorema h), due generatrici ed i piani tangenti lungo queste, i quali piani si segano nella tangente in P alla conica K.

---

[1] Se le quadriche corrispondenti ai valori k_1, k_2 del parametro hanno in comune il punto (x_0, y_0, z_0), sussistono le relazioni

$$\frac{x_0^2}{a^2-k_1}+\frac{y_0^2}{b^2-k_1}+\frac{z_0^2}{c^2-k_1}=1, \qquad \frac{x_0^2}{a^2-k_2}+\frac{y_0^2}{b^2-k_2}+\frac{z_0^2}{c^2-k_2}=1,$$

dalle quali, mediante sottrazione e soppressione del fattore non nullo $k_1 - k_2$, si ricava

$$\frac{x_0^2}{(a^2-k_1)\,(a^2-k_2)}+\frac{y_0^2}{(b^2-k_1)\,(b^2-k_2)}+\frac{z_0^2}{(c^2-k_1)\,(c^2-k_2)}=0.$$

Ora si riconosce esser questa la condizione di perpendicolarità dei piani tangenti (n. 346) alle due quadriche in (x_0, y_0, z). Resta così dimostrata analiticamente anche la seconda parte del teorema e)

Ora sappiamo che un cono, il quale sia bitangente al cono isotropo collo stesso vertice, è rotondo, ed ha come asse di rotazione la retta intersezione dei piani tangenti comuni ai due coni (n. 340). Dunque:

h) *I coni circoscritti alle quadriche confocali, da un punto di una conica focale, sono rotondi, e hanno come asse comune di rotazione la tangente a quella conica in quel punto.*

Anzi i punti delle coniche focali sono i soli (n. 327, *i*)), che godano della proprietà enunciata.

*** 360. Paraboloidi confocali.** — Vediamo rapidamente come queste proprietà si estendano ai paraboloidi.

Dato un paraboloide, ad es. ellittico, non rotondo,

$$(1') \qquad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

con $p > q > 0$, e scrittane l'equazione tangenziale (n. 350)

$$(3') \qquad p u^2 + q v^2 - 2w = 0,$$

si consideri la schiera determinata da esso col cerchio assoluto. La quadrica generica della schiera ha l'equazione tangenziale

$$(5') \qquad (p - k) u^2 + (q - k) v^2 - (k w + 2) w = 0$$

e l'equazione cartesiana

$$(6') \qquad \frac{x^2}{p - k} + \frac{y^2}{q - k} = 2z - k.$$

Variando k da $-\infty$ a $+\infty$, si ottengono dunque *paraboloidi ellittici* finchè $k < q$, *paraboloidi iperbolici* se $q < k < p$, e di nuovo *paraboloidi ellittici* (coll'asse diretto in senso inverso rispetto ai primi) se $k > p$. In corrispondenza al valore $k = q$, si ha una *parabola focale*

$$x^2 = (p - q)\ (2z - q)$$

nel piano principale $y = 0$; e per $k = p$ si ha una *seconda parabola focale*

$$y^2 = -(p - q)\ (2z - p)$$

nel piano principale $x = 0$. Le due parabole hanno gli assi sovrapposti (sulla retta z), ma rivolti in senso opposto, ed hanno lo stesso parametro $p - q$. *Il fuoco della prima parabola* $\left(0,\ 0,\ \frac{p}{2}\right)$ *è vertice della seconda, e viceversa.*

Alla schiera dei paraboloidi confocali si applicano immutati i teoremi *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *h*) del numero precedente. Il teorema *e'*) diviene:

Per un punto passano tre paraboloidi confocali, di cui due ellittici ed uno iperbolico, secantisi ortogonalmente nel punto.

***361. Coniche focali di una quadrica.** — Data una quadrica, è perfettamente determinata la schiera di quadriche confocali a cui essa appartiene; son determinate quindi le coniche focali della schiera, che possono dirsi *coniche focali della quadrica* primitiva. Esse sono caratterizzate dalla proprietà seguente, che discende dal teorema *h*) del n. 359; nell'enunciato si tien conto soltanto delle due coniche reali.

Il luogo dei punti da cui si possono circoscrivere coni rotondi ad una quadrica si compone di due coniche reali (dette focali), giacenti in due piani principali della quadrica, ed aventi gli assi focali situati sopra uno stesso asse di quella. Precisamente, se la quadrica ha centro, l'asse nominato è il maggiore degli assi trasversi, o l'unico asse trasverso; delle due coniche focali una è ellisse, l'altra è iperbole; i fuochi di ciascuna sono vertici dell'asse focale per l'altra. Se la quadrica è un paraboloide, le due coniche focali sono parabole, aventi ciascuna il vertice nel fuoco dell'altra.

I coni rotondi, di cui parla il teorema, sono poi reali o immaginari, secondo che i relativi vertici sono esterni od interni alla quadrica.

Le due coniche focali reali e la conica focale immaginaria di una quadrica a centro segano la superficie complessivamente in dodici punti. Si dimostra, per via sintetica o analitica, che son questi i dodici ombelichi della quadrica;[1] sono reali, nell'ellissoide, gli ombelichi segati dalla iperbole focale, e, nell'iperboloide a due falde, quelli segati dall'ellisse focale. Considerazioni analoghe valgono per i paraboloidi.

***362. Coniche focali coniugate.** — Le osservazioni del numero precedente continuano a sussistere anche quando si parta da una quadrica inviluppo *degenere*, cioè da una conica diversa dal cerchio assoluto, giacchè quella conica, insieme coll'assoluto, determina pienamente una schiera di quadriche confocali, di cui essa è una conica focale. Ciò segue senz'altro dalla definizione di schiera, e risulta pure dal notare che, ad es., la ellisse

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad z=0,$$

appartiene (come conica focale) alla sola schiera di quadriche confocali

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\lambda}+\frac{y^2}{\beta+\lambda}+\frac{z^2}{\lambda}=1,$$

dove λ è un parametro; basta, per assicurarsene, identificare l'equazione della ellisse alla (7) del n. 359. Riguardando dunque una data conica come conica focale di una schiera di quadriche confocali, restano determinate le altre due coniche focali della schiera, delle quali una è reale, e dicesi

[1] Infatti il cono *rotondo*, circoscritto da uno di quei punti alla quadrica, degenera, come inviluppo, in due fasci, i cui assi sono le rette isotrope uscenti dal punto nel piano tangente alla quadrica (n. 313).

conica focale coniugata della primitiva (v. fig. di pag. 551). A queste coniche focali coniugate si applica ancora il teorema del numero precedente, coll'avvertenza però che il cono circoscritto ad una conica da un punto della conica stessa è il piano della curva contato due volte, e non ha quindi alcun interesse, mentre il cono circoscritto alla conica da un punto generico della conica focale è il cono proiettante quella curva da questo punto.

Tenendo conto solo di questi ultimi coni, si giunge al seguente notevolissimo teorema:

Il luogo dei punti da cui una conica reale è proiettata mediante coni rotondi è una seconda conica reale, la quale, a sua volta, è proiettata mediante coni rotondi dai punti della conica primitiva. I piani delle due coniche si segano ortogonalmente lungo l'asse focale comune alle due curve, ed i fuochi di ciascuna sono vertici dell'asse focale per l'altra. Se la conica primitiva è una ellisse, l'altra è una iperbole, e viceversa; se quella è una parabola, sarà una parabola anche la seconda.

Risulta da questo teorema che per una conica qualsiasi passano infiniti coni rotondi. Per conseguenza, la definizione che i geometri greci anteriori ad APOLLONIO davano delle coniche come sezioni di coni *rotondi*, non introduceva in realtà alcuna restrizione.

Sebbene gli ellissoidi confocali si presentino in una ricerca di meccanica celeste fatta da LAPLACE (1799), si può affermare che la teoria delle quadriche confocali fu fissata nelle sue linee principali da DUPIN (1813), il quale scoprì le coniche focali, e dimostrò (contemporaneamente a BINET) che le dette quadriche formano un sistema triplo ortogonale. Però l'osservazione (presa qui come definizione) che quelle quadriche costituiscono una particolare schiera è dovuta a CHASLES (1837).

Che le coniche focali siano luoghi di vertici di coni rotondi circoscritti alle quadriche confocali, fu dimostrato da STEINER (1826), mentre il caso particolare, relativo ai coni rotondi passanti per una data conica, era già noto a DUPIN (1813).

Esercizi. I. — 1) Un cono quadrico di vertice O, ed il cono isotropo avente lo stesso vertice determinano *un fascio di coni conciclici* ed *una schiera di coni confocali*, fascio, o schiera, ottenuti proiettando da O il fascio o, rispettivamente, la schiera di coniche determinati, sul piano all'infinito, dalle coniche all'infinito dei due coni. I coni del fascio, o della schiera, hanno i piani principali e gli assi in comune (piani principali ed assi del fascio o della schiera). La polarità ortogonale nella stella O muta i coni conciclici in coni confocali, e viceversa.

2) Nel fascio di coni conciclici vi sono tre coni che degenerano in coppie di piani *ciclici*, secantisi lungo i tre assi del fascio; di queste coppie una sola si compone di piani reali. Ogni piano parallelo ad uno dei piani ciclici sega ciascun cono del fascio lungo un cerchio. Due piani paralleli a due piani ciclici costituenti una delle dette coppie si chiamano *antiparalleli;* essi segano ciascun cono lungo due cerchi che appartengono ad una sfera. Una sfera condotta per O, in guisa da

toccare ivi uno dei piani ciclici, sega tutti i coni del fascio lungo cerchi, i cui piani sono paralleli tra loro ed antiparalleli a quel piano ciclico.

3) Un piano generico condotto per O tocca due coni del fascio lungo due generatrici, che risultano perpendicolari tra loro.

4) Se $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{x^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=0$, con $\alpha>\beta>\gamma$, è l'equazione cartesiana ortogonale di un cono, e quindi $\alpha u^2+\beta v^2+\gamma w^2=0$ è l'equazione plückeriana del cono (o meglio della sua conica all'infinito), i coni confocali sono rappresentati dall'una o dall'altra delle due equazioni:

$$(\alpha+\lambda)u^2+(\beta+\lambda)v^2+(\gamma+\lambda)w^2=0,$$
$$\frac{x^2}{\alpha+\lambda}+\frac{y^2}{\beta+\lambda}+\frac{z^2}{\gamma+\lambda}=0,$$

dove λ è un parametro. Si esamini la posizione e la natura dei coni che corrispondono ai valori di λ compresi negli intervalli aventi per estremi $(-\infty, -\alpha, -\beta, -\gamma, +\infty)$.

5) Alla schiera dei coni confocali appartengono tre coni di cui ciascuno degenera in due fasci di piani; gli assi di tali fasci escono da O, e si trovano distribuiti a coppie sui tre piani principali della schiera. Una sola di queste coppie si compone di rette reali

$$y=0,\quad \frac{x^2}{\alpha-\beta}-\frac{z^2}{\beta-\gamma}=0.$$

A queste rette (e talvolta anche alle rimanenti quattro) si dà il nome di *rette focali* della schiera, o di ciascun cono componente la schiera (Magnus).

6) Dato un cono, le sue rette focali sono completamente determinate, e possono definirsi direttamente mediante una delle seguenti proprietà: *a*) i piani tangenti ad un cono condotti per una retta focale toccano il cerchio assoluto; *b*) per una retta focale passano infinite coppie di piani coniugati rispetto al cono e perpendicolari tra loro (Chasles).

7) Dalla proprietà *b*) segue che un piano, perpendicolare ad una retta focale di un cono, sega questo lungo una conica avente un fuoco su quella retta.

8) Le coppie di piani tangenti, che si possono condurre ai coni confocali da una retta p passante per O, formano una involuzione simmetrica, cui appartiene la coppia congiungente p coi due raggi focali (reali) della schiera. I piani doppi, perpendicolari tra loro, della involuzione sono tangenti, lungo p, ai due coni della schiera passanti per p.

9) Segue che il piano tangente ad un cono lungo una generatrice biseca il diedro dei piani congiungenti quella generatrice colle rette focali del cono.

10) Segue ancora che due coni confocali, aventi una generatrice in comune, si segano ortogonalmente lungo quella.

11) Le rette simmetriche di una retta focale di un cono, rispetto ai piani tangenti al cono, formano un cono rotondo, che ha per asse l'altra retta focale del cono primitivo.

12) Segue: «è costante la somma o la differenza degli angoli che una generatrice qualsiasi di un cono forma colle due rette focali» (Magnus); comparisce

la somma o la differenza, secondo che si adoperano certi angoli o gli angoli adiacenti.

13) L'ultimo teorema si dimostra per via analitica, cercando il luogo di una retta per O che formi con due rette fisse, uscenti da O, angoli aventi una somma o differenza costante. Posto che le rette fisse si trovino nel piano $y = 0$, e formino coll'asse x gli angoli φ, $\pi - \varphi$, posto inoltre che la somma o differenza costante sia ω, l'equazione del luogo risulta

$$\frac{x^2}{\cos\omega - 1} + \frac{y^2}{\cos\omega + \cos 2\varphi} + \frac{z^2}{\cos\omega + 1} = 0;$$

si tratta effettivamente di un cono, il quale, al variare di ω, descrive una schiera di coni confocali.

14) I teoremi sulle rette focali si trasformano, mediante la polarità ortogonale nella stella O (es. 1)), in teoremi sui piani ciclici. Si dimostri per questa via che «è costante la somma o la differenza dei diedri formati da un piano variabile tangente ad un cono coi due piani ciclici reali» (CHASLES).

II. — 15) Il luogo dei poli in un piano π, rispetto ad una schiera di quadriche confocali, è una retta p normale al piano π nel punto ove π è toccato da una quadrica della schiera; p è dunque normale a questa quadrica in quel punto. La retta p contiene, in particolare, i poli delle rette sezioni di π coi piani principali, rispetto alle coniche focali appartenenti a quei piani (n. 237, es. 28)).

16) Segue: «sopra un piano principale di una quadrica rimane determinata una polarità, in cui si corrispondono le tracce di ogni piano π e della retta p perpendicolare e coniugata con π rispetto alla quadrica; la curva fondamentale della polarità piana è la conica focale giacente su quel piano principale» (CHASLES, REYE; cfr. n. 283).

17) Segue pure dal teorema 15): «due piani perpendicolari e coniugati rispetto ad una quadrica, sono coniugati rispetto ad ogni quadrica confocale; essi segano sopra un piano principale coppie di rette coniugate rispetto alla relativa conica focale».

18) Un triedro trirettangolo, autoconiugato rispetto ad una quadrica, è pure autoconiugato rispetto alle quadriche confocali. Ogni punto generico S dello spazio è vertice di un siffatto triedro; esso è formato dai piani principali del cono circoscritto da S ad una (qualsiasi) quadrica della schiera, o dai piani tangenti alle tre quadriche della schiera passanti per S. Se però S appartiene ad una conica focale, esistono infiniti triedri siffatti di vertice S, aventi, come spigolo comune, la tangente a quella conica in S.

19) Una retta per cui passino (due e quindi) infinite coppie di piani perpendicolari coniugati rispetto ad una quadrica dicesi *asse focale* di quella quadrica (e di ogni quadrica confocale). Le tangenti alle coniche focali sono, ad es., assi focali (PLÜCKER). Un asse focale è retta focale per il cono circoscritto da un suo punto ad una qualsiasi quadrica della schiera; e viceversa.

20) Per ogni punto generico S dello spazio passano sei assi focali, tra cui due soli reali, che sono le rette focali dei coni confocali circoscritti da S alle quadriche della schiera.

21) Gli assi focali reali di una schiera di quadriche confocali sono le rette degli iperboloidi rigati appartenenti alla schiera (CHASLES).

