Duplicado

GEOMETRIA

2a. PARTE

OBRAS DE LOS MISMOS AUTORES

ARITMÉTICA *(5ª. Edición)*	1ra Parte, (*1er Año*)
ARITMÉTICA *(2ª. Edición)*	2da Parte, (*2do Año*)
ALGEBRA *(2ª. Edición)*	1ra Parte, (*3er Año*)
ALGEBRA *(3ª. Edición)*	2da Parte, (*4to Año*)
GEOMETRIA PLANA *(3ª. Edición)*	1ra Parte. (*1e Año*)
GEOMETRIA PLANA *(2ª. Edición)*	2da Parte, (*2do Año*)
GEOMETRIA PLANA	3ra Parte, (*3er Año*)
GEOMETRIA DEL ESPACIO	4ta Parte, (*4to Año*)

TEXTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES

AJUSTADOS A LOS PROGRAMAS EN VIGOR

GEOMETRIA

2.º AÑO DE ESTUDIOS SECUNDARIOS

POR

L. DAGNINO PASTORE

Profesor diplomado de Matemáticas y Cosmografía — Ingeniero Civil — Profesor titular de la Facultad de Ciencias Económicas. Profesor adjunto y consejero sustituto de la Facultad de Ciencias Exactas — Consejero y Catedrático del Instituto Nacional del Profesorado Secundario, Catedrático del Colegio Nacional "Mariano Moreno" y del Liceo N. de Señoritas.

FELIPE ANGUITA

Profesor diplomado de Matemáticas y Cosmografía, Catedrático de los Colegios Nacionales "Mariano Moreno", "Bartolomé Mitre" de la Escuela de Mecánica de la Armada y de las Escuelas de Educación Industrial.

JOSÉ N. BOLLO

Profesor diplomado de Matemáticas y Física — Vicerrector y Profesor del Colegio Nacional "Mariano Moreno". Catedrático del Instituto Nacional del Profesorado Secundario.

TOMO II

SEGUNDA EDICIÓN

F. CRESPILLO, EDITOR

BOLIVAR, 369

BUENOS AIRES

F. CRESPILLO
EDITOR
BUENOS AIRES

ADVERTENCIA

Presentamos a la consideración de los señores Profesores y estudiantes esta nueva edición de nuestra colección de textos de matemáticas elementales, ajustados a los programas en vigor.

Esperamos de nuestros colegas la misma favorable acogida que nos han dispensado hasta ahora, así como las observaciones que juzgaran pertinentes.

L. D. P.

Marzo de 1934.

GEOMETRIA

CAPITULO I

PROGRAMA I. — **Polígonos convexos.** — Definición: Suma de los ángulos interiores.
Suma de los ángulos exteriores. Un lado es menor que la suma de los demás.
Igualdad de polígonos. Definición. Caracteres idéntico, recíproco y transitivo. Dos polígonos iguales a un tercero son iguales entre sí. Si dos polígonos tienen n-1 lados consecutivos y los n-2 ángulos comprendidos por cada dos de ellos respectivamente iguales, son iguales: Demostración. Construcción de un polígono igual a otro lado.

Polígonos convexos

1. POLÍGONOS. — *Definiciones.* — Dados n puntos en un cierto orden, tales que cada tres consecutivos no estén en línea recta, se llama *polígono* a la figura formada por las n rectas determinadas por el primero y segundo puntos, el segundo y el tercero, etc., (fig. 1). Los n puntos son los *vértices* del polígono y los n segmentos que tienen por extremos dos vértices consecutivos son los *lados* del polígono.

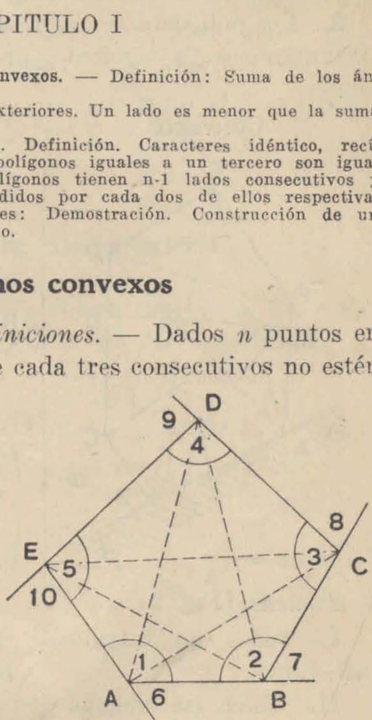


Fig. 1

Contorno. — Es el conjunto de los lados del polígono.
Perímetro. — Es la suma de los lados.

Diagonal. — Es todo segmento determinado por dos vértices no consecutivos. Ej.: AC, AD, EB...

Convexo. — Es el polígono en que la recta de un lado cualquiera no corta al contorno del mismo (fig. 2); en caso contrario es *cóncavo* (fig. 3).

2. Los polígonos se clasifican en convexos y cóncavos. Postularemos las siguientes propiedades de cada uno de ellos:

CONVEXOS

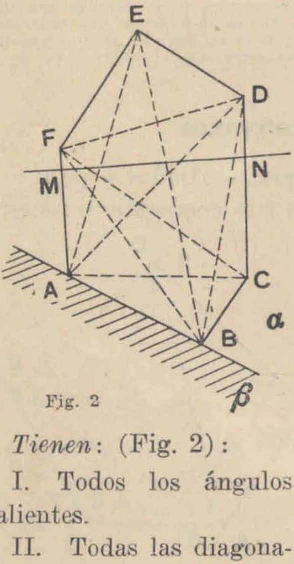


Fig. 2

Tienen: (Fig. 2):

I. Todos los ángulos salientes.

II. Todas las diagonales interiores.

III. Al prolongar un lado del polígono, éste queda totalmente comprendido en uno de los se-

CÓNCAVOS

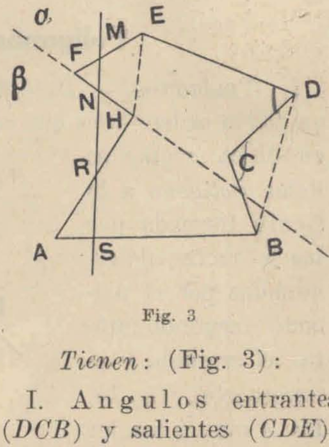


Fig. 3

Tienen: (Fig. 3):

I. Angulos entrantes (*DCB*) y salientes (*CDE*).

II. Diagonales interiores (*EH*) y exteriores (*DB*).

III. Al prolongar un lado del polígono, éste puede quedar comprendido en los dos miplanos determinados por la recta que contiene a dicho lado (semiplano α con respecto a AB).

IV. Una recta cualquiera del plano solo puede tener dos puntos comunes con los lados del polígono (M y N).

semiplanos determinados por la recta que contiene a dicho lado (semiplanos α y β con respecto a FH).

IV. Una recta cualquiera del plano puede tener más de dos puntos comunes con los lados del polígono (M, N, R y S).

Suma de los ángulos interiores

3. Teorema. — *En todo polígono convexo la suma de los ángulos interiores es igual al producto de* 2R *por el número de lados que tiene el polígono menos* 2.

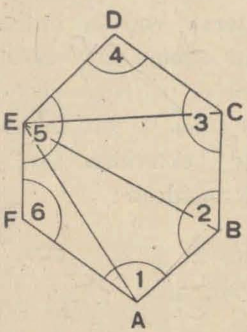


Fig. 4

H $\left\{\begin{array}{l} \text{Polígono } ABCDEF \\ \widehat{1},\ \widehat{2},\ \widehat{3},\ \widehat{4},\ \widehat{5} \text{ y } \widehat{6} \\ \text{interiores} \\ n = 6 \quad \text{(Fig. 4)} \end{array}\right.$

T $\left\{\begin{array}{l} \widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} + \widehat{4} + \widehat{5} + \widehat{6} = \\ 2R\,(n-2) \end{array}\right.$

Demostración. — Desde un vértice cualquiera E trazamos las diagonales EC, EB, EA. Quedan formados tantos triángulos como lados tiene el polígono menos dos, puesto que todos los triángulos comprenden un lado del polígono, menos el ~~primero~~ y el último que comprenden dos lados cada uno. Hay pues $n-2$ triángulos y como los ángulos interiores de cada triángulo suman $2R$, se tiene que:

$$\widehat{1}+\widehat{2}+\widehat{3}+\widehat{4}+\widehat{5}+\widehat{6}=2R\,(n-2)$$

Suma de los ángulos exteriores

4. Teorema. — *La suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a cuatro ángulos rectos.*

H $\left\{ \begin{array}{l}\text{Polígono } ABCDE\text{; ángulos exteriores 1, 2, 3, 4 y 5,}\\ \text{(Fig. 5).}\end{array}\right.$

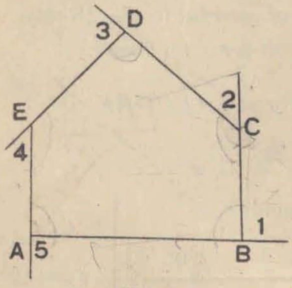


Fig. 5

T $\left\}\ \widehat{1}+\widehat{2}+\widehat{3}+\widehat{4}+\widehat{5}=4R\right.$

Demostración. — Cada ángulo exterior con su interno adyacente suman dos ángulos rectos. Si el polígono tiene n lados, la suma de sus ángulos internos y exteriores será n veces $2R$, es decir:

$$\text{Suma de todos los ángulos} = n\,.\,2R$$

pero sabemos, por el teorema anterior, que:

$$\text{Suma ángulos interiores} = (n-2)\,2R$$

La resta de esas dos sumas es la suma de los ángulos exteriores, es decir:

$$\begin{aligned}\text{Suma ángulos exteriores} &= n\,.\,2R-(n-2)\,2R\\ &= n\,.\,2R-n\,.\,2R+4R=4R\end{aligned}$$

y en nuestro caso:

$$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}=4R$$

5. Teorema. — *En todo polígono convexo un lado es menor que la suma de los demás.*

H: Polígono convexo *ABCDE* (Fig. 6)

T: $a < b + e + c + d$ ·

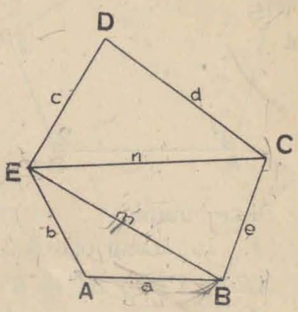


Fig. 6

Demostración

En el $\overset{\triangle}{EAB}$ se tiene: $a < b + m$

" " $\overset{\triangle}{EBC}$ " " $m < n + e$

" " $\overset{\triangle}{DEC}$ " " $n < c + d$

Sumando:

$$a + m + n < b + m + n + e + c + d$$

Restando $m + n$ a ambos miembros queda:

$$a < b + e + c + d$$

Igualdad de polígonos

6. Definición. — Para que dos polígonos sean iguales deben cumplir las siguientes condiciones (tomando los lados y los vértices ordenadamente):

I. Igualdad ordenada de lados

II. Igualdad ordenada de ángulos

Es decir que: (Fig. 7)

$$ABCDE = A'B'C'D'E'$$

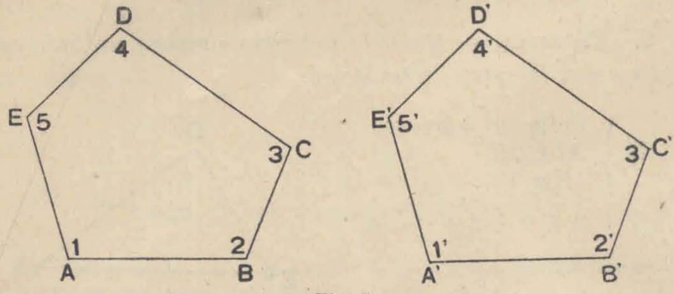


Fig. 7

Si se cumple:

I. Igualdad ordenada de lados

$$AB = A'B' \ , \ BC = B'C' \ , \ CD = C'D' \ , \ DE = D'E' \ , \ EA = E'A'$$

II. Igualdad ordenada de ángulos

$$\widehat{1} = \widehat{1'} \qquad \widehat{2} = \widehat{2'} \qquad \widehat{3} = \widehat{3'} \qquad \widehat{4} = \widehat{4'} \qquad \widehat{5} = \widehat{5'}$$

7. Carácter idéntico. — Teorema. — *Todo polígono es igual a sí mismo.*

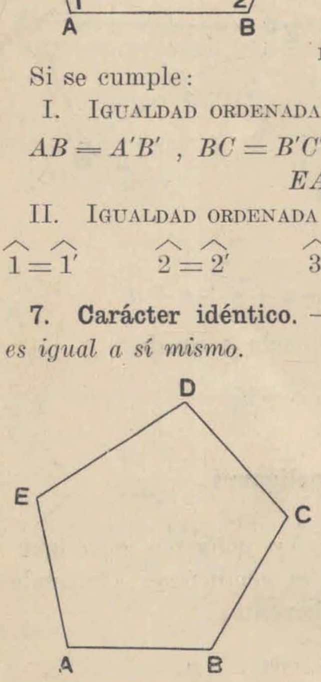


Fig. 8

H) Polígono $ABCDE$, Fig. 8

T) $ABCDE = ABCDE$

Demostración.

$$ABCDE = ABCDE$$

porque se cumple:

1º Igualdad ordenada de lados.

$$AB = AB \ , \ BC = BC$$
$$CD = CD \ , \ DE = DE$$
$$EA = EA$$

(por carácter idéntico de la igualdad de segmentos).

II. Igualdad ordenada de ángulos

$$\widehat{1} = \widehat{1} \quad , \quad \widehat{2} = \widehat{2} \quad , \quad \widehat{3} = \widehat{3} \quad , \quad \widehat{4} = \widehat{4} \quad , \quad \widehat{5} = \widehat{5}$$

(por carácter idéntico de la igualdad de ángulos).

8. Carácter recíproco — Teorema. — *Si un polígono es igual a otro, éste es igual al primero.*

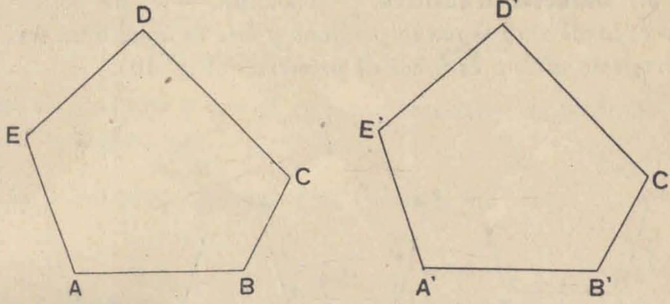


Fig. 9

$$H \left\{ \begin{array}{ll} ABCDE = A'B'C'D'E' & \\ AB = A'B' & \widehat{1} = \widehat{1'} \\ BC = B'C' & \widehat{2} = \widehat{2'} \\ CD = C'D' & \widehat{3} = \widehat{3'} \\ DE = D'E' & \widehat{4} = \widehat{4'} \\ EA = E'A' & \widehat{5} = \widehat{5'} \\ \text{(Fig. 9)} & \end{array} \right. \qquad T \left\{ A'B'C'D'E' = ABCDE \right.$$

Demostración. $A'B'C'D'E' = ABCDE$

porque se cumple:

I. Igualdad ordenada de lados

$$A'B' = AB \; , \; B'C' = BC \; , \; C'D' = CD \; , \; D'E' = DE \; , \; E'A' = EA$$

(de la hipótesis y por el carácter recíproco de la igualdad de segmentos).

II. Igualdad ordenada de ángulos

$$\widehat{1'}=\widehat{1}\;,\quad \widehat{2'}=\widehat{2}\;,\quad \widehat{3'}=\widehat{3}\;,\quad \widehat{4'}=\widehat{4}\;,\quad \widehat{5'}=\widehat{5}$$

(de la hipótesis y por el carácter recíproco de la igualdad de ángulos).

9. Carácter transitivo. — Teorema. — *Si un polígono es igual a un segundo polígono y éste es igual a un tercero, este último es igual al primero.* (Fig. 10).

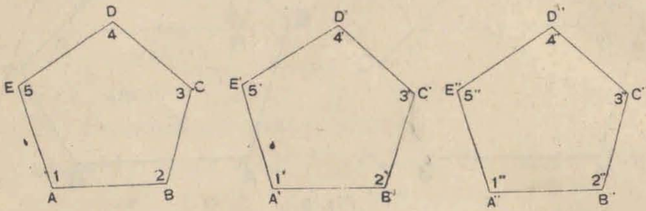


Fig. 10

$$\left.\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{ABCDE,\ A'B'C'D'E' \text{ y } A''B''C''D''E'',\ \text{Fig. } 10.} \\ AB = A'B' & \widehat{1} = \widehat{1'} \\ \qquad A'B' = A''B'' & \quad \widehat{1'} = \widehat{1''} \\ BC = B'C' & \widehat{2} = \widehat{2'} \\ \qquad B'C' = B''C'' & \quad \widehat{2'} = \widehat{2''} \\ CD = C'D' & \widehat{3} = \widehat{3'} \\ \qquad C'D' = C''D'' & \quad \widehat{3'} = \widehat{3''} \\ DE = D'E' & \widehat{4} = \widehat{4'} \\ \qquad D'E' = D''E'' & \quad \widehat{4'} = \widehat{4''} \\ EA = E'A' & \widehat{5} = \widehat{5'} \\ \qquad E'A' = E''A'' & \quad \widehat{5'} = \widehat{5''} \end{array}\right\} \text{H} \qquad \text{T}\left\{\begin{array}{l} ABCDE = \\ \quad A''B''C''D''E'' \end{array}\right.$$

Demostración.

$$ABCDE = A''B''C''D''E''$$

porque se cumple:

I. Igualdad ordenada de lados

$$AB = A''B'' \quad , \quad BC = B''C'' \quad , \quad CD = C''D'',$$
$$DE = D''E'' \quad , \quad EA = E''A''$$

(de la hipótesis y por el carácter transitivo de la igualdad de segmentos).

II. Igualdad ordenada de ángulos

$$\widehat{1} = \widehat{1''} \quad , \quad \widehat{2} = \widehat{2''} \quad , \quad \widehat{3} = \widehat{3''} \quad , \quad \widehat{4} = \widehat{4''} \quad , \quad \widehat{5} = \widehat{5''}$$

(de l ahipótesis y por el carácter transitivo de la igualdad de ángulos).

10. Corolario. — *Dos polígonos iguales a un tercero son iguales entre sí.* (Fig. 10).

$$H\begin{cases} ABCDE = A'B'C'D'E' \\ A''B''C''D''E'' = A'B'C'D'E' \end{cases} \qquad T\{ABCDE = A''B''C''D''E''$$

Demostración.

Si $A''B''C''D''E'' = A'B'C'D'E'$, por teorema (8):

$$A'B'C'D'E' = A''B''C''D''E''$$

Y como se tiene:

$$ABCDE = A'B'C'D'E'$$
$$A'B'C'D'E' = A''B''C''D''E''$$

Por teorema anterior resulta:

$$ABCDE = A''B''C''D''E''$$

11. Teorema. — *Si dos polígonos tienen $n - 1$ lados consecutivos y los $n - 2$ ángulos comprendidos por cada dos de ellos respectivamente iguales, son iguales.* (Fig. 11).

