METODOLOGIA Y DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL

TOMO I

METODOLOGÍA

J. REY PASTOR P. PUIG ADAM

METODOLOGÍA Y DIDÁCTICA
DE LA
MATEMÁTICA ELEMENTAL

TOMO I

METODOLOGÍA

Pedidos: Duque de Medinaceli, 6.—Madrid.

METODOLOGÍA Y DIDÁCTICA

DE LA

MATEMÁTICA ELEMENTAL

Para uso de los alumnos de Escuelas Normales
y aspirantes al Profesorado de 1.ª y 2.ª Enseñanza

POR

J. REY PASTOR
De la Universidad Central.

P. PUIG ADAM
Del Instituto de San Isidro.

TOMO PRIMERO

METODOLOGÍA

MADRID
1933

Imprenta de A. Marzo, San Hermenegildo, 32. Teléfono 31225. Madrid.

INTRODUCCION

Muy frecuentemente suele confundirse la METODOLOGÍA DE LA CIENCIA con la METODOLOGÍA DE LA ENSEÑANZA, o sea con la DIDÁCTICA.

Método significa *camino* para llegar a un fin, y la *Metodología* de una disciplina cualquiera es el estudio de los diversos caminos que conducen al fin propio de ella.

La Ciencia matemática tiene, pues, sus métodos, que desde los siglos más remotos han conducido a la formación de su organismo y que constantemente acrecientan sus dominios con rapidez vertiginosa. El estudio sistemático de estos métodos propios de la ciencia matemática, limitados al aspecto elemental de su desarrollo, constituye el primer tomo de esta obra, en el cual se analizan los materiales conceptuales que utiliza la Matemática para sus construcciones y los métodos con que éstas se organizan. Aun limitado el campo a la Matemática elemental, hemos considerado conveniente dividir en dos etapas el camino, tratando en el segundo capítulo ciertas cuestiones más especialmente interesantes para el profesor de segunda enseñanza y para el maestro primario superior.

Una vez obtenida en este primer tomo, que trata de la METODOLOGÍA MATEMÁTICA propiamente dicha, una visión de conjunto del edificio matemático, y conocida, siquiera a grandes rasgos, su estructura, se plantea un doble problema: ¿Qué partes del edificio matemático deben exhibirse y estudiarse en los diversos grados de enseñanza? ¿Qué métodos pedagógicos serán los más eficaces en cada uno?

Entrambos problemas están subordinados a una cuestión previa: ¿Cuál es el fin que debe perseguirse en cada uno de los períodos escolares primario, secundario o universitario? Según cual sea la meta que nos propongamos alcanzar, así será diversa la forma de conducir la enseñanza en cuanto a la cantidad, a la calidad y al método, cuestiones todas que exigirán además un estudio psicológico de cada una de las edades del elemento discente. Tal es el plan del segundo tomo de esta obra, en el que se tratará de la DIDÁCTICA MATEMÁTICA.

Aun a riesgo de incurrir en el vicio del simplismo excesivo en cuestiones muy complejas, permítasenos establecer desde ahora la línea divisionaria que las discusiones internacionales sobre este problema vital van delineando de manera cada vez más acentuada. La enseñanza matemática en la escuela primaria tiene carácter predominantemente *instrumental*, y se propone ante todo adiestrar a los niños en el cálculo numérico, proveyéndolos de ciertos conocimientos necesarios o útiles para la vida, como son, por ejemplo, el sistema métrico, el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos usuales, las reglas de cálculo comercial, etc.

Con la enseñanza secundaria se persigue modernamente un fin predominantemente *educativo*, a la par que se amplían ciertas nociones de la enseñanza primaria útiles para la vida, pero más bien por deficiencias y excesiva brevedad de aquélla que por corresponder en verdad a este segundo período de formación humanística en el más amplio y moderno sentido de esta palabra. Por último, la enseñanza superior persigue ya un fin *profesional*, también en el sentido más lato de este adjetivo.

Esta divisoria en tres períodos *instrumental, educativo* y *profesional* no excluye la preocupación educativa en todos ellos; pero mientras en el primero la educación es un medio para llegar a los conocimientos, en el segundo son los conocimientos el medio necesario para llegar a la educación mental. He aquí, pues, una distinción de esencia, que no es puramente cuantitativa, entre la enseñanza primaria y la secundaria. Mientras un maestro de escuela debe considerarse completamente fracasado si sus alumnos salen a la vida sin los pertrechos indispensables, que significa saber leer, escribir y calcular correctamente; en cambio un bachillerato que no haya dejado en la memoria de los alumnos indeleblemente grabada para siempre ninguna declinación latina, ninguna fórmula trigonométrica, ninguna especie botánica, podrá ser, sin embargo, un bachillerato eficaz si ha logrado despertar en el alumno la afición a la lectura de obras literarias, el hábito de razonamiento cuidadoso, el amor a la naturaleza y el sentido de observación, porque, en fin de cuentas, ese imponderable que se llama *cultura general* no es sino aquello que queda en el espíritu después de haber olvidado todo lo aprendido en el período escolar.

CAPITULO PRIMERO

NOCIONES DE METODOLOGIA DE LA MATEMATICA ELEMENTAL

---

§ 1.º—CARÁCTER Y CLASIFICACIÓN DE LA MATEMÁTICA.

Método inductivo y método deductivo.

Para la formación de toda ciencia hay dos métodos, es decir, dos caminos, uno ascendente y otro descendente, que se llaman *método inductivo* y *método deductivo.*

El método inductivo o ascendente va de lo particular a lo general; del hecho aislado asciende hasta la ley general que comprende a todos los hechos análogos. Observemos, por ejemplo, que ciertos cuerpos caen cuando se abandonan a sí mismos, mientras otros se elevan en el aire; algunos que caen en el aire flotan en el agua y otros no; he aquí, pues, un caudal de hechos complejos, contradictorios que no hace sospechar la existencia de una ley general que a todos los comprenda. Veamos, por ejemplo, cómo procedieron los primeros hombres de ciencia para descubrir las leyes que regulan la caída de todos los cuerpos, descomponiendo este hecho complejo en sus elementos simples, esto es, analizando por separado el cuerpo y el medio ambiente en que se abandona.

Operemos en el vacío, y entonces observamos que *todos* *los cuerpos caen*. Ya tenemos una *ley*, pero es una ley cualitativa; comparemos las caídas de diversos cuerpos de naturaleza muy diversa y observamos que *todos caen con igual velocidad;* ya tenemos la ley *cuantitativa* de la caída de todos los cuerpos en el vacío; sólo falta ya *medir* los espacios recorridos en la caída, como hizo Galileo, y así se llega a la *fórmula matemática* que encierra todos los casos posibles de caída de graves en el vacío. La *ley matemática*, expresada por una fórmula, constituye el ideal de toda ciencia física, pues una vez lograda permite *deducir* cómo acontecerá el fenómeno en nuevos casos no experimentados, es decir, se llega a la *predicción* de los fenómenos, que constituye el más alto ideal de toda ciencia de la Naturaleza.

Vemos en este ejemplo cómo la inducción asciende de lo particular a lo general y cómo la deducción desciende de la ley general a los hechos particulares. Conocida la ley de la caída en el vacío, juntamente con la ley de Arquímedes, que expresa el valor del empuje ascendente de los cuerpos sumergidos en un flúido, y sabida además la resistencia que cada flúido opone a cada cuerpo, según su forma y tamaño, se puede predecir cómo acontecerá la caída o elevación de cualquier cuerpo abandonado en cualquier medio ambiente, sea líquido o gaseoso.

Método analítico y método sintético.

¿Qué hemos hecho en el ejemplo anterior para ascender desde los hechos particulares a la ley general? Descomponer cada hecho complejo en sus elementos simples: primero hemos prescindido del medio ambiente, para atender al hecho escueto de la caída, exento de complicaciones; después hemos analizado por separado cada medio ambiente. He aquí un *análisis*, es decir, una descomposición de lo complejo en elementos simples; por esto se llama *método analítico.*

En cambio, una vez que estamos en posesión de las diversas leyes que relacionan cada causa simple con sus efectos, bastará examinar en cada caso los factores que intervienen en el mismo para reunir o sumar sus efectos y poder predecir el nuevo hecho; es decir, en la aplicación de las leyes generales a los casos particulares, seguimos *método sintético.*

No quiere expresar este paralelismo que inducción equivalga a análisis y que deducción sea sinónimo de síntesis, pues son conceptos de categoría diferente. Pronto veremos que en la elaboración de la Matemática, que es la ciencia deductiva por excelencia, se utiliza frecuentemente el análisis como recurso auxiliar en las demostraciones, que no son otra cosa sino una adecuada síntesis de proposiciones anteriores.

Suele decirse, a veces, en forma demasiado esquemática, y por tanto inexacta, que el análisis es el instrumento de la invención y la síntesis es el método de la exposición o enseñanza (*). En toda invención hay tanto de análisis como de síntesis, y en la exposición didáctica veremos que no es el método exclusivamente sintético el más adecuado y eficaz; pero ciertamente es indispensable el análisis en toda invención, así como en la resolución de todo problema, y es indispensable una síntesis en toda exposición científica. Lo que acontece es que la moderna pedagogía, que utiliza además conjuntamente el análisis en la enseñanza, lo hace precisamente para seguir el mismo camino de la invención; por ello, tal combinación del análisis y de la síntesis que remeda en la enseñanza la vía

(*) Así, por ejemplo, la Lógica de Abel Rey dice demasiado exclusivamente: «Es con el análisis con el que se inventa, y es con la síntesis con la que se expone lo que ha sido descubierto.»

de la invención y que convierte al alumno en un redescubridor de verdades ya sabidas por otros, suele designarse por el nombre de método *eurístico* (del griego *eurisko*, que significa encontrar o descubrir).

Los orígenes de la ciencia matemática.

Las ciencias matemáticas, o mejor dicho la Matemática, es la ciencia deductiva por excelencia. Gracias a la sencillez de sus conceptos logró descubrir hace veinticinco siglos las leyes fundamentales a que estos satisfacen, y de ellas se ha ido obteniendo por deducciones sucesivas todo el inmenso caudal de los actuales conocimientos matemáticos.

El período experimental e inductivo perdura a través de varias civilizaciones: caldeos, babilonios, egipcios... Uno de los primeros descubrimientos, anterior en veinte siglos a la era cristiana (es decir, que tiene unos cuarenta siglos de existencia), es el hecho de que un triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades es rectángulo. En él se basaban los agrimensores para trazar perpendiculares, haciendo en una cuerda de extremos anudados tres nudos con intervalos de 3, 4 y 5 unidades y extendiéndola sobre el suelo, estirada mediante tres estacas, para formar el triángulo que tenga estos tres lados.

Otro descubrimiento geométrico fué el área del círculo que calculaban así: «del diámetro se resta su novena parte y se eleva al cuadrado para obtener el área del círculo»; esto equivale a expresar el área del círculo de diámetro d por la fórmula siguiente:

$$A = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2,$$

que es lo mismo que tomar como longitud de la circunferencia

$$\frac{256}{81}d = 3,16\,d \quad (*).$$

Estos conocimientos egipcios se han sabido por el descubrimiento de un papiro llamado de Ahmes, que se custodia en el Museo británico y que data de diez siglos antes de Jesucristo, el cual parece resumir una obra anterior en otros diez siglos.

Examinando a la luz de nuestros actuales conocimientos estos dos resultados que damos a título de ejemplo, decimos inmediatamente que el primero es *exacto*, es decir, que un ángulo del triángulo de lados 3, 4, 5 mide exactamente 90°; y en cambio decimos sin titubear que el segundo resultado es sólo *aproximado*, pues el verdadero valor de π, o sea la razón de la circunferencia al diámetro, no es 3,16, sino algo menor. Al expresar estos dos juicios, ¿queremos, acaso, expresar que las mediciones modernas efectuadas con más delicados instrumentos han *comprobado* el valor de 90° para aquel ángulo, y en cambio han *rectificado* la medida de la longitud de la circunferencia, siendo de temer que análoga rectificación acontezca cualquier día con la medida de aquel ángulo? No. Nuestras dos afirmaciones tienen carácter absoluto y eterno, precisamente porque no las apoyamos en nuevas experiencias, sino en el razonamiento puro, y nada tienen que temer de futuros experimentos. He aquí la diferencia esencial entre *método experimental* y *método racional*, que en lecciones sucesivas iremos explicando.

La gloria de haber encontrado el método racional, esto

(*) En muchos oficios que no necesitan gran exactitud, se utiliza actualmente esta regla sencilla: «del cuadrado del diámetro se resta su quinta parte». Esto equivale adoptar como valor de π el número 3,20.

es, deductivo o lógico para la Aritmética y para la Geometría, corresponde de lleno a los griegos. Tales de Mileto y después Pitágoras en el siglo VI antes de Jesucristo, inician la construcción racional de la Geometría, la cual llega a su apogeo en el siglo III con Euclides, Apolonio y Arquímedes, que elevan la escuela de Alejandría a su máximo esplendor. Son, pues, los griegos los verdaderos creadores de la Aritmética y de la Geometría, así como los hindúes son los creadores del Algebra y los árabes lo son de la Trigonometría.

Clasificación de las matemáticas.

Las ramas más puras y abstractas de la ciencia matemática son la Aritmética, el Algebra y el Análisis (la ciencia de las tres *aes,* como la designan simbólicamente los alemanes). La Aritmética estudia las propiedades de los números; el Algebra, las ecuaciones de primero, segundo, tercer, ... grado; el Análisis estudia las funciones o correspondencias de todas clases entre variables. Todas estas ramas se apoyan en el concepto primitivo de número natural, esto es, en la operación de contar, que es uno de los actos más simples y primeros de la mente, sin necesidad de más observaciones ni experiencias; y por ser tan sólido y sencillo su punto de apoyo, es la construcción intelectual más perfecta creada por el hombre.

En cambio la Geometría se apoya en un gran número de observaciones empíricas que es preciso depurar y ordenar enunciándolas en forma de *postulados.* Postular significa pedir, y el cuadro de postulados geométricos contiene todo lo que debemos admitir para deducir de ellos todas las sucesivas proposiciones geométricas.

La Cinemática exige además del concepto de espacio el de tiempo, para estudiar los movimientos de las figuras geométricas. Más cercana a la realidad física está la Mecánica, que introduce además la noción de *masa* o la de *fuerza* y estudia los movimientos de los cuerpos materiales, mientras que la Estática sólo se ocupa de las condiciones de equilibrio de éstos. Estas tres ramas: Cinemática, Estática y Dinámica forman la Ciencia llamada *Mecánica,* que ya no se considera como Matemática pura, a pesar de ser una ciencia racional igual que la Geometría, y perfectamente deductiva como ella.

§ 2.°—MÉTODO INDUCTIVO Y MÉTODO DEDUCTIVO EN ARITMÉTICA.

Clasificación de las propiedades de los números.

Suele definirse la ARITMÉTICA diciendo que estudia las propiedades de los números; pero debería completarse esta definición añadiendo que sólo estudia «las propiedades *generales* de todos los números y las especiales de ciertas *clases* de números». He aquí, por ejemplo, algunas relaciones numéricas:

1.ª) $2^4 = 4^2$ (Propiedad conmutativa de la potenciación).

2.ª) $3 \times 4 = 4 \times 3$ (Propiedad conmutativa de la multiplicación).

3.ª) $427 - 274 = \dot{9}$ (Diferencia de números de iguales cifras).

Que estas relaciones numéricas tengan o no interés científico, depende de su generalidad. Ensayemos, pues, si las mismas relaciones se verifican para otros números, y encontramos:

1.° *Propiedad conmutativa de la potenciación.*

$$1^4 \neq 4^1, \quad 2^3 \neq 3^2, \quad 2^5 \neq 5^2, \ \ldots$$

es decir, no logramos obtener *ningún* otro par de números enteros que tengan la propiedad de 2 y 4 indicada.

2.° *Propiedad conmutativa de la multiplicación.*

$$2 \times 3 = 3 \times 2; \quad 2 \times 4 = 4 \times 2,$$

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3; \quad 15 \times 4 = 4 \times 15; \ \ldots$$

es decir, la inversión de dos factores no altera el producto en *ninguno* de los casos ensayados; la propiedad observada parece verificarse en *todos* los casos;

3.° *Diferencia de números formados por las mismas cifras.*

$$42 - 24 = 18, \quad 412 - 124 = 288,$$

$$5231 - 1235 = 3996, \ \ldots$$

se observa en estos ejemplos que siempre resulta como *diferencia entre los dos números que tienen las mismas cifras, un múltiplo de 9.*

Estos ensayos bastan para decidir que la primera relación carece de interés aritmético, por su carácter *singular*, y en cambio las otras merecen un estudio especial, pudiendo anticiparse que la segunda será una ley *general* de la Aritmética, caso de ser válida para todos los números, mientras que la tercera tiene un carácter más *especial*, por referirse a la divisibilidad por *9*.

La primera quedará, pues, relegada al margen de la Aritmética como simple curiosidad. En los libros especiales que recopilan tales curiosidades aritméticas hay multitud de relaciones entre números que, a pesar del interés que a veces ofrecen, no han pasado a la Aritmética, por su poca generalidad.

EJEMPLO.—«Si de un número de tres cifras se resta el que tiene las mismas cifras invertidas, el resultado tiene como cifra central 9, y las dos extremas suman 9; de modo que basta conocer una de éstas para tener las tres.» Es una de las adivinanzas aritméticas más conocidas (*), que se explica fácilmente mediante la propiedad tercera de ser divisible por 9, la diferencia entre los dos números.

(*) Véanse otras curiosidades y adivinanzas en nuestros «Elementos de Aritmética». Colección intuitiva, págs. 44, 54, 74, 109.

Insuficiencia de la inducción.

La Aritmética se ocupa, pues, de las propiedades *generales* de *todos* los números y de las *especiales* de ciertas *clases* de números; pero ante todo debemos preguntar:

¿Bastan estas comprobaciones para afirmar que el orden de los factores no altera el producto y que la diferencia entre dos números que tienen las mismas cifras, es divisible por *9*?

En las Ciencias Naturales sería suficiente esta reiterada comprobación, para afirmar la validez de la ley observada; tal método se llama *inductivo*, como hemos visto en la lección anterior, y tiene el peligro de que nuevas experiencias vengan a contradecir la ley, en cuyo caso habrá que modificarla o desecharla.

También la Aritmética fué inductiva antes de los griegos, pero ya hemos dicho que éstos la organizaron deductivamente, al observar que ciertas leyes, que parecían generales, dejaban de verificarse para grandes números. He aquí algunos ejemplos:

EJEMPLO 1.° — El número 60 es divisible por 1, por 2, por 3, por 4, por 5, por 6; ¿Será divisible por todos los números menores que él? Fácil es comprobar que para 7 ya no se verifica; pero en otros ejemplos, la comprobación de una ley observada llegará a ser imposible, y por muchas comprobaciones que se obtengan, no podrá afirmarse su validez general.

EJEMPLO 2.°—La igualdad

$$(x^2 + 11)x^2 = 6x(x^2 + 1)$$

es cierta para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$; ¿lo será para todo valor de x? Fácil es demostrar que no lo es para ningún otro número.

EJEMPLO 3.°—Si en la expresión $2^{2^n} + 1$ damos a n valores sucesivos,

para $n = 0$, resulta: $2^1 + 1 = 3$, primo;
para $n = 1$, resulta: $2^2 + 1 = 5$, primo;
para $n = 2$, resulta: $2^4 + 1 = 17$, primo;
para $n = 3$, resulta: $2^8 + 1 = 257$, primo;
para $n = 4$, resulta: $2^{16} + 1 = 65.537$, primo.

Matemáticos tan famosos como Fermat creyeron que siempre sucedería lo mismo y, sin embargo, para $n = 5$ resulta un número compuesto.

EJEMPLO 4.°—Si se forman los productos de cada dos números naturales consecutivos y se les suma 17, resulta:

0	1	2	3	4	5	6	7	9	9	10	11	12	13	14...
0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	...
17	19	23	29	37	47	59	73	89	107	127	149	173	199	...

que son primos. Sin embargo, la proposición no es general, pues más adelante resultan números compuestos.

Ejemplo de deducción

Estos ejemplos nos hacen sospechar si la ley conmutativa de la multiplicación dejará de verificarse para números grandes. Para salir de dudas, cambiemos de procedimiento. En vez de hacer comprobaciones numéricas, que nada demuestran, analicemos la esencia de la multiplicación, escribiendo:

$$4 \times 3 = 4 + 4 + 4,$$

y descomponiendo cada sumando en unidades, podremos formar un cuadro de tres filas y cuatro columnas:

$$\begin{array}{l} 1 + 1 + 1 + 1 + \\ + 1 + 1 + 1 + 1 + \\ + 1 + 1 + 1 + 1 . \end{array}$$

Si ahora contamos estas unidades, agrupándolas por columnas, obtendremos:

$$3+3+3+3=3\times 4.$$

Ahora bien, «el número que resulta de contar varios objetos cualesquiera es independiente del orden en que se cuentan», según el principio o postulado fundamental de la Aritmética; luego resulta:

$$3\times 4=4\times 3.$$

Aunque nos hemos fijado solamente en los factores 3 y 4, el razonamiento es de índole general, es decir, aplicable a cualquier otro par de números, y podremos concluir: «*Aceptado* el principio fundamental de la Aritmética, *es cierto* que la permutación de los factores no altera el producto». De otro modo: esta propiedad se *deduce* de aquélla, o se *demuestra* mediante aquélla.

Demostraciones, teoremas y postulados.

Demostrar una propiedad de los números, *reducirla* a otras anteriores, o *deducirla* de ellas son frases equivalentes que no se pueden definir sin incurrir en el uso de términos sinónimos. Acabamos de ver en un ejemplo la diferencia existente entre *observar* una relación aritmética y *demostrarla* o reducirla a otra ya admitida como cierta; y hemos procurado llevar al ánimo de los lectores la convicción de que la simple observación no es un criterio de certeza y sí lo es en cambio la demostración; pero después de convencido el lector quizás incurra en el exceso opuesto preguntando ¿por qué no demostrar todas las propiedades, logrando así el rigor y solidez absolutas de toda la Aritmética? Es preciso deshacer esta ilusión.

Puesto que demostrar es reducir una proposición a otra anterior, y demostrar ésta es reducirla a otra, así siguiendo sólo cabe un dilema: o bien llegamos a cerrar la cadena, apoyándonos en la misma proposición que tratábamos de demostrar, en cuyo caso se incurre en la falla lógica llamada *círculo vicioso*, que trataremos más adelante, o bien debe llegarse a una primera proposición que ya no se pueda apoyar en ninguna otra. En todas las ciencias, incluso en la Geometría, son numerosas tales proposiciones iniciales, que no se pueden demostrar, llamadas *postulados*, pero la Aritmética sólo necesita un postulado o principio para deducir todas las demás propiedades de los números, y por ello se considera como la más perfecta de las ciencias y merece el epíteto que le dió el famoso matemático Gauss, titulándola reina de las ciencias.

El postulado de la Aritmética.

Ya lo hemos encontrado al demostrar en el párrafo anterior que el orden de los factores no influye en el producto y se puede enunciar así:

El número de objetos que forman una colección cualquiera es independiente del orden en que se cuenten.

De este principio hacemos constante uso en la vida corriente: cuando el cajero de un Banco cuenta las pesetas cobradas en el día no se le ocurre, para ver si así resulta mayor número de pesetas, volver a contar cambiando el orden de todos los modos posibles, lo cual, además de innecesario, sería completamente imposible (*). Cuando

(*) Si los doce apóstoles hubiesen querido ensayar todas sus posibles colocaciones en los doce asientos, y en cada ensayo o cambio de colocación hubiesen invertido solamente un minuto, todavía, al cabo de 1900 años, no habrían terminado los ensayos, aun dedicando diez horas diarias.

los comensales de una comida no logran sentarse todos, porque falta alguna silla, a nadie se le ocurrirá tampoco ensayar todos los posibles modos de distribuirse en los asientos disponibles, para ver si de algún modo encuentran todos un asiento.

En este solo principio, tan natural y evidente, se basa toda la Aritmética, pero esta posibilidad de desarrollo perfectamente lógico no excluye que en la enseñanza se admitan numerosas propiedades como evidentes, aunque podrían ser deducidas de aquel solo principio, y esto se hace con el laudable fin de simplificar y abreviar la exposición, que de aquel modo resultaría excesivamente larga y complicada. Compárese la sencillez de nuestra Aritmética intuitiva con la complicación de cualquier Aritmética racional y se comprenderán las ventajas didácticas de aquel sistema para un primer aprendizaje; mas, cuando llega a sentirse la necesidad de perfeccionar los conocimientos, ordenando lógicamente todos los eslabones, tales exposiciones intuitivas son ya insuficientes. En la Didáctica trataremos el problema de este tránsito de la enseñanza intuitiva a la racional, que sólo debe hacerse en su tiempo y sazón.

§ 3.° — MÉTODO EXPERIMENTAL, MÉTODO INTUITIVO Y MÉTODO RACIONAL EN GEOMETRÍA.

Objeto de la Geometría.

La Geometría prescinde de la clase de materia que constituye los cuerpos, de su orientación geográfica y de su posición respecto de nosotros, considerando solamente ciertas relaciones que son comunes a multitud de cuerpos de naturaleza y tamaño muy diversos, a los cuales sustituye que un esquema ideal, llamado *figura* geométrica. Todos los cuerpos que tienen las mismas propiedades geométricas se consideran como equivalentes y se dice que tienen la misma *figura* o la misma *forma*.

Una hoja de papel, un tablero de dibujo, una losa de piedra, cuando se prescinde de su espesor, son equivalentes geométricamente y se sustituyen por la figura ideal llamada *rectángulo*.

La escuadra de dibujo y un hilo anudado por sus extremos, que se estira mediante tres estacas, fijadas en el suelo, aunque son cuerpos de naturaleza tan distinta, dan origen al concepto de *triángulo*.

Clasificación de las propiedades geométricas.

Examinemos, por ejemplo, la escuadra que nos sirve para dibujar en el pizarrón y cuyos lados miden, 3, 4 y 5 dm. Inmediatamente se observan las siguientes relaciones:

A) Un lado es la semisuma de los otros dos:

$$4 = (3 + 5) : 2.$$

B) Un ángulo es igual a la suma de los otros dos.
C) Cada lado es menor que la suma de los otros dos.

Si ahora nos fijamos en la pequeña escuadra que nos sirve para dibujar en el papel, se observa que ya no se verifica *A*), pero sí *B*) y C).

Si dibujamos un triángulo cualquiera, no se verifican *A*) ni *B*), pero siempre se verifica C). Esta parece ser, por tanto, una propiedad general para todos los triángulos, y por tanto muy importante, mientras que *B*) parece verificarse solamente en aquellos triángulos que tienen de común con la escuadra un ángulo, llamado *recto* y su interés más limitado; finalmente, la propiedad *A*) carece de importancia, por su carácter singular.

La Geometría estudia las propiedades *generales* de ciertas *clases* de figuras y no las singulares de *cada* figura.

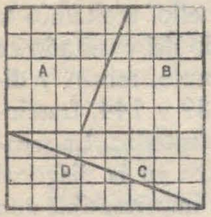
Así, por ejemplo, en todos los triángulos se observa que la suma de los tres ángulos es muy aproximadamente igual a dos rectos.

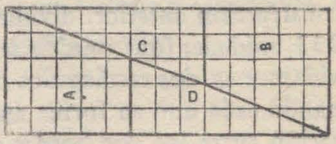
Ahora bien, por muchos que sean los triángulos observados, nunca podremos asegurar que las propiedades descubiertas sean generales, pues siempre quedará la duda de si se verifican en otros triángulos de dimensiones diferentes.

Insuficiencia del método experimental.

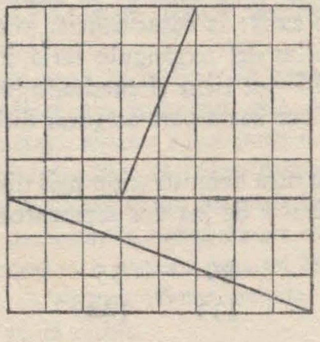
Dibujemos, por ejemplo, un cuadrado dividido en 64 casillas iguales y dividámoslo en cuatro pedazos *A*, *B*, *C*, *D*, como indican las líneas de la figura, formando con ellas el rectángulo de la derecha.

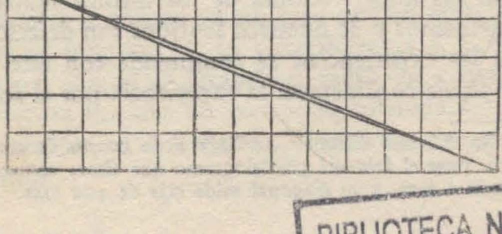
¿Podremos enunciar como una verdad geométrica esta transformación del cuadrado en rectángulo? De ningún modo; pues si contamos el número de casillas del nuevo rectángulo, resultan $13 \cdot 5 = 65$, y al notar esta contradicción aritmética, concluímos que el ajuste logrado con los cuatro trozos es solamente aproximado.





En efecto, si la figura se construye mayor, se nota que los trozos *A* y *D* forman triángulo, pues los dos segmentos oblicuos no están alineados, y tampoco en los trozos *B* y *C*, quedando vacío un trozo cuya forma es paralelográ-





mica y su área es exactamente la de un cuadrado de la red.

¿Queda, pues, subsanado este peligro del método experimental construyendo las figuras a gran escala? De ningún modo; y para convencernos de ello, repitamos la construcción anterior, dividiendo el lado del cuadrado en 233 unidades (que pueden ser, por ejemplo, mm.), y dividamos en dos rectángulos de alturas 89 y 144, fraccionando cada uno en forma análoga a la anterior. La separación entre los dos bordes que aparecen en la diagonal (en este caso monta uno sobre otro), es imperceptible aun con un microscopio corriente (*), y no cabe extremar la precisión en la medida por las inevitables imperfecciones en el corte del papel, que son mucho mayores que dicha distancia entre los bordes.

Sin embargo, por un simple razonamiento, y sin necesidad de experiencias difíciles o imposibles, podemos afirmar que no existe la coincidencia, pues en tal caso el número de casillas del rectángulo sería 54288, una menos de las 54289 que tiene el cuadrado inicial, contradicción aritmética que basta para asegurar dicha relación geométrica.