III. — 22) Il cono circoscritto ad una quadrica da un fuoco F, cioè da un punto di una conica focale, tocca la quadrica lungo una conica situata nel piano polare di F, che è perpendicolare al piano principale contenente F. Quel cono è rotondo (n. 359, *k*)), e tocca quindi il cono isotropo di vertice F lungo due generatrici isotrope; il piano di queste è normale all'asse del primo cono, cioè alla tangente in F alla conica focale. Segue: « il cono isotropo che ha per vertice un fuoco F di una quadrica è tangente alla quadrica in due punti, la cui congiungente f (*direttrice* relativa al fuoco F) è perpendicolare al piano principale contenente F, e sta nel piano normale in F alla conica focale cui F appartiene. Questo piano sega la quadrica lungo una conica, di cui F è un fuoco ed f è la relativa direttrice » (CHASLES).

23) Il cono isotropo di vertice F sega la quadrica lungo due coniche (n. 327, es. 15)) (cerchi immaginari) appartenenti ai due piani ciclici passanti per la direttrice f. Indicando brevemente le equazioni di questi due piani con $U = 0$, $V = 0$ se sono reali, o con $U \pm iV = 0$ se sono immaginari, e scegliendo come origine il fuoco F, si conclude: « la equazione di una quadrica avente un fuoco nella origine può scriversi sotto una delle forme:

$$(\alpha) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = UV,$$

$$(\beta) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = U^2 + V^2,$$

dove U e V sono polinomi reali lineari in x, y, z ». La (α), o la (β), corrispondono alle ipotesi che l'origine appartenga ad una conica focale secante la superficie in ombelichi reali, o rispettivamente immaginari; ad es., nell'ellissoide la (α) si riferisce alla iperbole focale, la (β) alla ellisse focale.

24) L'equazione (α), nel caso di un ellissoide, esprime che « il quadrato della distanza di un punto generico di un ellissoide da un fuoco appartenente all'iperbole focale sta in un rapporto costante col prodotto delle distanze di quel punto dai due piani ciclici condotti per la direttrice corrispondente al fuoco ». (SALMON, AMIOT). Il rapporto vale $b^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)$, e non dipende quindi dal fuoco che si fissa sulla iperbole focale. Proprietà analoghe valgono per le altre quadriche.

25) L'equazione (β), nel caso dell'ellissoide, può interpretarsi così: « la distanza di un punto variabile di un ellissoide da un fuoco preso sulla ellisse focale sta in rapporto costante colla distanza del punto dalla direttrice corrispondente a quel fuoco, purchè questa distanza venga valutata parallelamente ad un piano ciclico » (si intenda cioè la distanza tra il punto nominato e la intersezione della direttrice con un piano ciclico reale condotto per il punto). Analogamente per le altre quadriche. (MAC CULLAGH). I teoremi 24), 25) conducono, invertiti, a generazioni delle quadriche, analoghe alla nota generazione di una conica mediante un fuoco e la direttrice (n. 65, *b*)).

IV. — 26) Sopra due ellissoidi confocali

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1,$$

si dicono *corrispondenti* due punti $P\ (x, y, z)$, $P'\ (X, Y, Z)$ tali che

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{A}, \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{B}, \quad \frac{z}{c} = \frac{Z}{C}.$$

I punti P, P' si corrispondono effettivamente in una affinità, che trasforma un ellissoide nell'altro. Ora si dimostri che le due quadriche confocali all'ellissoide, che passano per P, passano per P'. Se dunque il secondo ellissoide si porta, variando, sugli infiniti ellissoidi confocali col primo, il luogo del punto P' è un tratto della curva intersezione dei due iperboloidi confocali passanti per P. Definizioni e proprietà analoghe valgono per due iperboloidi confocali dello stesso nome.

27) Se (P, P'), e (Q, Q') sono due coppie di punti corrispondenti di due ellissoidi confocali, vale la relazione $PQ' = P'Q$ (IVORY).

28) Se P, Q sono due punti di una generatrice di un iperboloide rigato, e P', Q' sono i due punti corrispondenti di una generatrice di un iperboloide rigato confocale, vale pure la relazione $PQ = P'Q'$; in altre parole, l'affinità sopra nominata, che muta l'una superficie nell'altra, stabilisce una uguaglianza sopra le generatrici corrispondenti (cfr. n. 224, es. 9)). Od anche: sono uguali i segmenti di due generatrici corrispondenti dei due iperboloidi, compresi tra due ellissoidi confocali con quelli.

29) Segue che, se con due generatrici e due direttrici di un iperboloide rigato si forma un quadrilatero semplice sghembo $PQRS$, i lati di questo risultano uguali ai lati del quadrilatero $P'Q'R'S'$ corrispondente sopra un iperboloide confocale. Se si suppone che i due iperboloidi corrispondano a due valori vicinissimi del parametro λ che entra nell'equazioni delle quadriche confocali, i due quadrilateri possono riguardarsi come due configurazioni successive assunte da uno stesso quadrilatero, formato da quattro aste rigide articolate nei vertici. Estendendo questa considerazione a tutta la superficie, risulta che «un iperboloide rigato, il quale si immagini costituito da due serie di aste rigide, articolate nei punti ove si segano, può deformarsi con continuità, assumendo la posizione e la forma degli infiniti iperboloidi rigati confocali con esso» (HENRICI). Le due configurazioni estreme sono costituite dagli inviluppi delle tangenti alla ellisse ed alla iperbole focale.

V. — 30) Se due quadriche si toccano lungo una conica, il piano tangente ad una di esse in un ombelico sega l'altra quadrica in una conica che ha un fuoco nell'ombelico e la corrispondente direttrice sul piano della conica.

31) In particolare: se una quadrica (rotonda: n. 339, es. 11)) tocca una sfera lungo un cerchio, ogni piano tangente a questa sega quella lungo una conica che ha un fuoco nel punto di contatto.

32) La conica, lungo cui un cono rotondo è segato da un piano, ha i fuochi nei punti ove il piano è toccato da sfere iscritte nel cono (DÀNDELIN). Esistono due sfere siffatte, come si vede segando la figura solida col piano di simmetria condotto per l'asse del cono normalmente al piano della conica. Nel caso della ellisse, una delle due sfere sta dalla banda del vertice rispetto al piano della conica, e l'altra dalla banda opposta. Nel caso della iperbole, le sfere stanno dalla banda del vertice. E nel caso della parabola?

33) La definizione elementare di fuoco di una sezione del cono rotondo, che di qua si ricava, conduce (in base alle note proprietà delle tangenti condotte da un punto ad una sfera) a stabilire, per via elementare, le principali proprietà dei fuochi di una conica. Ma le stesse considerazioni conducono pure a proprietà notevoli delle coniche mutuamente focali. Supposto infatti, ad es., che la sezione del cono di vertice S sia una ellisse di fuochi F, F', e presi sulla curva due punti arbitrari M, N, segue facilmente che $SM - SN = FM - FN$. Di qua, nella ipotesi che M, N coincidano coi vertici dell'asse focale della ellisse, si deduce il risultato noto (n. 362): « il luogo dei vertici dei coni rotondi proiettanti una ellisse data è una iperbole (focale), che ha per vertici e fuochi i fuochi ed i vertici dell'asse focale della ellisse, e che sta in un piano normale al piano di questa ».

34) Si deduce pure che « è costante la differenza delle distanze di un punto variabile della iperbole focale da due punti fissi (arbitrari) della ellisse focale ». Ed analogamente si dimostra che « è costante la somma, o la differenza, delle distanze di un punto variabile lungo la ellisse focale da due punti fissi della iperbole focale, situati sopra rami diversi, o sopra uno stesso ramo » (Dupin).

35) Rappresentando parametricamente i punti della ellisse mediante e formole

$$x = \alpha \cos \varphi, \quad y = \beta \cos \varphi, \quad z = 0,$$

ed i punti della iperbole focale mediante le formole

$$x' = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} : \cos \psi, \quad y' = 0, \quad z' = \beta \operatorname{tg} \psi,$$

dove φ e ψ sono due parametri, si calcoli la distanza tra i due punti (x, y, z), (x', y', z'), e si dimostrino analiticamente le proprietà sopra enunciate.

VI. — 36) Dicesi *tangente di curvatura* ad una quadrica, in un punto, una tangente che sia perpendicolare alla tangente coniugata (n. 312). Ogni punto generico di una quadrica possiede due determinate tangenti di curvatura, reali, le quali sono parallele agli assi di una sezione della quadrica con un piano parallelo al piano tangente in quel punto. Ma, se il punto è un ombelico, ogni tangente in esso è tangente di curvatura.

37) Preso sopra una quadrica un punto P, le due quadriche confocali con essa passanti per P hanno ivi i piani tangenti che contengono le tangenti di curvatura alla prima quadrica in P. In altre parole: la curva intersezione di due quadriche confocali ha come tangente, in ogni suo punto, una tangente di curvatura di ciascuna delle due quadriche (n. 327, es. 32)). Una curva siffatta dicesi *linea di curvatura* della superficie cui appartiene. Dunque: « la intersezione di due quadriche confocali è linea di curvatura per ambedue » (Monge).

APPENDICE

I.

Sui problemi geometrici.[1]

363. Classificazione dei problemi geometrici. — Più volte ci è accaduto di risolvere, nel corso delle nostre lezioni, problemi di geometria piana, sia col metodo analitico, sia mediante effettive costruzioni. Alcuni di quei problemi, trattati analiticamente, ci hanno condotto ad equazioni lineari; e noi siamo riusciti a risolverli graficamente facendo uso di sole linee rette, cioè colla sola riga. Tale è ad es. il problema di costruire l'elemento quarto armonico dopo tre elementi dati (nn. 149, 150).

Altri problemi, trattati analiticamente, ci hanno condotto ad equazioni quadratiche; mentre per la loro risoluzione grafica si è dovuto far uso di circonferenze (cioè del compasso) oltre che di rette. Basti qui ricordare la costruzione degli elementi uniti di una proiettività tra due forme di prima specie sovrapposte (n. 178).

Finalmente abbiamo accennato a due celebri problemi (nn. 64, 65), la cui risoluzione esige l'uso di curve diverse dalla retta e dal cerchio.

Lo studio sistematico dei problemi geometrici e degli strumenti impiegati a risolverli forma l'oggetto di una teoria, che costituisce forse la più notevole applicazione dei metodi analitici nel campo della Geometria elementare. Vale quindi la pena di porne in luce brevemente i concetti generali, rimandando, per i risultati algebrici e per lo studio di particolari problemi, ad opere che il lettore potrà facilmente consultare.

Due questioni noi ci proponiamo. Vogliamo in primo luogo stabilire una classificazione razionale dei problemi geometrici. Ed in secondo luogo

---

[1] Questo articolo è, salvo alcune modificazioni di forma e qualche ampliamento, una riproduzione di un mio scritto « Sulla risolubilità dei problemi geometrici ... », redatto per il volume pubblicato dal Sig. ENRIQUES sopra alcune « Questioni riguardanti la geometria elementare » (Bologna, Zanichelli, 1900; vol. II della 2ª ediz.).

vogliamo esaminare quali classi di problemi siano risolubili con determinati strumenti.

Assegnare un problema di geometria piana vuol dire assegnare nel piano, su cui si opera, un certo numero finito di punti, rette, curve..., e chiedere nuovi punti, nuove rette, nuove curve..., che siano in determinate relazioni cogli enti dati. Possiamo supporre però che gli enti richiesti siano sempre punti; infatti, se fosse domandata una retta, basterebbe costruirne due punti (ad es. le intersezioni con due rette prefisse), giacchè la retta potrebbe poi tracciarsi collo strumento *riga*, di cui riterremo permesso l'uso; ed una osservazione analoga si farebbe quando fosse richiesto un cerchio, e si disponesse del *compasso*. Ma, in generale, se non si possiede uno strumento atto a tracciare d'un tratto continuo una curva che venga richiesta, si intenderà che la curva deve esser costruita *per punti*, e si riguarderanno come altrettanti problemi staccati la determinazione di singoli suoi punti, ad es. dei punti che si trovano sopra rette, cerchi..., condotti, sia ad arbitrio, sia in modo prefisso.

Considerazioni analoghe possiamo applicare ai *dati* del problema. Alle rette, ai cerchi e, sotto ipotesi molto larghe, alle curve che comparissero fra i dati, possiamo sostituire un numero finito di punti atti ad individuare quelle linee.[1] Limitandoci ai casi in cui ciò è possibile, il nostro problema potrà ridursi ad uno o più problemi del seguente tipo:

Dati in un piano alcuni punti in numero finito, costruire un punto che abbia coi dati relazioni assegnate.

Per tradurre il problema in forma analitica, riferiamo i punti nominati ad un sistema di coordinate proiettive (n. 156), o casi particolari, ad es. coordinate cartesiane. Nel fissare gli elementi fondamentali del sistema eviteremo tuttavia (per ragioni che poi saranno dette) di introdurre enti, che non abbiano relazione colla natura del problema proposto. Così, se questo ha carattere puramente proiettivo, faremo uso di un sistema di coordinate *proiettive*, di cui i punti fondamentali ed il punto unità si trovino possibilmente fra i dati, od in punti arbitrari che, in tal caso, vanno *aggiunti* (associati) ai dati. Ma se si ritiene conosciuto un parallelogramma, due lati contigui di questo potranno assumersi come assi di un sistema cartesiano, e il vertice opposto all'origine come punto unità; se finalmente si ritiene conosciuto un quadrato (o costruibile coi mezzi di cui si dispone), potremo adoperare un sistema cartesiano ortogonale, con un'unica unità di lunghezza per le ascisse e le ordinate.

---

[1] Si intende che i punti, a cui si allude, possono appartenere alla curva; ma non è necessario che così sia, bastando che la loro conoscenza permetta di determinare la curva. Così, se una curva algebrica fosse riferita ad assi cartesiani, e si conoscessero più punti aventi come coordinate i coefficienti della equazione della curva, si potrebbe dire che quei punti permettono di individuare la curva.

Rispetto al sistema di coordinate prescelto, i punti dati (compreso il punto unità) avranno certe coordinate, ad es. non omogenee, che promiscuamente indicheremo con 1, a, b, c..., e riguarderemo come *quantità note*. Esse, insieme a tutte le quantità che si ottengono da quelle con operazioni razionali (addizione algebrica, moltiplicazione, divisione) eseguite in numero indeterminato, purchè finito, costituiscono, come si suol dire, un *campo di razionalità* [1]

$$K = [1, a, b, c...],$$

la cui considerazione è fondamentale nella discussione che stiamo per fare; lo chiameremo *il campo di razionalità definito dai dati*. Insieme ai dati dobbiamo pur considerare il punto incognito, il quale avrà come coordinate certi *numeri incogniti* x, y. I legami espressi nell'enunciato del problema fra i punti dati ed il punto incognito, si tradurranno in certe relazioni analitiche fra le quantità note e le incognite x, y. Operando su queste relazioni mediante i processi di eliminazione forniti dall'analisi, arriveremo in fine, se il problema è determinato, a due equazioni, una contenente la sola incognita x,

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

l'altra la sola y. Ed il problema si spezzerà in due: uno *dipendente dalla equazione* (1), per determinare la coordinata x del punto incognito, o, se si vuole, per determinare il punto $(x, 0)$ sopra una retta assegnata $(y = 0)$; l'altro problema per determinare la coordinata y, ossia il punto $(0, y)$, quando sia nota la x.