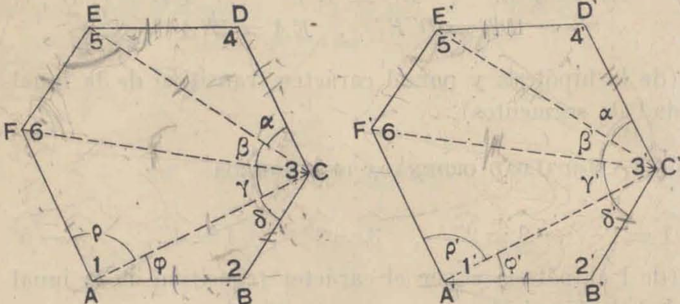


Fig. 11

$$\text{H}\left\{\begin{array}{ll} ABCDEF \text{ y } A'B'C'D'E'F' & \\ AB = A'B' & \widehat{2} = \widehat{2'} \\ BC = B'C' & \widehat{3} = \widehat{3'} \\ CD = C'D & \widehat{4} = \widehat{4'} \\ DE = D'E' & \widehat{5} = \widehat{5'} \\ EF = E'F' & \\ n = 6 & \end{array}\right. \qquad \text{T}\left\{ ABCDEF = A'B'C'D'E'F' \right.$$

Demostración. — Desde uno cualquiera de los vértices C y luego desde el C' tracemos todas las diagonales posibles (CE, CF, CA y $C'E'$, $C'F'$ y $C'A'$).

Se tiene así:

$$\overset{\triangle}{ABC} \;,\; \overset{\triangle}{ACF} \;,\; \overset{\triangle}{FCE} \text{ y } \overset{\triangle}{ECD}$$

$$\overset{\triangle}{A'B'C'} \;,\; \overset{\triangle}{A'C'F'} \;;\; \overset{\triangle}{F'C'E'} \text{ y } \overset{\triangle}{E'C'D'}$$

Consideremos:

$$\overset{\triangle}{ECD} = \overset{\triangle}{E'C'D'} \left\{ \begin{array}{l} DC = D'C' \text{ por hip.} \\ DE = D'E' \text{ por hip.} \\ \widehat{4} = \widehat{4'} \quad \text{por hip.} \end{array} \right\} \therefore \begin{array}{l} EC = E'C' \\ \widehat{a} = \widehat{a'} \\ \widehat{CED} = \widehat{C'E'D'} \end{array}$$

$$\overset{\triangle}{ECF} = \overset{\triangle}{E'C'F'} \left\{ \begin{array}{l} EC = E'C' \text{ por demos.} \\ EF = E'F' \text{ por hip.} \\ \widehat{CEF} = \widehat{C'E'F'} \text{ por prop} \\ \quad \text{unif. de la resta de} \\ \text{ángulos, pues:} \\ \widehat{CEF} = 5 - \widehat{CED} \text{ y} \\ \widehat{C'E'F'} = 5' - \widehat{C'E'D'} \end{array} \right\} \therefore \begin{array}{l} FC = F'C' \ (1) \\ \widehat{\beta} = \widehat{\beta'} \\ \widehat{CFE} = \widehat{C'C'E'} \end{array}$$

$$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'} \left\{ \begin{array}{l} AB = A'B' \text{ por hip.} \\ BC = B'C' \text{ por hip.} \\ \widehat{2} = \widehat{2'} \quad \text{por hip.} \end{array} \right\} \therefore \begin{array}{l} AC = A'C' \ (2) \\ \widehat{\delta} = \widehat{\delta'} \\ \widehat{\varphi} = \widehat{\varphi'} \end{array}$$

$$\overset{\triangle}{ACF} = \overset{\triangle}{A'C'F'} \left\{ \begin{array}{l} FC = F'C' \text{ por (1)} \\ AC = A'C' \text{ por (2)} \\ \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma'} \text{ por prop. unif.} \\ \text{de la resta de ángulos,} \\ \text{pues:} \\ \gamma = \widehat{3} - (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}) \text{ y} \\ \gamma' = \widehat{3'} - (\widehat{\alpha'} + \widehat{\beta'} + \widehat{\gamma'}) \end{array} \right\} \therefore \begin{array}{l} FA = F'A' \ (3) \\ \widehat{\varrho} = \widehat{\varrho'} \\ \widehat{AFC} = \widehat{A'F'C'} \end{array}$$

Siendo $FA = F'A'$ (3) todos los lados de $ABCDE$ son iguales a los correspondientes de $A'B'C'D'E'F'$, es decir que se cumple la igualdad de lados.

También se cumple la igualdad de ángulos, pues

$$\widehat{1} = \widehat{1'} \quad \text{y} \quad \widehat{6} = \widehat{6'}$$

por propiedad uniforme de suma de ángulos, se tiene:

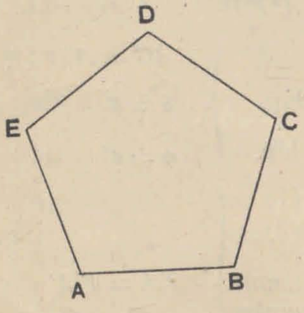
$$\widehat{1} = \varrho + \varphi \quad \text{y} \quad \widehat{1'} = \varrho' + \varphi'$$

$$\widehat{6} = \widehat{AFC} + \widehat{CFE} \quad \text{y} \quad \widehat{6'} = \widehat{A'F'C'} + \widehat{C'F'E'}$$

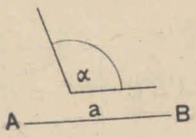
Construcción de un polígono igual a otro dado

12. Problema. — *Construir un pentágono igual a otro dado.*

Figura de análisis



Elementos dados



$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \epsilon = 1$[illegible]°

$AB = BC = CD = DE =$
$= EA = 2$ cm.

Construcción. — Tomemos una recta m (Fig. 12) y sobre ella un punto A, apartir del cual construimos $AB = a$. En A y en B construimos respectivamente los ángulos α' y β' iguales a los dados de modo que toda la construcción queda en uno de los semiplanos determinados por m. Sobre las semirrectas así trazadas construimos $AE = a$ y $BC = a$. En E y en C construimos los ángulos $\widehat{\epsilon'}$ y $\widehat{\gamma'}$ iguales a los dados y las semirrectas así trazadas determinan el quinto vértice del polígono (D).

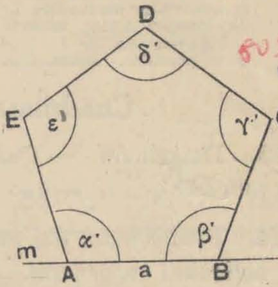


Fig. 12

Al construir los ángulos (si se trata de un polígono convexo) hay que efectuar la construcción de modo que todos los vértices sean salientes.

CAPITULO II

PROGRAMA II. — **Cuadriláteros convexos.** — Propiedades del cuadrilátero deducidas de las de los polígonos en general. Cuadriláteros iguales. Las diagonales de un cuadrilátero se cortan en un punto interior a las mismas.
Clasificación de los cuadriláteros en paralelogramos, trapecios y trapezoides. Definiciones.

Cuadriláteros convexos

13. Definición. — *Cuadrilátero convexo es un polígono convexo que tiene cuatro lados.*

14. *Propiedades del cuadrilátero deducidas de las de los polígonos en general.*

I. *En todo cuadrilátero convexo la suma de los ángulos interiores es igual a* $4R$. (Fig. 13).

Porque en todo polígono convexo dicha suma es: $2R\ (n-2)$ y siendo $n=4$ se tiene $2R\ (4-2)=4R$.

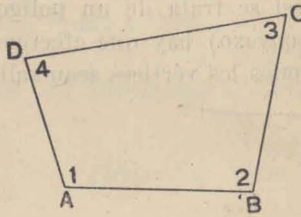


Fig. 13

$$\widehat{1}+\widehat{2}+\widehat{3}+\widehat{4}=4R$$

II. *En todo cuadrilátero convexo la suma de los ángulos exteriores es igual a* $4R$. (Fig. 14).

Porque en todo polígono convexo dicha suma es $4R$.

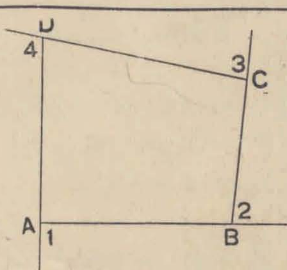


Fig. 14

$$\widehat{1}+\widehat{2}+\widehat{3}+\widehat{4}=4R$$

III. *En todo cuadrilátero convexo un lado es menor que la suma de los demás.* (Fig. 15).

Porque en todo polígono convexo se cumple esa condición (5).

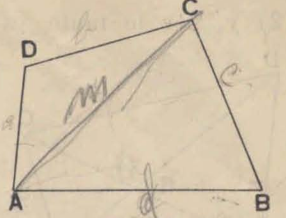


Fig. 15

$AB < BC + CD + DA$

IV. *Dos cuadriláteros convexos son iguales cuando tienen 3 lados y los dos ángulos comprendidos por los mismos respectivamente iguales.* (Fig. 16).

Porque dos polígonos convexos son iguales cuando tienen $n-1$ lados y los $n-2$ ángulos comprendidos por los mismos, respectivamente iguales. Y en este caso $n = 4$ y por lo tanto:

lados: $n - 1 = 4 - 1 = 3$;
ángulos: $n - 2 = 4 - 2 = 2$

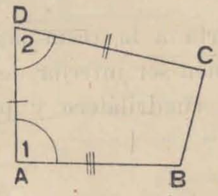
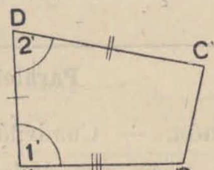


Fig. 16



$AB = A'B'$

$AD = A'D'$

$DC = D'C'$

$\widehat{1} = \widehat{1'}$

$\widehat{2} = \widehat{2'}$

$\therefore$

$ABCD = A'B'C'D'$

15. Teorema. — *Las diagonales de un cuadrilátero se cortan en un punto interior a las mismas.* (Fig. 17).

H $\left\{ \begin{array}{l} DB \text{ y } AC \text{ diagonales} \\ \text{del cuadrilátero } ABCD \end{array} \right.$

T $\left\{ \begin{array}{l} DB \text{ y } AC \text{ determinan el} \\ \text{punto } O\text{, interior a dichas} \\ \text{diagonales.} \end{array} \right.$

2R(n-2) 2R.4-2

2R.n-2 2R.4-2 4

Demostración — La diagonal AC es interior al polígono (**2**) y, por lo tanto, es interior al ángulo DAB. Por

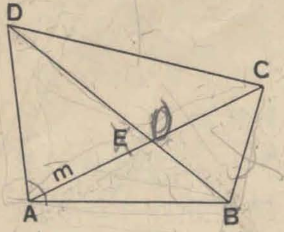


Fig. 17

consiguiente, los puntos B y D, situados sobre los lados de dicho ángulo pertenecen a los semiplanos opuestos determinados por la recta m que contiene al segmento AC. El segmento determinado por B y D (*Geom.*, 1ª parte) corta a la recta m, y el punto de intersección debe también ser interior de AC, pues DB es la otra diagonal del cuadrilátero y por ser éste convexo, resulta interior.

16. Clasificación de los cuadriláteros.

Paralelogramo

DEFINICIÓN. — Cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos:

$AD \parallel BC$ y $AB \parallel DC$ (Fig. 18).

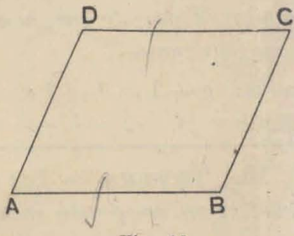


Fig. 18

Trapecio

DEFINICIÓN. — Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos: $AB \parallel DC$. (Figura 19).

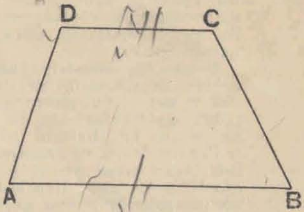


Fig. 19

Si uno de los lados no paralelos es perpendicular a estos últimos, el trapecio es *rectángulo*:

$AB \parallel DC$ y $AD \perp AB$ (Fig. 20).

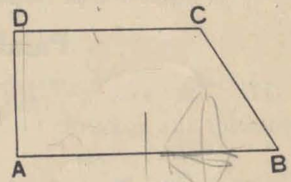


Fig. 20

Si los lados no paralelos son iguales, el trapecio es *isósceles*: $AB \parallel DC$ y $AD = CB$ (Fig. 21).

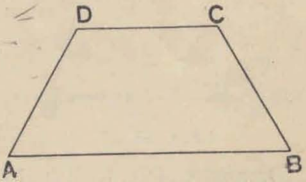


Fig. 21

Trapezoide

DEFINICIÓN. — Cuadrilátero que no tiene lados paralelos:

AB no paralelo DC y

AD no paralelo CB

(Fig. 22).

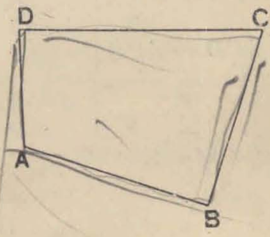


Fig. 22

CAPITULO III

PROGRAMA III. — **Paralelogramos.** — En todo paralelogramo los lados opuestos son iguales. Recíproco. En todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales. Recíproco. En todo paralelogramo las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales. Recíproco. Si un cuadrilátero tiene dos lados iguales y paralelos es un paralelogramo.

Centro de simetría. Significado físico de la existencia de un centro de simetría en una figura (haciéndola girar 180° alrededor de dicho punto coincide con la posición primitiva). El punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo es un centro de simetría del mismo.

Construcción de paralelogramos dados tres de sus elementos: Dos lados consecutivos y el ángulo comprendido; dos lados consecutivos y una diagonal; un lado y las dos diagonales; las dos diagonales y uno de los ángulos que forman.

Construcción por puntos de la figura simétrica de una dada con respecto a un centro.

Paralelogramos

17. Teorema. — *En todo paralelogramo los lados opuestos son iguales.* (Fig. 23).

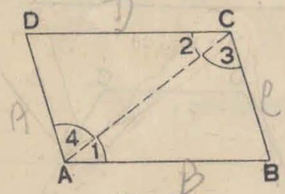


Fig. 23

$$\begin{cases} ABCD \\ AD \parallel BC \\ DC \parallel AB \end{cases} \qquad T \begin{cases} AD = BC \\ DC = AB \end{cases}$$

Demostración. — La diagonal AC determina los triángulos ACD y ACB, tales que:

$$\triangle ACD = \triangle ACB \quad \left| \begin{array}{l} AC = AC \\ \widehat{1} = \widehat{2} \text{ alter. inter. entre las paralelas } AB \text{ y } DC \\ \widehat{3} = \widehat{4} \text{ alter. inter. entre las paralelas } AD \text{ y } BC \end{array} \right.$$

Por consiguiente:

$$AD = BC$$
$$DC = AB$$

18. Teorema (recíproco del 17). — *Un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos iguales es un paralelogramo.* (Figura 23).

$$\text{H}\begin{cases} ABCD \\ AD = BC \\ DC = AB \end{cases} \qquad \text{T}\begin{cases} AD \parallel BC \\ DC \parallel AB \end{cases}$$

Demostración. — La diagonal AC determina los triángulos ACD y ACB, tales que:

$$\overset{\triangle}{ACD} = \overset{\triangle}{ACB} \quad \begin{cases} AC = AC \\ AD = BC \text{ por hipótesis} \\ DC = AB \quad ,, \qquad ,, \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$\widehat{1} = \widehat{2} \quad \therefore \quad AD \parallel BC$$

$$\widehat{3} = \widehat{4} \quad \therefore \quad DC \parallel AB$$

19. Teorema. — *En todo paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.* (Fig. 24).

$$\text{H}\begin{cases} ABCD \\ AD \parallel BC \\ DC \parallel AB \end{cases} \qquad \text{T}\begin{cases} \widehat{1} = \widehat{2} \\ \widehat{3} = \widehat{4} \end{cases}$$

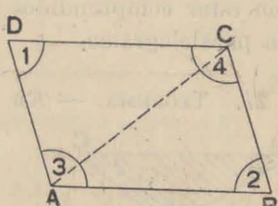


Fig. 24

Demostración. — Trazando la diagonal AC, se tiene:

$$\overset{\triangle}{ADC} = \overset{\triangle}{ABC} \begin{cases} AC = AC \\ AD = BC \text{ por teor. ant.} \\ DC = AB \text{ por teor. ant.} \end{cases} \quad \therefore \quad \widehat{1} = \widehat{2}.$$

Trazando la diagonal DB y con una demostración análoga, se prueba que:

$$\widehat{3} = \widehat{4}$$

20. Teorema (recíproco del 19). — *Un cuadrilátero que tiene sus ángulos opuestos iguales es un paralelogramo.* (Fig. 25).

$$H \begin{cases} ABCD \\ \alpha = \alpha \\ \beta = \beta \end{cases} \qquad T \begin{cases} AD \parallel BC \\ DC \parallel AB \end{cases}$$

Demostración. — Desde que la suma de los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero vale $4R$, se tiene:

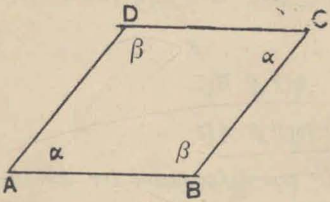


Fig. 25

$$2\alpha + 2\beta = 4R$$

o bien:

$$\alpha + \beta = 2R$$

siendo, además, conjugados, los ángulos α y β, deben estar comprendidos entre paralelas, luego $ABCD$ es un paralelogramo.

21. Teorema. — *En todo paralelogramo las diagonales se cortan mutuamente en partes iguales.* (Fig. 26).

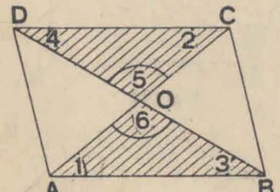


Fig. 26

$$H \begin{cases} ABCD \\ AD \parallel BC \\ AB \parallel DC \end{cases} \qquad T \begin{cases} AO = OC \\ DO = OB \end{cases}$$

Demostración. — Consideremos los triángulos DOC y AOB. Se tiene:

$$\overset{\triangle}{DOC} = \overset{\triangle}{AOB} \left\{ \begin{array}{l} AB = DC \text{ por lados opuestos} \\ \widehat{1} = \widehat{2} \text{ por alter. inter. entre } /\!/ \text{ AB} \\ \qquad \text{y } DC \\ \widehat{3} = \widehat{4} \text{ por alter. inter. entre } /\!/ \ AB \\ \qquad \text{y } DC \end{array} \right.$$

Por lo tanto: $AO = OC$
$DO = OB$

22. Teorema (recíproco del 21). — *Un cuadrilátero cuyas diagonales se corten mutuamente en partes iguales es un paralelogramo.* (Fig. 26).

$$\text{H} \left\{ \begin{array}{l} ABCD \\ AO = OC \\ DO = OB \end{array} \right. \qquad \text{T} \left\{ \begin{array}{l} AB /\!/ DC \\ AD /\!/ BC \end{array} \right.$$

Demostración. — Se tiene:

$$\overset{\triangle}{DOC} = \overset{\triangle}{AOB} \left\{ \begin{array}{ll} AO = OC & \text{por hipótesis} \\ DO = OB & \text{por hipótesis} \\ \widehat{5} = \widehat{6} & \text{por opuestos por el vért.} \end{array} \right.$$

Por lo tanto:

$$\widehat{1} = \widehat{2} \quad \therefore \quad AB /\!/ DC$$

Considerando los triángulos DOA y COB y siguiendo un razonamiento análogo al anterior, se demuestra que: $AD /\!/ BC$.

