J. ESTALELLA

PROBLEMAS DE FÍSICA

Nueva

PROBLEMAS DE FÍSICA

PROBLEMAS

DE

FÍSICA

COLECCIÓN QUE CONTIENE
LOS DEL TRATADO POPULAR DE FÍSICA

DE

KLEIBER Y KARSTEN

Y LAS TABLAS EMPLEADAS EN SU RESOLUCIÓN

POR EL

Dr. JOSÉ ESTALELLA

3.ª edición, ampliada

BARCELONA
GUSTAVO GILI, EDITOR
Calle de Enrique Granados, 45
MCMXXXVII

GUINART Y PUJOLAR, impresores; Bruch, 63. – Barcelona

PROBLEMAS

2.ª ed. — 1

SECCIÓN PRIMERA

TAMAÑO Y PESO DE LOS CUERPOS

1. ¿Qué **ángulo** forman las verticales de los extremos de una **calle** recta de 3,1 Km de longitud?

En virtud de la definición del metro, 10^7 metros (10000000) es la longitud del cuadrante de meridiano (90°). El ángulo x correspondiente a 1 Km será:

$$\frac{10^4\ \mathrm{Km}}{90^\circ} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{90^\circ}{10000} = 0{,}009^\circ = 0^\circ\ 0'\ 32{,}4''$$

y el ángulo α correspondiente a 3,1 Km valdrá:

$$3{,}1\,x = 3{,}1 \times 32{,}4 = 100'' = \mathbf{1'\ 40''}.$$

Observación. Podría partirse directamente del valor de la milla marina, 1852 m, equivalente a 1 minuto de meridiano:

$$\frac{1852}{1'} = \frac{3100}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{3100}{1852} = 1{,}673' = \mathbf{1'\ 40''}.$$

2. ¿Cuántos gramos pierde de peso un **hombre** de 75 Kg, cuando se eleva **en globo** a una altura de 9 Km?

Por cada kilómetro de elevación, el peso experimenta una disminución de 0,0003. La disminución de los 75 Kg por 9 Km será:

$$75 \times 9 \times 0{,}0003 = 0{,}2025 \text{ Kg} = \mathbf{202{,}5\ g}.$$

---

3. ¿Cuál es la mínima distancia de **Oslo a Lübeck**, si las verticales de esos dos lugares forman un ángulo de $5^\circ\,54'$?

El fundamento de la resolución de este problema es idéntico al que ha servido para la del problema 1.

$$\frac{10^4 \text{ Km}}{90^\circ} = \frac{x}{5^\circ\,54'}$$

$$x = \frac{(5^\circ\,54') \times 10000}{90} = \mathbf{655{,}6\ Km.}$$

O bien:

$$\frac{1852}{1'} = \frac{x}{5^\circ\,54'};\ x = 354 \times 1852 = \mathbf{655{,}6\ Km.}$$

---

4. Una **hoja de papel** de 75 cm de ancho por 50 de largo pesa 20 g. ¿Cuál es el peso por cm²?

Superficie del papel: 75×50 cm².
Peso por cm²:

$$\frac{20}{75 \times 50} = \frac{2}{75 \times 5}\text{ g} = \mathbf{0{,}00533\ g.}$$

Si se quiere expresar en dinas, recordaremos que 1 g = 981 dinas:

$$x = 0{,}00533 \times 981 = 5{,}23 \text{ dinas}.$$

---

5. ¿Cuánto pesa:

a) una **carretada de arena?** Dato: el volumen es aproximadamente de 1 m³.

Siendo igual a 2,3 el peso específico de la arena, el peso de 1 m^3 será 2,3 toneladas, o sea **2300 Kg.**

b) un **bloque de mármol** cuyas tres dimensiones son 30 cm, 40 cm y 50 cm?

Volumen del bloque: $30 \times 40 \times 50 = 60000$ cm^3.
Peso específico del mármol: 2,7.
Peso del bloque: $60000 \times 2,7 = 162000$ g = **162 Kg.**

c) el mármol de una **mesa rectangular** de café, de 25 mm de espesor, 80 cm de longitud y 50 cm de anchura?

Volumen: $2,5 \times 80 \times 50 = 10000$ cm^3.
Peso específico: 2,7.
Peso: $2,7 \times 10000 = 27000$ g = **27 Kg.**

d) una **pared** de 5 m de longitud, 4 de alto y 50 cm de espesor?

Volumen: $5 \times 4 \times 0,5 = 10$ m^3.
Peso específico de la obra: 1,4 a 1,7.
Peso: $1,4 \times 10 =$ **14 toneladas**, a $1,7 \times 10 =$ **17 toneladas.**

e) un **cable de cobre** de 2 Km de longitud y 2 cm^2 de sección?

Volumen: $200000 \times 2 = 400000$ cm^3 = 400 dm^3.
Peso específico del cobre: 8,9.
Peso del cable: $400 \times 8,9 =$ **3560 Kg.**

f) un **alambre de cobre** de 10 millas geográficas de longitud y 2 mm^2 de sección?

1 milla geográfica = 7420 m.
Volumen del alambre $= 7420 \times 10 \times 100 \times 0,02 =$
$= 148400$ cm^3 = 148,4 dm^3.
Peso específico del cobre: 8,9.
Peso del alambre $= 148,4 \times 8,9 =$ **1321 Kg.**

g) un **techo de cobre** de 20 m de longitud, 8 m de anchura y 2 mm de espesor?

Volumen: $2000 \times 800 \times 0{,}2 = 320000$ cm³ $= 320$ dm³.
Peso específico del cobre: 8,9.
Peso del techo: $320 \times 8{,}9 =$ **2848 Kg.**

h) el **aire de una habitación** de $8 \times 5 \times 4$ m a 0° y 760 mm?

Volumen: $8 \times 5 \times 4 = 160$ m³.
Peso específico del aire a 0° y 760 mm: $e = 0{,}001293$.
Peso del aire $= 160 \times 0{,}001293 = 0{,}207$ toneladas $=$ $=$ **207 Kg.**

i) el **hidrógeno necesario para llenar un globo** de 800 m³ y el aire que el globo lleno desalojará?

Peso específico del hidrógeno: 0,00009.
Peso del hidrógeno que llena el globo: $800 \times 0{,}00009 =$ $= 0{,}072$ t $=$ **72 Kg.**
Peso específico del aire: 0,001293.
Peso de los 800 m³ de aire:

$$800 \times 0{,}001293 = 1{,}0344 \text{ t} = \mathbf{1034{,}4\ Kg.}$$

---

6. Determínese el volumen:

a) de una **llave de hierro** que pesa 72 gr.

Puesto que entre peso, volumen y peso específico existe la relación

$$e = \frac{p}{v}$$

será:

$$v = \frac{p}{e}$$

Peso específico del hierro: 7,2.

Volumen de la llave $\frac{72}{7{,}2} =$ **10 cm³.**

b) de un **martillo de hierro** que pesa 1 Kg.

$$v = \frac{1000}{7{,}2} = \mathbf{139\ cm^3.}$$

c) de 50 Kg de **petróleo.**

Peso específico del petróleo: 0,8.

$$v = \frac{p}{e} = \frac{50}{0{,}8} = \mathbf{62{,}5\ dm^3}.$$

d) de un **riel de oro** que pesa 500 g.

$$v = \frac{500}{19{,}3} = \mathbf{25{,}9\ cm^3}.$$

e) de 100 Kg de **mercurio.**

$$v = \frac{100}{13{,}6} = \mathbf{7{,}353\ dm^3}.$$

---

7. La **plaza mayor** de Nuremberg tiene aproximadamente 1 hectárea (10000 m^2). ¿Cuánto pesa la cantidad de agua que cae en ella durante una lluvia de 5 mm de altura?

Volumen: $10000 \times 0{,}005 = 50\ m^3$.
Peso: 50 toneladas = **50000 Kg.**
OBSERVACIÓN. Para resolver este problema y otros análogos podría partirse de la siguiente equivalencia:

$$1\ mm \times m^2 = 1 \text{ litro de agua} = 1 \text{ Kg de agua}.$$

---

8. En una **salina** litoral se recogen 80 m^3 de agua de mar, de peso específico 1,026. ¿Cuánto pesará el residuo salino que dejará el agua después de su evaporación completa?

A primera vista, pesando 1,026 t el metro cúbico de agua salada y 1,000 t el metro cúbico de agua pura, evaporada, quedará en la salina un residuo de 26 Kg por metro cúbico.

$$80 \times 26 = 2080 \text{ Kg}.$$

Pero la resolución anterior es sólo groseramente aproximada, por excesivamente elemental. Parte del falso supuesto de que la sal común al disolverse no aumenta el volumen del líquido disolvente.

Para una resolución más lógica y exacta, falta un dato experimental: la concentración de la solución, cuya densidad es 1,026. Esa concentración es muy aproximadamente de 4 °/₀ (y no de 2,6 °/₀ como implícitamente hemos admitido). Y tendremos:

$$x = 80 \times 40 = \mathbf{3600\ Kg.}$$

---

9. Las **Frauentürme** de Munich (de 100 m de altura) están construídas de ladrillos (peso específico 1,6). ¿Qué presión sufre 1 cm² de la superficie del ladrillo más bajo?

Volumen de la columna que gravita sobre 1 cm² de base:

$$1000 \times 0{,}01 = 10\ dm^3$$

Peso:

$$10 \times 1{,}6 = \mathbf{16\ Kg.}$$

SECCIÓN II

FUERZAS MOLECULARES

---

10. ¿Qué **alargamiento** experimentará un **alambre de cobre** de 2 m de longitud y 5 mm^2 de sección, bajo la acción de una carga de 10 Kg? ¿Cuál debiera ser la carga para alcanzar el límite de elasticidad? ¿Cuál para determinar la rotura? ¿Y cuál es la carga admisible en la práctica?

Fórmula del alargamiento:

$$a = \frac{1}{E} \times l \times \frac{P}{q}$$

Módulo de elasticidad por tracción para el alambre de cobre:

$$E = 640000.$$

Longitud $l = 2000$ mm.
Sección $q = 5$ $mm^2 = 0{,}05$ cm^2.
Carga $P = 10$ Kg.

$$a = \frac{1}{640000} \times 2000 \times \frac{10}{0{,}05} = \frac{2}{64 \times 0{,}05} = \frac{2}{3{,}2} = \mathbf{0{,}625\ mm.}$$

El límite de elasticidad por tracción del cobre en alambre es 1200 Kg por centímetro cuadrado. Siendo de 0,05 cm^2 la sección del alambre del problema, su límite de elasticidad se alcanzará con una carga de

$$0{,}05 \times 1200 = \mathbf{60\ Kg.}$$

El coeficiente de rotura por tracción del alambre de cobre es 4000 Kg por centímetro cuadrado. Para lograr la rotura del alambre del problema bastará la carga de

$$4000 \times 0{,}05 = \mathbf{200\ Kg.}$$

En la práctica, para los metales, se admite $^1/_6$ de la carga de rotura, o sea, en el caso actual:

$$\frac{200}{6} = \mathbf{33{,}3\ Kg.}$$

---

11. Resuélvase el mismo problema para un **alambre de acero** de las mismas dimensiones y con la misma carga.

Módulo de elasticidad por tracción para el acero: $E = 2150000$ (o bien: coeficiente de alargamiento

$$\alpha = \frac{1}{E} = 0{,}00000047)$$

$$a = 0{,}00000047 \times 2000 \times \frac{10}{0{,}05} = 0{,}00000047 \times 400000 =$$
$$= \mathbf{0{,}188\ mm.}$$

Límite de elasticidad por tracción del acero: 3000 Kg por centímetro cuadrado:

$$0{,}05 \times 3000 = \mathbf{150\ Kg.}$$

Carga de rotura por tracción: 5500 Kg por centímetro cuadrado:

$$0{,}05 \times 5500 = \mathbf{275\ Kg.}$$

Carga admisible en la práctica:

$$\frac{275}{6} = \mathbf{46\ Kg.}$$

---

12. ¿Cuál es la carga máxima admisible en la práctica para una **columna de fundición** de 120 cm² de sección? ¿Y qué acortamiento sufre, siendo su altura de 4 m?

Coeficiente de rotura por presión de la fundición: 7500 Kg/cm².

Para la columna dada, se producirá la rotura con una carga de $7500 \times 120 = 900000$ Kg, y siendo de $^1/_6$ la carga admisible en la práctica:

$$\frac{900000}{6} = \mathbf{150000\ Kg.}$$

El acortamiento se calcula según la misma fórmula que el alargamiento:

$$a = \frac{1}{E} \times l \times \frac{P}{q}$$

siendo $E = 1000000$ para la elasticidad por presión del hierro fundido:

$$a = \frac{1}{1000000} \times 4000 \times \frac{150000}{120} =$$

$$= \frac{1}{1000000} \times 5000000 = \mathbf{5\ mm.}$$

---

13. ¿Qué fuerza sería precisa para aplastar un **cubo de hierro fundido** (o de **acero**, o de **encina**) de 1 dm de lado?

Para el hierro fundido:

Coeficiente de rotura por presión $K = 7500$ Kg/cm².
Sección del cubo: $10 \times 10 = 100$ cm².
Fuerza necesaria para aplastarlo:

$$7500 \times 100 = 750000 \text{ Kg} = \mathbf{750\ toneladas.}$$

Para el acero:

$$K = \mathbf{5500} \text{ Kg/cm}^2$$

$$5500 \times 100 = \mathbf{550000} \text{ Kg} = \mathbf{550\ toneladas.}$$

Para la encina:

$$K = 660 \text{ Kg/cm}^2$$

$$660 \times 100 = 66000 \text{ Kg} = \mathbf{66\ toneladas.}$$

---

14. ¿A qué altura ascenderá el agua en un **tubo de vidrio** de radio $r = 0{,}05$ mm?

La columna líquida elevada tendrá por volumen $\pi r^2 h$, y siendo de agua, éste será también su peso.

Queda suspendida esta columna de una circunferencia, de longitud $2\pi r$, de la que cada mm ejerce una fuerza de $\alpha = 8$ mg, siendo α la constante capilar del agua (véase la correspondiente tabla).

Se tendrá:

$$\pi r^2 h = 2 \pi r \alpha$$

$$h = \frac{2\pi r \alpha}{\pi r^2} = \frac{2\alpha}{r} = \frac{2 \times 8}{0{,}1} = \mathbf{16\ mm.}$$

---

15. Determinar el radio máximo que puede tener el pico circular, horizontal, de una espita para que cuando mane gota a gota permita que cada **gota de agua**, antes de desprenderse, pueda tomar la forma hemisférica.

Peso de la gota: $\frac{2}{3} \pi r^3$

Longitud de la circunferencia que la sostiene: $2\pi r$.

Fuerza que ejerce esta circunferencia: $2\pi r \alpha$.

Se tendrá:

$$\frac{2}{3} \pi r^3 = 2 \pi r \alpha$$

$$r^2 = 3\alpha = 3 \times 8 = 24$$

$$r = \sqrt{24} = \mathbf{4{,}9\ mm.}$$

SECCIÓN III

DINÁMICA

---

16. ¿Qué camino recorrerá un **batallón de infantería** en una hora de marcha a la velocidad $c = 1,4$ m/seg.?

Se substituirán los valores de la velocidad y del tiempo (en segundos: 1 hora = 3600 segundos) en la fórmula del camino:

$$s = ct$$

$$s = 1,4 \times 3600 = \mathbf{5040\ metros.}$$

---

17. Marchando a la velocidad de 20 nudos, ¿qué distancia recorre un **buque** en un día? ¿y a la de 22 nudos en una hora? ¿y a la de 18 nudos en 5 horas?

1 nudo = 1 milla marina hora = 1852 m/hora = 0,51 m/seg.

Así, 20 nudos en un día corresponderán a: 20 × 24 = **480 millas marinas** = 480 × 1,852 = **889 Km**; y como 1 milla marina equivale a 1′, las 480 millas equivaldrán a 480′ = 8°.

22 nudos en una hora corresponderán a **22 millas marinas** = 22 × 1,852 = **40,7 Km** = **22′**.

18 nudos en 5 horas equivalen a 18 × 5 = **90 millas marinas** = 90 × 1,852 = **166, 7 Km** = 90′ = **1° 30′**.

---

18. ¿Qué camino recorre en 10 horas un **hombre** al paso? ¿Y un **automóvil** (80 Km/hora) en 1 segundo? ¿Y una **granada** en 10 seg.? ¿Y un **tren** rápido (80 Km/hora) en un día?

Velocidad del hombre al paso $c = 1{,}4$ m/seg.
Camino recorrido en 10 horas:

$$s = ct = 1{,}4 \times 10 \times 60 \times 60 = 50400 \text{ m} = \mathbf{50{,}4\ Km.}$$

Velocidad de la granada $c = 400$ m/seg.

$$s = ct = 400 \times 10 = 4000 \text{ m} = \mathbf{4\ Km.}$$

Velocidad del automóvil $c = 80$ Km/hora.

$$s = ct = 80 \times \frac{1}{3600} \, 0{,}022 \text{ Km} = \mathbf{22\ m.}$$

Velocidad del tren rápido $c = 80$ Km/hora.

$$s = ct = 80 \times 24 = \mathbf{1920\ Km.}$$

---

19. ¿Cuál es el espacio recorrido en un día por un **punto de la periferia de una polea** de radio igual a 80 cm y que marche a 30 revoluciones por minuto?

Camino recorrido por cada revolución:

$$2\pi r = 2 \times 3{,}14 \times 80$$

Id. por minuto:

$$2\pi rn = 2 \times 3{,}14 \times 80 \times 30$$

y por día:

$$2\pi rnt = 2 \times 3{,}14 \times 80 \times 24 \times 60 = \mathbf{217037\ m.}$$

---

20. ¿Cuál es la velocidad de un **caballo** que en 2 min. y 21 seg. da la vuelta a una pista circular de 400 m de diámetro?

La fórmula que da el valor de la velocidad de un movimiento uniforme es:

$$c = \frac{s}{t}$$

En el caso de este problema $s = 2\,\pi\,r = \pi\,d = 3{,}1416 \times \times 400 = 1257$ m.

$t = 2$ min. 21 seg. $= 120 + 21 = 141$ seg. y substituyendo:

$$c = \frac{1257}{141} = \mathbf{8{,}9\ m/seg}.$$

---

21. ¿Cuál es la velocidad:

a) de un **automovilista** que recorre 300 Km en 7 h. 30 min.?

$$c = \frac{s}{t} = \frac{300}{7{,}5} = 40 \text{ Km/hora}$$

$$c = \frac{40\,000}{60 \times 60} = \mathbf{11{,}1\ m/seg.}$$

b) de un **huracán** que en 4 h. 10 min. lleva un globo a una distancia de 440 Km?

$$c = \frac{s}{t} = \frac{440\,000}{([4 \times 60] + 10)\,60} = \mathbf{29{,}3\ m/seg.}$$

c) de una **nave** que en 50 min. recorre 10 millas marinas?

Si la velocidad se desea expresar en nudos, se tendrá que buscar las millas marinas recorridas en una hora (o sea en 60 minutos):

$$\frac{50}{10} = \frac{60}{x}; \qquad x = \frac{600}{50} = \mathbf{12\ nudos.}$$

d) de un **punto** situado a 2,15 m del eje **de un volante** que rueda a 31 revoluciones por minuto?

Trayecto recorrido en un minuto:

$$2\,\pi\, rn = 2 \times 3{,}14 \times 2{,}15 \times 31$$

y en un segundo, o sea velocidad:

$$c = \frac{2\,\pi\, rn}{60} = \frac{2 \times 3{,}14 \times 2{,}15 \times 31}{60} = \mathbf{6{,}96\ m/seg.}$$

e) de un **río** en que un cuerpo flotante salva un trayecto de 100 m en 75 seg.?

$$c = \frac{s}{t} = \frac{100}{75} = \mathbf{1{,}33\ m/seg.}$$

---

22. ¿Cuál es la velocidad angular:

a) de un **volante** que da 30 revoluciones por minuto?

Revoluciones por segundo $\frac{n}{60} = \frac{30}{60}$

Velocidad angular, o sea velocidad lineal de los puntos de radio 1:

$$\omega = 2\,\pi \frac{n}{60} = 2\,\pi \frac{30}{60} = \frac{6{,}28 \times 30}{60} = \mathbf{3{,}14\ p.\ seg.}$$

b) de un **eje** que en 40 segundos efectúa 57 revoluciones?

$$\omega = \frac{2\,\pi \cdot 57}{40} = \mathbf{9\ p.\ seg.}$$

c) de la **Tierra** en su movimiento de rotación?

Revoluciones por día 1; por segundo:

$$\frac{1}{24 \times 60 \times 60} = \frac{1}{86400}$$

Velocidad angular:

$$\omega = \frac{2\,\pi}{86400} = \mathbf{0{,}000073\ p.\ seg.}$$

---

23. Un **volante** de radio $r = 3$ m marcha a $n = 38$ revoluciones por minuto. ¿Cuál es su velocidad tangencial y cuál su velocidad angular?

$$c = \frac{n \times 2\pi r}{60} = \frac{38 \times 2 \times 3{,}1416 \times 3}{60} = \mathbf{11{,}93\ m/seg.}$$

$$\omega = \frac{c}{r} = \frac{11{,}93}{3} = \mathbf{3{,}98} \text{ radiantes.}$$

A este último resultado se llegaría distintamente partiendo del número de revoluciones n por minuto; referido al segundo, este valor sería $\frac{n}{60}$ y como cada revolución vale 2π radiantes, se tendrá:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \times 3{,}1416 \times 38}{60} = \mathbf{3{,}98.}$$

---

24. ¿Qué tiempo emplea:

a) un **tren rápido** para recorrer 120 Km, si marcha a razón de 25 m/seg.?

De la fórmula de la velocidad

$$c = \frac{s}{t}$$

se deduce la del tiempo:

$$t = \frac{s}{c}$$

y en el caso del tren rápido:

$$t = \frac{120000}{25} = 4800 \text{ seg.} = 3600 + 1200 \text{ seg.} =$$
$$= \mathbf{1\ hora\ 20\ minutos.}$$

b) un **crucero** para salvar la distancia de 120 millas marinas?

Velocidad del crucero 23 nudos, o sea 23 millas marinas hora:

$$t = \frac{120}{23} = 5{,}22 \text{ horas} = \mathbf{5\ horas\ 13\ minutos.}$$

c) una **balsa** para ser arrastrada 12 Km río abajo por una corriente de 1,5 m/seg. de velocidad?

$$\frac{12000}{1{,}5} = 8000 \text{ seg.} = 7200 + 800 \text{ seg.} =$$
$$= \mathbf{2\ horas\ 13\ minutos.}$$

---

25. ¿Qué tiempo emplea **la luz** para ir del Sol a la Tierra?

La fórmula que da el valor del tiempo para un movimiento uniforme es

$$t = \frac{s}{c}$$

El valor de s o distancia del Sol a la Tierra es de 20 millones de millas geográficas (de 7420 metros); el valor de c es de 300000 Km/seg. Se tendrá:

$$t = \frac{2 \times 10^7 \times 7{,}420}{3 \times 10^5} = \frac{1484}{3} = 494 \text{ seg.} =$$
$$= \mathbf{8\ min.\ 14\ seg.}$$

---

26. ¿Qué tiempo se emplearía para recorrer idéntico trayecto con la velocidad de un **tren rápido** ($c = 86$ Km/hora)?

La velocidad de 86 Km/hora equivale a la de $86 \times 24 =$ $= 2064$ Km/día.

$$t = \frac{s}{c} = \frac{2 \times 10^7 \times 7{,}420}{2064} = 71900 \text{ días} = \mathbf{197\ años.}$$

---

27. Un **motor de gas** lleva una polea de 40 cm de radio que gira a la velocidad de 75 revoluciones por minuto y pone en movimiento, mediante una transmi-

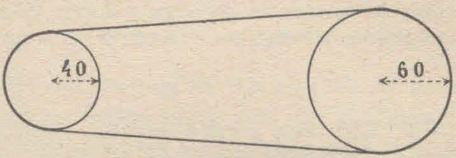


Fig. 1

sión por correa, la polea de una bomba rotatoria ($r = 60$). ¿A qué velocidad girará esta última polea?

Las revoluciones de dos poleas enlazadas por correa están en razón inversa de los radios (fig. 1):

$$40 \times 75 = 60 \times x$$

$$x = \frac{40 \times 75}{60} = \frac{300}{6} = \mathbf{50\ Rs.\ por\ min.}$$

---

28. Un meteoro o **estrella fugaz** brilla durante dos segundos en el cielo y describe en este tiempo un arco de 8°. ¿Cuál fué su velocidad media si su distancia al observador es de 57 Km?

La circunferencia de 57 Km de radio tiene una longitud de

$$2\pi r = 2\pi \times 57$$

que corresponde a 360°; a los 8° corresponderá una longitud de

$$\frac{2\pi \times 57}{360} \times 8$$

y puesto que es recorrida en 2 seg., la velocidad pedida será: $c = \dfrac{2\pi \times 57 \times 8}{2 \times 360} =$ **4 Km/seg.**

---

29. ¿Por qué el **peligro de descarrilamiento** es muy grande en las curvas?

Porque la resistencia de los soportes del carril debe contrarrestar la tendencia del tren a seguir su camino en línea recta, según la tangente a la curva en el punto considerado.

---

30. ¿Por qué una **piedra lanzada oblicuamente** hacia arriba no describe una recta?

Porque la desvía continuamente la acción de la gravedad, es decir, el mismo peso de la piedra, que actúa en dirección distinta de la del lanzamiento.

---

31. ¿Cómo escapa la **piedra de la honda** en el momento en que se suelta la cuerda?

Libre la piedra de la acción de la cuerda, que le impedía proseguir su camino en dirección rectilínea, escapa en la dirección de la tangente en el punto en que se soltó la cuerda.

---

32. ¿Qué precaución se debe tomar al **bajar de un vehículo** que esté en marcha?

Inclinar el cuerpo hacia atrás, para compensar la tendencia a seguir hacia adelante una vez puestos los pies en el suelo.

---

33. Las piedras que se dejan caer de gran altura **no siguen** exactamente **la vertical**, sino que se desvían un poco hacia el este: explíquese este hecho fundándose en la rotación de la Tierra.

Acercándose la piedra, en su caída, al centro de la Tierra, va atravesando pisos menos distantes de ese centro y en consecuencia de menor velocidad lineal de rotación. Pero la piedra conserva, aun cayendo, la velocidad lineal de rotación que poseía en la superficie terrestre, y así, por su caída, se adelanta con respecto a los puntos de su misma vertical, en el sentido de la rotación de la Tierra, es decir, hacia el este.

---

34. Un **obrero empuja** con una fuerza de 70 Kg un **vagón** de 5 toneladas sobre una vía horizontal. ¿Cuál será la aceleración del movimiento producido?

$$a = \frac{f}{m} = \frac{70}{\frac{5000}{9{,}81}} = \frac{70}{509{,}7} = 0{,}14 \text{ m} = \mathbf{14\ cm/seg^2}$$

Con unidades absolutas (véase *Observación*, pág. 22):

$$f = 70000 \times 981 \text{ dinas.}$$

$$m = 5000000 \text{ gramos}$$

$$a = \frac{70000 \times 981}{5000000} = \mathbf{14\ cm/seg^2}.$$

---

35. La expansión de la pólvora actúa con una fuerza de 30 Kg sobre una **bala** de 20 g. ¿Qué aceleración recibe ésta? ¿Qué camino recorre en $^1/_{200}$ de segundo?

Relación entre fuerza, masa y aceleración:

$$a = \frac{F}{M}$$

además, debe recordarse que el gramo-fuerza comunica al gramo-masa la aceleración de 981 cm/seg² y así, estando F expresado en gramos-fuerza y M en gramos-masa, la aceleración en cm/seg² será:

$$a = \frac{F}{M} \times 981$$

$$a = \frac{30000 \times 981}{20} = 1471500 \text{ cm/seg}^2 = \mathbf{14715\ m/seg^2}.$$

Camino recorrido en $^1/_{200}$ seg.:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} 14715 \frac{1}{200^2} = \frac{14715}{2 \times 40000} = 0,184 \text{ m} = \mathbf{18,4 \text{ cm.}}$$

Observación. Si se expresase la fuerza en dinas, la masa en gramos y la aceleración en cm/seg², sería válida sin modificación la fórmula: $a = \frac{F}{M}$

En nuestro caso la fuerza vale 30000×981 dinas. Es evidente que el cálculo sería el mismo que antes.

Siempre que en un problema de mecánica sobrevengan dudas, acúdase a las unidades absolutas.

---

36. Un **bólido** de 10 Kg atraviesa en 1 min. la atmósfera terrestre, y su velocidad primitiva, que era de 1000 m/seg., se reduce a 400 m/seg. ¿Qué resistencia media P debe haber encontrado en la atmósfera?

Pérdida de la velocidad en un minuto:

$$1000 - 400 = 600 \text{ m/min.}$$

Pérdida de la velocidad en un segundo:

$$\frac{600}{60} = 10 \text{ m/seg.}$$

Aceleración (negativa):

$$a = 10 \text{ m/seg}^2 = 1000 \text{ cm/seg}^2.$$

Valor de la fuerza retardatriz:

$$P = M a = 10000 \times 1000 = 10^7 \text{ dinas}$$

y en kilogramos-fuerza:

$$P = \frac{10^7}{981000} = \mathbf{10,2 \text{ Kg.}}$$

---

37. Un **vagón de ferrocarril** pesa 8000 Kg y marcha con una velocidad $c = 0,4$ m. Cuatro obreros tratan de acelerarlo aplicándole cada uno de ellos una fuerza de 70 Kg. ¿Cuál es la aceleración que consiguen comunicar al vagón? ¿Y cuál la velocidad que éste posee a los 10 segundos?

Aceleración:

$$a = \frac{P}{M} = \frac{70 \times 4}{8000} \times 981 = \mathbf{34{,}33\ cm/seg^2.}$$

Velocidad a los 10 segundos:

$$v = c + a\,t = 40 + 34{,}33 \times 10 = 40 + 343{,}3 = \mathbf{383{,}3\ cm.}$$

---

38. Del cordel de la derecha de un aparato como el representado en la figura 2, cuelga un peso de 401 g y del cordel de la izquierda uno de 399 g. Determínese la aceleración del movimiento ocasionado y el espacio recorrido en 10 segundos.

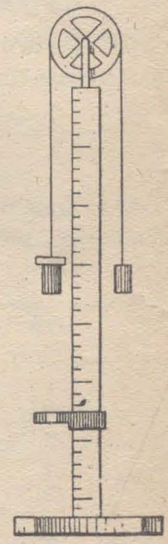


Fig. 2ª

Cálculo de la aceleración:

Fuerza motriz:

$$P = 401 - 399 = 2\ \text{g} = 2 \times 981\ \text{dinas.}$$

Masa movida:

$$M = 401 + 399 = 800\ \text{gramos.}$$

Aceleración:

$$a = \frac{P}{M} = \frac{2 \times 981}{800} = \mathbf{2{,}45\ cm.}$$

Observación. Si no se quiere emplear unidades absolutas se tendrá:

1 g imprime a 1 gr la aceleración de 981 cm.

2 g imprimirán a 800 gr la aceleración $a = \frac{2 \times 981}{800}$ y se tendrá el mismo cálculo anterior.

Cálculo de espacio recorrido:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} 2{,}45 \times 10^2 = 122{,}5 \text{ cm} = \mathbf{1{,}225 \text{ m.}}$$

---

39. Sobre un **tren** de 200 toneladas actúa una fuerza de tracción de 18 toneladas. ¿Con qué aceleración se moverá? ¿Qué camino recorrerá en 6 segundos?

Aceleración:

$$a = \frac{18 \times 981}{200} = 88 \text{ cm/seg}^2 = \mathbf{0{,}88 \text{ m/seg}^2.}$$

Camino recorrido:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} 0{,}88 \times 6^2 = \mathbf{15{,}84 \text{ m.}}$$

---

40. ¿Qué distancia recorre un cuerpo en 6 seguncos de **caída libre?**

$$s = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} 981 \times 6^2 = 17658 \text{ cm} = \mathbf{176{,}58 \text{ m.}}$$

---

41. Dispónganse en tabla los valores de las **velocidades de caída** al cabo de 1, 2, 3, 4, ... segundos.

$$v = g t$$

Tiempo seg.	Velocidades cm/seg.
1	981
2	2 × 981 = 1962
3	3 × 981 = 2943
4	4 × 981 = 3924
5	5 × 981 = 4905
6	6 × 981 = 5886
7	7 × 981 = 6867
8	8 × 981 = 7848
9	9 × 981 = 8829
10	10 × 981 = 9810

---

42. ¿Qué tiempo empleará una **piedra** en caer verticalmente de lo alto de una torre de 100 m, y cuál será la velocidad final?

Cálculo del tiempo:

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 100}{9{,}81}} = \sqrt{20{,}4} = \textbf{4,5 segundos.}$$

Cálculo de la velocidad:

$$v = \sqrt{2sg} = \textbf{44 m/seg.}$$

---

43. ¿Con qué velocidad debe ser lanzada hacia arriba una **moneda** para que llegue a rasar el techo de la habitación? (altura = 4 m).

$$v = \sqrt{2sg} = \sqrt{2 \times 4 \times 9{,}81} = \textbf{8,9 m/seg.}$$

---

44. ¿Con qué velocidad se debe lanzar hacia arriba una piedra para que alcance exactamente el alero de una **casa** de 20 m de altura?

$$v = \sqrt{2sg} = \sqrt{2 \times 20 \times 9{,}81} = \textbf{19,8 m/seg.}$$

---

45. ¿Cuánto tiempo debe caer una piedra para adquirir la velocidad de un **hombre al paso**? ¿Y cuánto para adquirir la del **sonido**?

$$v = gt \qquad t = \frac{v}{g}$$

Velocidad del hombre al paso: 1,4 m/seg.

$$t = \frac{1{,}4}{9{,}81} = 0{,}14 \text{ seg} = \textbf{1/7 seg.}$$

Velocidad del sonido: 333 m/seg.

$$t = \frac{333}{9{,}81} = \mathbf{34\ seg.}$$

---

46. Si se disparara verticalmente hacia arriba una **bala de cañón** ($c = 600$ m/seg.) ¿a qué altura ascendería de no existir las diversas causas (presión del aire, disminución de g al aumentar la altura...) que restan exactitud a las fórmulas establecidas? ¿Y a qué altura se encontraría 80 segundos después del disparo?

Cálculo de la altura máxima.

$$A = \frac{c^2}{2g} = \frac{600^2}{2 \times 9{,}81} = 18338 \text{ m} = \textbf{unos 18 Km.}$$

Cálculo de la altura a los 80 seg.:

$$s = ct - \frac{1}{2}gt^2 = 600 \times 80 - \frac{1}{2}9{,}81 \times 80^2 =$$
$$= 48000 - 31392 = 16608 \text{ m} = \textbf{unos 16 Km.}$$

$$v = c - gt = 600 - 9{,}81 \times 80 = 600 - 784{,}8 = -184{,}4.$$

Por ser esta velocidad negativa, es decir, dirigida hacia abajo (opuesta a la de salida), la bala, a los 80 seg., se hallará ya de vuelta.

Lo mismo resultaría de calcular el tiempo que durará el ascenso·

$$T = \frac{c}{g} = \frac{600}{9{,}81} = \text{unos 61 segundos}$$

valor < 80 seg.

---

47. De un **canalón** cae una gota de agua cada $^1/_4$ de segundo. ¿Por qué distancias están separadas entre sí las cuatro gotas que caen por segundo en el momento de desprenderse la última?

Trayecto recorrido por la primera:

$$s = \frac{1}{2} g \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 4{,}905 \frac{9}{16}$$

Trayecto recorrido por la segunda:

$$s = \frac{1}{2} g \left(\frac{2}{4}\right)^2 = 4{,}905 \frac{4}{16}$$

Trayecto recorrido por la tercera:

$$s = \frac{1}{2} g \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4{,}905 \frac{1}{16}$$

Trayecto recorrido por la cuarta 0.

Así, las distancias en este momento serán:

$$\frac{1}{16} 4{,}905 = 0{,}307 \text{ m.}$$

$$\left(\frac{4}{16} - \frac{1}{16}\right) 4{,}905 = \frac{3}{16} 4{,}905 = 0{,}919 \text{ m.}$$

$$\left(\frac{9}{16} - \frac{4}{16}\right) 4{,}905 = \frac{5}{16} 4{,}905 = 1{,}532 \text{ m.}$$

SECCIÓN IV

ESTÁTICA

---

48. Unos muchachos, agrupados en dos partidas, tiran de una **soga:** de un cabo de ella tiran en un sentido con fuerzas de 20, 25, 15 y 30 Kg; y del otro cabo tiran en sentido opuesto con fuerzas de 18, 23, 21 y 24 Kg. ¿Qué sucederá? ¿Podría emplearse en lugar de la soga un cordel de 35 mm^2 de sección? (Resistencia del cordel a la rotura = 5 Kg por mm^2.)

Fuerza total en un	sentido	$20 + 25 + 15 + 30 = 90$ Kg.
» » en otro	»	$18 + 23 + 21 + 24 = 86$ Kg.

Ganarán, pues, los del primer grupo.
El cordel puede resistir una tracción de 5×35 Kg $= 175$, superior a 90 Kg; luego es suficiente.

---

49. Un **vapor** navega hacia el este con una velocidad de a millas marinas por hora. Mas de pronto sopla un viento norte que le arrastra hacia el sur con una velocidad de b millas marinas por hora. ¿En qué dirección correrá el buque?