Y si se quiere otra demostración más directa basta comparar las pendientes de los dos segmentos, que son:

$$\frac{89}{233} > \frac{55}{144}.$$

Como las imperfecciones de los medios materiales de que disponemos y de nuestros sentidos son defecto común a todas las experiencias, se comprende con este ejemplo que no puede considerarse la experiencia por sí sola como

(*) Su máxima distancia no llega a un cuarto de centésima de milímetro, pues el área del paralelogramo que ahora aparece cubierto dos veces es 1 mm. y su diagonal mide más de 400 mm.

base suficiente para establecer las verdades matemáticas. Así, por ejemplo, no bastará recortar los vértices de muchos triángulos, adosarlos y comprobar que la suma de los de cada triángulo vale un ángulo llano para asegurar que esta propiedad es cierta *para todos* los triángulos, *ni siquiera para los triángulos comprobados.*

Insuficiencia de la intuición.

No solamente la experiencia es insuficiente como criterio de certeza, sino también la *intuición,* que es una experiencia imaginativa (*intuere* = ver con la inteligencia).

Imaginemos la Tierra perfectamente esférica, y a lo largo de un círculo máximo arrollada una cinta metálica (como la llanta de un carro). Si queremos ahora alargar la circunferencia así formada en media docena de metros, ¿habrá necesidad de separar mucho de la Tierra la cinta en cuestión?

Aquí no podemos ya realizar la experiencia; la intuición parece indicar, sin embargo, que, *como la Tierra es tan grande,* bastará separar muy poco de su superficie dicha cinta para intercalar el trozo deseado, mientras que para agrandar la llanta de un carro de la misma cantidad, la separación de la rueda habrá de ser mucho mayor. Dicho de otro modo: 6 metros más en la cinta, *repartidos* a lo largo de tan enorme circunferencia, no darán aumento apreciable en el radio.

Pues bien, esta intuición es totalmente errónea; la separación es la misma en un caso que en otro. En efecto, siendo la longitud de la circunferencia el producto del radio por 2π, si se agranda el radio un metro, es decir, si se separa la cinta un metro, su periferia viene aumentada siempre en 2π metros, *cualquiera que sea el radio primitivo.*

Con este ejemplo se comprende también el peligro que puede tener en las investigaciones científicas el dejarnos llevar por ligeras apreciaciones intuitivas.

El método lógico.

Acabamos de poner claramente de manifiesto que también en Geometría es necesaria la deducción. ¿Será suficiente?, o de otro modo: ¿Podremos establecer todas las proposiciones de la Geometría demostrándolas? Bastaría repetir el razonamiento hecho contestando a la pregunta idéntica formulada al tratar de las deducciones aritméticas para comprender que fatalmente habremos de apoyar algunas de las deducciones en propiedades indemostrables, cuya verdad hemos de postular.

Ahora bien, para que el edificio lógico que se construya sobre dichos postulados sea fecundo en aplicaciones prácticas, es preciso que tales postulados estén en concordancia con la realidad externa, de manera que para el establecimiento de estas primeras propiedades necesitamos recurrir a la experiencia efectiva o en su defecto a la experiencia imaginativa o intuición.

Aun a riesgo de incurrir en repeticiones, condensemos, pues, en breve esquema el *método lógico* de la *Geometría* y de la Matemática en general:

I. Establecer por *vía experimental* o *intuitiva* las relaciones más sencillas.

II. Admitidas éstas, establecer por *vía deductiva* todas las demás.

Las primeras, llamadas *axiomas* o *postulados*, se toman como *verdaderas*, es decir, concordantes con la realidad externa. Las segundas, llamadas *teoremas*, se consideran *ciertas*, es decir, de conocimiento claro y seguro.

Estas últimas deben deducirse de las primeras sin recurrir a nuevas experiencias o intuiciones, sino solamente combinando dichos postulados mediante razonamientos adecuados que se llaman *demostraciones.*

Las consecuencias inmediatas de un teorema, que enuncian algún caso particular contenido en él, suelen llamarse *corolarios. Escolios* son las notas o aclaraciones que suelen intercalarse en la exposición didáctica.

La axiomática.

Así como la Aritmética se funda sobre un postulado, la Geometría, y la Mecánica, necesitan muchos más (*) ; el conjunto de axiomas sobre los que se funda una ciencia se llama *sistema de axiomas.* Una misma disciplina puede fundarse sobre distintos sistemas de axiomas, según las cademas deductivas que se establezcan entre sus proposiciones. Se comprende que la ordenación será tanto más perfecta desde el punto de vista lógico riguroso cuanto menor sea el número de axiomas o postulados que necesite. La ciencia que se ocupa en buscar diversos sistemas de axiomas y que analiza las relaciones entre ellos se llama *Axiomática.*

(*) Véase, por ejemplo, nuestros «Elementos de Geometría Racional».

§ 4.º—LOS CONCEPTOS Y LAS DEFINICIONES.

Método clásico de definición.

Una de las reglas que contiene el «Discurso del método» de Descartes es la de no usar términos que no hayan sido previamente *definidos;* y todos los lectores, que ya han seguido algunos cursos de Matemáticas, saben con cuánto cuidado procuran todos los tratados definir los términos técnicos, a medida que se van introduciendo en la exposición.

Definir un término es fijar o determinar su alcance o contenido. Más adelante veremos los diversos métodos usados en Matemáticas para definir términos; pero en esta introducción, muy elemental, debemos limitarnos a poner de manifiesto estos diversos métodos mediante sencillos ejemplos y a llevar al ánimo de nuestros lectores el convencimiento de la imposibilidad lógica que existe para definir *todos* los términos matemáticos, del modo como suele pretenderse en ciertas exposiciones didácticas, víctimas de su propio anhelo de perfección, que las lleva inconscientemente a incurrir en las más groseras fallas lógicas.

He aquí algunas definiciones que el lector conoce de su aprendizaje anterior:

1.ª *Números pares* son los divisibles por 2.

2.ª *Angulo* es la mayor o menor inclinación de dos rectas que se cortan.

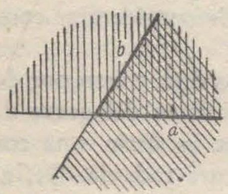
3.ª *Línea recta* es la que tiene todos sus puntos en una misma dirección.

La primera define los números pares como una clase especial de números naturales, esto es, por la condición característica de ser divisibles por 2. Este modo de definición es el que los lógicos llaman por *género próximo* y *diferencia específica*, que consiste en dar el género a que pertenece la clase que se trata de definir y en fijar los caracteres especiales que distinguen a esta clase dentro de aquel género. En este ejemplo el género próximo es el de los *números naturales*, y la diferencia específica es la de ser *divisibles por 2*. Tal definición puede considerarse como perfecta.

No acontece lo mismo con las otras dos, y esto por dos causas muy diversas. Una y otra adolecen del grave defecto de definir *oscurus per oscurius*, es decir, una cosa oscura mediante otra que es más oscura todavía. Definir el *ángulo* por la *inclinación* o definir la *recta* por la *dirección* es incurrir de lleno en esta falacia lógica. Habría que definir previamente lo que se entiende por *inclinación* y lo que quiere expresarse con la palabra *dirección*, y al pretender hacerlo iríamos a caer fatalmente en el uso más o menos indirecto de aquellos conceptos de ángulo y de recta que tratamos de definir, incurriendo, por tanto, en lo que llaman los lógicos *círculo vicioso*, que para las definiciones consiste en hacer entrar lo definido en su propia definición y para las demostraciones consiste, como veremos, en apoyarse en la misma propiedad que se trata de demostrar.

La definición de ángulo.

Sin embargo, la definición de ángulo puede hacerse de modo perfectamente claro y riguroso de modo análogo a como se define el segmento. Recordemos primero la de éste: Una vez ordenados los puntos de una recta, en un sentido, y definida en consecuencia la semirrecta, el segmento AB aparece formado por aquellos puntos de la recta que están *entre* A y B, es decir, como «parte de recta común a la semirrecta de origen *A* que contiene *B* y a la semirrecta de origen *B* que contiene *A*». Pues bien; una vez introducido el concepto de semiplano, que es el análogo al de semirrecta, y dadas dos semirrectas *a* y *b* con el mismo origen pero no opuestas, podemos definir el ángulo que forman como «*parte del plano común a los dos semiplanos siguientes: el limitado por la recta de* a *y que contiene a la semirrecta* b, *y el limitado por la recta de* b *y que contiene a la semirrecta* a». La figura indica bien claramente cuál es la parte del plano común a ambos semiplanos, que es la que aparece con rayado doble, superposición de los rayados simples que distinguen a cada uno de los semiplanos.



La definición de espacio.

¿Cabe entonces proceder análogamente para la definición de recta sustituyendo así la definición inadmisible arriba estampada por otra que sea perfecta?

Desde luego se comprende que no es posible definir todos los conceptos mediante el género próximo y la diferencia específica, pues si un género se refiere a otro más amplio y este a otro que lo comprende, ¿cómo definir el género más amplio posible de entes matemáticos no incluído en otro superior? Así vemos que el semiplano se ha podido definir como conjunto de puntos del plano que están situados de un mismo lado de una recta del mismo; aquí el género próximo es el conjunto de *todos los puntos del plano* y la diferencia específica es la condición de estar *situados a un mismo lado de la recta;* pero ¿cómo definir de modo análogo el conjunto de todos los puntos del plano? Sólo cabe considerar como género próximo el conjunto más amplio formado por todos los puntos del espacio y aquí llegamos al género supremo, que por no estar incluído en otro conjunto geométrico más amplio no es posible definir por género próximo.

Nos vemos conducidos así a esta conclusión: no es posible definir al modo clásico el *espacio geométrico* reduciéndolo a otro concepto anterior.

Las pretendidas definiciones de recta.

Para definir la recta la dificultad es de otro orden, pues existe el género próximo, ya que la recta está contenida en el espacio y aun en el plano que sirve de base a la Geometría plana; pero ¿qué propiedad característica adoptaremos para distinguir la recta de otros entes geométricos, es decir, qué propiedad adoptaremos como diferencia específica para definir la recta? Bien se comprende que si queremos estampar tal definición en la primera página de la Geometría cuando el único ente geométrico que ha sido introducido es el *punto*, y ninguna propiedad geométrica ha sido todavía establecida, será imposible adoptar ninguna propiedad característica de la recta que la distinga de los otros conjuntos de puntos, puesto que ningún otro nos es conocido todavía.

Alguien objetará que cabe postergar la definición de recta hasta que se hayan definido las *líneas* en general y entonces aparecerá de modo natural la recta como una línea que tiene ciertas propiedades características que la distinguen de las líneas curvas; pero con ello no resolvemos la dificultad, sino que la cambiamos por otra mucho más grave, pues se plantea el problema de definir la línea en general, cuando sólo se tiene el concepto de punto, lo cual exigiría delicadísimas consideraciones sobre la continuidad, que son de todo punto imposibles sobre tan exigua base (*).

Conceptos primitivos.

Por no querer reconocer esta simplicísima verdad de que en toda ordenación de conceptos debe haber algunos que sirvan de punto de partida, han fracasado cuantos pretendieron definir el punto y la recta como conceptos iniciales de la Geometría; y esta es la parte más deficiente de la obra de Euclides, cuya forzosa oscuridad ha dado origen a las más diversas interpretaciones. He aquí su definición de recta: «Es la línea que yace uniformemente en todos sus puntos». Cual sea el significado que quiso dar Euclides a esta frase de «yacer uniformemente» es problema que no ha sido resuelto, ni podrá ser aclarado, porque encierra la inevitable y quizás deliberada oscuridad de los empeños imposibles.

No quiere esto decir que sea imposible definir la recta, sino que es imposible definirlo *todo,* siendo imprescindible elegir ciertos conceptos como punto de partida de toda organización deductiva. Estos conceptos iniciales o *primitivos* son: en Aritmética el *número natural;* en Geometría son más numerosos y diversos según el modo de ordenación. Así, por ejemplo, si se adoptan la recta y la ordenación de sus puntos como conceptos primitivos, se define el segmento como antes hemos hecho. En cambio, si adoptamos el segmento como ente primitivo, se puede definir la recta como prolongación del segmento (**).

(*) Aun aplazando la definición de *curva* hasta después de haber desarrollado la Geometría analítica y el Cálculo infinitesimal, el problema presenta dificultades muy graves.

(**) He aquí una famosa definición de la recta atribuída a Leibniz: «La recta es el conjunto de puntos que permanecen inmóviles cuando un cuerpo gira alrededor de dos de sus puntos». Es decir, si

La introducción de los conceptos primitivos.

Una vez convencidos de la imposibilidad de definir todos los conceptos, pues por alguno es preciso comenzar, se plantea el problema de la introducción de los conceptos primitivos; y dado el carácter sumamente elemental de este primer capítulo vamos a valernos de un ejemplo muy vulgar, que dé una idea aproximada, susceptible de ulterior perfeccionamiento.

Si un alumno se propone colocar algunos libros en un largo estante de modo que se sostengan, procurará apoyar cada uno sobre otro, con leve inclinación; pero ¿dónde apoyar el primero? A cualquiera se le ocurre elegir como primero uno cualquiera de ellos que por su mayor espesor y más sólida encuadernación se sostenga por sí solo, y así es posible iniciar la serie de modo que todos, hasta los más sutiles, se sostengan. Pues bien; la Geometría elige como conceptos primitivos o iniciales los que *se sostienen por sí solos*, es decir, los que tienen tan amplia base de apoyo en la realidad, que ofrecen solidez suficiente para servir de base a nuestros razonamientos. La realidad física nos ofrece modelos que a todos nos dan claramente la idea de recta geométrica, y éste es, por tanto, un concepto adecuado para iniciar la Geometría; no lo es en cambio el concepto de esfera, demasiado complejo y de difícil comprobación física.

Pregúntese al labrador más ignorante si varios árboles están alineados o si es recto el borde de una tabla, y dirigiendo una visual contestará sin titubeo *sí* o *no*. Pregúntesele si una bola es bien redonda, y contestará probablemente: así parece, pero la vista engaña. Piense el lector cómo haría para probar si la bola es o no exactamente esférica y se dará cuenta de la dificultad del problema.

---

fijamos dos puntos de un cuerpo cualquiera y se hace girar, los puntos que no se mueven forman una recta. Para llegar a organizar deductivamente la Geometría partiendo de esta definición, habría que introducir otros conceptos primitivos: cuerpo, rotación, etc.

Por estas razones los tratados didácticos modernos, lejos de empeñarse en definir estos primeros conceptos de punto, recta, segmento, se limitan a evocar imágenes físicas que despierten la idea abstracta y sobre esta simple base imaginativa comienza la elaboración lógica de la Geometría.

Las definiciones implícitas.

Volviendo al ejemplo de los libros alineados sobre el estante, vamos a complicar el problema suponiendo que todos son tan delgados que ninguno se sostiene sólo, ¿cómo hacer para que se mantengan verticales? El lector menos práctico en construir castillos de naipes ideará en seguida el artificio eficaz: a falta de libros que se sostengan solos para tener la base inicial, construirá esta apoyando unos en otros, a la manera como se hace con dos o más cartas de baraja, incapaces de sostenerse cada una por sí sola, pero que se sostienen recíprocamente con leve inclinación.

Pues bien; esos conceptos primitivos que al principiante parecen suficientemente sólidos para sostenerse por sí mismos y servir de apoyo a los siguientes, son considerados como demasiado frágiles por los geómetras profesionales, que se han esforzado en que la Geometría se sostenga por sí sola sin apoyo en realidades físicas externas a los conceptos abstractos y han ideado las *definiciones* llamadas *implícitas*, en que se enuncian conjuntamente las relaciones que ligan todos estos entes primitivos todavía no definidos; este cuadro de relaciones enunciadas, naturalmente en forma de axiomas o postulados, donde figuran los términos que los designan y las relaciones que los ligan, constituye la definición implícita de unos y otras simultáneamente.

NOTAS

A continuación reproducimos algunas definiciones clásicas, cuyo análisis detenido dejamos como ejercicio a la consideración del lector.

PUNTO.

«Lo que es indivisible en todos sentidos, pero tiene una posición» (*Aristóteles*).

«Lo que no tiene parte alguna» (*Euclides*).

«Los extremos de una línea» (*Euclides, Legendre*).

«Forma sin magnitud. Lo que está determinado por sí mismo» (*Delboeuf*).

RECTA.

Además de la definición oscura de Euclides y la de Leibniz, citada, y de otras análogas fundadas en la invariabilidad de la recta durante el giro, citaremos las siguientes:

«Camino más corto entre dos puntos» (*Legendre* y otros autores anteriores). Definición muy generalizada y como se ve muy defectuosa por utilizar el concepto de distancia y el de mínimo mucho más complejos que el de recta.

«Línea cuyos puntos intermedios hacen sombra a los extremos» (*Platón*). Definición de carácter físico que asimila la recta al rayo luminoso.

«Es la línea que, trazada de un punto a otro, no se vuelve ni a la derecha ni a la izquierda, y es la más corta que se puede trazar entre estos dos puntos» (*Simpson*). Definición superabundante, y, además de este defecto, reúne los de dos definiciones malas.

«La recta es una línea homogénea, es decir, cuyas partes, tomadas indiferentemente, son semejantes entre sí y no difieren más que en longitud» (*Delboeuf*). Modelo de definición oscura e imperfecta, que igualmente parece aplicable a la circunferencia.

«La línea recta es una serie de puntos, cada uno de los cuales equidista de tres puntos dados» (*Fourier*). Definición defectuosa y complicada; se apoya en el concepto de distancia; es preciso probar además la existencia del lugar geométrico de puntos que cumplen esta condición.

«Es una línea indefinida tal que por dos puntos dados no se puede hacer pasar más que una» (*Duhamel*). Tiene ya carácter de definición implícita.

ANGULO.

«Es la contracción en un solo punto de una superficie bajo una línea quebrada». Definición atribuída a Apolonio (?).

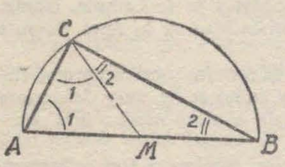
«Cuando dos rectas se cortan, la cantidad mayor o menor en que están separadas una de otra se llama ángulo» (*Legendre*).

§ 5.º—LA DEMOSTRACIÓN.

Hipótesis, tesis, demostración.

Analicemos, por ejemplo, el siguiente teorema demostrado en Geometría. (V. nuestros *Elementos de Geometría*. Colección intuitiva, pág. 91):

TEOREMA.—*Si un triángulo* A B C *es rectángulo en* C, *la circunferencia, que tiene por diámetro la hipotenusa* A B, *pasa por el vértice* C *del ángulo recto.*



En este teorema se parte de una propiedad: *el triángulo es rectángulo;* y se demuestra otra: *la circunferencia, que tiene por diámetro la hipotenusa, pasa por el vértice del ángulo recto.* La primera propiedad se llama *hipótesis* y la segunda *tesis.*

De un modo general: Se llama *hipótesis* de un teorema lo que *se supone* que se verifica, y *tesis* lo que *se deduce* de la hipótesis.

El razonamiento mediante el cual se deduce la tesis como consecuencia de la hipótesis y de otras propiedades anteriormente establecidas se llama *demostración.* Esta consiste en la *síntesis* de algunas propiedades anteriormente establecidas combinadas según las reglas lógicas llamadas de inferencia o deducción, que son las leyes del sentido común.

Recordemos, por ejemplo, la demostración del teorema anterior:

Como el triángulo es rectángulo (hipótesis), podemos descomponer el ángulo recto C en dos ángulos agudos iguales a los A y B, en la forma que indica la figura (en virtud de una propiedad anterior que establece que dichos ángulos son complementarios). Queda así el triángulo ABC descompuesto en otros dos AMC y CMB, que son isósceles por tener cada uno dos ángulos iguales (en virtud de otra propiedad conocida); por consiguiente, $MA = MC$ y $MC = MB$, lo que prueba que la circunferencia de diámetro AB, es decir, de centro M y radio $MA = MB = MC$ pasa por C, y resulta la tesis del teorema.

La cadena deductiva.

Analicemos, por ejemplo, una de las propiedades en que acabamos de apoyarnos en el párrafo anterior:

TEOREMA.—*En todo triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios.*

HIPÓTESIS: *Un triángulo es rectángulo.*

TESIS: *Los ángulos agudos son complementarios.*

La *demostración* consiste sencillamente en aplicar la hipótesis al siguiente teorema, que suponemos ya demostrado:

TEOREMA.—*La suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos rectos.*

Tan sencilla es en este caso la deducción del teorema para el triángulo rectángulo como consecuencia del teorema general para todo triángulo, que no suele dársele el nombre de *teorema*, sino de *corolario*. Analicemos, a su vez, el teorema que acabamos de enunciar.

HIPÓTESIS: *Tres ángulos pertenecen a un triángulo.*

TESIS: *Su suma es igual a dos rectos.*

La demostración (v. *Elementos de Geometría*. Colección intuitiva, pág. 76) se apoya en propiedades del paralelismo. Y si analizamos igualmente éstas veremos que se apoyan en el postulado fundamental del paralelismo de rectas, que en dicha Geometría intuitiva enunciábamos así: «El paralelismo de dos rectas es independiente de la traslación que se elija para trazarlas». Postulado que otros autores sustituyen por otro de enunciado muy diferente, pero de esencia equivalente. Por ejemplo, Euclides adoptaba la siguiente propiedad como postulado de paralelismo. «Si una recta, cayendo sobre otras dos, forma ángulos internos de un mismo lado cuya suma sea menor que dos rectos, aquellas dos, prolongadas hacia ese lado, se cortan.»

Muchos libros modernos adoptan esta otra forma: «Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella» (*) (V., por ejemplo, nuestros *Elementos de Geometría racional.)*

Si se adopta una de estas proposiciones como postulado fundamental de paralelismo, las otras se pueden deducir, es decir, demostrar, y quedan convertidas en teoremas. La distinción entre *postulado* y *teorema* no es, por consiguiente, intrínseca y sólo depende de la ordenación que se adopte para la organización lógica de la Geometría.

Círculos viciosos.

Hemos visto que cabe ordenar de muy variados modos las proporciones matemáticas; pero una vez elegido uno hay que atenerse estrictamente a él, y conviene insistir en el requisito lógico esencial de que *cada teorema debe sólo apoyarse en teoremas anteriores,* es decir, que no sean a su vez consecuencia del que se trata de demostrar.

(*) Otra forma más particular de enunciar el postulado de Euclides de la que resulta aquél como corolario es ésta: "Una perpendicular y una oblicua a una misma recta se cortan."

Empecemos por un ejemplo bien sencillo del lenguaje vulgar. Imagine el lector que pregunta a un amigo:

¿Por qué no come Juan?

Y que le contesta: *Por que no trabaja.*

Supongamos que inquiere de nuevo:

¿Y por qué no trabaja?

Contestación: *Por que está enfermo.*

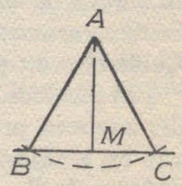
Nueva pregunta: *¿Y por qué está enfermo?*

Contestación: *Por que no come.*

Repita el lector las preguntas y respuestas, y diga si queda convencido del por qué Juan no come, ni trabaja, ni está sano.

Analice ahora esta serie de razonamientos de naturaleza parecida, aunque un poco más complicada.

TEOREMA.—*Dos oblicuas* AB *y* AC *iguales, se apartan igualmente del pie de la perpendicular* AM.



Demostración.—En efecto, ABC es un triángulo isósceles, en el cual la altura AM divide en partes iguales a la base; de donde resulta $BM = MC$. Nos apoyamos, pues, en el siguiente

TEOREMA.—*En todo triángulo isósceles* ABC *la altura* AM *es mediatriz de la base* BC.

Demostración.—En efecto, si trazamos la circunferencia de centro A y radio $AB = AC$, el diámetro AM perpendicular a la cuerda la divide en dos partes iguales. Es decir, que nos apoyamos en este otro

TEOREMA.—*El diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta en partes iguales.*

Demostración.—En efecto, consideremos la recta BC y las dos oblicuas AC y AB. Puesto que estas oblicuas son iguales por ser radios de la circunferencia, equidistarán del pie M de la perpendicular, luego $BM = MC$, como queríamos demostrar.

¿Cree el lector que los tres teoremas han quedado demostrados?

Fácil le será darse cuenta de que si el primer teorema es cierto como consecuencia del segundo, éste como consecuencia del tercero y éste a su vez como consecuencia del primero, resulta en definitiva la siguiente conclusión:

Dos oblicuas se apartan igualmente del pie de la perpendicular, por que ... dos oblicuas se apartan igualmente del pie de la perpendicular.

A resultados como éste se llega siempre que se incurre en el defecto de apoyar la demostración de un teorema en alguna de las consecuencias que del mismo se deducen. Se dice entonces que se ha establecido *un círculo vicioso.* Cuide el principiante de evitarlos.

Las pretendidas demostraciones del Postulado de Euclides adolecen precisamente de dicho defecto, pues se apoyan en verdades equivalentes a dicho postulado o que se deducen de él.

Por eso no puede juzgarse nunca de la corrección de una demostración mientras no se digan las proposiciones en que es posible apoyarla.

Por eso también hemos dicho en el § 2.º que toda cadena de proposiciones *ha de tener un origen,* ya que no es posible *cerrarla sobre sí misma.*

Peticiones de principio.

Hemos visto la inconsecuencia que resulta de apoyar la demostración de un teorema en otros *posteriores,* es decir, que se deducen de él.

Pero junto a esta falta lógica se suele cometer otra mucho más frecuente, a saber: la de apoyar una demostración en proposiciones *implícitamente* admitidas en el razonamiento (frecuentemente aportadas por la observación de una figura) y que no han sido previamente establecidas de un modo explícito.

La intromisión velada de una de tales proposiciones se llama «petición de principio», y puede conducir algunas veces (como veremos al tratar del rigor y de los paralogismos) a resultados erróneos.

No se crea, sin embargo, que la intuición de figura es la única fuente de peticiones de principio; éstas pueden deslizarse igualmente en razonamientos de carácter netamente abstracto.

EJEMPLO. — Según el postulado de la división del plano (véase por ejemplo nuestros *Elementos de Geometría racional*), una recta a del mismo le divide en dos regiones, llamadas semiplanos α y α' de manera que todo punto exterior a la recta está en α o en α'. Otra recta b, secante de a, determina también dos semiplanos β y β'. De este modo un punto del plano no situado en a ni en b, estará

en α y β, o en α' y β', o en α y β', o en α' y β,

quedando el plano dividido en cuatro regiones llamadas ángulos, según hemos visto en página 28.

Consideremos ahora una nueva recta c, secante de las anteriores y no concurrente con ellas; como esta recta divide también al plano en dos regiones γ y γ', combinando cada una de ellas con las anteriores, resulta en definitiva que todo punto del plano no situado en a, b o c estará

en $\alpha\beta\gamma$, o en $\alpha\beta\gamma'$, o en $\alpha\beta'\gamma$, o en $\alpha\beta'\gamma'$, o en $\alpha'\beta\gamma$,
o en $\alpha'\beta\gamma'$, o en $\alpha'\beta'\gamma$, o en $\alpha'\beta'\gamma'$;

es decir, tres rectas a, b, c no concurrentes dividen al plano en *ocho* regiones, en contra de lo que nos dice claramente la figura 1.ª ¿Es asaco esta figura quien nos engaña? En modo alguno; en este caso la falla está precisamente en el razonamiento abstracto, en el que implícitamente acabamos de hacer una *petición de principio:* admitir la existencia efectiva de puntos en *todas* las *clases* a que el razonamiento de carácter *disyuntivo* anterior nos ha conducido. No es difícil probar, en efecto, que una de tales supuestas regiones carece de puntos, es decir, es una *clase vacía*, como se dice en términos de lógica formal. En cambio, si sustituímos las palabras plano y recta por superficie esférica y circunferencia máxima y repetimos la clasificación anterior, la superficie esférica queda efectivamente dividida en ocho regiones o triángulos esféricos, y el razonamiento anterior, que sigue siendo falso por contener una petición de principio, no conduce a ninguna contradicción.

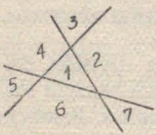


Fig. 1.ª

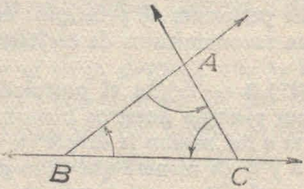


Fig. 2.ª

EJERCICIO 1.—He aquí una pretendida demostración del teorema de la suma de los ángulos de un triángulo *sin apoyarse* en el postulado del paralelismo (fig. 2.ª).

La recta BC gira en torno de B hasta tomar la dirección BA; gira después alrededor de A, en el mismo sentido, hasta tomar la dirección AC; finalmente gira alrededor de C, hasta llegar a la dirección CB. Los ángulos girados son $A + B + C$, y como el giro *total* ha sido de dos rectas, puesto que al final coincide con la recta inicial, pero en sentido opuesto, resulta $A + B + C = 2\,R$. ¿Dónde está la *petición de principio*, o el *círculo vicioso?*

EJERCICIO 2.—En el § anterior hemos dicho que en las definiciones pueden presentarse círculos viciosos, lo mismo que en las demostraciones. Tal defecto aparece cuando apoyamos la definición de un concepto en otro, la de éste en otro, ..., y después de dos o más eslabones volvemos a apoyarnos en el primer concepto.

Probar que los llamados «Diccionarios de la Lengua», en los que se definen todos los términos, no son más, desde el punto de vista lógico, que una tupida red de círculos viciosos. Cerrar algunos, como ejercicio.

§ 6.º—Relaciones entre los teoremas derivados.

Teoremas recíprocos.

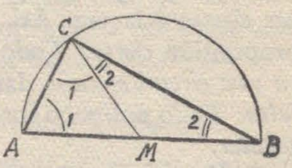
Hemos demostrado en la lección anterior:

I. *Si un triángulo* ABC *es rectángulo en* C, *la circunferencia que tiene por diámetro* AB *pasa por el vértice* C.

Pero también es cierta esta otra proposición:

II. *Si la circunferencia que tiene por diámetro un lado* AB *de un triángulo* ABC *pasa por el vértice* C, *este triángulo es rectángulo en* C.