23. Teorema. — *Si un cuadrilátero tiene dos lados opuestos iguales y paralelos, es un paralelogramo.* (Figura 27).

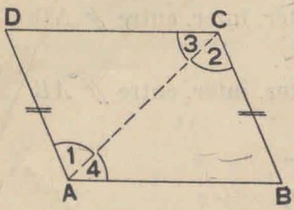


Fig. 27

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l} ABCD \\ AD \parallel BC \\ \text{[redacted]} \end{array}\right. \qquad \text{T)}\ AB \parallel DC$$

Demostración. — Se tiene:

$$\overset{\triangle}{ACD} = \overset{\triangle}{ACB} \left\{ \begin{array}{ll} AC = AC & \\ AD = BC & \text{por hipótesis} \\ \widehat{1} = \widehat{2} & \text{por alt. inter. entre paralelas} \\ & AD \text{ y } BC \end{array} \right.$$

Luego es $\widehat{3} = \widehat{4}$, y como son alternos internos, deben estar comprendidos entre paralelas, luego: $AB \parallel DC$.

24. Centro de simetría. — Si dos puntos A y B, (Figura 28) equidistan de otro O situado sobre el segmento que ellos determinan, son *simétricos* con respecto a ese punto. Inversamente, O es *centro de simetría* de dos puntos A y B cuando O es el punto medio del segmento AB.

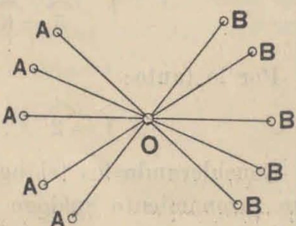


Fig. 28

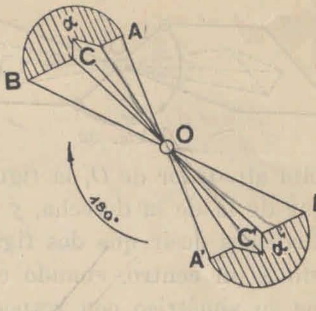


Fig. 29

Si consideramos un punto tal como el O (Figura 29) y comprobamos que para cada punto de la fig. a existe uno simétrico en a' con respecto a O, es decir, $AO = A'O$, $BO = B'O$, $CO = C'O$, las figuras a y a' son *simétricas* con respecto a dicho punto.

25. Significado físico de un centro de simetría en una figura. — Tomemos una tarjeta de visita y doblémosla por la mitad (Figura 30). Con una tijera cortemos las dos hojas sobrepuestas según las líneas OA y OB (Figura 31). Con la punta de un alfiler perforemos una serie de puntos formando una figura. Levantemos la hoja superior y extendámosla de modo que ambas queden en el mismo plano de la mesa. Las dos partes de la tarjeta constituyen una figura que tiene un centro de simetría (O).

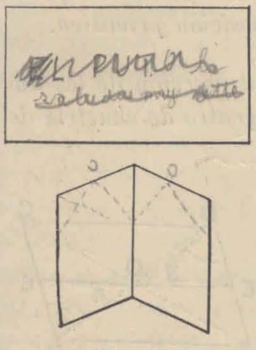


Fig. 30

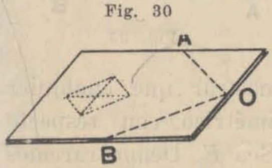


Fig. 31

Lo mismo podemos decir de las figuras punteadas, porque cada punto de una de las figuras tiene su simétrico en la otra.

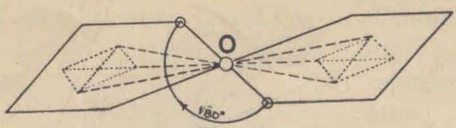


Fig. 32

Comprobamos que, Fig. 32, si hacemos girar la tarjeta media vuelta alrededor de O, la figura de la izquierda ocupa el lugar de la de la derecha, y recíprocamente.

Podemos decir que dos figuras son simétricas con respecto a un centro, cuando cada punto de una de ellas tiene su simétrico con respecto a dicho centro O. (Figura 32).

Si se tratara de determinar la existencia de un centro de simetría en una figura, diremos, *que tal centro existe si al hacer girar* 180° *alrededor de dicho punto cualquiera otro de la figura, coincide con su posición primitiva.*

26. Teorema. — *El punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo es un centro de simetría del mismo.* (Fig. 33).

H $\begin{cases} ABCD \text{ paralelogramo} \\ DB \text{ y } AC \text{ diagonales} \\ O \text{ pertenece a } DB \text{ y } AC \end{cases}$

T) O es centro de simetría

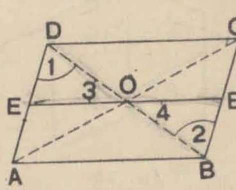


Fig. 33

Demostración. — Debemos demostrar que cualquier punto de la figura tiene su simétrico con respecto a O en el contorno de la misma. Sea E. Demostraremos que E' situado en el contorno, es un simétrico, es decir que $EO = OE'$.

Tenemos:

$$\overset{\triangle}{EOD} = \overset{\triangle}{E'OB} \left\{ \begin{array}{ll} DO = OB & \text{(teor. número 21).} \\ \widehat{1} = \widehat{2} & \text{por alt. internos entre las paralelas } AD \text{ y } BC. \\ \widehat{3} = \widehat{4} & \text{por op. por el vértice} \end{array} \right.$$

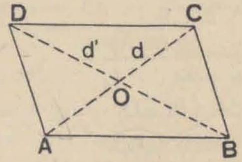
Por lo tanto:

$$EO = OE'$$

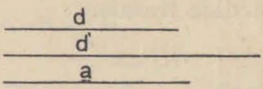
Construcción de paralelogramos dados tres de sus elementos

27. Problema I. **Enunciado.** — *Construir un paralelogramo del cual se conoce un lado y ambas diagonales.*

Figura de análisis



Elementos dados



Construcción. — Sea una recta m (Fig. 34) y sobre ella un punto A, a partir del cual construimos $AB = a$. Con centro en A y con una abertura del compás igual a la mitad de d trazamos el arco s. Con centro en B y con una abertura del compás igual a la mitad de d' trazamos el arco n que corta al s en el punto O. Trazamos AO y BO y construimos:

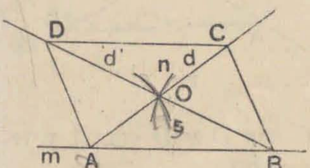


Fig. 34

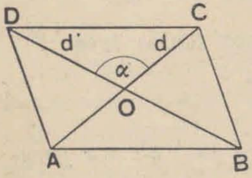
$$AC = d$$

$$BD = d'$$

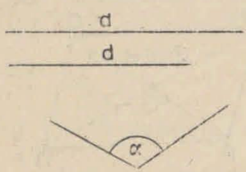
Unimos A con D, B con C y D con C y se tiene el paralelogramo $ABCD$ pedido.

28. PROBLEMA II. **Enunciado.** — *Construir un paralelogramo, conociendo las dos diagonales y uno de los ángulos que forman.*

Figura de análisis



Elementos dados



CONSTRUCCIÓN. — Sea una recta m (Fig. 35) y sobre ella un punto O. Construimos:

$$OD = \frac{d'}{2}$$

$$OB = \frac{d'}{2}$$

En el punto O y sobre m construimos un ángulo igual a α y sobre la recta n así obtenida trazamos:

$$OC = \frac{d}{2}$$

$$OA = \frac{d}{2}$$

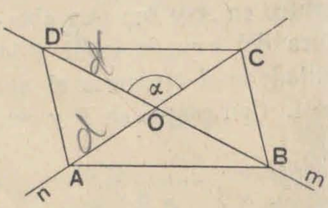
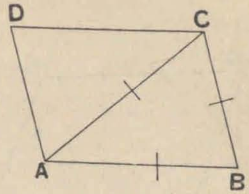


Fig. 35

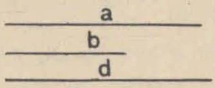
Unimos A con B, B con C, C con D y D con A y tenemos el paralelogramo $ABCD$ pedido.

29. PROBLEMA. — **Enunciado.** — *Construir un paralelogramo, conociendo dos lados consecutivos y una diagonal.*

Figura de análisis



Elementos dados



CONSTRUCCIÓN. — Tomemos una recta m (Fig. 36) y sobre ella un punto A, a partir del cual construímos el segmento $AB = a$. Con una abertura del compás igual a b y con centro en B trazamos el arco c. Con una medida igual a d y con centro en A trazamos el arco e que corta al c en C. Por este punto trazamos $CD \parallel AB$ y por A, la $AD \parallel CB$; $ABCD$ es el paralelogramo pedido.

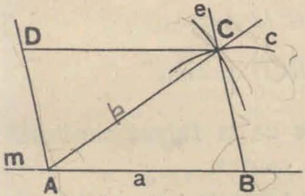
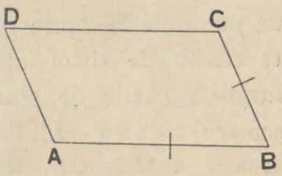


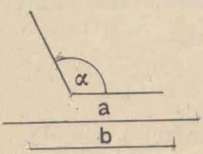
Fig. 36

30. PROBLEMA. — **Enunciado.** — *Construir un paralelogramo, del cual se conocen dos lados consecutivos y el ángulo comprendido.*

Figura de análisis



Elementos dados



Construcción. — Tomemos una recta m (Fig. 37) y sobre ella una punto A, a partir del cual construímos un segmento $AB = a$. Sobre AB y en el punto A construímos un ángulo igual a α y sobre la n, y a partir de A construímos un segmento $AD = b$. Por D y y por B trazamos:

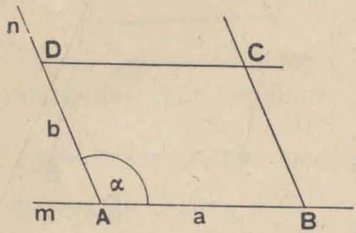


Fig. 37

$$DC \parallel AB \text{ y } BC \parallel AD$$

y se tiene el paralelogramo $ABCD$ pedido.

31. Construcción por puntos de la figura simétrica de una dada con respecto a un centro.

Dada la figura $ABCDEFG$ y el centro de simetría O, (Fig. 38), se trazan las rectas que determinan cada punto de la figura con el centro de simetría y luego a partir de O se construyen segmentos iguales a OA, OB, OC, OD, OE, OF, OC, obteniéndose los puntos buscados:

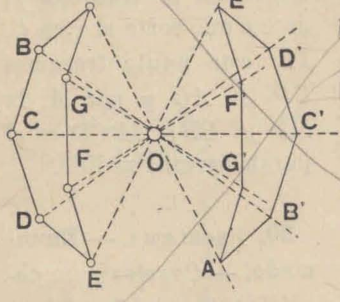


Fig. 38 Fig. 39

$$A', B', C', D', E', F', G',$$

que determinan la figura (39) simétrica pedida.

CAPITULO IV

PROGRAMA IV. — **Paralelogramos especiales.** — Si un paralelogramo tienen un ángulo recto los otros tres ángulos también lo son. Definición de rectángulo. Propiedades del rectángulo deducidas de las de los paralelogramos. Propiedad particular del rectángulo: Las diagonales de un rectángulo son iguales.

Eje de simetría. Significado físico de la existencia de un eje de simetría en una figura (haciéndola girar 180° a su alrededor coincide con la posición primitiva). Las perpendiculares a los lados de un rectángulo trazadas por el punto de intersección de sus diagonales son ejes de simetría de dicha figura.

Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales tiene los cuatro lados iguales. Definición de rombo. Propiedades del rombo deducidas de las de los paralelogramos. Propiedad particular del rombo: Las diagonales de un rombo son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen. Recíprocos.

Las diagonales de un rombo son ejes de simetría de dicha figura.

El cuadrado. Definición. Propiedades del cuadrado deducidas de las de los paralelogramos, del rectángulo y del rombo.

Las diagonales del cuadrado y las perpendiculares a sus lados trazadas por el punto de intersección de aquéllas son ejes de simetría de dicha figura.

Construcción de rectángulos y rombos dados dos de sus elementos.

Construcción por puntos de la figura simétrica de una figura dada con respecto a un eje.

Paralelogramos especiales

32. TEOREMA. — *Si un paralelogramo tiene un ángulo recto los otros tres ángulos también lo son.* (Fig. 40).

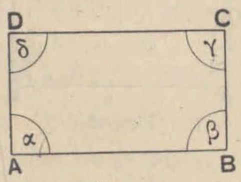


Fig. 40

$$\text{H}\begin{cases} ABCD \\ \alpha = 90^\circ \end{cases} \quad \text{T}\left\{ \widehat{\beta} = \widehat{\gamma} = \widehat{\delta} = 90^\circ \right.$$

Demostración. — Por ser $ABCD$ un paralelogramo es:

$\widehat{\gamma} = 90^\circ$, por ser γ opuesto a α

y si $\alpha + \gamma = 180^\circ$, se tiene:

$$\hat{\beta} + \hat{\delta} = 180^\circ$$

Y como deben ser: $\hat{\beta} = \hat{\delta}$, por opuestos de un paralelogramo se tiene: $\hat{\beta} = \hat{\delta} = 90^\circ$

Es decir que: $\hat{\beta} = \hat{\gamma} = \hat{\delta} = 90^\circ$

33. Rectángulo. — *Rectángulo* es un paralelogramo cuyos ángulos son rectos.

34. Propiedades del rectángulo deducidas de las del paralelogramo. Son las siguientes:

I *Todo rectángulo tiene sus lados opuestos iguales.* (Figura 41).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rectángulo es un paralelogramo.

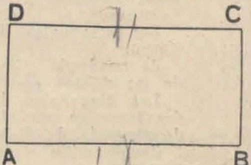


Fig. 41

$AD = BC$

$AB = DC$

II *Todo rectángulo tiene sus ángulos opuestos iguales.*

(La definición de rectángulo es más amplia: los cuatro ángulos son iguales). (Fig. 42).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rectángulo es un paralelogramo.

También puede admitirse esta propiedad como corolario de la definición.

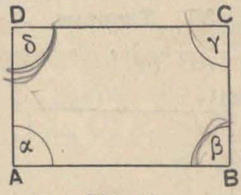


Fig. 42

$\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$

$\hat{\beta} = \hat{\delta}$

III *Las diagonales de un rectángulo se cortan mutuamente en partes iguales.* (Fig. 43).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rectángulo es un paralelogramo.

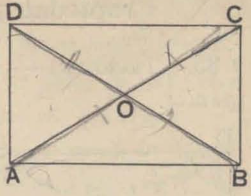


Fig. 43

$AO = OC$

$DO = OB$

IV *El punto determinado por las diagonales de un rectángulo es centro de simetría de la figura.* (Fig. 44).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rectángulo es un paralelogramo.

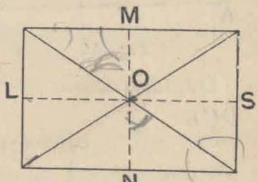


Fig. 44

$MO = ON$

$LO = OS$

V *La igualdad de dos rectángulos se cumple cuando tienen dos lados consecutivos respectivamente iguales (no es preciso decir y el ángulo comprendido, pues es sabido que todos valen 90º).* (Fig. 45).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rectángulo es un paralelogramo.

Si $AD = A'D'$

$AB = A'B'$

$a = a'$

Se tiene: $ABCD = A'B'C'D'$

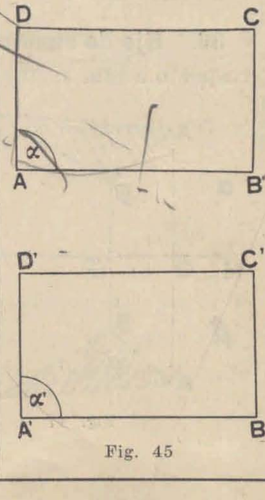


Fig. 45

Propiedad particular del rectángulo

35. TEOREMA. — *Las diagonales de un rectángulo son iguales.*

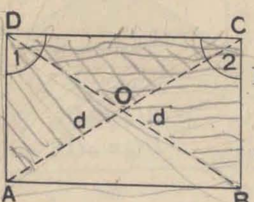


Fig. 46

H { AC y BD diagonales del rectángulo $ABCD$, fig. 46.

T { $AC = BD$

Demostración. — Consideremos los triángulos DCA y DCB:

$$DCA = DCB \left\{ \begin{array}{l} AD = BC \text{ por lados opuestos del paral.} \\ DC = DC \text{ por común} \\ \widehat{1} = \widehat{2} = 90^{\circ} \end{array} \right.$$

Por lo tanto: $AC = BD$

36. Eje de simetría. — Dos puntos son *simétricos* con respecto a una recta, llamada *eje de simetría*, cuando pertenecen a los distintos semiplanos determinados por el eje, ambos se hallan en una misma perpendicular a él y sus distancias al mismo son iguales. Ejemplo: A y A'. Consideremos en la figura 47 el triángulo ABC dibujado con tinta en el semiplano α de-

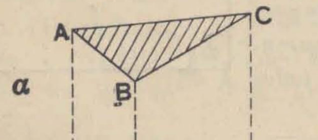


Fig. 47

terminado por MN y doblemos en seguida el papel a lo largo de MN hasta que ABC esté en el semiplaso β, (se hace girar la fig. 180° alrededor de MN) se marcará en éste una figura tal *que cada uno de sus puntos tiene uno simétrico en el otro semiplano*. Tales figuras se llaman simétricas con respecto a un *eje de simetría*. Por lo tanto, se tiene que

$$AO = A'O \quad , \quad BO' = B'O' \quad y \quad CO'' \quad C'O''$$

es decir que *el eje de simetría resulta mediatriz de los segmentos* AA', BB' *y* CC'.

37. Teorema. — *Las perpendiculares a los lados de un rectángulo trazadas por el punto de intersección de sus diagonales son ejes de simetría de dicha figura.*

H
- $ABCD$
- AC y BD diagonales
- O pertenece a AC y a BD
- $EE' \perp CB$
- $FF' \perp AB$ (Fig. 48)
- O pertenece a FF' y EE'

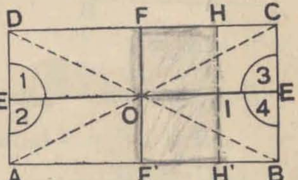


Fig. 48

T
- EE' y FF'
- ejes de simetría de la figura.

Demostración. — Se tiene que demostrar que si H es un punto del contorno en el semiplano superior con respecto a EE', H' debe ser su simétrico en el semiplano inferior con respecto a EE'.

Consideremos los rectángulos formados $FOIH$ y $F'OIH'$. que tienen $FO = OF'$ (por 36 — IV) y $OI = OI$. Luego por (36 — V) se tiene $FOIH = F'OIH'$ y por consiguiente:

$$HI = IH'$$

De manera análoga se demostraría la simetría para cualquier punto del contorno con respecto a FF'.