In seguito a questa osservazione, possiamo limitarci a considerare i problemi dipendenti da una sola equazione con una sola incognita. Essi possono classificarsi a seconda dell'equazione nominata. Precisamente:

Un problema si dice algebrico se la equazione da cui esso dipende è algebrica, e quindi può porsi sotto la forma (razionale, intera)

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0, \tag{2}$$

dove si suppone precisamente che A_1, A_2 ... A_n siano quantità appartenenti al campo di razionalità definito dai dati.

Ogni problema che non rientri in questa categoria dicesi *trascendente*.

Quanto ai problemi algebrici, essi possono suddividersi ulteriormente a seconda del *grado* n della equazione (2), da cui dipendono. Avremo dunque problemi di *primo grado*, dipendenti da una equazione lineare; problemi di *secondo grado*, dipendenti da una equazione quadratica, ecc.

[1] Per questo concetto si vedano ad es. le *Istituzioni di analisi algebrica* del CAPELLI (1902), pag. 548.

Qui però va fatta un'avvertenza, nel caso che la equazione (2) *sia riducibile entro al campo di razionalità K*, vale a dire nel caso che il polinomio (2) sia il prodotto di due o più polinomi $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$..., i cui coefficienti appartengano ancora al campo K.[1] Supponiamo infatti, ad es., che l'equazione (2) possa scriversi sotto la forma

$$\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = 0,$$

dove φ_1, φ_2 sono due polinomi della natura indicata e di grado n_1, n_2 (con $n_1 + n_2 = n$); l'equazione, in tal caso, si scinde nelle due

$$\varphi_1(x) = 0, \quad \varphi_2(x) = 0.$$

Allora, o le radici di una di queste due equazioni, ad es. della prima, soddisfano al problema proposto, e forniscono anzi tutte quelle radici della (2) che soddisfano al problema stesso, e in tal caso il problema non è veramente di grado n, ma di grado $n_1 < n$; oppure le radici, sia di $\varphi_1 = 0$, che di $\varphi_2 = 0$, soddisfano al problema, ed in tal caso il problema è riducibile, e si scinde in due problemi, uno di grado n_1, l'altro di grado n_2. Perciò, parlando nel seguito di un problema di grado n, supporremo comunemente *irriducibile* la relativa equazione. Gli esempi di problemi che porteremo fra poco renderanno evidenti queste considerazioni.

Osservazione. — Se ai punti *dati*, aventi le coordinate 1, a, b, c..., si aggiungono nuovi punti di coordinate p, q..., che si riguardano pure come dati, il campo di razionaliià $K = [1, a, b, c...]$, si muta nel campo di razionalità $K' = [1, a, b, c, ..., p, q ...]$, il quale può differire da K (esser più ampio di K). In questa ultima ipotesi può accadere che una equazione algebrica, *irriducibile* nel campo K, sia invece *riducibile* rispetto al nuovo campo[2] K'. Può accadere dunque che un problema, il quale sia irriducibile di grado n quando certi punti si riguardano come dati, si scinda in problemi di grado inferiore quando il gruppo dei punti dati si ampli coll'introdurne dei nuovi.[3]

Va però notato che questo fatto non si presenta se i nuovi punti, che si aggiungono, sono *interamente arbitrari*. Se infatti accadesse che una equazione irriducibile nel campo $K = [1, a, b, c...]$, divenisse riducibile nel campo $K' = [1, a, b, c, ..., p, q...]$, e ciò *comunque* fossero scelti i numeri p, q... (coordinate dei punti aggiunti), l'equazione sarebbe riducibile anche

---

[1] Per questa nozione si veda CAPELLI, l. c., pag. 550, 631.

[2] Vedi CAPELLI, l. c., pag. 631.

[3] Così, mentre il problema di bisecare un angolo retto, dati i punti ciclici, è di secondo grado (e consiste nel costruire le rette doppie di una involuzione determinata dai due lati dell'angolo e dalle due rette isotrope uscenti dal vertice), quel problema si scinde in due problemi di primo grado quando si suppongano dati i vertici di un quadrato (Cfr. n. 193, es. 24)).

se a p, q... si attribuissero valori appartenenti al campo K. Ma allora il campo K' verrebbe a coincidere col campo K; l'equazione nominata sarebbe dunque, nel tempo stesso, irriducibile e riducibile in K, il che è assurdo.

Queste considerazioni possono applicarsi a giustificare certe avvertenze, di cui abbiamo parlato, nella scelta del particolare sistema di coordinate proiettive (o cartesiane) a cui il problema vien riferito. Si è già detto che gli elementi fondamentali di quel sistema vanno aggiunti ai dati primitivi, quando non vi siano già inclusi. Segue che, mutando il sistema delle coordinate proiettive, muterà generalmente il campo di razionalità definito dai dati. L'equazione da cui il problema dipende non muterà grado per questo, giacchè le relazioni fra le antiche coordinate e le nuove sono lineari; ma l'equazione stessa potrà da irriducibile divenir riducibile, o viceversa. Dunque un problema irriducibile, di un certo grado, rispetto ad un primo sistema di coordinate proiettive (o cartesiane), può scindersi in problemi di grado inferiore, quando esso venga riferito ad un nuovo sistema di coordinate proiettive (o cartesiane).[1]

Ecco perchè, volendo evitare che la scelta del sistema di riferimento alteri artificialmente le condizioni del problema, converrà scegliere gli elementi fondamentali fra i punti inizialmente dati (con che il campo di razionalità K sarà ristretto, quanto è possibile, rapporto al problema), o, quando ciò non si possa fare, in punti affatto arbitrari del piano, da aggiungersi ai dati (chè questa scelta, pur ampliando il campo K, non rende riducibile un problema, per sua natura irriducibile).

364. Sulle costruzioni che possono eseguirsi colla riga. — Passando ora alla seconda parte della nostra trattazione, vogliamo esaminare quali classi di problemi siano risolubili con determinati strumenti. Dovremo perciò precisare le operazioni grafiche che possono compiersi con un dato strumento, e trovarne, col mezzo delle coordinate, le equivalenti operazioni analitiche.

Si tratti anzitutto della *riga*. La riga permette di eseguire le seguenti due operazioni:

1) tracciare la retta che passa per due punti assegnati;

2) determinare la intersezione di due rette, che possono esser definite ciascuna da una coppia di punti.

Queste operazioni noi riteniamo sempre eseguibili, anche quando i punti o le rette nominate cadano fuori del foglio del disegno, o siano

[1] Ad es., d'accordo colla nota precedente, si troverà che il problema di secondo grado della bisezione di un angolo retto, si scinde in due problemi di primo grado, quando si riferisca la figura ad un sistema cartesiano ortogonale *con una sola unità di lunghezza*.

improprie, purchè ciascuno di quei punti sia determinato come intersezione di due rette tracciate in parte nel foglio, e ciascuna di quelle rette come congiungente due punti assegnati nel modo ora indicato (cfr. n. 126, es. 22), 23), 24), 25)).

Ciò posto, supponiamo dati più punti, in numero finito, i quali, rispetto ad un sistema di coordinate proiettive non omogenee (i cui punti fondamentali trovansi fra i dati), abbiano, promiscuamente, le coordinate $1, a, b, c\ldots$, definenti il solito campo di razionalità

$$K = [1, a, b, c\ldots].$$

La operazione grafica 1) ci dà una retta, la cui equazione ha coefficienti che si ottengono eseguendo operazioni razionali sulle coordinate dei due punti; quei coefficienti appartengono dunque al campo K. La operazione grafica 2) ci dà un punto, le cui coordinate si ottengono con operazioni razionali eseguite sui coefficienti delle equazioni delle due rette; quelle coordinate appartengono dunque ancora al campo K. Segue di qua che, per quante volte si ripetano costruzioni grafiche della natura indicata, partendo dai punti dati, ai quali vanno aggiunti via via quelli già costruiti, si otterranno sempre punti le cui coordinate apparterranno al campo K; da questo non sarà possibile uscire, finchè si operi colla riga nel modo indicato.

Rimane però da esaminare la questione inversa: se ogni punto, le cui coordinate appartengano al campo K, possa ottenersi mediante un numero finito di costruzioni eseguibili colla sola riga.

Una questione siffatta ebbe già risposta affermativa nella ipotesi che i punti dati appartenessero ad una stessa retta (n. 179, es. 29)). Noi potremo sempre ridurci a quel caso mediante la considerazione seguente.

Riprendiamo il triangolo fondamentale XYZ del sistema di coordinate, il punto unità E (1, 1), e gli altri punti dati, aventi, promiscuamente, le coordinate $a, b, c\ldots$ Partendo da questi e valendoci di costruzioni eseguibili colla sola riga, possiamo anzitutto procurarci sopra una delle rette fondamentali, ad es. ZX, punti aventi la prima coordinata uguale rispettivamente ad $1, a, b, c\ldots$ (la seconda coordinata essendo nulla). Infatti uno qualsiasi di questi numeri, ad es. a, sarà la prima, o la seconda coordinata di uno, P, fra i punti dati. Nel primo caso la proiezione di P su ZX da Y sarà il punto richiesto $(a, 0)$; nel secondo caso conduciamo la retta XP, che ha l'equazione $y = a$, e seghiamola colla retta ZE avente la equazione $x = y$; otterremo il punto (a, a), il quale, proiettato da Y su ZX, ci darà il punto desiderato $(a, 0)$. Ottenuti così i punti $x = 1, a, b, c\ldots$ sopra ZX, ed operando su questi e su Z $(x = 0)$ ed X $(x = \pm\infty)$, mediante costruzioni eseguibili colla sola riga, noi sappiamo costruire (n. 179, es. 29)) sulla retta stessa ogni punto M la cui prima coordinata $x = m$

appartenga al campo di razionalità $X=[1, a, b, c...]$. In modo perfetta mente analogo potremo costruire sulla retta ZY un punto N la cui seconda coordinata $y=n$ appartenga al campo stesso. E finalmente nella intersezione delle due rette YM, XN avremo un punto le cui coordinate m, n sono due numeri arbitrari del campo K. In conclusione:

Dati più punti in un piano (riferiti ad un sistema di coordinate proiettive, i cui punti fondamentali ed unità sono compresi fra i dati), *la condizione necessaria e sufficiente perchè un nuovo punto possa ottenersi da quelli mediante un numero finito di costruzioni eseguibili colla sola riga, è che le coordinate di questo punto appartengano al campo di razionalità definito dai dati.*

Il risultato stesso può anche esser presentato sotto la forma seguente, che ne mette in rilievo tutta l'importanza:

« Siano dati in un piano più punti, in numero finito; si congiungano « questi a due a due, si determinino le intersezioni delle rette così otte- « nute, si estenda il gruppo dei punti primitivi aggregandovi i nuovi punti « trovati, si operi sul nuovo gruppo come sull'antico, e così si continui « all'infinito. Si otterrà in tal guisa una classe di infiniti punti (eccettuato « il caso che i punti primitivi siano tutti, o tutti meno uno, allineati). « Si domanda di caratterizzare in qualche modo la classe dei punti così « ottenuti, la quale, come subito si verifica, non comprende tutti i punti « del piano ». La risposta è data dall'ultima proposizione:

« Se tra i punti dati si scelgono quattro, che siano vertici di un qua- « drangolo, come punti fondamentali ed unità di un sistema di coordinate « proiettive, e si chiamano a, b, c... le coordinate degli altri punti dati, « ove esistano, la nostra classe di punti si compone di tutti quei punti le « cui coordinate appartengono al campo di razionalità $[1, a, b, c...]$ ».

Le operazioni geometriche che conducono alla costruzione di una siffatta classe di punti trovano dunque riscontro nelle operazioni aritmetiche che conducono alla costruzione di un campo di razionalità, partendo da quantità date in numero finito. Il caso più semplice di quattro soli punti, il quale conduce alla classe di tutti i punti aventi le due coordinate razionali, fu considerato la prima volta dal MÖBIUS, che chiamò *rete* quella classe.

365. Sui problemi risolubili colla sola riga. — La proposizione del numero precedente ci permette di risponder subito ad una delle questioni che ci siamo proposte: quali siano i problemi risolubili colla sola riga.

Supposto al solito (n. 363) che il problema si riduca alla ricerca di un punto, affinchè questo sia costruibile colla sola riga, dovranno le sue coordinate x, y appartenere al campo di razionalità K definito dai dati. Ma allora le equazioni irriducibili, da cui dipendono x, y, saranno per forza di primo grado; e viceversa. Dunque:

Mediante l'uso della sola riga si possono risolvere i problemi di primo grado, e questi soltanto.

Osservazione. — S'intende però che devono esser *dati graficamente* tutti quegli elementi, ad es. punti, che sono necessari perchè il problema sia *determinato* (e possa esser posto in equazione). Ora, se il problema è di natura grafica, i punti in questione saranno generalmente quelli soltanto che compariscono esplicitamente nell'enunciato. Se invece il problema è di natura metrica, converrà aggiungere ai punti esplicitamente nominati, quei punti (ad es. impropri, o, in particolare, *ciclici*) che occorrono per tradurre graficamente (n. 190, Oss.) le relazioni metriche contemplate nel problema proposto. Così, se è richiesta la parallela per un punto ad una retta assegnata r, o il punto medio di un segmento giacente su r..., deve esser *dato* graficamente il punto all'infinito di r, ad es. mediante una retta parallela ad r, tracciata nella figura. E se nel problema figurano due o più direzioni distinte, deve esser compresa fra i dati la retta all'infinito; il che si ottiene, ad es., assegnando un parallelogramma. Per risolvere colla riga problemi in cui compariscano relazioni di ortogonalità, bisognerà che sia data inoltre la involuzione circolare intorno ad un punto, coll'assegnarne due coppie; basta perciò supporre dato un quadrato, del quale le direzioni dei lati e quelle delle diagonali fissano la involuzione circolare sulla retta all'infinito.

Il lettore, che volesse veder confermate queste osservazioni generali sopra esempi concreti, riprenda in esame i vari problemi metrici di primo grado che furono trattati, o proposti nel corso; (ad es. n. 126, es. 23), 25); n. 152, es. 34), 35); n. 193, es. 22)-27)). Egli comprenderà ora *a priori* la ragione per la quale quei problemi potevano risolversi coi mezzi indicati.

366. Sulle costruzioni eseguibili colla riga e col compasso. — Esaminiamo ora quale contributo porti l'uso del compasso, aggiunto alla riga. Il compasso permette di eseguire le seguenti operazioni (da aggiungersi alle 1) e 2), relative alla riga, menzionate nel n. 364):

3) descrivere il cerchio che ha per centro un punto noto e per raggio la distanza di due punti noti;

4) determinare le intersezioni di un cerchio con una retta nota;

5) determinare le intersezioni di due cerchi noti.

Per tradurre analiticamente queste operazioni, riferiamo i punti dati ad un sistema di coordinate, che possiamo supporre ormai sia *cartesiano ortogonale* con un'unica unità di lunghezza, visto che il compasso permette di costruire un angolo retto, e di trasportare un segmento dall'uno all'altro lato dell'angolo. Comprendendo fra i dati anche il punto unità, indichiamo al solito con 1, a, b, c... le coordinate dei punti dati, e con K il campo di razionalità che esse determinano.

Ciò posto, il cerchio di cui parla la costruzione 3), applicata ai punti primitivamente dati, ha una equazione del tipo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

nella quale α, β, r^2, e quindi i coefficienti, sono numeri appartenenti al campo K. Per trovare analiticamente le intersezioni di questo cerchio con una retta congiungente due punti dati (operazione 4)), o con un altro cerchio definito come il primo (operazione 5)), noi dobbiamo eseguire (nn. 56, 57) la risoluzione di una equazione di secondo grado, i cui coefficienti dipendono razionalmente da quelli delle linee intersecantisi, e quindi appartengono al campo K. Le radici di quella equazione, e, per conseguenza, le coordinate dei punti richiesti, si otterranno adunque eseguendo, oltre ad operazioni razionali, *una* estrazione di radice quadrata sopra un numero del campo K. Queste coordinate appartengono perciò a quel campo di razionalità K', che si ottiene dal campo K aggiungendovi le radici quadrate di tutti i numeri positivi (se vogliamo limitarci ad enti reali) contenuti in K.