Dibujado el paralelogramo de la composición de movimientos, tendremos que el ángulo α de desviación del buque con respecto a la dirección WE (fig. 3) será por la conocida relación entre los catetos y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

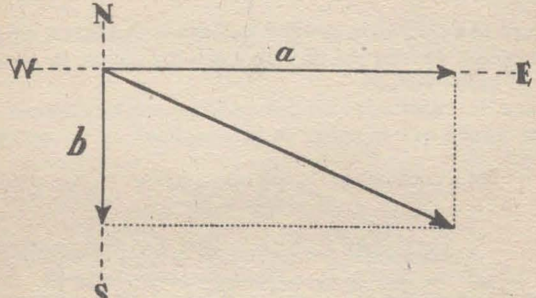


Fig. 3

Ejemplo. Si $a = 20$ y $b = 5$, tendremos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

y en consecuencia (véase la correspondiente tabla):

$$\alpha = 15^\circ$$

Si se quiere emplear el cálculo logarítmico, tendremos:

$$\log b = \log 5 = \ldots$$
$$\log a = \log 20 = \ldots$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \frac{b}{a} = \log b - \log a = \ldots$$

y buscando este logaritmo en las tablas trigonométricas de logaritmos:

$$\alpha =$$

---

50. Una **barcaza** situada en el centro de un canal está sostenida desde las orillas mediante dos cabos que forman ángulos de 30° con la dirección del agua. En cada uno de los cabos está intercalado un dinamómetro que indica una tensión de 16 Kg.

a) ¿Con qué fuerza tiende el agua a llevarse la barca?

Para la resolución gráfica bastará construir a escala la composición de fuerzas (fig. 4). La longitud de la diagonal dará el valor pedido.

Para la resolución trigonométrica, observaremos en la misma figura que *la mitad* de la diagonal es un cateto del

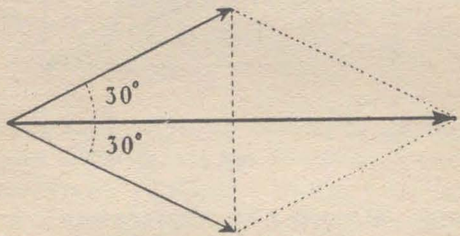


Fig. 4

triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la recta representante de la tensión de 16 Kg, y el ángulo agudo adyacente al cateto es el de 30°.

El valor de la diagonal será:

$$2 \times 16 \times \cos 30° = 2 \times 16 \times 0{,}87 = 32 \times 0{,}87 = \mathbf{27{,}8\ Kg.}$$

b) ¿Qué presión por centímetro cuadrado ejerce la corriente de agua sobre la barca, si ésta opone a la corriente una superficie de 40 dm^2?

$$\frac{27800}{40 \times 100} = \mathbf{6{,}95\ g\ por\ cm^2.}$$

---

51. Determínense, numérica y gráficamente, las resultantes de estos cinco **sistemas de fuerzas:**

$P =$ 100 Kg	20 g	120 g	300 Kg	2 Kg
$Q =$ 50 Kg	20 g	80 g	400 Kg	2 Kg
$\alpha =$ 90°	45°	60°	90°	120°

Determinación gráfica: Dibújense, a escala, las respectivas composiciones de fuerzas y mídase la longitud de las diagonales (figs. 5, 6, 7, 8 y 9).

Determinación numérica: En el **primer sistema:** $R^2 =$

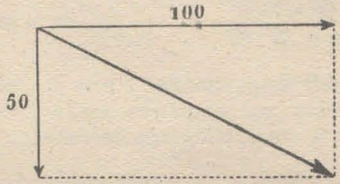


Fig. 5

$= P^2 + Q^2$ (por formar un triángulo rectángulo);

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{100^2 + 50^2} = \sqrt{12500} = \mathbf{111{,}8\ Kg.}$$

En el **segundo sistema** podremos aplicar la proporcio-

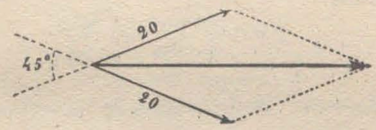


Fig. 6

nalidad entre los lados y los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{P\ (\text{o}\ Q)}{R} = \frac{\text{sen}\ \frac{1}{2}\ 45^\circ}{\text{sen}\ (180 - 45^\circ)} = \frac{\text{sen}\ 22^\circ\ 30'}{\text{sen}\ 45^\circ}$$

$$R = \frac{20\ \text{sen}\ 45^\circ}{\text{sen}\ 22^\circ\ 30'}$$

$$\log R = \log 20 + \log \text{sen}\ 45^\circ - \log \text{sen}\ 22^\circ\ 20'$$

$$\begin{aligned} \log 20 &= 1{,}30103 \\ \log \text{sen}\ 45^\circ &= \bar{1}{,}84949 \\ & \overline{1{,}15052} \\ \text{llog sen}\ 22^\circ\ 30' &= \bar{1}{,}58284 \\ \log R &= 1{,}56768 \\ R &= \mathbf{36{,}95\ g.} \end{aligned}$$

Sin logaritmos (usando las tablas de las líneas trigonométricas naturales):

$$\text{sen } 45^\circ = 0{,}7071$$
$$\text{sen } 22^\circ\, 30' = 0{,}3827$$
$$R = \frac{20 \text{ sen } 45^\circ}{\text{sen } 22^\circ\, 30'} = \frac{20 \times 0{,}7071}{0{,}3827} = \mathbf{36{,}95\ g.}$$

También podríamos atender a uno de los cuatro triángulos rectángulos iguales en que queda dividido el paralelogramo (en este caso rombo) de las fuerzas:

$$\frac{1}{2} R = P \cos 22^\circ\, 30'$$
$$R = 2\, P \cos 22^\circ\, 30' = 40 \cos 22^\circ\, 30'$$
$$\log 40 = 1{,}60206$$
$$\log \cos 22^\circ\, 30' = \bar{1}{,}96562$$
$$\log R = 1{,}56760$$
$$R = \mathbf{36{,}95\ g.}$$

o sin logaritmos:

$$\cos 22^\circ\, 30' = 0{,}9239$$
$$R = 40 \times 0{,}9239 = \mathbf{36{,}95\ g.}$$

Tercer sistema. Aplicaremos la fórmula general:

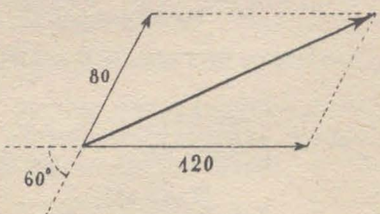


Fig. 7

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\, PQ \cos \alpha.}$$
$$P^2 = 120 \times 120 = 14400$$
$$Q^2 = 80 \times 80 = 6400$$
$$2\, PQ = 2 \times 120 \times 80 = 19200$$
$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = 0{,}5$$
$$R = \sqrt{14400 + 6400 + 19200 \times 0{,}5} = \sqrt{30400} = \mathbf{174{,}5\ g.}$$

Cuarto sistema. Se resuelve como el primero:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{90000 + 160000} = \sqrt{250000} = \mathbf{500\ Kg.}$$

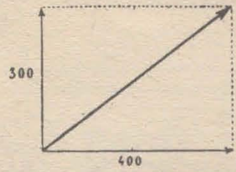


Fig. 8

Quinto sistema. El paralelogramo resulta ser un rombo formado por dos triángulos equiláteros, puesto que

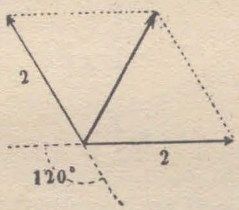


Fig. 9

dos lados son iguales, y un ángulo es igual a $\frac{1}{2}\,120^\circ = 60^\circ$
Luego $R = P = Q = \mathbf{2\ Kg.}$

---

52. Una **lámpara de arco** de 10 Kg pende de dos cables que forman con la horizontal ángulos de 30°;

a) determínese la tensión de los cables.

Como en el sistema quinto del problema anterior, se forma un triángulo equilátero (fig. 10) por existir dos ángulos de 60°; resulta:

$$P = Q = R = \mathbf{10\ Kg.}$$

b) hágase ver que esa tensión aumenta cuando el ángulo disminuye: supóngase, p. ej., $\alpha = 15^o$. (Escala: 1 Kg = 4 mm.)

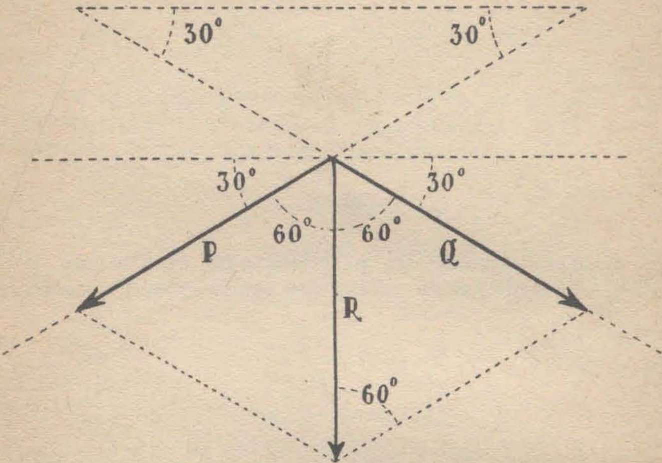


Fig. 10

El triángulo deja de ser isósceles. Considerada *R* como base, aumenta el valor de sus ángulos adyacentes (pasa, por

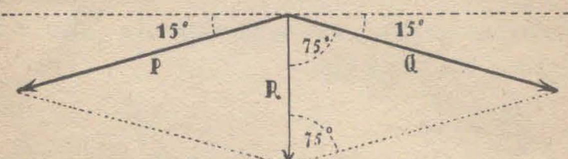


Fig. 11

ejemplo, de 60° a 75°) y disminuye el del otro vértice, que se va alejando; así crecen *P* y *Q* (fig. 11).

---

53. Un **cuadro** que pesa 400 g está colgado, por sus ángulos superiores, de dos cordeles que forman con la horizontal ángulos de 30°. ¿Cuál es la tensión que sufren los cordeles? (Escala: 10 g = 1 mm.)

Como en el problema de la lámpara de arco, se forma

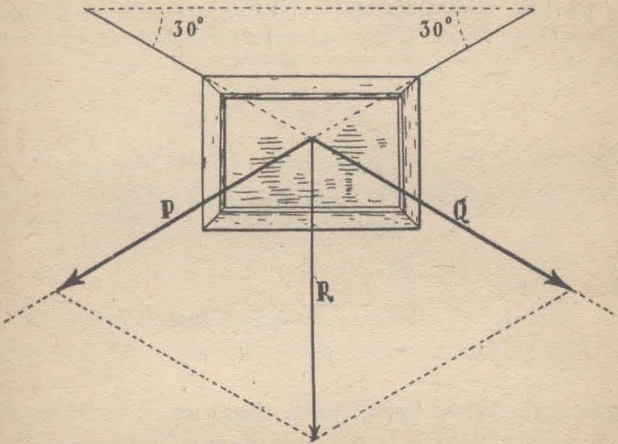


Fig. 12

también aquí un triángulo equilátero (fig. 12) por tener dos ángulos de 60°. Luego

$$P = Q = R = \mathbf{400\ g.}$$

---

54. Un **bloque de mármol** de 1 m^3 de volumen, descansa en un suelo que determina un rozamiento de 10 %, y debe ser arrastrado mediante dos cuerdas que forman (una a la derecha y otra a la izquierda) ángulos de 30° con la dirección del arrastre. ¿Qué fuerza se debe aplicar a las cuerdas? ¿Bastarán sogas de 1 cm^2 de sección? (Resistencia: 2 Kg/mm^2.)

Peso específico del mármol = 2,7.
Peso del mármol = 2700 Kg.
Rozamiento $\frac{2700}{10} = 270$ Kg.

Descomposición de esta fuerza en las direcciones de las cuerdas: véase figura 13.

Dibujando la figura a escala se medirá con el doble decímetro la longitud de la diagonal.

Para la resolución numérica, se atenderá al triángulo isósceles, mitad del paralelogramo (rombo), o al triángulo

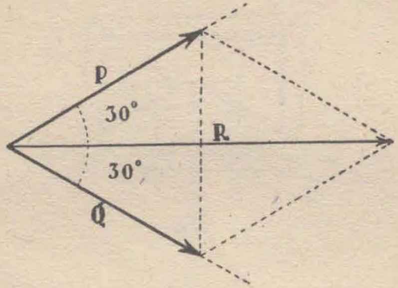


Fig. 13

rectángulo, mitad del isósceles (como en el problema 51)

$$\frac{P\ (o\ Q)}{R} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 120^\circ} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$P = Q = \frac{R \times \text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{270 \times 0{,}5}{0{,}866} = \mathbf{155{,}8\ Kg.}$$

Puede aplicarse también el cálculo logarítmico:

$$\log P = \log 270 + \log \text{sen } 30^\circ - \log \text{sen } 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \log 270 &= 2{,}43136 \\ \log \text{sen } 30^\circ &= \underline{\bar{1}{,}69897} \\ & 2{,}13033 \\ \log \text{sen } 60^\circ &= \underline{\bar{1}{,}93753} \\ \log P &= 2{,}19280 \\ P &= \mathbf{155{,}8\ Kg.} \end{aligned}$$

O atendiendo al triángulo rectángulo:

$$\frac{1}{2} R = P \cos 30^\circ; \quad P = \frac{R}{2 \cos 30^\circ} = \frac{270}{2 \cos 30^\circ} =$$

$$= \frac{270}{2 \times 0{,}866} = \frac{270}{1{,}732} = \mathbf{155{,}8\ Kg}$$

y por logaritmos:

$$
\begin{aligned}
\log P &= \log R - (\log 2 + \log \cos 30^\circ) \\
\log 2 &= 0{,}30103 \\
\log \cos 30^\circ &= \overline{1}{,}93753 \\
&\overline{0{,}23856} \\
\log 270 &= 2{,}43136 \\
\log P &= 2{,}19280 \\
P &= \mathbf{155{,}8\ Kg.}
\end{aligned}
$$

Las sogas de 1 cm^2 = 100 mm^2 de sección pueden resistir $2 \times 100 = 200$ Kg; luego serán suficientes para el arrastre del mármol ($200 > 155{,}8$).

---

55. Explíquese la descomposición de fuerzas que ocurre en la **viga horizontal** representada en la figu-

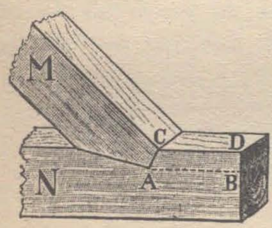


Fig. 14

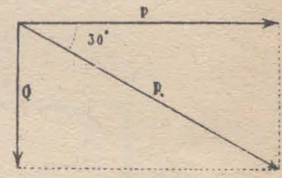


Fig. 15

ra 14, si esa viga recibe del tornapuntas una presión de 1500 Kg bajo un ángulo de 30°.

Para la resolución gráfica, se dibujará a escala la descomposición de fuerzas, y se medirán los lados del paralelogramo (fig. 15).

Para la resolución numérica, tendremos:

Empuje lateral $= P = R \cos 30^\circ$

$$P = 1500 \times 0{,}866 = \mathbf{1299\ Kg}$$

y por logaritmos: $\log P = \log 1500 + \log \cos 30^\circ$

$$\begin{aligned} \log 1500 &= 3{,}17609 \\ \log \cos 30^\circ &= \bar{1}{,}93753 \\ \hline \log P &= 3{,}11362 \\ P &= \mathbf{1299\ Kg.} \end{aligned}$$

Presión vertical $= Q = R \text{ sen } 30^\circ$

$$Q = 1500 \times 0{,}5 = \mathbf{750\ Kg}$$

y por logaritmos:

$$\begin{aligned} \log Q &= \log 1500 + \log \text{sen } 30^\circ \\ \log 1500 &= 3{,}17609 \\ \log \text{sen } 30^\circ &= \bar{1}{,}69897 \\ \hline & 2{,}87506 \\ Q &= \mathbf{750\ Kg.} \end{aligned}$$

---

56. ¿Dónde está el centro de gravedad de un **alambre** de 24 cm de longitud, una vez doblado de

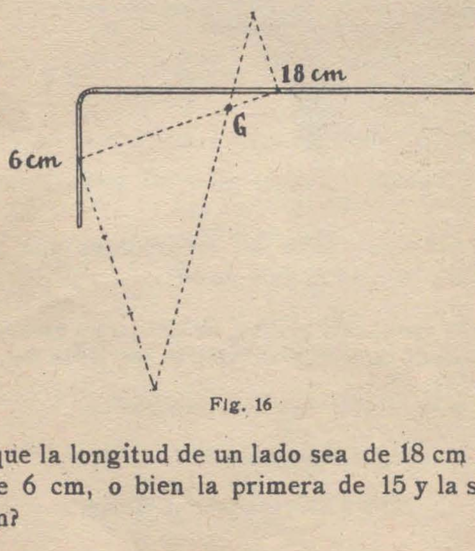


Fig. 16

modo que la longitud de un lado sea de 18 cm y la del otro de 6 cm, o bien la primera de 15 y la segunda de 9 cm?

Los centros de gravedad de las ramas de 18 cm y de 6 cm están en sus puntos medios, y en ellos se pueden considerar acumulados pesos que son entre sí como 18 a 6, ó sea como 3 : 1.

Uniendo esos dos centros de gravedad, se buscará el punto de aplicación de la resultante de las dos fuerzas 3 : 1, levantando en el centro de gravedad de la rama pequeña una normal (a la recta que une los dos centros de grave-

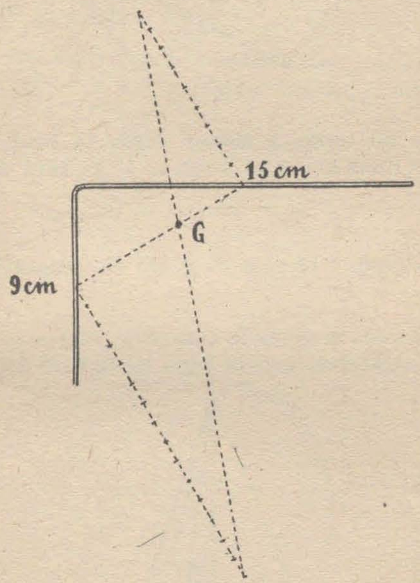


Fig. 17

dad) proporcional a la rama mayor, y en el centro de gravedad de la rama mayor una normal proporcional a la rama menor. La línea que une los extremos de las normales cortará a la de unión de los centros de gravedad en un punto que será el c. d. g. de todo el alambre (punto exterior al alambre: fig. 16).

Igual resolución para el caso de ser las ramas de 15 y 9 cm (fig. 17).

57. Hállese el c. d. g. de una **plancha cuadrada** doblada en ángulo recto por una de sus diagonales.

La plancha queda dividida en dos triángulos iguales (figura 18), cada uno de los cuales tiene el c. d. g. sobre la

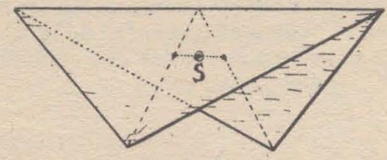


Fig. 18

mediana, a un tercio a contar desde la base. El punto medio de la línea que une estos c. d g. será el c. d. g. pedido.

---

58. ¿Dónde está el c. d. g. de un **cucurucho** cónico circular?

Considerando dividida la superficie cónica en estrechos triángulos isósceles, con la base en la base del cono y el

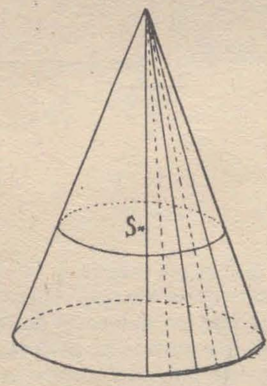


Fig. 19

vértice en el vértice, cada uno de estos triángulos (de los cuales se han dibujado dos en la figura 19) tendrá su centro de gravedad parcial en el punto que señala un tercio de la mediana, a partir de la base. Todos los centros de gravedad parciales dibujarán alrededor del cono una circunferencia, cuyo centro será el c. d. g. buscado S.

---

59. Un volante de 95 Kg lleva en el borde, a 2,20 m del eje, un contrapeso de 15 Kg. ¿Dónde se encuentra el c. d. g. de la rueda?

En el centro del volante se podrá considerar aplicado su peso de 95 Kg; y a 2,20 m de ese centro, el otro peso de

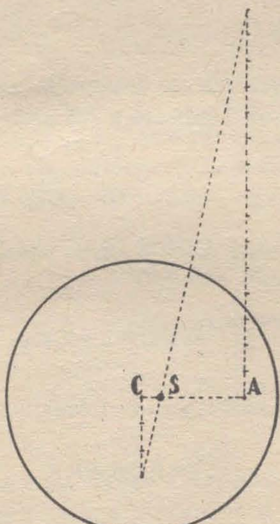


Fig. 20

15 Kg; estos dos pesos son entre sí como 19 y 3. Dividida la distancia en 22 partes, a 3 de esas partes, contadas a partir del centro, se hallará el c. d. g. buscado. También se puede aplicar la construcción de la figura 20. C es el centro del volante y A el punto que lleva el contrapeso.

SECCIÓN V

TRABAJO Y ROZAMIENTO

60. ¿Qué **potencia** se desarrolla en una grúa con la cual se eleva en 1 minuto a 7,5 metros de altura un fardo de 1200 Kg?

$$\text{Trabajo:}\quad 1200 \times 7{,}5 = 9000 \text{ Kgm.}$$

Realizándose este trabajo en un minuto, la potencia, o trabajo por segundo, será:

$$\frac{9000}{60} = 150{,}0 \text{ Kgm/seg.}$$

y expresada en caballos, siendo 1 caballo = 75 Kgm/seg.:

$$\frac{150}{75} = \mathbf{2\ caballos.}$$

Advertencia. En general, es mejor no realizar operaciones aritméticas antes de tener completamente planteado el problema. Así, en este caso:

$$\text{Trabajo} = \text{Peso} \times \text{Altura} = P \times a \text{ Kgm.}$$

$$\text{Potencia} = \frac{P \times a}{t} \text{ Kgm/seg.}$$

$$= \frac{P \times a}{t \times 75} \text{HP (o CV)}$$

Substituyendo valores:

$$\text{Potencia} = \frac{1200 \times 7{,}5}{60 \times 75} = \frac{120}{60} = \mathbf{2\ HP.}$$

---

61. ¿Un **jornalero** carga en media hora 1 m³ de tierra (peso específico = 2) en un carro de 1,3 m de altura. ¿Qué trabajo ha realizado? ¿Qué potencia ha desarrollado?

$$\text{Trabajo} = P \times l = 2000\ \text{Kg} \times 1{,}3\ \text{m} = \mathbf{2600\ Kgm.}$$

$$\text{Potencia} = \frac{P \times l}{t} = \frac{2600}{30 \times 60} = \mathbf{1{,}44\ Kgm\ por\ seg.}$$

---

62. ¿Qué potencia desarrollan las **dínamos** de una central eléctrica que alimentan en la ciudad 24000 lámparas eléctricas de 55 vatios?

$$\text{Potencia total} = 55 \times 24000 = 1320000\ \text{W}$$
$$= 1320\ \text{KW},$$

y siendo 1 CV = 736 W, la potencia expresada en caballos será:

$$\frac{1320000}{736} = \sim \mathbf{1793\ CV.}$$

---

63. En una mina deben extraerse cada 3 minutos 900 **litros de agua** de una profundidad de 150 metros. ¿Cuántos caballos debe desarrollar la máquina, si 10 % de su potencia se pierde en rozamientos?

Trabajo por segundo:

$$T = \frac{900 \times 150}{3 \times 60} = 750\ \text{Kgm por seg.}$$

o sea:

$$\frac{750}{75} = 10\ \text{CV};$$

pero perdiéndose 10 $^0/_0$ de esa potencia tendremos:

$$0{,}9\,x = 10$$

$$x = \frac{10}{0{,}9} = \mathbf{11{,}1\ CV.}$$

---

64. ¿Qué energía (capacidad para desarrollar trabajo) poseen:

a) un **vagón** de tren de viajeros de 7000 Kg de peso, cuando marcha a la velocidad normal?

La velocidad es (véase la tabla de velocidades)

$$c = 25\ \text{Km/hora} = 7\ \text{m/seg.}$$

$$\frac{1}{2} M\, v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{P}{g}\, v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{7000}{9{,}81}\, 7^2 =$$

$$= \frac{343000}{2 \times 9{,}81} = \mathbf{17482\ Kgm.}$$

Para evitar dudas respecto a unidades es mejor recurrir a las del sistema absoluto (véase la advertencia del problema 35, página 22): así se tiene:

$$M = 7000000\ \text{gr} = 7 \times 10^6\ \text{gr}$$

$$v = 700\ \text{cm/seg.} = 7 \times 10^2\ \text{cm/seg.}$$

$$\frac{1}{2} M\, v^2 = \frac{7 \times 10^6 \times 7 \times 10^2 \times 7 \times 10^2}{2}\ \text{erg} =$$

$$= \frac{7^3 \times 10^{10}}{2}\ \text{erg} = \frac{343 \times 10^{10}}{2} = 1{,}715 \times 10^{12}\ \text{erg.}$$

Para reducir esos erg a Kgm se recordará que

$$1\ \text{Kgm} = 9{,}81 \times 10^7\ \text{erg}$$

tendremos

$$1{,}715 \times 10^{12}\ \text{erg} = \frac{1{,}715}{9{,}81} \times 10^5\ \text{Kgm} = \mathbf{17482\ Kgm.}$$

b) un **río** de 5 m² de sección, si la corriente de agua va con una velocidad de 1 m por segundo?

El volumen de agua que pasará por segundo es de $5 \times 1 = 5$ m³ y su peso 5000 Kg.

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \frac{5000}{9{,}81} \times 1^2 = \mathbf{254{,}8\ Kgm}\ \text{(por segundo)}.$$

$$M = 5 \times 10^6 \text{ gr}$$
$$v = 10^2 \text{ cm/seg.}$$

Con unidades C. G. S.:

$$M = 5 \times 10^6 \text{ gr}$$
$$v = 10^2 \text{ cm/seg.}$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{5 \times 10^6 \times 10^4}{2} = 2{,}5 \times 10^{10} \text{ erg/seg.} =$$

$$= \frac{2{,}5 \times 10^{10}}{9{,}81 \times 10^7} = 0{,}2558 \times 10^3 = \mathbf{254{,}8\ Kgm/seg.}$$

c) una **persona** cuyo peso es de 75 Kg, si tropieza al andar?

$$v = 1{,}4 \text{ m/seg} = 1{,}4 \times 10^2 \text{ cm/seg.}$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \frac{75}{9{,}81} \times 1{,}4^2 = \mathbf{7{,}5\ Kgm.}$$

Con unidades C. G. S.:

$$M = 7{,}5 \times 10^4 \text{ gr}$$
$$v = 1{,}4 \times 10^2 \text{ cm/seg.}$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{7{,}5 \times 1{,}4 \times 1{,}4 \times 10^8}{2} = 7{,}35 \times 10^8 \text{ erg} =$$

$$= \frac{7{,}35 \times 10^8}{9{,}81 \times 10^7} = \mathbf{7{,}5\ Kgm.}$$

d) el **viento** de 10 m de velocidad, al actuar sobre una vela de superficie igual a 20 m²?

Volumen de aire que pasa por segundo:

$$20 \times 10 = 200 \text{ m}^3.$$

Peso de 1 m³ de aire (tabla de pesos específicos): 1,293 Kg.

Peso de los 200 m³ de aire:

$$1{,}293 \times 200 = 258{,}6 = \sim 260 \text{ Kg.}$$

$$\frac{1}{2} M\, v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{260}{9{,}81} \times 10^2 = \mathbf{1325\ Kgm.}$$

Con unidades absolutas:

$$M = 2{,}60 \times 10^5 \text{ gr}$$

$$v = 10^3 \text{ cm/seg.}$$

$$\frac{1}{2} M\, v^2 = \frac{2{,}60 \times 10^5 \times 10^6}{2} = 1{,}30 \times 10^{11} \text{ erg} =$$

$$= \frac{1{,}30 \times 10^{11}}{9{,}81 \times 10^7} = 0{,}1325 \times 10^4 = \mathbf{1325\ Kgm.}$$

---

65. La garganta de una **polea** de 5 cm de radio, y de momento de inercia $I = 200$, lleva enrollado un hilo de cuyo extremo pende un peso P de 20 g. ¿Cuál es la aceleración del movimiento de caída de este peso?

$$a = \frac{f}{m}$$

$$f = 20 \times 981 \text{ dinas}$$

$$m = P + \frac{I}{\rho^2} = 20 + \frac{200}{5^2} = 28 \text{ g}$$

$$a = \frac{20 \times 981}{28} = \mathbf{700\ cm/seg^2.}$$

---

66. ¿Qué trabajo se consumirá:

a) para conseguir, mediante los frenos, que la velocidad de un **vagón** de 7000 Kg pase de 7 m por segundo a 2 m por segundo?

$$\frac{1}{2} M\, V^2 - \frac{1}{2} M\, v^2 = \frac{1}{2} M (V^2 - v^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{7000}{9{,}81} (7 \times 7 - 2 \times 2) = \mathbf{16055\ Kgm}$$

o con unidades absolutas:

$$\frac{1}{2} 7 \times 10^6 (700^2 - 200^2) = 1{,}575 \times 10^{12} \text{ erg} =$$
$$= \frac{1{,}575 \times 10^{12}}{9{,}81 \times 10^7} \text{ Kgm} = \mathbf{16055\ Kgm}.$$

b) en la caída de 5000 Kg de **agua de lluvia**, la cual, si cayera en el vacío, llegaría teóricamente al suelo con una velocidad de 141 m por segundo y en cambio cayendo en el seno del aire llega sólo con la de 1 m por segundo?

$$\frac{1}{2} M(V^2 - v^2) = \frac{1}{2} \frac{5000}{9{,}81} (141^2 - 1^2) = \sim \mathbf{5000000\ Kgm}$$

o con unidades absolutas:

$$\frac{1}{2} M(V^2 - v^2) = \frac{1}{2} 5 \times 10^6 (14100^2 - 100^2) =$$
$$= 2{,}5 \times 10^6 \times 1{,}988 \times 10^8 = 4{,}97 \times 10^{14} \text{ erg} =$$
$$= \frac{4{,}97 \times 10^{14}}{9{,}81 \times 10^7} \text{ Kgm} = \sim \mathbf{5000000\ Kgm.}$$

---

67. ¿Qué trabajo desarrolla el **viento sobre la vela** en el caso del problema 64 *d*, cuando la nave corre con una velocidad de 6 m por segundo en el sentido del viento?

Velocidad de la nave con respecto al viento:

$$v = 10 - 6 = 4 \text{ m/seg.}$$
$$\frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \frac{260}{9{,}81} \times 4^2 = \mathbf{212\ Kgm}$$

o con unidades absolutas:

$$\frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} 260000 \times 400^2 = 2{,}08 \times 10^{10} \text{ erg} =$$
$$= \frac{2{,}08 \times 10^{10}}{9{,}81 \times 10^7} \text{ Kgm} = \mathbf{212\ Kgm.}$$

---

68. Determínese el **coeficiente de rozamiento** en los siguientes casos:

a) un caballo arrastra una **carreta** que pesa 1300 Kg, y un dinamómetro situado entre la carreta y el caballo indica 26 Kg.

De la fórmula

$$\underset{\text{rozamiento}}{R} = \underset{\text{coeficiente}}{f} \times \underset{\text{presión normal}}{N}.$$

se deduce:

$$f = \frac{R}{N}$$

y en el caso del problema:

$$f = \frac{26}{1300} = 0{,}02 = \mathbf{2}\ {}^0/_0.$$

b) para arrastrar sobre una mesa horizontal un **objeto** que pesa 1 Kg ha sido preciso un esfuerzo de 220 g.

$$f = \frac{R}{N} = \frac{220}{1000} = 0{,}22 = \mathbf{22}\ {}^0/_0.$$

---

69. ¿Qué **fuerza** es necesaria:

a) para arrancar un **coche de tranvía** de 2000 Kg (en el que viajan 30 personas de 75 Kg) sobre los carriles ($f = 0{,}01$)?

$$R = f \times N = 0{,}01\,(2000 + 30 \times 75) = 0{,}01 \times 4250 = \mathbf{42{,}5\ Kg.}$$

b) para el arrastre de un **vagón de ferrocarril** de 4 toneladas ($f = 0{,}01$)?

$$R = 0{,}01 \times 4000 = \mathbf{40\ Kg.}$$

---

70. ¿Cuánto vale el rozamiento **en los cojinetes** de un árbol horizontal de 2 cm de radio, que debe sostener un peso de 100 Kg, si el coeficiente f_1 es de 0,03?

Mídese el rozamiento en los ejes por el momento de rotación necesario para hacerlos girar, igual al producto de la fuerza por la distancia al eje. El momento de rotación M vale:

$$M = f_1 \times N \times R$$

siendo N la presión normal y R el radio del árbol. En el caso actual tendremos:

$M = 0{,}03 \times 100 \times 0{,}02 = 0{,}06$ Kg-m = **60 gramos metro.**

Este momento de rotación se puede aplicar en forma de 60 gr a 1 m, ó 120 gr a medio metro, ó 600 gr a 1 dm, etc.

---

71. Explíquese por qué es tan pequeño el rozamiento de un eje de acero terminado en punta, apoyada verticalmente sobre un **plano de ágata.**

El coeficiente de rozamiento f del acero pulido sobre el ágata pulimentada es pequeñísimo. Siendo además pequeñísimo el radio R de la punta, el momento de rotación:

$$M = \frac{1}{2} f \times N \times R$$

será extraordinariamente pequeño.

---

72. Por aplicación de un **freno de cinta** a una polea de transmisión, de 2 m de radio, que daba $n = 50$ revoluciones por minuto, se han obtenido los siguientes datos: indicación del dinamómetro, 110 Kg; carga del platillo, 10 Kg. ¿Cuántos caballos útiles desarrolla el motor? (fig. 21).

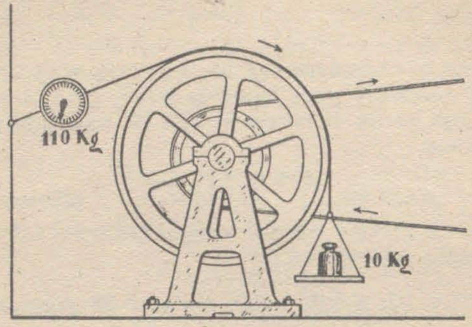


Fig. 21

$$N_u = \frac{2\pi R \times n \times Q}{60 \times 75} = \frac{6{,}28}{60 \times 75} R \times n \times Q =$$
$$= 0{,}0014 \times R \times n \times Q = 0{,}0014 \times 2 \times 50 \times (110 - 10) =$$
$$= 0{,}0014 \times 10000 = \mathbf{14\ CV.}$$

---

73. Resolver el mismo **problema anterior** cuando el número de revoluciones es de 90 por minuto, el radio de la polea 1,2 m, la indicación del dinamómetro 80 Kg y la carga del platillo 5 Kg.

$$N_u = 0{,}0014 \times R \times n \times Q$$
$$N_u = 0{,}0014 \times 1{,}2 \times 90 \times 75 = \mathbf{11{,}3\ CV.}$$

---

74. ¿Por qué las **locomotoras** destinadas a los trenes de mercancías son las más pesadas?

El arrastre del tren es producido por el rozamiento de los carriles con las ruedas motoras. Pero el rozamiento R es directamente proporcional a la presión normal

$$R = f \times N$$

y para aumentar el valor de R, para que pueda determinar el arrastre de un pesado tren de mercancías, hay que aumentar N, es decir, el peso de la locomotora.

---

75. ¿Por qué en las regiones heladas se emplean **trineos**, a pesar de ser la resistencia al resbalamiento mayor que la opuesta a la rodadura?

La estricta resistencia a la rodadura sólo existe en un disco que gira sobre una superficie, sin carga alguna sobre su eje. Desde el momento que el eje del disco está sometido a una carga, y éste es el caso de todas las ruedas de carruajes, a la resistencia a la rodadura sobre el suelo se suma la resistencia al rozamiento del eje bajo la carga de sus cojinetes. Para disminuir ese rozamiento sobre el eje, se emplea la lubricación con aceites, sebos, etc. La rodadura se verifica si la resistencia al rozamiento sobre el suelo es mayor que la resistencia al rozamiento sobre el eje. Si, a pesar de los lubricantes, la resistencia al rozamiento del eje es mayor que la resistencia al rozamiento sobre el suelo, las ruedas patinan. En el caso de marcha sobre el hielo ocurre siempre así, y por esto conviene substituir las ruedas por patines.

SECCIÓN VI

MÁQUINAS SIMPLES

---

76. La tabla AB de una **mesa** tiene 1,20 m de longitud. La distancia entre los pies es de 90 cm. El peso del conjunto es de 14 Kg. ¿Qué fuerza se debe aplicar en B para levantar la mesa?

El c. d. g. de la mesa distará horizontalmente $\frac{1}{2}90 =$ $= 45$ cm del punto a cuyo alrededor la mesa gira al ser levantada por B. Y este punto B dista del mismo eje de giro $\frac{1}{2}90 + \frac{1}{2}120 = 45 + 60 = 105$ cm.

Tendremos, por la ley de la palanca:

$$14 \times 45 = x \times 105$$

$$x = \frac{14 \times 45}{105} = \mathbf{6\ Kg.}$$

---

77. Una fuerza horizontal aplicada al respaldo de una **silla** la inclina. ¿Qué clase de palanca entra en juego y en qué puntos están aplicadas las fuerzas obrantes?

Fórmase una palanca angular de dos brazos: uno del suelo al respaldo, que lleva aplicada la fuerza horizontal que inclina la silla; otro del suelo al centro de gravedad de la silla con una fuerza vertical igual al peso de la silla, que tiende a volverla a su posición normal.