En efecto (*), si $MA = MC = MB$ los triángulos AMC y CMB son isósceles (por tener cada uno los dos lados iguales), por consiguiente los ángulos (1) de la figura son iguales entre sí, así como los (2). El ángulo C es, pues, igual a la suma de los A y B, y como entre los tres valen dos rectos, C vale un recto.



Si comparamos los teoremas I y II vemos fácilmente que *la hipótesis del uno es tesis del otro, y viceversa.* Cuando dos teoremas cumplen esta condición se dice que *uno es recíproco del otro.* Es frecuente llamar a uno de ellos teorema *directo* y al otro *recíproco,* aunque igualmente podría tomarse éste como directo y aquél como recíproco suyo.

(*) «Elementos de Geometría». Colección intuitiva, pág. 9 .

Otro ejemplo:

TEOREMA DIRECTO.—*Todo punto situado en la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos* («Elementos de Geometría», Col. int., pág. 46).

TEOREMA RECÍPROCO.—*Todo punto equidistante de los extremos de un segmento está en la mediatriz de dicho segmento* («Elementos de Geometría», Col. int., página 69).

De un modo general, si convenimos en representar la hipótesis del teorema directo por *H*, y la tesis por *T*, podemos expresar abreviadamente un teorema cualquiera directo y su recíproco así:

TEOREMA DIRECTO.—*Si se verifica* H, *se verifica* T.

TEOREMA RECÍPROCO.—*Si se verifica* T, *se verifica* H.

Independencia de los teoremas recíprocos.

No se crea que dos proposiciones recíprocas son siempre ciertas a la vez. Así, por ejemplo, el recíproco de la proposición *cierta: Todo polígono regular es inscriptible en una circunferencia,* daría la proposición evidentemente *falsa: Todo polígono inscriptible en una circunferencia es regular.*

Análogamente: *Si dos triángulos son iguales, tienen sus ángulos respectivamente iguales,* mientras que la recíproca no es cierta, ya que *dos triángulos cuyos ángulos sean respectivamente iguales, pueden ser iguales o semejantes.*

En resumen:

DOS TEOREMAS SON RECÍPROCOS CUANDO LA TESIS DEL UNO ES LA HIPÓTESIS DEL OTRO, Y VICEVERSA. LA CERTEZA DE UNO DE DICHOS TEOREMAS NO IMPLICA LA CERTEZA DEL OTRO.

Teoremas contrarios.

Dado un teorema, como por ejemplo el citado en el párrafo anterior:

HIP.: *Si un punto está en la mediatriz de un segmento,*

TESIS: *equidista de los extremos del segmento.*

Formemos otra proposición *cuyas hipótesis y tesis sean respectivamente contrarias a las de éste,* es decir:

HIP.: *Si un punto* no *está en la mediatriz de un segmento*

TESIS: no *equidista de los extremos del segmento.*

¿Es cierta esta propiedad? Es fácil ver que sí, observando que viene a decir lo mismo que el teorema recíproco ya demostrado, pues *si el punto equidistara de los extremos estaría forzosamente en la mediatriz,* contra lo supuesto.

Dos teoremas, como los precedentes, tales que *la hipótesis y tesis del uno sean respectivamente las negaciones de la hipótesis y tesis del otro,* se llaman *contrarios.*

Equivalencia de los teoremas contrario y recíproco.

Generalizando lo que acabamos de ver en este caso particular, supongamos demostrado un teorema *directo:*

Si se verifica H, *se verifica* T.

Y su *recíproco:*

Si se verifica T, *se verifica* H.

Entonces es igualmente cierto el teorema *contrario:*

Si no se verifica H, *no se verifica* T.

En efecto, no puede verificarse T, pues si se verificara, en virtud del teorema recíproco, se verificaría igualmente *H,* contra lo supuesto.

Y análogamente, si es cierto el contrario es también cierto el recíproco. Llegamos así a esta conclusión general:

EL TEOREMA CONTRARIO Y EL RECÍPROCO SON EQUIVALENTES.

Teoremas contrarrecíprocos. Su equivalencia.

Comparando entre sí el teorema contrario y el recíproco, se observa que *cada uno de ellos tiene por hipótesis la negación de la tesis del otro, y viceversa.*

Dos teoremas que cumplen esta condición se llaman *contrarrecíprocos,* y acabamos de ver que *la certeza del uno implica la certeza del otro.*

Otro ejemplo: Formemos el contrarrecíproco del siguiente teorema directo:

TEOREMA DIRECTO.—*Si un punto está en la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos.*

TEOREMA CONTRARRECÍPROCO. — *Si un punto no equidista de los extremos de un segmento, no está en la mediatriz.*

De un modo general:

TEOREMA DIRECTO.—*Si se verifica* H, *se verifica* T.

CONTRARRECÍPROCO.—*Si no se verifica* T, *no se verifica* H.

DOS TEOREMAS CONTRARRECÍPROCOS SON EQUIVALENTES.

Esquema lógico de las relaciones entre los teoremas derivados.

En el cuadro siguiente están expresadas esquemáticamente las relaciones lógicas existentes entre cada teorema y sus tres derivados: recíproco, contrario y contrarrecíproco.

Los teoremas de la línea inferior son contrarios de sus correspondientes superiores y éstos son a su vez contrarios de aquéllos.

Los dos teoremos que están en una misma horizontal son recíprocos entre sí.

DIRECTO		RECÍPROCO
Si se verifica H se verifica T	(recíprocos)	Si se verifica T se verifica H
(contrarios)	contrarrecíprocos contrarrecíprocos	(contrarios)
Si no se verifica H no se verifica T	(recíprocos)	Si no se verifica T no se verifica H
CONTRARIO		CONTRA- RECÍPROCO

Los teoremas contrarrecíprocos quedan en diagonal, de tal modo que demostrados los teoremas situados en dos vértices consecutivos del cuadrado, quedan demostrados los otros dos.

En particular: PARA DEMOSTRAR LOS CUATRO TEOREMAS BASTA PROBAR EL DIRECTO Y EL RECÍPROCO, o bien EL DIRECTO Y EL CONTRARIO.

Condiciones necesarias y suficientes.

Muchas veces se enuncian en Matemáticas los teoremas como condiciones necesarias y suficientes. Volvamos, por ejemplo, al teorema directo de la mediatriz.

Si un punto está en la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos.

Esta proposición puede expresarse diciendo:

1.º *Es suficiente* que el punto esté en la mediatriz para que podamos afirmar que equidista de los extremos.

2.º Siempre que ocurra lo primero tiene *necesariamente* que ocurrir lo segundo, es decir, la equidistancia de los extremos es una condición *necesaria* para que el punto esté en la mediatriz.

De un modo general, todo teorema: *Si se verifica* H *se verifica* T, puede enunciarse de estos dos modos:

1.º ES CONDICIÓN SUFICIENTE QUE SE VERIFIQUE LA HIPÓTESIS H PARA QUE SE VERIFIQUE LA TESIS T.

2.º LA TESIS T ES UNA CONDICIÓN NECESARIA PARA QUE SE CUMPLA LA HIPÓTESIS H.

Si se demuestra, pues, un teorema y su recíproco (o su contrario), la hipótesis y la tesis desempeñarán igual papel, y cada una de ellas será condición *necesaria y suficiente* para que se verifique la otra.

Podemos, pues, *reunir en un solo enunciado* un teorema directo y su recíproco diciendo: H *es condición necesaria y suficiente para que se verifique* T. O bien: T *es condición necesaria y suficiente para que se verifique* H. O bien, por último: T *y* H *son equivalentes.*

Así, por ejemplo: *Es condición necesaria y suficiente para que un punto esté en la mediatriz de un segmento que equidiste de los extremos del mismo.*

O bien, lo que es lo mismo: *Es condición necesaria y suficiente para que un punto equidiste de los extremos de un segmento que esté en la mediatriz del mismo.*

O también: *Estar un punto en la mediatriz de un segmento y equidistar de sus extremos* son condiciones equivalentes.

En resumen: PARA DEMOSTRAR QUE UNA CONDICIÓN ES NECESARIA Y SUFICIENTE HAY QUE DEMOSTRAR DOS TEOREMAS RECÍPROCOS ENTRE SÍ O CONTRARIOS ENTRE SÍ.

NOTAS

Condición suficiente mínima.

Con bastante frecuencia se habla en Matemáticas de LA condición necesaria y suficiente A para que se verifique T. Se suele entender entonces por tal una condición necesaria y *suficiente mínima*.

Precisemos este término. Una condición A suficiente para que se verifique T es superabundante o excesiva cuando existe una condición A' suficiente contenida en A. Una condición suficiente A se llamará *mínima* cuando no sea superabundante; es decir, cuando para toda condición A' contenida en A existe algún caso en que se verifica A' y no se verifica T.

Ejemplos: Si dos circunferencias coinciden tienen tres (cuatro, cinco, ...) puntos comunes; y recíprocamente: Si dos circunferencias tienen tres (cuatro, cinco, ...) puntos comunes coinciden.

Es, pues, condición necesaria y suficiente, en el sentido estrictamente lógico, que dos circunferencias tengan tres (cuatro, cinco, ...) puntos para que coincidan.

Ahora bien; al decir LA *condición necesaria* y *suficiente* para *que dos circunferencias coincidan es que tengan tres puntos*, se da a entender (aun cuando sea defectuosamente) que dicha condición es suficiente mínima. En cambio, son superabundantes la de tener cuatro, cinco, etc.

Decir que A es necesaria para que se cumpla T, es afirmar que «si se verifica T se verifica A».

Decir que B es suficiente para que se cumpla T, es afirmar que «si se verifica B también se verifica T».

Como consecuencia resulta «si se verifica B se verifica A»; es decir, *A es consecuencia de B.*

Una condición suficiente mínima entraña, pues, como consecuencia todas las superabundantes necesarias que la comprenden. Ejemplo: la condición de tener dos circunferencias tres puntos comunes lleva como consecuencia el que tengan cuatro, cinco, etc.

Recíprocos parciales de un teorema.

Ocurre algunas veces que la hipótesis de un teorema es múltiple; es decir, encierra varias condiciones, como por ejemplo un teorema de la forma.

«Si se verifican H_1, H_2 y H_3 se verifica T.» [1]

El recíproco sería:

«Si se verifica T se verifican H_1, H_2 y H_3»;

pero es frecuente que tal recíproco no sea cierto, y en cambio sí ocurra que al verificarse la tesis y alguna de las condiciones parciales de la hipótesis se verifiquen las restantes. Por ejemplo:

«Si se verifica T y H_1 se verifican H_2 y H_3»;

o bien:

«Si se verifica T_1 H_1 y H_2 se verifica H_3».

A estos teoremas se les suele llamar también *recíprocos* del [1]; de modo que un mismo teorema puede tener varios recíprocos parciales de esta naturaleza según las combinaciones que se hagan con la tesis y las hipótesis parciales.

EJEMPLO:

Supongamos definido como es corriente un rectángulo como un paralelógramo con un ángulo recto (basta esta condición para que sean rectos los demás), y analicemos el teorema que dice «Las diagonales de un rectángulo $ABCD$ son iguales»:

$$\text{Hip.)} \quad \frac{H_1}{AB \parallel CD} \quad \frac{H_2}{AD \parallel BC} \quad \frac{H_3}{AB \perp BC}.$$

$$\text{Tesis)} \quad \frac{\text{Diagonal } AC = \text{Diagonal } BD}{T}$$

H_1 y H_2 traducen la condición de ser paralelógramo.

¿Es cierto el recíproco que resultaría de invertir sencillamente la tesis y la hipótesis? De otro modo: ¿Será rectángulo todo cuadrilátero que tenga las diagonales iguales? Evidentemente no, pues es posible construir infinidad de cuadriláteros cuyas diagonales son iguales y que, sin embargo, no son ni siquiera paralelogramos.

Ahora bien: si a la tesis añadís las hipótesis H_1 y H_2, es decir, la condición de ser paralelógramo, se verifica también H_3; es decir:

«Todo *paralelógramo* cuyas diagonales son iguales es rectángulo.»
Así también, si se verifican T, H_2 y H_3 se verifica H_1. Es decir:
«Todo cuadrilátero que tenga dos ángulos rectos (condic. equivalente a H_2 y H_3) y cuyas diagonales son iguales, es rectángulo.»

NUEVOS EJEMPLOS Y EJERCICIOS

1.—Es condición *necesaria* y *suficiente* para que un número sea divisible por 2, que termine en cifra par.

2.—Es condición *necesaria* y *suficiente* para que un producto sea nulo, que sea nulo uno de sus factores.

3.—Es condición *suficiente* para que un número sea divisible por 5, que termine en 5; pero no es *necesaria*, pues también puede terminar en 0.

4.—Es condición *necesaria* para que una división esté bien hecha, que el divisor por el cociente, más el resto, sea igual al dividendo; pero no es *suficiente*, pues se precisa además que el resto sea menor que el divisor.
Ambas condiciones conjuntamente son *necesarias* y *suficientes*, es decir, determinan el cociente y el resto.

6.—Pártase de la siguiente proposición:
Todo alumno con más de quince faltas de asistencia será suspenso.
Fórmese la contraria, la recíproca y la contrarrecíproca.

7.—Dígase cuáles son ciertas.

8.—Se puede deducir de esta proposición una condición *necesaria* para *aprobar*. ¿Es suficiente? Se puede deducir una condición *suficiente* para ser *suspenso*. ¿Es también necesaria?

§ 7.º—LOS MÉTODOS INDIRECTOS DE DEMOSTRACIÓN.

La demostración por reducción al absurdo.

Hemos visto en la lección anterior la equivalencia entre dos teoremas contrarrecíprocos, y a veces conviene aprovechar esta equivalencia para demostrar uno de ellos en vez del otro cuando resulta más cómoda o más conveniente desde el punto de vista psicológico.

Demostrar *por reducción al absurdo* un teorema (o simplemente *por el absurdo)* es probar su contrarrecíproco.

La justificación de este nombre resultará de la simple lectura de los ejemplos siguientes:

EJEMPLO.—*Dos perpendiculares a una misma recta no se cortan.* Puede demostrarse viendo que *si se cortaran no podrían ser perpendiculares a una misma recta* (contrarecíproco), en virtud de una propiedad anterior que dice:

Por un punto no hay más que una perpendicular a una recta.

Esta proposición anterior se demuestra así: «Pues si hubiera dos perpendiculares a la recta con un punto común, también tendrían el simétrico, y tendríamos dos rectas distintas con dos puntos comunes, lo que contradice el postulado fundamental de la recta.»

También esta demostración se ha hecho por reducción al absurdo:

Inconvenientes de la demostración por el absurdo.

Ante todo y aunque parezca superfluo, conviene insistir en que el absurdo o contradicción a que se llega debe serlo respecto de la hipótesis y no respecto de la tesis. La contradicción con la tesis es el punto de partida; la contradicción con la hipótesis es el punto de llegada, que termina la demostración por quedar así probado el contrarrecíproco.

Un ejemplo grosero, pero por desgracia frecuente, de falsas demostraciones por el absurdo, es éste:

Dos rectas perpendiculares a otra son paralelas.

Demostración por el absurdo: Demostrar esto equivale a probar que las dos rectas no tienen punto alguno común; en efecto, si tuvieran un punto común no serían paralelas, contra lo afirmado en el teorema; luego la hipótesis hecha es falsa y queda demostrado el teorema.

Dejando de lado errores tan fáciles de subsanar con un poco de atención, y aun suponiendo que la demostración por el absurdo se desarrolla correctamente, tiene algunos inconvenientes que quedarán de manifiesto en un ejemplo.

EJEMPLO.—*La sucesión de números primos es indefinida.*

Demostración por el absurdo: Supongamos que el teorema no sea cierto y que p sea el mayor número primo. Formemos el producto de todos los números $1, 2, 3, 5, 7, \ldots p$, sumándole 1, o sea:

$$n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots p + 1 .$$

Todo número, o es primo, o admite un divisor primo; pero este número no admite ningún divisor primo $2, 3, 5, 7, \ldots p$, pues al dividir por cualquier de ellos, resulta el resto 1; luego: *el número* n *es primo;* y como es mayor que *p*, el teorema queda demostrado.

Esta demostración hizo sospechar que el número *n*, fuera siempre primo, sospecha apoyada en las comprobaciones numéricas siguientes:

$$
\begin{array}{rl}
1+1=2 & \text{primo.} \\
1.2+1=3 & \text{»} \\
1.2.3+1=7 & \text{»} \\
1.2.3.5+1=31 & \text{»} \\
1.2.3.5.7+1=211 & \text{»} \\
1.2.3.5.7.11+1=2311 & \text{»}
\end{array}
$$

y, sin embargo, para $p=12$, resulta 30.031, que es divisible por 59.

¿A qué es debido que la frase arriba subrayada afirme tal inexactitud?

Veamos más detenidamente la esencia del método de reducción al absurdo. Se comienza por negar *provisionalmente* la tesis y de este supuesto (que luego se verá que es imposible) se van sacando consecuencias (que pueden ser falsas) hasta llegar a una cuya falsedad es patente, y entonces hay que desechar toda la cadena de proposiciones, cuya verdad era solo hipotética y provisional.

Por el peligro didáctico de que en la memoria del alumno queden grabadas como definitivas tales proposiciones provisorias, que *pueden* ser falsas (*), conviene evitar, en lo posible, el método de reducción al absurdo que, además, tiene el inconveniente de dar una prueba indirecta, menos convincente que la demostración directa (**).

(*) Tampoco puede afirmarse que dichas proposiciones sean todas falsas; pues de hipótesis falsas pueden sacarse conclusiones verdaderas. Ejemplo: la madera es un mineral; los minerales tienen peso, luego la madera tiene peso.

(**) Schopenhauer apoya en ellas (que llama *métodos de la ratonera*) su crítica acerba de la enseñanza matemática.

Teoremas compuestos.

He aquí un ejemplo de teorema compuesto de varias hipótesis con sus tesis correspondientes, tipo que se presenta con frecuencia en Aritmética y en Geometría.

Supongamos demostrado el siguiente teorema aritmético para números positivos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si es } a=b \text{ es } a^2=b^2 \\ \text{Si es } a<b \text{ es } a^2<b^2 \\ \text{Si es } a>b \text{ es } a^2>b^2 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{o sus} \\ \text{equiva-} \\ \text{lentes} \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{Si es } \sqrt{p}=\sqrt{q} \text{ es } p=q \\ \text{Si es } \sqrt{p}<\sqrt{q} \text{ es } p<q \\ \text{Si es } \sqrt{p}>\sqrt{q} \text{ es } p>q, \end{array}\right.$$

el cual resulta como corolario de la multiplicación de desigualdades.

¿Serán ciertos los recíprocos? Vamos, en efecto, a demostrar:

RECÍPROCOS:

$$\begin{array}{l} \text{Si es } p=q \text{ es } \sqrt{p}=\sqrt{q} \\ \text{Si es } p<q \text{ es } \sqrt{p}<\sqrt{q} \\ \text{Si es } p>q \text{ es } \sqrt{p}>\sqrt{q} \end{array}$$

Demostremos por ejemplo esta última propiedad por el absurdo diciendo: Supongamos $p>q$; si fuera

$$\sqrt{p}=\sqrt{q}$$

sería $p=q$, en virtud del primer teorema directo, y si fuera

$$\sqrt{p}<\sqrt{q}$$

sería $p<q$, en virtud del segundo teorema directo, lo que contradice en ambos casos la hipótesis; luego debe ser $\sqrt{p}>\sqrt{q}$, quedando así demostrado dicho recíproco; y análogamente se puede hacer con los otros dos.

Analicemos la causa de la brevedad y sencillez de esta demostración para descubrir el principio general que permita en casos análogos llegar directamente a la conclusión, sin necesidad de repetir el razonamiento.

Nótese que en el teorema directo están *todas las hipótesis posibles* respecto de los números $\sqrt{p}$ y $\sqrt{q}$, y gracias a ello cualquier hipótesis que hagamos respecto de $\sqrt{p}$ y $\sqrt{q}$ en la demostración por el absurdo está prevista en el teorema directo. Además, las conclusiones a que llegan todas las hipótesis de los teoremas directos son distintas, es decir, *se excluyen entre sí*, y por esto hemos llegado a contradicción.

Principio general de reciprocidad (*).

Generalicemos esto, demostrando este principio general de Lógica, que es de frecuente uso en las demostraciones matemáticas:

Si en un teorema demostrado, que comprende varias hipótesis con sus tesis correspondientes, las hipótesis se completan y las conclusiones se excluyen, todos los recíprocos son ciertos.

En efecto; sean los directos, que ya suponemos demostrados, los siguientes:

Si se verifica H_1 se verifica T_1
Si se verifica H_2 se verifica T_2
Si se verifica H_3 se verifica T_3
Si se verifica H_4 se verifica T_4,

y demostremos, por ejemplo, el recíproco segundo:

Si se verifica T_2 se verifica H_2.

(*) También suele llamarse *principio de Hauber*.

En efecto, si no se verificara H_2, debería forzosamente verificarse alguna de las otras hipótesis H_1, o bien H_3, o bien H_4, *puesto que suponemos haber agotado en el directo todas las hipótesis posibles*, es decir, suponemos que el cuadro de hipótesis es *completo*.

Pero si se verificara H_1 también se verificaría T_1, lo que encierra una contradicción con T_2, puesto que las cuatro tesis del directo *se excluyen*, es decir, son incompatibles o contradictorias entre sí; análogamente llegaremos a contradicción en las hipótesis H_3 y H_4; luego forzosamente debe verificarse H_2.

Si en vez de cuatro hipótesis posibles fuese cualquier otro número, el razonamiento sería análogo, siempre con la condición de que el cuadro sea completo y que las conclusiones sean incompatibles entre sí.

EJEMPLO

DIRECTOS:

Si la distancia de una recta al centro de una circunferencia de radio r *es*

$d > r$ *la recta es exterior a la circunferencia.*
$d = r$ *la recta es tangente a la circunferencia.*
$d < r$ *la recta es secante a la circunferencia.*

Como hemos hecho todas las hipótesis posibles y las conclusiones son contradictorias o excluyentes entre sí, podemos afirmar sin necesidad de demostración los

RECÍPROCOS:

Si una recta es $\left\{\begin{matrix}\textit{exterior}\\ \textit{tangente}\\ \textit{secante}\end{matrix}\right\}$ *a una circunferencia, su distancia* d *al centro de la misma es* $\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}$ *que el radio.*

§ 8.º—RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.—EL MÉTODO REDUCTIVO.

El método reductivo en general.

Suele llamarse impropiamente método *analítico* al ideado por Hipócrates de Chios, que consiste en *reducir* un problema a otro y éste a otro, y así sucesivamente hasta llegar a un problema ya resuelto, del cual se deduce la solución del primero.

Este método *reductivo* consta de un *doble proceso deductivo*, y quedará incompleto si se omite cualquiera de sus dos partes esenciales.

Si se trata de encontrar un ente que cumpla ciertas condiciones suponemos el problema resuelto, esto es, admitimos la existencia de dicho ente que satisface las condiciones expuestas; de éstas deducimos otras propiedades consecuencias de ella; de estas nuevas deducimos otras, y así seguimos hasta llegar a una condición consecuencia de las anteriores y que ya determina un solo ente. Ahora hay que probar, por deducciones en sentido inverso, que de esta última condición se deducen o resultan las primeras.

Cuando se opera por el proceso que hemos llamado *sustitución de equivalentes*, es decir, cuando se sustituye cada condición por otra que no sólo es *consecuencia* de ella, sino *equivalente* a ella, no será necesario el proceso deductivo inverso; pero éste será indispensable en cualquier otro caso.

El método reductivo en Aritmética.

En Aritmética los entes a determinar son números, y se procura reducir las condiciones a que han de cumplir a otras más sencillas hasta hallar aquellas que los determinan directamente.

La traducción del enunciado del problema en las condiciones aritméticas a que han de satisfacer los números incógnitos se llama *planteo* o *planteamiento* del problema, y el proceso reductivo de estas condiciones hasta la determinación efectiva del número o números buscados se llama *resolución*.

EJEMPLO 1.º—Empecemos por un ejemplo trivial para poner de relieve que aun en los ejemplos más sencillos hay proceso reductivo.

Un decámetro de tela ha costado 85 pesetas, ¿a qué precio resulta el metro?

Planteo y resolución. — Este número tiene que cumplir la condición de que repetido como sumando tantas veces como metros tiene la pieza, es decir, multiplicado por 10, ha de dar 85 pesetas. El número que multiplicado por 10 da 85 es, por definición, el cociente de dividir 85 entre 10; esta es, pues, la operación que da directamente el resultado 8,5 pesetas.

Veamos ahora otros ejemplos algo más complicados, y cuyo proceso reductivo no desmenuzaremos tanto.

EJEMPLO 2.º—Un camión parte de Madrid a las 2 y llega a Zaragoza a las 12. Un auto parte a las 5 y llega a Zaragoza a las 11. ¿A qué hora se encuentran, suponiendo que cada uno recorre espacios iguales en tiempos iguales?

Planteo y resolución.—El tiempo en horas que tarda el auto en encontrar al camión se obtendrá dividiendo la fracción de recorrido que les separa en el momento de la partida del «auto», por la fracción de recorrido en que se acercan por hora.

El primer dato, o fracción de recorrido que les separa a las 5, se obtendrá multiplicando la fracción de camino recorrido por el camión en una hora, por el tiempo que lleva corriendo a las 5, o sea 3 horas.

El segundo dato, o sea el acercamiento de «auto» y camión por hora a partir de dicho instante, se obtendrá restando las fracciones que recorren uno y otro por hora.

La fracción de recorrido total de cada coche en una hora es la que tiene de numerador la unidad y de denominador el número de horas que dura su recorrido total, que se obtendrá a su vez restando las horas de llegada y partida.

Tenemos así reducido el problema a un conjunto equivalente de problemas elementales, y resta sólo ordenar cuidadosamente los cálculos.

Número de horas que emplea el camión: $12 - 2 = 10$.
Fracción de recorrido por hora: $1/10$.

Número de horas que emplea el «auto»: $11 - 5 = 6$.
Fracción de recorrido por hora: $1/6$.

Acercamiento por hora: $1/6 - 1/10 = 1/15$.

Distancia entre ambos a las 5: $3 \times 1/10 = 3/10$.

Tiempo que tardan en encontrarse:
$3/10 : 1/15 = 4\ ½$ horas.

Hora de encuentro: $5 + 4\ ½ = 9$ y media.

EJEMPLO 3.º—Entre monedas de 1 peseta, 2 pesetas y 5 pesetas se han acuñado 2.500 monedas, por valor de 3.300 pesetas. La plata necesaria pesa 13 kg. 940 gr. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

Planteo y resolución.—Si todas las monedas tuviesen la ley de la peseta o de las dos pesetas (0,835), el peso total de plata sería

$$0{,}835 \cdot 5 \cdot 3300 = 13777{,}5 \text{ gr.}$$

La diferencia $13940 - 13777{,}5 = 162{,}5$ gr. se debe, pues, a los duros acuñados. Como la diferencia de peso de plata contenido en un duro y en 5 pesetas es

$$25\,(0{,}9 - 0{,}835) = 1{,}625 \text{ gr.},$$

el número de duros acuñados será:

$$162{,}5 : 1{,}625 = \mathit{100}.$$

Las restantes monedas son, pues, 2400; si fuesen todas de peseta, el valor total de ellas sería 2400 pesetas, mientras que su valor verdadero es $3300 - 500 = 2800$. La diferencia de

400 pesetas se debe, pues, a las monedas acuñadas de dos pesetas. Como por cada moneda de dos pesetas el aumento de valor es de una peseta, dichas 400 pesetas de más indican precisamente el número de monedas de dos pesetas buscado. De modo que, en resumen, el número de monedas de cada clase es:

100 duros   400 pesetones   2000 pesetas.

Dejamos la comprobación a cargo del lector.

No siempre es fácil la reducción a problemas simples. El proceso reductivo de los dos ejemplos anteriores envuelve ya una cierta complejidad. Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO 4.°—Un jardinero dispone sus plantas en cuadro, es decir, ordenándolas en filas y columnas, con igual número de unas que de otras. Después de formado un cuadro le sobran 15 plantas, y le faltan 14 para formar otro cuadro con una fila y una columna más. ¿Cuántas plantas tiene?

La resolución aritmética de este problema requiere el conocimiento previo, o en su caso el descubrimiento, de la siguiente propiedad: La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es el duplo del menor más uno. Conocida ésta el problema se reduce a hallar primero las plantas que es preciso añadir al cuadro formado para tener el siguiente, que son $15 + 14 = 29$, y deducir de dicho número el de filas o columnas del cuadro formado, que será el número cuyo duplo aumentado en una unidad dé 29. Es decir, duplo, 28; número de filas, 14. Número de plantas del cuadro, $14 \cdot 14 = 196$. Número de plantas del jardinero, 211.

Bastan los ejemplos anteriores para poner de manifiesto cuán diversos y complejos son los recursos de razonamiento para resolver un problema aritmético reduciéndolo a problemas simples, es decir, a operaciones elementales efectuadas con los datos. De tal modo que, exceptuados ciertos grupos de problemas conocidos de proporcionalidad, aritmética mercantil, etc., apenas puede hablarse de métodos generales de resolución propiamente aritméticos.

El método reductivo en Algebra.

Para metodizar y encauzar de un modo general el proceso reductivo de los problemas aritméticos, economizando esfuerzo, y permitiendo abordar con ello cuestiones de mayor dificultad, se ideó el Algebra, que es la ciencia reductiva por excelencia.

El método algebraico consiste en suponer resuelto el problema, es decir, se admite la existencia de los números desconocidos, llamados incógnitos, que designaremos por x, y, z, etc., y se opera con ellos como si ya se supiera su existencia, relacionándolos con los datos números conocidos o datos mediante las igualdades condicionales llamadas *ecuaciones* o bien las desigualdades condicionales llamadas *inecuaciones*, que expresan las condiciones impuestas.

Para resolver estas ecuaciones o inecuaciones, el Algebra las transforma en otras que son consecuencia de ellas, es decir, que se satisfacen por toda solución de aquéllas. Cuando las ecuaciones o inecuaciones obtenidas sucesivamente son equivalentes a las anteriores, apenas lleguemos a una ecuación o inecuación que sepamos resolver, el problema propuesto habrá quedado resuelto y sus soluciones serán las raíces de esta última ecuación o inecuación. Serán éstas y sólo éstas.