38. Teorema. — *Si un paralelogramo tiene dos lados consecutivos iguales, tiene los cuatro lados iguales.*

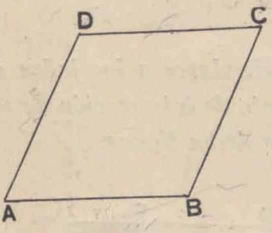


Fig. 49

H $\begin{cases} ABCD \\ AD \,//\, BC \\ AB = BC \end{cases}$ [redacted] (Fig. 49)

T $\{\; AB = BC = CD = DA$

Demostración. — tenemos:

$AB = DC$ por lados opuestos del paralelogramo
$BC = AD$ „ „ „ „ „

Pero:

$$AB = BC$$

Y por carácter transitivo de la igualdad de segmentos:

$$AB = BC = CD = DA$$

39. Rombo. — El *rombo* es un paralelogramo cuyos lados son todos iguales.

40. Propiedades del rombo deducidas de las del paralelogramo. — Son las siguientes:

I. *Todo rombo tiene sus lados opuestos iguales* (Fig. 50). (La definición de rombo es más amplia: los cuatro lados son iguales).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rombo es un paralelogramo.

También puede admitirse esta propiedad como corolario directo de la definición.

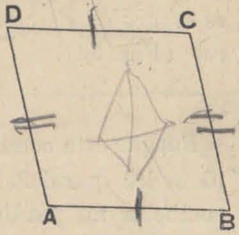
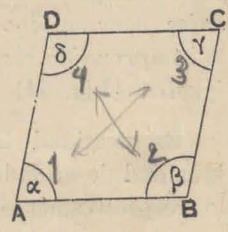


Fig. 50

$AB = DC$ y $AD = BC$

II. *Todo rombo tiene sus ángulos opuestos respectivamente iguales.* (Fig. 51).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rombo es un paralelogramo.



1 Fig. 51

~~$\alpha = \delta$ y $\beta = \gamma$~~

1 = 3 y
2 = 4

III. *Las diagonales de un rombo se cortan mutuamente en partes iguales.* (Fig. 52).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rombo es un paralelogramo.

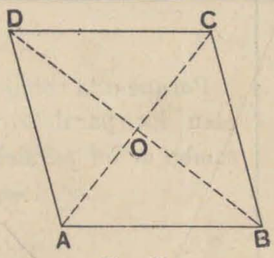


Fig. 52

$AO = OC$ y $DO = OB$

IV. *El punto determinado por las diagonales de un rombo es centro de simetría de la figura.* (Fig. 53).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rombo es un paralelogramo.

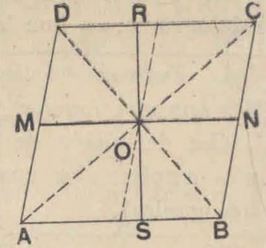


Fig. 53

$RO = OS$
$MO = ON$

V. *La igualdad de dos rombos se cumple cuando tienen dos lados consecutivos y el ángulo comprendido respectivamente iguales.* (Fig. 54).

(En realidad basta con la igualdad de un lado y un ángulo, respectivamente).

Porque esta condición la cumplen los paralelogramos y el rombo es un paralelogramo.

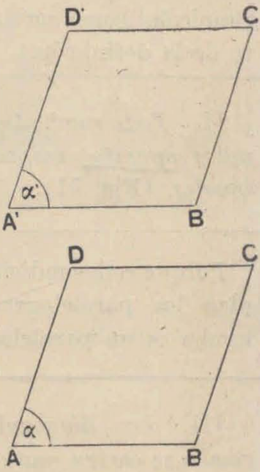


Fig. 54

Si $AB = A'B'$
$AD = A'D'$
$a = a'$

Se tiene:
$ABCD = A'B'C'D'$

Propiedad particular del rombo

41. Teorema. — *Las diagonales de un rombo son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.*

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l} AC \text{ y } DB \\ \text{diagonales} \\ \text{del rombo} \\ ABCD \\ \text{(Fig. 55)} \end{array}\right. \qquad \text{T}\left\{\begin{array}{l} 1^{\circ})\ \widehat{3} = \widehat{3'},\ \widehat{4} = \widehat{4'} \\ \qquad \widehat{1} = \widehat{1'},\ \widehat{2} = \widehat{2'} \\ 2^{\circ})\ DB \perp AC \end{array}\right.$$

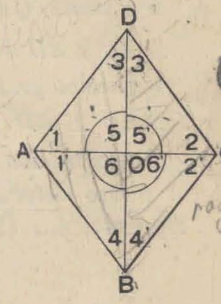


Fig. 55

Demostración. — I) Tenemos:

$$\overset{\triangle}{ADB} = \overset{\triangle}{BCD}\left\{\begin{array}{l} DB = DB \text{ común} \\ AD = DC \text{ por def. rombo} \\ AB = BC \text{ por def. de romb} \end{array}\right.$$

Por lo tanto:

$$3 = 3' \text{ y } 4 = 4' \qquad (1)$$

También:

$$\overset{\triangle}{ADC} = \overset{\triangle}{ABC}\left\{\begin{array}{l} AC = AC \\ AB = DC \text{ por def. rombo} \\ BC = AD \quad ,, \quad ,, \quad ,, \end{array}\right.$$

Por lo tanto:

$$\widehat{1} = \widehat{1'} \text{ y } \widehat{2} = \widehat{2'} \qquad (2)$$

II) Tenemos:

$$\overset{\triangle}{DOA} = \overset{\triangle}{DOC}\left\{\begin{array}{l} DO = DO \text{ común} \\ DA = DC \text{ por def. de rombo} \\ \widehat{3} = \widehat{3'} \text{ por demostrado.} \end{array}\right.$$

Por lo tanto: $\widehat{5} = \widehat{5'}$ y como también $\widehat{5} + \widehat{5'} = 2\,\text{R}$, se tiene:

$$DB \perp AC$$

42. TEOREMA (recíproco del 41). — *Un paralelogramo es un rombo cuando cumple cualquiera de estas condiciones:* a) *que sus diagonales sean perpendiculares;* b) *que las diagonales sean bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.*

I PARTE: *Que las diagonales sean perpendiculares.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} AC \text{ y } BD \text{ diagonales del} \\ \text{paralelogramo } ABCD \\ AC \perp BD \end{array} \right. \qquad T \left\{ \begin{array}{l} ABCD \text{ es un} \\ \text{rombo} \end{array} \right.$$

Demostración. — En la Fig. 55 se tiene que siendo O el punto determinado por las diagonales de un paralelogramo, por (**21**):

$$AO = OC$$
$$DO = OB$$

Y se tiene que:

$$\overset{\triangle}{DOA} = \overset{\triangle}{DOC} \left\{ \begin{array}{l} AO = OC \\ OD = OD \\ \widehat{5} = \widehat{5'} = 90^{\circ} \end{array} \right\} \therefore \quad AD = DC \qquad (1)$$

$$\overset{\triangle}{BOA} = \overset{\triangle}{BOC} \left\{ \begin{array}{l} OB = OB \\ AO = OC \\ \widehat{6} = \widehat{6'} = 90^{\circ} \end{array} \right\} \therefore \quad AB = BC \qquad (2)$$

$$\overset{\triangle}{AOD} = \overset{\triangle}{AOB} \left\{ \begin{array}{l} AO = AO \\ DO = OB \\ \widehat{5} = \widehat{6} = 90^{\circ} \end{array} \right\} \therefore \quad AD = AB \qquad (3)$$

Y de (1), (2) y (3) se tiene:

$$AD = DC = AB = BC$$

Y por definición (**41**) :

$$ABCD \text{ rombo.}$$

II Parte: *Que las diagonales sean bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.*

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l} AC \text{ y } BD \text{ diagonales} \\ \text{del paralelogramo } ABCD \\ \widehat{3} = \widehat{3'} \text{ y } \widehat{4} = \widehat{4'} \\ \widehat{1} = \widehat{1'} \text{ y } \widehat{2} = \widehat{2'} \end{array}\right. \qquad \text{T} \mid ABCD \text{ es un rombo}$$

Demostración. — En la Fig. 55, se tiene, por ser O el punto determinado por las diagonales de un paralelo gramo. por (**21**) :

$$AO = OC$$
$$DO = OB$$

Y se tiene que:

$$\overset{\triangle}{DOA} = \overset{\triangle}{DOC} \left\{\begin{array}{l} OD = OD \\ AO = OC \\ \widehat{3} = \widehat{3'} \text{ por hip.} \end{array}\right\} \therefore \; AD = DC$$

Y por lo tanto $ABCD$ es un rombo, pues el paralelogramo que tiene dos lados consecutivos iguales, tiene todos sus lados iguales. (Teorema 38).

43. Observación. — Puede observarse que no es necesario decir que las diagonales sean bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen. Basta expresar que una de las diagonales cumple esa condición.

44. Teorema. — *Las diagonales de un rombo son ejes de simetría de dicha figura.*

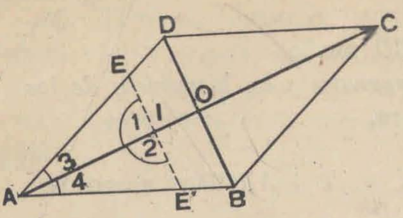


Fig. 56

$$\text{H}\begin{cases} AC \text{ y } DB \\ \text{Diagonales del} \\ \text{rombo } ABCD \\ \text{(Fig. 56)} \end{cases}$$

$$\text{T}\begin{cases} AC \text{ y } DB \text{ ejes de} \\ \text{simetría de la figura} \end{cases}$$

Demostración. — Debemos probar que el simétrico de un punto E es E', tal que siendo $EE' \perp AC$, se cumpla: $EI = IE'$.

Se tiene:

$$\overset{\triangle}{AIE} = \overset{\triangle}{AIE'} \begin{cases} AI = AI \quad \text{comun} \\ \widehat{1} = \widehat{2} = 90^\circ \\ \widehat{3} = \widehat{4} \quad \text{por ser } AC \text{ diagonal (Teor. 41)} \end{cases}$$

De donde: $$EI = IE'$$

45. Cuadrado. — El *cuadrado* es un paralelogramo cuyos lados son iguales y cuyos ángulos valen cada uno 90 grados.

46. Propiedades del cuadrado deducidas de las del paralelogramo, del rectángulo y del rombo.

Son las siguientes:

educidas del paralelogramo	Deducidas del rectángulo	Deducidas del rombo
I. **Todo cuadrado ene sus lados opues- os iguales.**	I. *Todo cuadrado tiene sus lados opuestos iguales.*	I. *Todo cuadrado tiene sus lados opuestos iguales.*
II. **Todo cuadrado iene sus ángulos puestos iguales.**	II. *Todo cuadrado tiene sus ángulos opuestos iguales.*	II. *Todo cuadrado tiene sus ángulos opuestos iguales.*
III. **Las diagonales e un cuadrado se cor- an mútuamente en artes iguales.**	III. *Las diagonales de un cuadrado se cortan mutuamente en partes iguales.*	
IV. **El punto de intersección de las diagonales de un cuadrado es centro de simetría del mismo.**	IV. *El punto determinado por las diagonales de un cuadrado es centro de simetría del mismo.*	IV. *El punto determinado por las diagonales de un cuadrado es un centro de simetría del mismo.*
	V. **Las diagonales de un cuadrado son iguales.**	VII. **Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.**
	VI. **Las perpendiculares a los lados de un rectángulo trazadas por el punto de intersección de sus diagonales son ejes de simetría de dicha figura.**	VIII. **Las diagonales de un cuadrado son ejes de simetría de dicha figura.**

47. Observación. — En este cuadro las propiedades se resumen enumerando los enunciados I, II, III, IV, V,

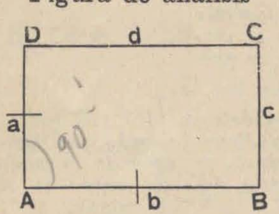
VI, VII y VIII. Los enunciados en bastardilla se repiten (son iguales a los correspondientes de cada columna).

Las propiedades de los enunciados I y II se conocen directamente de la definición de cuadrado, pues se sabe que en éste todos sus ángulos y lados son iguales.

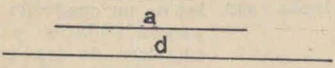
48. Corolario de la definición. — *La igualdad de dos cuadrados se cumple cuando tienen un lado igual.*

Construcción de rectángulos y rombos dados dos de sus elementos

Figura de análisis



Elementos conocidos



49. Problema I. — *Construir un rectángulo del que se conocen dos lados adyacentes.* Datos: *a* y *b*.

Construcción. — Tomamos una recta *m* y sobre ella un punto *A* (Fig. 57), a partir del cual construímos el segmento $AB = b$. En *A* y *B* construímoss $n \perp b$ y $r \perp b$, respectivamente. Sobre *n*, construímos el segmento $AD = a$. Por el punto *D* trazamos $l \parallel b$, que determina el punto *C*, que es el otro vértice del rectángulo.

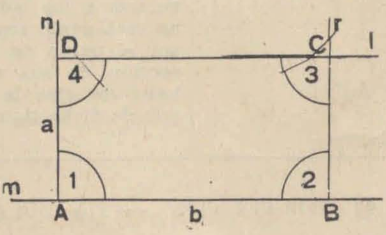
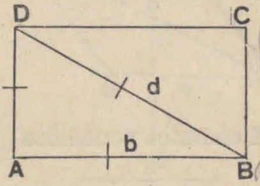


Fig. 57

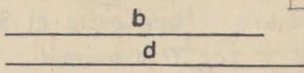
Comprobación. — En efecto, DA y CB perpendiculares a b y comprendidas entre las paralelas l y b son iguales. Además $\widehat{1} = \widehat{2} = \widehat{4} = 90^\circ$ por construcción. Luego $3 = 90^\circ$.

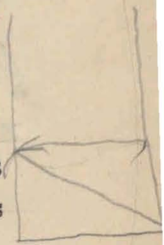
50. Problema. II. — *Construir un rectángulo dados un lado y la diagonal.* Datos: b y d.

Figura de análisis



Elementos conocidos





Construcción. — Tomamos una recta m (Fig. 58) y sobre ella un punto A, a partir del cual construímos un segmento $AB = b$. En A trazamos $n \perp m$. Con centro en B y con una abertura del compás igual a d trazamos un arco que corta a n en D. Por B y por D trazamos:

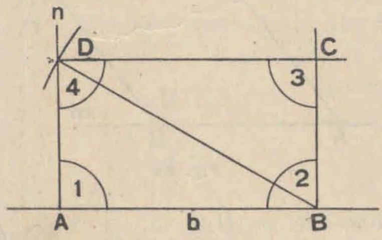


Fig. 58

$$CB \perp AB$$

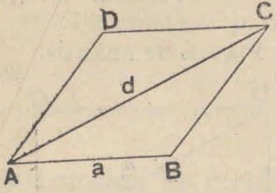
$$DC \perp DA$$

quedando construído el rectángulo pedido.

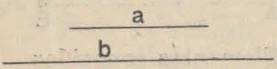
Comprobación. — Tenemos $\widehat{1} = \widehat{2} = \widehat{4} = 90^\circ$. Luego el $\widehat{3} = 90^\circ$. Además $AD = CB$ por ser paralelas comprendidas entre paralelas.

51. Problema III. — *Construir un rombo dados la diagonal y un lado.* Datos: a y d.

Figura de análisis



Elementos conocidos



Construcción. — Sobre una recta m (Fig. 58) consideramos un punto A y a partir de él construímos $AB \doteq a$. Con centro en A y con una abertura del compás igual a d trazamos un arco n. Con centro en B y abertura igual a a, trazamos el arco r que corta al primero en C. Unimos C con B y por C trazamos $CD \parallel AB$ y por A, $AD \parallel CB$. Se tiene así el rombo $ABCD$, pedido.

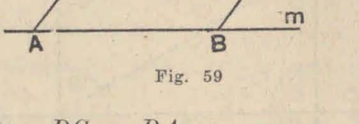


Fig. 59

Comprobación. — $ABCD$ es un rombo, pues

$$AB = CB = DC = DA,$$

por construcción y por segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas.

52. Problema IV. — *Construir un rombo cuyas diagonales se conocen.* Datos: d y d'.

CONSTRUCCIÓN. — Sobre una recta (Fig. 60) consideramos un punto A, a partir del cual construímos $AC = d$. En el punto O, medio de AC, trazamos $d' \perp d$ y construímos sobre ella los segmentos $OD = OB = \frac{d'}{2}$. Uniendo A y C con D y con B, se tiene el rombo $ABCD$ pedido.

Elementos conocidos

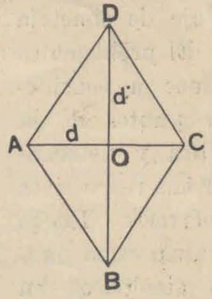
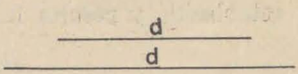


Figura de análisis



COMPROBACIÓN. — Este cuadrilátero tiene sus diagonales perpendiculares y además se cortan en dos partes iguales: es un rombo.

53. PROBLEMA V. — *Construir un cuadrado cuyo lado es conocido.* — Proponemos este problema como ejercicio de aplicación, recordando que la construcción es análoga a la del problema (49), con la diferencia de que en el cuadrado todos los lados son iguales.

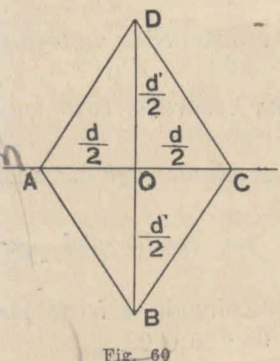


Fig. 60

54. PROBLEMA VI. — *Construir un cuadrado cuya diagonal se conoce.* — Proponemos este problema, recordando que la construcción es análoga a la del problema (52), con la diferencia de que en el cuadrado las diagonales son iguales.

55. Problema VII. — *Construir por puntos la figura simétrica de una dada con respecto a un eje.*

Sea la Fig. 61, y el eje de simetría *m*. El problema se reduce a considerar puntos de la figura y determinar sus respectivos simétricos. Luego se unen estos puntos simétricos en el mismo orden establecido y resulta la Fig. 62

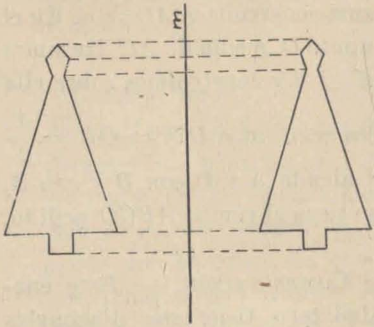


Fig. 61 Fig. 62

Ejercicios

56. *Proponemos los siguientes problemas:*

Problema I. — *Construir un rectángulo, dados un lado y la diagonal del mismo.*

Problema II. — *Construir un rombo dados un lado y un ángulo del mismo.*

Problema III. — *Construir un cuadrado, cuyo lado mide* m 0.04.

Problema IV. — *Construir un cuadrado cuya diagonal* $d = 5\sqrt{2}$

Problema V. — *Construir un rombo, tal que* d = m 0.07 y d′ = m 0.05.

Problema VI. — *Construir un rectángulo sabiendo que sus lados consecutivos miden* m 0.06 y m 0.08.

CAPITULO V

PROGRAMA V. — **Trapecio.** — Base media. La base media de un trapecio es paralela a las bases e igual a su semisuma. Corolario: La paralela a las bases de un trapecio trazada por el punto medio de uno de los lados no paralelos del mismo divide al otro lado no paralelo en dos partes iguales.