Viceversa, ogni punto le cui coordinate x, y appartengano a K' può ottenersi dai punti dati mediante costruzioni eseguibili con riga e compasso. La ipotesi è infatti che il numero x (od y) possa ottenersi mediante un numero finito di operazioni razionali eseguite sui numeri di K e sulle loro radici quadrate; ma poichè le operazioni razionali si traducono, come già sappiamo, in costruzioni eseguibili colla riga, possiamo supporre che la stessa x sia la radice quadrata di un numero k di K. In tal caso però $x = \sqrt{k \cdot 1}$ è il valore del segmento medio proporzionale fra due segmenti noti, aventi i valori 1 e k; quel segmento è adunque costruibile con riga e compasso, come si era affermato.

Noi finora abbiamo applicato le costruzioni 3), 4) e 5) immediatamente ai punti primitivi, o, ciò che conduce alle stesse conseguenze, a punti le cui coordinate appartengono al campo K. Quelle costruzioni ci hanno fornito nuovi punti, le cui coordinate appartengono ad un campo più esteso K'. Ma sui nuovi punti, che vengono aggiunti ai primitivi, e su questi, possiamo ancora operare mediante le dette costruzioni. Arriveremo così ad ottenere ulteriori punti, le cui coordinate apparterranno a quel campo di razionalità K'', che proviene da K' (coll'aggiunta delle radici quadrate dei numeri di K') come K' proveniva da K. Si può proseguire in tal guisa, ed è chiaro che si giungerà al seguente risultato:

Si parta da un numero finito di punti aventi le coordinate ortogonali 1, a, b, c..., *e su questi, e sui punti che via via si ottengono, si operi mediante costruzioni determinate da eseguirsi colla riga e col compasso. Ogni punto a cui si perverrà in tal guisa (dopo un numero finito di costruzioni) avrà coordinate che potranno calcolarsi, partendo dai numeri dati, mediante*

un numero finito di operazioni razionali e di estrazioni di radici quadrate; e viceversa, ogni punto avente coordinate di tal natura potrà costruirsi mediante la riga ed il compasso.

Od anche, se chiamiamo *campo euclideo determinato dai numeri dati* 1, $a, b, c...$, l'insieme dei numeri reali che si ottengono da questi mediante un numero finito di operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate, potremo dire:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè, partendo da certi punti dati, si possa costruire un nuovo punto mediante riga e compasso, è che le coordinate ortogonali di questo punto appartengano al campo euclideo determinato dalle coordinate dei punti dati.

Siccome poi la estrazione di radice quadrata è equivalente alla risoluzione di una equazione di secondo grado, un numero generico del campo euclideo sopra nominato può anche definirsi nel modo seguente. Si formi una prima equazione quadratica, i cui coefficienti appartengano al campo di razionalità $K = [1, a, b, c...]$ definito dai numeri dati, e si aggiungano le radici di questa al campo K, ottenendo un campo (generalmente) più ampio K_1; si costruisca poi una seconda equazione quadratica, i cui coefficienti appartengono al campo K_1, e si aggiungano a K_1 le radici di questa equazione, ottenendo un nuovo campo K_2; e così si continui. Tutte le equazioni quadratiche che in tal guisa si possono formare hanno per radici reali numeri del campo euclideo; e viceversa, ogni numero di questo campo è radice di una equazione costruibile nel modo detto.

367. Sui problemi risolubili mediante la riga e il compasso. — Le considerazioni precedenti, quando si ricordino le convenzioni fatte per classificare i problemi geometrici, ci conducono al risultato fondamentale che segue:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un problema geometrico possa risolversi colla riga e col compasso è che la equazione da cui il problema dipende abbia le radici appartenenti al campo euclideo determinato dai dati; o, in altre parole, *che quella equazione possa risolversi mediante un numero finito di operazioni razionali e di estrazioni di radici quadrate eseguite partendo dai numeri dati.*

Potremo dire ancora:

Sono risolubili colla riga e col compasso tutti i problemi di primo e di secondo grado; e, fra i problemi (algebrici) di grado superiore, quelli soltanto che conducono ad equazioni la cui risoluzione può farsi dipendere dalla risoluzione di un numero finito di equazioni quadratiche, formate nel modo sopra indicato. Questi ultimi problemi si risolvono mediante la successiva risoluzione di più problemi di secondo grado.

In base a questo teorema, la questione geometrica di decidere se un

determinato problema possa risolversi colla riga e col compasso, si riduce (quando si riesca a scrivere la equazione del problema) alla questione algebrica di decidere se una data equazione possa risolversi mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate. Ora l'algebra possiede oggi metodi generali per affrontare questioni siffatte. Essa quindi ha potuto, nel secolo XIX, portare una risposta definitiva a domande che i geometri greci avevano posto, e che per oltre venti secoli erano rimaste insolute.

Non possiamo qui trattenerci sulla teoria algebrica delle equazioni risolubili mediante radicali quadratici. Ci limitiamo ad enunciare un teorema fondamentale in quella teoria, rimandando, per la dimostrazione e per altre nozioni, agli autori che si occuparono in particolare di questo argomento:[1]

Condizione necessaria, non sufficiente, affinchè una equazione algebrica irriducibile (in un campo di razionalità cui appartengano i suoi coefficienti) possa risolversi mediante un numero finito di operazioni razionali ed estrazioni di radici quadrate, è che il grado della equazione sia una potenza di 2.

368. Esempi di problemi di secondo grado, o di grado superiore, risolubili con mezzi elementari. — EUCLIDE ha insegnato a risolvere colla riga e col compasso i problemi di secondo grado;[2] tali sono, ad es., la costruzione di un segmento medio proporzionale fra due segmenti dati, la bisezione di un dato angolo, la divisione di un segmento in media ed estrema ragione, ecc.

Molti problemi grafici di secondo grado si incontrano, come vedemmo, nella Geometria proiettiva (n. 193, es. 28) e seg.); fondamentale, tra questi, la determinazione dei punti uniti in una proiettività od involuzione tra punteggiate sovrapposte, al quale problema mostreremo fra poco potersi ricondurre ogni altro problema di secondo grado.

Fra i problemi di grado superiore al secondo, che possono risolversi tuttavia con riga e compasso, citiamo anzitutto la costruzione di un cerchio che tocchi tre rette date, lati di un triangolo, problema di quarto grado, la cui risoluzione dipende dalla bisezione di due angoli del triangolo, cioè da due problemi di secondo grado. Sotto l'aspetto proiettivo quel problema rientra nel seguente, che abbiamo imparato a risolvere (n. 260, es. 9), 10)): costruire una conica di cui siano date tre tangenti e due punti, o tre punti

---

[1] PETERSEN, *Teoria delle equazioni* (trad. ROZZOLINO e SFORZA); KLEIN, *Conferenze sopra alcune questioni di Geometria elementare* (trad. GIUDICE) pp. 5-11 (Torino, 1896); ENRIQUES, *Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici...*, nel volume citato «Questioni riguardanti la Geometria elementare» pp. 357-368; (vol. II, pp. 132-140 della 2ª ediz.).

[2] Tale risoluzione era già nota alla Scuola Pitagorica del V secolo av. Cr.

e due tangenti; qui della curva si domandano tali ulteriori elementi, che si possa applicare una delle note costruzioni lineari per punti o per tangenti.

Pure di quarto grado, ma risolubile con mezzi elementari, è il problema di costruire le quattro tangenti comuni a due cerchi, o, in generale, a due coniche di cui si conoscano già due intersezioni (n. 260, es. 3)); ed il problema duale di costruire le intersezioni di due coniche conoscendo due tangenti comuni, ad es. di due coniche aventi un fuoco comune (n. 291, es. 9)).

Citiamo finalmente un celebre problema di ottavo grado, che APOLLONIO ha insegnato a risolvere coi mezzi euclidei: la determinazione di un cerchio tangente a tre cerchi assegnati. Delle numerose risoluzioni proposte, una, dovuta a NEWTON, trovasi accennata nell'es. 10) del n. 291. Quanto al problema dei poligoni regolari, si veda il n. 372.

369. Sopra alcuni strumenti atti a sostituire il compasso nelle costruzioni elementari. — La ricerca generale che precede, sui problemi risolubili mediante riga e compasso, può estendersi in due direzioni. Si può infatti domandare se esistano strumenti atti a sostituire, in parte o interamente, la riga o il compasso nella risoluzione dei detti problemi. Oppure si può esaminare quali strumenti convenga aggiungere alla riga ed al compasso, per risolvere nuove classi di problemi geometrici.

Per quanto riguarda la prima domanda, ricordiamo anzitutto che l'operazione essenziale risoluta dal compasso (quando sia associato alla riga) è la seguente: noto un segmento, la cui lunghezza sia a rispetto ad una data unità di lunghezza, costruire un nuovo segmento la cui lunghezza sia $\sqrt{a}$. Ogni altro strumento che permetta di eseguire la stessa costruzione (qualunque sia $a > 0$) può essere sostituito al compasso.

Notiamo, in secondo luogo, che quella costruzione può compiersi mediante uno strumento il quale permetta, dati i segmenti 1 e $k < 1$, di costruire il segmento di valore $\sqrt{1 - k^2}$. Sia infatti a la lunghezza di un dato segmento. Noi possiamo costruire colla sola riga (n. 364) un segmento avente la lunghezza

$$k = \frac{1 - a}{1 + a},$$

poi, collo strumento in discorso, il segmento

$$b = \sqrt{1 - k^2} = \frac{2}{1 + a}\sqrt{a},$$

e finalmente il segmento

$$\sqrt{a} = \frac{1 + a}{2} b.$$

Applichiamo queste considerazioni a due esempi:

I. Sia tracciato (con uno strumento qualsiasi) un *cerchio* in una determinata posizione nel piano; e ne sia noto il centro O. È chiaro intanto che si potranno condurre, colla sola riga, due rette perpendicolari x, y per O, giacchè basterà iscrivere nel cerchio un rettangolo, di cui due diametri arbitrari possono esser assunti come diagonali, e costruir poi le mediane del rettangolo. Assumendo il raggio del cerchio come unità, abbiamo un sistema di coordinate ortogonali, a cui riferiremo i dati. Il cerchio avrà l'equazione

$$x^2 + y^2 = 1, \quad \text{ossia} \quad y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Ora questa ci mostra che, noto il segmento $x < 1$, si può costruire il segmento $\sqrt{1 - x^2}$, ordinata del punto che ha l'ascissa x. Ricaviamo, in base alla considerazione precedente, il teorema di PONCELET (1822) e STEINER (1833): *ogni problema risolubile colla riga e col compasso può pure risolversi colla sola riga, purchè sul foglio del disegno sia segnato un cerchio fisso.* Il centro del cerchio si adopera soltanto nei problemi d'indole metrica.[1]

II. Sia data *una riga a due orli paralleli,* vale a dire una riga ordinaria, di cui si adoperano insieme i due orli, in guisa da poter condurre due rette parallele distanti quanto la larghezza (od altezza) della riga, che assumeremo come unità lineare.

Osserviamo subito che questa riga può adoperarsi in due modi diversi. Un primo modo consiste nel far combaciare un orlo di essa con una retta data, e costruire le parallele a questa, distanti da essa dell'unità di lunghezza. Così procedendo, possiamo, dati i due lati di un angolo, costruire un parallelogramma equilatero avente, come uno degli angoli, l'angolo dato; possiamo adunque bisecare l'angolo, ottenendo due rette perpendicolari x, y, sulle quali potremo costruire un quadrato avente per lato l'unità lineare. Possiamo ancora, servendoci di parallele alle nominate bisettrici, costruire sopra un lato dell'angolo un segmento uguale ad un segmento dato sopra l'altro lato. Ora i due problemi di « bisecare un angolo dato », e « trasportare un dato segmento da una retta ad un'altra » sono di secondo grado; ma non si deve credere che ogni problema di secondo grado possa ricondursi a questi. Ciò fu dimostrato[2] a proposito di uno

---

[1] Per la esecuzione effettiva di siffatte costruzioni si veda l'opuscolo di STEINER, *Die geometrischen Constructionen...*, riprodotto in STEINER'S *Gesammelte Werke*, Vol. I, pag. 461; od anche l'articolo di GIACOMINI, *Sulla risoluzione dei problemi geometrici...*, nel citato volume di ENRIQUES, pag. 279; (vol. II, pag. 73 e seg. della 2ª ediz.).

[2] HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Cap. VII (Leipzig, 1899); memoria pubblicata in un volume dal Teubner, e tradotta poi in varie lingue, ad es. in francese nel periodico « Annales de l'École normale supérieure » (1900). Un cenno sul detto strumento si trova pure nel mio articolo citato, inserito nella raccolta di ENRIQUES, pp. 343, 348; (vol. II, pag. 120 della 2ª ediz.).

strumento, detto *trasportatore di segmenti,* il quale permette appunto di risolvere il secondo (e quindi il primo) problema. A questo strumento è equivalente la riga a due orli adoperata nel modo ora esposto; essa adunque non può sostituire interamente il compasso, finchè si limiti la sua azione alle operazioni indicate.

Ma vi è un secondo modo di adoperare la riga a due orli, che consiste nell'adagiar la riga in modo che i suoi due orli passino rispettivamente per due punti, la cui distanza superi od uguagli l'altezza della riga, tracciando le rette così determinate. In tal guisa si riesce a risolvere *ogni* problema che sia risolubile colla riga e col compasso.

Per veder ciò, partiamo da un segmento $OA = p > 1$, posto sopra l'asse delle x, segmento che riguardiamo come noto. Collocata la riga in guisa che un orlo passi per O, e l'altro per A, tracciamo, seguendo quest'ultimo orlo, la retta AB, che incontrerà in B l'asse y; sia $OB = q$ il segmento che così si costruisce. Per calcolare q, notiamo che la retta indefinita AB ha l'equazione

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

e dista dell'unità dall'origine O; ricaviamo di qua la relazione

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}}} = 1,$$

donde (in valore assoluto)

$$\frac{1}{q} = \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}}.$$

Questa ci mostra che, data la riga a due orli, e noto

$$k = \frac{1}{p} < 1,$$

si può costruire l'espressione $\sqrt{1 - k^2}$. E tanto a noi basta per affermare:

Ogni problema risolubile colla riga e col compasso può anche risolversi usando la sola riga a due orli paralleli.[1]

I risultati precedenti si confermano per via sintetica, purchè si ricordi che il problema di secondo grado consistente nella determinazione dei punti uniti di una proiettività od involuzione fra punteggiate sovrapposte,

[1] L'applicazione di questo strumento, in luogo del compasso, fu indicata da ADLER (nei «Sitzungsberichte» dell'Accad. di Vienna, 1890). Si veda in proposito l'articolo di GIACOMINI, *Sulla risoluzione dei problemi geometrici...* nella Raccolta citata di ENRIQUES, pp. 304-309; (vol II, pp. 89-94 della 2ª ediz.).

può risolversi colla sola riga quando sia noto un cerchio (nn. 178, 198), o colla sola riga a due orli (n. 179, es. 42)); e si noti inoltre che ogni altro problema di secondo grado può ridursi a quello ora nominato. Quest'ultima affermazione si giustifica osservando che la risoluzione di un qualsiasi problema di secondo grado, vale a dire la determinazione grafica delle radici di una equazione

$$x^2 + p\,x + q = 0,$$

dove p, q possono riguardarsi come coordinate proiettive (od anche ascisse) di punti *noti* sopra una retta, su cui sono segnati i punti fondamentali ($x = \pm\infty$, 0, 1), equivale alla costruzione dei punti doppi della involuzione

$$x\,x' + \frac{p}{2}(x + x') + q = 0,$$

la quale è nota, perchè di essa si possono costruire linearmente quante coppie si vogliano (ad es. la coppia $x = 0$, $x' = -\frac{2q}{p}$ e la coppia $x = \pm\infty$, $x' = -\frac{p}{2}$).