Sin embargo, las transformaciones que estudia el álgebra no suelen transformar las ecuaciones en otras equivalentes, sino simplemente *consecuencia* de ellas, de tal modo que puede asegurarse que toda solución del problema propuesto debe satisfacer a la ecuación o inecuación final; es decir, se tiene la seguridad de no haber perdido solución ninguna al adoptar esta última ecuación abandonando las anteriores; lo que no podrá asegurarse es que todas las soluciones de esta última satisfagan a las condiciones impuestas, y habrá que desechar las que no las cumplan, es decir, las soluciones *extrañas*, introducidas por las transformaciones algebraicas.

Como las transformaciones que conservan la equivalencia son muy escasas y no bastan para llegar a la ecuación o sistema de ecuaciones resolubles, deberán utilizarse solamente aquellas transformaciones que no hagan perder soluciones, es decir, las que conducen a ecuaciones consecuencias de las anteriores; pues, de lo contrario, además de introducirse soluciones extrañas podrán perderse soluciones verdaderas.

Transformaciones de una ecuación que conservan la equivalencia son las siguientes: adición a los dos miembros de una misma constante o función entera; multiplicación de los dos miembros por una misma constante distinta de 0. No conservan, en cambio, la equivalencia (sino con ciertas condiciones) las operaciones siguientes: adición de funciones fraccionarias; multiplicación por una función cualquiera, etc. Sin embargo, como estas transformaciones conservan todas las soluciones, es decir, satisfacen al proceso deductivo directo, pueden usarse sin inconveniente, y hasta son indispensables para llegar a la solución buscada, con la sola condición de aplicar a los resultados el proceso deductivo inverso que, en este caso, tan sencillo, se reduce a una simple *comprobación*, sustituyendo en las condiciones propuestas los valores obtenidos para desechar aquellos que no la satisfacen.

Para los sistemas de ecuaciones la transformación fundamental que conserva la equivalencia y, por tanto, ahorra el proceso deductivo inverso es la siguiente: del sistema $P=0$, $Q=0$, se deduce el sistema $P=0$, $Q-\lambda P=0$; y, recíprocamente, todas las soluciones de éste satisfacen al primero. El método llamado de reducción para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el cual se basa en esta equivalencia, cumple, pues, las dos condiciones impuestas por el método reductivo, y aunque la analogía de nombres tiene origen y significado distintos, resulta en definitiva que el método llamado en álgebra método de *reducción* es también en el sentido de la Lógica un método *reductivo*.

EJEMPLOS

Apliquemos el método algebraico a los ejemplos aritméticos que preceden.

EJEMPLO 1.°—La ecuación que lo resuelve es:

$$10\,x = 85\,; \quad \text{de donde} \quad x = 85 : 10 = 8{,}5.$$

Ciertamente, no son problemas como éste los que indujeron a crear el Algebra.

EJEMPLO 2.°—Sea x la hora de cruce. La ecuación se obtendrá igualando los caminos recorridos por ambos coches, cada uno de los cuales se expresará multiplicando la velocidad respectiva por el tiempo que ha corrido

$$(x-2)\cdot\frac{1}{10}=(x-5)\cdot\frac{1}{6}\,;$$

de donde

$$6\,(x-2) = 10\,(x-5)\,; \quad 38 = 4\,x\,; \quad x = 9\frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 3.°—Sea x el número de monedas de 1 peseta, y el de 2 pesetas y z el de 5 pesetas. El sistema que resuelve el problema es el siguiente:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2500 \\ x+2\,y+5\,z &= 3300 \\ 0{,}835\,(5\,x+10\,y)+0{,}9\cdot 5\cdot z &= 13940. \end{aligned}$$

La primera ecuación expresa que el número total de monedas es 2.500. La segunda expresa su valor = 3300 pesetas; y la tercera expresa que el peso de plata es 13940 gr. Dejamos la sencillísima resolución de este sistema a cargo del lector. Sólo le haremos observar que los coeficientes de x e y en la segunda y tercera ecuaciones son proporcionales de manera que multiplicando la segunda ecuación por $0,835 \times 5$ y restando se eliminarán a un tiempo x e y. Esta reducción algebraica corresponde al razonamiento (reducción aritmética) efectuado en primer término para la determinación aritmética del número de duros.

EJEMPLO 4.° — Sea x el número de plantas. El cuadrado formado contiene, pues, $x - 15$ plantas y $\sqrt{x-15}$ filas o columnas. El cuadrado siguiente tendría $x+14$ plantas y $\sqrt{x+14}$ filas, una más que las anteriores; la ecuación es, pues,

$$1+\sqrt{x-15} = \sqrt{x+14},$$

elevando al cuadrado

$$1+x-15+2\sqrt{x-15} = x+14\,; \quad \sqrt{x-15} = 14\,;$$

de donde, elevando nuevamente al cuadrado

$$x-15 = 196\,; \quad x = \mathit{211}\,.$$

Como las operaciones efectuadas pueden introducir soluciones extrañas es preciso *comprobar* esta solución para ver si cumple las condiciones del enunciado.

Como se ve, el esfuerzo intelectual de planteo y reducción aritmética de los ejercicios se ha convertido en el trabajo de resolución de ciertas ecuaciones, que no tienen dificultad una vez conocidos los procedimientos generales del Algebra.

Los peligros del Algebra.

No se crea, sin embargo, que el Algebra simplifica siempre los planteos. Hay ocasiones en que la *rutina algebrai-*

ca oscurece en tal forma la esencia del problema, que una solución aritmética trivial se convierte en un planteo algebraico de absurdas proporciones.

EJEMPLO.—Como ejemplo típico, copiaremos *literalmente* de un libro de curiosidades matemáticas el enunciado y la solución del antiquísimo y conocido problema de las manzanas del hortelano:

«Un hortelano que llevaba una cantidad de manzanas entró en un vergel que tenía tres guardas; al primer guarda que encontró, por permitirle pasear por el verjel, le dió la mitad de las manzanas que llevaba, más dos manzanas; al segundo guarda que en su paseo tropezó, por dejarle ver el huerto, le dió la mitad de las manzanas que le quedaban, más dos manzanas; y al tercer guarda, por concederle también estar en el huerto, le dió la mitad de las manzanas que le quedaban, más dos manzanas y le sobró una.

¿Con cuantas manzanas entró en el vergel, y cuántas dió a cada guarda?

SOLUCIÓN.—Llamando X el número de manzanas que llevaba el hortelano, al primer guarda le entregó la mitad más dos,

$$\frac{X}{2}+2;$$

luego le quedaron, la mitad menos dos,

$$\frac{X}{2}-2.$$

Al segundo guarda le dió la mitad más dos,

$$\frac{\frac{X}{2}-2}{2}+2;$$

luego le quedaron, la mitad menos dos,

$$\frac{\frac{X}{2}-2}{2}-2=\frac{X-4}{4}-2$$

Al tercer guarda dió la mitad más dos,

$$\frac{\dfrac{X-4}{4}-2}{2}+2,$$

y le quedaron la mitad menos dos, igual a la una que le sobró.

$$\frac{\dfrac{X-4}{4}-2}{2}-2=1.$$

Despejando en esta ecuación X, tenemos:

$$\frac{X-4-8-16}{8}=1 \text{ » } X=4+8+16+8=36 \text{ manzanas.}$$

El primer guarda recibió 20 manzanas, el segundo 10 y el tercero 5.»

Compárese este penoso planteo con la resolución aritmética natural, que consiste en *desandar lo andado*: Antes de hallar el último guarda, el hortelano tenía el doble de (1 + 2) (la que le queda más las dos que dió), es decir, tenía 6. Antes de hallar el segundo, tenía análogamente el doble de (6 + 2), es decir, 16; y, por fin, antes de hallar el primero tenía el doble (16 + 2), o sea 36.

Aparte de este peligro, en verdad poco frecuente, el principal desde el punto de vista educativo es la *mecanización* del razonamiento, convirtiéndolo en rutina, y ahogando, en vez de cultivar, las facultades discursivas y creadoras del alumno. Por esta causa algunos profesores, como los franceses, tienen especial empeño en retardar todo lo posible el empleo del álgebra en la resolución de problemas aritméticos. Sobre este punto hemos de volver en la parte de Didáctica.

§ 9.º—El método reductivo en Geometría.

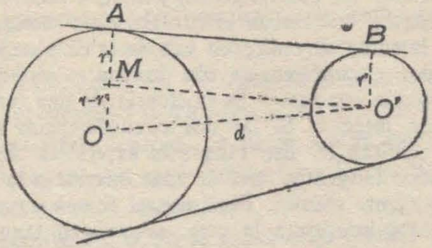
La discusión del planteamiento.

Suele apoyarse el método reductivo aplicado a los problemas geométricos en la intuición de una posible solución que cumple las condiciones impuestas, y transformadas éstas en otras equivalentes o simplemente consecuencia de las anteriores, se llega a determinar tal ente geométrico que resuelve el problema; pero este método reductivo, basado en una intuición inicial, tiene el grave peligro de hacernos perder otras soluciones, por habernos fijado solamente en una posición particular, olvidando otras también posibles.

Se evita este peligro de la intuición inicial haciendo un análisis lógico riguroso de las condiciones impuestas, para deducir de ellas cuáles son todas las posiciones posibles del ente geométrico buscado y, aplicándoles el método reductivo, llegar a la solución completa del problema. Este análisis previo de todos los casos posibles se llama *discusión del planteamiento*, que no debe confundirse con la discusión de la solución.

Ejemplo 1.º—Tratemos de obtener las tangentes comunes a dos circunferencias y supongamos el problema resuelto, cosa posible, pues la intuición nos indica la existencia de dos rectas tangentes, una que deja ambas circunferencias por debajo y la otra por arriba. Construído un croquis con ambas tangentes a las dos circunferencias, apliquemos a una de ellas el método reductivo, razonando así:

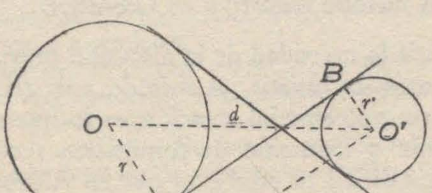
1.º El segmento AB de los puntos de contacto y el segmento OO' que une los centros y los dos radios OA y $O'B$ deben formar un trapecio rectángulo; luego trazando por O' la paralela a la tangente se forma un triángulo rectángulo $OO'M$, cuya hipotenusa es OO' y un cateto OM es igual a la diferencia de radios. De la existencia de la tangente AB resulta, pues, la *existencia* de este triángulo rectángulo que tenga tal hipotenusa y tal cateteto.



2.° La hipotenusa y el cateto conocidos determinan un triángulo rectángulo; construyámoslo y deduzcamos de él la tangente buscada.

3.° Basta para ello prolongar el cateto OM, el cual nos determina el punto A; trazar por O' el radio paralelo $O'B$, el cual determina el punto B. Queda así formado un cuadrilátero $ABO'M$, que tiene dos ángulos rectos, O', M, y dos lados iguales $MA = O'B$, luego son rectos los ángulos A, B; por consiguiente, es AB la tangente buscada.

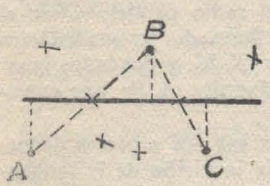
El problema ha quedado resuelto en sus dos aspectos deductivos, directo e inverso, partiendo de la intuición de la tangente superior AB; y análogamente para la tangente inferior. La solución obtenida no es, sin embargo, completa, pues falta la discusión inicial, examinando todas las posibilidades, a saber, que la tangente buscada deje a las dos circunferencias de un mismo lado o bien de lados distintos. Esta última posibilidad



sólo cabe si las dos circunferencias carecen de puntos comunes, puesto que sólo así pueden quedar en distintos semiplanos respecto de la misma recta; y efectuado para este caso el mismo proceso doblemente deductivo que antes hemos explicado se llegará a construir las dos tangentes llamadas *interiores*, es decir, las que separan entrambas circunferencias; bastará para ello considerar la suma de radios en vez de la diferencia.

Si las dos circunferencias son tangentes exteriormente, la discusión previa conduce a la existencia de dos tangentes exteriores y una interior. Si las dos circunferencias son secantes, solamente resultan las dos tangentes exteriores. En el caso de circunferencias tangentes, una de ellas interior a la otra, resulta una sola tangente común. Finalmente, si una circunferencia es completamente interior a la otra, no existen tangentes comunes, puesto que siendo exteriores a la circunferencia mayor los puntos de cada tangente a la misma, son también exteriores a la otra y no cabe la posibilidad de ser tangente a ella.

EJEMPLO 2.°—Resuelva el lector por el mismo método reductivo el problema siguiente: trazar una recta equidistante de los tres puntos dados *A*, *B*, *C*.



La figura indica la existencia de una solución, y tiene los trazados auxiliares suficientes para indicar cómo debe construirse mediante sencillísimas operaciones geométricas; pero cuide el lector la discusión previa de planteamiento, a fin de no perder las otras soluciones.

Peligros del método reductivo en Geometría.

Además de la necesidad de la discusión previa, sobre la cual acabamos de insistir, el método reductivo requiere en Geometría una especial atención en lo que se refiere a la sustitución o reducción de condiciones, cuya equivalencia es más difícil de establecer que en Algebra.

De modo análogo a la advertido allí, diremos:

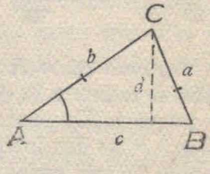
1.° Es preciso cuidar de que las propiedades encadenadas por el proceso *deductivo directo* sean equivalentes. Si tal no fuera posible, será preciso cuidar de que las relaciones geométricas deducidas de las condiciones impuestas sean satisfechas por *todos* los elementos buscados. De este modo pasaremos del conjunto de entes buscados a otro conjunto de extensión mayor, ya que no pueda ser igual, y así evitaremos la pérdida de soluciones.

2.º En el proceso deductivo inverso será preciso tomar idénticas precauciones, es decir, sacar propiedades a las que satisfagan los entes obtenidos hasta llegar a deducir las condiciones impuestas.

A veces acontece que no se logra esto último para algunos de los elementos obtenidos; pero esta imposibilidad deductiva no autoriza a desecharlos, pues no es suficiente el *no poder probar* que satisfacen al problema, sino que es necesario *probar que no* lo satisfacen.

EJEMPLO. — *Tratemos de construir un triángulo definido por los lados* a, b, *y el ángulo opuesto* A *al primero.*

Proceso directo, análisis reductivo.—Supongamos el problema resuelto, es decir, partamos de la intuición de la existencia del triángulo. Construído el ángulo dado *A*, si se lleva el dato *b* en uno de sus lados, quedará determinado el vértice C del triángulo; sólo falta hallar el vértice *B*, el cual, por estar en la recta *c* y distar *a* de C, se hallará como intersección de dicha recta con la circunferencia de centro C y radio *a* conocido.



Esta condición, al parecer equivalente a las del enunciado, no lo es; es decir, podemos afirmar que el vértice *B* es punto de intersección de la recta y de la circunferencia, pero no podemos afirmar la recíproca. No hemos perdido soluciones, pero podemos haber introducido soluciones extrañas, como vamos a ver. De aquí que además de la discusión de planteamiento sea necesario el proceso deductivo inverso para determinar las verdaderas soluciones del problema.

Discusión de planteamiento.—El ángulo A puede ser *agudo, recto* u *obtuso*, y puede ser además $a >, = ó < b$. Ahora bien; si a es menor que la distancia d, de C a c, es decir, si

$$a < d = b \text{ sen A},$$

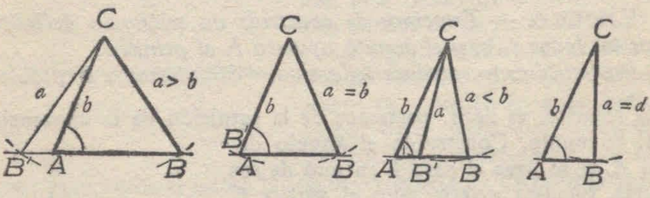
podemos afirmar desde luego que *no existe triángulo.*

Proceso inverso y discusión de la solución. — Primer caso: A *es agudo.*—Si es $a > b$ la circunferencia corta a la recta de dos puntos, uno B situado en la semirrecta que forma el ángulo A y el otro B' en la semirrecta opuesta. Esta última solución debe desecharse, pues daría un triángulo $AB'C$ con un ángulo en A suplementario del dado.

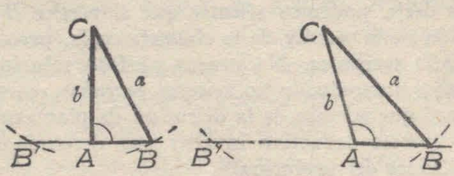
Si es $a = b$, B' se confunde con C, y no hay más que *una solución,* la que proporciona el punto B.

Si es $a < b$ (siendo siempre $a > d$), los dos puntos de intersección B y B' están en el lado del ángulo A y son válidas las *dos soluciones.*

Si es $a = d$ la circunferencia es tangente a la recta y las dos soluciones anteriores se confunden en *una.*



Segundo caso: A *recto.*—En este caso $b = d$, y la construcción se reduce a la de un triángulo rectángulo de hipotenusa a y cateto b. De modo que si $a = b$, o $a < b$ no hay triángulo. Si $a > b$ las dos intersecciones B y B' dan triángulos iguales, y sabido es que todos los triángulos iguales se consideran como *una sola solución.*



Tercer caso: A *obtuso.*—Análogamente a lo visto en el caso primero veríamos aquí que *sólo existe solución,* y *una sola* si $a > b$.

La discusión en los problemas y teoremas matemáticos.

La advertencia hecha acerca de la necesidad de la discusión de planteamiento en los problemas es aplicable igualmente a las demostraciones, y tiene la mayor importancia (*).

En suma: todos los razonamientos geométricos y todos los problemas basados en una intuición o en una figura exigen la discusión *previa* para asegurarse de que las conclusiones son independientes de la posición particular representada en la figura.

Así, por ejemplo, el teorema fundamental de la trigonometría, que expresa el seno y el coseno de la suma o de la diferencia de arcos, queda incompletamente demostrado si solamente elegimos ángulos del primer cuadrante, no siendo, por tanto, aplicables las fórmulas a los ángulos mayores que un recto.

Para dar a las fórmulas toda la generalidad apetecible será, pues, forzoso elegir uno de estos dos caminos: 1.°, efectuar la discusión previa de todos los casos posibles y deducir para cada uno las fórmulas antedichas; 2.°, utilizar solamente propiedades cuya generalidad haya sido demostrada anteriormente, como son, por ejemplo, los teoremas de las proyecciones, considerando no solamente la magnitud, sino también el signo de los segmentos.

Es el primer camino el seguido por Euclides y por todos los libros elementales que en él se inspiran, pero des-

(*) En el capítulo siguiente veremos ejemplos notables de sofismas que tienen precisamente su fundamento en una discusión previa poco cuidadosa. (Ver *Paralogismos de enumeración incompleta.*)

graciadamente suelen olvidar la discusión previa, de todo punto indispensable.

El segundo método de demostración geométrica, consistente en dotar a los elementos geométricos de signo, para dar a las operaciones geométricas elementales toda la generalidad del Algebra y evitar tales enojosas discusiones previas, fué ideado por Descartes y en él radica la indiscutible ventaja de la Geometría moderna.

Así, por ejemplo, la relación métrica que liga los tres segmentos determinados por tres puntos A, B, C, de una recta, no puede expresarse de modo general en la Geometría de Euclides, en la cual es preciso considerar separadamente las diversas posiciones posibles. En cambio, en la Geometría métrica organizada por el método cartesiano, todos los casos imaginables quedan encerrados en una simplicísima relación general, que es la siguiente:

$$AB + BC + CA = O.$$

§ 10.—LOS MÉTODOS ESPECIALES DE LA GEOMETRÍA MÉTRICA.

Carácter metódico de la moderna Geometría métrica.

El altísimo poder educativo del método geométrico deductivo se logra principalmente con la resolución de problemas. Es ésta una rama de inestimable valor estético, que educa más que instruye, pues mientras la utilidad de las construcciones euclidianas en casos artificiosos es dudosa y a veces nula, en cambio es indudable que ejercitan poderosamente el raciocinio y el ingenio.

La resolución de problemas geométricos a la manera euclidiana fué durante mucho tiempo simple prueba de ingenio, dependiendo solamente de una feliz idea, sin la cual resultaba punto menos que imposible. Después de la nueva organización de la Geometría en el siglo XIX sobre las ideas genéricas de traslación, rotación, simetría, inversión, etc., es decir, en suma sobre el concepto amplísimo de transformación geométrica, se ha logrado una sistematización tal que ya puede hablarse de *métodos*, donde antes sólo cabía la inspiración feliz, poco frecuente en la mayoría de los estudiosos.

No quiere esto decir que la geometría euclidiana, después de tal sistematización, haya alcanzado el mismo gràdo de perfección metódica que la geometría analítica, cuyos métodos son tan seguros y bien determinados que la resolución de problemas sólo exige el previo estudio de los procedimientos generales. Queda, pues, todavía en la geometría euclidiana, después de su moderna evolución, amplio margen para la iniciativa individual, y buena cantidad de interesantes cuestiones, que son sólo accesibles a los dotados del más agudo espíritu geométrico. En esta fisonomía previa, que los amantes de la rigidez sistemáticaa considerarán como imperfección, reside precisamente su encanto y su dificultad.

Sin ánimo de agotar todos los métodos de resolución de problemas, pasemos revista a los más fecundos.

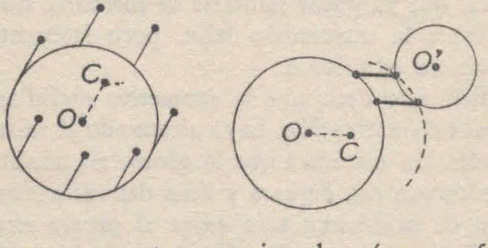
Método de las transformaciones geométricas.

Para construir un elemento geométrico que tenga ciertas relaciones con otros dados, conviene, a veces, someter la figura o parte de ella a una transformación que conserve la relación exigida y facilite la resolución.

Ejemplos varios aclararán el procedimiento.

MÉTODO DE TRASLACIÓN

Si se desea ubicar entre dos líneas dadas un segmento de longitud y dirección dadas, convendrá trasladar una de sus líneas ese segmento hasta que encuentre a la otra, y el problema se reduce a hallar la intersección con esta otra.

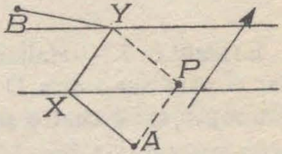


La figura representa, por ejemplo, cómo se efectúa la traslación de una circunferencia con sólo trasladar el centro, un segmento igual, paralelo y del mismo sentido al segmento orientado o *vector* que define la traslación.

EJEMPLO 1.º—Determinar un segmento de longitud y dirección dadas, cuyos extremos estén sobre dos circunferencias.

[La figura indica claramente la resolución, utilizando la traslación de la circunferencia explicada en la página anterior.]

EJEMPLO 2.º—Entre dos pueblos, *A* y *B*, a distinto lado de un río, de márgenes rectas y paralelas, se quiere establecer una comunicación por barca; sabiendo que ésta, por causa de la corriente, seguirá un trayecto de dirección dada por la flecha de la figura, determinar la mejor ubicación del paso, para que la distancia entre ambos pueblos sea la menor posible.



[La figura indica la traslación auxiliar conveniente para poder llegar a la solución, utilizando la igualdad de lados opuestos del paralelógramo.]

EJEMPLO 3.º—Tender un puente perpendicularmente a la corriente, de modo que el camino entre dos pueblos, *A* y *B*, sea mínimo.

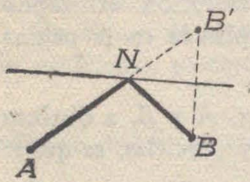
MÉTODO DE SIMETRÍA

Empecemos por un ejemplo en el que se aplica la *simetría axial.*

EJEMPLO 4.º—Un arriero tiene que ir de un punto *A* a otro *B*, abrevando su caballería durante el trayecto en la acequia rectilínea *r*. ¿Cuál es el camino más corto a seguir?

Si *B* estuviera en la posición simétrica *B* respecto a *r*, el camino más corto sería indudablemente la recta *AB'*.

Como las distancias del punto N (de intersección con r) a B y B' son las mismas, el camino más corto pedido será la quebrada ANB. Dedúzcase la construcción.



Este problema equivale al de hallar el camino de un rayo luminoso que va de A a B reflejándose en r, o bien el de una bola de billar que va de A a B tocando en la banda r.

EJEMPLO 5.º—Hallar el camino de una bola de billar A para dar a otra D después de tocar las cuatro bandas. Aplíquense cuatro simetrías. Discusión.

En ejemplos siguientes se aplicará una *simetría central.*

EJEMPLO 6.º.—Tender entre las dos márgenes irregulares de un río un puente rectilíneo de dos tramos iguales, aprovechando para el pilar central un peñasco que emerge del río.

[Se hallará en el plano la intersección de una margen con la simétrica de la otra respecto del peñasco.]

EJEMPLO 7.º—Dado un ángulo y un punto O en su interior, trazar por él una recta tal que el segmento que intercepte en el ángulo tenga su punto medio en O.

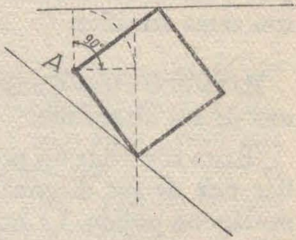
(El ángulo dado y el simétrico recpecto de O determinan un paralelógramo, una de cuyas diagonales es la recta pedida.)

MÉTODO DE ROTACIÓN

Una simple rotación permite resolver en algunas ocasiones un problema.

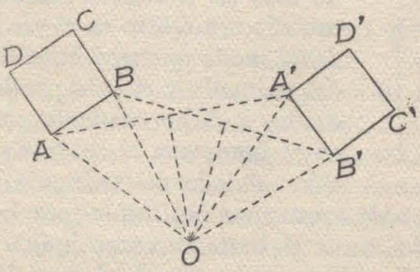
EJEMPLO 8.º—Construir un cuadrado con un vértice en un punto dado A y los dos vértices contiguos en dos rectas dadas.

ANÁLISIS.—Si giramos de 90 grados una de las rectas, alrededor del punto A, el punto de intersección con la otra será precisamente uno de los vértices del cuadrado. Hallado este punto, el cuadrado se completa fácilmente. El lector detallará la construcción y hará la discusión por su cuenta.



Dados dos segmentos iguales AB y $A'B'$, se determina el centro de rotación, alrededor del cual debe hacerse girar uno, para obtener el otro, como intersección de las mediatrices de AA' y BB'.

En efecto, O debe equidistar de A y A', y también de B y B'.



EJEMPLO 9.º—Determinar todos los centros posibles de rotación para hacer coincidir los dos cuadrados de la figura. (Obsérvese que no es indistinto llevar AB sobre $A'B'$ o sobre $B'A'$, pues en este segundo caso el cuadrado primero quedaría en posición simétrica respecto del segundo.)

MÉTODO DE SEMEJANZA Y HOMOTECIA

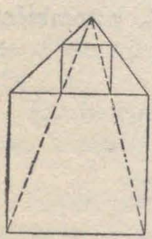
La construcción de una figura semejante a la que se pide permite en multitud de casos resolver los problemas con suma sencillez.

EJEMPLO 10.—Construir un pentágono regular, dada una de sus diagonales.

(Basta construir un pentágono regular cualquiera y hallar una de sus diagonales. Por semejanza se deduce el pentágono pedido. La razón de semejanza es la que existe entre las diagonales.)

EJEMPLO 11.—Inscribir un cuadrado en un triángulo.

(Puesto que los cuatro vértices han de estar en el contorno, dos han de estar en un lado; es decir, un lado del cuadrado está sobre un lado del triángulo. Aplicando la homotecia con centro en el vértice opuesto, de tal modo que sean homólogos el lado del triángulo y el lado paralelo del cuadrado, a dicho cuadrado corresponderá en la homotecia el cuadrado construído sobre el lado del triángulo. Como este cuadrado puede construirse fácilmente, por homotecia se deducirá fácilmente el buscado, como indica la figura.) Hágase la discusión, precisando el número de soluciones y distinguiendo los casos de triángulo rectángulo, acutángulo y obtusángulo.



§ 11.—EL MÉTODO DE LOS LUGARES GEOMÉTRICOS.

Método de los lugares geométricos.

Recordemos la sabida definición: un conjunto de entes se llama *lugar geométrico*, de las que tienen una cierta propiedad cuando *todos* ellos y *sólo* ellos tienen esta misma propiedad. Para afirmar, pues, que una figura es lugar geométrico de los entes que tienen una cierta propiedad, es preciso demostrar dos proporciones:

Directa) Todo ente del lugar tiene esta propiedad.

Contraria) Todo ente que no es lugar no tiene esta propiedad; o en lugar de ésta, su equivalente:

Recíproca) Todo ente que tiene la propiedad es del lugar.

Son, pues, *equivalentes* las condiciones *ser del lugar* y *tener la propiedad*.

Para determinar un elemento geométrico que satisfaga a dos condiciones bastará, por consiguiente, construir los lugares de los entes que cumplen cada una de estas condiciones, y el problema queda así reducido a determinar los elementos comunes a ambos lugares. Como el proceso reductivo es en este caso por equivalencia, resulta innecesaria la deducción inversa, pudiendo asegurarse que *todos* los entes así obtenidos y *sólo* ellos satisfacen a las condiciones impuestas por el problema.

Ejemplos de lugares geométricos.

Suelen estudiarse en Geometría elemental casi exclusivamente los lugares geométricos de puntos, olvidando en cambio los lugares geométricos de rectas; en parte, por dificultades de dibujo, también por inveterada costumbre y quizá por exigir mayor esfuerzo de abstracción.

Conviene, pues, enumerar los principales lugares geométricos, tanto de puntos como de rectas, que suponemos conocidos del lector, o que demostrará fácilmente.

1.° El lugar de los puntos de un plano que distan de otro fijo un segmento dado es la circunferencia que tiene este radio y aquel centro. En el espacio es una superficie esférica.

2.° El lugar de las rectas de un plano que distan de un punto dado un segmento dado es el haz de tangentes a la circunferencia que tiene este radio y aquel centro. En el espacio es el complejo de rectas tangentes a una superficie esférica.

3.° El lugar de los puntos de un plano que distan de una recta del mismo un segmento dado será formado por dos paralelas a aquélla. En el espacio por una superficie cilíndrica de revolución de eje en la recta.