---

78. Un **coche de tranvía** pesa 1,4 toneladas y tiene una longitud $AB = 5$ m. La distancia entre los ejes de los dos pares de ruedas es $A'B' = 1,6$ m. ¿Podrán levantar el coche dos hombres aplicando su fuerza al punto B si cada uno es capaz de efectuar un esfuerzo de 175 Kg?

Esfuerzo total posible: $2 \times 175 = 350$ Kg.

Distancia del c. d. g. del tranvía al eje de giro: $\frac{1}{2}\,1,6 = 0,8$ m.

Distancia del esfuerzo al mismo eje: $\frac{1}{2}\,1,6 + \frac{1}{2}\,5 = 0,8 + 2,5 = 3,3$ m.

Aplicación de la ley de la palanca:

$$esfuerzo \times 3,3 = 1\,400 \times 0,8$$

$$esfuerzo = \frac{1\,400 \times 0,8}{33} = 339 \text{ Kg} < 350 \text{ Kg}.$$

Luego **sí**: es posible.

---

79. Por medio de una barra de 3 m de longitud, llevan **dos obreros** una carga de 100 Kg suspendida a 1,8 m del obrero de delante. ¿Cuál es la carga correspondiente a cada obrero?

Llamando esas cargas x e y y F la carga total, tendremos:

$$x + y = F$$

y siendo de a y b las distancias a x y a y:

$$x\,a = y\,b$$

de donde

$$y = \frac{a\,x}{b}$$

y substituyendo este valor en la primera igualdad:

$$x + \frac{a\,x}{b} = F$$

$$b\,x + a\,x = b\,F$$

$$(a + b)\,x = b\,F$$

$$x = \frac{b}{a + b}\,F$$

y por otra parte

$$y = F - x$$

o bien

$$y = \frac{a}{a + b}\,F.$$

Aplicando los datos del problema:

$$F = 100 \text{ Kg}$$

$$a = 1{,}8 \text{ m}$$

$$b = 3 - 1{,}8 = 1{,}2 \text{ m}$$

$$a + b = 3 \text{ m}$$

$$x = \frac{1{,}2}{3} \times 100 = 0{,}4 \times 100 = \mathbf{40\ Kg}$$

$$y = \frac{1{,}8}{3} \times 100 = 0{,}6 \times 100 = \mathbf{60\ Kg}$$

o bien

$$y = 100 - x = 100 - 40 = 60 \text{ Kg}.$$

---

80. Un **árbol** *A B* de 2 m de longitud lleva dos poleas *M* y *N* que pesan respectivamente 120 y 160 Kg y están situadas a las distancias: *A M* = 60 cm; *B N* = = 90 cm. ¿Qué presión ejercen esas poleas sobre los apoyos del árbol?

Puede resolverse este problema aplicando dos veces las fórmulas del problema anterior: una para la polea M y otra para la polea N y sumando los valores obtenidos para las x y para las y.

Polea M:

$$F = 120 \text{ Kg}$$
$$a = 0{,}6 \text{ m}$$
$$a + b = 2 \text{ m}$$
$$b = 2 - 0{,}6 = 1{,}4 \text{ m}$$
$$x_1 = \frac{b}{a+b} F = \frac{1{,}4}{2} 120 = 84 \text{ Kg}$$
$$y_1 = 120 - 84 = 36 \text{ Kg.}$$

Polea N:

$$F = 160 \text{ Kg}$$
$$b = 0{,}9 \text{ m}$$
$$a + b = 2 \text{ m.}$$
$$a = 2 - 0{,}9 = 1{,}1 \text{ m}$$
$$x_2 = \frac{b}{a+b} F = \frac{0{,}9}{2} 160 = 72 \text{ Kg}$$
$$y_2 = 160 - 72 = 88 \text{ Kg}$$
$$x = x_1 + x_2 = 84 + 72 = \mathbf{156\ Kg}$$
$$y = y_1 + y_2 = 36 + 88 = \mathbf{124\ Kg.}$$

También se puede calcular x e y suponiendo que se eleva el árbol por A, girando alrededor de B; el momento de x será igual a la suma de momentos de M y N con respecto a B:

$$x \times l = M(l - a) + Nb$$

y siendo

$$l = 2 \text{ m}$$
$$a = 0{,}6 \text{ m}$$
$$b = 0{,}9 \text{ m}$$
$$M = 120 \text{ Kg}$$
$$N = 160 \text{ Kg}$$

tendremos:

$$2x = 120\,(2 - 0{,}6) + 160 \times 0{,}9 = 168 + 144$$

$$x = \frac{312}{2} = \mathbf{156\ Kg}$$

y de modo análogo:

$$y \times l = Ma + N\,(l - b)$$

$$2y = 120 \times 0{,}6 + 160\,(2 - 0{,}9) = 72 + 176$$

$$y = \frac{248}{2} = \mathbf{124\ Kg.}$$

---

81. Una **viga** AB de 10 m de longitud y 16 × 24 cm de sección (peso específico = 0,5) descansa por sus extremos sobre otras dos transversales, y está cargada, a 3 m de distancia del punto A, por un carro de 600 Kg de peso, y a 4 m de distancia de B por un aparato elevador de 0,4 toneladas de peso. Determínese la presión sobre los apoyos en los puntos A y B.

Volumen de la viga:

$$v = 100 \times 1{,}6 \times 2{,}4 = 384\ \text{dm}^3.$$

Peso de la viga:

$$p = v \times e = 384 \times 0{,}5 = 192\ \text{Kg}.$$

Distancias al apoyo A:

del c. d. g. de la viga: $\frac{1}{2}\,l = \frac{1}{2}\,10 = 5$ m
del carro de 600 Kg . . . . 3 m
del elevador de 0,4 toneladas: $10 - 4 = 6$ m.

Si se levantase la viga por B habría que hacer un esfuerzo x tal que:

$$x \times 10 = 192 \times 5 + 600 \times 3 + 400 \times 6 =$$
$$= 960 + 1800 + 2400 = 5160$$
$$x = \mathbf{516\ Kg.}$$

La presión sobre A podría deducirse así:

$$y = 192 + 600 + 400 - x = 1192 - 516 = \mathbf{676\ Kg}$$

o calcularse directamente.

Distancias al apoyo B:

$$\text{del c. d. g. de la viga} \ldots \frac{1}{2}\,10 = 5 \text{ m}$$
$$\text{del carro de 600 Kg: } 10 - 3 = 7 \text{ m}$$
$$\text{del elevador de 0,4 toneladas: } = 4 \text{ m}$$

$$y \times 10 = 192 \times 5 + 600 \times 7 + 406 \times 4 =$$
$$= 960 + 4200 + 1600 = 6760$$
$$y = \mathbf{676\ Kg.}$$

---

82. Un **volante** de radio $R = 1{,}5$ m y peso $P = 100$ Kg se mueve lentamente por la acción de un peso $Q = \frac{1}{2}$ Kg colgado de su periferia. Determínese el momento del rozamiento del eje y el coeficiente de rozamiento del mismo, siendo su radio de 3 cm.

El momento de rotación de Q con radio R, puesto que pone en lento movimiento al volante, equilibra al momento de rotación del rozamiento de su eje:

$$M = R \times Q = \frac{1}{2} \times 1{,}5 = 0{,}75 \text{ Kg} \cdot \text{m}.$$
$$M = f_1 \times r \times N = f_1 \times 0{,}03 \times 100 = f_1 \times 3$$

luego:

$$3 f_1 = 0{,}75$$
$$f_1 = \frac{0{,}75}{3} = \mathbf{0{,}25.}$$

---

83. Dibújese un **motón** de 6 poleas.

Véase la figura 22.

a) ¿Qué fuerza se necesitará para elevar por medio de él un bloque de mármol de $\frac{1}{10}$ m³ de volumen?

Peso del mármol: $Q = v \times e = \frac{1}{10} \times 2{,}7 = 0{,}27$ toneladas = 270 Kg.

Reducción del motón: siendo de 6 poleas,

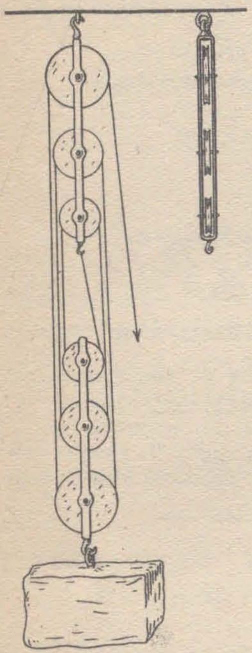


Fig. 22

$$P = \frac{Q}{6} = \frac{270}{6} = \mathbf{45\ Kg.}$$

b) ¿Cuántos obreros se necesitarán si cada uno puede ejercer un esfuerzo de 30 Kg?

$n = \frac{P}{30} = \frac{45}{30} = 1{,}5$, pero no cabiendo fracción, tratándose de obreros,

$$n = \mathbf{2}.$$

c) ¿Podrá utilizarse una cuerda de 50 mm² de sección cuya resistencia sea de 1 Kg por mm²?

Resistencia de la cuerda:

$$50 \times 1 = 50 \text{ Kg}$$

valor, en efecto, superior a 45 Kg, por lo que teóricamente es posible su empleo, pero en la práctica no hay suficiente margen de seguridad.

d) A cada tirón (que dura 10 segundos) cobran los obreros 84 cm de cuerda. ¿Cuánto sube la carga?

$$\frac{84}{6} = \mathbf{14\ cm.}$$

e) ¿Qué tiempo emplearán para subirla a una altura de 7 m?

Puesto que cada 10 segundos la suben 14 cm, para subirla 7 m emplearán los x segundos que cumplan esta proporción:

$$\frac{x}{700}=\frac{10}{14}$$

$$x=\frac{7\,000}{14}=500 \text{ seg.} = \sim \mathbf{8\ min.}$$

---

84. ¿Qué carga podrá elevar un **montacargas**

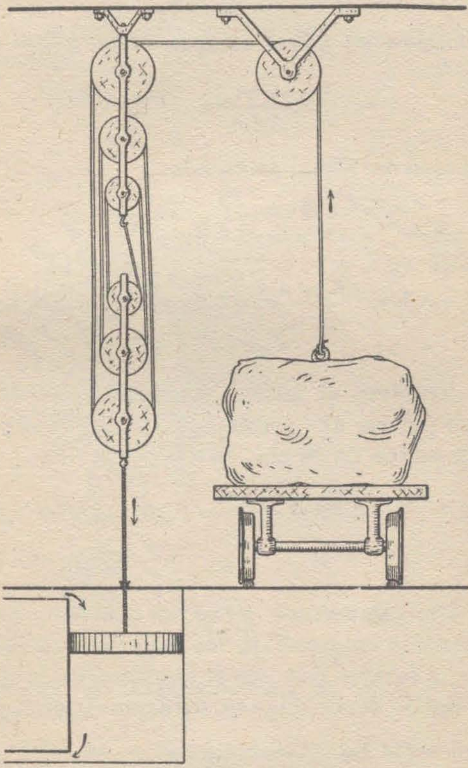


Fig. 23

hidráulico (fig. 23) de seis poleas, si el agua, a la presión de 4 atmósferas, obra sobre una superficie de pistón de 40 cm de diámetro?

Sección s del pistón:

$$s = \frac{\pi a^2}{4}$$

siendo q la presión por unidad de superficie, la presión total Q es:

$$Q = s q = \frac{\pi d^2 q}{4}$$

y si el número de poleas es n, la carga P que se podrá elevar será:

$$P = \frac{Q}{n} = \frac{\pi d^2 q}{4 n} = 0{,}7854 \frac{d^2 q}{n}$$

En el caso del actual problema,

$$d = 40 \text{ cm}$$
$$q = 4 \text{ atm} = 4 \text{ Kg por cm}^2$$
$$n = 6$$
$$P = 0{,}7854 \frac{40^2 \times 4}{6} = 0{,}7854 \times 1067 = \mathbf{838\ Kg.}$$

---

85. Resolver el **mismo problema** para un motón de cuatro poleas, una presión de 8 atmósferas y un diámetro de pistón de 50 cm.

$$P = 0{,}7854 \frac{d^2 q}{n} = 0{,}7854 \frac{50^2 \times 8}{4} = 0{,}7854 \times 5000 = \mathbf{3927\ Kg.}$$

---

86. Un **cabrestante** tiene un cilindro de radio $r = 10$ cm y la longitud de los espeques es $R = 1$ m. ¿Qué carga podrán izar con él dos obreros, si cada uno de ellos puede desarrollar un esfuerzo de 45 Kg?

La reducción del cabrestante es:

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R}$$

de donde

$$Q = \frac{PR}{r}$$

y substituyendo valores:

$$Q = \frac{2 \times 45 \times 100}{10} = \mathbf{900\ Kg.}$$

---

87. ¿Qué reducción posee el **aparato** representado en la figura 24?

$$\frac{P}{L} = \frac{r_1\ r_2}{R_1\ R_2}$$

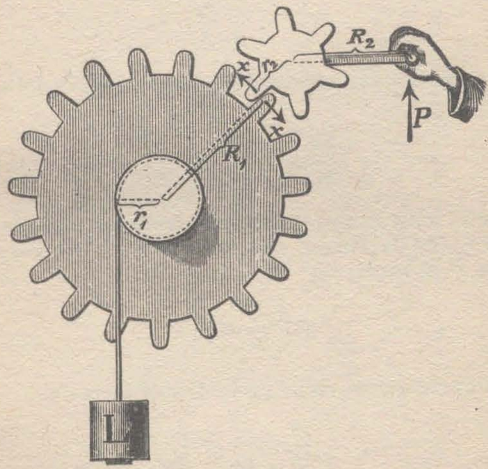


Fig. 24

y midiendo, con un doble decímetro, R_1, R_2, r_1 y r_2, y substituyendo valores:

$$\frac{P}{L} = \frac{5 \times 6}{18 \times 15} = \frac{30}{270} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$$

---

88. ¿A qué circunstancia se debe atender al estudiar un **engranaje**?

Mejor que medir los radios es contar los dientes de las piezas que engranan, substituir la razón de los radios por la de las circunferencias, y tomar por longitudes de las circunferencias los respectivos números de dientes.

---

89. Demostrar que si el **número de dientes** del piñón es n_2 y el número de dientes de la rueda es n_1 en el aparato de la figura 24, tendremos: $P = \frac{r_1}{n_1} \times \frac{n_2}{R_2} L.$

En la fórmula:

$$\frac{P}{L} = \frac{r_1\, r_2}{R_1\, R_2}$$

se puede multiplicar numerador y denominador del segundo miembro por 2π:

$$\frac{P}{L} = \frac{r_1 \times 2\pi\, r_2}{2\pi\, R_1 \times R_2}$$

pero $2\pi\, r_2$ y $2\pi\, R_1$ son respectivamente las circunferencias del piñón y de la rueda, proporcionales a sus respectivos números de dientes; así

$$\frac{2\pi\, r_2}{2\pi\, R_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

y substituyendo este valor en la última fórmula:

$$\frac{P}{L} = \frac{r_1 \times n_2}{n_1 \times R_2}$$

y

$$P = \frac{r_1}{n_1} \times \frac{n_2}{R_2} \times L.$$

---

90. En el manejo de un **cric** se ha observado que la cremallera se eleva 10 cm por cada 10 vueltas que da el obrero a una manivela de 20 cm. ¿Qué esfuerzo es necesario para elevar con este aparato un peso de 500 Kg?

Ya que el trabajo del esfuerzo es igual al trabajo de la carga, tendremos, siendo P el esfuerzo del obrero, $r = 20$ cm el radio del manubrio, $n = 10$ el número de vueltas y $l = 10$ cm el camino recorrido por la carga $Q = 500$ Kg:

$$P \times 2\pi r \times n = Q \times l$$

$$P = \frac{l}{2\pi r n} Q = \frac{10}{2 \times 3{,}14 \times 20 \times 10} 500 = \frac{1}{125} 500 = \mathbf{4\ Kg.}$$

---

91. Dibújense **ocho planos inclinados** de igual

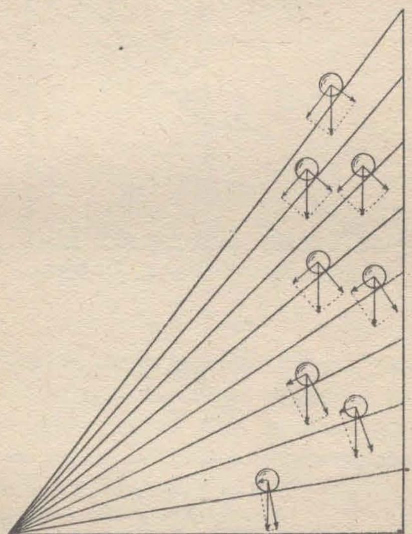


Fig. 25

base y distinta altura, y represéntese en cada uno de ellos la descomposición de fuerzas.

Véase la figura 25.

---

92. Represéntense gráficamente las fuerzas P, N y Z para los planos inclinados de estas dimensiones: $\frac{l}{5}=\frac{b}{4}=\frac{h}{3}$; $\frac{l}{37}=\frac{b}{35}=\frac{h}{12}$; suponiendo que el rozamiento sea de 8 % y la carga $Q=740$ g.

Véanse las figuras 26 y 27.

Si se quisiera calcular el valor de P, tendríamos, en la figura 26:

$$\frac{P}{Q}=\frac{h}{l} \qquad P=\frac{h}{l}Q=\frac{3}{5}740=444 \text{ g};$$

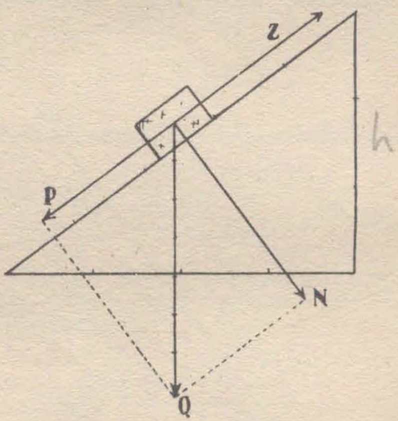


Fig. 26

de igual modo para N:

$$\frac{N}{Q}=\frac{b}{l} \qquad N=\frac{b}{l}Q=\frac{4}{5}740=592 \text{ g};$$

y para el valor del rozamiento R:

$$R=f\cdot N=0{,}08\times 592=\sim 47 \text{ g};$$

y en consecuencia

$$Z=P+R=444+47=491 \text{ g}.$$

Asimismo, para la figura 27:

$$P = \frac{h}{l} Q = \frac{12}{37} 740 = 240 \text{ g}$$

$$N = \frac{b}{l} Q = \frac{35}{37} 740 = 700 \text{ g}$$

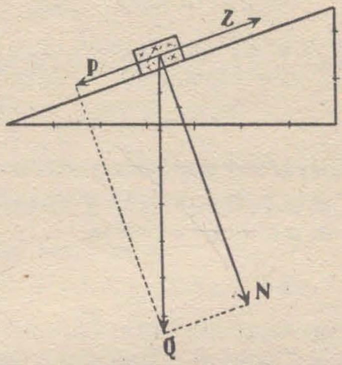


Fig. 27

$$R = f \times N = 0{,}08 \times 70 = 56 \text{ g}$$
$$Z = P + R = 240 + 56 = 296 \text{ g}.$$

---

93. En el extremo superior de una **rampa** de 30° de inclinación está instalado un torno ($r = 20$ cm; $R = 1$ m). ¿Qué fuerza será preciso aplicarle para subir por la rampa una carga de una tonelada, con un coeficiente de rozamiento $f = 0{,}2$?

$$Q = 1000 \text{ Kg}$$

$$P = Q \text{ sen } 30° = 1000 \times 0{,}5 = 500 \text{ Kg}$$
$$N = Q \cos 30° = 1000 \times 0{,}866 = 866 \text{ Kg}.$$

Rozamiento:

$$F = f \times N = 0{,}2 \times 866 = 173{,}2 \text{ Kg}.$$

Fuerza necesaria para subir la carga por el plano inclinado:

$$Z = P + F = 500 + 173{,}2 = 673{,}2 \text{ Kg.}$$

Esta es la carga que debe elevar el torno, cuya reducción es $\frac{r}{R}$.

Esfuerzo:

$$E = \frac{r}{R} Z = \frac{20}{100} 673{,}2 = \sim \mathbf{135\ Kg.}$$

---

94. Resuélvase el **problema anterior** siendo la pendiente de 20° y la carga de 2,5 t y estando substituído el torno por un motón de 4 poleas.

$$P = Q \operatorname{sen} \alpha$$
$$N = Q \cos \alpha$$
$$F = f N = f Q \cos \alpha$$
$$Z = P + F = Q \operatorname{sen} \alpha + f Q \cos \alpha = Q (\operatorname{sen} \alpha + f \cos \alpha)$$

y si n es el número de poleas del motón:

$$E = \frac{Z}{n} = \frac{Q (\operatorname{sen} \alpha + f \cos \alpha)}{n} =$$
$$= \frac{2500 (\operatorname{sen} 20^\circ + f \cos 20^\circ)}{4} = \frac{2500 (0{,}342 + 0{,}2 \times 0{,}94)}{4} =$$
$$= \sim \mathbf{331\ Kg.}$$

---

95. Un **tren** de 250 toneladas sube una cuesta cuya pendiente es de 2 %. ¿Qué fuerza será necesaria si el rozamiento alcanza a 1 ½ %?

$$P = Q \frac{h}{l}$$

$$N = Q \frac{b}{l} = \sim Q$$

$$F = f \times N = \sim f Q$$

$$Z = P + F = Q\frac{h}{l} + fQ = Q\left(\frac{h}{l} + f\right) =$$
$$= 250000\ (0{,}02 + 0{,}015) = 250000 \times 0{,}035 = \sim \mathbf{8750\ Kg}.$$

---

96. Un individuo montado en un **trineo** se desliza sobre el hielo resbalando por una pendiente de 1 : 20. Entre trineo y carga pesan 100 Kg.

a) ¿Cuál es la fuerza que impulsa al vehículo hacia abajo, si en vencer el rozamiento y la resistencia del aire se consume 2 % de la carga?

$$P = \frac{1}{20}Q = \frac{100}{20} = 5\ \text{Kg}.$$
$$R = 0{,}02 \times Q = 0{,}02 \times 100 = 2\ \text{Kg}.$$

Impulso total hacia abajo:

$$F = 5\ \text{Kg} - 2\ \text{Kg} = \mathbf{3\ Kg}.$$

b) ¿Qué longitud recorrerá en un minuto?

Aceleración:

$$a = \frac{3 \times 9{,}81}{100} = 0{,}3\ \text{m/seg}^2.$$

Espacio:

$$s = \frac{1}{2}a\,t^2 = \frac{1}{2}0{,}3 \times 60^2 = \mathbf{540\ m}.$$

c) ¿Qué camino recorrerá en el primer segundo?

$$s_1 = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}0{,}3 = \mathbf{0{,}15\ m}.$$

---

97. ¿Qué presión se ejercerá con una **prensa de husillo** de paso de rosca igual a 5 mm, aplicando una fuerza de 10 Kg al extremo de un brazo de 30 cm?

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi r}$$

$$Q = \frac{2\pi r}{h}P = \frac{6{,}28 \times 30}{0{,}5} \times 10 = \mathbf{3768\ Kg}.$$

---

98. ¿Qué fuerza habrá que aplicar al extremo de un manubrio de $R = 50$ cm en un **tornillo sin fin** con árbol de radio $r = 5$ cm y rueda de $n = 100$ dientes para elevar un peso $Q = 1000$ Kg?

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{n \times R} = \frac{5}{100 \times 50} = \frac{1}{1000}$$

$$P = \frac{1}{1000} Q = \frac{1}{1000} 1000 = \mathbf{1\ Kg.}$$

---

99. ¿Qué potencia habrá que aplicar a un **motón** de seis poleas para levantar un peso de 170 Kg? (En este problema hay que tener en cuenta el rendimiento.)

$$P = \frac{Q}{n} = \frac{170}{6} = 28{,}3 \text{ Kg}$$

y prácticamente, siendo 0,85 el rendimiento del motón de tres pares de poleas:

$$P_1 = \frac{P}{\eta} = \frac{28{,}3}{0{,}85} = \mathbf{33{,}3\ Kg.}$$

---

100. ¿Qué peso se podrá subir aplicando al manubrio de un **torno de tornillo sin fin** un esfuerzo de 20 Kg, si el aparato posee las dimensiones y rendimiento siguientes: número de dientes de la rueda: $n = 50$; longitud del manubrio: $R = 40$ cm; radio del tambor del torno: $r = 20$ cm; rendimiento: $\eta = 0{,}4$?

$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{n\,R}; \qquad Q = \frac{n\,R}{r} P$$

e introduciendo el rendimiento:

$$Q_1 = Q\,\eta = \frac{n\,R}{r} P\,\eta = \frac{50 \times 40}{20} 20 \times 0{,}4 = \mathbf{800\ Kg.}$$

---

101. Para realizar, mediante el aparato anterior, un trabajo útil de 1000 kilográmetros, ¿qué trabajo motor se deberá consumir?

$$\text{Trabajo útil} = \eta \times \text{Trabajo motor}$$

$$\text{Trabajo motor} = \frac{\text{Trabajo útil}}{\eta} = \frac{1000}{0{,}4} = \mathbf{2500\ Kgm.}$$

---

102. ¿Qué potencia absorberá un **motor** de 5 caballos trabajando a plena carga, si su rendimiento es $\eta = 0{,}85$?

$$\text{Potencia útil} = \text{Potencia absorbida} \times \eta$$

$$\text{Potencia absorbida} = \frac{\text{Potencia útil}}{\eta} = \frac{5}{0{,}85} = \mathbf{5{,}9\ CV.}$$

SECCIÓN VII

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

103. Una **piedra** es lanzada con una inclinación de 60° y una velocidad inicial de 40 m por segundo. ¿Qué posición ocupa la piedra a los 2 segundos, cuál a los 5, a qué altura sube, cuánto tarda en alcanzarla,

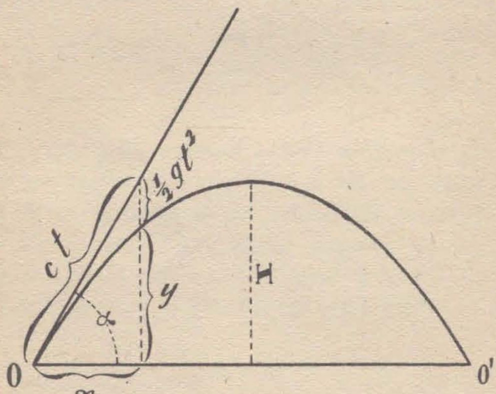


Fig. 28

y a qué distancia va a caer?—En este problema y en los cuatro siguientes se hará caso omiso de la resistencia del aire. Figura 28.

$$x = [c \cos \alpha]\, t$$

$$y = [c \operatorname{sen} \alpha]\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$c \cos \alpha = 40 \times \cos 60^\circ = 40 \times 0{,}5 \quad = 20 \text{ m/seg.}$$

$$c \operatorname{sen} \alpha = 40 \times \operatorname{sen} 60^\circ = 40 \times 0{,}866 = 34{,}64 \text{ m/seg.}$$

$$\text{A los 2 seg.} \begin{cases} x_2 = 20 \times 2 = \mathbf{40\ m} \\ y_2 = 34{,}64 \times 2 - \frac{1}{2} 9{,}81 \times 4 = \mathbf{49{,}66\ m.} \end{cases}$$

$$\text{A los 5 seg.} \begin{cases} x_5 = 20 \times 5 = \mathbf{100\ m} \\ y_5 = 34{,}64 \times 5 - \frac{1}{2} 9{,}81 \times 25 = \mathbf{50{,}6\ m.} \end{cases}$$

Máxima altura: $H = \dfrac{c^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} = \dfrac{1\,200}{19{,}62} = \mathbf{61{,}2\ m.}$

Tiempo empleado en alcanzarla:

$$T = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{34{,}64}{9{,}81} = \mathbf{3{,}53\ seg.}$$

Alcance: $OO' = \dfrac{c^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = \dfrac{40^2 \times \operatorname{sen} 120^\circ}{9{,}81} =$

$$= \frac{1600 \times 0{,}866}{9{,}81} = \mathbf{141{,}2\ m.}$$

---

104. Se trata de lanzar con una velocidad inicial de 31,3 m por segundo una piedra contra un blanco situado a la distancia de 50 m. ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación?

$$OO' = \frac{c^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{g \times OO'}{c^2} = \frac{9{,}81 \times 50}{31{,}3 \times 31{,}3} = 0{,}50$$

$$2\alpha\ (= \text{áng. cuyo seno es } 0{,}50) = 30^\circ \quad \text{o bien} \quad 180 - 30 = 150^\circ$$

$$\alpha = \mathbf{15^\circ} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{75^\circ}.$$

Resolución por medio de logaritmos:

$$\log \operatorname{sen} 2\alpha = \log 9{,}81 + \log 50 - 2 \times \log 31{,}3$$

$$\begin{array}{rr}
 & \log 9{,}81 = 0{,}9917 \\
 & \log 50 \;\; = \underline{1{,}6990} \\
 & 2{,}6907 \\
\log 31{,}3 = 1{,}4955 & \\
\underline{\times \;\; 2} & \\
2{,}9910 & \underline{2{,}9910} \\
 & \bar{1}{,}6997
\end{array}$$

$$2\alpha = 30^\circ, \text{ etc.}$$

---

105. Un cañón dispara una bala con una inclinación de 30° y una velocidad inicial de 400 m por segundo. ¿A cuántos kilómetros del punto de partida dará el proyectil contra el suelo?

$$OO' = \frac{c^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = \frac{400^2 \times \operatorname{sen} 60^\circ}{9{,}81} =$$

$$= \frac{160000 \times 0{,}866}{9{,}81} = \sim \mathbf{14000 \text{ m.}}$$

Por medio de logaritmos:

$$\log OO' = 2 \times \log 400 + \log \operatorname{sen} 60^\circ - \log 9{,}81$$

$$\begin{array}{rr}
\log 400 = & 2{,}6021 \\
 & \underline{\times \;\; 2} \\
 & 5{,}2042 \\
\log \operatorname{sen} 60^\circ = & \underline{\bar{1}{,}9375} \\
 & 5{,}1417 \\
\log 9{,}81 = & \underline{0{,}9917} \\
 & 4{,}1500
\end{array}$$

$$OO' = 14100 \text{ m} = \sim \mathbf{14000 \text{ m.}}$$

---

106. Dibújese la **línea de tiro** para diversos valores de la inclinación y de la velocidad inicial.

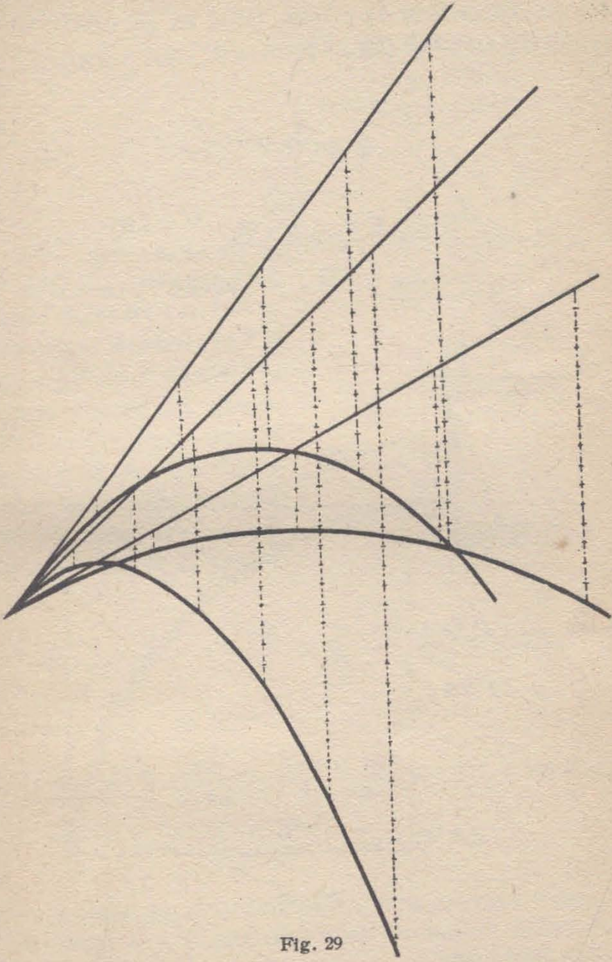


Fig. 29

Véase la figura 29, donde se han dibujado, como ejemplo, tres líneas de tiro.

107. Si con una altura de caída $y = 1,25$ m el chorro de agua da en el suelo a la distancia $x = 1,50$ m del pie del orificio de salida, ¿cuál es la velocidad de salida del líquido? (fig. 30).

$$\left.\begin{array}{r} x = ct \\ y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{array}\right\} \quad y = \frac{g}{2c^2} x^2$$

$$c^2 = \frac{g}{2y} x^2 = \frac{9,81}{2 \times 1,25} 1,5^2 = 8,83$$

$$c = \sqrt{8,83} = \sim \mathbf{3\ m/seg.}$$

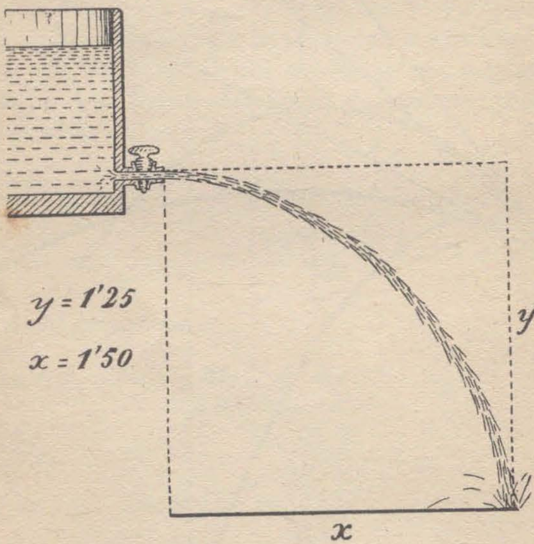


Fig. 30

Con logaritmos:

$$\log c = \frac{1}{2} (\log 9,81 + 2 \times \log 1,5 - [\log 2 + \log 1,25])$$

$$\log 9{,}81 = 0{,}9917$$
$$2 \times \log 1{,}5 = 2 \times 0{,}1761 = 0{,}3522$$
$$1{,}3439$$
$$\log 2 + \log 1{,}25 = 0{,}3010 + 0{,}0960 = 0{,}3979$$
$$2 \cdot \log c = 0{,}9460$$
$$\log c = 0{,}4730$$
$$c = \mathbf{3{,}1\ m/seg.}$$

---

108. Un **vagón de ferrocarril,** cuyo peso es $P = 7000$ Kg, recorre una curva de radio $r = 200$ m con una velocidad $c = 7$ m por segundo. Calcúlese la fuerza centrífuga que se desarrolla y la diferencia de alturas que debe haber entre los carriles exteriores y los interiores, siendo de $a = 1{,}435$ m la anchura de la vía.

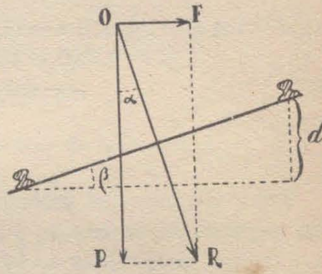


Fig. 31

$$F = M \times \frac{c^2}{r} = \frac{7000}{9{,}81} \times \frac{7^2}{200} = \frac{343000}{1962} = \mathbf{175\ Kg.}$$

y en unidades C. G. S.:

$$F = 7 \times 10^6 \times \frac{700^2}{20000} = \frac{3{,}43 \times 10^{12}}{2 \times 10^4} = 1{,}715 \times 10^8 \text{ dinas} =$$
$$= \frac{1{,}715 \times 10^8}{9{,}81 \times 10^5} = \mathbf{1{,}75 \times 10^2\ Kg.}$$

La composición de esta fuerza F con el peso P dará una resultante R a la cual debe ser normal el plano de la vía (fig. 31).

$$F = P \operatorname{tg} \alpha, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{P} = \frac{175}{7000} = 0{,}025$$

y así

$$\alpha = 1^\circ 30'$$

pero

$$\alpha = \beta$$

y

$$d = a \text{ sen } \beta = 1{,}435 \text{ sen } 1^\circ 30' = 1{,}435 \times 0{,}026 = \mathbf{0{,}037 \text{ m}}$$

o por logaritmos:

$$\log \text{tg } \alpha = \log F - \log P = \log 175 - \log 7000 =$$
$$= 2{,}2430 - 3{,}8451 = \bar{2}{,}3979$$

$$\log d = \log a + \log \text{sen } \alpha = \log 1{,}435 + \log \text{sen } \alpha =$$
$$= 0{,}1568 + \bar{2}{,}3981 = \bar{2}{,}5549$$
$$d = \mathbf{0{,}0358 \text{ m.}}$$

---

109. Un tren que marcha con la velocidad $c = 11$ m por segundo atraviesa un puente convexo cuya curvatura tiene un radio $r = 1000$ m. ¿En cuánto resulta, para el puente, aligerado cada kilogramo de carga?

$$F = M\frac{c^2}{r} = \frac{1000}{9{,}81}\,\frac{11^2}{1000} = \frac{121}{9{,}81} = \sim \mathbf{12 \text{ g.}}$$

En unidades absolutas:

$$F = 1000 \times \frac{1100^2}{100000} = 1{,}21 \times 10^4 \text{ dinas} =$$
$$= \frac{1{,}21 \times 10^4}{9{,}81 \times 10^2} \text{ gramos} = \sim \mathbf{12 \text{ g.}}$$

---

110. **Newton**, en 1687, de la duración de la revolución T de los distintos planetas y de su distancia r al Sol dedujo la fuerza con que la unidad de masa de cada uno de ellos era atraída por el Sol.—Compruébense los valores de f que figuran en la siguiente tabla:

Planeta	Duración de la revolución	Distancia al Sol (en leguas geográficas de 15 al grado)	Atracción sobre 10 Kgr
Mercurio	$T_1 =$ 88 días	$r_1 =$ 8 millones	$f_1 = 41$ g
Venus	$T_2 = 225$ »	$r_2 = 14$ »	$f_2 = 11$ »
La Tierra	$T_3 = 365$ »	$r_3 = 20$ »	$f_3 = 6$ » aproximadamente
Marte	$T_4 = 687$ »	$r_4 = 30$ »	$f_4 = 2{,}5$ »
Júpiter	$T_5 =$ 12 años	$r_5 = 104$ »	$f_5 = 0{,}2$ »

Si en la fórmula de la fuerza centrípeta

$$F = M \times r \frac{4\pi^2}{T^2}$$

calculamos y substituímos el valor de la constante

$$4\pi^2 = 39{,}44$$

tendremos:

$$F = 39{,}44 \frac{r}{T^2} \times M.$$

Aplicando esta fórmula a los distintos planetas, expresando las distancias en cm (1 legua geográfica de 15 al grado = 7420 m) y las duraciones en segundos (1 día = = 86400 segundos) y refiriéndonos a la masa de 10 Kgr:

Mercurio:

$$f_1 = 39{,}44 \times \frac{8 \times 10^6 \times 742000}{88^2 \times 86400^2} \times 10^4 =$$

$$= \frac{39{,}44 \times 10^{10} \times 742000}{86400^2} \times \frac{8}{88^2} = 3{,}9203 \times 10^7 \times \frac{8}{88^2} =$$

$$= 40500 \text{ dinas} = \frac{40500}{980} g = \sim \mathbf{41\ g.}$$

Observación. El coeficiente $3{,}9203 \times 10^7$ servirá para los otros planetas si se expresan las distancias en millones de leguas y las revoluciones en días.