III. Finalmente ricordiamo il risultato ottenuto dal MASCHERONI (*Geometria del compasso*, 1797; ediz. francesi del 1798 e 1828), secondo il quale *si può risolvere col solo compasso ogni problema risolubile con riga e compasso* (quando, s'intende, l'elemento richiesto sia un punto od un cerchio). Non ci fermiamo ad esporre qui la dimostrazione di questo fatto, giacchè, essendo fondata sopra concetti diversi da quelli contenuti nelle pagine precedenti, ci porterebbe troppo lontano dai nostri studi.[1]

370. Risoluzione dei problemi del 3° e 4° grado mediante una conica fissa. — Veniamo ora alla seconda questione proposta al principio del n. 369: quali strumenti convenga aggiungere alla riga ed al compasso per la risoluzione dei problemi di grado superiore al secondo. Ci limiteremo a dimostrare il teorema seguente, dovuto ai due fondatori della Geometria analitica, FERMAT e DESCARTES (1637):

Ogni problema di 3° o 4° grado può risolversi colla riga e col compasso, purchè sia tracciata inoltre, sul foglio del disegno, una curva del secondo ordine diversa dal cerchio.

Supponiamo ad es. che questa curva sia la parabola

$$x^2 = y, \tag{1}$$

[1] Il lettore potrà consultare, oltre all'opera originale del MASCHERONI, l'articolo di DANIELE, *Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso*, nella Raccolta citata di ENRIQUES, pag. 247; (vol. II, pag. 27 della 2ª ediz.).

riferita ad assi ortogonali. Osserviamo anzitutto che il problema di determinarne le intersezioni con un dato cerchio

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0, \tag{2}$$

viene a dipendere dall'equazione di quarto grado

$$x^4 + (1 - 2\beta)x^2 - 2\alpha x + \gamma = 0, \tag{3}$$

che si ottiene eliminando y fra le (1) e (2); le radici reali della (3) possono dunque esser costruite *graficamente,* quando siano *tracciate* la parabola e il cerchio.

Ciò premesso, supponiamo di dover risolvere un problema di quarto grado, il quale dipenda dall'equazione

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0, \tag{4}$$

dove a, b, c, d sono quantità appartenenti al campo di razionalità definito dai dati (sono ad es. lunghezze di segmenti noti sull'asse x). Possiamo intanto, senza introdurre restrizioni, limitarci al caso che sia $a = 0$; infatti, nella ipotesi opposta, si assuma come incognita la quantità x_1, legata ad x dalla relazione $x = x_1 - \frac{a}{4}$; fatta la sostituzione nella (4), si riconosce che la nuova equazione in x_1, pur essendo di quarto grado, manca del termine a terzo grado, come desideriamo.

Sia adunque

$$x^4 + b x^2 + c x + d = 0 \tag{4'}$$

l'equazione del nostro problema. Paragonandola colla (3), vediamo che, quando si siano determinate α, β, γ in guisa da avere

$$1 - 2\beta = b, \qquad -2\alpha = c, \qquad \gamma = d,$$

ossia

$$\beta = \frac{1-b}{2}, \qquad \alpha = -\frac{c}{2}, \qquad \gamma = d, \tag{5}$$

allora le radici richieste della (4') sono le ascisse delle intersezioni della parabola (1) col cerchio (2). E poichè la costruzione di questo cerchio (di centro (α, β) e raggio $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$) può farsi con mezzi elementari, in virtù delle (5), concludiamo che la risoluzione di ogni problema di quarto grado si può ricondurre alla determinazione delle intersezioni di una parabola fissa con un cerchio costruibile elementarmente.

La stessa conclusione vale, *a fortiori,* per i problemi di terzo grado, giacchè la equazione cubica

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

ha le tre radici comuni colla equazione di quarto grado

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x = 0.$$

di cui la quarta radice è nulla. Vorrà dire che il cerchio da adoperarsi segherà la parabola (1) in quattro punti, di cui uno sarà noto *a priori* (cadrebbe nell'origine se fosse $a = 0$, perchè allora l'ultima delle (5) darebbe $\gamma = d = 0$), e gli altri tre condurranno alle soluzioni del problema.

Lasciamo al lettore l'applicazione di questo metodo alla risoluzione dei due problemi di terzo grado di cui ora parleremo.

371. I problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo. — Portiamo qualche esempio di problemi di grado superiore al secondo.

Abbiamo già accennato alla risoluzione grafica, mediante curve superiori, di due celebri problemi di terzo grado (nn. 64, 65). Esaminiamoli ora sotto l'aspetto algebrico.

I. Il problema della *duplicazione del cubo* (o *problema di* DELO) consiste nella ricerca di un segmento, il cui cubo sia doppio del cubo costruito sopra un segmento dato. Assunto quest'ultimo come unità lineare, il problema dipende dall'equazione

$$x^3 - 2 = 0,$$

mentre il campo di razionalità definito dai dati è il campo [1] costituito da tutti i numeri razionali. Quella equazione è irriducibile; infatti, se il primo membro fosse il prodotto di due fattori $(x - \alpha)$ $(x^2 + \beta x + \gamma)$ a coefficienti razionali, l'equazione stessa avrebbe una radice razionale α, mentre nessun numero razionale ha per cubo il numero 2. Ricordando il teorema finale del n. 367, possiamo dunque concludere che *il problema della duplicazione del cubo non è risolubile colla riga e col compasso.*

II. Il problema della *trisezione dell'angolo* consiste nel dividere in tre parti uguali un angolo dato φ. Si assumano il vertice ed un lato come origine ed asse x di un sistema cartesiano ortogonale; l'altro lato sarà noto quando si conosca ad es. la ordinata, $a = \operatorname{tg} \varphi$, del punto in cui esso sega la retta $x = 1$. Il campo di razionalità definito dai dati è ora $K = [1, a]$. Come incognita assumiamo

$$y = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{3},$$

ordinata del punto in cui una retta trisettrice sega la retta $x = 1$. Ricordando la formola trigonometrica

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

e ponendo $\alpha = \frac{\varphi}{3}$, risulta subito che y è radice della equazione cubica

$$y^3 - 3 a y^2 - 3 y + a = 0. \tag{1}$$

Se noi dimostriamo che questa equazione è irriducibile nel campo K in corrispondenza ad infiniti valori di a, risulterà (in virtù del teorema algebrico, n. 367, sopra citato) che la trisezione di un angolo dato è generalmente ineseguibile colla riga e col compasso. Premesso che la riducibilità della equazione (1) porterebbe (come nel problema precedente) l'esistenza di una radice appartenente al campo K, supponiamo ad es. che a sia un numero intero. In tal caso K è l'insieme dei numeri razionali, e quella radice dovrebbe esser razionale, anzi (per un noto teorema sulle equazioni a coefficienti interi) dovrebbe esser un numero intero divisore di a. Ora, che nessun divisore di a soddisfi all'equazione (1), si verifica subito per $a = 2, 3 \ldots$; e, con un facile calcolo, si verificherebbe lo stesso fatto per *qualunque* valore intero di a, esclusi i tre valori $a = 1, 0, -1$ (ai quali corrispondono le radici razionali $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$). Concludiamo che, *per infiniti valori dell'angolo dato, la trisezione è ineseguibile colla riga e col compasso.*[1] Esistono però angoli particolari che possono esser trisecati coi detti strumenti; tali sono ad es. l'angolo retto ($a = \pm\infty$), l'angolo semiretto ($a = 1$), ecc.

372. Il problema dei poligoni regolari.

I. *La divisione di un dato angolo* φ *in un numero intero* n *di parti uguali* dipende da una equazione di grado n, quando si consideri come quantità data $\operatorname{tg}\varphi$, e come incognita $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}$. Quella equazione è irriducibile per un valore generico di φ; il problema non può dunque risolversi, in generale, mediante la riga e il compasso, quando n non sia una potenza di 2.

Ma se $n = 2^k$ (k intero positivo), il problema si risolve coi detti strumenti, qualunque sia φ; giacchè si riduce a k bisezioni successive dell'angolo φ e degli angoli che via via si ottengono. E la risoluzione della equazione di grado 2^k si eseguisce risolvendo k successive equazioni quadratiche.

II. Un esame speciale esigono valori particolari dell'angolo φ. Il caso più interessante si presenta quando $\varphi = 2\pi$, giacchè ad esso corrisponde la *iscrizione di un n.gono regolare in un cerchio.* Qui conviene assumere come incognita il numero complesso

$$z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n},$$

[1] Per una dimostrazione più completa si veda il volume citato del CAPELLI, pag. 648. Si consultino inoltre l'opuscolo citato del KLEIN, pp. 11-14, e l'articolo di CONTI, *Problemi di 3° grado...* nel volume citato di ENRIQUES, pag. 415 (vol. II, pag. 185 della 2ª ediz.), dove si troveranno altre costruzioni o notizie sui due problemi qui nominati.

noto il quale, è pur noto il lato dell'n.gono iscritto nel cerchio di raggio 1. Ora z è radice della equazione binomia

$$z^n - 1 = 0.$$

Questa però è riducibile nel campo $K = [1]$, giacchè

$$z^n - 1 = (z - 1)\,(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1).$$

Fatta astrazione dalla radice $z = 1$, priva di interesse, rimane l'equazione

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = 0,$$

la quale, nella ipotesi che n sia un numero primo, GAUSS dimostrò essere irriducibile.[1] Dunque (n. 367): *la iscrizione di un n.gono regolare in un cerchio, per n numero primo, è ineseguibile colla riga e col compasso se* $n - 1$ *non è una potenza di* 2. Di fronte a questo risultato negativo, è notevolissimo il risultato positivo, pure dovuto a GAUSS (1796): [2]

Si può iscrivere in un cerchio, colla riga e col compasso, un n.gono regolare, ogniqualvolta n sia un numero primo della forma $n = 2^k + 1$ (k essendo un numero intero positivo). I più piccoli valori di n, che soddisfano a queste condizioni, sono

$$n = 3,\ 5,\ 17,\ 257,$$

(corrispondenti a $k = 1,\ 2,\ 4,\ 8$); dei relativi poligoni regolari, solo i primi due erano noti agli antichi; dei due successivi furono indicate costruzioni elementari, fondate sulla discussione algebrica della detta equazione di grado $n - 1$.[3]

Volendo considerare anche i valori composti di n, si trova il teorema seguente:

Affinchè si possa iscrivere in un cerchio, colla riga e col compasso, un n.gono regolare, è necessario e sufficiente che i fattori primi dispari componenti il numero n siano tutti della forma $2^k + 1$, *e tutti compariscano alla prima potenza;* (il fattore 2 può comparire a potenza qualsiasi).

373. Il problema della rettificazione del cerchio. — Le considerazioni che precedono si riferiscono a problemi algebrici. Per i problemi trascendenti si presentano speciali difficoltà. Può accadere, ad es., che non si riesca a scrivere la equazione da cui dipende il problema, e si debba limitarsi a dimostrare che quella equazione *non* può essere algebrica; e può accadere, d'altra parte, che tra le radici di una equazione

---

[1] Si troveranno semplici dimostrazioni nell'opuscolo di KLEIN, pag. 18, nell'articolo citato di ENRIQUES, *Sulle equazioni algebriche...*, pag. 373 (vol. II, pag. 145 della 2ª ediz.), nel volume del CAPELLI, pag. 638.

[2] Per la dimostrazione rinviamo il lettore agli autori sopra citati.

[3] Si vedano, per $n = 17$, tre costruzioni nell'articolo di DANIELE, *Sulle costruzioni dell'ettadecagono regolare*, inserito nel Volume citato di ENRIQUES, pag. 397; (vol. II, pag. 170 della 2ª ediz.).

trascendente si trovino numeri i quali soddisfino pure ad equazioni algebriche, nel qual caso sarà da decidere se fra questi numeri siano comprese, o no, le soluzioni del problema.

Accenniamo qui ad un problema notissimo, che si riconobbe esser trascendente: quello della *rettificazione* (*o quadratura*) *di un cerchio*. Dato il raggio del cerchio, che si potrà assumere come unità di lunghezza, si domanda di costruire un segmento, il quale sia lungo quanto la circonferenza del cerchio, cioè 2π (od un quadrato equivalente al cerchio, cioè di area π). Se il problema fosse algebrico, visto che il campo di razionalità definito dall'unico dato (unità di lunghezza) è il campo di tutti i numeri razionali, esisterebbe una equazione algebrica, a coefficienti razionali, avente, fra le sue radici, π. Ora, in epoca recente (1882), il LINDEMANN riuscì a dimostrare che una siffatta equazione non esiste, che π è un numero *trascendente*.[1] Di qua seguì senz'altro l'impossibilità di rettificare o quadrare un cerchio colla riga e col compasso, o con qualsiasi altro strumento il quale permetta di tracciare soltanto curve algebriche.

---

[1] Di questo teorema furono date varie dimostrazioni, tutte però troppo complicate per esser qui riprodotte. Il lettore potrà consultare, su questo argomento, l'opuscolo citato dal KLEIN, pag. 57; o l'articolo di CALÒ *Sui problemi trascendenti...*, nella citata Raccolta di ENRIQUES, pag. 471; (vol. II, pag. 273 della 2ª ediz.).

II.

Raccolta di alcune formole di Geometria analitica.

A). Geometria piana.

(Le coordinate, di cui si fa uso, sono cartesiane ortogonali, sebbene varie formole valgano pure in assi obliqui. Con P, P', ... si indicano punti di coordinate (x, y), (x', y'), ...; con r, r', ... rette di equazioni $ax + by + c = 0$, $a'x + \ldots = 0$, ...).

Punti e rette.

1) Varie forme dell'equazione di una retta r:

(1) $$ax + by + c = 0;$$

(1') $$y = mx + q, \qquad (m = \operatorname{tg} xr);$$

(1'') $$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

(1''') $$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - n = 0,$$

dove p, q sono i segmenti staccati dalla retta sugli assi, a partire dall'origine, α è l'angolo della normale alla retta coll'asse x, ed n è la distanza dell'origine dalla retta.

2) Equazione di una retta uscente dal punto P':

(2) $$a(x - x') + b(y - y') = 0.$$

3) Equazione della retta $P'P''$:

(3) $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{oppure} \quad \frac{x - x'}{x' - x''} = \frac{y - y'}{y' - y''}.$$

4) Intersezione di due rette r, r':

(4) $$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \qquad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

5) Condizione di parallelismo delle rette r, r':

(5) $$a : a' = b : b'.$$

6) Retta generica del fascio rr':

$$ax + by + c + \lambda(a'x + b'y + c') = 0. \tag{6}$$

7) Condizione perchè tre rette r, r', r'' passino per uno stesso punto:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

8) Distanza di due punti P, P':

$$PP' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \tag{8}$$

9) Distanza del punto P' dalla retta r:

$$\delta = \frac{ax' + by' + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{9}$$

10) Angolo di due rette r, r':

$$\begin{cases} \cos rr' = \dfrac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}\ \sqrt{a'^2 + b'^2}}, \\ \operatorname{sen} rr' = \dfrac{ab' - a'b}{\sqrt{a^2 + b^2}\ \sqrt{a'^2 + b'^2}}. \end{cases} \tag{10}$$

Se le rette r, r' sono date mediante equazioni del tipo $y = mx + p$, $y = m'x + p'$, si ha pure

$$\operatorname{tg} rr' = \frac{m' - m}{1 + mm'}. \tag{10'}$$

11) Condizione di perpendicolarità delle rette r, r':

$$aa' + bb' = 0, \qquad \text{oppure (11')} \qquad mm' + 1 = 0. \tag{11}$$

12) Equazione della perpendicolare ad r condotta per P':

$$\frac{x - x'}{a} = \frac{y - y'}{b}, \tag{12}$$

oppure

$$y - y' = -\frac{1}{m}(x - x'). \tag{12'}$$

13) Area del triangolo $PP'P''$:

$$PP'P'' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Trasformazione delle coordinate.