4.° El lugar de los puntos de un plano equidistantes de dos puntos fijos es la mediatriz del segmento que éstos determinan. En el espacio es el plano perpendicular en el punto medio del segmento en cuestión.

5.° El lugar geométrico de las rectas de un plano equidistantes de dos puntos A y B está constituído por dos haces de rectas: el haz de paralelas a la recta AB, y el haz concurrente de vértice en el punto medio de AB. Para el espacio cámbiese la palabra haz por radiación.

6.° El lugar de las rectas de un plano que cortan a una recta fija, formando con ella un ángulo dado, está formado por dos haces de rectas paralelas. En el espacio es un haz de superficies cónicas de revolución con eje en la recta.

7.° En particular, el lugar de las rectas de un plano que cortan en ángulo recto a una fija es el haz de sus perpendiculares. Y en el espacio es la congruencia de rectas secantes perpendiculares.

8.° El lugar de los puntos de un plano que equidistan de dos rectas concurrentes del mismo, está formado por las dos rectas perpendiculares bisectrices de los ángulos determinados por aquéllas. En el espacio está formado por los dos planos perpendiculares que pasan por dichas rectas.

9.° El lugar geométrico de los puntos de un plano desde los cuales se ve un segmento del mismo bajo un cierto ángulo es el conjunto de dos arcos capaces de dicho ángulo, cuyos extremos coinciden con los del segmento. En el espacio es la superficie de revolución (toro) engendrada por dichos arcos al girar alrededor del segmento. En el caso particular en que el ángulo es recto, los dos arcos capaces completan una circunferencia y la superficie es esférica.

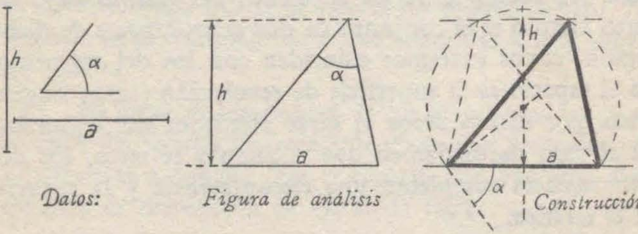
Ejemplos de aplicación del método.

EJEMPLO 1.°—Construir un triángulo conociendo un lado, la altura correspondiente y el ángulo opuesto.

El problema quedará resuelto en cuanto se sepa situar el vértice opuesto al lado dado. Este vértice dista h del lado; luego está en una paralela a dicho lado a distancia h. Desde este vértice se ve el lado dado bajo el ángulo α; luego está en el arco capaz de dicho ángulo. El vértice buscado está, pues, en la intersección de estos dos lugares.

Construcción.—Trácese en uno de los semiplanos que determina el lado dado la recta paralela a distancia h y el arco capaz del ángulo dado sobre el lado dado. Unase uno de los puntos de intersección con los extremos de dicho segmento, y se tendrá el triángulo.

Discusión.—Si h es mayor que la distancia del punto medio del arco al lado, los dos lugares no se cortan y el problema carece de solución. Si h es igual a aquella distancia, la paralela es tangente al arco, y el punto de contacto determina con los extremos un triángulo *isósceles.* Si h es menor que la distancia mencionada, hay dos puntos de intersección, pero los dos triángulos que determinan son simétricos respecto a la mediatriz del lado, y, por consiguiente, iguales.



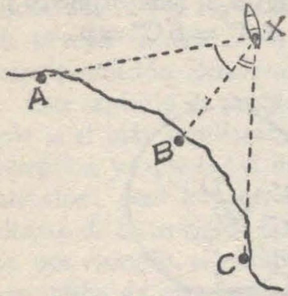
Datos: *Figura de análisis* *Construcción*

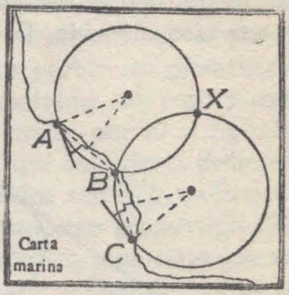
En el otro semiplano puede hacerse la misma construcción, pero las soluciones son simétricas.

EJEMPLO 2.º—El problema de la carta.

Una aplicación interesante del método de los lugares geométricos se halla en el problema de Potenot, o de la carta, empleado en topografía marina.

Desde un navío se observan tres puntos notables de la costa A, B y C, y se miden los ángulos AXB y BXC, que forman entre sí las visuales. Con estos dos sencillos datos se puede fijar en el mapa la situación X del navío. En efecto, X está en el arco capaz del primer ángulo construído sobre el segmento AB del plano y en el arco capaz del segundo construído sobre BC. La intersección de los dos arcos dará la situación X buscada.





Análogo a este problema es el siguiente, que resolverá el lector fácilmente:

Hallar un punto desde el cual se vean bajo ángulos iguales los tres lados de un triángulo dado.

Al final de este párrafo proponemos multitud de problemas relativos a lugares geométricos para ejercicio e ilustración del lector.

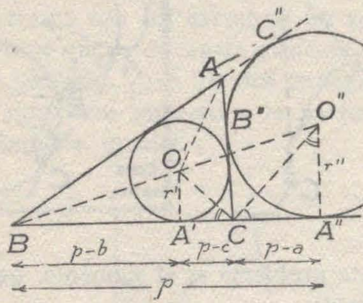
Veamos ahora otros dos ejemplos en los que el elemento incógnito es una recta determinada mediante dos lugares de rectas.

EJEMPLO 3.º—Trazar en un plano una carretera rectilínea que dista distancias dadas a y b, respectivamente, de dos lugares dados A y B.

En virtud del lugar geométrico (2.º), el problema es equivalente a trazar la tangente común a las circunferencias de centro A y B y radios respectivos a y b. El lector hará la discusión teniendo en cuenta lo dicho en § 9.

EJEMPLO 4.º—Construir un triángulo dado el perímetro $2p$, un ángulo B y el radio r' del círculo inscrito.

Según una propiedad conocida por Geometría, el segmento BA'' comprendido entre un vértice B y el punto A'' de contacto del círculo ex-inscrito interior al ángulo B con uno de sus lados, es igual al semiperímetro p, en este caso conocido. Es decir, $BA'' = BC'' = p$.



Los datos del problema permiten, pues, construir el ángulo B, la circunferencia O' inscrita en él, de radio dado r', y la ex-inscrita O'' tangente en A'' y C'' a sus lados. Con lo cual quedará determinado el lado AC del triángulo, que será tangente interior común a ambas circunferencias.

El lector completará fácilmente la discusión. ¿Existe siempre solución? Cuando hay dos tangentes interiores, ¿hay en rigor dos soluciones?

Los instrumentos geométricos.

A pesar del número considerable de problemas resolubles por el método de los lugares geométricos, obsérvese que los lugares utilizados en las construcciones de la Geometría plana elemental se reducen a rectas y circunferencias. Ello es debido a la clásica limitación de los instrumentos geométricos.

Aunque existen instrumentos que permiten dibujar curvas con exactitud análoga a la lograda con el compás para la construcción de circunferencias, y muy superior a la alcanzada con la regla, se consideran regla y compás desde tiempo remoto como únicos instrumentos aceptables para resolución elemental de los problemas geométricos.

Este capítulo de problemas resolubles con regla y compás es el más ampliamente estudiado, por su antigüedad histórica, ya que fué el único al que los griegos dedicaron atención; pero hay otros capítulos también interesantes dentro de la teoría de las construcciones geométricas. Tal es, por ejemplo, el estudio de aquellos problemas que son resolubles sin otro instrumento que el compás, el cual fué realizado sistemáticamente con admirable ingenio por el geómetra italiano Mascheroni. Otros grupos de construcciones realizables con tales o cuales instrumentos han merecido modernamente detenida atención; por ejemplo, las realizables solamente con la regla, o con la regla y la escuadra, pudiendo utilizarse la regla de un solo borde recto, como se hace en el dibujo corriente o bien la regla de dos bordes rectos de paralelismo debidamente comprobado; o bien las construcciones realizadas sin más instrumento que la escuadra y una circunferencia fija previamente trazada; y también resulta interesante el estudio de las construcciones que se pueden efectuar sin instrumento ninguno, mediante dobleces de una hoja de papel; y así podríamos proseguir la enumeración, cuyo objeto es simplemente restar a la Geometría de la regla y el compás su pretendido carácter de exclusividad (*).

(*) Véanse algunas de estas construcciones en el Apéndice.

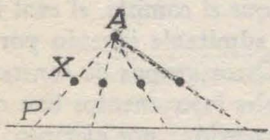
EJERCICIOS DE LUGARES GEOMETRICOS

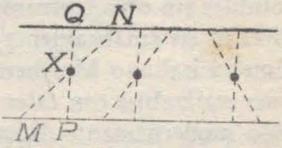
Proponemos como ejercicio la demostración de los siguientes lugares geométricos y la resolución de los problemas apoyados en ellos, enumerados a continuación.

Lugares planos relativos a la recta.

I. *El lugar de los puntos medios de los segmentos determinados por un punto fijo y cada punto de una recta, es otra recta paralela a ella.*

EJ. 1: Trazar entre un punto y una recta un segmento que quede bisecado por una recta o circunferencia dada.

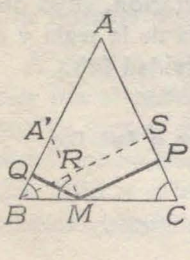




II. *El lugar de los puntos medios de los segmentos que tienen sus extremos en dos rectas paralelas, es la paralela media.*

EJ. 2: Trazar por un punto una secante de dos rectas paralelas y de una tercera línea, de modo que los tres puntos formen segmentos iguales.

EJ. 3: Se desea tender un puente de dos tramos iguales entre las dos márgenes paralelas de un río, aprovechando un islote para el pilar intermedio. ¿Cuándo será posible la solución? Si no es posible el trazado perpendicular, ¿será posible tenderlo oblicuamente?



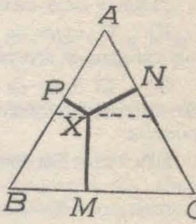
III. *El lugar de los puntos cuya suma de distancias a los lados de un ángulo es constante, es un segmento cuyos extremos están en los lados formando con éstos un triángulo isósceles.*

[La figura indica claramente la demostración.]

EJ. 4: ¿A qué segmento del triángulo es igual la suma de distancias a los lados del triángulo isósceles desde cada punto de la base?

EJ. 5: El lugar de los puntos cuya suma de distancias a dos rectas es constante, es un contorno rectangular.

EJ. 6: La suma de distancias a los tres lados desde cualquier punto de un triángulo equilátero es constante e igual a la altura del triángulo.

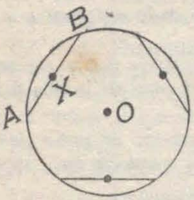


[Basta aplicar el ejercicio anterior al triángulo parcial indicado en la figura con línea de trazos.]

¿Cómo deben contarse las distancias si el punto no pertenece al triángulo?

Enunciar el teorema general.

Lugares planos relativos a la circunferencia.



A) *El lugar de los puntos medios de las cuerdas iguales en una circunferencia es otra circunferencia concéntrica, a la cual son tangentes todas ellas.*

EJ. 7: Trazar por un punto cualquiera del plano una cuerda de longitud dada. Discusión.

B) *El lugar de los puntos medios de las cuerdas que pasan por un punto es la circunferencia cuyo diámetro es el segmento determinado por el punto y el centro, o bien un arco de esa circunferencia, cuando el punto es exterior.*

EJ. 8: Resolver el problema anterior mediante este lugar.

C) *El lugar de los centros de las circunferencias tangentes a una recta en un punto, es la perpendicular en ese punto.*

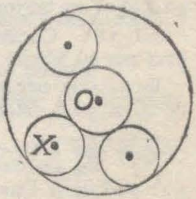
EJ. 9: Trazar por un punto dado la circunferencia tangente en un punto dado a una recta dada.

D) *El lugar de los centros de las circunferencias tangentes a una circunferencia dada en un punto fijo, es la recta que lo une con el centro.*

EJ. 10: Trazar por un punto una circunferencia tangente a otra dada en un punto dado.

EJ. 11. ¿Existe alguna circunferencia tangente a dos circunferencias dadas en dos puntos prefijados?

E) *El lugar de los centros de las circunferencias tangentes a dos concéntricas, es la circunferencia cuyo radio es la semisuma de los radios.*



EJ. 12: Trazar por un punto una circunferencia tangente a dos circunferencias concéntricas.

¿Dónde debe estar el punto para que haya solución? Discusión.

F) *El lugar de los centros de las circunferencias tangentes a dos circunferencias iguales, es la mediatriz del segmento de los centros.*

G) *El lugar de los extremos de los segmentos de tangentes a una circunferencia, iguales a un segmento dado, es otra circunferencia concéntrica.*

EJ. 13: Determinar sobre una recta, o sobre una circunferencia dada, un punto tal que las tangentes trazadas por él a otra circunferencia sean iguales a un segmento dado.

H) *El lugar de los centros de las circunferencias de radio dado, tangentes exteriormente a una circunferencia, es otra concéntrica de radio suma. Análogamente, para las tangentes interiormente, el radio es la diferencia.*

EJ. 14: Trazar una circunferencia de radio dado tangente a dos circunferencias dadas.

EJ. 15: Al apoyar un tronco de árbol sobre otros dos que yacen paralelamente y muy próximos, ¿cuál es la altura total de la pila formada por los tres?

I) *El lugar de los centros de las circunferencias de radio dado tangentes a una recta, está formado por las dos paralelas que distan el radio.*

EJ. 16: Trazar una circunferencia de radio dado tangente a otra y a una recta.

J) *El lugar de los puntos desde los cuales se ve una circunferencia bajo ángulo dado, es otra concéntrica.*

EJ. 17: La Tierra describe una órbita, aproximadamente circular, alrededor del Sol; la Luna una órbita, aproximadamente circular, alrededor de la Tierra. Desde la Tierra vemos de igual tamaño al Sol y la Luna, es decir, los vemos bajo ángulos aproximadamente iguales (que valen alrededor de medio grado) (*).

Admitida la exactitud de estas relaciones, se pregunta: En cada momento, ¿hay algún otro punto del plano determinado por los tres astros, desde el cual se vean iguales el Sol y la Luna? ¿Desde qué puntos se ve mayor uno u otro astro?

EJ. 18: Construir un triángulo dados: un ángulo, la altura que pasa por su vértice y el radio del círculo inscrito.

Resuélvase este mismo ejercicio haciendo eplicación de los lugares de rectas para determinar el lado opuesto al ángulo dado.

(*) En realidad el diámetro aparente del Sol, varía entre 31′ y 32′, y el de la Luna oscila entre 29′ y 34′.

Problemas y lugares del espacio.

Indíquense las construcciones de los problemas que siguen *en el espacio,* aun cuando no se sepa traducirlas en el dibujo (sistemas de representación).

Se determinará para ello previamente el lugar propuesto antes de cada problema.

I. *Lugar geométrico de las rectas que pasan por un punto fijo y se apoyan en una recta fija exterior.*

EJ. 19: Determinar una recta que corte a otras dos y que pase por un punto exterior a ellas. Discusión.

II. *Lugar de las rectas paralelas a una cierta dirección y que se apoyan en otra recta no paralela.*

EJ. 20: Determinar una recta paralela a una cierta dirección y que corte a dos rectas dadas. Discusión.

EJ. 21: Determinar una recta secante y perpendicular común a dos rectas que se cruzan. [Determinada la *dirección* perpendicular a ambas, o sea al plano paralelo a una que pasa por la otra, el problema se reduce al ejercicio anterior.]

III. *Lugar de los puntos que equidistan de tres no alineados.* (Aplíquese Ejemplo 4.°, pág. 80.)

EJ. 22: Determinar un punto que equidiste de cuatro puntos dados.

IV. *Lugar de los puntos equidistantes de dos planos.* Discusión.

V. *Lugar de los puntos equidistantes de tres planos.* En particular de las caras de un triedro.

EJ. 23: Determinar un punto equidistante de cuatro planos. En particular: Hallar el centro de la esfera inscrita en un tetraedro.

EJ. 24: Determinar la esfera inscrita en una pirámide regular.

VI. *Planos que pasan a igual distancia de dos puntos dados.*

VII. *Planos que pasan a igual distancia de tres puntos dados.*

EJ. 25: Trazar un plano que pase por una recta y quede a igual distancia de dos puntos dados.

EJ. 26: Trazar por un punto un plano que pase a igual distancia de tres puntos dados.

EJ. 27: Trazar un plano equidistante de cuatro puntos.

VIII. *Lugar de los puntos que distan de un plano un segmento dado.*

EJ. 28: Hallar una esfera de radio dado tangente a tres planos dados.

[illegible]

Paralelismo y ángulos del espacio

[illegible]

IV. Lugar de los puntos equidistantes de dos planos. Discusión.

Lugar de los puntos equidistantes de tres planos. [illegible]

[illegible]

CAPITULO II

COMPLEMENTOS DE METODOLOGIA
DE LA
MATEMATICA ELEMENTAL

Abordamos en este capítulo el estudio más a fondo de algunos problemas metodológicos iniciados en el capítulo anterior, y puede ser omitida su lectura por quienes se preocupen más de las cuestiones didácticas que lógicas, pues no nos apoyaremos en los temas aquí tratados para la exposición de las cuestiones didácticas que forman la segunda parte de esta obrita.

§ 1.°—Las definiciones matemáticas.

Unidad, pluralidad y clasificación.

Los conceptos fundamentales de la Matemática son el de unidad y el de pluralidad, y éstos son también los de la Lógica. La Matemática se ocupa desde tiempo inmemorial de ciertos conjuntos formados por infinitos entes; pero no por yuxtaposición, agregación o enumeración, operaciones que por su propia esencia sólo producen conjuntos finitos; ni tampoco por *generación*, esto es, por una ley que vaya produciendo dichos entes sucesivamente. Los conjuntos que estudia la Matemática suelen definirse por la operación lógica que se llama *clasificación*.

Cuando hablamos, por ejemplo, del conjunto de los *números primos* no nos referimos a la criba de Eratóstenes desde uno hasta ciento, que figura en el texto de Aritmética; ni siquiera a la criba supuesta indefinida, que permite formar todos los números primos, uno tras otro; sino que definimos ese conjunto, dando un criterio tal que para cada número pueda decirse si es o no primo sin necesidad de tabla alguna.

Este criterio que adoptamos para caracterizar los números primos, es decir, para clasificar los números naturales en primos y compuestos, es el siguiente: *Un número se llama primo cuando no admite ningún divisor distinto de sí mismo y de la unidad.*

Los conjuntos que estudia la Matemática no son *colecciones*, sino *clases*; y las definiciones usuales en Matemática son *clasificaciones*, como después veremos. Mas, para penetrar a fondo en la esencia de las definiciones matemáticas, recordaremos previamente algunas nociones de Lógica.

Extensión y comprensión de un concepto.

Los *términos* que forman el lenguaje, tanto vulgar como científico, son *singulares* o *generales*, según que representen unidades o clases; no se trata, pues, de colecciones o conjuntos formados por yuxtaposición o enumeración, sino de clases caracterizadas por un distintivo común.

Por ejemplo: el término «Miguel de Cervantes Saavedra» es *singular*, porque designa un individuo determinado, esto es, una unidad; y lo mismo acontece con estos términos: «la Castellana», el «Partenón», «la Vía Láctea»; debiendo observarse que el carácter de unidad de éstos y de todos los términos análogos que representan entes materiales no excluye su estructura corpuscular, molecular o celular. Los conceptos de unidad o pluralidad no se refieren, pues, a la esencia de la cosa en sí misma, sino al modo de considerarla. El Partenón es pluralidad si se considera como conjunto de sillares y la Vía Láctea como conjunto de estrellas; uno y otra son conjuntos mucho más amplios si se consideran como conjuntos de átomos.

Extensión de un término general o del concepto que designa es el *conjunto de individuos* que en él se incluyen. *Comprensión* del término o concepto es el *conjunto de cualidades* que caracterizan a los entes de dicho conjunto, es decir, aquellas que pertenecen a éstos y sólo a éstos.

Si se ordenan varios términos en orden de extensión creciente, su comprensión es decreciente, y viceversa.

EJEMPLOS.—Triángulo, polígono, recinto plano, son términos de extensión creciente, puesto que todos los triángulos son polígonos y todos los polígonos son recintos planos; su comprensión es, en cambio, decreciente, pues la propiedad de tener tres lados no pertenece a todos los polígonos, y la existencia de vértices no se presenta en todos los recintos.

Análogamente son términos de extensión creciente y comprensión decreciente estos otros: número natural, número entero, número racional, número complejo ordinario, número complejo de n componentes, etc.

Definiciones nominales y objetivas.

Distingue la Lógica dos tipos de definiciones: la definición *nominal* o de nombre y la definición *objetiva* o de cosas.

Cuando en una ciencia cualquiera se introduce un término nuevo es preciso traducirlo al lenguaje ya conocido, esto es, definirlo. Estas son las definiciones *nominales* de palabras, que son incontestables y deben ser aceptadas como hechos, siempre que cumplan ciertas condiciones que después analizaremos.

En cambio, las definiciones de cosas están sujetas a la condición de concordancia con éstas.

EJEMPLOS.—Si yo defino: número *pseudoperfecto* es todo número natural igual al producto de sus partes alícuotas, nadie podrá impugnar esta definición, ni decir que sea verdadera o falsa, porque al crear esta palabra tengo derecho a atribuirle un significado arbitrario (*). Pero si yo defino a Cervantes como el «autor de la Celestina», doy una definición evidentemente falsa.

Los lógicos de Port-Royal, que elaboraron la lógica de Aristóteles, inspirados por Pascal y bajo la influencia cartesiana, se lamentaban de tal confusión con estas expresivas palabras: «Los geómetras no parecen haber entendido siempre la diferencia que hay entre las definiciones de palabras y las definiciones de cosas. Vemos, en efecto, que discuten las definiciones de palabras con el mismo calor que si se tratase de las cosas mismas. Así se ve en ciertos comentarios sobre Euclides una larga y muy acalorada disputa entre dos geómetras respecto del espacio comprendido entre una circunferencia y su tangente, espacio que uno afirma no ser un ángulo, mientras que el otro sostiene que lo es. ¿Quién ve que todo esto podría terminarse en dos palabras preguntando cada uno al otro lo que entiende por la palabra ángulo.»

Lo mismo podríamos decir de las discusiones inacabables sobre si la Geografía es o no ciencia, pues debe-

(*) Claro está que una vez admitidas por consenso universal las definiciones nominales de la ciencia, los entes definidos pasan a ser cosas y ya no cabe dar de los mismos otras definiciones que de ella difieran en esencia. Cuando algún autor no encuentre adecuado un nombre con la cosa definida, debe introducir otro término, en vez de conservar el corriente con nuevo significado.

rían unos y otros comenzar por definir lo que entienden por ciencia.

Clases de definiciones matemáticas.

Las definiciones matemáticas *son todas nominales*, pero pronto veremos que no todas proceden por clasificación, como admitía la Lógica de Aristóteles. Más amplio concepto es el expresado por Leibniz: «La definición debe comprender las condiciones necesarias y suficientes para demostrar todas las propiedades del objeto definido»; es decir. la definición determina la *comprensión* del concepto y, por tanto, la extensión del mismo. De acuerdo con este concepto las definiciones matemáticas pueden clasificarse en *explícitas* e *implícitas*. De estas últimas, que tan señalado papel desempeñan en la Axiomática, hemos hablado ya en el capítulo primero.

En cuanto a las *definiciones explícitas*, las clasificaremos así:

	RESPECTO DE LA		Modo de definición
	Extensión	Comprensión	
Por clasificación.	Analíticas.	Sintéticas.	Género próximo y última diferencia.
Por abstracción. .	Sintéticas.	Analíticas.	Igualdad.

Definiciones por clasificación.

Las definiciones explícitas por clasificación determinan la clase definida por selección dentro de otra clase más amplia, llamada *género próximo*, indicando las propiedades características de los entes definidos, es decir, aquellas cualidades que pertenecen a éstos y sólo a éstos, diferenciándolos de los demás entes del género considerado. Estos caracteres distintivos constituyen la *diferencia específica.*

EJEMPLOS.—Los números primos se definen como una clase particular de números naturales, que constituyen el género próximo. La diferencia específica que caracteriza a los números primos es la propiedad de carecer de divisores distintos de ellos mismos y de la unidad.

Análogamente se definen los polígonos regulares dentro del género de los polígonos; y los triángulos equiláteros dentro del género de los triángulos con la diferencia específica de tener iguales sus lados; o también pueden definirse dentro del género de los polígonos regulares, siendo entonces la diferencia específica la propiedad de ser triángulos.

Las condiciones clásicas de la definición.

La Lógica fué creada por observación de las leyes del razonamiento y muy especialmente del razonamiento matemático. Al progresar considerablemente la Matemática muchos lógicos no han avanzado paralelamente, y así resultan casi inservibles los tratados de Lógica clásica. Por lo pronto, solamente se ocupaban de las definiciones por clasificación, olvidando las definiciones por abstracción y las implícitas, que son mucho más importantes, por residir en ellas el poder creador de la Matemática.

Aun limitándonos a considerar las definiciones por clasificación, no son admisibles todas las condiciones que les impone la Lógica clásica, inspirada en Aristóteles. He aquí las condiciones que suelen imponerse:

1.ª La definición ha de ser más clara que lo definido.
2.ª Lo definido no debe entrar en la definición.
3.ª La definición debe ser breve.
4.ª No sea la definición ni redundante ni diminuta.
5.ª La definición ha de convenir a todo y sólo a lo definido.
6.ª La definición debe hacerse declarando el género próximo y la diferencia última de la cosa definida.

La primera condición carece de sentido para las definiciones nominales, puesto que todo término nuevo carece de significado antes de ser definido, y aún debe prescindirse del vago sentido etimológico que quizá podría atribuírsele (ejemplos: números compuestos, números irracionales, números perfectos, puntos imaginarios, etc.).

La segunda condición es ciertamente esencial y por no tenerla en cuenta se ha incurrido en antinomias no sólo en las ingenuas definiciones a que hemos hecho alusión en § 4.°, cap. I, sino también en alguna de las concepciones más atrevidas de la moderna teoría de conjuntos.

La brevedad exigida por la tercera condición es ciertamente recomendable, pero no esencial; y mucho menos si la brevedad se logra a expensas del rigor.

Respecto de la condición cuarta es esencial su segunda parte, que obliga a no olvidar ninguna condición característica, olvido que ampliaría indebidamente la extensión del concepto definido. No es en cambio esencial la exigencia primera, y luego veremos que son admisibles ciertas definiciones redundantes.

Respecto de la quinta condición puede afirmarse, como de la primera, su falta de sentido para las definiciones nominales.

La sexta condición excluye taxativamente las definiciones por abstracción y las implícitas, cuya importancia veremos más adelante.

En resumen, de las condiciones clásicas quedan como fundamentales:

1.° Lo definido no debe entrar en la definición.
2.° La definición no debe ser *diminuta*.

Condición esencial de las definiciones por clasificación.

Condición primordial es que las propiedades características de la especie definida sean *compatibles* con las del género próximo; de lo contrario no existirá ente alguno que las satisfaga, lo cual se expresa diciendo que resulta una *clase vacía*.

EJEMPLOS: Si definimos el *triángulo-cuadrilátero* como polígono de tres vértices y cuatro lados; o bien el *triángulo rectilíneo y trirrectángulo*, resultan evidentemente clases vacías, es decir, conceptos carentes de todo significado.

No siempre saltará a la vista, como en estos casos, la contradicción, y entonces existe el peligro de llegar a organizar una teoría lógicamente perfecta de los entes así definidos, sin llegarse por mucho tiempo a tropezar con ninguna contradicción.

Así, por ejemplo, podría elaborarse una teoría de los triángulos rectilíneos trirrectángulos completamente análoga a la de los triángulos esféricos y no se llegaría a contradicción ninguna mientras no hagamos uso del postulado de Euclides o de alguna propiedad que en él se apoye; pero la contradicción surge inmediatamente, apenas introduzcamos dichos postulados.

La compatibilidad de una definición, o sea su falta de contradicción con el género próximo, se prueba con un *teorema de existencia* o, más sencillamente, con ejemplos de entes que cumplan las condiciones impuestas.

EJEMPLOS.—Número *perfecto* es todo número natural e igual a la suma de sus partes alícuotas. Fácil es ver la existencia de tales números como son, por ejemplo, $6 = 1 + 2 + 3$. Lo mismo sucede con la definición de *triángulo equilátero*, cuya existencia está asegurada por la posibilidad de construirlo.

No basta un ejemplo ni aun varios para justificar una definición, cuyo valor sería insignificante si solamente caracterizara un conjunto finito.

EJEMPLOS.—Por analogía con los números primos ordinarios podíamos definir: número *primo aditivo* es el que no admite ningún sumando distinto de la unidad; y hasta se podrían demostrar ciertos teoremas como, por ejemplo, éste: Todo número admite un sumando que es primo aditivo. Sin embargo, todo ello carecería de valor, puesto que los únicos primos aditivos son el 1 y el 2, como se observa inmediatamente.

El mejor modo de asegurar la existencia de la clase infinita definida por clasificación es *engendrarla*, es decir, dar una fórmula o un procedimiento de formación indefinida.

Tal sucede, por ejemplo, con la criba de Eratóstenes, que permite formar todos los números primos. Asimismo se conoce la fórmula que da todos los números perfectos pares, a saber: $2^{n-1}(2^n-1)$, si es primo este número, entre paréntesis; sin embargo, esta fórmula no es tan completa como sería de desear, por no poderse asegurar si da infinitos números perfectos; y como tampoco se sabe si existen números perfectos impares, y aún puede suceder que no los haya, la definición dista todavía de ser lógicamente inatacable.

Hay definiciones lógicamente perfectas, que definen con toda claridad la comprensión del concepto, pero no permiten determinar su extensión en el estado actual de la Ciencia, por carecerse de medios para verificar si un ente dado cumple o no las condiciones impuestas.