Venus:

$$f_2 = 3{,}9203 \times 10^7 \times \frac{14}{225^2} = 10850 \text{ dinas} = \sim \mathbf{11\ g.}$$

La Tierra:

$$f_3 = 3{,}9203 \times 10^7 \times \frac{20}{365^2} = 5880 \text{ dinas} = \sim \mathbf{6\ g.}$$

Marte:

$$f_4 = 3{,}9203 \times 10^7 \times \frac{30}{687^2} = 2490 \text{ dinas} = \sim \mathbf{2{,}5\ g.}$$

Júpiter:

$$f_5 = 3{,}9203 \times 10^7 \times \frac{104}{(12 \times 365)^2} = 210 \text{ dinas} = \sim \mathbf{0{,}2\ g.}$$

---

111. De estos valores dedujo Newton su célebre *ley de la gravitación universal:*

$$f_1 r_1^2 = f_2 r_2^2 = f_3 r_3^2 = \ldots$$

es decir: *la atracción es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.*

Compruébese.

Substituyendo los valores dados de las distancias y los valores hallados de las fuerzas, tendremos:

$$\begin{aligned} f_1 r_1^2 &= 41 \times 8^2 = 2624 \\ f_2 r_2^2 &= 11 \times 14^2 = 2156 \\ f_3 r_3^2 &= 6 \times 20^2 = 2400 \\ f_4 r_4^2 &= 2{,}5 \times 30^2 = 2250 \\ f_5 r_5^2 &= 0{,}2 \times 104^2 = 2163 \end{aligned}$$

---

112. Calcúlese la **disminución que experimenta** en las distintas latitudes el **peso** P de un cuerpo a causa de la rotación terrestre.

I. *A la latitud* $\varphi = 0°$ *(Ecuador):*

$$F = M\,r\,\frac{4\,\pi^2}{T^2}$$

$$M = 10\ \text{Kgr} = 10\,000\ \text{gr}$$

$$r = R = 6370\ \text{Km} = 637\,000\,000\ \text{cm}$$

$$T = 24\ \text{horas} = 86400\ \text{seg.}$$

Siendo $4\,\pi^2 = 39{,}44$

$$F = 39{,}44\,\frac{10000}{86400^2} \times 6{,}37 \times 10^8 =$$

$$= 5{,}3 \times 10^{-5} \times 6{,}37 \times 10^8 = 33761\ \text{dinas} = \mathbf{34{,}42\ g.}$$

II. *A la latitud* $\varphi = 45°$:

$$F = M\,r\,\frac{4\,\pi^2}{T^2}.$$

$$M = 10000\ \text{gr.}$$

$$r = R\cos\varphi = R\cos 45° = 0{,}707 \times 6{,}37 \times 10^8\ \text{cm}$$

$$T = 86400\ \text{seg.}$$

$$F_1 = 39{,}44 \times \frac{10000}{86400^2} \times$$

$$\times\, 6{,}37 \times 10^8 \times 0{,}707 =$$

$$= 34{,}42\ \text{g} \times 0{,}707 = 24{,}33\ \text{g.}$$

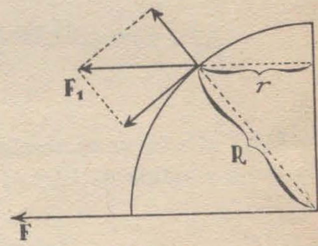


Fig. 32

Pero de esta fuerza, sólo la componente vertical se opone al peso (fig. 32):

$$x = F_1 \cos 45° = 24{,}33 \times$$

$$\times\, 0{,}707 = \mathbf{17{,}20\ g.}$$

III. *A la latitud* φ:

$$F_2 = F\cos\varphi$$

$$x = F_2\cos\varphi = F\cos^2\varphi = \mathbf{34{,}42\cos^2}\,\varphi.$$

---

113. ¿Qué **atracción ejerce la Tierra** sobre la unidad de masa de la Luna?

($T = 28$ días; $r = 384000$ Km).

$$f = 4\pi^2 \frac{M}{T^2} \times r$$

$$M = 1 \text{ Kgr} = 1000 \text{ gr}$$

$$r = 38400000000 \text{ cm}$$

$$T = 28 \times 86400 \text{ seg.}$$

$$f = 39{,}44 \times \frac{1000}{86400^2} \times \frac{38400000000}{28^2} =$$

$$= 5{,}3 \times 10^{-5} \times \frac{3{,}84 \times 10^{10}}{28^2} = 5{,}3 \times \frac{3{,}84 \times 10^5}{28^2} =$$

$$= 2595 \text{ dinas} = \sim \mathbf{2{,}7\ g.}$$

---

114. ¿Con qué fuerza **se atraen** dos balas de plomo de volumen igual a 1 dm³ (peso = 11400 g) a 15 cm de distancia?

$$F = k \frac{M_1 M_2}{r^2} =$$

$$= 6{,}7 \times 10^{-8} \times \frac{11400 \times 11400}{15^2} = \mathbf{0{,}0387\ dinas.}$$

---

115. ¿Cuántas **oscilaciones** por minuto verifica en París un péndulo de 1,09 m de longitud?

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$n = \frac{60}{t} = \frac{60}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{60}{3{,}14} \sqrt{\frac{9{,}81}{1{,}09}}$$

$$\log n = \log 60 + \frac{1}{2} (\log 9{,}81 - \log 1{,}09) - \log 3{,}14 =$$

$$= 1{,}7782 + \frac{1}{2} (0{,}9917 - 0{,}0374) - 0{,}4969 = 1{,}7584$$

$$n = \mathbf{57{,}3.}$$

---

116. El astrónomo Flammarión repitió en 1902 el experimento de Foucault bajo la cúpula del Panteón de París, haciendo oscilar un péndulo de 67 m de longitud para que el público viera comprobada experimentalmente la **rotación de la Tierra**. ¿Cuál debía ser la duración de la oscilación de semejante péndulo?

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 3{,}1416\sqrt{\frac{67}{9{,}81}} = 3{,}1416\sqrt{6{,}8} =$$

$$= \mathbf{8{,}16\ segundos.}$$

---

117. Un péndulo verifica 114,6 oscilaciones por minuto. ¿Cuántos cm **se debe alargar** para que verifique en igual tiempo 5,6 oscilaciones menos?

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$t^2 = \pi^2\frac{l}{g}$$

$$l = t^2\frac{g}{\pi^2}$$

y una vez alargado:

$$l + x = t_1^2\frac{g}{\pi^2}$$

$$l = t_1^2\frac{g}{\pi^2} - x$$

igualando los dos valores de l:

$$t^2\frac{g}{\pi^2} = t_1^2\frac{g}{\pi^2} - x$$

$$x = t_1^2\frac{g}{\pi^2} - t^2\frac{g}{\pi^2} = \frac{g}{\pi^2}(t_1^2 - t^2)$$

pero

$$t = \frac{60}{114{,}6} \quad \text{y} \quad t_1 = \frac{60}{114{,}6 - 5{,}6} = \frac{60}{109{,}0}$$

$$\log t^2 = 2\,(\log 60 - \log 114{,}6) = 2\,(1{,}7782 - 2{,}0592) =$$
$$= 2 \times \bar{1}{,}7190 = \bar{1}{,}4380$$
$$t^2 = 0{,}274$$

$$\log t_1^2 = 2\,(\log 60 - \log 109) = 2\,(1{,}7782 - 2{,}0374) =$$
$$= 2 \times \bar{1}{,}7408 = \bar{1}{,}4816$$
$$t_1^2 = 0{,}303$$
$$t_1^2 - t^2 = 0{,}303 - 0{,}274 = 0{,}029$$

$$\log x = \log g - 2 \log \pi + \log (t_1^2 - t^2) =$$
$$= 0{,}9917 - 2 \times 0{,}4969 + \bar{2}{,}4624$$
$$x = 0{,}0289 \text{ m} = \mathbf{2{,}9 \text{ cm.}}$$

---

118. Un **péndulo** que **bate segundos en París** ($g = 9{,}81$) es trasladado al Ecuador, y en este punto verifica al día 125 oscilaciones menos. ¿Cuánto vale la aceleración de la gravedad en el Ecuador?

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}$$

$$\frac{t}{t_1} = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g}}$$

pero

$$\frac{t}{t_1} = \frac{n_1}{n}$$

luego:

$$\frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g}} = \frac{n_1}{n}$$

Ahora

$$n = 86400; \quad n_1 = 86400 - 125 = 86275$$

$$\frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g}} = \frac{86275}{86400}$$

$$g_1 = g \frac{86275^2}{86400^2}$$

$$\log g_1 = \log 9{,}81 + 2 (\log 86275 - \log 86400) =$$
$$= 0{,}9917 + 2 (4{,}93565 - 4{,}9365) = 0{,}9900$$

$$g_1 = \mathbf{9{,}78}.$$

---

119. Cuando un **globo aerostático** se eleva a una altura de 3 Km, cada kilogramo de materia pesa 1 g menos. ¿Cuántas oscilaciones menos realizaría diariamente un péndulo de segundos llevado por el globo?

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g}}$$

pero

$$g_1 = g\left(1 - \frac{1}{1000}\right) = 0{,}999\, g$$

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{0{,}999\, g}}{\sqrt{g}} = \sqrt{0{,}999}$$

$$n_1 = n\sqrt{0{,}999}$$

$$n - n_1 = n - n\sqrt{0{,}999} = n\left(1 - \sqrt{0{,}999}\right) =$$
$$= n \times 0{,}001 = 86400 \times 0{,}001 = \mathbf{86{,}4}$$

oscilaciones sencillas, ó 43,2 oscilaciones dobles.

---

120. Una **lámina** de 5 cm de ancho y 25 cm de largo oscila alrededor de uno de sus lados menores. ¿Cuál es la duración de su oscilación?

$$t = \pi \sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}}}$$

I = momento de inercia,
$\mathfrak{M}$ = momento de rotación.

Siendo:
l = longitud de la lámina,
b = anchura,
m = masa total,
μ = masa de la unidad de superficie,
p = peso,
d = distancia del c. d. g. al eje de rotación, tendremos:

$$m = \mu \times b \times l$$

$$p = m\,g = \mu \times b \times l \times g$$

$$d = \frac{1}{2}\,l$$

$$I = \frac{b\,l^3}{3}\,\mu$$

$$\mathfrak{M} = p\,d = \mu \times b \times l \times g \times \frac{1}{2}\,l = \frac{1}{2}\,b\,l^2 g\,\mu$$

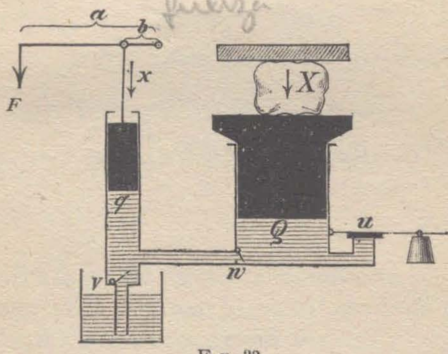
$$t = \pi \sqrt{\frac{I}{\mathfrak{M}}} = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\,b\,l^3\,\mu}{\frac{1}{2}\,b\,l^2 g\,\mu}} = \pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} =$$

$$= 3{,}14 \sqrt{\frac{2 \times 25}{3 \times 981}} = 3{,}14 \sqrt{\frac{50}{2943}} = \mathbf{0{,}41\ seg.}$$

SECCIÓN VIII

HIDROMECÁNICA

121. En una **prensa hidráulica** $q = 2\ \text{cm}^2$, $Q = 180\ \text{cm}^2$, $a = 49$ cm, $b = 7$ cm y la fuerza empleada $F = 2$ Kg. ¿Cuál es la ~~presión~~ fuerza producida? ¿Podrá aplas-



F g. 33

tarse, mediante esa prensa, un trozo cúbico de ladrillo, de lado igual a 5 cm, y de resistencia igual a 50 Kg por centímetro cuadrado? (fig. 33).

Fuerza

~~Presión~~ producida:

$$X = \frac{a\,Q}{b\,q}F = \frac{49 \times 180}{7 \times 2} \times 2 = 7 \times 180 = \mathbf{1260\ Kg.}$$

Resistencia del ladrillo: $R = 5 \times 5 \times 50 = 1250$ Kg; luego la presión X es capaz de aplastarlo, ya que

$$X = 1260 > 1250 = R.$$

---

122. ¿Cuál debe ser la razón $\frac{Q}{q}$ en una prensa hidráulica con la que se debe aplastar un **cubo de mármol** de 1 dm^3 y en la que $a = 64$ cm, $b = 8$ cm y $F = 5$ Kg? (Coeficiente de rotura del mármol por presión $K = 800$ Kg por centímetro cuadrado.)

De

$$P = \frac{a}{b} \frac{Q}{q} F$$

se deduce:

$$\frac{Q}{q} = \frac{b}{a} \frac{P}{F}$$

siendo P la resistencia del mármol,

$$P = 100 \times K = 100 \times 800 = 80000 \text{ Kg}.$$

$$\frac{Q}{q} = \frac{8}{64} \times \frac{80000}{5} = \mathbf{2000.}$$

---

123. El **émbolo** de la bomba de una prensa hidráulica tiene un diámetro de 18 mm y el de la prensa uno de 0,36 m. ¿Con qué fuerza será empujado el émbolo mayor si la fuerza que actúa en el extremo del brazo de potencia es $F = 50$ Kg y la razón de los dos brazos es tal que multiplica por 12 el valor de la potencia?

$$X = \frac{a}{b} \frac{Q}{q} F$$

Pero

$$\frac{Q}{q} = \frac{D^2}{d^2}$$

luego

$$X = \frac{a}{b} \frac{D^2}{d^2} F$$

$$\frac{a}{b} = 12; \quad \frac{D^2}{d^2} = \frac{360^2}{18^2}; \quad F = 50$$

$$X = 12 \times \frac{360^2}{18^2} \times 50 = 12 \times 400 \times 50 = \mathbf{240000\ Kg}.$$

---

124. El pistón de un **acumulador hidráulico** tiene 1 m de diámetro y ejerce una presión de 80 Kg por centímetro cuadrado; ¿qué potencia desarrollará cuando el pistón descienda 0,5 m en $\frac{1}{2}$ minuto?

Area del pistón:

$$S = \pi r^2 = 3{,}14 \times 50^2 = 7850\ \mathrm{cm}^2.$$

Presión total ejercida por el pistón:

$$P = \pi r^2 \times p = 7850 \times 80 = 628000\ \mathrm{Kg}.$$

Trabajo:

$$T = Pl = \pi r^2 \times p \times l = 628000 \times 0{,}5 = 314000\ \mathrm{Kgm}$$

Potencia en caballos:

$$E = \frac{Pl}{75 \times t} = \frac{\pi r^2 p l}{75 \times t} = \frac{314000}{75 \times 30} = \mathbf{140\ CV}.$$

---

125. Un **vaso cilíndrico** de una altura $h = 30$ cm y un radio $r = 2$ cm, está lleno de mercurio hasta $^1/_3$ de su altura. ¿Qué presión reciben, *a*) 1 cm² del fondo, *b*) el fondo entero? (Peso específico del mercurio $e = 13{,}6$.)

Volumen de la columna que gravita sobre 1 cm²:

$$v = 1 \times \frac{1}{3} 30 = 10\ \mathrm{cm}^3.$$

Peso de esta columna:

$$p = v \times e = 10 \times 13{,}6 = \mathbf{136\ g.}$$

Area del fondo del vaso:

$$s = \pi r^2 = 3{,}14 \times 2^2 = 12{,}56\ \text{cm}^2.$$

Volumen de la columna que gravita sobre ella:

$$V = s \times a = 12{,}56 \times \frac{1}{3} 30 = 125{,}6\ \text{cm}^3.$$

Peso de esta columna:

$$P = V \times e = 125{,}6 \times 13{,}6 = \mathbf{1708\ g.}$$

---

126. A lo largo de la pared de una casa que tiene una altura de 15 m desde el sótano hasta el tejado, está fijado un tubo que termina por su parte inferior en un depósito de 10 cm de altura y 1 m^2 de fondo. ¿Qué presión debe resistir este fondo cuando depósito y tubo están llenos de agua?

Area del fondo:

$$s = 1\ \text{m}^2 = 10000\ \text{cm}^2.$$

Altura sobre el fondo:

$$a = 15\ \text{m} = 1500\ \text{cm}.$$

Presión:

$$p = s \times a = 10000 \times 1500 = 15000000\ \text{g} = \mathbf{15000\ Kg.}$$

---

127. Los radios de las dos bases de una **vasija** que tiene la forma de cono truncado son de 6 y 10 cm, y la altura es de 20 cm; *a*) ¿cuál es el peso del agua necesaria para llenarla por completo? *b*) ¿cuánto vale la presión sobre el fondo si lo ocupa la base mayor? *c*) ¿y cuánto si es la base menor la que constituye el fondo?

a) Volumen del tronco de cono:

$$v = \frac{1}{3}\pi h \frac{R^3 - r^3}{R - r} = \frac{1}{3} 3{,}14 \times 20 \times \frac{10^3 - 6^3}{10 - 6} = 4115 \text{ cm}^3.$$

Peso del agua que lo llena:

$$p = v = \mathbf{4115\ g}.$$

b) Presión sobre la base mayor, cuando ésta constituye el fondo:

$$P = S \times h = \pi R^2 h = 3{,}1416 \times 10^2 \times 20 = \mathbf{6283\ g}.$$

c) Presión sobre la base menor, cuando ésta constituye el fondo:

$$p = s\, h = \pi r^2 h = \mathbf{2262\ g}.$$

---

128. ¿Qué presión debe resistir un buzo a 120 m de profundidad?

Sería igual al peso de una columna de agua de 1 cm² de base y 120 m de altura.

Pero la presión de 10 m de agua equivale a 1 atm. y así la de 120 m equivaldrá a $\frac{120}{10} = \mathbf{12\ atm.}$

---

129. Una vasija cúbica de 1 dm de lado está llena de mercurio. ¿Qué presión recibe una superficie de 1 mm² colocada a 1, 2, 3, 4... cm bajo la superficie de nivel? ¿Y cuál es la presión que recibe cada una de las paredes?

Volumen de las columnas que gravitan sobre 1 mm² a

1 cm . . . . 0,01 × 1 =	0,01 cm³
2 »	0,02 »
3 »	0,03 »
4 »	0,04 » etc.

y los pesos respectivos son:

$$0{,}01 \times 13{,}6 = \mathbf{0{,}136\ g}$$
$$0{,}02 \times 13{,}6 = \mathbf{0{,}272\ g}$$
$$0{,}03 \times 13{,}6 = \mathbf{0{,}408\ g}$$
$$0{,}04 \times 13{,}6 = \mathbf{0{,}544\ g}\ \text{etc.}$$

Presión sobre una pared lateral:

Siendo esta pared cuadrada, su área será:

$$l^2 = 10 \times 10 = 100\ \text{cm}^2,$$

y hallándose su centro de gravedad a $\frac{1}{2}\,l$, tendremos que la presión p valdrá:

$$p = l^2 \times \frac{1}{2}\,l \times 13{,}6 = 100 \times 5 \times 13{,}6 = \mathbf{6800\ g.}$$

---

130. Un **molinete hidráulico** presenta tres aberturas de salida, de 3 mm² de sección y a 30 cm de distancia al eje del aparato. ¿Cuál es el momento de la reacción determinada por la salida del agua que llena el depósito hasta la altura de 80 cm?

Presión que determina la salida del agua:

$$p = 3 \times s \times a = 3 \times 0{,}03 \times 80 = 7{,}2\ \text{g}.$$

Momento:

$$m = p \times l = 3\,s\,a\,l = 7{,}2 \times 30 = \mathbf{216\ g \cdot cm.}$$

---

131. Una **turbina** destinada al aprovechamiento de un salto de agua de una altura de 4 m y un gasto de 2 m³ de agua por segundo, produce 76 caballos. ¿Cuál es el valor del rendimiento?

Potencia teórica:

$$P = 2000\ \text{Kg} \times 4\ \text{m} = 8000\ \text{Kgm/seg.} = \frac{8000}{75}\ \text{CV} =$$
$$= 106{,}6\ \text{CV}.$$

Potencia efectiva:

$$E = 76\,\mathrm{CV}.$$

Rendimiento:

$$\eta = \frac{E}{P} = \frac{76}{106{,}6} = 0{,}71 = 71\ \%.$$

---

132. Dos vasos comunicantes contienen respectivamente agua y petróleo; la altura del agua es $h_1 = 20$ cm y la del petróleo $h_2 = 25$ cm; ¿cómo se puede deducir de estos datos el peso específico del petróleo?

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

$$e_2 = \frac{h_1\,e_1}{h_2} = \frac{20 \times 1}{25} = \mathbf{0{,}80}.$$

---

133. Dos tubos comunicantes de secciones respectivamente iguales a 8 cm² y 2 cm² contienen mercurio; al llenar el tubo estrecho con 272 g de agua, ¿cuánto subirá el nivel del mercurio en el tubo ancho?

Sección del tubo estrecho:

$$s = 2\ \mathrm{cm}^2.$$

Volumen del agua:

$$V = 272\ \mathrm{cm}^3$$

Altura de la columna de agua en el tubo estrecho:

$$A_a = \frac{V}{s} = \frac{272}{2} = 136\ \mathrm{cm}.$$

Peso específico del mercurio $e = 13{,}6$.
Altura de la columna del mercurio en el tubo ancho:

$$A_m = \frac{A_a}{e} = \frac{V}{s\,e} = \frac{136}{13{,}6} = \mathbf{10\ cm}.$$

---

134. Un **cubo de hoja de lata**, vacío, de 1 dm de lado y 100 g de peso, flota en el agua. ¿Cuál es la altura de la parte sumergida? ¿Y cuál será cuando esté lleno de petróleo hasta la mitad?

Pesando 100 g debe desalojar 100 cm³ de agua, y siendo de $10 \times 10 = 100$ cm² el área de su fondo, la altura de los 100 cm³ de agua será **1 cm.**

El petróleo que lo llene hasta la mitad pesará

$$\frac{1}{2} e = \frac{1}{2} 0{,}80 = 0{,}40 \text{ Kg} = 400 \text{ g}.$$

El agua desalojada ocupará 500 cm³, y siendo 100 cm² su base, será su altura $a = $ **5 cm.**

---

135. Un terrón de **azúcar** pesa en el aire 5,6 g y en el petróleo (de peso específico $e_1 = 0{,}8$) pesa 2,8 g. ¿Cuál es el peso específico del azúcar?

Peso específico e_2 del azúcar con respecto al petróleo:

$$e_2 = \frac{5{,}6}{5{,}6 - 2{,}8}$$

Peso específico del azúcar con respecto al agua:

$$e = e_1 e_2 = 0{,}8 \frac{5{,}6}{5{,}6 - 2{,}8} = \mathbf{1{,}6}.$$

---

136. Una **esfera hueca**, de diámetro exterior $d = 10$ cm, pesa 80 g. ¿Cuántos perdigones de $\frac{1}{10}$ g habrá que introducir en ella para que se sostenga *en el seno* del petróleo?

La esfera debe tener un peso igual al del petróleo desalojado.

Volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} 3{,}14 \times 5^3 = 523{,}3 \text{ cm}^3.$$

Peso de un volumen igual de petróleo:

$$P = v \times e = 523,3 \times 0,8 = 418,6 \text{ g}.$$

Como la esfera pesa $p = 80$ g, le faltan, para pesar lo que el petróleo,

$$P - p = 418,6 - 80 = 338,6 \text{ g}.$$

Peso que para añadirlo en perdigones exigirá:

$$n = \frac{338,6}{\frac{1}{10}} = 10 \times 338,6 = \mathbf{3386}.$$

---

137. Una **llave de hierro** que en el aire pesa 38,2 g, en el seno del agua pesa 32,9 g. ¿Cuál es el peso específico del hierro?

Peso del agua desalojada:

$$p - p_1 = 38,2 - 32,9 = 5,3.$$

Peso específico:

$$e = \frac{p}{p - p_1} = \frac{38,2}{5,3} = \mathbf{7,2}.$$

---

138. Un trozo de **madera** pesa en el aire 22,5 g; un trozo de plomo pesa 45,6 g; unidos ambos cuerpos e introducidos en el agua pesan 34,1 g; el plomo solo, en el agua, pesa 41,6 g. ¿Cuál es el peso específico de la madera?

Pérdida de peso del conjunto de ambos cuerpos en el agua:

$$(22,5 + 45,6) - 34,1 = 34,0 \text{ g}.$$

Pérdida de peso del plomo en el agua:

$$45,6 - 41,6 = 4,0 \text{ g}.$$

Pérdida de peso de la madera en el agua:

$$34,0 - 4,0 = 30,0 \text{ g}.$$

Peso específico de la madera:

$$e = \frac{22{,}5}{30{,}0} = \mathbf{0{,}75}.$$

---

139. Un **objeto de madera** que pesa 1600 g flota en el agua; ¿cuánta agua desaloja? ¿y cuánto petróleo desaloja cuando flota en el petróleo? (El peso específico del petróleo es 0,8.)

Pesando 1600 g, en el agua desaloja **1600 cm³** de líquido. Y en el petróleo:

$$\frac{1600}{0{,}8} = \mathbf{2000\ cm^3}.$$

---

140. ¿Cuál es el peso específico de las **monedas de oro** formadas de una aleación de 90 % de oro ($e_1 = 19{,}3$) y 10 % de cobre ($e_2 = 8{,}9$)?

Se supone, y es muy aproximado a la realidad, que la liga del oro con el cobre no va acompañada de variación de volumen, o sea que el volumen de la aleación es igual a la suma de los volúmenes de sus componentes.

$$v = v_1 + v_2$$

$$\frac{p}{e} = \frac{p_1}{e_1} + \frac{p_2}{e_2}$$

y como

$$p = p_1 + p_2$$

tendremos

$$\frac{p_1 + p_2}{e} = \frac{p_1}{e_1} + \frac{p_2}{e_2}$$

$$e_1 e_2 (p_1 + p_2) = e (e_2 p_1 + e_1 p_2)$$

$$e = \frac{(p_1 + p_2) e_1 e_2}{p_1 e_2 + p_2 e_1}$$

Substituyendo valores:

$$e = \frac{(90 + 10) \times 8{,}9 \times 19{,}3}{90 \times 8{,}9 + 10 \times 19{,}3} = \mathbf{17{,}28}.$$

---

141. Problema de Arquímedes.

El oro de una **corona** tiene un peso específico $e = 16{,}53$. ¿En qué proporción contiene oro ($e_1 = 19{,}30$) y plata ($e_2 = 10{,}49$)?

Refiriendo la composición a la unidad de peso, y llamando p_1 al peso del oro y p_2 al peso de la plata, tendremos:

$$p_2 = 1 - p_1.$$

No ocurriendo variación sensible de volumen en la liga:

$$\frac{1}{e} = \frac{p_1}{e_1} + \frac{1 - p_1}{e_2}$$

de donde:

$$e_1 e_2 = p_1 e e_2 + e e_1 - p_1 e e_1$$

$$p_1 (e e_1 - e e_2) = e e_1 - e_1 e_2$$

$$p_1 = \frac{e e_1 - e_1 e_2}{e e_1 - e e_2}$$

$$p_1 = \frac{16{,}53 \times 19{,}30 - 19{,}30 \times 10{,}49}{16{,}53 \times 19{,}30 - 16{,}53 \times 10{,}49} = 0{,}800 =$$
$$= \mathbf{800\ milésimas\ de\ oro}$$

y por consiguiente $p_2 = 0{,}200 =$ **200 milésimas de plata.**

---

142. Un **hombre** pesa 71,5 Kg y tiene un volumen de 70 dm^3. ¿Se hundirá en agua salada cuyo peso específico sea de 1,03?

Peso de 70 dm^3 del agua salada:

$$p = v \times e = 70 \times 1{,}03 = 72{,}1 \text{ Kg}$$

peso superior al del hombre, que es 71,5 Kg. Luego éste no se hundirá.

---

143. ¿En qué relación deben estar el volumen de la porción visible y el de la porción sumergida de una **montaña flotante** (iceberg) de hielo? (El peso específico del agua del mar es 1,025 y el del hielo 0,92.)

Representemos por v_1 el volumen visible, por v_2 el sumergido y por $V = v_1 + v_2$ el total. Por e el peso específico del hielo y por E el del agua.

El peso total p del iceberg debe ser igual al peso del agua desalojada.

Peso del iceberg:

$$p = V \times e.$$

Peso del agua:

$$p = v_2 \times E$$

$$V \times e = v_2 \times E$$

$$(v_1 + v_2)\, e = v_2\, E$$

$$v_1\, e = v_2\, E - v_2\, e = v_2\,(E - e)$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{E - e}{e} = \frac{1{,}025 - 0{,}92}{0{,}92} = \frac{0{,}105}{0{,}92} = \frac{1}{9}$$

---

144. ¿Cuánto pesa, sumergido en el agua, 1 Kg de hierro ($e = 7{,}2$) y cuánto 1 Kg de latón ($e = 8{,}4$)?

Volumen del kilogramo de hierro:

$$v = \frac{p}{e} = \frac{1}{7{,}2}$$

Peso del agua desalojada:

$$p_1 = v \times 1 = \frac{p}{e} = \frac{1}{7{,}2}$$

Peso del hierro dentro del agua:

$$p - p_1 = p - \frac{p}{e} = \frac{p\,e - p}{e} = \frac{p\,(e-1)}{e} = \frac{e-1}{e} =$$

$$= \frac{7{,}2 - 1}{7{,}2} = \frac{6{,}2}{7{,}2} = \mathbf{0{,}861\ Kg.}$$

Para el latón:

$$p - p_1 = \frac{e-1}{e} = \frac{8{,}4 - 1}{8{,}4} = \frac{7{,}4}{8{,}4} = \mathbf{0{,}881\ Kg.}$$

---

145. El peso de un trozo de madera ($e_1 = 0{,}5$) determinado con pesas de latón ($e_2 = 8{,}4$) ha resultado ser de 500 g. ¿Cuál es su **peso verdadero,** si la pesada se efectuó en el seno del aire a la presión atmosférica normal?

El equilibrio de la balanza indica que:
Peso verdadero de la madera — su pérdida de peso al aire = Peso verdadero del latón — su pérdida de peso al aire

$$x - \frac{x}{0{,}5} \times 0{,}001293 = 500 - \frac{500}{8{,}4} \times 0{,}001293$$

$$x = \frac{500\left(1 - \dfrac{0{,}001293}{8{,}4}\right)}{1 - \dfrac{0{,}001293}{0{,}5}} = \mathbf{501{,}2\ g.}$$

---

146. Se ha instalado en el seno del agua una **balanza de brazos iguales.** *a*) ¿Qué sucederá cuando se coloquen en un platillo 79,59 g de plomo ($e = 11{,}37$) y en el otro 101,5 g de cristal ($e = 2{,}9$)?

Peso del plomo (fórmula del problema 144):

$$p - p_1 = \frac{p\,(e-1)}{e} = \frac{79{,}59 \times 10{,}37}{11{,}37} = 72{,}6\ \text{g.}$$

Peso del cristal:

$$p - p_1 = \frac{p\,(e-1)}{e} = \frac{101{,}5 \times 1{,}9}{2{,}9} = 66{,}5 \text{ g}.$$

Siendo 72,6 > 66,5, la balanza se inclinará del lado del plomo.

b) ¿Cuántos gramos de cristal habrá que añadir para equilibrar la balanza?

Sea d la diferencia entre el peso del plomo y el del cristal dentro del agua:

$$d = 72{,}6 - 66{,}5 = 6{,}1 \text{ g}.$$

El peso x de cristal que hay que agregar debe pesar d dentro del agua. Pero el volumen de x es $\frac{x}{e}$ y éstos son los gramos que pierde de peso dentro del agua; así tendremos:

$$x - \frac{x}{e} = d$$

$$\frac{x\,e - x}{e} = d$$

$$x\,(e-1) = d\,e$$

$$x = \frac{d\,e}{e-1} = \frac{6{,}1 \times 2{,}9}{1{,}9} = \mathbf{9{,}3\ g.}$$

SECCION IX

NEUMOMECÁNICA

147. En una **escopeta de viento** se han comprimido 1500 cm³ de aire hasta reducirlos a 300 cm³. ¿Qué presión ejercerá este gas sobre un proyectil que la reciba en una superficie de 3 cm², si el barómetro indica una presión de 720 mm?

En virtud de la ley de Boyle y Mariotte:

$$p\,v = p_1\,v_1$$

$$1500 \times 720 = x \times 300$$

$$x = \frac{1500 \times 720}{300} = 3600 \text{ mm.}$$

Pero de esta presión hay que restar los 720 mm de la presión atmosférica, y así la sobrepresión s resulta ser:

$$s = 3600 - 720 = \mathbf{2880\ mm.}$$

Pero 760 mm de mercurio equivalen a 1,033 Kg por cm²; y los 3 cm² del proyectil estarán sometidos a una fuerza de

$$3 \times \frac{2880}{760} \times 1{,}033 = \mathbf{11{,}7\ Kg.}$$

148. ¿Cuánto pesa **1 m³ de aire** a 0° y 720 mm?

Volumen ocupado a 760 mm:

$$v = \frac{720}{760}$$

Peso del metro cúbico de aire a 0° y 760 mm:

$$e = 1{,}293 \text{ Kg.}$$

Peso pedido:

$$P = v\,e = \frac{720}{760} \times 1{,}293 = \mathbf{1{,}225\ Kg.}$$

---

149. ¿Cuál es la **fuerza ascensional** de un globo de 1000 m³ de capacidad, lleno de hidrógeno a la presión de 720 mm, si el conjunto de envoltura y lastre pesa 800 Kg?

Volumen del hidrógeno a 760 mm:

$$v = 1000 \times \frac{720}{760} = 948 \text{ m}^3.$$

Peso:

$$p = v\,e = 948 \times 0{,}09 = 85 \text{ Kg.}$$

Peso del hidrógeno más envoltura y lastre:

$$P = 85 + 800 = 885 \text{ Kg.}$$

Peso del mismo volumen de aire:

$$P_1 = v \times e = 948 \times 1{,}293 = 1226 \text{ Kg.}$$

Fuerza ascensional:

$$F = P_1 - P = 1226 - 885 = \mathbf{341\ Kg.}$$

---

150. Un **globo** de 850 m³ de capacidad y lleno de hidrógeno asciende en el aire a la presión de 720 mm. Envoltura y lastre pesan 120 Kg. *a*) ¿Qué fuerza ascensional posee a 0° C? *b*) ¿Cuántos hombres serán necesarios para retener el globo, si cada uno ejerce un esfuerzo de 12,5 Kg? *c*) ¿Cuántos kilogramos de gas se desprenden, si el globo a 2000 m de altura halla una presión atmosférica de 580 mm?

a) La fuerza ascensional de 1 m³ de hidrógeno a 0° y 760 mm es igual a la diferencia de peso entre 1 m³ de aire y 1 m³ de hidrógeno:

$$f = 1{,}293 - 0{,}089 = 1{,}204 \text{ Kg}$$

y a 720 mm es:

$$1{,}204 \times \frac{720}{760}$$

La fuerza ascensional de los 850 m³ será:

$$850 \times 1{,}204 \times \frac{720}{760}$$

y restando de este valor el peso del lastre (120 Kg) tendremos para la fuerza ascensional del globo:

$$F = 969{,}5 - 120 = \mathbf{849{,}5\ Kg.}$$

b) Si cada hombre puede efectuar un esfuerzo de 12,5 Kg, el número de hombres necesarios para retener el globo será:

$$n = \frac{849{,}5}{12{,}5} = \mathbf{68} \text{ hombres.}$$

c) Si a 2000 m de altura el globo encuentra una presión de 580 mm, el volumen del gas será:

$$V = 850 \times \frac{720}{580} = 1056 \text{ m}^3$$

cuyo peso es:

$$850 \times 0{,}089 = 75{,}65 \text{ Kg.}$$

Pero siendo la capacidad del globo 850 m³, se desprenderán:

$$1056 - 850 = 206 \text{ m}^3$$

cuyo peso se deducirá de esta proporción:

$$\frac{1056}{75,65} = \frac{206}{x}; \qquad x = \mathbf{14,7 \text{ Kg.}}$$

---

151. El recinto de que se extrae el aire con una **máquina neumática** es de 4 litros y el cuerpo de bomba de la máquina es de 3 litros. ¿Cuál es el grado de enrarecimiento al terminar la tercera carrera del pistón? ¿y cuál es la altura barométrica, indicada por el barómetro truncado de la probeta, si la presión atmosférica al realizar el experimento es de 720 mm?