Trapecio isósceles. Si por los estremos de una de las bases de un trapecio se trazan perpendiculares a las mismas, los triángulos y rectángulos que se forman son iguales. La perpendicular a las bases de un trapecio isósceles trazada por el punto medio de una de ellas es un eje de simetría.

Construcción de un trapecio: dados los lados no paralelos y las bases; dados las bases y los ángulos adyacentes a una de ellas; dadas las bases y las diagonales.

Trapecio

57. Base media. — Sea el trapecio $ABCD$ y tomemos:

$AE = ED$ (E punto medio de AD)

$BF = FC$ (F punto medio de CB)

Uniendo E con F se tiene:

$EF =$ base media

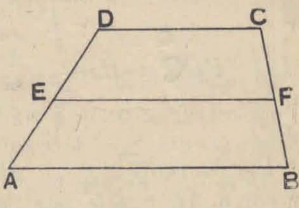


Fig. 63

Por tanto: La base media del trapecio es el segmento de recta interior al mismo que se obtiene al unir los puntos medios de los lados no paralelos de la figura.

58. TEOREMA. — *La base media de un trapecio es: 1º) paralela a las bases; 2º) igual a su semisuma.*

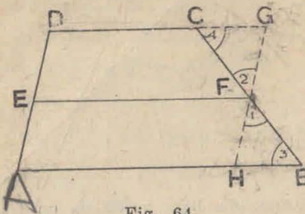


Fig. 64

H $\begin{cases} \text{Trapecio } ABCD \\ DE = EA \\ CF = FB \text{ (Fig. 64)} \end{cases}$

T $\begin{cases} \text{I) } EF \,//\, AB \\ \quad\;\; EF \,//\, DC \\ \text{II) } EF = \dfrac{DC + AB}{2} \end{cases}$

Demostración. — Por el punto F trazamos:

$$GH \,//\, AD.$$

Se ha formado así el cuadrilátero $AHGD$. que por tener:

$AH \,//\, DG$ por hipótesis
$AD \,//\, HG$ por construcción

es un paralelogramo.

Demostraremos que F es punto medio de HG. En efecto, se tiene:

(1) $\widehat{FGC} = \widehat{HBF}$ $\begin{cases} CF = FB & \text{por hipótesis} \\ \hat{1} = \hat{2} & \text{por op. por el vértice} \\ \hat{3} = \hat{4} & \text{por alternos internos entre paralelas } AB \text{ y } DC \end{cases}$

Por lo tanto: $HF = FG$.

y como $AD = GH$ por lados opuestos de un paralelogramo, sus respectivas mitades son: $AE = HF$. Por lo tanto $AHFE$ es un paralelogramo y $EF \,//\, AH$, o lo que es lo mismo $EF \,//\, AB$. Considerando $ED = FG$ se demuestra que $EF \,//\, DC$

II) De la igualdad (1) se tiene también:

$$HB = GC. \qquad (2)$$

Y sabemos que:

$EF = DG = AH$ por lados op. paralelog.

O también:

$$EF = \frac{DG + AH}{2} = \frac{D\cancel{G}C + \cancel{CG} + AB - \cancel{HB}}{2}$$

Y recordando (2):

$$EF = \frac{DC + AB}{2}$$

59. Corolario. — *La paralela a las bases de un trapecio trazado por el punto medio de uno de los lados nó paralelos del mismo divide al otro lado no paralelo en dos partes iguales.*

H { Trapecio $ABCD$
$DC \mathbin{/\!/} AB$
$ED = EA$
$EF \mathbin{/\!/} DC \mathbin{/\!/} AB$
(Fig. 65)

T { $CF = FB$

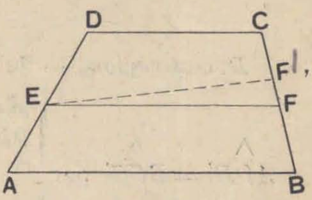


Fig. 65

Demostración. — Lo demostraremos por el *absurdo*, es decir que supondremos que F no es el punto medio de CB. Sea F' dicho punto. Si unimos E con F', por el teor. ant. se tendrá que $EF' \mathbin{/\!/} AB$, lo que es imposible, pues tendríamos por el punto ~~A~~ E dos paralelas a AB.

Por lo tanto el punto F' sólo puede existir coincidiendo con F.

60. Teorema. — *Si por los extremos de las bases de un trapecio isósceles se trazan las perpendiculares a la otra base, los triángulos rectángulos que se forman son todos iguales.*

$$\text{H}\begin{cases} \text{Trapecio} \\ \quad ABCD \\ DC \parallel AB \\ DD' \perp AB \\ CC' \perp AB \\ AA' \perp DC \\ BB' \perp DC \quad \text{(Fig. 66)} \end{cases} \qquad \text{T}\begin{cases} \overset{\triangle}{ADD'} = \overset{\triangle}{BCC'} = \\ \overset{\triangle}{BB'C} = \overset{\triangle}{AA'D} \end{cases}$$

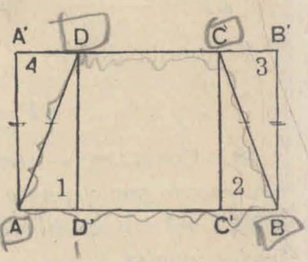


Fig. 66

Demostración. — Se tiene, en efecto, que:

$$\overset{\triangle}{ADD'} = \overset{\triangle}{BCC'} \text{ por}\begin{cases} AD = CB & \text{por hipótesis} \\ DD' = CC' & \text{por segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas} \\ \widehat{1} = \widehat{2} = 90^{\circ} & \end{cases}$$

También tenemos:

$$\overset{\triangle}{BCC'} = \overset{\triangle}{BB'C}\begin{cases} CB = CB & \\ CC' = BB' & \text{Por segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas} \\ \widehat{2} = \widehat{3} = 90^{\circ} & \end{cases}$$

Y por el carácter transitivo de la igualdad de triángulos:

$$\overset{\triangle}{ADD'} = \overset{\triangle}{BB'C}$$

Análoga demostración podemos seguir para probar que

$$\overset{\triangle}{AA'D} = \overset{\triangle}{ADD'}$$

Por lo tanto:

$$\overset{\triangle}{ADD'} = \overset{\triangle}{BCC'} = \overset{\triangle}{BB'C} = \overset{\triangle}{AA'D}$$

61. TEOREMA. — *La perpendicular a las bases de un trapecio isósceles trazada por el punto medio de una de ellas es un eje de simetría de la figura.*

H $\left\{ \begin{array}{l} ABCD \text{ trapecio isósceles} \\ AB \parallel CD \\ DE = EA \\ EF \perp CB \text{ (Fig. 67)} \end{array} \right.$

C $\left\{ \begin{array}{l} EF \text{ eje de simetría de la figura} \end{array} \right.$

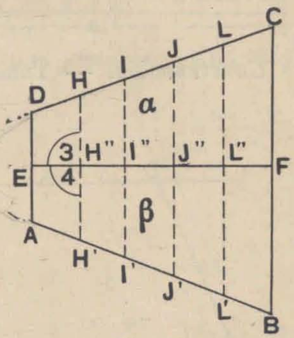


Fig. 67

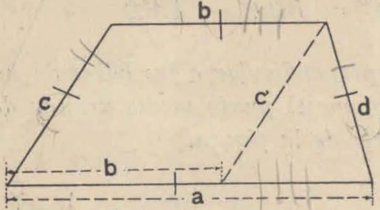
Demostración. — Tenemos que demostrar que los puntos del contorno $D, H, I, J. L. C\ldots$ del semiplano α con respecto a EF tienen sus simétricos $A, H', I', J', L', B\ldots$ sobre el contorno en el otro semiplano β.

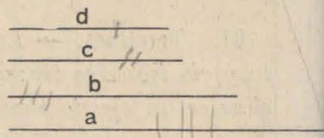
El trapecio isósceles puede ser considerado como obtenido de un triángulo isósceles en el que se traza una paralela a la base. La altura del triángulo isósceles es mediatriz de la base (*Geom. de* 1*er. año*) y coincide con EF. Esta altura divide a las bases $CB, LL'\ldots DA$ en partes iguales.

Problemas sobre la construcción de trapecios

62. Problema I. — *Construir un trapecio dados las bases y sus lados no paralelos.* Datos: a, b, c, y d.

Figura de análisis | **Elementos conocidos**





Construcción. — Tomemos una recta m (Fig. 68) y sobre ella un punto A, a partir del cual construimos $AB = a$ y $AE = b$. Con una abertura del compás igual a d y con centro en B trazamos el arco n. Con una abertura del compás igual a c y con centro en E, trazamos el arco s que corta al primero en C. Unimos C con E y con B. Por C trazamos una paralela a AB y por A una paralela a EC, las que determinan el cuarto vértice D del trapecio pedido.

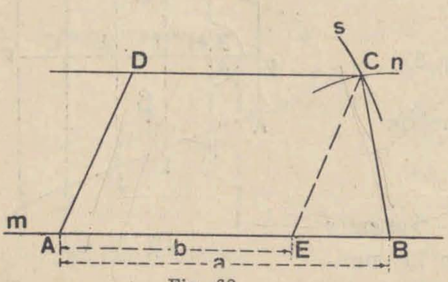


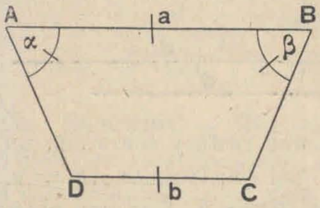
Fig. 68

Comprobación. — El trapecio $ABCD$ tiene los lados pedidos, puesto que:

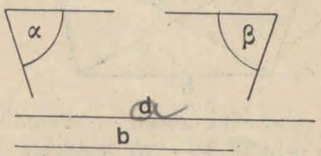
$$\left.\begin{array}{l} DA = CE = c \\ DC = AE = b \end{array}\right\} \text{ por paralelas comprendidas entre paralelas.}$$

63. Problema II. — *Construir un trapecio del cual se conocen sus bases y los ángulos adyacentes a una de ellas. Datos: a, b, α y β.*

Figura de análisis



Elementos conocidos



Construcción. — Tomemos una recta m (Fig. 69) y sobre ella un punto A, a partir del cual construimos $AB = a$ y $AC = b$. En B construimos un ángulo $\beta' = \beta$ y en C un ángulo $\alpha' = \alpha$. Se tiene así el punto D por el cual trazamos una paralela a AB. Por A trazamos la paralela a CD que corta a la anterior en E. Se tiene así el trapecio pedido $ABDE$.

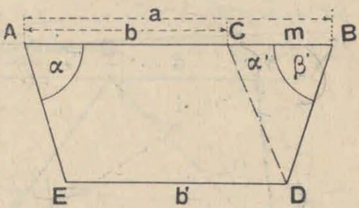


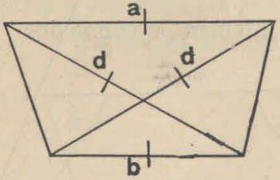
Fig. 69

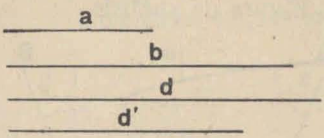
Comprobación. — En efecto $ABDE$ tiene los lados: a, por construcción, $b' = b$ por paralelas entre paralelas, $\beta' = \beta$ por construcción y $\alpha = \alpha$ por ser igual a α' por correspondientes entre paralelas.

Observación. — Si se dieran los ángulos adyacentes a la base menor la construcción se puede efectuar como en este problema recordando que los ángulos adyacentes a la base mayor son suplementarios de los dados, por conjugados internos entre paralelas.

64. Problema III. — *Construir un trapecio del cual se conocen sus bases y diagonales. Datos*: a, b, d y d'.

Figuras de análisis **Elementos conocidos**





Construcción. — Tomamos una recta y sobre ella un punto A, Fig. 70, a partir del cual construimos $AB = a$. A la derecha de B construimos $BC = b$. Con una abertura del compás igual a d y con centro en A trazamos el arco n.

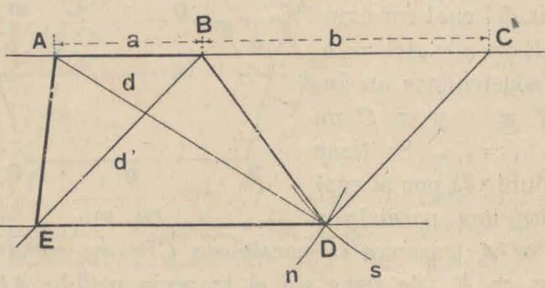


Fig. 70

Con una abertura del compás igual a d′ y con centro en C trazamos el arco s que corta al anterior en D. Por este punto trazamos una paralela a AC y por B construimos $BE \mathbin{/\!/} CD$. Unimos A con E y B con D y se tiene el trapecio pedido $AEDB$.

Comprobación. — En efecto $AEDB$ tiene las bases a y b ($ED = b$ por segmentos de paralelas entre paralelas); las diagonales d y d' ($d' = CD$ por paralelas entre paralelas).

CAPITULO VI

PROGRAMA VI. — **Romboide.** — Su definición como trapezoide que tiene dos vértices opuestos equidistantes de los otros dos. Las diagonales de un romboide son perpendiculares y la que une los vértices equidistantes de los otros dos es bisectriz de los ángulos que tienen esos vértices y eje de simetría de la figura.

65. Romboide. — El *romboide* es un trapezoide (cuadrilátero sin lados paralelos) que tiene dos vértices opuestos equidistantes de los otros dos.

66. TEOREMA. — *En todo romboide la diagonal que une los vértices equidistantes de los otros dos es bisectriz de los ángulos que tienen esos vértices.*

$$\mathrm{H}\left\{\begin{array}{l} ABCD \text{ romboide} \\ AD = AB \\ DC = BC \\ \text{(Fig. 71)} \end{array}\right. \qquad \mathrm{T}\left\{\begin{array}{l} \widehat{1} = \widehat{1'} \\ \widehat{2} = \widehat{2'} \end{array}\right.$$

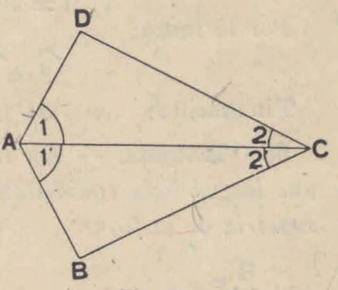


Fig. 71

Demostración. — Se tiene que:

$$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{ADC} \quad \left|\begin{array}{ll} AC = AC & \\ AD = AB & \text{por hipótesis} \\ DC = BC & \text{"} \quad \text{"} \end{array}\right.$$

Por lo tanto:

$$\widehat{1} = \widehat{1'} \text{ y } \widehat{2} = \widehat{2'}$$

67. Teorema. — *En todo romboide las diagonales son recíprocamente perpendiculares.*

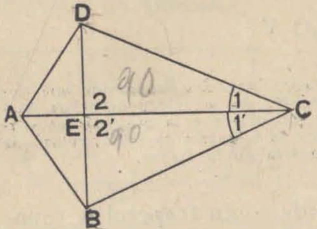


Fig. 72

H $\left\{ \begin{array}{l} ABCD \\ \text{romboide} \\ AD = AB \\ DC = BC \\ \text{(Fig. 72)} \end{array} \right.$ T $\left\{ AC \perp DB \right.$

Demostración. — Se tiene:

$$\overset{\triangle}{DEC} = \overset{\triangle}{BEC} \left\{ \begin{array}{ll} EC = EC & \\ DC = BC & \text{por hipótesis} \\ \widehat{1} = \widehat{1'} & \text{por teor. anterior} \end{array} \right.$$

Por lo tanto:

$$\widehat{2} = \widehat{2'} = 90^{\circ}$$

Finalmente: $AC \perp DB.$

68. Teorema. — *En todo romboide la diagonal que une los vértices equidistantes de los otros dos es eje de simetría de la figura.*

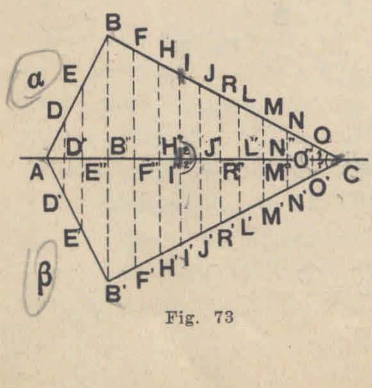


Fig. 73

H $\left\{ \begin{array}{l} ABCB' \\ \text{romboide} \\ AB = AB' \\ BC = B'C \\ \text{(Fig. 73).} \end{array} \right.$ T $\left\{ \begin{array}{l} AC \text{ eje de} \\ \text{de simetría} \\ \text{de la figura.} \end{array} \right.$

Demostración. — Tenemos que demostrar que los puntos del contorno D, E, B, F, H, I, J, K, L, M, N, O, del semiplano α con respecto a AC tienen sus simétricos D', E', B', F', H', I', J', K', L', M', N', O' sobre el contorno, en el otro semiplano β.

Se tiene:

$$DD' \perp AC \ , \ EE' \perp AC \ , \ BB' \perp AC \ , \ FF' \perp AC,$$
$$HH' \perp AC \ , \ II' \perp AC \ , \ JJ' \perp AC \ ; \ KK' \perp AC,$$
$$LL' \perp AC \ , \ MM' \perp AC \ , \ NN' \perp AC \ldots$$

Cada perpendicular forma dos triángulos, tales como

$$\overset{\triangle}{II''C} = \overset{\triangle}{I'I''C} \left\{ \begin{array}{l} I''C = I''C \\ \widehat{1} = \widehat{1'} \text{ por teorema núm. 68} \\ \widehat{2} = \widehat{2'} \text{ por construcción} \end{array} \right.$$

Por lo tanto:

$$II'' = I'I''$$

Y en general:

$$DD'' = D'D'' \ , \ EE'' = E'E'' \ , \ BB'' = B'B''$$
$$JJ'' = J'J'' \ldots$$

Es decir que: AC es eje de simetría del romboide $ABCB'$.

CAPITULO VII

PROGRAMA VII. — **Puntos notables del triángulo.** — Las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto. Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto. Las alturas de un triángulo concurren en un punto.

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad. Corolario: La paralela a un lado de un triángulo trazada por el punto medio de otro de sus lados divide al tercero en partes iguales. Las medianas de un triángulo concurren en un punto situado a dos tercios de cada una de ellas a partir del vértice respectivo.

Puntos notables del triángulo

69. TEOREMA. — *Las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto.*

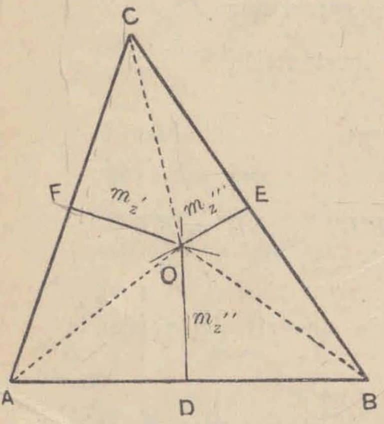


Fig. 74

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l} \triangle ABC \\ AF = FC \\ AD = DB \\ BE = EC \\ m_z' \perp AC \\ m_z'' \perp AB \\ m_z''' \perp BC \\ \text{(Fig. 74).} \end{array}\right. \qquad \text{C}\left\{\begin{array}{llll} O & \text{pertenece} & \text{a} & m \\ O & \text{,,} & \text{,,} & m \\ O & \text{,,} & \text{,,} & m \end{array}\right.$$

Demostración. — Dos rectas del plano se cortan o son paralelas. Supongamos que m_z' y m_z'' no se corten. Entonces deben ser paralelas y como $m'_z \perp AC$ y $m''_z \perp AB$

(y las perpendiculares a paralelas son paralelas) se tendría que $AC \parallel AB$, lo que es un absurdo, por cuanto AC y AB se encuentran en un punto A.