Número *algebraico* es el que satisface a una ecuación algebraica de coeficientes racionales. He aquí una definición compatible, puesto que existen infinitos números que cumplen la condición impuesta; y tiene también carácter genético, puesto que formando todas las ecuaciones posibles se engendran todos los números algebraicos. Sin embargo, este conjunto cuya comprensión está perfectamente definida, tiene extensión imposible de precisar en el estado actual de la Matemática; pues dado un número cualquiera no es posible averiguar si es o no algebraico. Hasta para los números fundamentales π y e ha costado ímprobo esfuerzo el demostrar que son trascendentes, es decir, no algebraicos.

La condición de unicidad de algunos conceptos.

Es preciso analizar cuidadosamente *todas* las condiciones que contiene la definición de un concepto, para probar su compatibilidad y, por tanto, la *existencia* del concepto definido. Se presentan a veces condiciones *implícitamente* contenidas en la definición y que escapan con frecuencia a un análisis ligero de las mismas.

Tal ocurre con la condición de *unicidad* implícitamente contenida en el uso de un artículo determinado o de un pronombre.

EJEMPLOS. — Definidos como *equivalentes* dos polígonos cuando se pueden descomponer en sumas de polígonos iguales, para probar la existencia de *un* cuadrado equivalente a un polígono dado bastará ver la posibilidad de una descomposición del polígono y del cuadrado en partes poligonales iguales. Pero para hablar en rigor *del* cuadrado equivalente al polígono (problema de la cuadratura) es preciso probar además que *este cuadrado es independiente del modo como se efectúe la descomposición*, o lo que es lo mismo, supuesta demostrada la propiedad transitiva de la equivalencia, que *dos cuadrados equivalentes son iguales*.

Análogamente para definir *la* longitud de la circunferencia como límite del perímetro de un polígono regular inscrito cuando crece infinitamente el número de lados no basta, como se hace en algunos libros, probar la existencia de tal límite eligiendo convenientemente una ley de variación de dicho número, sino que es preciso probar además (o al menos advertir) que este límite es *el mismo cualquiera que sea la ley elegida* (*).

De un modo general: siempre que en la definición de un ente de carácter único exista un elemento arbitrario es preciso probar que dicho ente es independiente del elemento arbitrario en cuestión.

Condiciones convenientes para las definiciones por clasificación.

Además de la condición de compatibilidad que hemos considerado esencial para toda definición, pueden impo-

---

(*) Una cosa parecida ocurre, por ejemplo, con el área lateral de un cilindro, a tal punto, que siendo válida la definición como límite del área lateral de un prisma regular inscrito, deja de serlo si se da como límite de una superficie poliédrica inscrita, al tender a cero cada una de sus caras, ya que por el conocido ejemplo de Schwarz se sabe que, según la ley elegida de variación de dicha superficie, pueden obtenerse límites diferentes y aun puede no haber límite.

nerse otras condiciones no esenciales, pero sí recomendables. Tales son, por ejemplo, éstas:

a) La definición debe contener solamente las propiedades específicas, es decir, no debe ser *superabundante* o *redundante*.

Esta condición no es imprescindible y nada impide que en la definición se incluyan algunas exigencias que sean consecuencia de otras, a condición de demostrar inmediatamente esta relación de inclusión.

EJEMPLOS.—Suelen definirse los triángulos semejantes por la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de lados; definición admisible siempre que se demuestre la equivalencia de ambas condiciones.

Hasta puede convenir, por razones estéticas y didácticas, conservar cierta simetría entre dos relaciones equivalentes sin dar injustificada preponderancia a una sobre la otra.

Así, por ejemplo, convendría definir: triángulo regular es el equilátero y equiángulo, viendo a renglón seguido que ambas condiciones son equivalentes en el triángulo, lo que no acontece para los demás polígonos.

b) Las definiciones totalmente inadmisibles son las *diminutas*, es decir, las que omiten alguna propiedad esencial, cuyo olvido amplía indebidamente la clase definida.

Si definimos, por ejemplo, los polígonos regulares, como se hace con el triángulo regular, por la igualdad de lados, claro está que la clase de polígonos así definida será mucho más amplia de lo que corresponde al significado que siempre tuvo este concepto de polígono regular; para esa clase más amplia está ya consagrada la palabra polígono *equilátero*.

c) Una condición sumamente importante para las definiciones es que sean *genéticas*, esto es, que permitan inmediatamente engendrar los entes definidos, asegurando así la existencia de la clase no vacía; de lo contrario podremos quizá hacernos la ilusión de haber definido un nuevo concepto, cuando en realidad carece de existencia o coincide con otro bien conocido.

EJEMPLO.—Si definimos el número *pseudoperfecto* por la condición de ser igual al producto de sus partes alícuotas, resulta inmediatamente que tales números son exclusivamente de la forma siguiente: producto de dos números primos $p \cdot q$, o bien cubos de números primos p^3. Ahora bien, será sin duda preferible partir de esta expresión genética que permite engendrarlos todos, y de ella deducir aquella propiedad particular y alguna otra, más o menos interesante, que pudieran quizá tener.

Definiciones por abstracción.

Puesto que las definiciones por clasificación exigen el conocimiento previo de una clase más amplia que la definida, se comprende que los conceptos matemáticos fundamentales, es decir, los más amplios, no pueden definirse por clasificación. Los dos métodos de que la Matemática se sirve para elaborar sus nuevos conceptos son: las definiciones por *abstracción* y las definiciones *axiomáticas* o *implícitas*.

Los conceptos matemáticos se crean por el mismo proceso de abstracción que todos los conceptos de otras ciencias, esto es, por creación de un *quid* común a toda una clase de entes, que cumplen cierta condición de homogeneidad.

EJEMPLOS.—No es posible definir el *peso* o la *masa* o la *temperatura* a la manera aristotélica, por género próximo y diferencia específica, y por empeñarse en hacerlo circulan en los manuales tantas definiciones vacías de sentido. El concepto de peso nace en nosotros por el fenómeno del equilibrio en una balanza; aunque parezca paradójico, la idea de *igualdad de peso* es anterior a la idea de peso. Definida la igualdad de peso por el equilibrio, nuestra mente crea el concepto de peso para asignarlo a todos los cuerpos que se equilibran entre sí y distinguirlos de los que no se equilibran con ellos. A cada clase de cuerpos así determinada le asignamos un *mismo peso*.

No de otro modo procede la Matemática en la creación de sus conceptos. Cada uno de ellos es creado para representar una clase de entes relacionados entre sí por una clase de igualdad, esto es, por una relación idéntica, recíproca y transitiva.

La *dirección* o *punto* del *infinito* es el concepto engendrado por un haz de rectas paralelas, llamando también paralelas a las rectas coincidentes.

El concepto de número racional nace por abstracción de los pares de números enteros y no debe confundirse con el concepto de fracción, puesto que fracciones de términos desiguales, pero equimúltiplos de un mismo par de números enteros definen un mismo número racional.

Asimismo nace el número real para representar todas las cortaduras entre números racionales.

Y el número complejo se define también por abstracción, basado en la igualdad de los pares de números reales; entendiendo que dos pares son iguales cuando tienen las mismas componentes y en igual orden.

Las definiciones por abstracción permiten, pues, la creación de nuevos entes, que sólo así pueden definirse, o bien axiomáticamente como vimos en el capítulo anterior.

Es preciso insistir pesadamente sobre los graves defectos de ciertas definiciones que circulan en los tratados, en las cuales se pretende inútilmente eludir la definición por abstracción.

EJEMPLOS.—De todo punto inadmisible es definir el número *irracional*, como *número* que no es entero ni fraccionario, pues ello presupone el concepto general de número, al cual pretendemos llegar por ampliaciones sucesivas. Aunque disimuladamente, esta definición utiliza, pues, el propio ente definido.

Es corriente definir el vector como un ente compuesto por entes anteriormente conocidos, a saber: el *segmento*, la *dirección* y el *sentido*, pero el vector no es el agregado de estos elementos simples, pues con estos mismos se forman categorías muy diversas de vectores. Lo que caracteriza cada categoría, es decir, cada concepto, es la definición que se adopte para la igualdad. Si consideramos iguales dos vectores que tengan iguales longitudes, direcciones y sentidos, tendremos los *vectores libres;* si para la igualdad de los nuevos entes exigimos la igualdad de longitud y sentido sobre la misma recta base, queda definida la clase de los vectores *axiales*.

De igual modo suele definirse el número racional como par de enteros y el número complejo como par de números reales. Según esto, el par (3,5) ¿es un número racional o es un complejo? La diferencia esencial estriba en los dos modos de definir la igualdad; en el primer caso es la igualdad de pares de productos cruzados y en el segundo la igualdad de componentes. El mismo par define un número racional o un número complejo según que se adopte una u otra ley de igualdad.

Cuando se define el número real por una cortadura no queda esencialmente desvirtuada la definición adoptando la cortadura misma como número real; pues habiendo una correspondencia biunívoca, entre el número y la cortadura, resulta indiferente la identificación; pero no acontece lo mismo cuando se define el número real por dos sucesiones monótonas convergentes, puesto que un mismo número puede estar definido por diversos pares de sucesiones y es esencial establecer previamente el concepto de igualdad.

Definiciones afirmativas y negativas.

Llamaremos negativas a las definiciones que caracterizan a los entes definidos por la carencia de alguna propiedad. Definiciones negativas son, por ejemplo, la de número primo, y la usual de rectas paralelas.

Hacer una afirmación es realizar un juicio, mientras que una negación suele implicar infinitos juicios. Yo puedo afirmar que el señor X está en Madrid, porque lo acabo de ver; pero negar que está en Madrid exigiría en todo rigor una investigación tan extensa y minuciosa, que es imposible. Hay, sin embargo, un modo de negar con certeza, que es afirmar una propiedad contradictoria; así puedo negar que el señor X esté en Madrid si estoy en condiciones de afirmar con certeza que dicho señor está en Valencia.

La distinción entre definiciones afirmativas y negativas carece, pues, de oposición esencial y es puramente una oposición formal, que fácilmente puede reducirse.

Suele prescribirse que las definiciones afirmativas sean en todo caso preferidas a las negativas; así ha merecido censuras, por ejemplo, la definición de rectas paralelas por la condición de estar en un plano y carecer de punto común, habiéndose propuesto para sustituírla otras definiciones, como es, por ejemplo, la fundada en la equidistancia.

No es discreto, sin embargo, exagerar tal preferencia, y esto por tres razones:

1.ª Porque ciertas definiciones afirmativas implican infinitas afirmaciones, como acontece con las negativas; tal sucede con la equidistancia de *todos* los puntos de una recta respecto de otra.

2.ª Porque ciertas definiciones negativas son considerablemente más simples que otras afirmativas que pueden darse para el mismo concepto. Negativa es, por ejemplo, la definición de elipse, que se distingue de la circunferencia como cónica que tiene dos ejes reales y desiguales, mientras que sería afirmativa esta otra definición: Cónica cuyo sistema polar tiene común con el sistema polar absoluto un solo triángulo autopolar.

3.ª Porque no es difícil dar carácter afirmativo a las definiciones negativas, puesto que el no pertenecer a una clase equivale a pertenecer a la clase definida por la propiedad opuesta; así, por ejemplo, en aritmética de los números reales la condición: *no mayor* equivale a esta otra: *igual* o *menor*, y la condición *no igual* equivale a la de *mayor* o *menor*. Asimismo, la definición de rectas paralelas por la condición de no cortarse puede sustituirse por esta otra equivalente, pero afirmativa: dos rectas de un plano se dicen paralelas cuando cada una está en un semiplano respecto de la otra (*).

(*) En la Geometría euclidiana esta condición no sería suficiente, como tampoco lo es la condición de no cortarse; pero más inadmisible todavía resultaría la definición fundada en la equidistancia, que es completamente falsa, ya que el lugar de los puntos equidistantes de una recta resulta ser una cónica.

§ 2.º—La inducción matemática.

La inducción en las ciencias físicas.

En el capítulo primero hemos dicho ya en qué consiste el método inductivo o ascendente de la ciencia: en ir del hecho, o conjunto de hechos particulares, a la ley general que abarca todos los análogos.

El supremo ideal de la ciencia física es la predicción, es decir, la obtención de leyes y su aplicación a casos no experimentados. En la consecución de este ideal se encierra el doble proceso inductivo y deductivo que caracteriza el método científico.

También la Matemática generaliza, es decir, induce. Pero la inducción matemática es de distinta naturaleza que la inducción física. En las ciencias naturales la inducción se basa en un número limitado de observaciones, y las leyes así inducidas sólo conservan su vida precaria mientras no existen hechos que las contradigan. En este valor provisional y aproximado de las leyes reside precisamente el carácter evolutivo de las ciencias físicas, en constante renovación.

La verdad en las ciencias físicas no tiene, pues, el absolutismo que algunos espíritus ingenuos pretenden darle, imaginando la ciencia infalible y el universo encadenado a las leyes que aquélla le ha dictado. La palabra *cierto* o *falso*, aplicada a una ley física, no tiene sentido sino dentro de un campo limitado de condiciones.

La ley de la gravitación de Newton ha sido considerada cierta hasta hoy, y aún lo es dentro de cierto grado de aproximación, pero deja de serlo para velocidades grandes y medidas más exactas (*).

La inducción en la Matemática.

Mientras que en las ciencias físicas el criterio de verdad es la *concordancia* con los hechos, y la inducción se basa en la *analogía*, en matemáticas el criterio de verdad es la *no contradicción*, y la inducción, que origina nuevos entes y descubre nuevas relaciones, reside en la simple combinación de conceptos y juicios anteriores. La Matemática toda, que pasa por ser la ciencia deductiva por excelencia, es también una disciplina combinatoria en la más amplia acepción de esta palabra.

Los axiomas expresan juicios muy generales, es decir, de gran extensión y poca comprensión; de estos juicios se deducen, es decir, se seleccionan, se sacan, multitud de juicios particulares, y combinados éstos de múltiples modos se forma el cuerpo deductivo de la Matemática.

Pero antes de llegar a esta combinación, en la formación misma de los axiomas fundamentales, existe un proceso inductivo, consciente o no, que conviene analizar.

La inducción en los axiomas matemáticos.

Los axiomas nacen por abstracción. *Abstraer* es prescindir de condiciones especiales, es decir, disminuir la comprensión y aumentar la extensión de un concepto; es elevarse de lo particular a lo general, es inducir. En la formación de los axiomas hay un gran proceso de inducción, pues de la multitud de experiencias y observaciones ad-

(*) Las órbitas de los planetas eran circulares para Ptolomeo, y lo son actualmente dentro de un grosero grado de aproximación, pero no si se adoptan medidas más exactas.

quiridas y heredadas nacen esas proposiciones generales que afirman hechos más allá del campo de la observación.

Veamos el concepto de número. Su origen es empírico; nace de observaciones como ésta: el tener o no asiento varios comensales es independiente del orden en que se adjudiquen las sillas; sin embargo, el principio de la invariabilidad del número cardinal es una inducción atrevida. La invariabilidad del número la afirmamos para números que no hemos visto ni siquiera existen en la Naturaleza; para todos los números imaginables, y también para los inimaginables.

Cuando afirmamos que dos puntos determinan una recta, extendemos demasiado el campo de nuestra observación, que es bien limitado. Para Kant, este juicio de universalidad y necesidad asoluta es un *a priori*, que existe en nosotros independientemente de la observación. Después de haberse familiarizado con las Geometrías no euclidianas, nadie seguirá afirmando aquellos axiomas euclidianos con igual carácter de universalidad y de necesidad. En definitiva, sólo parece existir un juicio sintético *a priori*: la formación del número natural.

La inducción en la generalización de los conceptos.

Supongamos adquirido el concepto del número natural. La Aritmética estudia las propiedades generales de todos los números, y la teoría de números investiga las propiedades especiales de ciertas clases de números (pares, impares, primos, compuestos, etc). Es decir, del conjunto de los números selecciona ciertas clases o conjuntos.

Pero la Aritmética no sólo deduce o selecciona, sino que también induce, también amplía; del número natural pasa al número racional, nuevo ente que nace de la consideración de pares de enteros, y con los nuevos números se organiza una rama de la Aritmética, que vuelve a ampliarse después agregando los números irracionales y luego los complejos.

La Aritmética se generaliza, y se pasa al Algebra; y la sencilla correspondencia que dió origen al número natural, se amplía y generaliza para formar el concepto de función.

La Matemática amplía constantemente su campo, mediante generalizaciones, es decir, induce, y en esta inducción reside su poder creador.

El método más fecundo de creación matemática es la *correspondencia* entre dos clases, o simplemente entre dos elementos. Un par de enteros engendra el número fraccionario; una correspondencia entre infinitos pares de números racionales que cumplen ciertas condiciones, define el número real; un par de números reales cualesquiera determina un número complejo; una correspondencia ordenada entre dos puntos define el vector; la proyectividad entre dos series o haces engendra nuevos entes geométricos, llamados *cónicas, conos, cuádricas aladeadas,* etc.

La inducción completa.

En el capítulo primero hemos visto ejemplos en los que se puso de manifiesto las falsas conclusiones a que podía conducirnos en el campo de la Aritmética la inducción efectuada a la manera de las ciencias naturales. Veamos ahora un ejemplo geométrico análogo.

Una circunferencia divide al plano en dos regiones.

Dos circunferencias secantes dividen al plano en cuatro regiones.

Tres circunferencias secantes entre sí dos a dos, y no concurrentes las tres en un mismo punto, dividen al plano en ocho regiones.

¿En cuántas regiones r_n quedará dividido el plano por n circunferencias secantes entre sí dos a dos, y tres a tres no concurrentes?

Una inducción ligera nos conduciría a admitir la sencilla ley $r_n = 2^n$, que se cumple para los ejemplos anteriores. Sin embargo, comprobaríamos inmediatamente que ya deja de cumplirse para $n = 4$, pues el número de regiones es 14, y no 16. Busquemos, pues, otra ley también válida para $n = 4$; por ejemplo:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 \\ r_2 &= 2 + 2 &&= 4 \\ r_3 &= 2 + 2 + 4 &&= 8 \\ r_4 &= 2 + 2 + 4 + 6 &&= 14 , \end{aligned}$$

y veamos si es cierta la ley general

$$r_n = 2 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 2(n-1) = 2 + n(n-1).$$

En cuantas figuras hagamos, que cumplan las condiciones del enunciado, comprobaremos que la ley se verifica, no sólo para los valores anteriores, sino también para $n = 5$, $n = 6$, ...

¿Podemos, pues, afirmar que la ley es general, es decir, válida para *todo* valor de n? Así proceden los físicos; la ley sería considerada verdadera mientras no se encontrara un caso que la desmintiera; en cambio, para los matemáticos la ley no es cierta hasta tanto no se prueba, con los recursos de la lógica, que ha de cumplirse siempre. Y he aquí el recurso que se emplea en estos casos. Hemos *comprobado* que la ley es cierta para $n = 1$; tratemos de *demostrar* ahora que *si es cierta para un valor cualquiera de* n, *tal como* n = p, *también es cierta para el valor siguiente* n = p + 1.

En efecto: si p circunferencias han dividido al plano en $2+p(p-1)$ regiones, una circunferencia nueva, que las corte a todas en puntos distintos, tendrá con ellas $2p$ puntos de intersección, que determinarán en dicha circunferencia $2p$ arcos. Cada uno de ellos divide en dos a la región que atraviesa, por tener sus extremos en el contorno (*); es decir, cada arco añade una región nueva. El número de regiones determinadas por $p+1$ circunferencias es, pues, de $2+p(p-1)+2p=2+(p+1)p$, que coincide con el resultado de sustituir n por $p+1$ en la fórmula; luego ésta también es válida para $n=p+1$, como queríamos demostrar.

OTRO EJEMPLO.—Supongamos demostrado en el triángulo que un lado es menor que la suma de los otros dos; y demostremos además que si es cierta, para polígonos de n lados, la propiedad de ser un lado menor que la suma de los demás, también es cierta para los polígonos de $n+1$ lados. (La demostración es bien sencilla y la dejamos a cargo del lector; basta que descomponga, mediante una diagonal, el polígono de $n+1$ lados en un triángulo que contenga al lado deseado y un polígono de n lados y sume las desigualdades que resulta de aplicar las hipótesis anteriores a cada uno de ellos.) No necesitamos más para afirmar que la propiedad es completamente general, es decir, *válida para polígonos de cualquier número de lados.*

Este principio lógico, en virtud del cual es cierta una propiedad para cualquier número n una vez que se ha comprobado su certeza para un primer valor de n, y demostrado que si es cierta para un valor cualquiera lo es también para el siguiente, se llama en matemáticas *principio de inducción completa*, o también de *recurrencia*.

Tratemos de analizarlo un poco más a fondo.

Las proposiciones matemáticas son juicios de carácter uni-

(*) Admitimos por brevedad, como ya demostrada, la *simple conexión* de estos recintos.

versal, es decir, de la forma: *Todo X es Y*, donde entendemos por X cualquier ente que cumpla las condiciones de la hipótesis, y por Y cualquier ente que cumpla las de la tesis. El teorema expresa que la clase de los entes X está incluída en la de los entes Y.

Ahora bien; esto lo podemos demostrar de dos modos:

1.° Comparando las extensiones, es decir, demostrando que todo ente X pertenece a la clase Y.

2.° Comparando las comprensiones, es decir, demostrando que las condiciones o cualidades que definen los entes Y son consecuencia o están contenidas en las que definen los entes X. Este segundo modo, esencialmente *deductivo*, suele ser el usual, ya que, como hemos dicho, los conceptos matemáticos se definen usualmente por clasificación y no por extensión. El primero modo encierra una dificultad grave, y es la comparación de extensiones de conjuntos infinitos. Sin embargo, cuando la clase de entes X puede descomponerse en un conjunto numerable de clases parciales C_1, C_2, ... C_n, ... (es decir, de tal modo, que todo ente X pertenezca a una y sólo una de ellas), la demostración de que todo ente de la clase X pertenece a Y, se reduce a probar que:

I.—La clase C_1 *pertenece a* Y; y

II.—Si C_s *pertenece a* Y, *también* C_{s+1} *pertenece a* Y.

En efecto, X pertenece, en virtud de lo dicho, a una de las clases C, por ejemplo, a C_n; y podemos establecer la siguiente cadena de silogismos: C_1 pertenece a Y (en virtud de I); si C_1 pertenece a Y, C_2 también (en virtud de II); luego C_2 pertenece a Y; si C_2 pertenece a Y, C_3 también (en virtud de II); luego C_3 pertenece a Y; y así sucesivamente. ¿Qué admitimos cuando afirmamos que la propiedad es cierta para C_n y, por tanto, para X? La posibilidad de llegar a la clase C_n por aplicación reiterada de esta cadena de silogismos. En la afirmación de esta potencia de nuestro espíritu radica la fuerza del razonamiento por inducción completa, y vemos que este principio está invariablemente ligado al concepto de la serie natural de los números.

EJEMPLO 1.°—Todas las figuras formadas por n circunferencias secantes que cumplan las condiciones indicadas en el ejemplo anterior constituyen la clase X, descomponible en clases parciales C_1, C_2, ..., caracterizada cada una de ellas por el número de circunferencias. La clase Y es más amplia; abarca todos los conjuntos de n líneas que dividen al plano en $2 + n(n - 1)$ regiones. Fácil es ver cómo la demostración del ejemplo 1.° encaja perfectamente denetro del esquema general que acabamos de establecer.

EJEMPLO 2.°—Todos los polígonos constituyen una clase descomponible en un conjunto numerable de clases parciales: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, ..., a las cuales es aplicable el proceso de inducción completa. La clase X está formada en el ejemplo de los polígonos antes indicado, por los polígonos rectilíneos, y la clase Y por la más amplia de todos los polígonos, rectilíneos o no, en los cuales un lado es menor que la suma de los demás.

EJEMPLO 3.°—Los polinomios enteros se clasifican según el grado, y tenemos así una ordenación de clases que permite la aplicación del principio de inducción completa. Demuestre el lector, como ejercicio, la descomposición factorial de un polinomio de grado n, que se anula para n valores distintos de la variable, por el proceso recurrente, y se dará cuenta de que las demostraciones corrientes utilizan también en el fondo el principio de inducción, aunque de modo solapado.

EJEMPLO 4.°—Repásese en cualquier libro elemental la demostración de la fórmula del binomio. Si no se ha establecido antes la teoría combinatoria, la demostración de tal fórmula viene dada invariablemente por inducción completa.

EJEMPLO 5.°—Véase en «Curso cíclico de Matemáticas», tomo I, Rey Pastor, la teoría de determinantes expuesta por el método de recurrencia o inducción.

§ 3.º—El rigor y los paralogismos matemáticos.

Evolución del rigor.

La necesidad del rigor matemático se ha desarrollado paulatinamente, después del retroceso sufrido durante la Edad Media, en la cual se pierden las demostraciones de los griegos y las proposiciones matemáticas se enseñan dogmáticamente llenas de errores y oscuridades. En pleno siglo XVII la oscuridad persiste; las obras de Descartes están llenas de errores y afirmaciones atrevidas y los comienzos del Cálculo infinitesimal se caracterizan por su falta de rigor. Así, por ejemplo, se obtiene el volumen de la esfera mediante la suma de infinitas pirámides de base regular, olvidando que no existen poliedros regulares con más de veinte caras.

Este período de desarrollo de la Matemática está caracterizado por la frase de d'Alembert: «Allez en avant, et la foi vous viendra.»

La obra crítica del siglo XIX sometió a profunda revisión tanto la matemática de los griegos como la posterior al renacimiento, y hace resplandecer la luz donde antes reinaba la oscuridad y confusión.

Alcanzado ya un rigor que muchos consideran absoluto, resulta, como dice Couturat, que «la reputación de rigor de que ha gozado la Geometría de Euclides era completamente usurpada, pues está muy lejos de ser el tipo perfecto de rigor lógico».

El rigor ha llegado a extremos tales que muchos matemáticos lo consideran excesivo, al menos desde el punto de vista didáctico; tal, por ejemplo, Hermite cuando decía: «Bacon ha dicho que la admiración es el principio del saber, y esto es exacto sobre todo en nuestra ciencia; yo me atrevería a desear que se conceda en los estudios mayor importancia a las cosas simples y bellas que al extremo rigor, hoy tan en boga, pero tan poco atrayente para los principiantes que no pueden comprender su interés.»

Los paralogismos.

Se impone, pues, una dualidad de procedimiento para la construcción de la Ciencia y para su enseñanza; la deducción matemática tiene la fuerza apodíctica que le han concedido los filósofos de todos los tiempos, siempre y cuando sea rigurosa. Demostraciones no rigurosas pueden darse tantas como se quiera de toda propiedad falsa. Cuando bajo la apariencia de una deducción rigurosa que conserva la forma silogística, se falta a alguno de los principios lógicos, se llega pronto a la contradicción, y aun no llegando a ella todo lo deducido carecerá de solidez. Los tratados de todos los tiempos están llenos de seudodemostraciones para probar resultados que son ciertos, es decir, a los cuales se hubiera podido llegar rigurosamente. Ahora bien; con tales demostraciones *a peu près* se puede demostrar igualmente cualquier propiedad por absurda que sea, lo que prueba la inconsistencia del razonamiento.

Vamos a examinar algunos tipos de paralogismos matemáticos, es decir, de falsas demostraciones que conducen a conclusiones claramente absurdas. Caracteriza a tales demostraciones el hecho de ser más claro lo absurdo de la conclusión que la defectuosidad del razonamiento, de tal modo que esta imperfección pasaría fácilmente inadvertida si no fuera por la sorpresa que causa el resultado.

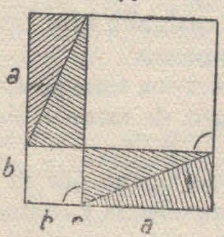
No pretendemos agotar todos los tipos posibles, pues así como la verdad es única la falsedad es infinita.

Paralogismos intuitivos.

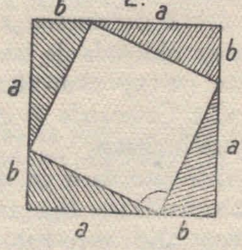
La intuición y la experiencia, únicas fuentes de conocimientos en la niñez, son ya insuficientes para los espíritus razonadores. La experiencia con sus imperfecciones y la intuición con sus espejismos nos engañan y nos conducen con frecuencia a conclusiones erróneas. En el § 3.º hemos visto significativos ejemplos de ello.

He aquí una demostración intuitiva del Teorema de Pitágoras: Sea un triángulo rectángulo de catetos a y b. Construyamos un cuadrado de lado $a+b$. Recortando de este cuadrado

1ª



2ª



cuatro triángulos iguales al dado en la posición que indica la figura 1.ª quedan, como *se ve*, dos cuadrados de lados a y b. Si los recortamos en la forma que indica la figura 2.ª *se ve* igualmente que queda un cuadrado de lado igual a la hipotenusa. Este último cuadrado es, pues, equivalente a la suma de los primeros. El resultado es efectivamente cierto; pero del mismo modo podríamos afirmar, por que *se ve*, que el cuadrado de 64 cuadros de la figura 1.ª de la página 21 es equivalente al rectángulo de 65 cuadros de la figura 2.ª de la misma página.

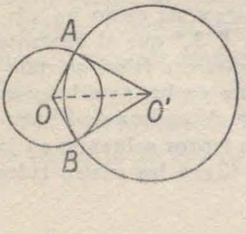
No basta, pues, *ver*, es preciso *razonar*, y así como un adecuado razonamiento nos hizo ver en el § 3.º que el aparente ajuste de los trapecios de esta última figura era falso, así también es preciso acudir al razonamiento para probar aquí la exactitud de la descomposición que demuestra el teorema de Pitágoras del modo indicado. Y, en efecto, los trozos sobrantes en la figuras 1.ª y 2.ª son cuadrados, ya que tienen los cuatro lados iguales y un ángulo recto, por ser ambos casos suplementarios de la suma de dos complemenarios entre sí.

Paralogismos gráficos.

La Geometría suele apoyar sus demostraciones en la guía de una figura que permite fijar las ideas y designar por letras sus diversos elementos a fin de abreviar las referencias a los mismos, evitando de esta manera el violento esfuerzo de memoria y abstracción que exige la Geometría sin figuras; pero las demostraciones no serán rigurosas ni, por tanto, admisibles sino a condición de no apoyarse en las relaciones geométricas que aparecen en la figura sin haber demostrado previamente que tales relaciones deben presentarse en cualquier otro caso como consecuencia obligada de las hipótesis.

Poincaré ha expresado esta idea con frase profunda, diciendo: «La Geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas.»