14) Se i nuovi assi X, Y sono paralleli agli antichi x, y, ed escono dal punto (a, b):

$$x = a + X, \qquad y = b + Y. \tag{14}$$

15) Se i due sistemi hanno la stessa origine, ed è $\alpha = x\widehat{X} = y\widehat{Y}$:

$$x = X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha, \qquad y = X\operatorname{sen}\alpha + Y\cos\alpha. \tag{15}$$

16) Formole di passaggio dal sistema polare (ϱ, φ) al sistema cartesiano ortogonale (x, y), nella ipotesi che il polo coincida coll'origine e l'asse polare coll'asse x:

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi, & y = \varrho\operatorname{sen}\varphi \\ \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, & \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{16}$$

Curve di secondo ordine.

17) Equazione del cerchio di centro (α, β) e raggio r:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2, \tag{17}$$

oppure

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \tag{17'}$$

dove

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \qquad \beta = -\frac{b}{2}, \qquad r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}.$$

18) Equazione generale di una conica:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki}). \tag{18}$$

19) Condizione perchè la conica (18) sia una ellisse, parabola od iperbole, rispettivamente:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 >, =, < 0. \tag{19}$$

20) Condizione perchè la conica (18) si spezzi in due rette:

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

21) Condizioni perchè la conica (18) sia un cerchio:

$$a_{11} = a_{22}, \qquad a_{12} = 0. \tag{21}$$

22) Condizione perchè la conica (18) sia una iperbole equilatera:

$$a_{11} + a_{22} = 0. \tag{22}$$

23) Equazione della tangente alla conica (18) nel punto (x', y'), o della polare del detto punto:

$$\begin{aligned}(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23})y \\ + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}) = 0.\end{aligned} \tag{23}$$

24) Diametro della conica (18) coniugato colla retta $y = kx$:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + k(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0. \tag{24}$$

25) Coordinate del centro della conica (18):

$$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \qquad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}}, \tag{25}$$

dove A_{ik} è il complemento algebrico di a_{ik} entro al discriminante (20).

26) Equazione complessiva degli asintoti della conica a centro (18):

$$a_{11}(x - x_0)^2 + 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + a_{22}(y - y_0)^2 = 0. \tag{26}$$

27) Equazione complessiva degli assi della conica a centro (18):

$$a_{12}(x - x_0)^2 - (a_{11} - a_{22})(x - x_0)(y - y_0) - a_{12}(y - y_0)^2 = 0. \tag{27}$$

28) Equazione dell'asse della conica (18), se è una parabola:

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0. \tag{28}$$

29) Invarianti della conica (18) relativi ad una trasformazione ortogonale di coordinate:

$$a_{11} + a_{22}, \quad (A_{33} =) a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad A. \tag{29}$$

30) Equazioni della ellisse reale (segno superiore), od iperbole (segno inferiore), riferite ai relativi assi:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{30}$$

dove a e b sono i semiassi, il primo trasverso e il secondo non trasverso nella iperbole.

31) Tangente nel punto (x', y') alla conica (30):

$$\frac{xx'}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 1. \tag{31}$$

32) Asintoti della iperbole (30):

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0. \tag{32}$$

33) Distanza focale per la ellisse od iperbole (30):

$$c = \sqrt{a^2 \mp b^2}, \tag{33}$$

supposto per la ellisse $a \geq b$.

34) Eccentricità per la ellisse od iperbole (30):

$$e = \frac{c}{a}. \tag{34}$$

35) Equazione di una iperbole riferita agli asintoti: [1]

(35) $$xy = \text{cost.}$$

36) Equazione di una parabola riferita all'asse e alla tangente nel vertice:

(36) $$y^2 = 2px \qquad (p, \text{ parametro}).$$

37) Distanza dal vertice al fuoco, ed eccentricità nella parabola (36):

(37) $$\frac{p}{2}, \qquad e = 1.$$

38) Equazione polare di una ellisse, parabola od iperbole, scegliendo come polo il fuoco, e come asse polare l'asse focale diretto dal fuoco verso la corrispondente direttrice:

(38) $$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

dove e è la eccentricità (34), (37), e p, che per la parabola entra nell'equazione (36), vale, per la ellisse od iperbole (30), $p = \frac{b^2}{a}$.

B) Geometria solida.

(Le coordinate si suppongono cartesiane ortogonali. Con P, P', ... si indicano punti di coordinate (x, y, z), (x', y', z'), ...; con π, π', ... piani di equazioni $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + \ldots = 0$, ...).

Punti, piani e rette.

1) Varie forme dell'equazione di un piano:

(1) $$ax + by + cz + d = 0,$$

(1') $$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

(1'') $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - n = 0;$$

dove p, q, r sono i valori dei segmenti staccati dal piano sugli assi, a partire dall'origine, α, β, γ gli angoli che una retta normale al piano forma cogli assi, ed n la distanza dell'origine dal piano.

2) Equazione di un piano per un punto P':

(2) $$a(x - x') + b(y - y') + c(z - z') = 0.$$

[1] In questa formola l'angolo xy non è supposto retto.

3) Equazione del piano che passa per tre punti P_1, P_2, P_3:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

4) Piano generico del fascio determinato da due piani π, π':

$$ax + by + cz + d + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0. \tag{4}$$

5) Piano generico della stella determinata da tre piani π, π', π'':

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') \\ + \mu(a''x + b''y + c''z + d'') = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

6) Condizione perchè quattro piani π, π_1, π_2, π_3, passino per un punto:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

7) Condizioni di parallelismo tra due piani π, π':

$$a : a' = b : b' = c : c'. \tag{7}$$

8) Condizione di ortogonalità tra due piani π, π':

$$aa' + bb' + cc' = 0. \tag{8}$$

9) Diedro di due piani π, π':

$$\cos \pi\pi' = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}},$$

$$\operatorname{sen} \pi\pi' = \sqrt{\frac{(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)\,(a'^2 + b'^2 + c'^2)}} \tag{9'}$$

10) Distanza di un punto P' da un piano π:

$$\delta = \frac{ax' + by' + cz' + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{10}$$

11) Varie forme delle equazioni di una retta r:

$$x = lz + p, \quad y = mz + q, \tag{11}$$

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n}, \tag{11'}$$

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma}, \tag{11''}$$

dove x', y', z' sono coordinate di un punto della retta, e α, β, γ gli angoli ch'essa forma cogli assi coordinati.

12) Retta passante per due punti P', P'':

$$\frac{x-x'}{x'-x''}=\frac{y-y'}{y'-y''}=\frac{z-z'}{z'-z''}. \tag{12}$$

13) Coseni di direzione di una retta r, le cui equazioni siano date sotto la forma (11'):

$$\cos rx=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},\quad \cos ry\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \tag{13}$$

$$\cos rz=\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.^1$$

14) Condizioni di parallelismo di due rette r, r':

$$l:l'=m:m'=n:n'.^1 \tag{14}$$

15) Angolo di due rette r, r':

$$\cos rr'=\frac{ll'+mm'+nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}.^1 \tag{15}$$

$$\operatorname{sen} rr'=\sqrt{\frac{(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2}{(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)}}.^1 \tag{15'}$$

16) Condizione di ortogonalità di due rette r, r':

$$ll'+mm'+nn'=0.^1 \tag{16}$$

17) Equazioni della normale al piano (1) per un punto P'

$$\frac{x-x'}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c}. \tag{17}$$

18) Angolo della retta r col piano π:

$$\operatorname{sen} r\pi=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.^1 \tag{18}$$

19) Condizioni di perpendicolarità fra la retta r e il piano π:

$$a:l=b:m=c:n.^1 \tag{19}$$

20) Condizione di parallelismo tra la retta r ed il piano π:

$$al+bm+cn=0.^1 \tag{20}$$

21) Condizioni perchè la retta appartenga al piano π:

$$\begin{cases} al+bm+cn=0, \\ ax'+by'+cz'+d=0, \end{cases} \tag{21}$$

essendo (x', y', z') un punto della retta.[1]

---

[1] Se le equazioni della o delle rette che si considerano sono date sotto la forma (11), si ponga $n=1$ $n'=1$, ecc.

22) Area del triangolo $P_1 P_2 P_3$:

$$(22) \qquad \Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\left\{\begin{vmatrix} y_1 z_1 1 \\ y_2 z_2 1 \\ y_3 z_3 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 x_1 1 \\ z_2 x_2 1 \\ z_3 x_3 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 y_1 1 \\ x_2 y_2 1 \\ x_3 y_3 1 \end{vmatrix}^2\right\}}.$$

23) Volume del tetraedro $P_1 P_2 P_3 P_4$:

$$(23) \qquad V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 y_1 z_1 1 \\ x_2 y_2 z_2 1 \\ x_3 y_3 z_3 1 \\ x_4 y_4 z_4 1 \end{vmatrix}.$$

Trasformazione di coordinate.

24) I nuovi assi X, Y, Z siano paralleli agli antichi x, y, z, ed abbiano l'origine nel punto (a, b, c):

$$(24) \qquad x = X + a, \quad y = Y + b, \quad z = Z + c.$$

25) I due sistemi x, y, z; X, Y, Z, sieno ortogonali, ed abbiano la stessa origine:

$$(25) \qquad \begin{cases} x = X\cos Xx + Y\cos Yx + Z\cos Zx, \\ y = X\cos Xy + Y\cos Yy + Z\cos Zy, \\ z = X\cos Xz + Y\cos Yz + Z\cos Zz. \end{cases}$$

26) Relazioni fra i nove coseni che entrano nelle (25).

Nel determinante dei nove coseni:

a) la somma dei quadrati degli elementi di una stessa orizzontale, o verticale, vale 1;

b) la somma dei prodotti degli elementi di una stessa orizzontale, o verticale, per gli elementi omologhi di una linea parallela vale 0;

c) il determinante stosso vale ± 1.

27) Formule di passaggio fra le coordinate polari ϱ, φ, ϑ e le coordinate cartesiane x, y, z, nel caso che l'asse z e l'origine coincidano con l'asse polare e il polo, e il piano polare sia il piano coordinato $y = 0$:

$$(27) \qquad x = \varrho\cos\varphi\,\operatorname{sen}\vartheta, \quad y = \varrho\,\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\vartheta, \quad z = \varrho\cos\vartheta.$$

$$(27') \qquad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Superficie particolari.

28) Cilindro colle generatrici parallele alla retta $x = lz + p$, $y = mz + q$:

$$(28) \qquad f(x - lz, \quad y - zm) = 0.$$

29) Cono col vertice nel punto P':

$$(29) \qquad f\left(\frac{x - x'}{z - z'}, \quad \frac{y - y'}{z - z'}\right) = 0.$$

30) Superficie rotonda intorno all'asse z, della quale un meridiano sia $f(x, z) = 0$, $y = 0$:

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z) = 0. \tag{30}$$

31) Sfera di raggio r, col centro nel punto P':

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = r^2, \tag{31}$$

oppure

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0, \tag{31'}$$

dove

$$x' = -\frac{a}{2},\ y' = -\frac{b}{2},\ z' = -\frac{c}{2},\ r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}.$$

Quadriche.

32) Equazione generale di una quadrica:

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ &+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

33) Condizione perchè la quadrica sia un cono:

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad (a_{ik} = a_{ki}). \tag{33}$$

34) Condizione perchè sia un paraboloide:

$$A_{44} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{34}$$

35) Condizioni perchè la quadrica sia una sfera:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \qquad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0. \tag{35}$$

36) Equazione del piano tangente nel punto P' (o del piano polare di P', se P' non sta sulla quadrica):

$$\begin{aligned} &(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a_{14})x \\ &+ (a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + a_{24})y \\ &+ (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + a_{34})z \\ &+ (a_{41}x' + a_{42}y' + a_{43}z' + a_{44}) = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

37) Piano diametrale coniugato alla retta $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$:

$$(37) \qquad \begin{aligned} &l(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) \\ &+ m(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) \\ &+ n(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}) = 0. \end{aligned}$$

38) Coordinate del centro della quadrica:

$$(38) \qquad x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \qquad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \qquad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}}.$$

39) Equazione del cono asintotico di una quadrica a centro:

$$(39) \qquad \begin{aligned} &a_{11}(x - x_0)^2 + a_{22}(y - y_0)^2 + a_{33}(z - z_0)^2 \\ &+ 2a_{12}(x - x_0)(y - y_0) + 2a_{13}(x - x_0)(z - z_0) \\ &+ 2a_{23}(y - y_0)(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

40) Equazione di un piano principale:
Se k è una radice dell'equazione

$$\Delta(k) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0,$$

ed l, m, n è la corrispondente soluzione del sistema

$$\begin{aligned} (a_{11} - k)\,l + a_{12}\,m + a_{13}\,n &= 0, \\ a_{21}\,l + (a_{22} - k)\,m + a_{23}\,n &= 0, \\ a_{31}\,l + a_{32}\,m + (a_{33} - k)\,n &= 0, \end{aligned}$$

un piano principale della quadrica ha l'equazione (37), od anche, se la quadrica ha il centro (x_0, y_0, z_0), la equazione

$$(40) \qquad l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0.$$

41) Equazione della quadrica (32) riferita ai propri assi, nell'ipotesi che si tratti di una quadrica a centro:

$$(41) \qquad k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0,$$

dove k_1, k_2, k_3 sono le radici dell'equazione $\Delta(k) = 0$.

42) Equazione della quadrica (32) riferita ai due piani principali xz, yz ed al piano xy tangente nel vertice, nell'ipotesi che si tratti di un paraboloide:

$$(42) \qquad k_1 x^2 + k_2 y^2 + 2z\sqrt{-\frac{A}{k_1 k_2}} = 0,$$

dove k_1, k_2 sono le due radici non nulle della equazione $\Delta(k) = 0$.

1

2

3

4

5

6

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

43) Equazione dell'ellissoide di semiassi a, b, c:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{43}$$

44) Equazione dell'iperboloide ad una falda di semiassi trasversi a, b, non trasverso c:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{44}$$

45) Equazione dell'iperboloide a due falde di semiasse trasverso a, non trasversi b, c:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{45}$$

46) Piano tangente nel punto (x', y', z') alle quadriche (43), (44), (45):

$$\frac{xx'}{a^2}\pm\frac{yy'}{b^2}\pm\frac{zz'}{c^2}=1, \tag{46}$$

i segni dovendo prendersi come nelle relative equazioni.

47) Equazioni ridotte del paraboloide ellittico (segno superiore) o iperbolico (segno inferiore).

$$\frac{x^2}{p}\pm\frac{y^2}{q}=2z \qquad (p, q>0). \tag{47}$$

48) Piano tangente al detto paraboloide nel punto (x', y', z'):

$$\frac{xx'}{p}\pm\frac{yy'}{q}=z+z'. \tag{48}$$

Per la discussione dell'equazione generale di una quadrica si vedano le tabelle di pag. 537, 538.