Valor del grado de enrarecimiento:

$$\delta = \left(\frac{v}{v+V}\right)^n = \left(\frac{4}{4+3}\right)^3 = \frac{4^3}{7^3} = \frac{64}{343} = \mathbf{0,187.}$$

Presión final:

$$p = \delta P = 0,187 \times 720 = \mathbf{134,6 \text{ mm.}}$$

---

152. ¿Cuál es la presión en el recipiente de una **bomba de aire** si el volumen de este recipiente es de 2 litros y el del cuerpo de bomba de 3 litros, *a*) después del primero, *b*) después del tercer vaivén del émbolo, *c*) y con qué fuerza queda adherido el recipiente a la platina después del tercer vaivén, si la base de la campana tiene un radio de 5 cm? (Presión atmosférica: 720 mm.)

a) Aplicando la fórmula del enrarecimiento al final del primer vaivén del émbolo:

$$\delta = \frac{R}{R+S}$$

siendo R = volumen del recipiente = 2 litros y S = volumen del cuerpo de bomba = 3 litros, tendremos:

$$\delta_1 = \frac{R}{R+S} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$$

y la presión P_1 al fin del primer vaivén será:

$$P_1 = \frac{2}{5} P = \frac{2}{5} 720 = \mathbf{288\ mm.}$$

b) Después del tercer vaivén del émbolo, el enrarecimiento vale:

$$\delta_3 = \left(\frac{R}{R+S}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

y la presión P_3 será:

$$P_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 P = 0{,}064 \times 720 = \mathbf{46{,}1\ mm.}$$

c) Area de la base: $\pi r^2 = 25\,\pi$ cm². Diferencia entre la presión interna y la externa:

$$720 - 46{,}1 = 673{,}9 \text{ mm.}$$

Peso de la columna de mercurio (d = 13,6) de esta altura y de 25 π cm² de base:

$$25\,\pi \times 67{,}4 \times 13{,}6 = \mathbf{72\ Kg.}$$

---

153. ¿Cuál debe ser la presión en el **depósito de aire** de una bomba de incendios para que el chorro de agua alcance el alero de un edificio de 3 pisos (16 m)?

La presión de 1 atmósfera corresponde teóricamente a un surtidor vertical de 10 m de altura; pero esa altura se reduce por diversas causas, y no siendo el surtidor vertical queda más reducida todavía (véanse los problemas referentes al tiro oblicuo). Así para alcanzar oblicuamente la altura de 16 m, la presión deberá ser **superior a 1,6 atmósferas** sobre la presión atmosférica.

---

154. ¿Con qué fuerza se mantienen unidos **dos hemisferios** de Magdeburgo de 12 cm de diámetro si con la presión atmosférica externa de 720 mm de mercurio se ha extraído de ellos el aire hasta la presión de 12 cm de mercurio?

Superficie común a ambos hemisferios:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}1416 \times 12^2}{4} = 113{,}1 \text{ cm}^2.$$

Diferencia de presión entre el interior y el exterior:

$$p = 720 - 120 = 600 \text{ mm de mercurio} = \\ = 60 \times 13{,}6 \text{ g/cm}^2 = 816 \text{ g/cm}^2.$$

Fuerza que los mantiene unidos:

$$F = S\,p = 113{,}1 \times 816 = \mathbf{92289 \text{ gramos.}}$$

---

155. Un **manómetro de agua,** abierto, indica en la tubería del gas una sobrepresión $h = 6{,}8$ cm, al tiempo que en el barómetro se lee una columna $b = 720$ mm. ¿Cuánto valen, *a*) la presión del gas, *b*) el peso específico del gas, *c*) el peso de la campana del gasómetro en la fábrica de gas, si cubre una superficie de 100 m²?

a) La presión absoluta del gas, en milímetros de mercurio, será:

$$p = 720 + \frac{68}{13{,}6} = \mathbf{725 \text{ mm.}}$$

b) El peso específico del gas del alumbrado es aproximadamente igual a la mitad del peso específico del aire; así, a 760 mm de presión, el peso específico será:

$$0{,}5 \times 0{,}001293 \text{ g/cm}^3$$

y a 725 mm:

$$\frac{725}{760} \times 0{,}5 \times 0{,}001293 = \mathbf{0{,}000617 \text{ g/cm}^3.}$$

c) La presión en el gasómetro es igual a la diferencia entre la presión interna y la externa, o sea igual a la sobrepresión del gas, que es, por a, de 5 mm de mercurio (= 0,5 cm).

Su valor, por cm^2, será:

$$0{,}5 \times 13{,}6 = 6{,}8 \text{ g/cm}^2$$

y la superficie total de 100 m^2 = 1000000 cm^2 recibirá una presión, que debe ser contrarrestada por el peso de la campana, igual a

$$P = 6{,}8 \times 10^6 \text{ g} = \mathbf{6800\ Kg.}$$

---

156. Las **alturas barométricas** medias en Colonia, Leipzig, Munich, Viena y Zurich son, respectivamente, 756, 751, 713, 744 y 722 mm. ¿Cuáles son las alturas de los citados lugares sobre el nivel del mar?

Diferencia de altitudes h entre dos lugares de alturas barométricas medias b_0 y b_1:

$$h = 18447 (\log b_0 - \log b_1).$$

En el caso actual b_0 es la presión media al nivel del mar, igual a 760 mm.

Así tendremos:

Colonia:

$$h = 18447 (\log 760 - \log 756) =$$
$$= 18447 (2{,}8808 - 2{,}8785) = 18447 \times 0{,}0023 = \mathbf{42\ m.}$$

Leipzig:

$$h = 18447 (\log 760 - \log 751) = 18447 (2{,}8808 - 2{,}8756) =$$
$$= 18447 \times 0{,}0052 = \mathbf{96\ m.}$$

Munich:

$$h = 18447 (\log 760 - \log 713) = 18447 (2{,}8808 - 2{,}8531) =$$
$$= 18447 \times 0{,}0277 = \mathbf{510\ m.}$$

Viena:

$$h = 18447\,(\log 760 - \log 744) = 18447\,(2{,}8808 - 2{,}8716) =$$
$$= 18447 \times 0{,}0092 = \mathbf{170\ m.}$$

Zurich:

$$h = 18447\,(\log 760 - \log 722) = 18447\,(2{,}8808 - 2{,}8585) =$$
$$= 18447 \times 0{,}0223 = \mathbf{411\ m.}$$

---

157. Las **alturas sobre el nivel del mar** de Madrid, Lima, México, Quito y Bogotá son respectivamente: 650, 153, 2260, 2908 y 2645 m. ¿Cuáles son las alturas barométricas medias en estos lugares?

De la fórmula

$$h = 18447\,(\log 760 - \log b)$$

se deduce

$$h = 18447 \times \log 760 - 18447 \times \log b$$

y de aquí:

$$\log b = \frac{18447 \times \log 760 - h}{18447} =$$
$$= \frac{18447 \times 2{,}8808 - h}{18447} = \frac{53142 - h}{18447}$$

y tendremos para:

Madrid:

$$\log b = \frac{53142 - 650}{18447} = \frac{52492}{18447} = 2{,}8455$$
$$b = 701\ \text{mm.}$$

Y así se haría para los demás lugares.

SECCIÓN X

ACÚSTICA

158. Problema del pozo:

Una **piedra cae en un pozo:** óyese el golpe con el fondo a los 5 segundos de haberla soltado. La velocidad del sonido es de 333 m por segundo. ¿Cuál es la profundidad del pozo?

Tiempo que emplea la piedra al caer, siendo h la profundidad del pozo:

$$t_1^2 = \frac{2h}{g}$$

Tiempo que emplea el sonido en recorrer el pozo:

$$t_2 = \frac{h}{333}$$

La suma de estos dos tiempos será igual al transcurrido entre el momento de soltar la piedra y el de oír el sonido:

$$T = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{333}$$

$$T = t_1 + t_2$$

$$T - t_2 = t_1$$

$$T - \frac{h}{333} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$T^2 - \frac{2\,T h}{333} + \frac{h^2}{333^2} = \frac{2\,h}{g}$$

$$\frac{n^2}{333^2} - 2\,h\left(\frac{T}{333} + \frac{1}{g}\right) + T^2 = 0$$

$$h^2 - 2\,h\left(333\,T + \frac{333^2}{g}\right) + 333^2\,T^2 = 0$$

$$h = 333\,T + \frac{333^2}{g} \pm$$

$$\pm\sqrt{333^2\,T^2 + \frac{2 \times 333^3 \times T}{g} + \frac{333^4}{g^2} - 333^2\,T^2} =$$

$$= 333\left[T + \frac{333}{g} \pm \sqrt{\frac{2 \times 333 \times T}{g} + \frac{333^2}{g^2}}\right] = \sim \mathbf{110\ m.}$$

---

159. Hallar la longitud de onda de la voz de un **bajo** que da 61 vibraciones por segundo y de la voz de una **tiple** que produce una nota de 2000 vibraciones por segundo.

Aplicando la fórmula

$$\lambda = \frac{333}{n}$$

tendremos para el bajo:

$$\lambda = \frac{333}{61} = \mathbf{5{,}46\ metros}$$

y para la tiple

$$\lambda = \frac{333}{2000} = \mathbf{0{,}17\ metros.}$$

---

160. Sabiendo que el **número de vibraciones** del la_3 es 435, calcúlense los números de vibraciones de las demás notas de la misma octava, y las respectivas longitudes de onda en el aire.

Siendo los sucesivos intervalos de la escala musical:

$$\frac{do_3}{do_3} = 1; \quad \frac{re}{do} = \frac{9}{8}; \quad \frac{mi}{do} = \frac{5}{4}; \quad \frac{fa}{do} = \frac{4}{3}; \quad \frac{sol}{do} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{la}{do} = \frac{5}{3}; \quad \frac{si}{do} = \frac{15}{8}; \quad \frac{do_4}{do_3} = 2$$

y dado el número de vibraciones del $la = 435$, calcularemos así los números de vibraciones de las restantes notas:

Para el do_3:

$$\frac{435}{x} = \frac{5}{3}; \qquad x = \frac{1305}{5} = \mathbf{261.}$$

Para el re_3:

$$\frac{x}{261} = \frac{9}{8}; \qquad x = \frac{2349}{8} = \mathbf{293.}$$

Para el mi_3:

$$\frac{x}{261} = \frac{5}{4}; \qquad x = \frac{1305}{4} = \mathbf{326.}$$

Para el fa_3:

$$\frac{x}{261} = \frac{4}{3}; \qquad x = \frac{1044}{4} = \mathbf{348.}$$

Para el sol_3:

$$\frac{x}{261} = \frac{3}{2}; \qquad x = \frac{783}{2} = \mathbf{391.}$$

Para el si_3:

$$\frac{x}{261} = \frac{15}{8}; \qquad x = \frac{3915}{8} = \mathbf{489.}$$

Para el do_4:

$$x = 2 \times 261 = \mathbf{522.}$$

Longitudes de onda. Calcúlase la longitud de onda en el aire, dividiendo la velocidad del sonido en el aire por el número de vibraciones por segundo:

$$\lambda = \frac{c}{n}$$

Tendremos:

Longitud de onda del do_3 . . . . $\lambda = \frac{333}{261} = 1{,}27$ m.

» » del re_3 . . . . $\lambda = \frac{333}{293} = 1{,}13$ m.

» » del mi_3 . . . . $\lambda = \frac{333}{326} = 1{,}02$ m.

» » del fa_3 . . . . $\lambda \doteq \frac{333}{348} = 0{,}95$ m.

» » del sol_3 . . . . $\lambda = \frac{333}{391} = 0{,}85$ m.

» » del la_3 . . . . $\lambda = \frac{333}{435} = 0{,}76$ m.

» » del si_3 . . . . $\lambda = \frac{333}{489} = 0{,}68$ m.

» » del do_4 . . . . $\lambda = \frac{333}{522} = 0{,}63$ m.

---

161. Calcúlense las longitudes de los **tubos abiertos** de órgano destinados a producir las notas de la tercera octava

En el caso de tubos abiertos, la longitud es igual a la mitad de la longitud de onda. Así tendremos para la longitud de los tubos destinados a dar las diversas notas de la tercera octava:

do_3 . . . . $l = \frac{\lambda}{2} = \frac{1{,}27}{2} = 0{,}635$ m.

re_3 . . . . $l = \frac{1{,}13}{2} = 0{,}565$ m.

mi_3 . . . . $l = \frac{1{,}02}{2} = 0{,}510$ m.

fa_3 . . . . $l = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$ m.

sol_3 . . . . $l = \frac{0{,}85}{2} = 0{,}425$ m.

la_3 . . . . $l = \frac{0{,}76}{2} = \mathbf{0{,}380\ m.}$

si_3 . . . . $l = \frac{0{,}68}{2} = \mathbf{0{,}340\ m.}$

do_4 . . . . $l = \frac{0{,}63}{2} = \mathbf{0{,}315\ m.}$

---

162. Sóplese en una llave cuyo hueco tenga una profundidad de 3 cm. ¿A qué número de vibraciones corresponderá el **sonido producido?**

En el caso de tubos cerrados, la longitud de onda es igual al cuádruple de la longitud. Así, para la llave cuyo hueco es de 3 cm, la longitud de onda será:

$$\lambda = 4\,l = 4 \times 3 = \mathbf{12\ cm}$$

y el número de vibraciones:

$$n = \frac{333}{0{,}12} = \mathbf{2775.}$$

Dividiendo reiteradamente por 2 este número, hasta hallar alguno de los valores de números de vibraciones correspondientes a la tercera octava (véase el penúltimo problema), tendremos que

$$\frac{2775}{2^3} = \frac{2775}{8} = 347$$

da muy aproximadamente el número de vibraciones del fa_3; luego el silbido de la llave corresponde a la nota $\mathbf{fa_6}$.

---

163. El **silbato** de una locomotora da determinada nota. ¿Con qué velocidad debe acercarse el tren a un observador inmóvil para que éste perciba la misma nota sostenida?

Las n ondas producidas por el silbo resultan más apretadas en el sentido de la velocidad v del tren, pues las producidas en un segundo ya no quedan distribuídas en una longitud $c = 333$ m, sino en la $c - v$.

El observador no percibirá la nota de longitud de onda $\lambda = \frac{c}{n}$ sino la de longitud de onda $\lambda' = \frac{c - v}{n}$

Una nota sostenida tiene un número de vibraciones n' igual a $\frac{25}{24}$ del número de vibraciones n de la misma nota natural:

$$n' = \frac{25}{24} n$$

y en consecuencia una longitud de onda λ' igual a los $\frac{24}{25}$ de la longitud de onda λ de la misma nota natural:

$$\lambda' = \frac{24}{25} \lambda.$$

Igualando los dos valores que hemos hallado para λ':

$$\frac{c - v}{n} = \frac{24}{25} \lambda$$

y substituyendo λ por su valor $\frac{c}{n}$

$$\frac{c - v}{n} = \frac{24}{25} \frac{c}{n}.$$

o sea

$$c - v = \frac{24}{25} c$$

$$v = c\left(1 - \frac{24}{25}\right) = \frac{1}{25} c = \frac{333}{25} = 13{,}4 \text{ m/seg.} =$$

$$= \mathbf{48{,}24 \ Km/hora.}$$

---

164. Un silbato inmóvil da determinada nota. ¿Con qué velocidad debe dirigirse hacia él un **automóvil** para que los viajeros perciban la nota sostenida?

Por segundo recibirá el oído del viajero no sólo las n ondas comprendidas en la longitud de $c = 333$ m, sino, *además*, las n_1 comprendidas en la longitud v de la velocidad del auto en el sentido del silbato:

$$\frac{c}{n} = \frac{v}{n_1}; \qquad n_1 = \frac{n\,v}{c}$$

La nota sostenida tiene un número de vibraciones $n' = \frac{25}{24}n$ y como $n' = n + n_1$ tendremos:

$$n + n_1 = \frac{25}{24}n$$

y substituyendo n_1 por su valor

$$n + \frac{n\,v}{c} = \frac{25}{24}n$$

$$1 + \frac{v}{c} = \frac{25}{24}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{25}{24} - 1 = \frac{1}{24}$$

$$v = \frac{1}{24}c = \frac{333}{24} = 14 \text{ m/seg.} = \mathbf{50{,}4\ Km/hora.}$$

---

165. Resolver los mismos problemas para los casos en que la nota se oiga **bemolizada:** *a*) porque el tren se aleje del observador inmóvil; *b*) porque el observador se aleje del silbato inmóvil.

La resolución se funda en el mismo principio (**principio de Doppler**), teniendo en cuenta que el número de vibraciones n' de la nota bemolizada es igual a los $\frac{24}{25}$ del número de vibraciones n de la nota natural.

a) La última fórmula del problema 163 será:

$$v = \frac{1}{24}c = 14 \text{ m/seg.} = \mathbf{50{,}4\ Km/hora.}$$

b) La última fórmula del problema 164 será:

$$v = \frac{1}{25}\,c = 13{,}4\ \text{m/seg.} = \mathbf{48{,}24\ Km/hora.}$$

La comparación de los tres problemas últimos indica que para elevar el tono de una nota es más eficaz el movimiento del foco sonoro que el del observador, y para rebajarlo es más eficaz el movimiento del observador que el del foco sonoro.

SECCION XI

ÓPTICA

166. ¿Cuál es en **años de tren** (velocidad del tren: 20 m por segundo) *a*) la distancia del Sol, y *b*) la distancia de la estrella α del Centauro a la Tierra, si expresada esta distancia en años de luz es de $3\ ^1/_2$?

El equivalente en kilómetros de un año de tren será:

$$0{,}02 \times 3600 \times 24 \times 365 = 630720 \text{ Km.}$$

a) Años de tren del Sol a la Tierra:

$$\frac{149500000}{630720} = \mathbf{237\ años\ de\ tren.}$$

b) Equivalente en kilómetros del año de luz:

$$300000 \times 3600 \times 24 \times 365 = 9460800000000 \text{ Km;}$$

así, los 3,5 años de luz equivaldrán a

$$9460800000000 \times 3{,}5 = 33112800000000 \text{ Km.}$$

y los correspondientes años de tren serán:

$$\frac{33112800000000}{630720} = \mathbf{52500000\ años\ de\ tren.}$$

---

167. Expresar en **parsecs** la distancia de la Tierra a la estrella α del Centauro, sabiendo que 1 parsec equivale a 3,26 años de luz.

$$l = \frac{3{,}5}{3{,}26} = \mathbf{1{,}07\ parsecs.}$$

1 parsec = distancia correspondiente a la paralaje de 1 segundo para el semidiámetro de la órbita terrestre, es

decir, la distancia, normal al plano de la eclíptica, desde la cual se vería según el ángulo de un segundo la distancia media de la Tierra al Sol.

Pero el arco (igual al seno, igual a la tangente) del ángulo de 1'' está contenido 206265 veces en el radio. Siendo la distancia media de la Tierra al Sol igual a 149500000 Km, el parsec valdrá

$$149500000 \times 206265 \text{ Km} = 30818437500000 \text{ Km}$$

y como el año de luz (problema anterior) equivale a 9460800000000 Km, tendremos:

$$\frac{1 \text{ parsec}}{1 \text{ año de luz}} = 3{,}26.$$

---

168. Calcúlese la iluminación producida: *a*) por un **mechero de gas** de 10 bujías situado a 3 m de distancia; *b*) por una **lámpara de incandescencia** de 32 bujías situada a 4 m; *c*) por una **lámpara de arco** de 400 bujías situada a 100 m.

a) $$I = \frac{S}{r^2} = \frac{10}{3^2} = \frac{10}{9} = \mathbf{1{,}1 \text{ bujías-metro.}}$$

b) $$I = \frac{S}{r^2} = \frac{32}{4^2} = \frac{32}{16} = \mathbf{2 \text{ bujías-metro.}}$$

c) $$I = \frac{S}{r^2} = \frac{400}{100^2} = \frac{400}{10000} = \mathbf{0{,}04 \text{ bujías-metro.}}$$

---

169. Una llama de gas de 10 bujías arde a la altura de 80 cm **sobre la mesa**; ¿a qué altura se debería instalar una lámpara eléctrica de incandescencia de 32 bujías, para que la iluminación fuera igual a 1,5 veces la de la llama de gas?

$$I = \frac{S}{r^2}; \qquad I' = \frac{S'}{r'^2} = 1{,}5\, I$$

$$\frac{S'}{r'^2} = 1{,}5\, \frac{S}{r^2}$$

$$r'^2 = \frac{S'\, r^2}{1{,}5\, S} = \frac{32 \times 0{,}8^2}{1{,}5 \times 10} = 1{,}365 = \sim \mathbf{1{,}37 \text{ m.}}$$

---

170. Dos lámparas de incandescencia de 16 bujías, distan una de otra 5 m y están instaladas a la altura de 2 m sobre la mesa. ¿Cuál es la iluminación de la mesa en el punto equidistante de ambas lámparas?

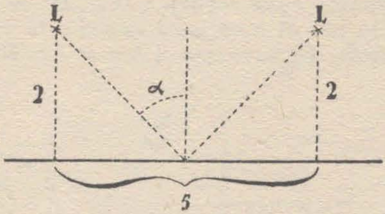


Fig. 34

Iluminación, en el punto central debida a una lámpara: (Véase la figura 34).

$$I = \frac{S}{r^2} \cos \alpha$$

$$S = 16$$

$$r^2 = 2^2 + 2{,}5^2 = 10{,}25$$

$$r = \sqrt{10{,}25} = 3{,}2$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{r} = \frac{2}{3{,}2} = 0{,}625$$

$$I = \frac{S}{r^2} \cos \alpha = \frac{16}{10{,}25} \times 0{,}625 = 0{,}97 = \sim 1$$

y para las dos lámparas:

$2\,I = \sim$ **2 bujías-metro.**

---

171. En la orilla de un lago se eleva una torre de 50 m. ¿A qué distancia de la torre debe hallarse situado un bote que impida ver desde lo alto de la torre la **imagen del Sol** en las aguas del lago cuando el Sol se halla a una altura *a*) de 45°, y *b*) de 30° sobre el horizonte?

a) Estando el Sol a 45°, éste es el valor del ángulo de incidencia en el lago; se formará un triángulo rectángulo de catetos iguales, cuyo vértice *A* (fig. 35) es el que debe estar ocupado por el bote para impedir la vista desde *T* del Sol reflejado. En este caso $AB = BT =$ **50 m.**

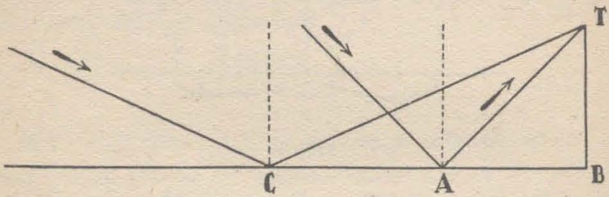


Fig. 35

b) Cuando el Sol se halle a 30° sobre el horizonte, entre el rayo reflejado, la superficie del lago y la torre se formará el triángulo rectángulo *C B T*, y tendremos:

$$CB = BT \cot 30^\circ$$

$$CB = 50 \times 1{,}732 = \mathbf{86{,}6\ m}$$

o *por logaritmos:*

$$\log CB = \log 50 + \log \cot 30^\circ$$
$$\log 50 = 1{,}6990$$
$$\log \cot 30^\circ = 0{,}2385$$
$$\log CB = 1{,}9375$$
$$CB = \mathbf{86{,}6\ m.}$$

---

172. En una disposición de lectura de desviaciones con la **palanca óptica,** se desea que a una desviación de 1° corresponda un recorrido de 10 cm. ¿A qué distancia el espejo debe hallarse de la escala?

En el triángulo $A\,B\,C$ (fig. 36) se verifica $C\,B = A\,B \operatorname{tg} \varphi$, pero siendo $\varphi = 2\,\alpha$ tendremos:

$$10 = x \operatorname{tg} 2\,\alpha = x \operatorname{tg} 2^{\circ}.$$

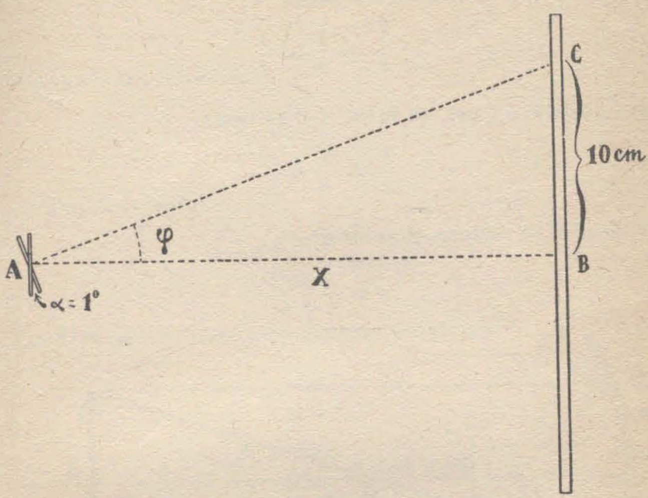


Fig. 36

Pero

$$\operatorname{tg} 2^{\circ} = 0{,}0349$$

luego

$$x = \frac{10}{0{,}0349} = \mathbf{287\ cm.}$$

Por logaritmos:

$$\log x = \log 10 - \log \operatorname{tg} 2^{\circ}$$
$$\log 10 = 1{,}0000$$
$$\log \operatorname{tg} 2^{\circ} = \bar{2}{,}5430$$
$$\log x = 2{,}4570$$
$$x = \mathbf{287\ cm.}$$

---

173. Un espejo cóncavo da, de un objeto situado a la distancia $a = 2$ m, una imagen real a la distancia

$b = 70$ cm. ¿Cuál es el **radio de curvatura** del espejo? Dibújese la correspondiente figura.

Si en la fórmula de los espejos

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

se substituye f por su valor $^1/_2\, r$ se tiene:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}$$

y de aquí se deduce el valor de r:

$$r = \frac{2ab}{a+b}$$

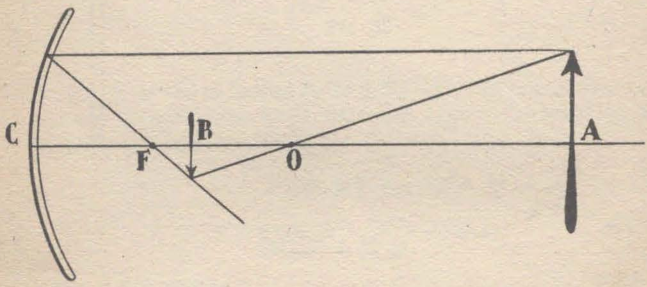


Fig. 37

Substituyendo valores:

$$r = \frac{2 \times 2 \times 0{,}7}{2{,}7} = \mathbf{1{,}037\ m.}$$

Representación: figura 37.

---

174. De una ventana de 1,9 m de altura, un espejo cóncavo da una imagen de 3 cm de altura a 55 cm del espejo. ¿A qué distancia se halla la ventana y cuál es el radio del espejo?

La razón del tamaño del objeto al tamaño de la imagen es en los espejos esféricos la siguiente:

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

de esta igualdad se deduce:

$$a=\frac{A\,b}{B}$$

y substituyendo valores:

$$a=\frac{1{,}9\times 0{,}55}{0{,}03}=\mathbf{34{,}8\ m.}$$

Por otra parte (véase el problema anterior):

$$r=\frac{2\,a\,b}{a+b}$$

$$r=\frac{2\times 0{,}55\times 34{,}8}{34{,}8+0{,}55}=\mathbf{1{,}08\ m.}$$

---

175. ¿Cuántos milímetros **se aleja la imagen**, si el objeto pasa de la distancia de 30 m a la de 20 m de un espejo de radio $r=90$ cm?

De

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}$$

se deduce

$$b=\frac{a\,r}{2\,a-r}$$

y con otras distancias, a' y b':

$$b'=\frac{a'\,r}{2\,a'-r}$$

luego

$$b - b' = \frac{a\,r}{2\,a - r} - \frac{a'\,r}{2\,a' - r} = \frac{r^2\,(a' - a)}{4\,a\,a' - 2\,r\,(a + a') + r^2} =$$

$$= \frac{8,1}{2310} = \mathbf{0,0035\ m.}$$

---

176. Un rayo de luz **pasa del aire al agua** formando con la normal sucesivamente los ángulos $\alpha = 30°$, $45°$, $60°$, $75°$. Dibújense los correspondientes rayos

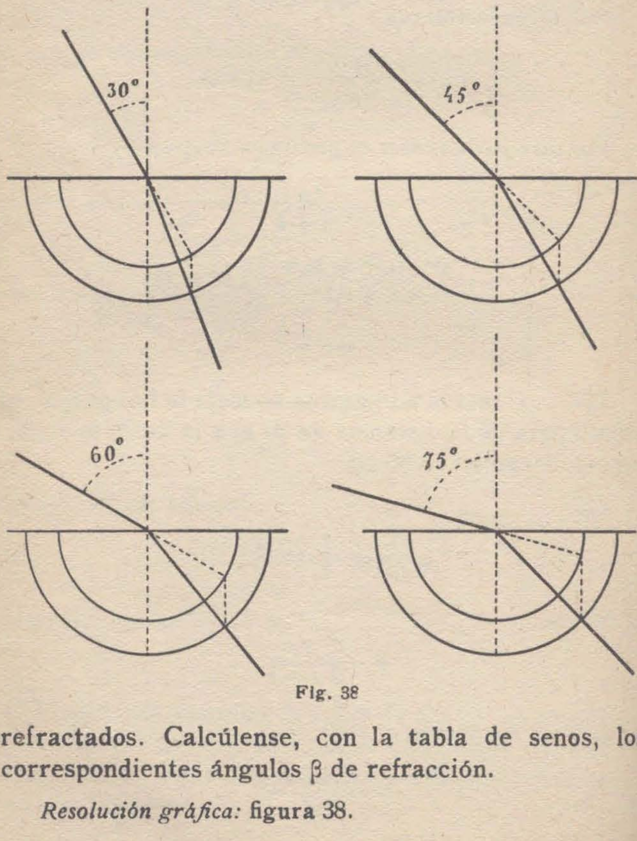


Fig. 38

refractados. Calcúlense, con la tabla de senos, los correspondientes ángulos β de refracción.

Resolución gráfica: **figura 38.**

Por el cálculo:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} = n, \qquad \text{sen } \beta = \frac{\text{sen } \alpha}{n} = \frac{\text{sen } \alpha}{\frac{4}{3}} = \frac{3 \text{ sen } \alpha}{4}$$

$$\alpha = 30^\circ; \text{ sen } \alpha = 0{,}5; \text{ sen } \beta = \frac{3 \times 0{,}5}{4} = 0{,}375; \quad \beta = \mathbf{22^\circ}$$

$$\alpha = 45^\circ; \quad \text{sen } \alpha = 0{,}7071;$$

$$\text{sen } \beta = \frac{3 \times 0{,}7071}{4} = 0{,}5303; \quad \beta = \mathbf{32^\circ}$$

$$\alpha = 60^\circ; \quad \text{sen } \alpha = 0{,}866;$$

$$\text{sen } \beta = \frac{3 \times 0{,}866}{4} = 0{,}649; \quad \beta = \mathbf{40^\circ 30'}$$

$$\alpha = 75^\circ; \quad \text{sen } \alpha = 0{,}9659;$$

$$\text{sen } \beta = \frac{3 \times 0{,}9659}{4} = 0{,}724; \quad \beta = \mathbf{46^\circ 25'}.$$

Con logaritmos:

$$\log \text{ sen } \beta = \log \text{ sen } \alpha - \log n$$

$$\log n = \log 4 - \log 3 = 0{,}6021 - 0{,}4771 = 0{,}1250$$

$$\alpha = 30^\circ; \log \text{ sen } \alpha = \bar{1}{,}6989;$$

$$\log \text{ sen } \beta = \bar{1}{,}6989 - 0{,}1250 = \bar{1}{,}5739; \ \beta = \mathbf{22^\circ}$$

$$\alpha = 45^\circ; \log \text{ sen } \alpha = \bar{1}{,}8495;$$

$$\log \text{ sen } \beta = \bar{1}{,}8495 - 0{,}1250 = \bar{1}{,}7245; \ \beta = \mathbf{32^\circ}$$

$$\alpha = 60^\circ; \log \text{ sen } \alpha = \bar{1}{,}9375;$$

$$\log \text{ sen } \beta = \bar{1}{,}9375 - 0{,}1250 = \bar{1}{,}8125; \ \beta = \mathbf{40^\circ 30'}$$

$$\alpha = 75^\circ; \log \text{ sen } \alpha = \bar{1}{,}9849;$$

$$\log \text{ sen } \beta = \bar{1}{,}9849 - 0{,}1250 = \bar{1}{,}8599; \ \beta = \mathbf{46^\circ 25'}.$$

---

177. El diamante tiene un **índice de refracción** $n = 2{,}5$. ¿Cuál es la velocidad de la luz en el diamante?

Siendo el índice de refracción del diamante, con respecto al aire, 2,5, si designamos por V la velocidad de la luz en el aire y por v la velocidad de la luz en el diamante, tendremos:

$$\frac{V}{v} = n; \qquad \frac{300\,000}{v} = 2{,}5$$

$$v = \frac{300\,000}{2{,}5} = \mathbf{120\,000\ Km\ por\ seg.}$$

---

178. Calcúlese la **desviación paralela** experimentada por un rayo de luz a través de una lámina de caras paralelas, de espesor $e = 10$ cm e índice de refracción $n = 1{,}5$, siendo el ángulo de incidencia $\alpha = 45^{\circ}$

Valor de la desviación paralela:

$$d = e\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos\beta}$$

De

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = n$$

se deduce:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{n} = \frac{\operatorname{sen}45^{\circ}}{1{,}5} = \frac{0{,}7071}{1{,}5} = 0{,}471; \quad \beta = 28^{\circ}10'$$

$$\alpha - \beta = 45^{\circ} - 28^{\circ}10' = 16^{\circ}50'$$

$$d = 0{,}1\,\frac{\operatorname{sen}16^{\circ}50'}{\cos 28^{\circ}10'} = 0{,}1\,\frac{0{,}2896}{0{,}8815} = \mathbf{0{,}033\ m.}$$

Por logaritmos.
Determinación de β:

$$\log\operatorname{sen}\beta = \log\operatorname{sen}\alpha - \log n =$$
$$= \log\operatorname{sen}45^{\circ} - \log 1{,}5 = \overline{1},8495 - 0{,}1761 = \overline{1},6734$$

$$\beta = 28^{\circ}10'$$

$$\alpha - \beta = 16^{\circ}50'$$

$$\log d = \log e + \log\operatorname{sen}16^{\circ}50' - \log\cos 28^{\circ}10'$$

$$\begin{array}{ll}
\log e = \log 10 = \ldots\ldots\ldots & 1{,}0000 \\
\log \operatorname{sen} 16^\circ 50' = \ldots\ldots\ldots & \bar{1}{,}4618 \\
\hline
 & 0{,}4618 \\
\log \cos 28^\circ 10' = \ldots\ldots\ldots & \bar{1}{,}9453 \\
\hline
\log d = \ldots\ldots\ldots & 0{,}5165
\end{array}$$

$$d = \mathbf{3{,}3\ cm.}$$

---

179. Determínese la **marcha de un rayo de luz** a través de un prisma de vidrio ($n = 1{,}5$) de ángulo

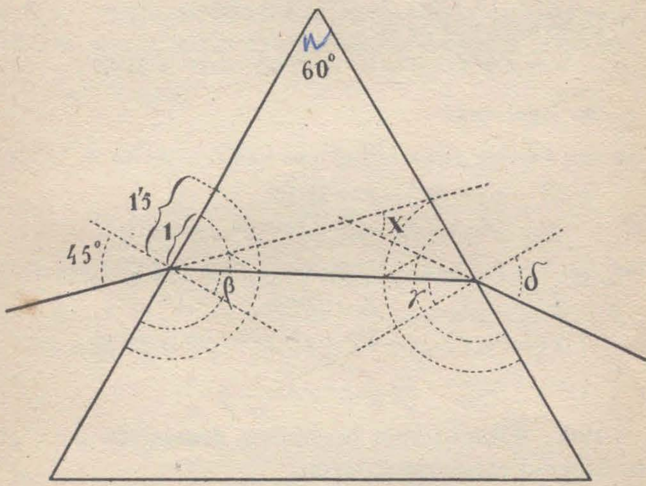


Fig. 39

refringente $\omega = 60^\circ$, siendo $\alpha = 45^\circ$. *a*) **Gráficamente;** *b*) **por el cálculo.**

a) Véase la figura 39.
b) Aplicaremos las cuatro fórmulas del prisma:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = n; \qquad \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \gamma} = n; \qquad \beta + \gamma = \omega; \qquad x = \alpha + \delta - \omega.$$

Determinación de β:

$$\text{sen}\,\beta = \frac{\text{sen}\,\alpha}{n} = \frac{\text{sen}\,45^\circ}{1{,}5} = \frac{0{,}7071}{1{,}5} = 0{,}471; \qquad \beta = \mathbf{28^\circ 10'}.$$

Determinación de γ:

$$\beta + \gamma = \omega, \qquad \gamma = \omega - \beta = 60^\circ - 28^\circ 10' = \mathbf{31^\circ 50'}.$$

Determinación de δ:

$$\frac{\text{sen}\,\delta}{\text{sen}\,\gamma} = n; \qquad \text{sen}\,\delta = n\,\text{sen}\,\gamma = 1{,}5 \times \text{sen}\,31^\circ 50' =$$

$$= 1{,}5 \times 0{,}5275 = 0{,}7911$$

$$\delta = \mathbf{52^\circ 20'}.$$

Determinación de x:

$$x = \alpha + \delta - \omega = 45^\circ + 52^\circ 20' - 60^\circ = \mathbf{37^\circ 20'}.$$

Por logaritmos:

$$\log\,\text{sen}\,\beta = \log\,\text{sen}\,\alpha - \log n = \bar{1}{,}8495 - 0{,}1761 = \bar{1}{,}6734;$$

$$\beta = \mathbf{28^\circ 10'}$$

$$\gamma = \omega - \beta = 60^\circ - 28^\circ 10' = \mathbf{31^\circ 50'}$$

$$\log\,\text{sen}\,\delta = \log\,\text{sen}\,\gamma + \log n = \bar{1}{,}7222 + 0{,}1761 = \bar{1}{,}8983$$

$$\delta = \mathbf{52^\circ 20'}$$

$$x = \alpha + \delta - \omega = 45^\circ + 52^\circ 20' - 60^\circ = \mathbf{37^\circ 20'}.$$

---

180. ¿Cuánto vale la **mínima desviación** para el prisma del problema anterior?