Falta probar que la tercer mediatriz pasa también por O. Efectivamente pasa por O, pues por estar O en las mediatrices m_z' y m_z'' equidista de los puntos A, B y C. Luego $OB = OC$ y o pertenece, por consiguiente, a m_z'''.

70. Teorema. — *Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto.*

C $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC} \\ \widehat{1} = \widehat{1'} \\ \widehat{2} = \widehat{2'} \\ \widehat{3} = \widehat{3'} \\ \text{(Fig. 75).} \end{array} \right.$ T $\left\{ \begin{array}{l} O \text{ común a} \\ b_a\,,\ b_b \text{ y } b_c \end{array} \right.$

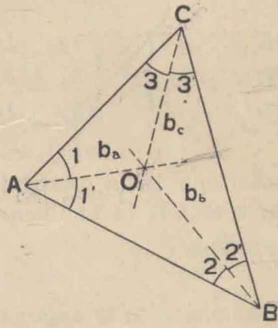


Fig. 75

Demostración. — Se tiene que AO y BO, por ser bisectrices de dos ángulos de un triángulo deben cortarse. Sea O el punto que ellas determinan. Vamos a demostrar que por ese punto pasa la bisectriz CO.

Por ser un punto de AO, el O equidista de los lados AB y AC del ángulo ABC.

Por ser un punto de BO, el O equidista de los lados AB y CB.

Es decir que O equidista de los lados AC y CB y por lo tanto debe pertenecer a CO bisectriz del ángulo ACB que ellos forman.

71. Teorema. — *Las alturas de un triángulo concurren en un punto.*

$$\text{H}\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC} \\ h_a\,,\ h_b\,,\ h_c \text{ alturas} \\ \text{(Fig. 76)} \end{cases} \qquad \text{T}\Big\{\ O \text{ común a } h_a\,,\ h_b\,,\ h_c$$

Demostración. — Por A, B y C, trazamos:

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel AB \\ FE \parallel AC \\ DF \parallel BC \end{array}\right\} \therefore \begin{cases} h_a \perp DF \ (1) \\ h_b \perp FE \ (2) \\ h_c \perp DE \ (3) \end{cases}$$

pues una recta perpendicular a otra lo es también a su paralela.

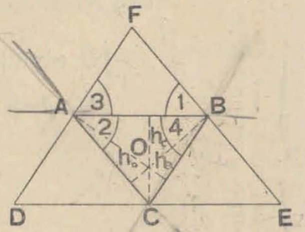


Fig. 76

Además, los triángulos $\overset{\triangle}{ADC}$, $\overset{\triangle}{AFB}$ y $\overset{\triangle}{BCE}$ son iguales entre sí por ser respectivamente iguales al $\overset{\triangle}{ABC}$, como puede verse para un par de ellos:

$$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{AFB} \begin{cases} AB = AB \\ \widehat{1} = \widehat{2} \\ \widehat{3} = \widehat{4} \end{cases} \quad \Big\{ \text{por alternos internos entre paralelas.}$$

De la igualdad de los cuatro triángulos nombrados, resulta:

$$AF = AD \quad , \quad FB = BE \quad , \quad DC = CE$$

Es decir que h_a, h_b, y h_c, además de ser perpendiculares a DE, FE y DF respectivamente, pasan por sus puntos medios. Por lo tanto son mediatrices del triángulo DFE y concurren en un punto (teor. núm. 69).

72. Ortocentro. — El punto O de concurrencia de las alturas de un triángulo se llama *ortocentro.*

73. Teorema. — *La paralela a un lado de un triángulo trazada por el punto medio de otro de sus lados, divide al tercero en partes iguales.*

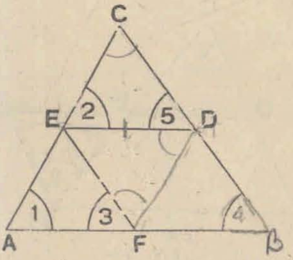


Fig. 77

$$\text{H}\begin{cases} \widehat{ABC} \\ CD = DB \\ DE \parallel AB \\ \text{(Fig. 73)} \end{cases} \qquad \text{T}\left\{ CE = AE \right.$$

Demostración. — Por E trazamos:

$EF \parallel DB$. Por lo tanto: $EF = DB$, por lados opuestos del paralelogramo $EFBD$. Pero siendo $DB = CD$ por hipótesis, por el carácter transitivo de la igualdad de segmentos, se tiene:

$$EF = CD \quad (1)$$

Además $\widehat{1} = \widehat{2}$, por ser ángulos correspondientes entre $ED \parallel AB$ (2).

También $\widehat{3} = \widehat{4}$ por correspondientes entre las paralelas $EF \parallel DB$; pero como $\widehat{4} = \widehat{5}$ por correspondientes entre $ED \mathbin{/\!/} AB$ y por el carácter transitivo de la igualdad de ángulos: $\widehat{3} = \widehat{5}$ (3)

Por consiguiente:

$$\overset{\triangle}{AFE} = \cancel{\overset{\triangle}{ADC}}\ \underset{EDC}{} \left\{ \begin{array}{l} EF = CD \text{ por } (1) \\ \widehat{1} = \widehat{2} \text{ por } (2) \\ \widehat{3} = \widehat{5} \text{ por } (3) \end{array} \right\} \therefore \quad CE = EA$$

74. Teorema. — *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.*

$$\text{H} \left\{ \begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC} \\ CD = DA \\ CE = EB \\ \text{(Fig. 74)} \end{array} \right.$$

$$\text{T} \left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad DE \mathbin{/\!/} AB \\ \text{II)} \quad DE = \dfrac{AB}{2} \end{array} \right.$$

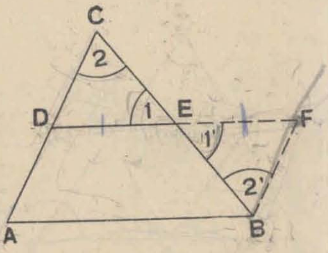


Fig. 78

Demostración. — I) Trazamos $BF \mathbin{/\!/} AC$, que determina con la recta que contiene a DE el punto F.

Se tiene:

$$(1) \quad \overset{\triangle}{DCE} = \overset{\triangle}{BEF} \left\{ \begin{array}{ll} CE = EB & \text{por hipótesis} \\ \widehat{1} = \widehat{1'} & \text{op. por el vértice} \\ \widehat{2} = \widehat{2'} & \text{por alter. inter. entre} \\ & BF \mathbin{/\!/} AC \end{array} \right.$$

Por lo tanto $\quad CD = BF$

pero como por hip. $\quad CD = DA$

Se tiene $\quad DA = BF$

En el cuadrilátero $ABFD$ se tienen dos lados DA y BF iguales y paralelos; los otros dos también deben serlo y la figura es un paralelogramo (núm. 23).

Por lo tanto:

$$DE \parallel AB$$

II) De (1) también se tiene:

$$DE = EF$$

O bien $$DE = \frac{1}{2} DF$$

O finalmente: $$DE = \frac{1}{2} AB$$

75. Teorema. — *Las tres medianas de un triángulo determinan un punto situado a un tercio de cada mediana con respecto al lado correspondiente.*

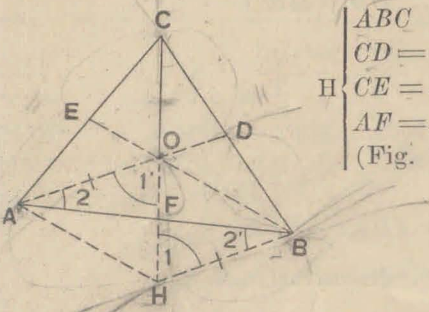


Fig. 79

H $\left\{ \begin{array}{l} ABC \\ CD = DB \\ CE = EA \\ AF = FB \\ \text{(Fig. 75)} \end{array} \right.$

T $\left\{ \begin{array}{l} \text{I) } O \text{ punto común a las tres medianas} \\ \text{II)} \\ FO = \dfrac{FC}{3} \\ DO = \dfrac{DA}{3} \\ EO = \dfrac{EB}{3} \end{array} \right.$

Demostración. — I) Las medianas EB y AD se cortan en un punto, que llamamos O. Demostraremos que la tercer mediana se obtiene prolongando el segmento CO. Por B y por A trazamos:

$$BH \parallel AD$$
$$AH \parallel EB.$$

Consideremos:

$$(1)\quad \overset{\triangle}{AOF} = \overset{\triangle}{HFB} \quad \left\{ \begin{array}{ll} AO = HB & \text{por segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas.} \\ \widehat{1} = \widehat{1'} & \text{por alter. int. entre } /\!/ \\ \widehat{2} = \widehat{2'} & \text{,, ,, ,, ,, } /\!/ \end{array}\right.$$

Por lo tanto $AF = FB$

Es decir que CF es la tercer mediana y que también concurre en el punto O.

II) De (1) se deduce:

$$HF = FO$$

En el $\overset{\triangle}{BCH}$, se tiene $\left.\begin{array}{l} CD = DB \\ OD /\!/ HB \end{array}\right\} \therefore CO = OH$

O también:

$$\frac{CO}{2} = \frac{OH}{2}$$

$$\frac{CO}{2} = FO$$

Y finalmente:

$$FO = \frac{1}{3}\, CF$$

De manera análoga demostraríamos que:

$$DO = \frac{1}{3}\, DA$$

$$EO = \frac{1}{3}\, EB$$

76. Baricentro. — El punto O de concurrencia de las tres medianas de un triángulo es el *baricentro* de la figura.

CAPITULO VIII

PROGRAMA VIII. — **Circunferencia y círculo.** — Definiciones. Circunferencias iguales. Definición. Arcos, ángulos centrales y sectores. Definiciones de arcos iguales y sectores iguales, y de arco mayor o menor que otro. Arcos consecutivos. Suma y diferencia de arcos pertenecientes a circunferencias iguales.

Relaciones entre arcos y cuerdas iguales o desiguales.

Propiedades del diámetro: El diámetro es la mayor de las cuerdas. Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y a los arcos que subtiende en partes iguales. Todo diámetro es un eje de simetría de la circunferencia a que pertenece.

Distancia al centro de cuerdas iguales y desiguales.

Por tres puntos no alineados pasa una circunferencia y sólo una.

Circunferencia y círculo

Damos las siguientes definiciones:

77. *Circunferencia.* — Es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de otro, llamado *centro*. (Figura 80).

Circunferencia

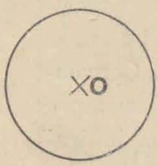
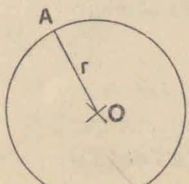


Fig. 80

78. Radio. — Es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con un punto de la misma. (Fig. 81).

Radio

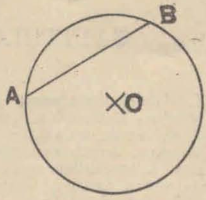


$OA = r$

Fig. 81

79. *Cuerda.* — Es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia. (Figura 82).

Cuerda

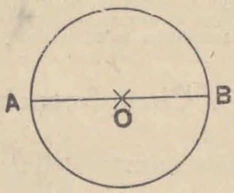


AB cuerda

Fig. 82

80. *Diámetro.* — Es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. (Fig. 83).

Diámetro

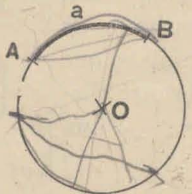


AB diámetro

Fig. 83

81. *Arco.* — Es un segmento de circunferencia. (Fig. 84). Dos puntos de una circunferencia determinan dos arcos. Convendremos que siempre que no se haga indicación contraria nos referiremos a arcos menores que una semicircunferencia.

Arco

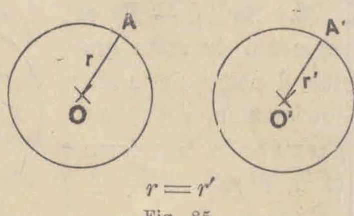


$\widehat{AB} = a$

Fig. 84

82. *Circunferencias iguales.* — Son las que tienen igual radio. (Figura 85).

Circunferencias iguales



$r = r'$

Fig. 85

83. *Círculo.* — Es el conjunto de puntos del plano que contiene al centro y limitado por la circunferencia. (Fig. 86).

Círculo

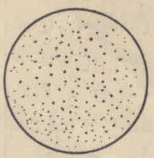
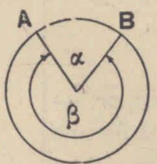


Fig. 86

84. *Angulo central.* — Es el que tiene su vértice en el centro del círculo y sus lados son radios del mismo. (Figura 87).

Angulo central



α = cóncavo
β = convexo

Fig. 87

85. *Sector circular.* — Es el conjunto de puntos interiores comprendidos por un ángulo central y el arco de circunferencia que abarcan los lados del mismo. (Fig. 88).

Sector circular

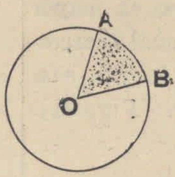


Fig. 88

86. *Sectores iguales.* — Son aquellos que en un mismo círculo o en círculos iguales, tienen iguales los respectivos ángulos centrales. (Figura 89).

Sectores iguales

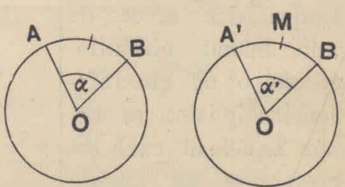


Fig. 89

$AOMB = A'OMB$

si $\alpha = \alpha'$

87. *A r c o s iguales.* — Son aquellos que perteneciendo a una circunferencia o a circunferencias i g u a l e s tienen iguales los respectivos ángulos centrales. (Fig. 90).

Arcos iguales

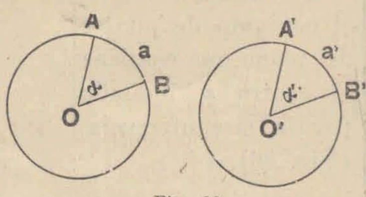


Fig. 90

$a = a'$
si
$\alpha = \alpha'$

88. *Arco mayor.* — Dados dos arcos de una misma circunferencia o de c i r c u n f e r e n cias iguales, es mayor aquel al cual corresponde un ángulo central mayor. (Fig. 91).

Arco mayor

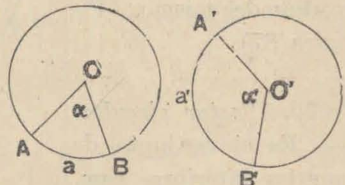


Fig. 91

$a' > a$
si
$\alpha' > \alpha$

89. *Arco menor.* — Dados dos arcos de una misma circunferencia o de circunferencias iguales, es menor aquel al cual corresponde un ángulo central menor. (Figura 92).

Arco menor

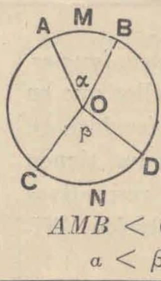


Fig. 92

$AMB < CND$

Si $\alpha < \beta$

90. *Arcos consecutivos.* — Son aquellos que perteneciendo a una misma circunferencia tienen solamente un punto común, siendo todos los otros de un arco exteriores con respecto a los del otro. (Fig. 93).

Arcos consecutivos

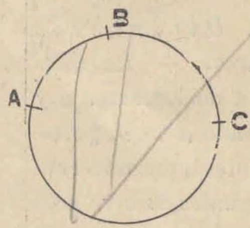


Fig. 93

$\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{BC}$

91. *Suma de arcos.* — La suma de los arcos a y b pertenecientes a circunferencias iguales, es el arco $a + b$ que forman dos arcos consecutivos respectivamente iguales a a y b. (Fig. 94).

Suma de arcos

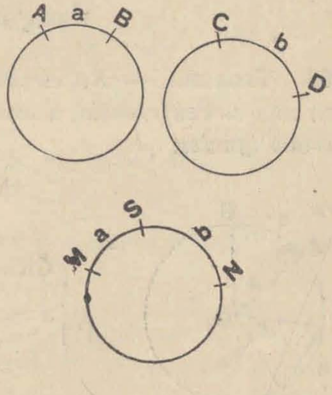


Fig. 94

92. *Diferencia de arcos.* — La diferencia de los arcos a y b, siendo $a > b$, pertenecientes a circunferencias iguales, es otro arco c, tal que $c + b = a$. (Figura 95).

Diferencia de arcos

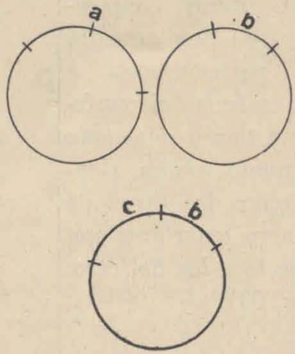


Fig. 95

Relaciones entre arcos y cuerdas iguales o desiguales

93. Teorema. — *En circunferencias del mismo radio o en una circunferencia, a arcos iguales les corresponden cuerdas iguales.*

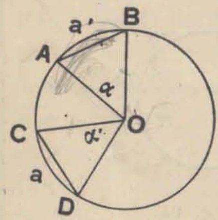


Fig. 96

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l}\text{Cif. } O\\ a = a'\\ \text{(Fig. 96).}\end{array}\right. \qquad \text{T}\left\{\, AB = CD\right.$$

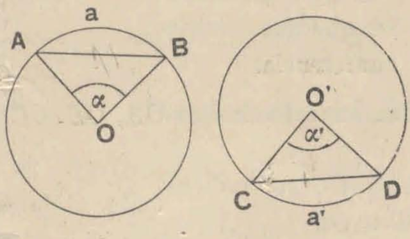
Demostración. — Trazamos los radios OA, OB, OC y OD y se tiene:

$$\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{COD} \begin{cases} OB = OC \text{ por ser radios} \\ OA = OD \text{ por radios} \\ \alpha = \alpha' \text{ por corresponder arcos iguales} \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$AB = CD$$

94. Teorema. (Recíproco). — *En circunferencias del mismo radio o en una circunferencia, a cuerdas iguales les corresponden arcos iguales.*



$$H \begin{cases} \text{Cif. O} \\ \text{Cif. } O' \text{ (Fig. 97)} \\ AB = CD \end{cases}$$

$$T \left\} \quad a = a' \right.$$

Fig. 97

Demostración. — Trazamos los radios OA, OB, OC y OD y se tiene:

$$\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{CO'D} \begin{cases} OA = O'C \text{ por radios circunf. iguales} \\ OB = O'D \text{ ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \\ AB = CD \text{ por hipótesis.} \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$\alpha = \alpha' \text{ y por } (\mathbf{87}) : a = a'$$

95. Teorema. — *En circunferencias iguales o en una circunferencia, a arcos desiguales menores que una semicircunferencia corresponden cuerdas desiguales, siendo mayor la que corresponde al arco mayor.*

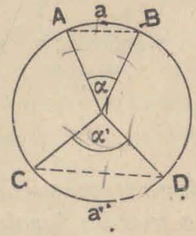


Fig. 98

Dos arcos menores que una semicircunferencia.