No quiere esto decir en modo alguno que en la enseñanza deba utilizarse figuras imperfectas y confusas, sino todo lo contrario; pero para lograr la pureza del razonamiento riguroso son preferibles los esquemas a las figuras bien construídas, y esto por la razón siguiente: En las figuras correctamente dibujadas con regla y compás no aparecen, en efecto, relaciones *absurdas*, pero sí aparecen, en cambio, relaciones *particulares* debidas acaso a la especial disposición o dimensiones de los datos y no a la hipótesis geométrica establecida.



Empecemos por un ejemplo trivial. La figura representa dos circunferencias secantes, y trazadas las tangentes AO y AO' y análogamente BO y BO' resulta: 1.°, por ser OA y OB radios, la igualdad de las dos tangentes a una circunferencia por un mismo punto. Resulta además: 2.°, por ser OA perpendicular a $O'A$, ya que una es radio y otra es tangente, la igualdad

$$OO'^2 = OA^2 + O'A^2.$$

Es decir, *el cuadrado de la distancia entre los centros de dos circunferencias secantes es igual a la suma de los cuadrados de los radios.*

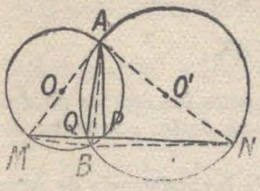
El lector habrá notado seguramente la inconsistencia de estas deducciones apoyadas en una posición muy particular de las circunferencias secantes, pues en general la tangente a cada una en uno de los puntos comunes no pasa por el centro de la otra. La segunda propiedad es, en efecto, falsa excepto en el caso particular representado en la figura (pues bien sabido es que la única condición para que dos circunferencias sean secantes es que la distancia entre los centros esté comprendida entre la suma y la diferencia de los radios sin necesidad de satisfacer a la igualdad anterior). Y, sin embargo, a pesar del falso punto de partida de la primera propiedad deducida es completamente general.

He aquí, pues, un grave caso de paralogismo a que nos ha conducido una figura perfectamente dibujada. En cambio, si hubiéramos trazado un simple esquema a mano alzada, antes de asegurar que el punto de intersección de las dos tangentes a una circunferencia es el centro de la otra, habríamos analizado si tal debe suceder como forzada consecuencia de ser secantes ambas circunferencias, y al no encontrar razón alguna para asegurarlo no nos habríamos apoyado en tan especial circunstancia.

Al lado de los paralogismos derivados de la particular posición en una figura correcta se presentan, en cierto modo como contrapuestos, los paralogismos gráficos derivados de figuras esquemáticas, cuando éstas no se someten al análisis lógico a que antes hemos aludido.

La figura representa dos circunferencias secantes trazadas a mano alzada, en las cuales se han obtenido los puntos M y N diametralmente opuestos del A de intersección, en cada una de ellas. La recta MN corta a una y otra en sendos puntos P y Q.

Ahora bien; el ángulo APM es recto por estar inscrito en una semicircunferencia, y lo mismo le acontece al AQN, de donde resulta la existencia de dos perpendiculares a la recta MN por el mismo punto A.



¿Cuál debe ser, por consiguiente, el trazado correcto de la recta MN? Fácil es ver que MB y NB deben estar alineados por ser ambos perpendiculares a la recta AB en el punto B; y como por M y N no puede pasar más que una recta será precisamente MBN.

Crítica de las demostraciones corrientes.

El peligro de falsa inducción que nos ha conducido a conclusiones absurdas es muy difícil de eliminar en absoluto cuando las demostraciones se apoyan en figuras, pues el análisis riguroso cuya necesidad hemos preconizado resulta extraordinariamente complicado para ser completo. Aun en las demostraciones más perfectas de los tratados geométricos que gozan de justa fama es fácil encontrar peticiones de principio por utilizar tácitamente ciertas relaciones sin otro justificante que el de *verse* en la figura.

Un ejemplo instructivo de este tipo de demostraciones en que implícitamente se admiten multitud de relaciones intuitivas por que *se ven* en la figura, es la clásica demostración del teorema siguiente. *«Toda línea poligonal convexa es menor que toda línea poligonal que envuelve la primera y que tiene las mismas extremidades»* (*Rouché Comberouse*, traducción española de Portuondo).

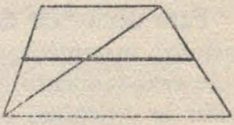
Ante todo sería preciso (y no todos lo hacen) definir previamente la convexidad y lo que debe entenderse por *envolver* una línea a otra; pero aun cumplidos estos dos requisitos indispensables, la demostración usual admite:

1.° Que cada lado de línea envuelta corta a la envolvente en un solo punto situado en una cierta prolongación de dicho lado, según el *sentido* que se haya establecido previamente en ella, sentido que igualmente hace falta definir.

2.° Que los trozos de envolvente determinados por estos puntos no tienen partes comunes.

3.° Que los segmentos que aparecen en la demostración como prolongaciones de los lados de la envuelta figuran una sola vez entre los primeros miembros y una sola vez entre los segundos miembros de las deseigualdades establecidas, circunstancia que permite su eliminación.

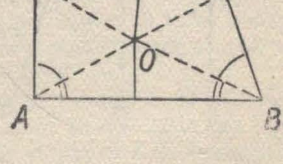
Ejemplo de demostración menos imperfecta, que puede servir de prototipo de las demostraciones más rigurosas en los libros corrientes de Geometría, es la que sigue: Para demostrar que la paralela media de un trapecio es igual a la semisuma de las bases, se traza una diagonal que la divide, como *se ve* en la figura, en suma de dos segmentos, cada uno de los cuales, en virtud de un teorema anterior, es igual a la mitad de una de las bases.



Tanto en esta demostración como en otras relativas a los cuadriláteros, se admite que cada diagonal es interior y lo divide en dos triángulos, propiedad que sólo es cierta en los cuadriláteros convexos y que, por tanto, no deberá utilizarse sin haber demostrado previamente la convexidad del trapecio o cuadrilátero considerado.

Por banales que parezcan estos escrúpulos de rigor son indispensables para una construcción *completamente rigurosa* de la Geometría, pues descuidos análogos pueden conducir a conclusiones absurdas.

He aquí, por ejemplo, la construcción siguiente: Sobre un segmento AB levantamos el segmento perpendicular AA' y el oblicuo BB' de igual longitud. Las mediatrices de los lados AB y $A'B'$ parecen encontrarse en un punto interior O, que, unido con AA' y con BB', determina dos triángulos OAA' y OBB'. Estos triángulos son iguales por tener $OA = OB$



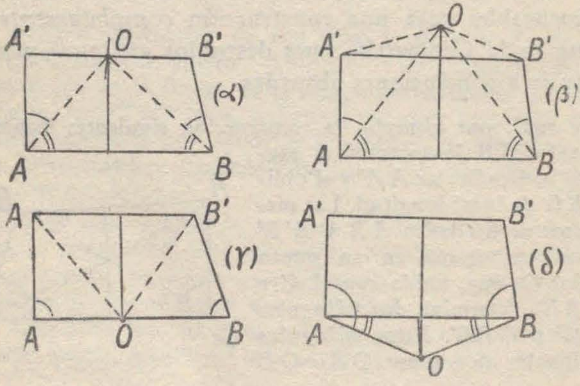
por estar O en la mediatriz de AB; $OA' = OB'$ por análoga razón, y, por último, $AA' = BB'$ por construcción. Por consiguiente, son iguales los ángulos señalados con un solo arco, y como también lo son los ángulos marcados con doble arco por ser ángulos básicos del triángulo isósceles AOB, sumando resulta $A'AB = B'BA$ *contra la hipótesis.*

Sin duda el lector atribuirá con razón el absurdo al hecho de haber admitido la posición interior del punto de intersección de las dos mediatrices. Se impone, pues, un análisis lógico de dicha posición que efectuamos enseguida.

Paralogismos de enumeración incompleta.

Para demostrar del modo más general algunas proposiciones matemáticas que no es posible abarcar con un solo razonamiento en toda su integridad, es forzoso dividir la dificultad en casos; mas para que la conclusión sea siempre válida será indispensable que la *enumeración* de dichos casos sea completa, pues la omisión de alguno de los casos posibles puede conducir a paralogismos.

EJEMPLO 1.°—He aquí cómo puede continuarse el paralogismo anterior, en el que hemos supuesto que las dos mediatrices se cortan en el interior del cuadrilátero $AA'B'B$: Si las

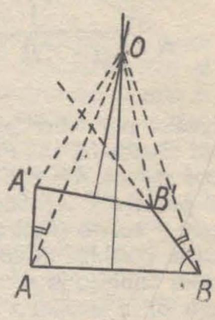


mediatrices se cortan en la recta $A'B'$ (punto medio) (figura α) o más arriba aún (figura β), la demostración se completa de la misma manera; el punto O de intersección equidistará de AB y de $A'B'$, de modo que los triángulos AOA' y BOB' serán iguales y, por tanto, los ángulos marcados con simple trazo; y como también siguen siendo iguales los ángulos marcados con doble trazo, serán también iguales los ángulos suma $A'AB$ y ABB'.

Si las mediatrices se cortaran en el punto medio de AB (figura γ), de la igualdad de los triángulos $A'OA$ y $B'OB$ resultaría sin más la de los ángulos mencionados. Y, por fin, si las mediatrices se cortaran por debajo de AB, resultaría la igualdad de los ángulos $A'AB$ y ABB' por diferencia entre los ángulos marcados con simple trazo y los marcados con doble trazo.

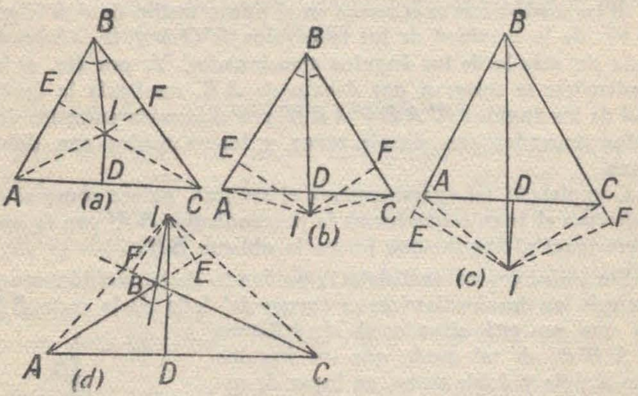
Completado así aparentemente el sofisma, parece como si *en todo caso* el ángulo que forma la perpendicular AA' con la base fuera igual al ángulo que forma la oblicua BB'.

Sin embargo, un análisis más profundo de la cuestión muestra que las dos mediatrices se cortan del lado de la recta BB' en que no está situado el cuadrilátero $AA'B'B$; de tal modo que los ángulos con simple y doble trazo, en lugar de sumarse o restarse en uno y otro lado, se suman en uno y restan en otro; y por esta razón no hay contradicción en que la suma no sea igual a la resta. El paralogismo ha sido, pues, debido a una enumeración incompleta de casos posibles en el esquema, considerando tan sólo el conjunto de casos absurdos y olvidando el único caso cierto y real.



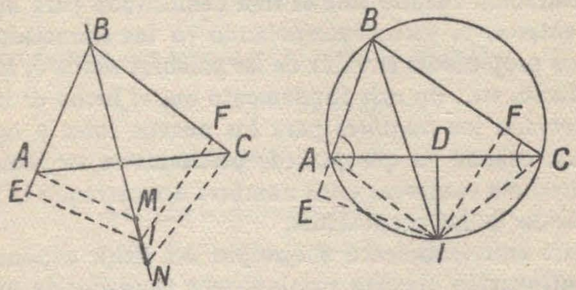
EJEMPLO 2.°—Otro paralogismo que puede clasificarse entre los de enumeración incompleta es el siguiente: Sea ABC un triángulo *cualquiera*. Si la bisectriz del ángulo B fuera perpendicular al lado AC, el triángulo sería simétrico respecto de dicha perpendicular, y, por tanto, isósceles.

Si la bisectriz del ángulo B no es perpendicular al lado AC, cortará a la mediatriz DI de este lado, ya que estas dos rectas no serán paralelas. Tracemos desde el punto I de intersección las perpendiculares IE e IF a los lados AB y BC, así como las rectas IA e IC que unen dicho punto con los vértices A y C. Tanto si el punto I es interior al triángulo (figura *a*) como si es exterior (figuras *b*, *c* y *d*), tenemos $IE=IF$, $BE=BF$ por la simetría de los triángulos IBE e IBF respecto de la bisectriz BI; además, $IA=IC$, por pertenecer I a la mediatriz DI. Los dos triángulos rectángulos AIE, CIF son, pues,



iguales por tener las hipotenusas iguales $AI=IC$, así como los catetos $IE=IF$, de donde resulta la igualdad de los otros dos catetos $AE=FC$, igualdad que, combinada por suma en el primero y segundo caso (figuras *a*, *b*) y por resta en el tercero y cuarto (figuras *c* y *d*) con la ya establecida $BE=BF$, da la igualdad de los lados $AB=BC$. Es decir, que en estos casos también es el triángulo isósceles. Por último, si I coincide con B, la mediatriz DI sería altura, y si coincide I con D, la bisectriz BI sería también mediana y en ambos casos el triángulo igualmente isósceles. La consecuencia absurda es, pues, la siguiente: *Todo triángulo es isósceles.*

Aun cuando parecen haberse agotado todas las hipótesis posibles capaces de introducir una variante en la demostración, es lo cierto que se ha omitido *el único caso posible* acerca de la posición del punto de intersección I. A saber: aquel en que I esté en el trozo de mediatriz limitado por las dos perpendiculares AM y CN a los lados BA y BC del triángulo dado. En estas condiciones, que como veremos en seguida son las únicas posibles, la perpendicular IF corta a un lado BC en un punto F interior a dicho lado y al otro BA en un punto E de su prolongación, de manera que subsistiendo la igualdad de todos



los triángulos y segmentos mencionados $BE = BF$, $AE = CF$, la diferencia entre $BE - AE = AB$ no es igual a la suma $BF + CF = BC$.

Para probar, *a priori*, que este es el único caso posible basta considerar la circunferencia circunscrita al triángulo. Por el punto medio del arco AC ha de pasar la bisectriz del ángulo B que abarca dicho arco, y también por dicho punto pasa la mediatriz DI de la cuerda AC. El punto I de intersección de la bisectriz y mediatriz utilizadas es, pues, el punto medio del arco AC exterior al triángulo. Los ángulos BCI y BAI son, pues, suplementarios (como inscritos que abarcan arcos que suman toda la circunferencia), es decir, si el ángulo en A es, por ejemplo, agudo, el ángulo en C es obtuso, lo que prueba que una de las proyecciones será interior al lado BC, mientras la otra, E, será exterior a AB.

Paralogismos de extrapolación.

Uno de los tipos más frecuentes de seudodemostraciones que se presentan, aun en libros que gozan de gran circulación, son aquellas en las que se extrapola, es decir, se da una extensión falsa o indebida al contenido de la hipótesis o a la aplicación de la tesis de un teorema.

Muchas veces hemos visto en libros corrientes de Aritmética aplicar como ciertas las propiedades de la suma multiplicación, etc., para números fraccionarios o inconmensurables, cuando sólo se han demostrado para números enteros, es decir, extrapolando en los enunciados de dichas propiedades el valor de las palabras *número, suma, producto,* etc., sin más fundamento que el hecho de haber conservado los *nombres* para los nuevos entes y operaciones, cuando lo que procede precisamente es justificar el derecho a conservar estos nombres demostrando la conservación de las propiedades.

Para entretenimiento y ejemplo del lector exponemos a continuación algunos paralogismos fundados en extrapolaciones fáciles de descubrir.

EJEMPLO 1.°—Según se sabe no existe ningún número real que, elevado al cuadrado, dé un resultado negativo, como por ejemplo -9. Sin embargo, la siguiente serie de igualdades parece demostrar que los dos valores $+3$ y -3 pueden tomarse como raíces cuadradas de -9.

$$\sqrt{-9} = \sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt[4]{81} = \pm 3 .$$

La transformación se funda en el conocido teorema que permite multiplicar el índice de un radical y el exponente de la cantidad subradical por un mismo factor; pero su aplicación es indebida, pues todo el cálculo con radicales es sólo válido en tanto se consideran los *valores absolutos* o *aritméticos* de los mismos, es decir, sus determinaciones positivas, cuando existan. Advertencia esencialísima que falta o no se destaca con suficiente vigor en muchos libros.

EJEMPLO 2.°—Otro ejemplo algebraico: Sea *a distinto de b,* y llamemos *c* a su suma, es decir,

$$a + b = c ;$$

multiplicando los dos miembros por a se obtiene

$$aa + ba = ca ,$$

y multiplicando análogamente por b

$$ab + bb = cb ,$$

y restando estas dos igualdades miembro a miembro,

$$aa + ba - ab - bb = ca - cb ,$$

transponiendo y sacando factor común

$$aa + ba - ca = ab + bb - cb ;$$

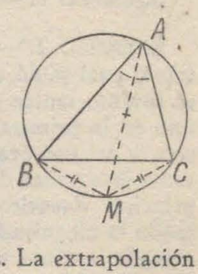
$$a(a + b - c) = b(a + b - c) ;$$

de donde $a = b$ contra la hipótesis.

¿En qué consiste la paradoja? En haber dividido los dos miembros de la última igualdad por la expresión $a + b - c$ que es *nula,* extrapolando así el teorema que permite dividir los dos miembros de una igualdad por un mismo número.

EJEMPLO 3.°—Un ejemplo geométrico. Sea ABC un triángulo escaleno y tracemos el círculo circunscrito. Unamos los tres vértices con el punto medio M del arco BC limitado por uno de los lados.

Se han formado así dos triángulos MBA y MCA, que son iguales por tener MA común, $MB = MC$, y los ángulos BAM y MAC iguales por abarcar arcos iguales. De la igualdad de dichos triángulos resulta la de los lados AB y AC, es decir, *el triángulo escaleno es isósceles.*



La explicación es sencilla: los dos triángulos considerados tienen, en efecto, iguales dos lados y un ángulo, pero éste se *opone* a uno de los lados, precisamente el menor, y sabido es que en este caso hay dos triángulos que tienen los mismos elementos mencionados. La extrapolación ha consistido en extender el carácter de unicidad del triángulo correspondiente a los restantes casos de igualdad a este caso ambiguo.

OTROS EJEMPLOS.—A idéntico tipo de paralogismos de extrapolación corresponden las paradojas en las que se maneja indebidamente el concepto de *límite*, o se opera con el símbolo ∞ (infinito) como si se tratara de un número. Análoga es también la conocida paradoja de «Aquiles y la tortuga», que se funda en aplicar a un crecimiento *indefinido* el carácter del crecimiento *infinito*.

Paralogismos de petición de principio.

Análogo al error de extrapolación es el defecto de petición de principio; no es que se aplique indebidamente una propiedad demostrada, pero se introduce en el razonamiento una propiedad no demostrada. Si esta propiedad por añadidura es falsa, el razonamiento puede dar lugar a conclusiones falsas.

Los razonamientos hechos anteriormente en los paralogismos gráficos y de enumeración incompleta contienen en rigor peticiones de principio al suponer la figura en una cierta disposición y no efectuar cuidadosamente la discusión de planteamiento que tanto ponderamos en el § 9.°, lo mismo para la resolución de problemas que para la demostración de teoremas.

EJEMPLO 1.°—Véase el ejemplo final del § 5.°

EJEMPLO 2.°—Conocida es la anécdota del príncipe oriental, al cual pidió el inventor del ajedrez como recompensa por su invento tantos granos de trigo como se obtuvieran poniendo uno en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, y así sucesivamente en progresión geométrica hasta agotar todas las casillas del tablero, condición que fué aceptada por el príncipe. Resuelto el problema, termina la anécdota, ponderando la magnitud de la suma que resulta y la imposibilidad de cumplir la oferta ni aun con el trigo de la Tierra entera en muchos años.

Pues bien; a esta anécdota se agregó posteriormente con singular ingenio la continuación siguiente: Apurado el príncipe por la magnitud del compromiso contraído, ante el cual sus propios contables fueron los primeros sorprendidos, hizo llamar a un oscuro matemático de sus dominios y le pidió le librara de tal agobio. Llamó éste al codicioso inventor y le propuso pagarle, no ya lo convenido, sino lo que resultara añadiendo más y más casillas, sin fin; y aceptado que fué por el inventor el trato, le hizo el cálculo siguiente:

Te debo

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = 1 + 2(1 + 2 + 4 + \ldots);$$

es decir,

$$S = 1 + 2S;$$

de donde

$$S = -1;$$

dáme, pues, un grano de trigo, y... en paz.

Diga el lector, como ejercicio, dónde está la petición de principio, o la extrapolación.

§ 4.º—Los paralogismos de razonamiento.

Errores de índole exclusivamente lógica.

Los paralogismos estudiados en los párrafos anteriores tienen, como se habrá observado, orígenes muy diversos; unos proceden de sustituir el razonamiento por inducciones apoyadas en figuras ya dibujadas, ya imaginadas (paralogismos gráficos e intuitivos); otros nacen de la previsión incompleta de las diversas posibilidades compatibles con las hipótesis (paralogismos de enumeración incompleta); otros, por fin, provienen de atribuir una excesiva *amplitud a propiedades previamente establecidas*, convirtiéndolas en premisas falsas (paralogismos de extrapolación), o a admitir implícitamente en el razonamiento propiedades también falsas (petición de principio).

Cabe, sin embargo, que, a pesar de eliminar el peligro del graficismo y de la intuición, y a pesar de apoyarnos en premisas rigurosas y bien previstas, las conclusiones no lo sean por aplicar indebidamente algunos de los principios lógicos del razonamiento. De esta clase de paralogismos vamos a ocuparnos, estudiando algunos de los tipos más frecuentes.

Imprecisión de los términos.

Condición previa de todo razonamiento matemático es la claridad y precisión de los términos. La intromisión de palabras del lenguaje vulgar en sustitución de los términos que tienen significado netamente definido puede conducir a conclusiones erróneas.

EJEMPLO.—He aquí dos proposiciones verdaderas:

Directa: *Si* $a = b$ *es siempre* $a^b = b^a$.

Contraria: *Si* $a \neq b$ *no es siempre* $a^b = b^a$ (por ej. $2^3 \neq 3^2$).

Siendo ciertas las proposiciones directa y contraria será también cierta la recíproca, en virtud del principio de contradicción; es decir, parece deducirse:

Siempre que $a^b = b^a$ *es* $a = b$,

lo cual es falso, como lo prueba la igualdad $2^4 = 4^2$.

¿A qué se debe la paradoja? A la introducción inoportuna de la palabra *siempre*.

En efecto; si ésta significa *incondicionalmente*, es decir, que la igualdad $a^b = b^a$ *es identidad*, el enunciado es ya en sí contradictorio, puesto que la hipótesis establece una condición entre *a* y *b*; y entonces el recíproco bien enunciado: «Si es *incondicionalmente* (*idénticamente*) $a^b = b^a$, se verifica $a = b$», es igualmente absurdo.

En cambio, si la palabra *siempre* del directo pretende significar: «Siempre que $a = b$, es $a^b = b^a$», entonces constituye una redundancia innecesaria, y el contrario ya no sería el escrito, sino este otro, que es falso: «Siempre que $a \neq b$, es $a^b \neq b^a$».

En los razonamientos y enunciados matemáticos conviene, pues, evitar, aun cuando las consecuencias no sean siempre tan graves, la intromisión de giros y términos de lenguaje vulgar, que carecen de significado matemático preciso, como son: *casi, en general, frecuentemente, muchos, pocos, grande, pequeño*, etc.

En cambio hay expresiones de lenguaje que tienen un sentido matemático bien determinado y que no hay inconveniente alguno en emplear, siempre y cuando se les aplique en su sentido estricto. Así, por ejemplo, los términos tan usuales «de donde», «luego», «por consiguiente», «por ende», «por tanto», etc., significan «lo que sigue es consecuencia de lo anterior». Análogamente, las frases «puesto que», «en virtud de», «por ser», etc., significan solamente que lo que precede es consecuencia de lo que sigue. Por último, los términos, «es decir», «o lo que es lo mismo», «o sea» indican que lo que precede es consecuencia de lo que sigue, y recíprocamente, es decir, la equivalencia de entrambos juicios.

Entre los términos vulgares que tienen significación lógica precisa, y que sin embargo pueden dar lugar a paralogismos en cuanto se les da otro valor que el estrictamente lógico, figuran las palabras *necesario* y *suficiente*.

Decir que una condición *A* es necesaria para que se cumpla *B* es afirmar que: *Si se verifica B se verifica A* (necesariamente). Decir que *A* es condición *suficiente* para que se cumpla *B* es afirmar que: *Si se verifica A se verifica B*. Si se olvida este significado estricto surgen paradojas.

Por ejemplo: Son ciertas las proposiciones

DIRECTA.—Si dos circunferencias coinciden tienen cuatro puntos comunes.

RECÍPROCA.—Si dos circunferencias tienen cuatro puntos comunes coinciden.

Y resulta como consecuencia lógica irrebatible:

Es condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias coincidan que tengan cuatro puntos comunes.

Pero esto parece en flagrante contradicción con lo que nos enseña la Geometría: «*La condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias coincidan es que tengan tres puntos comunes*», pues si *bastan* tres, no parecen *necesarios* cuatro.

Y es que cuando en matemáticas se habla de LA *condición necesaria y suficiente* se suele entender por tal una condición necesaria y *suficiente mínima* según se vió en la página 46 (*).

(*) Para evitar los errores y paradojas a que conducen por su falta de precisión los términos del lenguaje ordinario en las disquisiciones científicas, los matemáticos y filósofos han intentado la sustitución del lenguaje en los razonamientos de carácter lógico por un simbolismo adecuado (*ideología lógica*) que permite expresar cualquier relación lógica mediante combinación de ciertos símbolos fundamentales de propiedades bien definidas. El intento, iniciado en Leibniz (alrededor de 1700), como una vaga aspiración, culmina en Peano y su escuela, a fines del pasado siglo, con una realidad concreta. Véase, por ejemplo, *La Lógica deductiva*, de Padoa, discípulo de Peano.

Confusión entre directo y recíproco.

No es raro encontrar tratadistas que para demostrar la verdad de una proposición *P* creen suficiente deducir de ella otra verdadera *Q*. Fácil es ver la aberración que un tal procedimiento supone.

Decir que de la proposición *P* se deduce la *Q* es afirmar que

$$\text{Si es cierta P, es cierta } Q\,; \qquad [1]$$

pero esto no equivale a afirmar el recíproco

$$\text{Si es cierta } Q, \text{ } \textit{es cierta} \text{ P}, \qquad [2]$$

que es justamente en lo que se apoyan.

EJEMPLO 1.°—Tal modo de razonar nos conduciría a admitir como cierta la igualdad $-1=+1$, puesto que de ella se deduce elevando al cuadrado la igualdad cierta $1=1$.

EJEMPLO 2.°—Advertido de esta falsedad, el lector hallará sin duda donde radica el paralogismo en esta conocida demostración:

$$16-36=25-45\,;$$

es decir,

$$4^2-2\cdot 4\cdot\frac{9}{2}=5^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}\,;$$

de donde

$$4^2-2\cdot 4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot 5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2;$$

es decir,

$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2;$$

de donde

$$4=5.$$

También es muy frecuente afirmar que una conclusión Q es falsa por deducirse de una proposición falsa P. Este paralogismo, con ser de apariencia distinta, es en realidad equivalente al anterior. En efecto: de P se deduce Q; es decir,

$$\text{Si es cierta } P, \text{ es cierta } Q\,; \qquad [1]$$

pero esto no equivale a afirmar el contrario:

$$\text{Si es falso } P, \text{ es falso } Q\,. \qquad [3]$$

El paralogismo anterior consistía en confundir el directo [1] con el recíproco [2]; éste consiste en confundir el directo y el contrario [3]. Como [2] y [3] son equivalentes, los paralogismos son en el fondo idénticos.

Admisión de recíproco o de contrario.

Acontece con frecuencia que se da implícitamente por cierto el recíproco o el contrario con solo haber demostrado el directo, pudiendo llegarse así a conclusiones erróneas.

EJEMPLO 1.° — Si después de haber demostrado que *todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de sus extremos* afirmamos a continuación que *un punto está en la mediatriz por equidistar de los extremos del segmento* (o bien que *por no estar en la mediatriz dista desigualmente de sus extremos*), cometemos el paralogismo aludido sin llegar, sin embargo, a ningún resultado absurdo.

EJEMPLO 2.°—Pero si análogamente después de haber demostrado que *en todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos*, afirmamos que *con tres segmentos se puede construir un triángulo por ser uno de ellos menor que la suma de los otros dos* incurrimos en el mismo paralogismo con una conclusión evidentemente falsa. Sabido es, en efecto, que para la posibilidad de la construcción hace falta, además, que dicho segmento sea mayor que la diferencia de los otros dos (o bien que *cada uno* de los tres segmentos sea menor que la suma de los restantes).

Confusión de contrario o recíproco con el contrarrecíproco.

Para demostrar que una condición es necesaria y suficiente hemos visto (cap. I, § 6.°) que es preciso demostrar dos teoremas, contrarios entre sí o recíprocos entre sí. He aquí dos ejemplos que sometemos al análisis del lector:

EJEMPLO 1.°—Veamos los dos siguientes teoremas:

Primer teorema: «*Si dos lados de un triángulo son desiguales, la bisectriz que concurre en el mismo vértice no es mediana.*»

En efecto, según una propiedad bien conocida de la bisectriz, ésta corta al lado opuesto en un punto que le divide en partes proporcionales a los lados concurrentes, y como éstos no son iguales, aquél no es el punto medio.

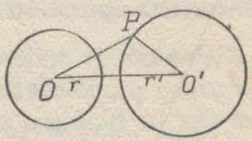
Segundo teorema: «*Si una bisectriz de un triángulo es también mediana, el triángulo tiene iguales los dos lados que concurren con aquélla.*»

En efecto, trazando la circunferencia circunscrita al triángulo, la bisectriz en cuestión tendría que pasar el punto medio del lado y del arco que subtiende; de donde resulta que es perpendicular al lado y, por tanto, eje de *simetría* del triángulo, simetría de la cual resulta la igualdad de los lados concurrentes con esta bisectriz.

El lector acaso enuncie como consecuencia de ambos teoremas la siguiente proposición cierta.