En el caso de la mínima desviación:

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2}\,\omega = \frac{1}{2}\,60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{sen}\,\alpha = n\,\text{sen}\,\beta = 1{,}5 \times \text{sen}\,30^\circ = 1{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}75$$

$$\alpha = \delta = 48^\circ 40'$$

$$x = 2\,\alpha - \omega = 97^\circ 20' - 60^\circ = \mathbf{37^\circ 20'}.$$

---

181. ¿Cuál es el **índice de refracción** del vidrio de un prisma que con un ángulo refringente $\omega = 50^o$ produce una mínima desviación $x = 35^o$?

$$n = \frac{\text{sen}\,\frac{\omega + x}{2}}{\text{sen}\,\frac{\omega}{2}} = \frac{\text{sen}\,\frac{50+35}{2}}{\text{sen}\,\frac{50}{2}} = \frac{\text{sen}\,42^o30'}{\text{sen}\,25^o} = \frac{0{,}675}{0{,}423}$$

$$n = \mathbf{1{,}6}.$$

---

182. Una lente de vidrio ($n = 1{,}5$) planoconvexa da de un objeto situado a 1 m de distancia una imagen real a 40 cm. ¿Cuál es el **radio de curvatura** de la lente?

De las fórmulas

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

y atendiendo a que por ser la lente planoconvexa, uno de los radios, p. ej., r', es infinito, y en consecuencia $\frac{1}{r'} = 0$, se deducirá:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\,\frac{1}{r}$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{n-1}{r}$$

$$r = \frac{(n-1)\,ab}{a+b} = \frac{0{,}5 \times 0{,}4}{1{,}4} = \mathbf{0{,}143\ m}.$$

---

183. Una lente biconvexa, simétrica, de radios $r = 30$ cm, da de un objeto situado a 1,5 m una imagen a 37,5 cm. ¿Cuál es el **índice de refracción** del vidrio o cristal de la lente?

La fórmula

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

siendo $r=r'$ se convierte en:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\frac{2}{r}$$

y de ella se deduce:

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{2(n-1)}{r}.$$

$$\frac{(a+b)r}{2ab}=n-1$$

$$n=\frac{(a+b)r}{2ab}+1=\frac{(1,5+0,375)\,0,3}{2\times 1,5\times 0,375}+1=0,5+1=\mathbf{1,5.}$$

---

184. ¿Qué tamaño tiene la **imagen de la Luna** dada por una lente biconvexa de vidrio ($n=1,5$) de radios $r=30$ cm? Datos: distancia de la Luna a la Tierra 59 radios terrestres; diámetro de la Luna $\frac{4}{7}$ radios terrestres.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(n-1)\frac{2}{r}$$

y designando por L el diámetro de la Luna y por l el de su imagen:

$$\frac{L}{l}=\frac{a}{b}$$

Eliminando b entre ambas fórmulas:

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{2(n-1)}{r}$$

$$(a+b)r=2ab(n-1)$$

$$ar+br=2abn-2ab$$

$$ar=b(2an-2a-r)$$

y substituyendo b por su valor deducido de la segunda fórmula

$$b = \frac{al}{L}$$

tendremos:

$$ar = \frac{al}{L}(2an - 2a - r)$$

$$Lr = l(2an - 2a - r)$$

$$l = \frac{Lr}{2a(n-1) - r}$$

$$r = 30; \quad n = 1{,}5$$

$$L = \frac{4}{7} \text{ radio terrestre} = \frac{4}{7}\, 6369 \text{ Km} = 3639{,}5 \text{ Km} =$$
$$= 363950000 \text{ cm.}$$

$$a = 59 \text{ radios terrestres} = 59 \times 6369 \text{ Km} =$$
$$= 377771 \text{ Km} = 37777100000 \text{ cm.}$$

$$l = \frac{363950000 \times 30}{2 \times 37777100000 \times 0{,}5 - 30} = \mathbf{0{,}3\ cm.}$$

---

185. ¿Qué **distancia focal** tendrá una gotícula de agua de 2 mm de radio? ¿Y si fuera de vidrio?

$$\frac{1}{f} = (n-1)\frac{2}{r}$$

$$f = \frac{r}{2(n-1)} = \frac{2}{2(n-1)}$$

Siendo de agua:

$$n = 1{,}33; \quad n - 1 = 0{,}33; \quad 2(n-1) = 0{,}66$$

$$f = \frac{2}{0{,}66} = \mathbf{3\ mm.}$$

Siendo de vidrio:

$$n = 1{,}5; \quad n - 1 = 0{,}5; \quad 2(n-1) = 1$$

$$f = \frac{2}{1} = \mathbf{2\ mm.}$$

---

186. Dos lentes positivas iguales ($r_1 = 30$ cm, $r_2 = 40$ cm, $n = 1{,}5$) se hallan instaladas en un tubo a la distancia $l = 90$ cm. Determínese tamaño, clase y situación de la imagen de un objeto de 12 cm situado a la distancia *a*) 3 m, *b*) 60 cm, *c*) 20 cm de la primera lente.

Distancia focal de las lentes:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 0{,}5\left(\frac{1}{0{,}3} + \frac{1}{0{,}4}\right) = 2{,}916;$$

$$f = \frac{1}{2{,}916} = 0{,}343 \text{ m.}$$

Distancias para la primera lente:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}; \quad b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f}$$

Tamaños del objeto y su imagen en la primera lente:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{a_1}{b_1}$$

Distancias para la segunda lente:

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f}; \quad b_2 = \frac{a_2 f}{a_2 - f}$$

siendo

$$a_2 = l - b_1.$$

Tamaños del objeto y su imagen en la segunda lente:

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{a_2}{b_2}$$

Primer caso: $a_1 = 3$ m.

$$b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = \frac{3 \times 0{,}343}{3 - 0{,}343} = \frac{1{,}029}{2{,}657} = 0{,}387 \text{ m}$$

$$B_1 = \frac{b_1 A_1}{a_1} = \frac{0{,}387 \times 0{,}12}{3} = 0{,}0155 \text{ m}$$

$$a_2 = l - b_1 = 0{,}9 - 0{,}387 = 0{,}513$$

$$b_2 = \frac{(0{,}9 - 0.387)\, 0{,}343}{0{,}9 - 0{,}343 - 0{,}387} = \mathbf{1{,}4\ m}$$

$$B_2 = \frac{B_1 b_2}{l - b_1} = \frac{0{,}015 \times 1{,}4}{0{,}9 - 0{,}387} = \frac{0{,}021}{0{,}513} = \mathbf{0{,}05\ m.}$$

Habiendo resultado positivos b_1 y b_2 la imagen es **real** y **derecha.**

Segundo caso: $a_1 = 0{,}60$ m.

$$b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = \frac{0{,}60 \times 0{,}343}{0{,}60 - 0{,}343} = 0{,}800 \text{ m}$$

$$B_1 = \frac{b_1 A_1}{a_1} = \frac{0{,}8 \times 0{,}12}{0{,}6} = 0{,}16 \text{ m}$$

$$a_2 = l - b_1 = 0{,}9 - 0{,}8 = 0{,}1$$

$$b_2 = \frac{a_2 f}{a_2 - f} = \frac{0{,}1 \times 0{,}343}{0{,}1 - 0{,}343} = \frac{0{,}0343}{-0{,}243} = \mathbf{-\,0{,}141\ m}$$

$$B_2 = \frac{B_1 b_2}{a_2} = \frac{0{,}16 \times 0{,}141}{0{,}1} = \mathbf{0{,}225\ m.}$$

Siendo negativo b_2 y positivo b_1 la imagen es **virtual** e **invertida.**

Tercer caso: $a_1 = 0{,}20$ m.

$$b_1 = \frac{a_1 f}{a_1 - f} = \frac{0{,}2 \times 0{,}343}{0{,}2 - 0{,}343} = \frac{0{,}0686}{-0{,}143} = -\,0{,}479$$

$$B_1 = \frac{b_1 A_1}{a_1} = \frac{0{,}479 \times 0{,}12}{0{,}2} = 0{,}287 \text{ m}$$

$$a_2 = l - b_1 = 0{,}9 - (-0{,}479) = 1{,}379 \text{ m}$$

$$b_2 = \frac{a_2 f}{a_2 - f} = \frac{1{,}379 \times 0{,}343}{1{,}379 - 0{,}343} = \mathbf{0{,}456 \text{ m}}$$

$$B_2 = \frac{B_1 b_2}{a_2} = \frac{0{,}287 \times 0{,}456}{1{,}379} = \mathbf{0{,}095 \text{ m.}}$$

Por ser positivo b_2 la imagen B_2 es **real;** pero por ser negativo b_1 (y en consecuencia B_1 virtual), la B_2 estará **invertida.**

---

187. Una **lente positiva** de 30 cm de distancia focal y una **lente negativa** de 20 cm de distancia focal están montadas en un tubo a la distancia de 50 cm. Determínese la imagen de un objeto de 50 cm de altura situado a 2 m de la primera lente.

(Véase el problema anterior):

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} = \frac{2 \times 0{,}3}{2 - 0{,}3} = \frac{0{,}6}{1{,}7} = 0{,}353 \text{ m}$$

$$B_1 = \frac{b_1 A}{a_1} = \frac{0{,}353 \times 0{,}5}{2} = 0{,}09 \text{ m}$$

$$a_2 = l - b_1 = 0{,}50 - 0{,}353 = 0{,}147$$

$$b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2}$$

pero como por ser la lente negativa f_2 es negativo, tendremos:

$$b_2 = \frac{-a_2 f_2}{a_2 + f_2} = \frac{-0{,}147 \times 0{,}2}{0{,}147 + 0{,}2} = \frac{-0.0282}{0{,}341} = -\mathbf{0{,}084 \text{ m}}$$

$$B_2 = \frac{b_2 B_1}{a_2} = \frac{0{,}084 \times 0{,}09}{0{,}147} = \mathbf{0{,}0515 \text{ m.}}$$

Siendo b_1 positivo (B_1 real) y b_2 negativo, B_2 es **virtual** e **invertida.**

---

188. Una lente planoconvexa de cristal ($n = 1{,}7$) de radio $r = 30$ cm y una lente planocóncava de vidrio de igual radio se aplican una a otra de modo que formen una **lámina de caras paralelas.** Determínese la distancia focal del conjunto.

Las lentes yuxtapuestas suman sus potencias dióptricas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\frac{1}{r_1}$$

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\frac{1}{-r_2} = -(n_2 - 1)\frac{1}{r_2}$$

$$\frac{1}{f} = (n_1 - 1)\frac{1}{r_1} - (n_2 - 1)\frac{1}{r_2} =$$

$$= \frac{0{,}7}{0{,}3} - \frac{0{,}5}{0{,}3} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$$

$$f = \frac{3}{2} = \mathbf{1{,}50\ m.}$$

---

189. ¿Cuál es el **ángulo de polarización** del agua, del vidrio, del cristal y del diamante?

Según la ley de Brewster, la tangente del ángulo de polarización es igual al índice de refracción:

$$\operatorname{tg} \alpha = n.$$

Para el agua:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} = 1{,}333; \quad \alpha = \mathbf{53°10'}.$$

Para el vidrio:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1{,}5 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha = \mathbf{56°20'}.$$

Para el cristal:

$$\operatorname{tg} \alpha = 1{,}7 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha = \mathbf{59°40'}.$$

Para el diamante:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2{,}5 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha = \mathbf{68°10'}.$$

---

190. La raya amarilla D del sodio está formada por dos rayas D_1 y D_2 muy próximas, que con poco poder dispersivo aparecen confundidas, mas con suficiente dispersión se presentan perfectamente deslindadas. Sus respectivas longitudes de onda son 5896 y 5890 unidades Angström.

Calcúlese la **velocidad** con que un astro debe acercarse a la Tierra para que en el espectro de su luz la raya primera, D_1, se halle corrida hasta la posición ocupada por la D_2 de un manantial de luz fijo.

Este problema es correlativo del 163 de la sección de Acústica, y se resuelve asimismo aplicando el principio de Doppler (1842).

En el tiempo en que la luz recorre 5896 unidades Angström, el astro recorre 6 unidades Angström hacia la Tierra; en la misma proporción estarán los trayectos corridos por la luz (c) y el astro (v) en 1 segundo:

$$\frac{5896}{6} = \frac{c}{v}$$

$$v = \frac{6 \times 300000}{5896} = \mathbf{305\ Km/seg.}$$

No ha sido preciso para resolver este problema conocer el valor absoluto de la unidad Angström: vale una diezmillonésima de milímetro.

SECCIÓN XII

TERMOLOGÍA

191. ¿Cuál es la longitud de un grado centígrado en un **termómetro de alcohol**, cuyo depósito contiene 15 cm^3 de espíritu de vino, si la sección del tubo es de 1 mm^2?

Coeficiente de dilatación del alcohol:

$$\alpha = 0{,}0011.$$

Los 15 cm^3 por un grado se dilatarán:

$$v = 15 \times 0{,}0011 = 0{,}0165 \text{ cm}^3 = 16{,}5 \text{ mm}^3$$

y siendo la sección del tubo $s = 1$ mm^2, la altura del volumen 16,5 mm^3 será:

$$\frac{v}{s} = \frac{16{,}5}{1} = \mathbf{16{,}5\ mm.}$$

ADVERTENCIA. Si no se quiere recurrir al empleo del coeficiente de dilatación, bastará recordar que por 1° cada centímetro cúbico de alcohol se dilata 1 mm^3; así los 15 cm^3 se dilatarán 15 mm^3 y la altura será **15 mm.**

192. ¿Cuál es la temperatura que los ingleses designan por 100° F?

Hallándose el grado 32 F a la altura del 0° C, si de 100 restamos 32 tendremos los grados que hay que reducir a centígrados:

$$100 - 32 = 68^\circ\, F$$

y ahora:

$$\frac{x}{68} = \frac{100}{180}$$

$$x = \frac{6800}{180} = \mathbf{37^\circ{,}7\ C.}$$

Advertencia. **Se hubiera podido aplicar la fórmula:**

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$C = \frac{5}{9}(100 - 32) = \frac{5}{9}\,68 = \mathbf{37^\circ{,}7\ C.}$$

---

193. La **temperatura normal** de una habitación se supone igual a 14° R. ¿Cuál es la centígrada y cuál la de Fahrenheit correspondiente?

Centígrada:

$$\frac{x}{14} = \frac{100}{80} \text{ (véase fig. 40)}$$

$$x = \frac{1\,400}{80} = \mathbf{17^\circ{,}5\ C.}$$

Fahrenheit:

$$\frac{f}{14} = \frac{180}{80}, \quad f = \frac{14 \times 180}{80} = 31{,}5$$

$$x = f + 32 = 31{,}5 + 32 = \mathbf{63^\circ{,}5\ F.}$$

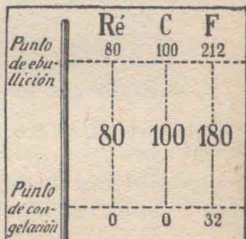


Fig. 40

Advertencia. **Se hubiera podido aplicar las fórmulas:**

$$C = \frac{5}{4}R = \frac{5}{4}\,14 = \mathbf{17^\circ\ C}$$

$$F = \frac{9}{4}R + 32 = \frac{9}{4}\,14 + 32 = 31{,}5 + 32 = \mathbf{63^\circ{,}5\ F.}$$

---

194. La temperatura media anual de la isla **Madera** es de 18°,4 C; la de **Viena** 9°,3 C; la de **Bremen** 8°,6 C y la de **Jakutzk** —11°,2 C. Expresar estas temperaturas en grados R y en grados F.

Madera:

$$R = \frac{4}{5} C = \frac{4}{5} 18{,}4 = \mathbf{14°{,}7\ R}$$

$$F = \frac{9}{5} C + 32 = \mathbf{65°{,}1\ F.}$$

Viena:

$$R = \frac{4}{5} C = \frac{4}{5} 9{,}3 = \mathbf{7°{,}4\ R}$$

$$F = \frac{9}{5} C + 32 = \frac{9}{5} 9{,}3 + 32 = \mathbf{48°{,}7\ F.}$$

Bremen:

$$R = \frac{4}{5} C = \frac{4}{5} 8{,}6 = \mathbf{6°{,}9\ R}$$

$$F = \frac{9}{5} C + 32 = \frac{9}{5} 8{,}6 + 32 = \mathbf{47°{,}5\ F.}$$

Jakutzk:

$$R = \frac{4}{5} C = \frac{4}{5} (-11{,}2) = \mathbf{-8{,}9\ R}$$

$$F = \frac{9}{5} C + 32 = \frac{9}{5} (-11{,}2) + 32 = -20{,}2 + 32 = \mathbf{11°{,}8\ F.}$$

---

195. ¿Qué **diámetro** presenta a 800° una esfera de latón de 5 cm de diámetro a 0°?

$$l_t = l_o (1 + \alpha t) = 5 (1 + 800 \times 0{,}00002) = \mathbf{5{,}080\ cm.}$$

---

196. Un **péndulo de segundos,** de hierro, marcha bien a 0°: ¿cuántas oscilaciones menos por día verifica a 30° C?

De la fórmula

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

se deduce:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}$$

y siendo

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

resulta:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{l_2}}{\sqrt{l_1}}$$

o bien

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{l_2}{l_1}$$

y siendo

$$n_2 = n_1 + x \quad \text{y} \quad l_2 = l_1 (1 + \alpha t)$$

$$\frac{n_1^2}{(n_1 + x)^2} = \frac{l_1 (1 + \alpha t)}{l_1} = 1 + \alpha t$$

$$n_1^2 = (n_1 + x)^2 (1 + \alpha t) = (n_1^2 + 2 n_1 x + x^2)(1 + \alpha t) =$$
$$= n_1^2 + n_1^2 \alpha t + 2 n_1 x (1 + \alpha t) + x^2 (1 + \alpha t).$$

$$(1 + \alpha t) x^2 + 2 n_1 (1 + \alpha t) x + n_1^2 \alpha t = 0$$

$$x = - n_1 \pm \sqrt{n_1^2 - \frac{n_1^2 \alpha t}{1 + \alpha t}} = - n_1 \pm \sqrt{n_1^2 \left(1 - \frac{\alpha t}{1 + \alpha t}\right)}$$

$$n_1 = 86400$$
$$\alpha = 0{,}000011$$
$$t = 30$$
$$n_1^2 = 7464960000$$
$$\alpha t = 0{,}00033$$
$$x = \mathbf{14}.$$

---

197. Calcúlese el **acortamiento** y la **fuerza de contracción** de una barra de acero de 4 m de longitud y 25 cm² de sección que pasa de la temperatura de 100° a la de 0°.

$$l_o = \frac{l_t}{1 + \alpha t}$$

$$x = l_t - l_o = l_t - \frac{l_t}{1 + \alpha t} = l_t \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha t}\right) =$$
$$= l_t \frac{\alpha t}{1 + \alpha t} = \sim l_t \alpha t$$

$$l_t = 4$$
$$\alpha = 0{,}000011$$
$$t = 100^\circ$$

$$x = 4 \times 0{,}000011 \times 100 = 0{,}0044 \text{ m} = \mathbf{4{,}4 \text{ mm}}$$

$$F = \alpha E \cdot s t.$$

Coeficiente de dilatación:

$$\alpha = 0{,}000011.$$

Módulo de elasticidad:

$$E = 2150000.$$

Sección:

$$s = 25 \text{ cm}^2.$$

Variación de temperatura:

$$t = 100^\circ$$

$$F = 0{,}000011 \times 2150000 \times 25 \times 100 = 59125 \text{ Kg} = \sim \mathbf{59 \text{ t}}.$$

---

198. ¿Cuánto se dilata 1 Kg de **mercurio** de 0° a 50°?

Cálculo del volumen de 1 Kg de mercurio ($e = 13,59$):

$$V_o = \frac{P}{e} = \frac{1}{13,59} = 0,0735 \text{ dm}^3 = 73,5 \text{ cm}^3.$$

Cálculo de la dilatación:

$$V_o \alpha t = 73,5 \times 50 \times 0,0002 = 0,735 \text{ cm}^3 = \mathbf{735 \text{ mm}^3}.$$

---

199. El volumen de un matraz de vidrio a 0° es 1,723 litros: ¿cuál es el volumen a 30°?

$$V_t = V_o (1 + \gamma t)$$
$$V_o = 1,723 \text{ litros}$$
$$t = 30°$$
$$\gamma = 3\,\alpha = 3 \times 0,000009 = 0,000027$$
$$V_t = 1,723\,(1 + 0,000027 \times 30) =$$
$$= 1,723 \times 1,0081 = \mathbf{1,72439 \text{ litros}}.$$

---

200. Reducir al **volumen normal:**

a) 11 litros de aire atmosférico a 720 mm y 27,3° C.

$$v_0 = \frac{b}{760} \times \frac{273}{T} \times v$$

$$v_0 = \frac{720}{760} \times \frac{273}{273 + 27,3} \times 11 = \mathbf{9,474 \text{ litros}}.$$

b) 14,5 litros de hidrógeno a 700 mm y 27° C.

$$v_0 = \frac{b}{760} \times \frac{273}{T} \times v = \frac{700}{770} \times \frac{273}{300} \times 14,5 = \mathbf{12,16 \text{ litros}}.$$

---

201. ¿Cuánto pesa el **aire de una habitación** de $8 \times 5 \times 4$ m a 27° y 720 mm?

Reducción al volumen normal:

$$v_0 = \frac{b}{760} \times \frac{273}{T} \times v.$$

Peso de este volumen:

$$P = v_0 \times 1{,}293 = \frac{b}{760} \times \frac{273}{T} \times v \times 1{,}293 =$$

$$= \frac{720}{760} \times \frac{273}{300} \times 8 \times 5 \times 4 \times 1{,}293 = \mathbf{178{,}4\ Kg.}$$

---

202. A la presión de 720 mm y a la temperatura de 27° C se ha tapado un **frasco** que contenía 19 litros de aire atmosférico. ¿Cuántos gramos de aire se desprenderán del frasco si éste se abre en la cumbre de una montaña donde la presión es de 680 mm y la temperatura de 0°?

Volumen normal del gas contenido en el frasco:

$$v_0 = \frac{b}{760} \times \frac{273}{T} \times v = \frac{720}{760} \times \frac{273}{300} \times 19 = 16{,}38 \text{ litros.}$$

Volumen de este mismo aire a 0° y 680 mm:

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{760}{680}; \qquad v_1 = \frac{v_0 \times 760}{680} \times \frac{16{,}38 \times 760}{680} = 18{,}31 \text{ litros.}$$

Siendo este volumen menor que el de 19, del frasco, no saldrá de éste aire, sino que, por el contrario, entrará un volumen

$$v' = 19 - 18{,}31 = 0{,}69 \text{ litros}$$

de aire a 0° y 680 mm.

Pero este volumen, a 760 mm será:

$$v'' = \frac{0{,}69 \times 680}{760}$$

y su peso

$$p'' = \frac{0{,}69 \times 680}{760} \times 1{,}293 = \mathbf{0{,}8\ g.}$$

Observación. También se podría resolver hallando el peso de 19 litros de aire a 720 mm y 27° y el peso de otros 19 litros a 680 mm y 0°; el peso final se obtendría por diferencia entre estos dos pesos.

---

203. En una **campana** de vidrio invertida sobre la cuba de mercurio, ha obtenido un químico 1520 cm^3 de CO_2 en estas condiciones: temperatura 27° C, presión atmosférica 720 mm, altura del nivel del mercurio en la campana sobre el nivel del mercurio en la cuba 12 cm. ¿Cuál es la presión del gas? ¿Cuál su volumen normal? ¿Cuál su peso?

Presión del gas: 720 — 120 = **600 mm.**
Volumen normal:

$$v_0 = \frac{600}{760} \times \frac{273}{300} \times 1520 = \mathbf{1092\ cm^3}.$$

Peso:

$$p = v_0 \times \text{peso específico} = 1092 \times 0{,}001977 = \mathbf{2{,}159\ g}.$$

---

204. ¿Qué cantidad de calor pierde:

a) Una masa de **vidrio** que pesa $^1/_4$ Kg, al enfriarse de la temperatura de 900° a la de 16°?

$$Q = P \times c \times t.$$

Peso del cuerpo:

$$P = 0{,}25\ \text{Kg}.$$

Calor específico del vidrio:

$$c = 0{,}20.$$

Salto de temperatura:

$$t = t_1 - t_2 = 900 - 16 = 884^\circ.$$

$$Q = 0{,}25 \times 0{,}20 \times 884 = \mathbf{44{,}2\ Cal.}$$

b) El aire de una habitación de $8 \times 5 \times 4$ m al pasar la temperatura de 24° C a 16° R, manteniéndose constante la altura barométrica de 760 mm?

$$Q = P \times c \times t.$$

Peso del aire:

$$P = \frac{273}{T}\, v \times 1{,}293.$$

Calor específico a presión constante:

$$c = 0{,}2375.$$

Salto de temperatura:

$$t = t_1 - t_2$$

pero la temperatura t_2 se nos da expresada en grados Reaumur, t'_2, y para reducirla a centígrados se tiene:

$$t_2 = \frac{5}{4}\, t_2'.$$

En suma:

$$Q = \frac{273}{T} \times v \times 1{,}293 \times 0{,}2375 \times \left(t_1 - \frac{5}{4}\, t_2'\right) =$$

$$= \frac{273}{273 + 24} \times 8 \times 5 \times 4 \times 1{,}293 \times 0{,}2375 \times \left(24 - \frac{5}{4}\, 16\right) =$$

$$= \mathbf{181\ Calorías.}$$

---

205. Una **roca** de 10 m de longitud por 2 de ancho y 4 de alto (peso específico 2,8) se enfría de 24° a 20° (calor específico $^1/_4$). ¿Cuántas Calorías desprende?

$$Q = P\,c\,t$$

$$P = v \times e \quad \text{siendo} \quad v = 100 \times 20 \times 40 \text{ dm}^3;$$

$$t = t_1 - t_2$$

$$Q = v \times e \times c \times (t_1 - t_2) =$$
$$= 100 \times 20 \times 40 \times 2{,}8 \times 0{,}25 \times 4 = \mathbf{224000 \text{ Calorías.}}$$

---

206. ¿Cuántos kilogramos de **agua** a 10° deben mezclarse con 70 Kg de agua a 50° para obtener agua a 35°?

$$x \times 10 + 70 \times 50 = (x + 70)\,35$$
$$10\,x + 3500 = 35\,x + 2450$$
$$35\,x - 10\,x = 3500 - 2450$$
$$25\,x = 1\,050$$
$$x = \frac{1050}{25} = \mathbf{42 \text{ Kg.}}$$

---

207. Una **esfera de hierro** (peso específico 7,2) incandescente (700° C) y de volumen igual a 1 dm³, se sumerge en un cubo (10 litros) de agua a 10° C. ¿Qué temperatura final se observará?

$$\underbrace{P\,c\,t}_{\text{hierro}} = \underbrace{P'\,c'\,t'}_{\text{agua}}$$

$$P = v \times e = 1 \times 7{,}2 = 7{,}2 \text{ Kg}$$
$$c = 0{,}11$$
$$t = 700 - x$$
$$P' = 10 \text{ Kg}$$
$$c' = 1$$
$$t' = x - 10$$
$$7{,}2 \times 0{,}11\,(700 - x) = 10\,(x - 10)$$
$$0{,}792 \times 700 - 0{,}792\,x = 10\,x - 100$$
$$554{,}4 + 100 = 10{,}792\,x$$
$$x = \frac{654{,}4}{10{,}8} = \mathbf{60{,}6°.}$$

---

208. Dos cubos de igual volumen, de hierro el uno y de platino el otro, se calientan 1° C. ¿Cuál de los dos debe absorber más calor?

Calor específico del hierro:

$$c = 0{,}11.$$

Calor específico del platino:

$$c' = 0{,}03.$$

Peso específico del hierro:

$$e = 7{,}2.$$

Peso específico del platino:

$$e' = 21{,}5.$$

Calor que debe absorber el hierro:

$$p\,c = v \times e \times c = v \times 7{,}2 \times 0{,}11.$$

Calor que debe absorber el platino:

$$p'\,c' = v \times e' \times c' = v \times 21{,}5 \times 0{,}03.$$

Pero

$$7{,}2 \times 0{,}11 = 0{,}792$$

y

$$21{,}5 \times 0{,}03 = 0{,}645$$

Luego:

$$p\,c > p'\,c',$$

y **el hierro absorberá más calor** que el platino.

---

209. ¿Qué **alargamiento** experimenta, a causa de la dilatación por el calor, una varilla de hierro de 1 m de longitud y 1 cm^2 de sección, si se aplican a ella 10 Calorías?

Elevación de temperatura:

De

$$P c t = Q$$

se deduce:

$$t = \frac{Q}{P c}$$

y como $P = v \times e = l \times s \times e$

$$t = \frac{Q}{l s e c}$$

Dilatación de 1 m:

$$\alpha t = \frac{\alpha Q}{l s e c}$$

Substituyendo ahora en esta fórmula los siguientes valores:

Coeficiente de dilatación:

$$\alpha = 0{,}000011.$$

Cantidad de calor:

$$Q = 10 \text{ Calorías.}$$

Longitud:

$$l = 10 \text{ dm.}$$

Sección:

$$s = 0{,}01 \text{ dm}^2.$$

Peso específico:

$$e = 7{,}2.$$

Calor específico:

$$c = 0{,}11$$

tendremos al fin:

$$\alpha t = \frac{0{,}000011 \times 10}{10 \times 0{,}01 \times 7{,}2 \times 0{,}11} = \mathbf{0{,}0014 \text{ m.}}$$

210. En una **lámpara de petróleo** se han consumido en una noche 125 g de combustible; ¿qué cantidad de calor se ha producido?

Potencia calorífica del petróleo:

$$P = 10000 \text{ Cal. por Kg}$$

$$Q = 0{,}125 \times 10000 = 1250 \text{ Cal.}$$

---

211. Si **un litro de espíritu** de vino (0,8 Kg) cuesta una peseta, y 50 Kg de carbón cuestan 2,50 ptas., ¿con cuál de estos combustibles resultará más económica la calefacción?

Podemos, p. ej., contar cuántas Calorías se obtendrán en uno y otro caso por una peseta:

Alcohol: potencia calorífica: $P = 7000$ Cal.

$$Q = 0{,}8 \times 7000 = 5600 \text{ Cal.}$$

Carbón: potencia calorífica: $P = 6$ a 8000 Cal.

$$Q = \frac{50 \times 6000}{2{,}50} \text{ a } \frac{50 \times 8000}{2{,}50}$$

valor muy superior al de 5600 Cal.

---

212. Mediante la combustión de 6 gramos de **gas del alumbrado** en un hornillo, se ha calentado de 16° a 46° un kilogramo de agua. ¿Cuál es el rendimiento calorífico del hornillo empleado?

Calorías cedidas por la combustión del gas:

$$0{,}006 \times 11000 = 66 \text{ Cal.}$$

Calorías absorbidas por el agua:

$$46 - 16 = 30 \text{ Cal.}$$

$$\text{Rendimiento } \frac{30}{66} = 0{,}45 = \mathbf{45\ \%}.$$

---

213. Un **tren** de 1000 toneladas recorre un trayecto de 1 Km. El rozamiento asciende a $\frac{1}{100}$ del peso. Calcúlense: *a*) el valor del rozamiento; *b*) el trabajo absorbido por el rozamiento; *c*) el calor producido.

a) Rozamiento:

$$F = \frac{1}{100}\, 1\,000\,000 = \mathbf{10\,000\ Kg.}$$

b) Trabajo de rozamiento:

$$F\, l = 10000 \times 1000 = \mathbf{10^7\ Kgm.}$$

c) Calor producido:

$$\frac{F\, l}{427} = \frac{10^7}{427} = \mathbf{23\,417\ Cal.}$$

---

214. ¿En cuántos grados se eleva la temperatura de **1 Kg de plomo** que cae al suelo desde una altura de 100 m?

Trabajo: $F\, l = 1 \times 100 = 100$ Kgm.

Calor: $Q = \frac{F\, l}{427} = \frac{100}{427}$

Temperatura:

$$T = \frac{Q}{\text{calor específico}} = \frac{100}{427 \times 0{,}03} = \mathbf{7^\circ{,}8\ C.}$$

---

215. ¿Qué valor mínimo ha de tener la velocidad con que una **bala de plomo** choque con un obstáculo invulnerable para que quede fundida por la energía del choque, supuesta totalmente consumida en la bala?

Energía cinética $\frac{1}{2} m v^2$ erg (si se expresa la masa en gramos y la velocidad en cm/seg.).

Energía térmica absorbida por la fusión del plomo:

$$m c (T - t) + m f \text{ calorías}$$

siendo t la temperatura del ambiente (p. ej., 26°), T la temperatura de fusión del plomo ($T = 326°$), c el calor específico del plomo ($c = 0{,}03$), f el calor de fusión del plomo ($f = 5{,}8$ Cal.).

Se tendrá:

$$\frac{1}{2} m v^2 = (m c (T - t) + m f) E$$

siendo E el número de erg equivalentes a una caloría-gramo ($E = 4{,}18 \times 10^7$).

$$\frac{1}{2} v^2 = [c (T - t) + f] E$$

$$v^2 = 2 (c T - c t + f) \times 4{,}18 \times 10^7 \text{ erg.}$$

$$v = \sqrt{2 (300 \times 0{,}03 + 5{,}8) \times 4{,}18 \times 10^7} =$$

$$= \sqrt{14{,}8 \times 4{,}18 \times 10^7} = 83500 \text{ cm/seg.} = \mathbf{835\ m/seg.}$$

---

216. En un **cilindro** y debajo de un pistón está encerrado 1 m³ de aire a la presión de 5 atmósferas y a la temperatura de 0°. Manteniendo constante la posición del pistón, se calienta el aire hasta 100° y se le deja luego dilatar, por expansión isotérmica, hasta ocupar un volumen de 5 m³. ¿Cuáles son las presiones del gas correspondientes a 1, 2, 3, 4, 5 m³?

Presión inicial:

$$p = p_0 (1 + \alpha t) = 5 \left(1 + \frac{100}{273}\right) = 6{,}84.$$

La expansión isotérmica obedecerá a la ley de Boyle-Mariotte:

$$v\,p = \text{constante} = 1 \times 6{,}84 = 6{,}84.$$

Tendremos:

Volúmenes		Presiones
1 m^3		**6,84 atm.**
2 m^3;	$p = \frac{6{,}84}{2}$ =	**3,42** »
3 m^3;	$p = \frac{6{,}84}{3}$ =	**2,28** »
4 m^3;	$p = \frac{6{,}84}{4}$ =	**1,71** »
5 m^3;	$p = \frac{6{,}84}{5}$ =	**1,37** »

---

217. 20 litros de aire a la presión de 1 at. **se dilatan:** *a*) isotérmicamente; *b*) adiabáticamente, hasta ocupar un volumen de 100 litros. ¿Cuál es el trabajo realizado en cada uno de los casos?

Trabajo por compresión isotérmica:

$$T = 2{,}3026\; C\,(\log v_1 - \log v_2)$$

$$v_1 = 0{,}02 \text{ m}^3$$

$$v_2 = 0{,}1 \text{ m}^3$$

$$p_1 = 1 \text{ atm} = 10330 \text{ Kg por m}^2$$

$$C = v\,p = 10330 \times 0{,}02 = 206{,}60$$

$$T = 2{,}3026 \times 206{,}60 \times (\log 0{,}02 - \log 0{,}1)$$

$$= 2{,}3026 \times 206{,}60 \times (\bar{2}{,}3010 - \bar{1}{,}0000) = -\,\mathbf{333\ Kgm.}$$

Trabajo por compresión adiabática:

$$T = \frac{1}{0,41}(v_2 p_2 - v_1 p_1)$$

$$v_1 = 0,02 \text{ m}^3$$

$$v_2 = 0,1 \text{ m}^3$$

$$p_1 = 10330 \text{ Kg por m}^2.$$

Cálculo de p_2:

$$p_1 : p_2 = v_2^k : v_1^k$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^k$$

$$\log p_2 = \log p_1 + k(\log v_1 - \log v_2) =$$
$$= \log 10330 + 1,41 (\log 0,02 - \log 0,1) =$$
$$= 4,0142 - 1,41 \times 0,6990 = 3,0286$$

$$p_2 = 1068 \text{ Kg por m}^2.$$

Así se tendrá:

$$v_2 p_2 = 0,1 \times 1068 = 106,8$$

$$v_1 p_1 = 206,6$$

$$T = \frac{106,8 - 206,6}{0,41} = -\frac{99,8}{0,41} = -\mathbf{243 \text{ Kgm.}}$$

---

218. ¿A qué **temperatura** se enfría 1 Kg de agua a 100° dejando derretir en ella 1 Kg de nieve a 0°?