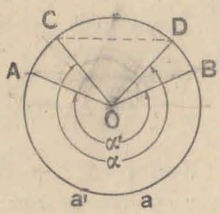


Fig. 99

Dos arcos mayores que una semicircunferencia.

H $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cif. } O \\ a' > a \\ \text{(Fig. 98).} \end{array} \right.$

T $\left\{ CD > AB \right.$

Demostración. — Trazamos los radios OA, OB, OC y OD y se tiene:

$$\overset{\triangle}{COD} \text{ y } \overset{\triangle}{AOB} \left\{ \begin{array}{l} OA = OC \text{ por radios} \\ OB = OD \quad ,, \quad ,, \\ \alpha' > \alpha \text{ pues por hip. } a' > a \end{array} \right.$$

Por consiguiente (200 Geom. I):

$$CD > AB$$

96. *Observación.* — Si los dos ángulos son mayores que una semicircunferencia (fig. 99) la cuerda mayor corresponde al ángulo menor.

97. Teorema. (Recíproco del anterior). — *En circunferencias iguales o en una circunferencia, a cuerdas desiguales corresponden arcos desiguales menores que una* *semicircunferencia, siendo mayor el que corresponde a la cuerda mayor.*

H $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cif. } O \\ CD > AB \\ \text{(Fig. 98).} \end{array} \right.$ T $\left\{ a' > a \right.$

Demostración. — Trazamos los radios OA, OB, OC y OD y se tiene:

$a' \neq a$, pues si $a' = a$ se tendría $CD = AB$ (contrario a la hipótesis).

$a' \not< a$, pues si $a' < a$, se tendría $CD < AB$ (contrario a la hipótesis).

Por lo tanto si a' no es igual ni menor que a, debe cumplirse:

$$a' > a$$

T/

Propiedades del diámetro

98. TEOREMA. — *El diámetro es la mayor de las cuerdas.*

Fig. 100

H $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cif. } O \\ AB \text{ diámetro} \\ \text{(Fig. 100).} \end{array} \right.$

$\frac{\pi R^2 \times \text{sen } 90^\circ}{2 \pi R^2}$ = $\frac{\text{sen}}{}$ 90° ... sen 45°

T $\left\{ AB \text{ es la mayor de las cuerdas} \right.$

Demostración. — Si consideramos una cuerda que no sea diámetro, tal como la CD y unimos O con C y con D se tiene en el $\overset{\triangle}{OCD}$:

$$r + r > CD$$

o también, por ser $AB = 2r$:

$$AB > CD$$

99. Teorema. — *Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y a los arcos que subtiende en partes iguales.*

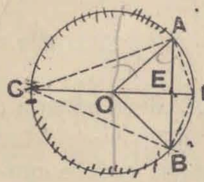


Fig. 101

H: Cif. O; AB cuerda; CD diámetro; $CD \perp AB$ (Fig. 101).

T: I) $AE = EB$; II) $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$, $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$

Demostración. — I) Trazamos OA y OB. Siendo $CD \perp AB$, y $OA = OB$ por radios, se tiene que son oblícuas iguales y por lo tanto se alejan igualmente del pie E de la perpendicular:

$$AE = EB$$

II) Por ser $CD \perp AB$, por hipótesis, en su punto medio (demostración anterior) el punto C equidista de A y de B y el punto D también equidista de A y de B.

Luego:

$AD = DB \;\therefore\; \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$
$AC = CB \;\therefore\; \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$
porque en una circunferencia a cuerdas iguales corresponde arcos iguales. (teor. 94).

100. Teorema. — *Todo diámetro es un eje de simetría de la circunferencia a que pertenece.*

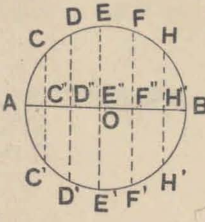


Fig. 102

H: Cif. O; AB diámetro; Fig. 102

T: AB eje de simetría de la figura

Demostración. — Debemos demostrar que a cada punto de la circunferencia situado en un semiplano con respecto a AB, corresponde uno simétrico que está en el contorno de la circunferencia en el semiplano opuesto.

En otras palabras, debemos probar que:

$CC'' = C''C'$; $DD'' = D''D'$, $EE'' = E''E'$, $FF'' = F''F'$, $HH'' = H''H'$ siendo $CC' \perp AB$, $DD' \perp AB$, $EE' \perp AB$, $FF' \perp AB$ y $HH' \perp AB$.

Y en efecto, estas igualdades se cumplen pues todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta en partes iguales (teor. ant.).

Por lo tanto, AB es eje de simetría de la figura.

Distancia al centro de cuerdas iguales y desiguales

101. Teorema. — *En toda circunferencia o en circunferencias iguales, las cuerdas iguales equidistan del centro.*

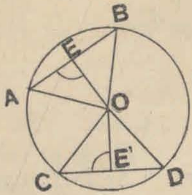


Fig. 103

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l}\text{Cif. O}\\ AB = CD\\ OE \perp AB\\ OE' \perp CD\\ \text{Fig. 103}\end{array}\right. \quad \text{T}\left\{OE = OE'\right.$$

Demostración. — Trazamos AO, BO, CO y DO y tenemos:

$$\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{COD}\left\{\begin{array}{l}AO = CO \text{ por radios}\\ BO = DO \text{ por radios}\\ AB = CD \text{ por hip.}\end{array}\right.$$

Por lo tanto, las alturas trazadas desde los vértices en O son iguales.

$$OE = OE'$$

102. Teorema. — *En toda circunferencia o en circunferencias iguales, una cuerda dista menos del centro que otra cuerda menor que ella.*

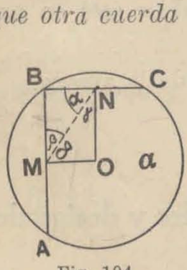


Fig. 104

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l}\text{Cif. } O\\ AB > BC\\ NO \perp BC\\ MO \perp AB\\ \text{(Fig. 104)}\end{array}\right. \quad \text{T}\left\{MO < ON\right.$$

Demostración. — Si $AB > BC$ por hipótesis, sus respectivas mitades, por teorema 99, son: $MB > BN$.

En el $\overset{\triangle}{BMN}$ por ser $MB > BN$ se tiene: $\widehat{\alpha} > \widehat{\beta}$.

Por lo tanto, $\widehat{\gamma} < \widehat{\delta}$ por complementos de los áng. α y β, respectivamente.

En el triángulo NMO se tiene entonces:

$$MO < ON$$

103. Teorema. (Recíproco del 102). — *En toda circunferencia o en circunferencias iguales, de dos cuerdas que distan desigualmente del centro de la circunferencia, es menor la que más dista.*

$$\text{H}\left|\begin{array}{l}\text{Cif. } O\\ NO \perp BC\\ MO \perp BA\\ MO < ON\\ \text{(Fig. 104).}\end{array}\right| \quad \text{T}\left|\; BA > BC \;\right|$$

Demostración. — En el triángulo MNO, por ser por hipótesis $OM < ON$ se tiene que $\widehat{\gamma} < \widehat{\delta}$. Por lo tanto $\alpha > \beta$ por complementos de los ángulos γ y δ, respectivamente.

En el $\overset{\triangle}{BMN}$ se tiene entonces:

$$BM > BN$$

y por consiguiente:

$$BA > BC$$

104. Teorema. — *Tres puntos que no pertenezcan a una recta determinan una circunferencia y solamente una.*

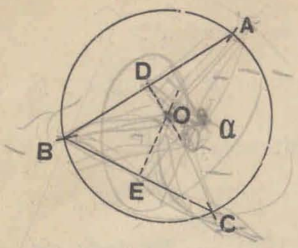


Fig. 105

H $\left\{\begin{array}{l} A, B \text{ y } C. \\ A, B \text{ y } C \text{ no determinan una } \textit{recta}. \\ \text{(Fig. 105).} \end{array}\right.$

T $\left\{\begin{array}{l} \text{I) } A, B \text{ y } C \text{ determinan Cif. } O. \\ \text{II) Cif. } O \text{ es única.} \end{array}\right.$

Demostración. — I) Sean los puntos A, B y C. Trazamos AB y BC y construímos:

$$AD = DB$$
$$BE = EC$$

En D y en E, respectivamente, trazamos

$$DO \perp AB$$
$$EO \perp BC$$

Todos los puntos de DO equidistan de A y de B. Todos los puntos de EO equidistan de B y de C. El punto O en que se cortan, por ser común a ambas, equidista de A, de B y de C.

Por lo tanto, según la definición de circunferencia, O es el centro de aquella que pasa por A, B y C.

II) Vamos a demostrar que esta circunferencia es única. Si admitimos que existiere otra, de centro O', este centro debe coincidir con O, puesto que por ser $AO' = OB'$ y $O'B = CO'$, el punto O pertenece simultáneamente a las mediatrices de AB y BC; es decir DO' y EO', esto es que O' es el mismo punto O.

CAPITULO IX

PROGRAMA IX. — **Intersecciones de rectas y circunferencias.** — Una recta no puede cortar a una circunferencia en más de dos puntos. Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta es mayor que el radio todos los puntos de la recta son exteriores a la circunferencia. Recíproco. Recta exterior.

Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta es igual al radio la recta tiene un punto común con la circunferencia y los demás exteriores a ella. Recíproco. Tangente. Corolario: La perpendicular a un radio en su extremo es tangente y toda tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.

Postulado: Todo segmento cuyos extremos son uno interior y otro exterior a una circunferencia tiene con ella un punto común y sólo uno.| Teorema: Si una recta tiene un punto interior a una circunferencia tiene con ella dos puntos comunes. Recta secante. Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta es menor que el radio, la recta es secante. Recíproco.

Intersecciones de rectas y circunferencias

105. Teorema. — *Una recta no puede cortar a una circunferencia en más de dos puntos.*

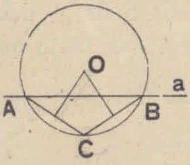


Fig. 106

H $\begin{cases} \text{Cif. } O. \\ \textit{Recta } a. \\ \text{(Fig. 106).} \end{cases}$ T $\begin{cases} A \text{ y } B \text{ pertenecen simultáneamente a} \\ \text{Cif. } O \text{ y a } a. \\ A \text{ y } B \text{ únicos.} \end{cases}$

Demostración. — Si admitimos (fig. 106) que además de A y de B la recta a corta en C a la circunferencia, trazaríamos AC y CB y las perpendiculares en sus respectivos puntos medios determinarían el centro O de la circunferencia, (teor. anterior).

Pero como A, C y B debieran estar en la recta a, las perpendiculares serían paralelas. Por lo tanto el punto C no puede pertenecer a a.

106. TEOREMA. — *Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta es mayor que el radio todos los puntos de la recta son exteriores a la circunferencia.*

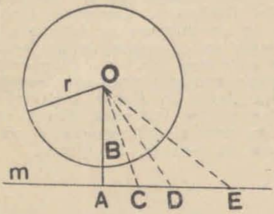


Fig. 107

H { Cif. O.
Recta m.
$OA \perp m$
$OA > r$
(Fig. 107).

T { m exterior a Cif. O.

Demostración. — Por hipótesis, se tiene:

$$OA \perp m$$

Como cualquier otro punto de m distinto de A debe ser el pie de una oblícua OC, OD, OE... se tiene que

$$OA < OC < OD < OE \ldots \text{ y como } OA > r$$

luego A, C, D, E..., son puntos exteriores y

m exterior con respecto a Cif. O.

107. TEOREMA. (Recíproco del anterior). — *Si todos los puntos de una recta son exteriores con respecto a una circunferencia, la distancia del centro de la circunferencia a la recta dada es mayor que el radio.*

H	Cif. O. Recta m. $A, B, C, D, \ldots$ puntos de m exteriores a Cif. O. $OA \perp m$ (Fig. 107)	T	$OA > r$

Demostración. — Por pertenecer a m, el punto A es exterior a Cif. O y se tiene:

$$OA > r$$

108. Recta exterior con respecto a una circunferencia. — Es la que tiene todos sus puntos exteriores con respecto a dicha circunferencia.

109. Teorema. — *Si la distancia del centro de una circunferencia a una recta es igual al radio, la recta tiene un punto común con la circunferencia y los demás exteriores a ella.*

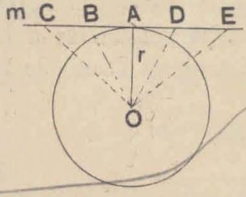


Fig. 108

H	Cif. O. Recta m. $AO \perp m$ $AO = r$ (Fig. 108).	T	A punto común de a y Cif. O. Los demás puntos de m exteriores a Cif. O.

Demostración. — Desde que $OA = r$, A, punto de m, es también punto de Cif. O.

Todo otro punto, como $C, B, D, E \ldots$ distintos de A, deben ser exteriores a la circunferencia, puesto que:

$$OA < BO < CO$$

y siendo:

$$AO = r$$

$C, B, D, E\ldots$ son exteriores

110. Teorema. (Recíproco). — *Si una recta tiene un punto común con una circunferencia y los demás son exteriores a la misma, la distancia de dicha recta al centro de la circunferencia es el radio trazado desde el punto común.*

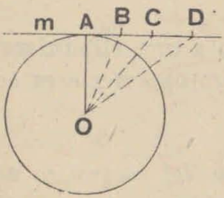


Fig. 109

H: Cif. O. Recta m. $B, C, D\ldots$ exteriores. A común a a y a Cif. O. (Fig. 109).

T: $AO \perp m$; $AO = r$

Demostración. — Todos los puntos exteriores B, C, D determinan segmentos $OB, OC, OD\ldots$ mayores que AO, y sabemos que el menor de todos es perpendicular a la recta, por tanto es $AO \perp m$. Pero A es un punto de la circunferencia, luego:

$$AO = r$$

111. Tangente. — Recta *tangente* a una circunferencia es aquella que tiene un punto común y solamente uno con dicha circunferencia.

112. Corolario. — *La perpendicular a una radio en su extremo es tangente y toda tangente es perpendicular al radio en el punto contacto.*

113. Postulado. — *Todo segmento cuyos extremos son uno interior y otro exterior a una circunferencia tiene con ella un punto común y sólo uno.*

114. Teorema. — *Si una recta tiene un punto interior a una circunferencia tiene con ella dos puntos comunes.*

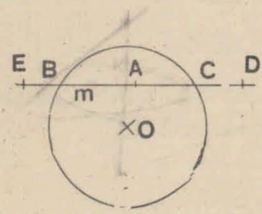


Fig. 110

H: Cif. *O*. Recta *m*. *A* pertenece a *m* *A* interior a Cif. *O*. (Fig. 110).

T: *m tiene dos puntos comunes con* Cif. *O*.

Demostración. — Sobre *m* en los sentidos *AB* y *AC*, tomamos $AD = 2r$ y $AE = 2r$. Los puntos *D* y *E* son exteriores y por el postulado anterior el segmento *AD* corta a la circunferencia en un punto y el *AE* corta a la circunferencia en un punto. Por lo tanto

m corta a Cif. *O* en dos puntos

115. Secante. — Recta *secante* a una circunferencia es aquella que tiene dos puntos comunes con dicha circunferencia.

116. Teorema. — *Si la distancia del centro de una circunferencia a uan recta es menor que el radio, la recta es secante a la circunferencia.*

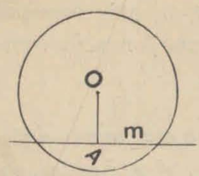


Fig. 111

H $\left\{\begin{array}{l}\text{Cif. } O. \\ \text{Recta } m. \\ OA \perp m \\ OA < r \\ \text{(Fig. 111).}\end{array}\right.$ T $\left\{\begin{array}{l} m \text{ secante con} \\ \text{respecto Cif. } O.\end{array}\right.$

Demostración. — Si $OA < r$, se tiene:

A punto interior a Cif. O,

y como A pertenece a m, ésta tiene dos puntos comunes con la circunferencia, por el teorema 114.

Es decir:

m secante con respecto a Cif. O.

117. Teorema. (Recíproco). — *Si una recta es secante con respecto a una circunferencia, la distancia de la misma al centro es menor que el radio.*

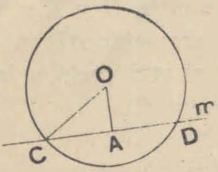


Fig. 112

H $\left|\begin{array}{l}\text{Cif. } O. \\ m \text{ secante con} \\ \text{respecto a Cif. } O. \\ OA \perp m. \\ \text{(Fig. 112).}\end{array}\right.$ T $\left|\; OA < r \right.$

Demostración. — Si m es secante, tiene común con Cif. O los puntos C y D, y tenemos entonces:

$$OA < OC$$

Pero $OC = r$, luego

$$OA < r$$

CAPITULO X

PROGRAMA X. — **Posiciones relativas de dos circunferencias.** — Circunferencias exteriores. Definición. Postulados: Si dos circunferencias son exteriores la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios y recíprocamente.

Circunferencias tangentes exteriormente. Definición. Postulado: Si dos circunferencias son tangentes exteriormente la distancia de los centros es igual a la suma de los radios y recíprocamente.

Circunferencias secantes. Definición. Postulado: Si una circunferencia tiene un punto en el interior y otro en el exterior de otra, ambas son secantes. Teorema: Los puntos comunes a dos circunferencias secantes son simétricos con respecto a la recta de los centros. Corolario: Los puntos comunes a dos circunferencias secantes pertenecen a semiplanos opuestos con respecto a la recta determinada por los centros. Teorema: Si dos circunferencias son secantes la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia. Postulado: Si la distancia de los centros de dos circunferencias es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia, las circunferencias son secantes. Si los radios de dos circunferencias iguales son mayores que la mitad del segmento determinado por los centros dichas circunferencias son secantes.

Circunferencias tangentes interiormente. Definición. Postulado: Si dos circunferencias son tangentes interiormente la distancia de los centros es igual a la diferencia de los radios y recíprocamente.

Circunferencia interior a otra. Definición. Postulado: Si una circunferencia es interior a otra la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios y recíprocamente.

Posiciones relativas de dos circunferencias

Son las siguientes:

Circunferencias exteriores

118. *Definición.* — Una circunferencia es exterior con respecto a otra, si todos los puntos de la primera son exteriores con respecto a la segunda. (Figura 113).

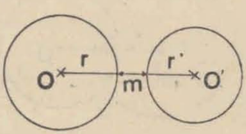


Fig. 113

$$OO' = r + r' + m.$$

119. *Postulado. — Si dos circunferencias son exteriores (figura 113) la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios y recíprocamente.*

Circunferencias tangentes exteriormente

120. *Definición.* — Dos circunferencias son tangentes exteriormente, si tienen solamente un punto común, siendo todos los restantes exteriores. (Fig. 114).

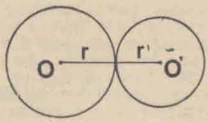


Fig. 114

$$OO' = r + r'$$

121. *Postulado. — Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, (fig.* 114), *la distancia de los centros es igual a la suma de los radios y recíprocamente.*

Circunferencias secantes

122. *Definición.* — Dos circunferencias son secantes si tienen dos puntos comunes y solamente dos. (Fig. 115).