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

INDICE

Prefazione alla prima edizione . . . . . Pag. III
Prefazione alla seconda edizione . . . . . » VII

INTRODUZIONE.

1. Geometria elementare e Geometria analitica . . . . . Pag. 1
2. 3. Ascisse sulla retta . . . . . » 2
4. Relazioni tra più segmenti di una retta . . . . . » 3
5. Distanza di due punti espressa mediante le loro ascisse . . » 4
6. Punto che divide un segmento in dato rapporto . . . . . » 4
7. Trasformazione delle ascisse . . . . . » 5
8. Sistema di coordinate. Geometria analitica. — *Esercizi* . . . » 5
9. Fascio di rette. Ascisse angolari . . . . . » 9
10. Coordinate tangenti nel fascio di rette . . . . . » 10
11. Cenno sul fascio di piani. — *Esercizi* . . . . . » 12

PARTE PRIMA.

Geometria analitica del piano.

CAP. I. — Relazioni di posizione fra punti e rette.

12. Sistema di coordinate nel piano . . . . . Pag. 13
13. Coordinate cartesiane . . . . . » 14
14. Punto che divide un segmento in un dato rapporto . . . . » 15
15. Condizione di allineamento di tre punti . . . . . » 16
16. Equazione di una retta . . . . . » 16
17. Posizioni particolari di una retta rispetto agli assi . . . . » 17
18. Retta passante per un punto dato . . . . . » 19
19. Intersezione di due rette - Condizione di parallelismo . . . » 19
20. Fascio di rette . . . . . » 21
21. Nuova forma della condizione perchè tre rette formino fascio. » 22
22. Rete di rette . . . . . » 23
23. Notazione abbreviata. — *Esercizi* . . . . . » 24

CAP. II. — **Distanze, angoli, aree.**

24. Proiezioni parallele di segmenti . . . . . Pag. 26
25. Distanza di due punti . . . . . » 29
26. Relazioni angolari . . . . . » 30
27. Rapporto direttivo di una retta . . . . . » 30
28. Angolo di due rette . . . . . » 32
29. Condizione di perpendicolarità di due rette. . . . . » 33
30. Equazione normale di una retta . . . . . » 34
31. Distanza di un punto da una retta . . . . . » 36
32. Segno di un'area piana . . . . . » 37
33. Espressione dell'area di un triangolo in funzione delle coordinate dei vertici. — *Esercizi* . . . . . » 39

CAP. III. — **Trasformazione delle coordinate. Punti e rette immaginarie.**

34. Formole pel passaggio da un sistema cartesiano ad un nuovo sistema cartesiano . . . . . Pag. 44
35. Tipo generale delle formole per la trasformazione delle coordinate cartesiane . . . . . » 46
36. Movimento di una figura piana sopra il piano. . . . . » 46
37. Coordinate polari . . . . . » 47
38. Punti e rette immaginarie . . . . . » 48
39. Rette isotrope. — *Esercizi* . . . . . » 50

CAP. IV. — **Rappresentazione analitica delle curve piane.**

40. Equazione di una curva piana . . . . . Pag. 53
41. Intersezioni di due curve. . . . . » 55
42. Studio di una curva piana partendo dalla sua equazione . . » 55
43. Curve algebriche; ordine della curva. . . . . » 56
44. Invariabilità dell'ordine di una curva algebrica in una trasformazione di coordinate . . . . . » 57
45. Significato geometrico dell'ordine di una curva . . . . . » 58
46. Simmetria di una curva rispetto agli assi o rispetto all'origine. » 59
47. Tangente ad una curva in un punto. — *Esercizi*. . . . . » 59
48. Equazione del cerchio . . . . . » 63
49. Sistemi di curve. . . . . » 65
50. Concetto generale di sistema di coordinate nel piano . . . » 66
51. Luogo delle intersezioni di curve corrispondenti in due dati sistemi . . . . . » 67
52. Equazioni parametriche di una curva. — *Esercizi* . . . . . » 68

CAP. V. — **Il cerchio ed altre curve particolari.**

53. Cerchio determinato da tre punti . . . . . Pag. 71
54. Equazione polare di un cerchio. Potenza di un punto rispetto ad un cerchio. . . . . » 72
55. Tangente ad un cerchio in un punto. . . . . » 73

56. Intersezioni di un cerchio con una retta. . . . . Pag. 74
57. Intersezione di due cerchi; asse radicale. . . . . » 74
* 58. Condizione di ortogonalità di due cerchi. . . . . » 75
* 59. Fascio di cerchi. . . . . » 76
* 60. Fasci ortogonali di cerchi . . . . . » 77
* 61. Centro radicale di tre cerchi. — *Esercizi* . . . . . » 78
62. Forme delle curve di secondo ordine. . . . . » 81
63. Alcune generazioni di curve del secondo ordine. — *Esercizi* . » 84
64. La Cissoide ed il problema della duplicazione del cubo. . . » 87
65. La Concoide della retta e la trisezione dell'angolo . . . . » 89
66. Curva di CASSINI . . . . . » 91
67. Sinusoide . . . . . » 93
68. Curve logaritmiche ed esponenziali . . . . . » 94
69. Cicloide. . . . . » 96
70. Quadratrice di DINOSTRATO. — *Esercizi* . . . . . » 97

PARTE SECONDA.

Geometria analitica dello spazio.

CAP. I. — Relazioni di posizione tra punti, rette e piani.

71. Sistema cartesiano di coordinate . . . . . Pag. 103
72. Punto che divide un segmento in un dato rapporto . . . » 105
73. Retta congiungente due punti . . . . . » 105
74. Piano congiungente tre punti . . . . . » 106
75. Equazione di un piano . . . . . » 107
76. Posizioni particolari di un piano rispetto agli assi . . . . » 108
77. Piani passanti per un punto dato . . . . . » 109
78. Condizioni di parallelismo di due piani. . . . . » 109
79. Fascio di piani. . . . . » 110
80. Equazioni di una retta nello spazio . . . . . » 111
81. Parallelismo di due rette . . . . . » 113
82. Punto di incontro di tre piani; stella di piani . . . . . » 113
83. Intersezione di una retta con un piano; condizione perchè una retta sia parallela ad un piano, o vi giaccia . . . . . » 115
84. Condizione affinchè quattro piani, o due rette, abbiano un punto comune . . . . . » 116
85. Nuova forma della condizione perchè tre piani appartengano ad un fascio, o quattro piani ad una stella. — *Esercizi* . » 117

CAP. II. — Distanze, angoli, aree, volumi.

86. Proiezioni parallele di segmenti . . . . . Pag. 119
87. Proiezione di un'area . . . . . » 120
88. Distanza di due punti . . . . . » 121
89. Relazioni angolari . . . . . » 122

90. Coseni di direzione di una retta. . . . . Pag. 123
91. Angolo di due rette. . . . . » 124
92. Equazione normale di un piano . . . . . » 125
93. La distanza di un punto da un piano. . . . . » 127
94. Retta e piano perpendicolari . . . . . » 128
95. Diedro di due piani; angolo di una retta con un piano. . » 129
96. Area di un triangolo . . . . . » 130
97. Volume di un tetraedro . . . . . » 130
98. Minima distanza fra due rette. — *Esercizi* . . . . . » 132

CAP. III. — **Trasformazione delle coordinate.**

99. Trasformazione delle coordinate cartesiane . . . . . Pag. 139
100. Coordinate polari nello spazio. — *Esercizi* . . . . . » 142

CAP. IV. — **Rappresentazione analitica delle superficie e delle linee nello spazio.**

101. Equazioni di un luogo di punti . . . . . Pag. 146
102. 103. Equazione di una superficie . . . . . » 146
104. Equazioni di una linea nello spazio . . . . . » 148
105. Intersezione di tre superficie . . . . . » 149
106. Superficie algebriche; ordine della superficie . . . . . » 149
107. Significato geometrico dell'ordine di una superficie . . . » 149
108. Equazione della sfera. — *Esercizi* . . . . . » 150
109. Equazioni parametriche di una curva . . . . . » 156
110. Equazioni parametriche di una superficie. . . . . » 157
111. Equazioni di cilindri e coni . . . . . » 158
112. Superficie rotonde . . . . . » 160
113. Quadriche rotonde. — *Esercizi* . . . . . » 162

PARTE TERZA.

I concetti fondamentali della Geometria Proiettiva.

CAP. I. — **Elementi impropri. — Coordinate omogenee di punti, rette e piani.**

114. Cenno storico. . . . . Pag. 167
115. Proiezione e sezione. . . . . » 168
116. Punto all'infinito di una retta . . . . . » 169
117. Movimento proiettivo sopra una retta, segmenti proiettivi . » 170
118. Coppie di elementi che si separano . . . . . » 171
119. Retta all'infinito di un piano . . . . . » 172
120. Proiezione di una figura piana sopra un altro piano . . . » 173
121. Piano all'infinito. . . . . » 174
122. Proposizioni fondamentali relative alle mutue posizioni di punti, rette e piani . . . . . » 175
123. Legge di dualità . . . . . » 176
124. Esempi di proposizioni grafiche . . . . . » 178

125. Forme geometriche fondamentali . . . . . Pag. 179
126. Caratteri proiettivi di una figura; scopo della Geometria proiettiva. — *Esercizi* . . . . . » 181
127. Coordinate cartesiane omogenee nel piano . . . . . » 186
128. Equazione omogenea di una retta . . . . . » 189
129. Equazione omogenea di una curva piana . . . . . » 190
* 130. Coordinate di una retta nel piano . . . . . » 190
* 131. Coordinate plückeriane. . . . . » 191
* 132. Equazione di un punto in coordinate di rette . . . . . » 193
* 133. Problemi fondamentali su punti e rette in coordinate omogenee. . . . . » 193
* 134. Legge di dualità piana . . . . . » 196
* 135. Dimostrazione analitica del teorema dei triangoli omologici. » 197
* 136. Inviluppo di rette . . . . . » 198
137. Punti di contatto di un inviluppo . . . . . » 199
138. Coordinate cartesiane omogenee nello spazio. . . . . » 200
* 139. Coordinate di piani. Equazione di un punto. . . . . » 201
* 140. Inviluppi di piani. — *Esercizi* . . . . . » 203

CAP. II. — **Il birapporto di quattro elementi.**

141. Rapporto semplice di tre elementi . . . . . Pag. 205
142. Relazione fra i rapporti semplici di tre elementi nella punteggiata e nel fascio di rette . . . . . » 206
143. Birapporto di quattro elementi . . . . . » 207
144. Come vari il birapporto di quattro elementi al variare di uno di questi . . . . . » 209
145. Birapporto di quattro elementi dati mediante le loro coordinate o le loro equazioni. . . . . » 210
146. Proprietà del birapporto di quattro numeri . . . . . » 212
147. Relazione tra i vari birapporti che si possono formare con quattro elementi . . . . . » 213
148. Gruppi armonici . . . . . » 214
149. Costruzione di un gruppo armonico di punti mediante il quadrangolo completo . . . . . » 215
150. Costruzione di un gruppo armonico di rette mediante il quadrilatero completo . . . . . » 217
151. Relazioni fra le mutue distanze di quattro punti armonici . » 217
152. Gruppi armonici di rette aventi particolarità metriche. — *Esercizi* . . . . . » 219
* 153. Coordinate proiettive sopra una forma di prima specie . . » 224
* 154. Espressione del birapporto di quattro elementi mediante le coordinate proiettive. Trasformazione delle coordinate proiettive . . . . . » 226
* 155. Coordinate proiettive omogenee nelle forme di prima specie. » 227
* 156. Coordinate proiettive nel piano punteggiato. . . . . » 227

* 157. Coordinate proiettive omogenee di punti . . . . . Pag. 229
* 158. Coordinate proiettive nel piano rigato. . . . . » 230
* 159. Coordinate proiettive nella stella di rette o piani. . . . » 232
* 160. Trasformazione delle coordinate proiettive . . . . . » 232
* 161. Coordinate proiettive di punti e piani nello spazio. — *Esercizi.* » 234

CAP. III. — **Proiettività tra due forme di prima specie.**

162. Concetto generale di corrispondenza . . . . . Pag. 239
163. Esempi di corrispondenze proiettive fra due forme di prima specie . . . . . » 240
164. 165. Definizione della proiettività fra due forme di prima specie . . . . . » 240
166. Prodotto di proiettività . . . . . » 241
167. Posizioni particolari di forme proiettive . . . . . » 242
168. Posizione prospettiva di forme proiettive. . . . . » 243
169. Costruzione di una proiettività fra due forme di prima specie. » 245
170. Teorema fondamentale . . . . . » 247
* 171. Teorema di STAUDT. . . . . » 248
172. Equazione della proiettività . . . . . » 250
173. Proprietà e particolarità metriche di una proiettività fra punteggiate . . . . . » 252
174. Elementi uniti di una proiettività tra forme sovrapposte . » 254
175. Esempi. Uguaglianza diretta sulla punteggiata e nel fascio. » 255
176. Punti uniti e punti limite di due punteggiate proiettive sovrapposte . . . . . » 257
177. Una proprietà del cerchio. . . . . » 257
178. Costruzione degli elementi uniti di una proiettività tra forme sovrapposte. . . . . » 258
179. Asse di proiettività di due punteggiate sulla circonferenza; teorema di PASCAL per il cerchio. — *Esercizi* . . . . » 259

CAP. IV. — **Involuzione sopra una forma di prima specie.**

180. Definizione. . . . . Pag. 265
181. Proprietà fondamentale della involuzione. . . . . » 268
182. Equazione dell'involuzione . . . . . » 268
183. Involuzione determinata da due coppie . . . . . » 269
184. Condizione perchè tre coppie di elementi appartengano ad una stessa involuzione. . . . . » 270
185. Teorema di DESARGUES sul quadrangolo completo. . . . » 271
186. Elementi doppi di una involuzione. . . . . » 272
187. Proprietà fondamentale degli elementi doppi di una involuzione . . . . . » 273
188. Costruzione degli elementi doppi di una involuzione . . . » 273
189. Particolarità metriche di una involuzione. . . . . » 275
190. Involuzione circolare . . . . . » 276

191. Coppia comune a due involuzioni sovrapposte . . . . . Pag. 279
192. Rette coniugate e perpendicolari di una involuzione nel fascio. » 279
* 193. Cenno sulla rappresentazione geometrica degli elementi immaginari sopra una forma di prima specie. — *Esercizi* . » 279

CAP. V. — **Proiettività tra forme di seconda specie.**

194. Definizione di proiettività fra due forme di seconda specie. Pag. 286
195. Collineazioni e correlazioni . . . . . » 287
196. Prodotto di proiettività . . . . . » 288
* 197. Teorema di STAUDT sulla proiettività fra forme di seconda specie . . . . . » 289
198. Determinazione e costruzione di una proiettività fra due forme di seconda specie . . . . . » 290
* 199. Equazioni della collineazione fra due piani . . . . . » 292
200. Ancora sulle equazioni della collineazione . . . . . » 293
201. Affinità . . . . . » 295
202. Similitudine ed uguaglianza . . . . . » 297
203. Elementi uniti di una collineazione. . . . . » 298
204. Piani prospettivi. . . . . » 299
205. Omologia piana . . . . . » 300
206. Proprietà fondamentale e costruzione di una omologia . . » 301
207. Caratteristica di una omologia . . . . . » 302
208. Proprietà e particolarità metriche di una omologia . . . » 303
* 209. Determinazione analitica degli elementi uniti di una collineazione fra piani sovrapposti. — *Esercizi* . . . . . » 305
* 210. Correlazione fra piani . . . . . » 313
* 211. Correlazione fra piani sovrapposti . . . . . » 314
* 212. Polarità piana. . . . . » 317
* 213. Correlazione ortogonale fra due stelle . . . . . » 319
* 214. Polarità ortogonale nella stella o sul piano all'infinito. — *Esercizi* . . . . . » 320

CAP. VI. — **Proiettività fra due spazi.**

* 215. Collineazioni e correlazioni nello spazio . . . . . Pag. 324
* 216. Determinazione di una proiettività fra due spazi . . . . » 325
* 217. Equazioni di una collineazione tra due spazi . . . . . » 325
* 218. Casi particolari metrici di collineazioni fra spazi . . . . » 326
* 219. Elementi uniti in una collineazione . . . . . » 328
* 220. Omologia solida . . . . . » 329
* 221. Un esempio di collineazione assiale . . . . . » 331
* 222. Correlazioni nello spazio . . . . . » 331
* 223. Correlazioni involutorie . . . . . » 332
* 224. Polarità nello spazio. — *Esercizi* . . . . . » 335

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

PARTE QUARTA.