Temperatura final: x.
Calor perdido por el agua:

$$Q = P c t = 1 \times 1 \times (100 - x).$$

Calor ganado por la nieve:
Q' = calor de fusión + calor absorbido por el agua de fusión

$$= 1 \times 80 + 1 \times 1 \times (x - 0).$$

Igualando Q y Q':

$$Q = 100 - x = Q' = 80 + x$$

$$2\,x = 100 - 80 = 20$$

$$x = \frac{20}{2} = \mathbf{10^o}.$$

---

219. ¿Cuánto **hielo** a 0° debe mezclarse con 300 g de agua a 100° para enfriarlos hasta 0°?

Calor absorbido por el hielo:

$$Q = x \times 80.$$

Calor perdido por el agua:

$$Q' = 300 \times 100$$

$$Q = Q', \quad x \times 80 = 30000$$

$$x = \frac{30000}{80} = \mathbf{375\ g}.$$

---

220. ¿Qué **temperatura** posee la mezcla de 5 Kg de agua a 65° con 2 Kg de nieve a 0°?

Calor perdido por el agua:

$$Q = 5\,(65 - x).$$

Calor ganado por la nieve:

$$Q' = 2 + 80 + 2\,(x - 0).$$

Igualando Q y Q':

$$5\,(65 - x) = 2 \times 80 + 2\,x$$

$$7\,x = 5 \times 65 - 2 \times 80 = 165$$

$$x = \frac{165}{7} = \mathbf{23^o{,}6}.$$

---

221. El **volumen de vapor** de una caldera es de 5 m^3 y la presión de 5 Kg por cm^2. ¿Cuántos kilogramos de vapor contiene la caldera?

La tabla de las propiedades del vapor de agua, saturado y seco, da para la presión de 5 Kg por centímetro cuadrado el peso específico $\gamma = 2,6177$ Kg por metro cúbico. Así el peso pedido será:

$$P = v\gamma = 5 \times 2,6177 = \mathbf{13,39\ Kg}.$$

---

222. En **20 Kg de agua** a 15° se han condensado 1,5 Kg de vapor a la presión de 2 Kg por centímetro cuadrado. ¿Cuál es la temperatura final del agua?

A la presión de 2 Kg por centímetro cuadrado el calor total del agua es $\lambda = 647,2$ Cal.

Siendo la temperatura final buscada x, el calor cedido por el vapor de agua condensado será:

$$Q = 1,5 \times 647,2 - 1,5\,x$$

y el absorbido por el agua condensante:

$$Q' = 20\,(x - 15).$$

Igualando Q y Q':

$$1,5 \times 647,2 - 1,5\,x = 20\,x - 20 \times 15$$

$$21,5\,x = 1,5 \times 647,2 + 20 \times 15 = 1\,270,8$$

$$x = \frac{1270,8}{21,5} = \mathbf{59°,1.}$$

---

223. En la explosión de una caldera de vapor la presión ha descendido súbitamente de 10 Kg por centímetro cuadrado a 1 Kg por centímetro cuadrado; la caldera contenía 4 Kg de vapor. ¿Cuánto calor ha desprendido la explosión? ¿Y cuánto trabajo se hubiera podido realizar con él?

Calor total del vapor de agua a 10 Kg por centímetro cuadrado:

$$\lambda_{10} = 666{,}1 \text{ Cal. por Kg.}$$

Calor total del vapor de agua a 1 Kg por centímetro cuadrado:

$$\lambda_1 = 639{,}3 \text{ Cal. por Kg.}$$

Calor desprendido en la explosión:

$$Q = 4\,(\lambda_{10} - \lambda_1) = 4 \times 26{,}8 = \mathbf{107{,}2\ Cal.} =$$
$$= 107{,}2 \times 427 \text{ Kgm} = \mathbf{45774\ Kgm.}$$

---

224. ¿Cuántos **litros de vapor** saturado a 2, a 5 y a 10 Kg de presión por centímetro cuadrado pueden dar 2 Kg de agua?

Volumen específico del vapor a

$p =$	2,	5,	10 Kg p. cm²
$v =$	0 9006	0,3820	0,1993 m³

y para los 2 Kg de agua:

$$V_2 = 900{,}6 \times 2 = \mathbf{1801{,}2 \text{ litros}}$$
$$V_5 = 382 \times 2 = \mathbf{764} \text{ »}$$
$$V_{10} = 199{,}3 \times 2 = \mathbf{398{,}6} \text{ »}$$

---

225. A 30° C el **higrómetro** señala un grado de humedad de 75 °/₀. ¿Cuántos gramos de vapor de agua se separan de 1 m³ de aire, si por haberse cubierto el sol desciende la temperatura a 16° C? ¿Y cuánto calor de condensación queda libre?

Siendo 30,1 g el peso de vapor que el metro cúbico de aire a 30° debe contener para estar saturado, el que realmente contiene es:

$$0{,}75 \times 30{,}1 = 22{,}6 \text{ g.}$$

En cambio a 16° el metro cúbico debe contener, para quedar saturado, 13,6 g. Luego la precipitación será de:

$$22{,}6 - 13{,}6 = \mathbf{9{,}0\ g.}$$

Siendo el calor de condensación del agua igual a 539 calorías por gramo, el calor total desprendido ascenderá a

$$539 \times 9{,}0 = \mathbf{4851\ calorías.}$$

---

226. Una **máquina de vapor de baja presión,** en la que el vapor penetra sólo durante $^1/_3$ de la carrera del émbolo, trabaja a 3 atmósferas. Su cilindro tiene una longitud de 45 cm y una sección de 100 cm². El número de revoluciones es de 120 por minuto. ¿Cuál es la potencia?

Conviene calcular primero el trabajo por revolución, o sea por vaivén del émbolo.

Distinguiremos el trabajo realizado por el vapor a plena presión, que dura $^1/_3$ de la carrera del pistón, y el trabajo realizado por el vapor mientras se expansiona, que dura $^2/_3$ de carrera.

Primero: Trabajo del vapor a plena presión:

Fuerza: 3 atm. sobre 100 cm² = 300 Kg.

Recorrido: $^1/_3$ de vaivén $= \frac{1}{3}(2 \times 0{,}45) = 0{,}30$ m.

Trabajo: $T_1 = F_1 \times l_1 = 300 \times 0{,}3 = \mathbf{90\ Kgm.}$

Segundo: Trabajo del vapor que se expansiona pasando del volumen $^1/_3$ al volumen 1, es decir, triplicando su volumen, o sea, en virtud de la ley de Boyle y Mariotte, reduciendo a $^1/_3$ su presión.

Presión inicial: 3 atmósferas.

Presión final: 1 atmósfera.

Presión media $\frac{3+1}{2} = 2$ atmósferas.

Fuerza media: 2 atm. sobre 100 cm² = 200 Kg.

Recorrido: $^2/_3$ de vaivén $= \frac{2}{3}(2 \times 45) = 0{,}60$ m.

Trabajo: $T_2 = F_2 \times l_2 = 200 \times 0{,}60 = \mathbf{120\ Kgm.}$

Tercero: Trabajo total por revolución:

$$T = T_1 + T_2 = 90 + 120 = \mathbf{210\ Kgm},$$

y por minuto (120 revoluciones):

$$210 \times 120.$$

Potencia en caballos:

$$\frac{210 \times 120}{60 \times 75} = \frac{420}{75} = \sim \mathbf{5{,}5\ CV.}$$

---

227. Una **locomotora** trabaja a la presión de 12 atmósferas. La expansión se efectúa en los $^3/_4$ de la longitud del cilindro, que es de 48 cm. La sección eficaz del pistón es de 300 cm^2; el número de revoluciones de 100 por minuto. ¿Cuál es la potencia?

Resolveremos este problema como el anterior, pero teniendo en cuenta que la locomotora no lleva condensador, de la presión de 12 atmósferas habrá que restar la contrapresión de 1 atmósfera, quedando así una presión efectiva de 11 atmósferas.

Cálculo del trabajo por revolución:

Primero: Del vapor a plena presión:

$$F_1 = 11 \times 300 = 3300 \text{ Kg}$$

$$l_1 = \frac{1}{4}(2 \times 0{,}48) = 0{,}28 \text{ m}$$

$$T_1 = F_1 \times l_1 = 3300 \times 0{,}28 = 924 \text{ Kgm.}$$

Segundo: Del vapor que se expansiona:

Presión inicial: 11 atm.

Presión final: $\frac{11}{4} = 2{,}75$ atm.

Presión media: $\frac{11 + 2{,}75}{2} = 6{,}875$ atm.

$$F_2 = 6{,}875 \times 300 = 2062{,}5 \text{ Kg}$$

$$l_2 = \frac{3}{4}\,(2 \times 0{,}48) = 0{,}72 \text{ m}$$

$$T_2 = F_2 \times l_2 = 2062{,}5 \times 0{,}72 = 1485 \text{ Kgm.}$$

Trabajo por revolución:

$$T_1 + T_2 = 924 + 1485 = 2409 \text{ Kgm.}$$

Trabajo por minuto ($n = 100$):

$$2409 \times 100 = 240900 \text{ Kgm.}$$

Potencia en caballos:

$$\frac{240900}{60 \times 75} = \sim \mathbf{54\ CV.}$$

SECCIÓN XIII

MAGNETISMO

---

228. ¿Qué fuerza ejerce un polo de 10 unidades sobre otro de 5 unidades situado a 20 cm del primero?

$$F = \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{5 \times 10}{20^2} = 0{,}125 \text{ dinas.}$$

---

229. Una aguja magnética de 9 cm de longitud presenta polos de 3,57 unidades de intensidad y pesa 4 g. ¿Dónde se encuentran los polos? ¿Cuánto vale el **momento magnético?** ¿Y cuánto el magnetismo específico?

Hallándose situados los polos a $^1/_6$ de la semilongitud de la barra, se tendrán a

$$\frac{1}{6} 4{,}5 = \mathbf{0{,}75\ cm} \text{ de los extremos.}$$

Momento magnético:

Siendo m la intensidad del polo y l la distancia entre polos:

$$M = m\,l = 3{,}57 \times (9 - 2 \times 0{,}75) = 3{,}57 \times 7{,}5 =$$
$$= \mathbf{26{,}8} \text{ (dinas·cm).}$$

Magnetismo específico:

$$k = \frac{\text{momento}}{\text{peso}} = \frac{26{,}8}{4} = \mathbf{6{,}7} \text{ (dinas·cm por g).}$$

SECCIÓN XIV

ELECTROSTÁTICA

---

230. ¿Con qué fuerza se repelerían **dos esferas,** cargadas cada una con 1 culombio, a la distancia de 1 Km?

$$f = \frac{m_1\, m_2}{d^2} = \frac{3 \times 10^9 \times 3 \times 10^9}{100000^2} = \frac{9 \times 10^{18}}{100000^2} = 9 \times 10^8 \text{ dinas} =$$

$$= \frac{9 \times 10^8}{981} \text{ gramos} = 9{,}1 \times 10^5 \text{ gramos} = \mathbf{917\ Kg.}$$

---

231. **¿Cuánta electricidad** contiene una esfera de radio $r = 5$ cm cargada a un potencial $V = 30000$ V?

$$Q = C\,V$$

$$C = 5 \text{ cm (U. E. S.)}$$

$$V = 30000\ V = \frac{30000}{300} \text{ U. E. S.} = 100 \text{ U. E. S.}$$

$$Q = 5 \times 100 = \mathbf{500\ U.\ E.\ S.}$$

---

232. Dos esferas de 4 cm de radio se cargan hasta la tensión de 40000 V. **¿Con qué fuerza** se repelen a la distancia de 20 cm?

$$Q = C\,V$$

$$C = 4 \text{ cm (U. E. S.)}$$

$$V = 40000\ V = \frac{40000}{300}\ \text{U. E. S.}$$

$$Q = C\,V = 4 \times \frac{400}{3} = 533\ \text{U. E. S.}$$

$$f = \frac{Q^2}{d^2} = \frac{533^2}{20^2} = \mathbf{710\ dinas.}$$

---

233. Un **electrómetro** de Braun indicaba la tensión de 900 V. Después del contacto con una esfera metálica neutra de radio $r = 3$ cm, indica sólo 200 V. ¿Cuál es la capacidad del electrómetro?

Carga del electrómetro antes del contacto:

$$Q = C\,V = 900\ C.$$

Carga del electrómetro después del contacto:

$$Q_1 = C\,V_1 = 200\ C.$$

Carga de la esfera después del contacto:

$$Q_2 = C\,V_1 = 3 \times 200 = 600.$$

Pero:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

luego:

$$900\ C = 200\ C + 600$$

$$700\ C = 600$$

$$C = \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}\ \textbf{cm (U. E. S.)}$$

y si se quiere expresar en faradios:

$$C = \frac{6}{7} : (9 \times 10^{11})\ \text{faradios}$$

y en microfaradios:

$$C = \frac{6}{7} : (9 \times 10^5) = 9{,}52 \times 10^{-7}$$

---

234. ¿Qué tamaño debería tener una esfera de capacidad igual a **un faradio?** Compárese con el tamaño del Sol (diámetro = 1,4 millones de kilómetros).

$$1 \text{ faradio} = \frac{1 \text{ culombio}}{1 \text{ voltio}} = \frac{3 \times 10^9}{\frac{1}{3 \times 10^2}} = 9 \times 10^{11} \text{ U. E. S.}$$

Luego la esfera de capacidad igual a 1 faradio tendría un radio:

$$r = 9 \times 10^{11} \text{ cm}$$

y un diámetro:

$$d = 1{,}8 \times 10^{12} \text{ cm} = \mathbf{1{,}8 \times 10^7 \text{ Km}}$$

o sea:

$$\frac{1{,}8 \times 10^7}{1{,}4 \times 10^6} = \text{más de 10 veces el diámetro del Sol.}$$

---

235. ¿Qué cantidad de electricidad contiene una **botella de Leyden,** esférica de vidrio, de $d = 2$ mm de espesor, y radio $R = 20$ cm cargada a un potencial de 10 (o sea a 3000 V)?

$$Q = C V.$$

Cálculo de la capacidad:

$$C = \frac{R^2}{d} k$$

siendo k la constante dieléctrica del vidrio.

$$C = \frac{20 \times 20}{0{,}2} \times 7 = 14000 \text{ U. E. S.}$$

Cálculo de la carga:

$$Q = C V = 14000 \times 10 = \mathbf{140000 \text{ U. E. S.}} =$$

$$= \frac{1{,}4 \times 10^5}{3 \times 10^9} \text{ culombio} = \mathbf{4{,}66 \times 10^{-5} \text{ culombios.}}$$

---

236. Las dos placas de un **electroscopio condensador** llevan una capa de goma laca de espesor $d = {}^1/_{40}$ mm, y tienen un radio $r = 3$ cm. ¿Cuál es su capacidad?

Siendo $S = \pi r^2$ la superficie de armadura, el valor de la capacidad es:

$$C = \frac{S k}{4 \pi d} = \frac{\pi r^2 k}{4 \pi d} = \frac{r^2 k}{4 d} = \frac{9 \times 3}{\frac{4}{400}} = \mathbf{2700\ cm}\,(\text{U. E. S.}) =$$

$$= \frac{2700}{9 \times 10^5} = \mathbf{0{,}003\ microfaradios.}$$

---

237. Mediante una máquina de influencia se carga a 30000 V una **botella de Leyden**, cilíndrica, de estas dimensiones: altura de las armaduras $h = 30$ cm, radio $r = 12$ cm, espesor del vidrio $d = 1$ mm. ¿Qué **energía** contiene la botella cargada?

La energía de un condensador se puede calcular por la fórmula

$$E = \frac{1}{2} Q V$$

siendo Q la cantidad de electricidad y V el potencial.

Pero $Q = C V$ y por lo tanto

$$E = \frac{1}{2} C V^2$$

siendo C la capacidad del condensador.

La capacidad de la botella de Leyden es

$$C = \frac{k O}{4 \pi d}$$

y como la superficie O de las armaduras es $2 \pi r h$,

$$C = \frac{k \cdot 2 \pi r h}{4 \pi d} = \frac{k r h}{2 d}$$

admitiendo el valor 4 para la constante dieléctrica del vidrio:

$$C = \frac{4 \times 12 \times 30}{0,2} = 7200 \text{ cm.}$$

$$V = 30000\ V = \frac{1}{300} 30000 \text{ U. E. S.} = 100 \text{ U. E. S.}$$

$$E = \frac{1}{2} 7200 \times 100^2 = 36000000 \text{ erg} =$$
$$= 3,6 \text{ joule} = \mathbf{0,367\ Kgm.}$$

SECCIÓN XV

CORRIENTE ELÉCTRICA

---

238. ¿Cómo se puede investigar la **dirección de la corriente** en un alambre telegráfico?

Puede utilizarse un galvanoscopio, o un voltámetro, o un papel buscapolos.

---

239. **¿Cuánto cobre** puede precipitar en un día una corriente de 100 amperios?

1 amperio en 1 segundo desprende 0,328 mg de cobre; luego I amperios en T segundos desprenderán:

$$Q = 0{,}328 \times I \times T \text{ mg} = 0{,}328 \times 100 \times 86400 \text{ mg} = \mathbf{2834\ g.}$$

---

240. ¿Qué intensidad debe poseer una corriente para dar en una hora **1 litro de hidrógeno** en las condiciones normales?

Puesto que 1 amperio en 1 segundo da 0,0104 mg de hidrógeno, en una hora dará $0{,}0104 \times 3600$ mg, o sea:

$$0{,}03744 \text{ g.}$$

Siendo el peso específico del hidrógeno 0,00009, los 0,03744 g ocuparán un volumen:

$$v = \frac{0{,}03744}{0{,}00009} \text{ cm}^3 = 416 \text{ cm}^3$$

y éste será el volumen de hidrógeno dado por 1 amperio en 1 hora.

Para obtener en una hora 1 litro se necesitarán:

$$\frac{1000}{416} = \mathbf{2{,}4\ A.}$$

---

241. La corriente i desprende en un **voltámetro de gas oxhídrico,** en 4 minutos, un volumen $v_1 = 212$ cm³ a la presión de 720 mm y a la temperatura de 18° C. ¿Cuál es el valor de i?

$$v_0 = \frac{b}{760} \times \frac{273}{T} \times v_1 = \frac{720}{760} \times \frac{273}{273+18} \times 212.$$

Pero 1 A en 1 minuto desprende 10,5 cm³ de gas oxhídrico a 0° y 760 mm; luego en 4 minutos desprenderá:

$$4 \times 10{,}5$$

y

$$i = \frac{v_0}{10{,}5} = \frac{720}{760} \times \frac{273}{273+18} \times \frac{212}{4 \times 10{,}5} = \mathbf{4{,}5\ A.}$$

---

242. ¿Cuántos culombios deben haber pasado por un voltámetro para haber desprendido **1 gr de hidrógeno?** ¿Y cuántos para haber precipitado **108 gr de plata?**

Desprendiendo cada amperio-segundo, o sea cada culombio, 0,0104 mg de hidrógeno, para desprender 1 gr se necesitarán:

$$\frac{1000}{0{,}0104} = \mathbf{96153\ culombios}$$

y para los 108 gr de plata:

$$\frac{108000}{1{,}118} = \mathbf{96601\ culombios.}$$

Advertencia. Para desprender un ion-gramo de hidrógeno se necesita realmente la misma cantidad de electricidad que para desprender un ion-gramo de cualquier otro elemento monovalente. En el caso del problema, el mismo número de culombios corresponderá a 1 g de hidrógeno y a 108 g de plata. Partiendo de pesos atómicos exactos se tendría el valor **96490 culombios.**

---

243. ¿Cuál es la tensión necesaria para producir una corriente de 15 A a través de un alambre de cobre de 135 m de longitud y 5 mm de diámetro, si la conductibilidad del cobre es 57?

Resistencia del alambre:

$$R = \frac{l}{c\,s}$$

Para que R resulte en ohmios, l debe expresarse en metros y s en milímetros cuadrados. Siendo el diámetro de 5 mm, la sección será:

$$s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \times 5^2}{4} = 19{,}62 \text{ mm}^2$$

y la resistencia:

$$R = \frac{135}{19{,}62 \times 57}$$

En virtud de la ley de Ohm:

$$E = I \times R$$

$$E = 15 \times \frac{135}{19{,}62 \times 57} = \mathbf{1{,}8\ V.}$$

---

244. Entre los extremos de una línea de 35,6 Ω existe una diferencia de tensión de 200 V. ¿Qué intensidad de corriente recorre la línea?

$$i = \frac{200}{35{,}6} = \mathbf{5{,}62\ A.}$$

---

245. ¿Qué resistencia se debe aplicar a una lámpara de arco para que con una corriente de 12 A se consuma una tensión de 20,6 V?

$$R = \frac{E}{I} = \frac{20,6}{12} = \mathbf{1,72\ \Omega.}$$

246. De una dínamo al electromotor accionado por ella hay una distancia de 325 m y las dos máquinas están unidas por hilo de cobre ($\varkappa = 57$) de 5 mm de diámetro. ¿A qué tensión trabaja el motor si la dínamo da 220 V y la corriente es de 30 A?

Sección del alambre (véase problema 243) $s = 19,62\ mm^2$. Resistencia de la línea:

$$R = \frac{2 \times 325}{19,62 \times 57}$$

Pérdida de tensión:

$$E = R\,I = \frac{30 \times 2 \times 325}{19,62 \times 57} = 17,4\ V$$

y así el motor trabajará a

$$220 - 17,4 = \mathbf{202,6\ V.}$$

247. Entre dos puntos, A y B, se han instalado **dos resistencias:** $r_1 = 300\ \Omega$ y $r_2 = 100\ \Omega$. ¿Cuál es la

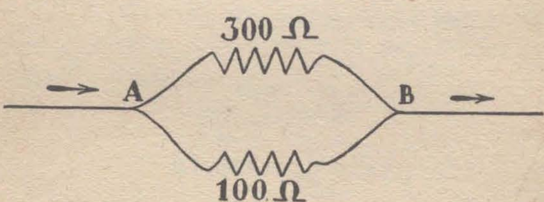


Fig. 41

resistencia que de A a B encuentra la corriente eléctrica? (fig. 41).

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$$

$$R=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}=\frac{300\times 100}{300+100}=\frac{30000}{400}=\mathbf{75}\ \Omega.$$

---

248. Entre dos barras de cobre se han colocado 12 hilos de maillechort, cada uno de los cuales tiene 5,1 m de longitud y 1,8 mm de diámetro. Los extremos

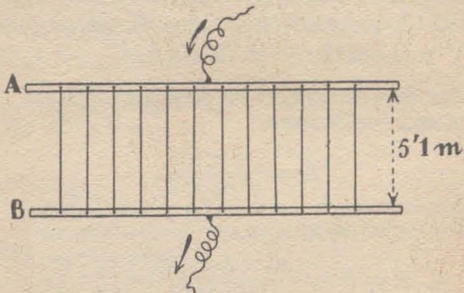


Fig. 42

de cada alambre están soldados a las barras de cobre. La resistencia específica del maillechort a 15° C es $\sigma=0{,}301\ \Omega$. ¿Cuál es, a 15° C, la resistencia entre A y B? (fig. 42).

Resistencia de un alambre:

$$\frac{l\sigma}{s}=\frac{l\sigma}{\frac{\pi d^2}{4}}=\frac{4l\sigma}{\pi d^2}=0{,}6035\ \Omega$$

$$R=\frac{r}{12}=\mathbf{0{,}0503}\ \Omega.$$

---

249. Con **diez alambres de cobre** de diámetro 1,5 mm y de resistencia específica 0,0176, montados en paralelo, se debe preparar una resistencia de 0,01 Ω: ¿cuál debe ser la longitud de cada hilo? ¿cuál debería ser esa longitud si los hilos fueran de maillechort?

Resistencia de un alambre:

$$r_1 = \frac{l\sigma}{s} = \frac{4\,l\,\sigma}{\pi\,d^2}$$

Resistencia de los diez alambres:

$$R = \frac{r_1}{10} = \frac{4\,l\,\sigma}{10\,\pi\,d^2} = \frac{l\,\sigma}{2{,}5\,\pi\,d^2}$$

y de aquí se deduce:

$$l = \frac{2{,}5\,\pi\,d^2\,R}{\sigma}$$

Para el cobre:

$$b = \frac{2{,}5 \times 3{,}1416 \times 1{,}5^2 \times 0{,}01}{0{,}0176} = \mathbf{10{,}04\ m.}$$

Para el maillechort:

$$l = \frac{2{,}5 \times 3{,}1416 \times 1{,}5^2 \times 0{,}01}{0{,}301} = \mathbf{0{,}58\ m.}$$

---

250. La **corriente** $i = 32$ A se bifurca entre los puntos A y B a través de las resistencias $r_1 = 0{,}16\ \Omega$ y $r_2 = 0{,}4\ \Omega$. Determínense las intensidades de las corrientes derivadas y la diferencia de tensión entre los puntos A y B.

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$i_1 + i_2 = I$$

$$i_1 + \frac{i_1\,r_1}{r_2} = I, \qquad r_2\,i_1 + r_1\,i_1 = r_2\,I$$

$$i_1 = \frac{r_2\,I}{r_1 + r_2} = \frac{0{,}4 \times 32}{0{,}16 + 0{,}4} = \mathbf{22{,}857\ A}$$

y de igual modo:

$$i_2 = \frac{r_1 I}{r_1 + r_2} = \frac{0{,}16 \times 32}{0{,}56} = \mathbf{9{,}143\ A}$$

o bien:

$$i_2 = I - i_1 = 32 - 22{,}857 = 9{,}143\ \mathrm{A}.$$

La pérdida de tensión será igual al producto de I por la resistencia equivalente a las dos ramas:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

$$E = IR = I\,\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{32 \times 0{,}16 \times 0{,}4}{0{,}56} = \mathbf{3{,}657\ V.}$$

---

251. La corriente I se mide con un miliamperímetro cuya resistencia es de 1 Ω. El instrumento está

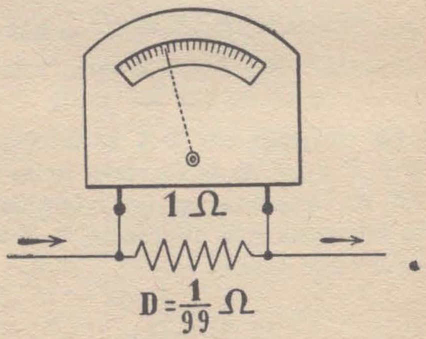


Fig. 43

dotado de una derivación de $\frac{1}{99}$ Ω. Deducir el valor de I del indicado por el miliamperímetro, que es igual a 0,072 A (fig. 43).

$$I = i_1 + i_2$$

$$i_1 r_1 = i_2 D$$

$$i_2 = \frac{i_1 r_1}{D}$$

$$I = i_1 + \frac{i_1 r_1}{D} = i_1 \left(1 + \frac{r_1}{D}\right)$$

$$I = 0{,}072 \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{99}}\right) = 0{,}072 \times 100 = \mathbf{7{,}2\ A.}$$

---

252. Un **galvanómetro** cuya bobina presenta una resistencia de 84,2 Ω debe dotarse de una derivación que permita el paso por el galvanómetro de $\frac{1}{1000}$ de la corriente que se trata de medir. ¿Cuál debe ser la resistencia de esa derivación?

$$i_1 = \frac{i_1 + i_2}{1000}$$

$$i_2 = 1000\, i_1 - i_1 = 999\, i_1$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$r_2 = \frac{i_1}{i_2} r_1 = \frac{i_1}{999\, i_1} r_1 = \frac{84{,}2}{999} = \mathbf{0{,}0843\ \Omega.}$$

---

253. En la **medición de una intensidad** se ha provisto el galvanómetro, cuya bobina es de 400 Ω, de una derivación $N = 0{,}2$ Ω. La corriente indicada por el galvanómetro ha sido $i = 0{,}0064$ A. ¿Qué intensidad poseía la corriente que se trataba de medir?

$$I = i_1 + i_2$$

$$i_2 = \frac{i_1 r_1}{r_2}$$

$$I = i_1\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = i_1\left(1 + \frac{400}{0,2}\right) =$$
$$= 0,0064 \times 2001 = \mathbf{12,806\ A}.$$

---

254. Enlazados en serie **64 elementos de Meidinger** (fuerza electromotriz $e = 0,953$ voltios; resistencia interior $r = 9,5\,\Omega$) y aplicados a una resistencia exterior, dan una corriente de 0,01 A; ¿cuál es el valor de la resistencia exterior?

$$i = \frac{n\,e}{n\,r + R}$$

$$R\,i + n\,r\,i = n\,e$$

$$R = \frac{n\,e - n\,r\,i}{i} = \frac{64\,(0,953 - 9,5 \times 0,01)}{0,01} = \mathbf{5491,2\ \Omega}$$

---

255. ¿Cuántos elementos de Meidinger se deben enlazar en serie para que a través de una resistencia exterior de 4000 Ω den una intensidad de 0,012 A?

$$i = \frac{n\,e}{n\,r + R}; \quad i\,n\,r + i\,R = n\,e$$

$$n\,(e - i\,r) = i\,R$$

$$n = \frac{i\,R}{e - i\,r} = \frac{0,012 \times 4000}{0,953 - 0,012 \times 9,5} = \frac{48}{0,839} = \mathbf{57}\ \text{elementos.}$$

---

256. Se enlazan **12 elementos de Bunsen** formando dos series de 6 elementos. La fuerza electromotriz de cada elemento es 1,82 V; la resistencia interna 0,11 Ω. La resistencia exterior $R = 6,4\,\Omega$. Hallar los valores de la intensidad i y de la tensión E_p entre los polos.

Por estar formada cada serie de 6 elementos, la f. e. m. será de:

$$6 \times e\ \text{V}$$

y la resistencia será, habiendo dos series de 6 elementos:

$$\frac{6r}{2}\ \Omega$$

así:

$$i=\frac{6e}{\frac{6r}{2}+R}=\frac{6\times1{,}82}{\frac{6\times0{,}11}{2}+6{,}4}=\mathbf{1{,}62\ A.}$$

Y la tensión entre polos, igual al producto de la intensidad por la resistencia externa:

$$E_p=i\,R=1{,}62\times6{,}4=\mathbf{10{,}37\ V.}$$

---

257. Una **lámpara de incandescencia** presenta una resistencia de 220 Ω y está construída para la tensión de 110 V. ¿Qué cantidad de calor se desarrolla por segundo en su filamento?

Cálculo de la intensidad:

$$i=\frac{E}{R}=\frac{110}{220}=\frac{1}{2}\ \mathrm{A}.$$

Cálculo de la potencia:

$$L=i^2\,R=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times220=55\ \mathrm{W}.$$

Cálculo del calor desarrollado por segundo:

$$Q=55\times0{,}24=\mathbf{13{,}2\ cal.\ por\ seg.}$$

---

258. La **corriente** $i=56$ A recorre un alambre de cobre de 212 m de longitud y 20 mm² de sección. Hallar el valor de la pérdida de tensión e y de la pérdida de energía en el alambre, y determinar la cantidad de calor desarrollada por segundo. La conductibilidad del cobre es 60.

Resistencia del alambre de cobre:

$$R = \frac{l}{cs} = \frac{212}{60 \times 20} = 0{,}176\ \Omega.$$

Pérdida de tensión:

$$e = RI = 0{,}176 \times 56 = \mathbf{9{,}856\ V}.$$

Pérdida de energía:

$$P = RI^2 = 9{,}856 \times 56 = \mathbf{552\ W}.$$

Cantidad de calor:

$$Q = P \times 0{,}24 = 552 \times 0{,}24 = \mathbf{132{,}5\ cal.\ por\ seg.}$$

---

259. ¿Qué energía se consume en una resistencia de 0,74 Ω cuando es atravesada por una corriente de 16 A? ¿Cuánto calor se desarrolla por minuto?

$$P = RI^2 = 0{,}74 \times 16^2 = \mathbf{189{,}44\ W}.$$

$$Q = P \times 0{,}24 \times \text{tiempo en segundos} = 189{,}44 \times 0{,}24 \times 60 = \mathbf{2728\ cal.}$$

---

260. A través de una espiral de maillechort cuya resistencia es $R = 16\ \Omega$ pasa la corriente $i = 2{,}8$ A. La espiral, enteramente sumergida en el agua destilada de un calorímetro, tiene los extremos soldados a gruesos hilos de cobre que sirven de bornes. El peso del vaso calorimétrico, de latón, es 35,2 g; el del agua es de 380 g. ¿Qué aumento de temperatura experimenta el agua en 5 minutos?

Calor desprendido por la corriente eléctrica igual a calor ganado por el calorímetro.

Calor producido por la corriente eléctrica:

$$Q = 0{,}24\, R i^2 t = 0{,}24 \times 16 \times 2{,}8^2 \times 5 \times 60 = 9032 \text{ cal.}$$

Calor recibido por el calorímetro, siendo el calor específico del latón $c = 0{,}094$:

$$(35{,}2 \times 0{,}094 + 380)\ t.$$

Igualando las dos cantidades de calor producida y recibida:

$$(35{,}2 \times 0{,}094 + 380)\ t = 9032$$

$$t = \frac{9\,032}{35{,}2 \times 0{,}094 + 380} = \mathbf{23{,}6°\ C.}$$

---

261. ¿Cuántos **caballos** absorbe un electromotor que funciona a 110 V con una intensidad de 50 A?

$$P = E\,I = 110 \times 50 = 5500\ \text{W}$$

y siendo 1 CV = 736 W, la potencia absorbida por el motor equivaldrá a

$$\frac{5500}{736} = \mathbf{7{,}5\ CV}.$$

---

262. Calcular la **resistencia** que debe enlazarse en serie con un **arco voltaico** de 10 amperios alimentado por una línea a 115 V.

El arco voltaico desarrolla una fuerza contraelectromotriz de unos 40 voltios. Así la f. e. m. que determina el paso de la corriente será de:

$$E = 115 - 40 = 75\ \text{V}$$

y en virtud de la ley de Ohm:

$$R = \frac{E}{I} = \frac{75}{10} = \mathbf{7{,}5\ \Omega}.$$

SECCION XVI

INDUCCIÓN

263. Calcular la f. e. m. **inducida en un alambre** de 1 m de longitud, horizontal, orientado de E a W, al caer de una altura de 5 metros.

Velocidad final:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 5} = 10 \text{ m/seg} = 1000 \text{ cm/seg}.$$

Componente horizontal del magnetismo terrestre:

$$H = \frac{1}{5} \text{ dina}.$$

F. e. m. inducida:

$$e = H\, l\, v \cdot 10^{-8} \text{ Volt}$$

$$e = \frac{1}{5} \times 100 \times 1000 \times 10^{-8} = \frac{1}{5000} \text{ V}.$$

---

264. ¿Cuál es la f. e. m. inducida por selfinducción en un solenoide de longitud $l = 10$ cm, número de espiras $n = 1000$, radio $r = 5$ cm, si se interrumpe en 0,001 segundos una corriente de 10 ampère?

a) La selfinducción L de un solenoide viene dada por la fórmula

$$L = \frac{0{,}4\, \pi^2 n^2 r^2}{l}\, 10^{-8} \text{ volt/seg (henry)}$$

substituyendo valores:

$$L = \frac{0{,}4 \times 3{,}1416^2 \times 1\,000^2 \times 5^2}{10} \times 10^{-8} = \frac{1}{10} \text{ henry.}$$

b) La fuerza electromotriz inducida vale:

$$e = L \frac{i}{t} = \frac{1}{10} \times 10 \times 1\,000 = \mathbf{1000\ V}$$

equivalente a una longitud de chispa de 1 mm.

---

265. Arrollando sobre un **tubo de cartón** 4 m de alambre, se forma un solenoide de 10 cm de longitud. ¿Cuál es la **selfinducción** de este solenoide?

La fórmula de la selfinducción señalada en el problema anterior:

$$e = \frac{0{,}4\,\pi^2\,n^2\,r^2}{l}\,10^{-8} \text{ henry}$$

puede escribirse así:

$$e = \frac{4\,\pi^2\,n^2\,r^2}{l}\,10^{-9} = \frac{(2\,\pi\,r\,n)^2}{l}\,10^{-9}$$

pero $2\,\pi\,r\,n$ es igual a la longitud total U del alambre:

$$e = \frac{U^2}{l}\,10^{-9} \text{ henry}$$

y substituyendo valores:

$$e = \frac{400^2}{10}\,10^{-9} = \mathbf{1{,}6 \times 10^{-5}\ henry.}$$

Esta forma de calcular la self muestra que sus dimensiones son las de una longitud y puede expresarse en centímetros. Así 1 henry $= 10^9$ cm.