Es condición necesaria y suficiente para que la bisectriz de un triángulo sea también mediana que sean iguales los dos lados concurrentes con ella.

EJEMPLO 2.° — He aquí el otro ejemplo anunciado:



Primer teorema: «*Si la distancia entre los centros de dos circunferencias es mayor que la suma de los radios carecen de puntos comunes.*»

En efecto, si P es un punto cualquiera de la circunferencia O', se verifica $OP \gtreqless O'O - O'P$, y como es por hipótesis $OO' >$ $> r + r'$, resulta $OP > r + r' - r' = r$; luego P es exterior a la circunferencia O.

Segundo teorema: *Si dos circunferencias tienen algún punto común, la distancia entre sus centros es mayor que la suma de sus radios.*

En efecto, si las circunferencias son tangentes, OO' es igual a la suma o a la diferencia de los radios, y si son secantes y es P uno de los puntos de intersección, la distancia OO' es menor que la suma de los segmentos $OP + PO' = r + r'$, con los que forma triángulo.

El lector enunciará tal vez, como en el caso anterior, la propiedad siguiente:

Es condición necesaria y suficiente para que dos circunferencias carezcan de punto común que la distancia entre sus centros sea mayor que la suma de sus radios.

Así como la conclusión a que llegábamos en el ejemplo anterior era notoriamente cierta, esta última es palmariamente falsa, pues basta pensar en una circunferencia interior a otra, en cuyo caso no tienen punto alguno común y la distancia entre sus centros es menor que la suma de sus radios.

¿Quiere decir esto que la deducción ha sido correcta en el primer ejemplo y defectuosa en el segundo? El lector habrá notado ya la identidad de paraligismo en uno y otro caso, que ha consistido simplemente en demostrar un teorema y su contrarrecíproco, es decir, dos proposiciones completamente equivalentes. Este error es bastante frecuente.

Incorrecta aplicación de la ley de reciprocidad.

También la aplicación no cuidadosa de la *ley de reciprocidad* puede conducir a paralogismos tanto en el caso en que las hipótesis no se completan como si las tesis no se excluyen.

El problema de las posiciones de dos circunferencias a que acabamos de aludir nos suministra ejemplos de uno y otro tipo de paralogismos.

Teorema directo: Si dos circunferencias son

secantes, es $d < r + r'$.
tangentes exteriores, es $d = r + r'$.
exteriores, es $d > r + r'$.

Hemos llegado a tres conclusiones que *se excluyen* y además *se completan,* pues expresan todos los casos posibles que pueden presentarse al comparar un segmento con la suma de otros dos. ¿Podremos aplicar el principio de reciprocidad enunciando la siguiente proposición?

Teorema recíproco: Si la distancia entre los centros de dos circunferencias de radios r y r' es

$d < r + r'$, las circunferencias son secantes.
$d = r + r'$, las circunferencias son tangentes exteriores.
$d > r + r'$, las circunferencias son exteriores.

Claramente salta a la vista la falsedad de esta conclusión recordando el caso de las circunferencias interiores. Repase el lector el enunciado exacto de la ley de reciprocidad y notará inmediatamente que las dos condiciones de completarse y de excluirse las hemos aplicado entrambas conjuntamente a la tesis en vez de exigir, como se preceptúa en dicha ley, que las *hipótesis se completen* (lo que no acontece en este caso) además de excluirse las tesis.

Completemos, pues, las hipótesis del teorema directo incluyendo los casos antes olvidados.

circunferencias interiores, $d < r - r'$.
circunferencias tangentes interiores, $d = r - r'$.

Si aplicamos ahora sin más detenido examen la ley de reciprocidad, resultará el enunciado siguiente:

1.° Si $d > r + r'$, las circunferencias son exteriores.
2.° Si $d = r + r'$, las circ. son tangentes exteriores.
3.° Si $d < r + r'$, las circ. son secantes.
4.° Si $d = r - r'$, las circ. son tang. interiormente.
5.° Si $d < r - r'$, las circ. son interiores.

Y, sin embargo, puede ser $d < r + r'$ y ser las circunferencias interiores ¿A qué se debe ahora tan errónea conclusión, después de haber completado las hipótesis? Sencillamente a que las tesis que antes se excluían ahora no se excluyen, pues son perfectamente compatibles las condiciones $d < r + r'$ y $d \leqq r - r'$. Se elude la paradoja agregando

a la condición $d < r + r'$
esta otra: $d > r - r'$,
incompatible con $d \leqq r - r'$.

Es decir, los recíprocos correctamente enunciados serán:

1.º Si $d > r + r'$, las circunferencias son exteriores.
2.º Si $d = r + r'$, las circ. son tangentes exteriores.
3.º Si $d < r + r'$ y $d > r - r'$, las circ. son secantes.
4.º Si $d = r - r'$, las circ. son tang. interiores.
5.º Si $d < r - r'$, las circ. son interior una a otra.

Paralogismos compuestos.

Superfluo es decir que en un mismo razonamiento pueden presentarse varios de los paralogismos estudiados. Pongamos un ejemplo de paralogismo múltiple o compuesto:

«Todo número o es primo o es compuesto.
Los 26 números de la criba de Eratóstenes son *los números primos menores que cien.*
Los 81 números de la tabla de Pitágoras son los productos, es decir, *los números compuestos, menores que cien.*
Los números *menores* que 100 son, pues, en total $26 + 81 = 107$.»

En este breve razonamiento hay varios paralogismos que vamos a analizar. Sin duda, lo primero que verá el lector es que en la tabla de Pitágoras figuran los números primos 1, 2, 3, 5, 7, como productos de sí mismos por la unidad. Hemos cometido, pues, un primer paralogismo al admitir que *todo producto es un número compuesto*, confundiendo esta proposición con su recíproca cierta: *todo número compuesto es un producto*. Pero como, además, 2, 3, 5, 7 están repetidos, quedan en la tabla 72 números compuestos; y la paradoja subsiste ($72 + 26 = 98 < 99$).

El lector caerá aquí en la cuenta de que también se repiten los números compuestos de la tabla por su simetría, de manera que no hay más que 40 números compuestos *distintos* (basta suponer repetidos los ocho productos de la diagonal, con lo que resultarían $72 + 8$ números, y dividir por dos). Hemos cometido, pues, un nuevo paralogismo (petición de principio) al contar los 72 *números* como *números distintos*. Pero después de corregido este segundo paralogismo, la paradoja queda agravada, pues $40 + 26 = 66 < 98$, es decir, aún faltan más números.

Obsérvese entonces que efectivamente faltan en la tabla de Pitágoras los números compuestos, tales como 22 ($= 2 \times 11$), 26 ($= 2 \times 13$), etc., que siendo menores que 100, proceden de factores mayores que 10. Es decir, que es falsa la afirmación arriba establecida de que «la tabla de Pitágoras contiene los productos menores que 100», dando a entender que *todo producto menor que 100 está en la tabla*. ¿A qué se debe esta afirmación errónea? Lo mismo que antes, a la confusión con la recíproca cierta. *Todos los números de la tabla son productos menores que 100.*

Tres han sido, pues, los paralogismos empleados, y los tres en la corta frase de apariencia ingenua: «Los 81 números de la tabla de Pitágoras son los productos, es decir, los números compuestos, menores que 100.»

ADVERTENCIA:

No queremos terminar estos artículos destinados a los paralogismos sin añadir dos palabras acerca de la importancia que tienen en la formación de un buen maestro de matemáticas, así como de la prudencia suma con que deben utilizarse como arma pedagógica.

Del mismo modo que la patología ha sido el mejor acicate para el estudio de la anatomía y fisiología humanas, así también el estudio de los paralogismos, es decir, de la patología matemática, constituye el más firme estímulo y el más eficaz recurso para penetrar en el fondo del organismo de dicha ciencia. Para ello no hemos regateado espacio a este capítulo que acaso parezca excesivo a quienes no ven en tales sofismas sino meros entretenimientos brindados al lector, sin orden ni provecho, en multitud de libros de curiosidades matemáticas.

Además, juzgamos de todo punto conveniente que el maestro se adiestre en descifrar y corregir sofismas que se presentan con frecuencia *espontáneamente* en los razonamientos del escolar, inculcando en éste (en los grados de enseñanza racional, se entiende) el hábito del razonamiento cuidadoso, que es tanto como inculcarle hábitos de sana higiene mental. Ahora bien; juzgaríamos una equivocación lamentable, desde el punto de vista pedagógico, *provocar* o *proponer* estos sofismas con frecuencia, aun con el propósito de corregirlos, ya que en tal caso se correría el peligro de obtener un resultado totalmente opuesto al perseguido. Abrumad a una inteligencia en formación con multitud de sofismas y conseguiréis el mismo efecto que se obtendría suministrando en corto tiempo a un niño tantas vacunas como enfermedades posibles.

APENDICE

EL USO DE LOS INSTRUMENTOS GEOMÉTRICOS

En el § 11 hemos tratado de atenuar el exclusivismo de las construcciones clásicas, circunscritas al uso de la regla y del compás, dando una leve noticia de la existencia de otras construcciones fundadas, ya sea en el uso de uno solo de dichos instrumentos, ya sea en el uso de instrumentos nuevos.

Trataremos en este apéndice de poner más detenidamente de relieve que los tradicionales «regla y compás» no son ambos necesarios para la resolución de los problemas ordinarios ni suficientes para problemas de mayor envergadura.

Problemas resolubles con la regla.

Son aquellos que no exijan más operaciones que las siguientes: 1.ª Trazar la recta que pasa por dos puntos. 2.ª Determinar el punto de intersección de dos rectas.

Aun cuando parezca su campo tan restringido, es sabido que con estas simples operaciones, equivalentes a las de *proyectar* y *cortar*, pueden resolverse todos los problemas de la geometría proyectiva lineal: construcción de series y haces proyectivos, determinación del conjugado armónico, ... Así, por ejemplo, con el simple uso de la regla pueden hallarse las tangentes en dos puntos de una cónica definida por estos puntos y otros tres.

Si a la utilización de la regla añadimos la de *una sola* cónica (en particular, circunferencia), dibujada de una vez para todas en el plano, es decir, si introducimos como operación elemental nueva la de hallar los puntos de intersección de dicha cónica con una recta cualquiera, los problemas abordables son todos los de la geometría proyectiva cuadrática: determinación de elementos dobles, intersección de una recta con otra cónica cualquiera, trazado de tangentes desde puntos exteriores, etc. Si la cónica fundamental dada es circunferencia, pueden abordarse ya todos los problemas clásicos de la regla y del compás.

Problemas resolubles con la regla y el portasegmentos.

Si al instrumento regla añadimos sólo el instrumento portasegmentos, podemos resolver ciertos problemas de índole métrica, pero no todos.

Advertiremos, ante todo, que carece matemáticamente de sentido hablar de los problemas resolubles con un *instrumento* determinado si no se especifica qué clase de operaciones es lícito hacer con él. Lo interesante no es precisar el instrumento, sino su *función*, a tal punto que los problemas que vamos a tratar ahora no exigen propiamente dos instrumentos *físicos*, sino que basta el sencillo borde rectilíneo de un papel o cartulina doblada, *utilizado* en sus *dos funciones:* de regla y de portasegmentos.

Veamos la resolución de algunos problemas clásicos elementales por este medio:

1.—*Trazado de la paralela por un punto* A *a una recta* r.

Trácese por A una secante AM a r y prolónguese AM en $MP = AM$. Trácese por P otra secante PN y prolónguese en $NB = PN$. La recta AB es la paralela pedida. Demuéstrese (fig. 1).

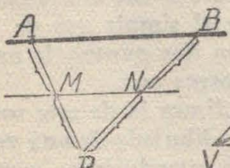


Fig. 1.

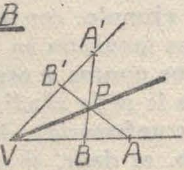


Fig. 2.

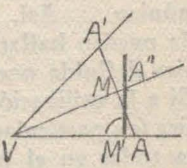


Fig. 3.

2.—*Trazado de la bisectriz de un ángulo.*

Tómese en un lado VA y VB segmentos arbitrarios; y en el otro lado $VA' = VA$, $VB' = VB$. Las rectas AB' y BA' se cortan en un punto P de la bisectriz VP. Demuéstrese (fig. 2).

3.—*Construcción de un ángulo recto.*

La recta AA' de la construcción anterior es perpendicular a la bisectriz; sea M el punto de intersección. Llevando sobre VA el segmento $VM' = VM$, y sobre VM el segmento $VA'' = VA$, resulta el ángulo recto $VM'A''$ con un lado en la recta VA dada de antemano. Demuéstrese (fig. 3).

4.—*Construcción de la perpendicular a una recta por un punto.*

Se reduce a combinar los problemas *3* y *1*.

5.—*División de un segmento en partes iguales.*

Vale la construcción clásica, que es una combinación del transporte de segmentos y del *problema 1*.

6.—*Otras construcciones.*

Levantar una perpendicular en un punto a una recta equivale a transportar el ángulo recto. Esta operación, unida al transporte de segmentos, permite efectuar el transporte de triángulos rectángulos, de ángulos, de triángulos y polígonos en general.

He aquí, pues, una operación posible con el solo uso del borde recto de un papel doblado: *Construir un polígono igual a otro dado.* Y como la construcción de cuartas proporcionales es aplicación simple del transporte y del paralelismo problema *1*), también será posible *construir un polígono semejante a otro en una razón dada.*

En cambio no es posible construir un triángulo dados los tres lados, que exige la intersección de dos circunferencias, ni aun siquiera problema tan sencillo como la construcción de un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto, si no admitimos como operación válida la ubicación de un segmento entre un punto y una recta dadas mediante el portasegmentos (operación equivalente a determinar la intersección de una recta con una circunferencia y, por tanto, al uso del compás).

Problemas resolubles con la regla de bordes paralelos.

Operaciones en que se funda:

1.ª Trazado de una recta por dos puntos (empleo de un borde).

2.ª Trazado de dos rectas paralelas de separación igual a la anchura a de la regla, una por un punto A y otra por un punto B prefijados (empleo de los dos bordes); tiene dos soluciones, una o ninguna, según que $AB \gtreqless a$.

3.ª Trazado de la paralela a una recta a la distancia a.

Se ha demostrado que con este instrumento se pueden resolver todos los problemas de la geometría de la regla y del compás (*). Veamos solamente algunas construcciones.

1.—*Duplicación de un segmento mayor que el ancho de la regla.*

Sea AB el segmento. Apoyando un borde en A y otro en B, trácese la recta r del segundo borde, y enseguida la paralela r' a distancia igual al ancho de la regla y a distinto lado de A. La intersección C de r' con AB determina $AC = 2\,AB$. Demuéstrese (fig. 1).

2.—*Trazado de la paralela por un punto.*

La construcción 1 expuesta al hablar de los problemas solubles con la regla y el portasegmentos puede repetirse aquí aplicando la construcción que acabamos de dar para la duplicación de los segmentos AM y PN.

(*) Véase "Questioni riguardante le matematiche elementare", tomo II. *Enriques*.

3.—*Bisectriz de un ángulo.*

Trácense las paralelas a los lados del ángulo situadas en los semiplanos que le definen. Su intersección da un punto P de la bisectriz. Demuéstrese (fig. 2).

4.—*Perpendicular a una recta.*

Colóquese la regla en posición oblicua de modo que los dos bordes m y n, que se dibujarán, corten a la recta dada en los puntos respectivos A y B. Colóquese ahora la regla en la segunda posición de modo que los bordes m' y n' sigan pasando por A y B. Los puntos de intersección de mn' y de $m'n$ determinan la perpendicular. Demuéstrese (figura 3).

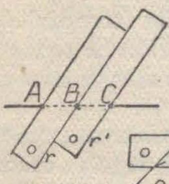


Fig. 1.

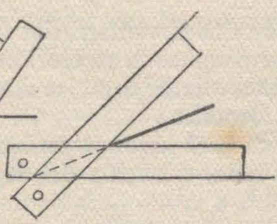


Fig. 2.

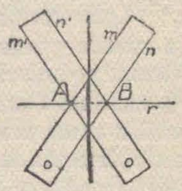


Fig. 3.

5.—*División de un segmento en partes iguales.*

La regla de bordes paralelos permite trazar un haz de paralelas equidistantes que será cortado por una recta cualquiera en una sucesión de puntos equidistantes, lo que permite construir fácilmente la sucesión auxiliar de segmentos iguales de la construcción clásica.

6.—*Uso del papel pautado.*

Trazado el haz de paralelas en papel transparente, la división del segmento en n partes se reduce a aplicar el papel de modo que se apoye una línea en un extremo y la n^a siguiente en el otro; los puntos de intersección intermedios resuelven el problema. Pero esto supone el uso de un instrumento nuevo: el papel pautado *transparente*, o bien el transporte del segmento sobre el papel entre dos de sus líneas, lo que equivale al uso del compás.

La geometría de la regla y del compás.

Las operaciones simples en que se fundan las construcciones con la regla y el compás son las siguientes:

1.ª Trazado de una recta por dos puntos (regla).
2.ª Intersección de dos rectas (regla).
3.ª Trazado de una circunferencia de centro y radio dados (compás).
4.ª Intersección de una recta con una circunferencia (regla y compás).
5.ª Intersección de dos circunferencias (compás).

La escuela griega se propuso la resolución de todos los problemas geométricos mediante combinación de estas cinco operaciones fundamentales.

Sabido es su fracaso para algunos problemas como el de la duplicación del cubo, trisección del ángulo, cuadratura del círculo.

Los problemas elementales corrientes (trazado de paralelas, perpendiculares, bisectrices, construcción de triángulos, ...) recibieron en cambio solución sencilla y bella.

¿Cuáles de estas construcciones son viables si prohibimos el uso de la regla?

Geometría del compás.

Los problemas que pueden resolverse con el uso exclusivo del compás serán aquellos en cuyas construcciones no se combinen más que las operaciones 3.ª y 5.ª No deben, pues, manejarse más que puntos y circunferencias y el concepto *recta* se sustituirá por el de *par de puntos*.

Así la operación primera: Trazado de una recta por dos puntos, se reduce aquí a este problema: 1.º Dados dos puntos averiguar con el compás si otro punto está en línea recta con ellos, o bien situar puntos en línea recta con otros dos.

La segunda operación: Intersección de dos rectas, se reduce aquí a este problema: 2.º Dados dos pares de puntos A, B y C, D, hallar con el compás el punto de intersección de las rectas que determinan.

Por último, la cuarta operación: Intersección de recta y circunferencia se reduce al problema: 3.º Dados dos puntos A y B, hallar otro alineado con ellos en una circunferencia dada.

Veamos cómo es posible reducir estos problemas a trazados e intersecciones de circunferencias. Tomaremos como fundamentales en esta exposición las dos construcciones siguientes de Mascheroni (*).

I. — *Determinación del punto medio de un arco* AB (radio r). (V. fig. 1.)

Con centros en A y B describiremos dos arcos OB' OA', sobre los que llevaremos $OB' = OA' = AB = a$. Los puntos así obtenidos, A' y B' están en una paralela a AB por O, pues en virtud de la construcción resulta OB' y OA', paralelas ambas a AB por O y, por tanto, coincidentes entre sí. Por ser A equidistante de O y A', la proyección ortogonal de A sobre OA' será el punto medio de OA', de donde

$$\overline{AB'}^2 = \overline{OB'}^2 + \overline{OA}^2 + 2 \cdot OB' \cdot \frac{1}{2} OA' ;$$

es decir,

$$AB'^2 = a^2 + r^2 + 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 2a^2 + r^2 .$$

Si con este radio AB' trazamos circunferencias de centros en A' y B', cada punto P de intersección distará de O un segmento, cuyo cuadrado es

$$OP^2 = AB'^2 - a^2 = a^2 + r^2 ;$$

(*) Ver su ingeniosísima «Geometría del compás», que tratamos de sintetizar aquí en brevísimo espacio.

es decir, OP, a y r forman triángulo rectángulo por verificar el teorema de Pitágoras, de manera que llevando un arco de radio OP con centro en A' tendremos por intersección con el arco AB el punto M de la perpendicular por O, es decir, el punto medio M buscado.

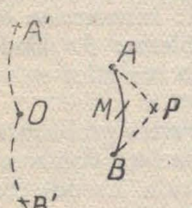


Fig. 1.

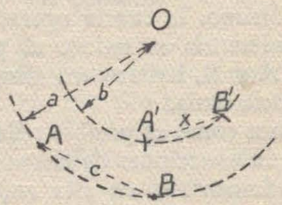


Fig. 2.

II.—*Determinación del segmento cuarto proporcional entre otros tres* a, b *y* c *dados por sus extremos* (figura 2).

Trácense dos circunferencias concéntricas de radios a y b. Llévese la cuerda c sobre la primera, y con centro en sus extremos, y en el mismo sentido de rotación, llevaremos dos arcos de radios AA' y BB' iguales que determinarán en la segunda circunferencia los extremos $A'B'$ del segmento buscado.

(La demostración es inmediata, teniendo en cuenta la igualdad de los ángulos de rotación AOB y $A'OB'$.)

No hay que decir que la misma construcción sirve para hallar terceras proporcionales.

Con estos elementos podemos resolver los problemas planteados.

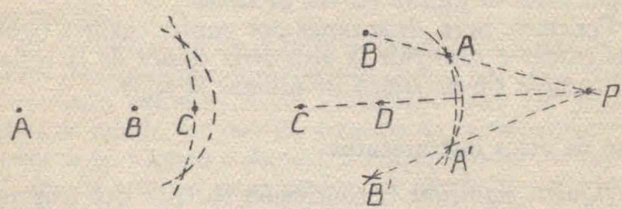
1.° *Averiguar si tres puntos ABC están en línea recta.*

Trácese un arco de centro A por C y córtese por otro de centro B. El punto C tiene que ser el punto medio del arco interceptado.

La misma idea permite resolver el problema del

Transporte de un segmento.—Hallar un punto C alineado con AB, tal que AC sea igual a un segmento dado a. Basta trazar con radio a y centro A un arco; cortarlo por otro de centro B, y hallar el punto medio del arco interceptado.

Con esta construcción podemos efectuar sumas y restas en la recta; podemos duplicar un segmento, y también hallar su mitad (por una tercera proporcional) y, por tanto, el punto medio.



2.° *Hallar el punto de intersección de dos rectas* AB y CD.

Los dos arcos de círculo con centros en C y D que pasan por A se cortan también en A', simétrico de A respecto la recta CD. Determinemos análogamente B' simétrico de B. La intersección de AB y CD es la misma de AB y $A'B'$, y para hallarla basta llevar a partir de B sobre BA un segmento BP, cuarto proporcional entre los segmentos $BB' - AA'$, BB' y BA. Si A y B están separados por la recta CD, cámbiese el signo — por +.

La construcción cae en defecto si BA es perpendicular a CD; pero en este caso basta hallar el punto medio del segmento AA' determinado por A y su simétrico respecto de CD.

3.° *Intersección de una recta* AB *con una circunferencia.*

Por último, la intersección de una recta y de una circunferencia se reduce a la de dicha circunferencia y su simétrica respecto de la recta, simétrica que se trazará hallando como antes el simétrico del centro y tomando el mismo radio. Excepto cuando la recta sea diámetro, en cuyo caso el problema es equivalente al de transporte de un segmento, ya resuelto.

Completado el cuadro de las construcciones simples que caracteriza la geometría clásica, llegamos a la conclusión siguiente:

Todos los problemas clásicos de la geometría euclídea son resolubles con el uso exclusivo del compás, si se manejan pares de puntos en vez de rectas.

Podemos, pues, *determinar por puntos* cuantas figuras nos enseña a construir la geometría clásica de la regla y del compás sin necesidad de utilizar la regla.

Uso de otros instrumentos.

¿Quiere significar la conclusión anterior que tengamos que proscribir el uso de la regla? Evidentemente no, ya que salta a la vista la complicación que adquieren las construcciones con tal restricción (*). Pues bien, del mismo modo podemos preguntar ¿por qué ceñirnos entonces al uso exclusivo de la regla y del compás?

Conocida es, por ejemplo, la simplificación que introduce en el trazado de paralelas y perpendiculares el uso de la escuadra o mejor del juego de escuadra y regla; en la construcción de figuras congruentes, el uso del papel transparente; en la construcción de figuras simétricas, la operación de *doblar* el papel; etc.

Pero no sólo en orden a la sencillez de los trazados es por lo que cabe aconsejar el uso de instrumentos nuevos,

(*) Las construcciones indicadas en la rápida ojeada anterior son susceptibles de simplificaciones notables, si se prescinde de reducirlas unas a otras. El libro de Mascheroni contiene soluciones bellísimas, que omitimos por brevedad. Alguna construcción, además, como la de la cuarta proporcional, aventaja en sencillez y exactitud a la clásica. Pero, en conjunto, las construcciones son más complicadas, como es natural.

es que hay problemas que siendo imposibles de resolver con determinados instrumentos son posibles y aun fáciles con instrumentos adecuados.

Problemas insolubles con la regla y el compás.

Entre los problemas insolubles con la regla y el compás que más preocuparon a los geómetras de la antigüedad, encerrados en el coto de sus propias restricciones, citaremos los más famosos de la *trisección del ángulo, duplicación del cubo, cuadratura del círculo, inscripción del eptágono*, etc.

La demostración de la *imposibilidad* de resolverlos sale de los límites elementales que nos hemos impuesto en esta obra; pero conviene dejar consignado una vez más en letras de molde que *con los recursos de la matemática superior se ha llegado a demostrar rigurosamente la imposibilidad de resolver estos problemas mediante un número finito de construcciones efectuadas con la regla y el compás.* De manera que hoy sólo siguen empeñados en resolverlos espíritus ilusos con tanta inmodestia como incultura.

Intentemos, sin embargo, dar una idea elemental de la dificultad.

La cuadratura del círculo.—Es un error grosero (y hasta figura impreso en libros dañinos) que la causa de la imposibilidad de la cuadratura del círculo es la inconmensurabilidad del número π, pues teniendo infinitas cifras (se dice) no es posible llegar a la solución exacta. Si tal fuera cierto, tampoco se podría cuadrar el triángulo equilátero, cuya área es también inconmensurable.

La verdadera causa es que todos los segmentos construídos con regla y compás se calculan por el teorema de Pitágoras, y vienen expresados por raíces cuadradas, mientras que π, no es expresable por raíces cuadradas.

Por tanto, no es posible la construcción de la circunferencia, mediante un *número finito* de trazados de rectas y circunferencias.

La duplicación del cubo.—No solamente la cuadratura del círculo ha preocupado hasta fines del siglo pasado, en que el asunto quedó aclarado; hay otros problemas famosos que han tenido igual suerte. Tal, por ejemplo, el problema de Delos. Consultado el oráculo sobre lo que debía hacerse para que terminase una epidemia, dijo que el Dios exigiría que le duplicasen el altar cúbico, es decir, que le construyesen otro de volumen doble.

Si el lado del primer cubo es a, el lado del segundo debe cumplir la condición $x^3 = 2a^3$, y como x viene expresado por una raíz cúbica, no se puede construir con regla y compás, por la misma causa explicada al tratar de la cuadratura del círculo.

La división de la circunferencia.—De índole análoga es el problema de la división de la circunferencia en 7 partes, o en 9, o en 11, etc., que tampoco se pueden resolver con regla y compás, por no conducir a raíces cuadradas.

Trisección del ángulo.—He aquí otro problema famoso: dado un ángulo cualquiera dividirlo en tres partes iguales.

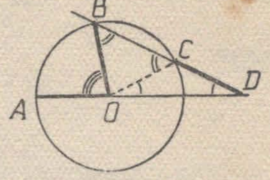
También en este problema intervienen como se demuestra en Algebra, raíces cúbicas; y, por consiguiente, no es resoluble mediante un número finito de construcciones con regla y compás, aunque sí lo es mediante otros instrumentos.

Para el ángulo de 90° se puede resolver fácilmente con el compás, ya que se reduce a la construcción del ángulo de 60°.

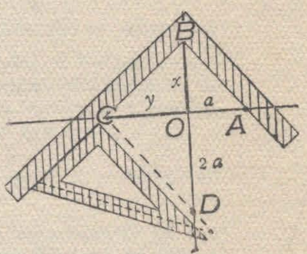
Resolución mediante instrumentos adecuados.—Veamos, a título de ejemplo, cómo es posible resolver los problemas de la trisección del ángulo y de la duplicación del cubo mediante instrumentos adecuados.

Para la trisección del ángulo basta una varilla o tira de papel, si admitimos la posibilidad de efectuar con ella la operación siguiente: ubicar un segmento entre dos líneas de modo que la recta que lo contiene pase por un punto dado.

Dibujado el ángulo AOB que se desea trisecar con vértice en el centro de una circunferencia, basta deslizar una tira de papel, en la cual se ha señalado el segmento CD igual al radio, hasta ubicarlo entre la circunferencia y la semirrecta OD, de modo que la recta CD pase por B. Se desprende fácilmente de la figura que, conseguida esta posición, el ángulo en D es la tercera parte de AOB.



El problema de la duplicación del cubo puede resolverse mediante una escuadra de albañil formada por dos reglas y una escuadra corriente, que resbala sobre la primera. Fijados en los ejes los puntos A y D, cuyas distancias al origen sean a y $2a$, se logra ubicarlas de modo que la primera pase por A, teniendo el vértice en el otro eje, y la segunda pase por D, teniendo su vértice en el otro eje. Los segmentos x e y indicados en la figura, cumplen la condición:



$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}; \text{ de donde } x^3=2a^3.$$

En cambio, la cuadratura del círculo no se puede resolver con medios análogos, por no ser expresable por raíces de ningún índice. Es un problema *trascendente*, que quiere decir: no *algebraico*.

INDICE

Páginas

OBRAS DIDACTICAS

DE LOS AUTORES

Colección intuitiva:

Elementos de Aritmética. . . . . 10 ptas.
Elementos de Geometría. . . . . 10 »
Lecciones de Aritmética y Geometría . . . . . 12 »

Colección racional:

Elementos de Geometría Racional.
Tomo I (Geometría Plana) . . . . 10 ptas.

Algebra y Trigonometría.
(Con Tablas). . . . . 13 »

EN PREPARACION

Elementos de Geometría Racional.
Tomo II (Geometría del espacio).

Metodología y Didáctica de la Matemática Elemental.
Tomo II (Didáctica).

Tablas matemáticas.