Curve di secondo ordine.

Cap. I. — Polarità definita dalla curva.

225. Cenno storico . . . . . Pag. 343
226. Definizione delle coniche . . . . . » 344
227. Esempi di coniche . . . . . » 345
228. Numero dei punti che individuano una conica . . . . . » 345
229. Intersezioni con una retta. . . . . » 346
230. Le tre specie di coniche. — *Esercizi* . . . . . » 348
231. Intersezioni di una conica colla retta congiungente due punti. » 350
232. Tangente . . . . . » 352
* 233. Coppia di tangenti ad una conica uscenti da un punto . . » 353
234. Punti coniugati rispetto ad una conica . . . . . » 355
235. Polare di un punto; polo di una retta . . . . . » 356
* 236. Equazione tangenziale di una conica . . . . . » 357
237. Polarità piana. . . . . » 358
238. Metodo delle polari reciproche . . . . . » 359
239. Costruzione della polare di un punto e del polo di una retta. » 360
240. Triangoli autopolari . . . . . » 361
* 241. Equazione di una conica riferita ad un triangolo autopolare. » 363
242. Coniche degeneri. . . . . » 365
243. Ricerca delle rette componenti una conica degenere . . . » 366
244. Particolari coppie di rette. . . . . » 367
245. Polarità rispetto ad una coppia di rette . . . . . » 368
* 246. Inviluppi degeneri. — *Esercizi* . . . . . » 368

Cap. II. — Costruzione di coniche. Teoremi di Pascal, Brianchon, Desargues.

247. Generazione di una conica mediante forme proiettive. . . Pag. 374
248. Costruzione di una conica determinata da cinque punti . . » 375
249. Punteggiata sopra una conica e inviluppo delle tangenti alla curva. . . . . » 376
250. Costruzione di una conica determinata da cinque tangenti . » 377
251. Teoremi di Pascal e Brianchon. — *Esercizi* . . . . . » 378
252. Teorema di Desargues sulle coniche . . . . . » 382
253. Costruzione di una conica che passi per quattro punti e tocchi una retta; problema duale. . . . . » 383
254. Corollari del teorema di Desargues . . . . . » 383
255. Intersezioni di due coniche . . . . . » 384
256. Fascio di coniche. . . . . » 386
* 257. Coniche degeneri in un fascio . . . . . » 387
* 258. Contatti di due coniche . . . . . » 388
259. Equazione di una conica soggetta a date condizioni . . . » 391
* 260. Schiera di coniche. — *Esercizi* . . . . . » 391

Cap. III. — Proprietà diametrali.

261. Diametri di una conica . . . . . Pag. 400
262. Centro . . . . . » 401
263. Asintoti . . . . . » 402
264. Diametri coniugati . . . . . » 403
265. Assi di una conica . . . . . » 404
266. Determinazione analitica degli assi . . . . . » 405
267. Caso particolare del cerchio. — *Esercizi* . . . . . » 406

Cap. IV. — Forme ridotte delle equazioni delle coniche.

268. Coniche riferite a particolari sistemi cartesiani. . . . . Pag. 409
269. Discussione dell'equazione normale di una conica a centro. » 411
270. Ellisse . . . . . » 412
271. Iperbole . . . . . » 413
272. Iperbole equilatera . . . . . » 414
273. Alcune formole relative all'equazione normale di una conica a centro . . . . . » 414
274. Iperbole riferita agli asintoti . . . . . » 415
275. Parabola. Proprietà della tangente e della normale . . . » 416
276. Metodi per ridurre a forma semplice l'equazione di una conica . . . . . » 417
277. Modo di comportarsi di una conica rispetto a particolari trasformazioni di coordinate . . . . . » 418
278. Invarianti di una conica relativamente ad una trasformazione di coordinate . . . . . » 419
279. Formazione della equazione ridotta di una conica col mezzo degli invarianti . . . . . » 424
280. Significato geometrico dell'annullarsi di un invariante . . » 425
* 281. Teoremi di Apollonio. — *Esercizi*. . . . . » 426

Cap. V. — Proprietà focali delle coniche.

282. Definizione di fuoco . . . . . Pag. 433
283. Ricerca dei fuochi della ellisse e della iperbole. . . . . » 434
284. Alcune proprietà angolari dei fuochi . . . . . » 436
285. Proprietà dei raggi focali . . . . . » 436
286. Direttrici di una conica a centro . . . . . » 438
287. Altre proprietà focali delle coniche a centro. . . . . » 439
288. Fuoco della parabola . . . . . » 440
289. Altre proprietà focali della parabola . . . . . » 441
290. Equazione polare di una conica rispetto al fuoco . . . . » 442
291. Coniche confocali. — *Esercizi* . . . . . » 443

Cap. VI. — Trasformazione di una conica mediante una collineazione.

292. Coniche collineari . . . . . Pag. 450
293. Coniche omologiche . . . . . » 451

294. Coniche affini . . . . . Pag. 452
295. Coniche simili. . . . . » 453
296. Coniche omotetiche. — *Esercizi*. . . . . » 454

PARTE QUINTA.

Superficie di secondo ordine.

Cap. I. — Polarità definita dalla superficie.

297. Definizione ed esempi di quadriche. . . . . Pag. 459
298. Numero dei punti che individuano una quadrica . . . . » 460
299. Intersezioni con una retta. . . . . » 460
300. Intersezione con un piano. . . . . » 461
301. 302. 303. Piano tangente . . . . . » 462
304. Intersezioni di una quadrica colla retta congiungente due punti. » 465
305. Equazione del piano tangente . . . . . » 467
* 306. Cono circoscritto alla quadrica da un punto. . . . . » 468
307. Punti coniugati rispetto ad una quadrica. . . . . » 468
308. Piano polare di un punto. . . . . » 469
* 309. Equazione tangenziale di una quadrica . . . . . » 470
310. Polarità determinata da una quadrica. . . . . » 470
311. Piani tangenti ad una quadrica condotti per una retta . . » 471
312. Tangenti coniugate ad una quadrica in un punto . . . . » 472
313. Piani tangenti passanti per un punto . . . . . » 473
314. Figure autoconiugate rispetto ad una quadrica . . . . . » 475
315. 316. Superficie di secondo ordine degeneri . . . . . » 475
317. Polarità rispetto ad un cono . . . . . » 477
* 318. Inviluppi di seconda classe degeneri. — *Esercizi* . . . . » 478

Cap. II. — Rette di una quadrica. Generazione delle quadriche rigate. Fasci e schiere di quadriche.

319. Punti ellittici, parabolici, iperbolici . . . . . Pag. 483
320. Quadriche a punti parabolici. . . . . » 483
321. Quadriche a punti iperbolici . . . . . » 484
322. I due sistemi di rette di una quadrica rigata . . . . . » 484
323. Costruzione di una quadrica rigata. . . . . » 485
324. Generazione delle quadriche rigate mediante forme proiettive. » 486
325. Qualche proprietà delle quadriche rigate . . . . . » 488
* 326. Fascio di quadriche. . . . . » 489
* 327. Schiera di quadriche. — *Esercizi* . . . . . » 492

Cap. III. — Proprietà diametrali.

328. Sezione di una quadrica col piano all'infinito . . . . . Pag. 497
329. Sezioni di una quadrica con piani paralleli . . . . . » 500
330. Piani diametrali . . . . . » 500
331. Centro . . . . . » 501
332. Diametri . . . . . » 501

333. Cono asintotico . . . . . Pag. 502
334. Coppie di piani diametrali coniugati . . . . . » 503
335. Terne di piani diametrali coniugati . . . . . » 503
336. Piani principali . . . . . » 504
337. Piani principali delle quadriche a centro. . . . . » 506
338. Piani principali di un paraboloide . . . . . » 507
339. Casi particolari; quadriche rotonde; sfera . . . . . » 508
340. I piani principali di una quadrica in relazione col cerchio assoluto. — *Esercizi*. . . . . » 510

Cap. IV. — Equazioni ridotte delle quadriche.

341. Quadriche riferite a particolari sistemi cartesiani . . . . Pag. 514
342. Discussione dell'equazione normale di una quadrica a centro. » 516
343. Ellissoide . . . . . » 517
344. Iperboloide ad una falda . . . . . » 519
345. Iperboloide a due falde . . . . . » 521
346. Alcune formole relative all'equazione normale di una quadrica a centro . . . . . » 523
347. Discussione dell'equazione ridotta di un paraboloide . . . » 525
348. Paraboloide ellittico. . . . . » 526
349. Paraboloide iperbolico . . . . . » 527
350. Alcune formole relative all'equazione ridotta dei paraboloidi. » 529
351. Effetto di particolari trasformazioni di coordinate sulla equazione di una quadrica . . . . . » 529
352. Invarianti di una quadrica rispetto ad una trasformazione ortogonale di coordinate . . . . . » 530
353. Calcolo dei coefficienti dell'equazione ridotta di una quadrica col mezzo degli invarianti . . . . . » 534
354. Classificazione delle quadriche partendo dalla equazione generale . . . . . » 536
355. Significato del segno del discriminante . . . . . » 538
356. Classificazione proiettiva dalle quadriche. — *Esercizi*. . . » 539

Cap. V. — Sezioni circolari. — Quadriche confocali.

357. Sezioni circolari di una quadrica; ricerca sintetica . . . Pag. 544
358. Sezioni circolari; ricerca analitica . . . . . » 546
* 359. Quadriche a centro confocali . . . . . » 548
* 360. Paraboloidi confocali . . . . . » 554
* 361. Coniche focali di una quadrica . . . . . » 555
* 362. Coniche focali coniugate. — *Esercizi* . . . . . » 555

APPENDICE.

I. **Sui problemi geometrici** (nn. 363-373) . . . . . Pag. 562
II. **Raccolta di alcune formole di Geometria Analitica.**
A. Geometria piana . . . . . » 583
B. Geometria solida . . . . . » 587

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

SOCIETÀ ANONIMA EDITRICE DANTE ALIGHIERI

(Albrighi, Segati & C.)

MILANO - GENOVA - ROMA - NAPOLI

MATEMATICA

Lire

BARONI E. E FONTEBASSO P. A. — **Elementi di Geometria,** ad uso delle scuole medie superiori con note storiche del Prof. E. Rufini:

Vol. I, per il ginnasio superiore e per l'istituto magistrale inferiore, 16ª edizione riveduta 7,50

Vol. II, per le scuole secondarie superiori, 11ª edizione rifatta secondo gli ultimi programmi 12,50

— **Geometria** per gli istituti tecnici e magistrali superiori con note storiche del Prof. E. Rufini, 6ª edizione riordinata dal Prof. G. Laurenti . . . . . 7,—

BORTOLOTTI E. — **Aritmetica generale ed algebra:**

Vol. I, per l'ammissione ai licei e al corso superiore degli istituti tecnici e magistrali, con più di 1700 esercizi e problemi, 5ª edizione . . . . . 7,—

Vol. II, per il liceo, con più di 2700 esercizi e problemi, 4ª edizione . . 10,—

— **Aritmetica generale ed algebra,** per i licei scientifici e per la sezione di agrimensura degli istituti tecnici, con oltre 3000 esercizi e problemi . . . 18,—

— **4700 Esercizi di algebra Elementare,** tratti dalla Aritmetica generale ed Algebra, 4ª edizione . . . . . 10,—

BURALI FORTI C. E MARCOLONGO R. — **Elementi di Trigonometrta** ad uso degli Istituti Medii Superiori e degl' Istituti Industriali 8,50

CASTELNUOVO G. — **Lezioni di Geometria Analitica.** Geometria analitica del piano e dello spazio. I concetti fondamentali della Geometria Proiettiva, Curve e Superficie di secondo ordine, 9ª edizione . . . . . 40,—

COLETTI R. — **Le Coniche per via elementare** 7,50

FAGNANO MARCHESE GIULIO CARLO DE' TOSCHI. — **Opere matematiche,** pubblicate sotto gli auspici della Società Italiana per il progresso delle scienze, dai soci: V. Volterra, G. Loria, D. Gambioli: Prezzo dell'opera completa in tre volumi . . . . . 80,—

FALANGA A. — **Corso di Algebra,** con quadri sinottici riassuntivi, e tavole dei logaritmi decimali con cinque cifre da 1 a 10 000, 2ª edizione completamente rifatta . . . . . —,—

FINZI A. — **Complementi di Algebra e Geometria,** ad uso degli Istituti tecnici, nautici e industriali. 4ª edizione riordinata 9,50

FONTEBASSO P. A. — **Aritmetica e Algebra,** Vol. I per il ginnasio superiore e istituto tecnico inferiore secondo gli ultimi programmi, con 1050 esercizi 10ª edizione . . . . . 8,—

Vol. II, per le scuole medie superiori, 6ª edizione riveduta . . . . . 12,—

— **Elementi di Trigonometria** ad uso dei licei classici secondo gli ultimi programmi . . . . . 7,—

GALLUCCI G. — **Elementi di Geometria Razionale:**

Vol. I ad uso dei ginnasi superiori e degl' istituti tecnici, 2ª edizione . . 5,—

Vol. II per le scuole medie superiori, 2ª edizione. . . . . 12,—

— **Algebra elementare,** per i Licei classici e scientifici e per l'Istituto tecnico superiore, 2ª edizione . . . . . 10,—

— **Algebra e Trigonometria,** per il terzo corso liceale e per i licei scientifici, 2ª edizione . . . . . 6,—

LEVI C. — **Elementi di geometria descrittiva ed applicazione al disegno di costruzioni,** ad uso degli istituti tecnici e delle scuole professionali, 10ª edizione rifatta. 8,50

— **Edizione speciale per gli Istituti Nautici** . . . . . 7,—

MARCOLONGO R. — **Complementi di Algebra e di analisi,** per i licei scientifici, 3ª edizione . . . . . 14,—

NICOLETTI O. E SANSONE G. — **Aritmetica e Algebra:**

Vol. I, per il ginnasio superiore e per il secondo biennio dell' Istituto tecnico inferiore, 3ª edizione . . . . . 10,—

Vol. II, per i licei classici, 3ª edizione . . . . . 12,—

Vol. II, per i Licei scientifici, 4ª edizione . . . . . 15,—

SANTACROCE G. — **Matematica Finanziaria.** Interessi e sconti. Annualità. Ammortamenti. Tavole per i calcoli d'Interesse composto. Un bel volume in carta speciale solidamente rilegato in tela . . . . . 20,—

— **Introduzione alla matematica attuariale,** rilegato in tela. . . . . 15,—

ZONDADARI E. — **Integrazione grafica e studio delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine coi metodi della geometria descrittiva** . . 3,50

★ *Prezzo del presente volume* **Lire QUARANTA** ★