---

266. En una **dínamo,** una armadura de radio $r = 10$ cm y longitud $l = 10$ cm gira a 20 revoluciones por segundo en un campo magnético de intensidad $H = 800$ gauss (o dinas por unidad de polo). Se desea saber: *a*) ¿qué f. e. m. se producirá en cada una de las 1200 barras de la armadura? *b*) ¿qué fuerza será necesaria para hacer girar la armadura, si la resistencia exterior se ha regulado de manera que las barras, en número de 1200, sean recorridas por una corriente $i = 5$ A?

a) Cálculo de la velocidad:

$$v = 2\pi r n = 1256 \text{ cm/seg}$$

Cálculo de la f. e. m. de cada barra:

$$e = H l v 10^{-8} \, V = 800 \times 10 \times 1256 \times 10^{-8} = \mathbf{0{,}1\ V}.$$

b) Esfuerzo sobre una barra:

$$P_1 = H i l \times 10^{-1} \text{ dinas} = 800 \times 5 \times 10 \times 10^{-1} =$$
$$= 4000 \text{ dinas} = \sim 4{,}1 \text{ g}$$

y para toda la armadura

$$P = 1200 \times 4{,}1 \text{ g} = \sim \mathbf{4920\ g}.$$

TABLAS

I. Notaciones métricas y otras abreviaturas

A	amperio.
atm	atmósfera (unidad de presión).
Cal.	caloría-kilogramo.
cal.	caloría-gramo.
c. d. g.	centro de gravedad
C. G. S.	centímetro-gramo-segundo.
cm	centímetro.
cm^2	centímetro cuadrado.
cm^3	centímetro cúbico.
cm/seg	centímetros por segundo
cm/seg^2	centímetros por segundo, por segundo.
cos	coseno de un ángulo
cot	cotangente.
CV	caballo de vapor.
dm	decímetro.
dm^2	decímetro cuadrado
dm^3	decímetro cúbico.
f. e. m.	fuerza electromotriz
g	gramo-fuerza.
g	981 cm/seg^2 (aceleración de la gravedad).
gr	gramo-masa.
h.	hora.
HP	caballo de vapor.
Km	kilómetro.
Km^2	kilómetro cuadrado
Kg	kilogramo.
Kgm	kilográmetro.
KW	kilovatio.
lit.	litro.
log	logaritmo de.
m	metro.
m^2	metro cuadrado
m^3	metro cúbico.
min.	minuto de tiempo.
mm	milímetro.
mm^2	milímetro cuadrado
mm^3	milímetro cúbico.
m/seg	metros por segundo
m/seg^2	metros por segundo, por segundo.

Rs.	revoluciones.
seg.	segundo de tiempo.
sen	seno de un ángulo.
t	tonelada métrica.
tg	tangente de un ángulo.
U. E. S.	unidades electrostáticas.
U. E. M.	unidades electromagnéticas.
V	voltio.
W	vatio.
μ	micra o milésima de milímetro.
π	3,1416 (razón de la circunferencia al diámetro).
Σ	suma de términos.
Ω	ohmio.
$a = b$	*a* igual a *b*.
$a > b$	*a* mayor que *b*.
$a < b$	*a* menor que *b*.
$a + b$	*a* más *b*.
$a - b$	*a* menos *b*.
$a \pm b$	*a* más o menos *b*.
$a \times b$	*a* multiplicado por *b*
ab	*a* multiplicado por *b*
$a : b$	*a* dividido por *b*.
$\frac{a}{b}$	*a* dividido por *b*.
a^2	cuadrado de *a* (*a* veces *a*).
a^3	cubo de *a* ($a \times a \times a$)
$\sqrt{a}$	raíz cuadrada de *a*.
$'$	minuto de arco.
$''$	segundo de arco.
$^\circ$	grados (de arco, o de temperatura, o de densidad).
$^\circ$ Bé.	grados Baumé.
$^\circ$ C.	grados centígrados
$^\circ$ F.	grados Fahrenheit.
$^\circ$ R.	grados Reaumur.
$^0/_0$	por ciento.
$^0/_{00}$	por mil.
$\sim$	aproximadamente, poco más o menos

II. Logaritmos de los

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2783	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

números naturales

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	3976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	8894	9899	9903	9908
98	9912	9817	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

III. Líneas trigonométricas naturales

°	'	SENO	TANGENTE	COTANGENTE	COSENO	'	°
0	0	0,0000	0,0000	$+\infty$	1,0000	0	90
	30	0,0087	0,0087	114,59	1,0000	30	
1	0	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	0	89
	30	0,0262	0,0262	38,19	0,9997	30	
2	0	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	0	88
	30	0,0436	0,0437	22,90	0,9990	30	
3	0	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	0	87
	30	0,0610	0,0612	16,35	0,9981	30	
4	0	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	0	86
	30	0,0785	0,0787	12,71	0,9969	30	
5	0	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	0	85
	30	0,0958	0,0963	10,39	0,9954	30	
6	0	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	0	84
	30	0,1132	0,1139	8,777	0,9936	30	
7	0	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	0	83
	30	0,1305	0,1317	7,596	0,9914	30	
8	0	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	0	82
	30	0,1478	0,1495	6,691	0,9890	30	
9	0	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	0	81
	30	0,1650	0,1673	5,976	0,9863	30	
10	0	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	0	80
	30	0,1822	0,1853	5,396	0,9833	30	
11	0	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	0	79
	30	0,1994	0,2035	4,915	0,9799	30	
12	0	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	0	78
	30	0,2164	0,2217	4,511	0,9763	30	
13	0	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	0	77
	30	0,2334	0,2401	4,165	0,9724	30	
14	0	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	0	76
	30	0,2504	0,2586	3,867	0,9681	30	
°	'	COSENO	COTANGENTE	TANGENTE	SENO	'	°

III. Líneas trigonométricas naturales *(Continuación)*

°	′	SENO	TANGENTE	COTANGENTE	COSENO	′	°
15	0	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	0	75
	30	0,2672	0,2773	3,606	0,9636	30	
16	0	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	0	74
	30	0,2840	0,2962	3,376	0,9588	30	
17	0	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	0	73
	30	0,3007	0,3153	3,172	0,9537	30	
18	0	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	0	72
	30	0,3173	0,3346	2,989	0,9483	30	
19	0	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	0	71
	30	0,3338	0,3541	2,824	0,9426	30	
20	0	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	0	70
	30	0,3502	0,3739	2,675	0,9367	30	
21	0	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	0	69
	30	0,3665	0,3939	2,539	0,9304	30	
22	0	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	0	68
	30	0,3827	0,4142	2,414	0,9239	30	
23	0	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	0	67
	30	0,3987	0,4348	2,300	0,9171	30	
24	0	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	0	66
	30	0,4147	0,4557	2,194	0,9100	30	
25	0	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	0	65
	30	0,4305	0,4770	2,097	0,9026	30	
26	0	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	0	64
	30	0,4462	0,4986	2,006	0,8949	30	
27	0	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	0	63
	30	0,4617	0,5206	1,921	0,8870	30	
28	0	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	0	62
	30	0,4772	0,5430	1,842	0,8788	30	
29	0	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	0	61
	30	0,4924	0,5658	1,767	0,8704	30	
°	′	COSENO	COTANGENTE	TANGENTE	SENO	′	°

III. Líneas trigonométricas naturales *(Conclusión)*

°	′	SENO	TANGENTE	COTANGENTE	COSENO	′	°
30	0	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	0	60
	30	0,5075	0,5890	1,698	0,8616	30	
31	0	0,5150	0,6009	1,664	0,8572	0	59
	30	0,5225	0,6128	1,632	0,8526	30	
32	0	0,5299	0,6249	1,600	0,8480	0	58
	30	0,5373	0,6371	1,570	0,8434	30	
33	0	0,5446	0,6494	1,540	0,8387	0	57
	30	0,5519	0,6619	1,511	0,8339	30	
34	0	0,5592	0,6745	1,483	0,8290	0	56
	30	0,5664	0,6873	1,455	0,8241	30	
35	0	0,5736	0,7002	1,428	0,8192	0	55
	30	0,5807	0,7133	1,402	0,8141	30	
36	0	0,5878	0,7265	1,376	0,8090	0	54
	30	0,5948	0,7400	1,351	0,8039	30	
37	0	0,6018	0,7536	1,327	0,7986	0	53
	30	0,6088	0,7673	1,303	0,7934	30	
38	0	0,6157	0,7813	1,280	0,7880	0	52
	30	0,6225	0,7954	1,257	0,7826	30	
39	0	0,6293	0,8098	1,235	0,7771	0	51
	30	0,6361	0,8243	1,213	0,7716	30	
40	0	0,6428	0,8391	1,192	0,7660	0	50
	30	0,6494	0,8541	1,171	0,7604	30	
41	0	0,6561	0,8693	1,150	0,7547	0	49
	30	0,6626	0,8847	1,130	0,7490	30	
42	0	0,6691	0,9004	1,111	0,7431	0	48
	30	0,6756	0,9163	1,091	0,7373	30	
43	0	0,6820	0,9325	1,072	0,7314	0	47
	30	0,6884	0,9490	1,054	0,7254	30	
44	0	0,6947	0,9657	1,036	0,7193	0	46
	30	0,7009	0,9827	1,018	0,7133	30	
45	0	0,7071	1,0000	1,000	0,7071	0	45
°	′	COSENO	COTANGENTE	TANGENTE	SENO	′	°

IV. Logaritmos de las líneas trigonométricas ($r = 10^{10}$)

°	'	SENO	TANGENTE	COTANGENTE	COSENO	'	°
0	0	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	10,0000	0	90
	30	7,9408	7,9409	12,0591	10,0000	30	
1	0	8,2419	8,2419	11,7581	9,9999	0	89
	30	8,4179	8,4181	11,5819	9,9999	30	
2	0	8,5428	8,5431	11,4569	9,9997	0	88
	30	8,6397	8,6401	11,3599	9,9996	30	
3	0	8,7188	8,7194	11,2806	9,9994	0	87
	30	8,7857	8,7865	11,2135	9,9992	30	
4	0	8,8436	8,8446	11,1554	9,9989	0	86
	30	8,8946	8,8960	11,1040	9,9987	30	
5	0	8,9403	8,9420	11,0580	9,9983	0	85
	30	8,9816	8,9836	11,0164	9,9980	30	
6	0	9,0192	9,0216	10,9784	9,9976	0	84
	30	9,0539	9,0567	10,9433	9,9972	30	
7	0	9,0859	9,0891	10,9109	9,9968	0	83
	30	9,1157	9,1194	10,8806	9,9963	30	
8	0	9,1436	9,1478	10,8522	9,9958	0	82
	30	9,1697	9,1745	10,8255	9,9952	30	
9	0	9,1943	9,1997	10,8003	9,9946	0	81
	30	9,2176	9,2236	10,7764	9,9940	30	
10	0	9,2397	9,2463	10,7537	9,9934	0	80
	30	9,2606	9,2680	10,7320	9,9927	30	
11	0	9,2806	9,2887	10,7113	9,9919	0	79
	30	9,2997	9,3085	10,6915	9,9912	30	
12	0	9,3179	9,3275	10,6725	9,9904	0	78
	30	9,3353	9,3458	10,6542	9,9896	30	
13	0	9,3521	9,3634	10,6366	9,9887	0	77
	30	9,3682	9,3804	10,6196	9,9878	30	
14	0	9,3837	9,3968	10,6032	9,9869	0	76
	30	9,3986	9,4127	10,5873	9,9859	30	
°	'	COSENO	COTANGENTE	TANGENTE	SENO	'	°

IV. Logaritmos de las líneas trigonométricas *(Continuación)*

°	'	SENO	TANGENTE	COTANGENTE	COSENO	'	°
15	0	9,4130	9,4281	10,5719	9,9849	0	75
	30	9,4269	9,4430	10,5570	9,9839	30	
16	0	9,4403	9,4575	10,5425	9,9828	0	74
	30	9,4533	9,4716	10,5284	9,9817	30	
17	0	9,4659	9,4853	10,5147	9,9806	0	73
	30	9,4781	9,4987	10,5013	9,9794	30	
18	0	9,4900	9,5118	10,4882	9,9782	0	72
	30	9,5015	9,5245	10,4755	9,9770	30	
19	0	9,5126	9,5370	10,4630	9,9757	0	71
	30	9,5235	9,5491	10,4509	9,9743	30	
20	0	9,5341	9,5611	10,4389	9,9730	0	70
	30	9,5443	9,5727	10,4273	9,9716	30	
21	0	9,5543	9,5842	10,4158	9,9702	0	69
	30	9,5641	9,5954	10,4046	9,9687	30	
22	0	9,5736	9,6064	10,3936	9,9672	0	68
	30	9,5828	9,6172	10,3823	9,9656	30	
23	0	9,5919	9,6279	10,3721	9,9640	0	67
	30	9,6007	9,6383	10,3617	9,9624	30	
24	0	9,6093	9,6486	10,3514	9,9607	0	66
	30	9,6177	9,6587	10,3413	9,9590	30	
25	0	9,6259	9,6687	10,3313	9,9573	0	65
	30	9,6340	9,6785	10,3215	9,9555	30	
26	0	9,6418	9,6882	10,3118	9,9537	0	64
	30	9,6495	9,6977	10,3023	9,9518	30	
27	0	9,6570	9,7072	10,2928	9,9499	0	63
	30	9,6644	9,7165	10,2835	9,9479	30	
28	0	9,6716	9,7257	10,2743	9,9459	0	62
	30	9,6787	9,7348	10,2652	9,9439	30	
29	0	9,6856	9,7438	10,2562	9,9418	0	61
	30	9,6923	9,7526	10,2474	9,9397	30	
°	'	COSENO	COTANGENTE	TANGENTE	SENO	'	°

IV. Logaritmos de las líneas trigonométricas *(Conclusión)*

°	'	SENO	TANGENTE	COTANGENTE	COSENO	'	°
30	0	9,6990	9,7614	10,2386	9,9375	0	60
	30	9,7055	9,7701	10,2299	9,9353	30	
31	0	9,7118	9,7788	10,2212	9,9331	0	59
	30	9,7181	9,7873	10,2127	9,9308	30	
32	0	9,7242	9,7958	10,2042	9,9284	0	58
	30	9,7302	9,8042	10,1958	9,9260	30	
33	0	9,7361	9,8125	10,1875	9,9236	0	57
	30	9,7419	9,8208	10,1792	9,9211	30	
34	0	9,7476	9,8290	10,1710	9,9186	0	56
	30	9,7531	9,8371	10,1629	9,9160	30	
35	0	9,7586	9,8452	10,1548	9,9134	0	55
	30	9,7640	9,8533	10,1467	9,9107	30	
36	0	9,7692	9,8613	10,1387	9,9080	0	54
	30	9,7744	9,8692	10,1308	9,9052	30	
37	0	9,7795	9,8771	10,1229	9,9023	0	53
	30	9,7844	9,8850	10,1150	9,8995	30	
38	0	9,7893	9,8928	10,1072	9,8965	0	52
	30	9,7941	9,9006	10,0994	9,8935	30	
39	0	9,7989	9,9084	10,0916	9,8905	0	51
	30	9,8035	9,9161	10,0839	9,8874	30	
40	0	9,8081	9,9238	10,0762	9,8843	0	50
	30	9,8125	9,9315	10,0685	9,8810	30	
41	0	9,8169	9,9392	10,0608	9,8778	0	49
	30	9,8213	9,9468	10,0532	9,8745	30	
42	0	9,8255	9,9544	10,0456	9,8711	0	48
	30	9,8297	9,9621	10,0379	9,8676	30	
43	0	9,8338	9,9697	10,0303	9,8641	0	47
	30	9,8378	9,9772	10,0228	9,8606	30	
44	0	9,8418	9,9848	10,0152	9,8569	0	46
	30	9,8457	9,9924	10,0076	9,8532	30	
45	0	9,8495	10,0000	10,0000	9,8495	0	45
°	'	COSENO	COTANGENTE	TANGENTE	SENO	'	°

V. Pesos específicos de sólidos y líquidos

Metales

Iridio	22,4
Platino fundido	21,48 a 21,50
— forjado	21,25
— en plancha o en hilos	21,2 a 21,7
Oro fundido	19,30
— en plancha o en hilos	19,36
— acuñado	19,32
Mercurio	13,596
Plomo fundido	11,35
— laminado	11,38
— en hilos	11,40
Plata fundida	10,46
— laminada	10,62
— en hilos	10,56
Cobre fundido	8,3 a 8,9
— forjado	8,9
— electrolítico	8,9
— en hilos, templado	8,96
— recocido	8,86
Latón fundido	8,4 a 8,7
— laminado	8,56
— en hilos	8,4 a 8,7
Níquel fundido	8,35
— forjado	8,67
— en hilos	9,20
Niquelina	8,63 a 8,77
Maillechort	8,30 a 8,45
Metal de cañón	8,8
Bronce	8,8
— de aluminio	7,7
Hierro fundido	7,0 a 7,7
— dulce	7,6 a 7,9
— en hilos	7,6 a 7,8
— puro	7,88
Acero	7,3 a 7,9
Zinc	6,9 a 7,2
Estaño	7,3
Aluminio comercial	2,6
— puro	2,58
Magnesio	1,7
Potasio	0,87
Sodio	0,98
Litio	0,59

Piedras

Piedra imán	4,9
Basalto, Granito	2,7 a 3,2
Cuarzo	2,6 a 2,8
Pizarra	2,8
Alabastro	2,3 a 2,8
Mármol	2,7
Hormigón	2,47
Cemento (duro)	2,7 a 3
Argamasa de cemento	1,8 a 1,9
Cal viva	2,3 a 3,2
Mampostería	2 a 2,6
Obra de fábrica	1,4 a 1,7
Arenisca	2,4 a 2,7
Ladrillos	1,5 a 2,3
— refractarios	2 a 2,15
Arena	2,3
Asfalto	1,07 a 1,46
Piedra pómez	0,9 a 1,6
Tierra humus	1,3 a 1,8
— arenosa	1,4 a 1,9
— arcillosa	1,6 a 1,9
Creta	1,8 a 2,7

Maderas

(Secadas al aire)

Arce	0,75
Abedul	0,51 a 0,77
Fresno, haya	0,75
Ébano	1,26
Encina	0,7 a 1,03
Pino, abeto, tilo	0,35 a 0,60
Corcho	0,24
Álamo, chopo	0,36
Boj	0,95
Caoba	0,56 a 0,85
Castaño	0,60
Nogal	0,66
Olivo	0,99
Olmo	0,70
Roble	0,70 a 0,82
Cedro del Líbano	0,52

Advertencia: Las maderas verdes tienen un peso específico más elevado.

Carbones

Antracita	1,4 a 1,7
Hulla	1,2 a 1,5
Lignito	0,8 a 1,5
Cok	0,5
Filamentos de carbón	1,25 a 2,1
Barras de carbón	1,6
Grafito	1,8 a 2,3

Otras substancias

Cristal de roca	2,65
Diamante	3,5
Vidrio de espejos	2,45 a 2,72
— de ventana	2,4 a 2,6
Cristal	2,9 a 3,0
Flintglass	3,15 a 3,9
Mica	2,65 a 3,2
Porcelana	2,1 a 2,3
Marfil	1,87
Espuma de mar	1,8
Ebonita	1,15
Caucho	0,93
Pez	1,07
Azufre	1,9 a 2,1
Estearina	0,97
Fibra vulcanizada	1,28
Cera	0,97
Espermaceti	0,94
Azúcar	1,6

Líquidos

Éter	0,72
Alcohol	0,79
Bencina (de petróleo)	0,69 a 0,73
Bencina (de alquitrán)	0,90
Cerveza	1,02
Glicerina	1,26
Agua de mar	1,02 a 1,04
Leche	1,03 a 1,06
Aceites:	
De oliva	0,92
De lino	0,94
De adormidera	0,93
De colza	0,91
Petróleo	0,80
Ácido nítrico	1,5
Ácido clorhídrico (29 %)	1,16
Ácido sulfúrico (concent.)	1,84
El mismo diluído al 15 %	1,12
Agua	1,0

Hielo	0,92

VI. Pesos específicos de gases

Agua = 1		Aire atmosférico = 1	Hidrógeno = 1
Aire atmosférico . .	0,001293	1	14,45
Cloro	0,003159	2,47 (2 1/2 aprox.)	35,5
Anhídrido carbónico (gas carbónico) . .	0,001977	1,53 (1 1/2 »)	22
Hidrógeno.	0,000090	0,0693 (1/14 »)	1
Oxígeno	0,001424	1,106	16
Nitrógeno	0,001250	0,967	14
Gas del alumbrado .	0,000569	0,44	6,4
Vapor de agua a 100°	0,0006059	5/8 aprox.	6,8

VII. Velocidades

Hombre al paso . .	1,7 m/seg.	Aeroplano. . . .	200 Km/hora
Hombre corriendo a toda velocidad . .	7 m/seg.	Vapor correo. . .	10 nudos (= 10 millas marinas/hora)
Ciclista rápido. . .	15 m/seg.	El barco de vela más rápido.	16 nudos
Caballo de carrera .	12-15 m/seg.	Vapores rápidos .	23 nudos
Paloma mensajera .	40 m/seg.	Cruceros	23 nudos
Automóvil . hasta	100 Km/hora	Torpederos . . .	30 nudos
Granadas.	400 m/seg.	Sonido en el aire .	340 m/seg.
Brisa fuerte	10 m/seg.	Luz en el espacio	300 000 Km/seg.
Huracán	20-50 m/seg.	Corriente eléctrica en los hilos telegráficos . .	17 100 Km/seg.
Tren ómnibus . . .	25 Km/hora = 7 m/seg.		
Tren rápido . hasta	86 Km/hora = 24 m/seg.		
Punto del Ecuador (en virtud de la rotación de la Tierra)	463 m/seg.		
Luna	1 Km/seg.		
Tierra	4 millas/seg.		

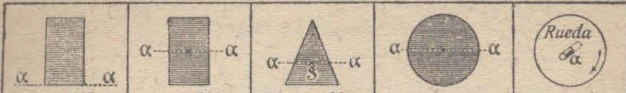
VIII. Resistencias

Materiales	Límites de elasticidad T (Kg por cm²)	Módulos de elasticidad $E = \frac{1}{\alpha}$	Coeficientes de rotura K (Kg. por cm²)
Varilla de hierro	1400 (tracción) 1400 (presión)	$\alpha = 0{,}0000005$ $E = 2000000$ (tr. y pr.) $E = 8000000$ (empuje)	3800 (tr. y pr.) 3500 (empuje) 5000 (flexión)
Hierro fundido	750 (tracción) 1500 (presión) 560 (empuje)	$\alpha = 0{,}000001$ $E = 1000000$ (tr. y pr.) $E = 400000$ (empuje)	1250 (tracción) 7500 (presión) 1500 (empuje) 2550 (flexión)
Acero Bessemer	3000 (tr. y pr.) 1450 (torsión)	$\alpha = 0{,}00000047$ $E = 2150000$ (tr. y pr.) $E = 860000$ (empuje)	5500 (tracción) 4000 (empuje) 8000 (flexión)
Alambre de cobre	1200 (tracción)	$E = 640000$ (tracción)	4000 (tracción)
Plomo	105 (tracción) 500 (presión)	$E = 50000$ (tr. y pr.)	130 (tracción)
Alambre de plomo	47 (tracción)	$E = 70000$ (tracción)	220 (tracción)
Madera de encina	270 (tracción) 200 (presión)	$E = 70000$ (tracción)	1100 (tracción) 660 (presión)
Madera de pino	256 (tracción)	$E = 120000$ (tracción)	1130 (tracción) 450 (presión)
Vidrio		$E = 700000$ (tr. y pr.)	249 (tracción) 1300 (presión)
Ladrillos		$E = 100000$	150 (presión)

IX. Constantes de capilaridad (mg/mm)

Agua	Alcohol	Éter	Glicerina	Aceite de olivas	Mercurio
8	2,5	2	7,2	3,5	50

X. Momentos de inercia



$\mathfrak{J}=\frac{h^3b}{3}$	$\mathfrak{J}=\frac{h^3b}{12}$	$\mathfrak{J}=\frac{h^3b}{36}$	$\mathfrak{J}=\frac{r^4}{4}\pi$	$\mathfrak{J}=\frac{r^4}{2}\pi$

XI. Indices de refracción

Del aire al	agua	vidrio	cristal	diamante
es:	$n = 4/3$	$n = 1{,}5$	$n = 1{,}7$	$n = 2{,}5$

XII. Coeficientes de dilatación

Vidrio, Platino	0,000009	Latón .	0,000020	Zinc .	0,000029
Hierro . . .	0,000011	Plata. .	0,000020	Plomo	0,000029
Cobre . . .	0,000018	Aluminio	0,000026	Azufre	0,000074

Agua .	0,0012	Mercurio .	0,0002	Alcohol .	0,0011
(muy irregular)		Ácido sulfúrico.	0,0005	Éter . .	0,0016

Gases $\alpha = \frac{1}{273} = 0{,}00367$

XIII. Calores específicos

Platino, Plomo, Oro . .	0,03	Mercurio	0,03
Latón, Zinc, Cobre . .	0,09	Alcohol.	0,60
Hierro, Níquel	0,11		
Vidrio, Azufre, Tierra .	0,20		
Hielo	0,50	Agua	1,00

Calor específico de los gases	A volumen constante c_v	A presión constante c_p	Razón $k = \frac{c_p}{c_v}$
Aire atmosférico. .	0,1684	0,2375	1,41
Oxígeno.	0,1542	0,2175	1,41
Hidrógeno	2,416	3,409	1,41
Vapor de agua . .	0,3637	0,4750	1,31

XIV. Potencias caloríficas

Hidrógeno . .	34400 Cal.	Carbono. . . .	8080 Cal.
Gas del alumbrado . . .	11000 »	Carbón . .	6 a 8000 »
Petróleo . . .	10000 »	Alcohol . . .	7000 »
		Madera seca (apr.)	3600 »

XV. Puntos de fusión y calores de fusión

Platino . . .	1700°	27 Cal.	Cadmio. .	315°	—
Hierro fundido	1200°	33 »	Estaño . .	230°	13,3 Cal.
Zinc	420°	28 »	Cera. . .	62°	42,3 »
Plomo . . .	326°	5,8 »	Hielo . .	0°	80 »
Bismuto . . .	267°	—	Mercurio .	−39°	2,8 »

XVI. Puntos de ebullición (a la presión de una atmósfera) y calores de vaporización

Agua .	100°	537 Cal.	Mercurio . . .	357°	62 Cal.
Alcohol.	78°	210 »	Acido sulfúrico .	320°	122 »
Éter . .	35°	90 »	Azufre . . .	316°	362 »

XVII. Temperaturas de ebullición del agua, para distintas alturas barométricas

b	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*
720	98,5	735	99,1	750	99,6	765	100,2
725	98,7	740	99,3	755	99,8	770	100,4
730	98,9	745	99,4	760	100,0	775	100,6

XVIII. Propiedades del vapor de agua saturado y seco

(véase la explicación de las abreviaturas en la página siguiente)

p (Kg p. cm²)	t (grados centíg.)	q (Cal.)	ρ (Cal.)	Apu (Cal.)	r (Cal.)	λ (Cal.)	γ (Kg)	v (m³)
0,02	17,3	17,3	553,6	31,9	585,5	602,8	0,01468	68,126
0,04	28,8	28,8	546,3	33,1	579,4	608,2	0,02826	35,387
0,06	36,0	36,0	541,7	33,9	575,6	611,6	0,04142	24,140
0,08	41,3	41,4	538,2	34,5	572,7	614,1	0,05432	18,408
0,10	45.6	45,7	535,4	34,9	570,3	616,0	0.06703	14.920
0,12	49,2	49,3	533,1	35,3	568,4	617,7	0,07956	12,568
0,15	53,7	53,8	530,1	35,8	565,9	619,7	0,09814	10,190
0,20	59,8	59.9	526,1	36,4	562,5	622.4	0,12858	7,777
0,25	64,6	64,8	522,9	36,9	559,8	624,6	0,1586	6,307
0,30	68,7	68,9	520,2	37,3	557,5	626.4	0,1881	5,316
0,35	72,3	72,5	517,8	37,7	555,5	628,0	0,2174	4,600
0.40	75,5	75,7	515,6	38,0	553,6	629,3	0,2463	4,060
0,5	80,9	81,2	512,0	38.5	550,5	631,7	0,3036	3,294
0,6	85,5	85,8	508,8	39,0	547,8	633,6	0,3601	2,777
0,7	89,5	89,0	506,1	39,4	545,5	635,3	0,4160	2,404
0,8	93,0	93,5	503,6	39,7	543.3	636,8	0.4713	2,122
0.9	96,2	96,7	501,4	40,0	541,4	638,1	0,5262	1,900
1,0	99,1	99,6	499,4	40,3	539,7	639,3	0,5807	1,722
1,1	101,8	102,3	497,5	40,6	538,1	640,4	0,6349	1,575
1,2	104,2	104,8	495,7	40.8	536,5	641,3	0,6887	1,452
1,4	108,7	109,4	492,6	41,1	533,7	643,1	0,7955	1.257
1,6	112,7	113,4	489,7	41,5	531,2	644,6	0,9013	1,110
1,8	116,3	117,1	487,1	41,8	528,9	646,0	1,0062	0,994
2,0	119.6	120,4	484.7	42,1	526,8	647,2	1.1104	0,9006
2,5	126,7	127,7	479,4	42,8	522,2	649,9	1,3680	0,7310
3	132,8	133,9	474,9	43,2	518,1	652,0	1,6224	0,6163
3,5	138,1	139,3	470,8	43,7	514,5	653,8	1,8743	0,5335
4	142,8	144,2	467,2	44,0	511,2	655,4	2,1239	0,4708
4,5	147,1	148,6	463,9	44,3	508,2	656,8	2,3716	0,4217
5	151,0	152,6	460,8	44,7	505,5	658,1	2,6177	0,3820
5,5	154,6	156,3	458,0	44,9	502,9	659,2	2,8624	0,3494
6	157,9	159,8	455,3	45,1	500,4	660,2	3,1058	0,3220
6,5	161,1	163,0	452,8	45,3	498,1	661,1	3,3481	0,2987
7	164,0	166,1	450,4	45 5	495,9	662,0	3,5891	0,2786
7,5	166,8	168,9	448,2	45,7	493,9	662,8	3,8294	0,2611
8	169.5	171.7	446,0	45,8	491,8	663.5	4,0683	0.2458
8,5	172,0	174,3	443,9	46,0	489,9	664,2	4,3072	0,2322
9	174,4	176,8	441,9	46,2	488,1	664,9	4,5448	0,2200
9,5	176,7	179,2	440.0	46.3	486,3	665,5	4,7819	0,2091
10	178,9	181,5	438,2	46,4	484,6	666,1	5,018	0,1993
11	183,1	185,8	434,6	46,7	481,3	667,1	5,489	0,1822
12	186,9	189,9	431,3	46,9	478,2	668,1	5,960	0.1678
13	190,6	193,7	428,2	47,1	475,3	669,0	6,425	0,1556
14	194,0	197,2	425,2	47,3	472.5	669,7	6,889	0,1451
15	197,2	200,7	422,4	47,4	469,8	670,5	7,352	0,1360

Explicación de las abreviaturas de la tabla anterior

p = Presión del vapor de agua saturado (Kg/cm²).
t = Temperatura en grados centígrados.
q = Calor necesario para calentar el agua desde 0° a la temperatura (en Cal/Kg o cal/g).
ρ = Calor interno de vaporización (íd.).
Apu = Calor externo de vaporización (íd.).
r = Calor total de vaporización (íd.) $= \rho + Apu$.
λ = Calor total del agua (íd.) $= q + r$.
γ = Peso específico del vapor (Kg/m³).
v = Volumen específico del vapor $= \frac{1}{\gamma}$ (m³/Kg).

XIX. Punto crítico de los gases

Gas	Temperatura crítica	Presión crítica	Punto de ebullición (a la presión de 1 atm.)
Vapor de agua .	+ 374°	225 atm.	+ 100°
Gas sulfuroso . .	+ 156°	81 »	— 10°
Amoníaco . . .	+ 130°	115 »	— 33°
Gas carbónico. .	+ 31°	75 »	— 79°
Oxígeno. . . .	— 118°	60 »	— 183°
Nitrógeno . . .	— 149°	29 »	— 196°
Aire atmosférico.	— 140°	39 »	— 190°
Hidrógeno . . .	— 241°	20 »	— 253°

XX. Gramos de vapor de agua p necesarios para saturar 1 m³ de aire a diversas temperaturas t

t	p	t	p	t	p	t	p	t	p	t	p
— 10	2,2	— 2	4,2	+ 6	7,3	14	12,0	22	19,3	30	30,1
— 9	2,4	— 1	4,5	+ 7	7,8	15	12,8	23	20,4	31	31,7
— 8	2,6	0	4,8	+ 8	8,3	16	13,6	24	21,6	32	33,5
— 7	2,8	+ 1	5,2	+ 9	8,8	17	14,4	25	22,9	33	35,3
— 6	3,0	+ 2	5,6	10	9,4	18	15,3	26	24,2	34	37,2
— 5	3,3	+ 3	6,0	11	10,0	19	16,2	27	25,6	35	39,2
— 4	3,6	+ 4	6,4	12	10,6	20	17,2	28	27,0	36	41,3
— 3	3,9	+ 5	6,8	13	11,3	21	18,2	29	28,5	37	43,5

XXI. Constantes dieléctricas

Aire	Goma laca	Ebonita	Vidrio	Cristal	Mica
1	2,8 a 3,7	2 a 3	4 a 7	hasta 10	4 a 8

XXII. Equivalentes electroquímicos

Cobre (Cu) . . 0,328 mg	Zinc (Zn) . . 0,337 mg
Plata (Ag_2) . . 1,118 mg	Hidrógeno (H_2) 0,0104 mg

Es cómodo, cuando se trata de gases, conocer el equivalente electroquímico en volumen, p. ej :

1 amperio da en 1 minuto unos 7 cm^3 de **hidrógeno** o bien 10,5 cm^3 de mezcla explosiva ($H_2 + O$) (a 0° y 760 mm)

XXIII. Resistencias específicas

(de un hilo de 1 m de longitud y 1 mm^2 de sección, a 0°)

Hierro . . . 0,1 Ω	Maillechort. . . 0,25 a 0,33 Ω
Cobre. . $\frac{1}{57}$ a $\frac{1}{60}$ Ω	Acido sulfúrico al 15 °/$_0$ 10000 Ω

XXIV. Símbolos (y pesos atómicos) de algunos elementos

Hidrógeno	**H**	(1)	Plomo	**Pb**	(207)	Plata	**Ag**	(108)
Carbono	**C**	(12)	Mercurio	**Hg**	(200)	Cobre	**Cu**	(63,5)
Nitrógeno	**N**	(14)	Calcio	**Ca**	(40)	Manganeso	**Mn**	(55)
Oxígeno	**O**	(16)	Hierro	**Fe**	(56)	Cloro	**Cl**	(35,5)
Sodio	**Na**	(23)	Azufre	**S**	(32)	Zinc	**Zn**	(65,5)
Magnesio	**Mg**	(24)	Potasio	**K**	(39)	Oro	**Au**	(197)

XXV. Fórmulas de algunos compuestos

Agua	H_2O	Sulfato de plomo .	SO_4Pb
Oxido de carbono .	CO	Nitrato de plata .	NO_3Ag
Anhídrido carbónico	CO_2	Acido clorhídrico .	ClH
Pirolusita	MnO_2	Acido nítrico . .	NO_3H
Sulfato de cobre. .	SO_4Cu	Acido sulfúrico .	SO_4H_2
Sulfato de zinc . .	SO_4Zn	Mármol	CO_3Ca

XXVI. Alfabeto griego

Letra	Nombre	Letra	Nombre
Α α	alfa.	Ν ν	ni.
Β β ϐ	beta.	Ξ ξ	xi.
Γ γ	gamma.	Ο ο	ómicron.
Δ δ	delta.	Π π	pi.
Ε ε	épsilon.	Ρ ρ	rho.
Ζ ζ	tseta.	Σ σ ς	sigma.
Η η	eta.	Τ τ	tau.
Θ θ	zeta.	Υ υ	ípsilon.
Ι ι	iota.	Φ φ	fi.
Κ κ	kappa.	Χ χ	ji.
Λ λ	lambda.	Ψ ψ	psi.
Μ μ	mi.	Ω ω	omega.

ÍNDICE

Problemas

Tablas

Astronomía popular, por NEWCOMB y ENGELMANN, ampliada por H. LUDENDORFF. Un volumen de 824 págs., de 25 × 16 cms., con 240 grabados.

Tratado de Geología práctica, por el Dr. C. KEILHACK. Un volumen de 1002 págs., de 25 × 16 cms., con 449 grabados.

Nociones de Meteorología general y náutica, *con elementos de Oceanografía,* por M. COYECQUE. Un volumen de 372 págs., de 23 × 15 cms., con 195 grabados.

Problemas de Electricidad, por el profesor H. VIEWEGER. Un volumen de 524 páginas, de 20 × 13 cms., con 250 grabados.

Elementos de Electricidad industrial, por P. ROBERJOT. Cinco volúmenes de 20 × 13 cms.

TOMO I: **Generalidades.** 4.ª ed., aumentada. 626 páginas, con 482 grabados.

TOMO II: **Medidas eléctricas industriales.** 2.ª ed., ampliada. 364 págs., con 329 grabados.

TOMO III: **Máquinas eléctricas.** 2.ª ed., ampliada. 376 págs., con 255 grabados.

TOMO IV: **Instalaciones interiores** *(Timbres, teléfonos, alumbrado, motores).* 2.ª ed. 390 págs., con 478 grabados.

TOMO V: **Centrales y redes.** 2.ª edición, ampliada. 284 págs., con 221 grabados.

Curso de Electrotecnia. *Producción y aprovechamiento de la corriente eléctrica,* por E. KOSACK, ingeniero. Un volumen de 430 págs., de 23 × 15 cms., con 294 grabados.

La Electricidad y sus aplicaciones, por el Dr. L. GRAETZ, 2.ª ed., corregida y ampliada. Un vol. de 650 págs., de 25 × 16 cms., con 706 grabados.

Nociones de Historia Natural (primer grado escolar). — *Primeros rudimentos de Botánica, Zoología y Mineralogía según el método de Schmeil,* por E. HAACK, E. HOLZFUSZ y P. PUTZAR. Un vol. de 80 págs., de 23 × 15 cms., con 99 grabados y ocho láminas en color.

Nociones de Historia Natural (segundo grado escolar). *Zoología, Botánica y Mineralogía,* por el profesor Dr. O. SCHMEIL. Un vol. de 244 págs., de 23 × 15 cms., con 315 grabados y ... láminas en color.