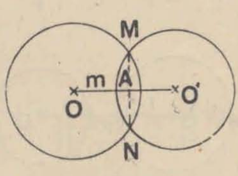


Fig. 115

123. *Postulado I. — Si una circunferencia tiene un punto en el interior y otro en el exterior de otra, (fig.* 115) *ambas son secantes.*

124. TEOREMA. — *Los puntos comunes a dos circunferencias secantes son simétricos con respecto a la recta ~~de~~* que *los centros.*

H $\begin{cases} \text{Cif. } O \text{ y Cif. } O'\text{, secantes.} \\ OO' \perp MN \end{cases}$ (Fig. 115). T $\{ AM = AN$

Demostración. — Si tomamos el punto A tal que sea $AM = AN$, y por A trazamos $m \perp MN$, la m debe pasar por OO'.

Por consiguiente M y N son simétricos con respecto a OO', línea de los centros, por estar situados sobre MN y a distancias iguales de OO'.

125. COROLARIO. — *Los puntos comunes de dos circunferencias secantes pertenecen a semiplanos opuestos con respecto a la recta determinada por los centros.*

Efectivamente, desde que M y N son puntos simétricos con respecto a OO' deben pertenecer a uno y otro de los semiplanos determinados por dicha línea de los centros.

126. TEOREMA. — *Si dos circunferencias son secantes la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.*

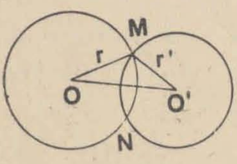


Fig. 116

H $\begin{cases} \text{Cif. } O \text{ y Cif. } O' \\ \text{secantes} \\ \text{(Fig. 116).} \end{cases}$

T $\begin{cases} OO' < r + r' \\ OO' > r + r' \end{cases}$

Demostración. — Unamos M con O y O', resultando el triángulo $OO'\,M$, en el que un lado OO' es la línea de los centros y los otros dos son los radios. En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia, luego:

$$OO' < r + r'$$
$$OO' > r - r'$$

127. *Postulado II. — Si la distancia de los centros de dos circunferencias es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia, las circunferencias son secantes.* (Figura 117).

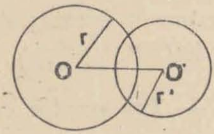


Fig. 117

$$OO' < r + r'$$
$$OO' > r + r'$$

128. *Postulado III. — Si los radios de dos circunferencias iguales son mayores que la mitad del segmento*

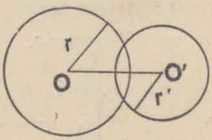


Fig. 118

$$r > \frac{OO'}{2}$$

determinado por los centros, dichas circunferencias son secantes. (Figura 118).

Circunferencias tangentes interiormente

129. *Definición.* — Una circunferencia es tangente interior a otra, cuando tienen un punto común y todos los demás puntos de la primera son interiores de la segunda. (Figura 119).

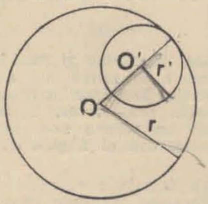


Fig. 119

$$OO' = r - r'$$

130. *Postulado.* — *Si dos circunferencias son tangentes interiormente la distancia de los centros es igual a la diferencia de los radios y recíprocamente.* (*Figura* 119).

Circunferencia interior a otra

131. *Definición.* — Una circunferencia es interior a otra, cuando todos los puntos de la primera son interiores de la segunda. (Fig. 120).

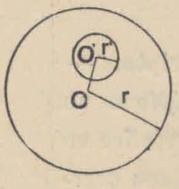


Fig. 120

$$OO' < r - r'$$

132. *Postulado.* — *Si una circunferencia es interior a otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios y recíprocamente.* (*Fig.* 120).

CAPITULO XI

PROGRAMA XI. — **Angulos inscriptos y semi-inscriptos.** — Todo ángulo inscripto es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. Corolario: Los ángulos inscriptos cuyos lados abarcan una semicircunferencia son rectos. Todos los ángulos inscriptos cuyos lados abarcan un mismo arco son iguales. Angulos semi-inscriptos: su relación con el ángulo central que abarca el mismo arco.

Arco capaz de un ángulo construído sobre un segmento dado. Definición y construcción. El arco capaz de un ángulo construído sobre un segmento dado es el lugar geométrico de los puntos del semiplano que lo contiene, respecto de la recta a que pertenece el segmento, desde los cuales se ve éste bajo aquel ángulo. Construcción de un triángulo conociendo un lado, el ángulo opuesto y la altura o la mediana correspondiente a ese lado.

Angulos inscriptos y semi-inscriptos

Definiciones:

133. Angulo inscripto. — Se llama *ángulo inscripto* en un arco, al que tiene su vértice en dicho arco y sus lados son cuerdas de la circunferencia, (Fig. 121).

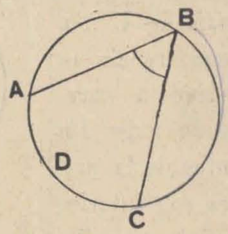


Fig. 121

$\widehat{ABC}$ inscripto

134. Angulo semi-inscripto. — Se llama *ángulo semi-inscripto* en un arco, al que tiene su vértice en uno de los extremos del arco y un lado es cuerda y el otro es tangente a la circunferencia. (Fig. 122).

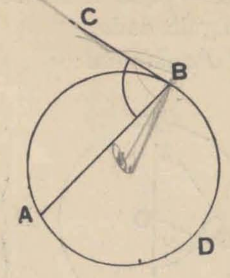


Fig. 122

$\widehat{ABC}$ semi-inscripto

135. Arco capaz.—*Arco capaz de un ángulo dado*, es aquel que sólo admite ángulos inscriptos iguales al dado. (Fig. 123).

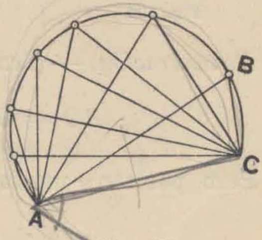


Fig. 123

Arco capaz del $\widehat{ABC}$

136. Teorema. — *Todo ángulo inscripto es igual a la mitad del ángulo central ~~que abarca el mismo arco~~.* correspondiente

Consideraremos tres posibilidades:

I — Que un lado del ángulo pase por el centro de la circunferencia.

II — Que el centro de la circunferencia sea exterior al ángulo dado.

III — Que el centro de la circunferencia sea interior al ángulo dado.

1ª *Posibilidad*:

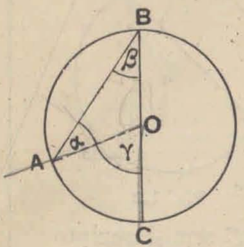


Fig. 124

$$H\begin{cases}\text{Cif. } O.\\ \beta \text{ inscripto.}\\ BC \text{ pasa por } O.\\ \text{(Fig. 124).}\end{cases} \qquad T\left\{\beta=\frac{1}{2}\gamma\right.$$

Demostración. — Trazamos AO. Se tiene en el $\overset{\triangle}{AOB}$:

$$AO = OB = r \therefore \alpha = \beta$$ por isosceles

Pero, por ser γ un ángulo exterior, se tiene que:

$$\gamma = 2\beta$$

Finalmente: $$\beta = \frac{1}{2}\gamma$$

2ª *Posibilidad*:

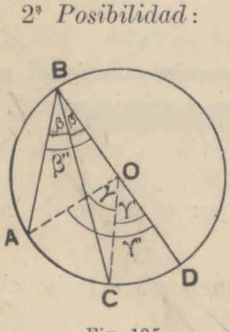


Fig. 125

$$H\begin{cases}\text{Cif. } O.\\ \beta \text{ inscripto}\\ O \text{ exterior a } \beta\\ \text{(Fig. 125).}\end{cases} \qquad T\left\{\beta=\frac{1}{2}\gamma\right.$$

Demostración. — Trazamos el diámetro que pasa por B y se tiene, por el caso anterior, que:

Ana Bola

$$\beta'' = \frac{1}{2}\gamma''$$

$$\beta' = \frac{1}{2}\gamma'$$

Pero $\beta = \beta'' - \beta'$, luego:

$$\beta = \frac{1}{2}\gamma'' - \frac{1}{2}\gamma'$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma'' - \gamma')$$

Pero $\gamma'' - \gamma' = \gamma \therefore \beta = \frac{1}{2}\gamma$

III. *Posibilidad*:

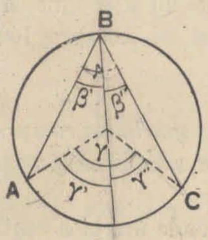


Fig. 126

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l}\text{Cif. } O. \\ \beta \text{ inscripto} \\ O \text{ interior a } \beta \\ \text{(Fig. 126).}\end{array}\right. \qquad \text{T}\left\{\beta = \frac{1}{2}\gamma\right.$$

Demostración. — Trazamos el diámetro que pasa por B, y por el primer caso, se tiene:

$$\beta' = \frac{1}{2}\gamma'$$

$$\beta'' = \frac{1}{2}\gamma''$$

Pero: $\beta = \beta' + \beta''$, luego:

$$\beta = \frac{1}{2}\gamma' + \frac{1}{2}\gamma''$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma'')$$

Pero $$\gamma' + \gamma'' = \gamma$$

$$\therefore \quad \beta = \frac{1}{2}\gamma$$

135. Corolarios. — I. *Los ángulos inscriptos cuyos lados abarcan una semicircunferencia son rectos.*

Por el teorema anterior estos ángulos son iguales a la mitad del central que abarca el mismo arco. El central vale 2 R, luego el inscripto vale 1 R.

136. II. *Todos los ángulos inscriptos cuyos lados abarcan un mismo arco son iguales.*

Por el teorema anterior cada uno de ellos es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco, luego son todos iguales.

137. III. *Todo ángulo inscripto cuyos lados comprendan un arco mayor o menor que una semicircunferencia son obtusos o agudos, respectivamente.*

Por el teorema anterior les corresponde ángulos centrales que abarcan más o menos de una semicircunferencia, respectivamente.

Angulos semiinscriptos

138. Teorema. — *El ángulo semiinscripto es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.*

Consideramos tres posibilidades:

I. Que el lado (cuerda) del ángulo pase por el centro de la circunferencia;

II. Que el centro de la circunferencia sea exterior al ángulo dado;

III. Que el centro de la circunferencia sea interior al ángulo dado.

I. *Posibilidad*:

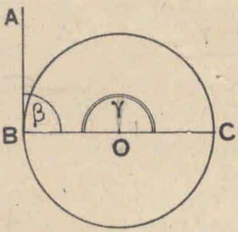


Fig. 127

H: Cif. O. β semiinscripto, BC pasa por O (Fig. 127).

T: $\beta = \frac{1}{2}\gamma$

Demostración. — Por su AB tangente, se tiene $AB \perp BC$, y luego:

$$\beta = 1\,R$$

y $$\gamma = 2\,R \text{ por ser ángulo llano}$$

Luego $$\beta = \frac{1}{2}\gamma$$

II. *Posibilidad*:

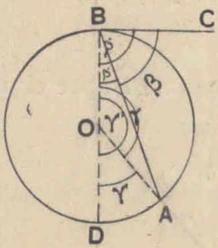


Fig. 128

H: Cif. O. β semiinscripto, O exterior a β (Fig. 128).

T: $\beta = \frac{1}{2}\gamma$

Demostración. — Trazando el diámetro BD, por el caso anterior, se tiene:

$$\beta' = \frac{1}{2}\gamma'$$

$$\beta'' = \frac{1}{2}\,\gamma''$$

Pero $\qquad \beta = \beta'' - \beta'$, luego:

$$\beta = \frac{1}{2}\,\gamma'' - \frac{1}{2}\,\gamma'$$

$$\beta = \frac{1}{2}\,(\gamma'' - \gamma')$$

Pero $\qquad \gamma'' - \gamma' = \gamma$, luego:

$$\beta = \frac{1}{2}\,\gamma$$

III. *Posibilidad*:

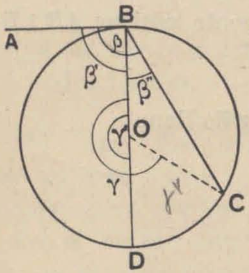


Fig. 129

H $\left\{\begin{array}{l}\text{Cif.}\,O.\\ \beta \text{ semiinscripto}\\ O \text{ interior a } \beta\\ \text{(Fig. 129).}\end{array}\right.$ $\qquad$ T $\left\{\ \beta = \frac{1}{2}\,\gamma\right.$

Demostración. — Trazando el diámetro *BD*, por el primer caso, se tiene:

β' semiinscripto: $\qquad \therefore\ \beta' = \frac{1}{2}\,\gamma'$

β'' inscripto $\quad$: $\qquad \therefore\ \beta'' = \frac{1}{2}\,\gamma''$

Pero: $\qquad \beta = \beta' + \beta''$, luego:

$$\beta = \frac{1}{2}\,\gamma' + \frac{1}{2}\,\gamma''$$

$$\beta = \frac{1}{2}\,(\gamma' + \gamma'')$$

Pero: $\gamma' + \gamma'' = \gamma$, luego:

$$\beta = \frac{1}{2}\gamma$$

139. Construcción del arco capaz. — Se nos pide construir sobre un segmento a, el arco capaz de un ángulo α (Fig. 130).

Consideremos una recta m y sobre ella un punto A, a partir del cual construímos el segmento $AB = a$. En B y sobre BA construímos $\widehat{ABC} = \alpha$. Construímos también: $n \perp AB$ en su punto medio E, y $s \perp CB$ en el punto B. Los segmentos n y s determinan el centro O del arco buscado, que es BDA.

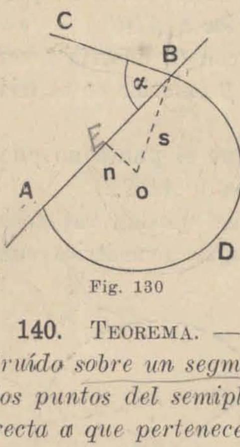


Fig. 130

Se advierte fácilmente que todos los ángulos con vértice en el arco BDA son iguales a α, por ser éste semiinscripto y aquéllos inscriptos que comprenden el mismo arco.

140. TEOREMA. — *El arco capaz de un ángulo construído sobre un segmento dado es el lugar geométrico de los puntos del semiplano que lo contiene, respecto de la recta a que pertenece el segmento, desde los cuales se ve éste bajo aquél ángulo.*

H	α, ángulo dado. AC, segmento dado. ADC arco capaz de α sobre AC. (Fig. 131).	T	ADC es el lugar geométrico de los puntos, del semiplano que contiene a ADC con respecto de la recta a que pertenece el segmento AC, desde los cuales se ve éste bajo el ángulo dado α.

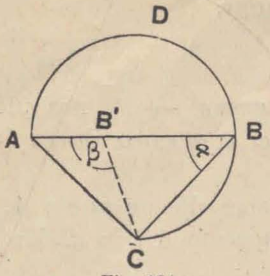


Fig. 131

Demostración. — En efecto: I) desde cualquier punto del ADB, el segmento AC se ve bajo el ángulo α, puesto que siendo ADB el arco capaz del ángulo α, todos los ángulos inscriptos en él son iguales a α.

II) Un punto cualquiera desde el cual se ve a AC bajo el ángulo α pertenece a ADC, puesto que si no perteneciera debería ser interior o exterior a ADC.

Sea el B' interior. Uniendo B' con C, debería tenerse $\beta = \alpha$ lo que es imposible por ser β exterior en el triángulo $B'BC$.

Análogamente demostraríamos que el punto no puede ser exterior. Por lo tanto pertenece a ADC.

Cumplidas esas dos proposiciones quedan satisfechas las condiciones exigidas por el lugar geométrico enunciado.

141. PROBLEMA. — *Construcción de un triángulo conociendo un lado, el ángulo opuesto y la altura correspondiente a ese lado.* Datos: a, ha y α. (Fig. 132).

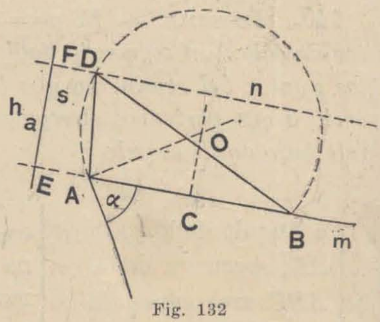
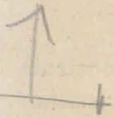
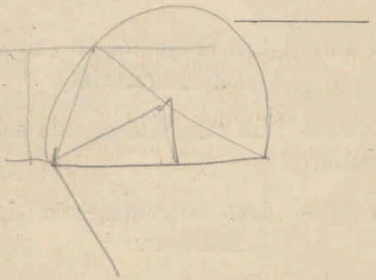


Fig. 132

Construcción. —

Consideramos una recta y sobre ella un punto A, a partir del cual construímos $AB = a$. En A y sobre m construímos α y luego trazamos el arco capaz de este ángulo. (Nº 139). En un punto cualquiera de m trazamos $s \perp m$. Sobre s y a partir de E construímos $EF = h$. Por F trasamos $n \parallel m$ que determina el punto D. Unimos D A y con B y se tiene el triángulo pedido ABD.





CAPITULO XII

PROGRAMA XII. — **Construcción de tangentes.** — Tangentes trazadas a una circunferencia por un punto exterior. Su construcción. Propiedades.

Construcción de las tangentes exteriores e interiores comunes a dos circunferencias.

Construcción de tangentes

142. Si dada una circunferencia, se nos pide construir desde un punto las tangentes a la misma, se presentan tres posibilidades (Fig. 133):

a) Que el punto sea interior.	Las tangentes no existen. (Son imaginarias).
b) Que el punto pertenezca a la circunferencia.	La tangente es una sola.
c) Que el punto sea exterior.	Las tangentes son dos y distintas.

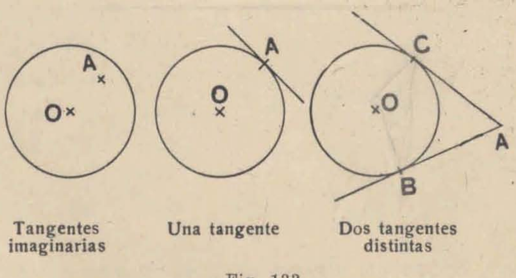


Fig. 133

Construcción de tangentes

143. Problema I. — *Por el punto A de la circunferencia de centro O* (Figura 134), *construir las tangentes a la misma.*

Construcción. — Unimos A con O y en el extremo A de este radio, trazamos $t \perp AO$.

Comprobación. — La recta t así obtenida es la tangente buscada, puesto que la perpendicular al radio, en su extremo es tangente a la circunferencia.

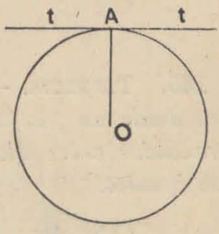


Fig. 134

144. Problema II. — *Por el punto A, exterior a la circunferencia de centro O* (Fig. 135), *trazar las tangentes a la misma.*

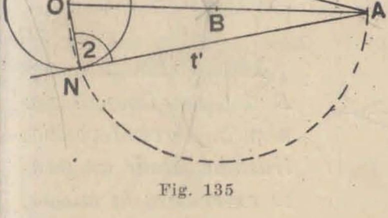


Fig. 135

Construcción. — Trazamos el segmento de recta OA y determinamos su punto medio B. Con centro en B y radio AB trazamos una circunferencia que determina con la dada los puntos M y N. Las rectas que pasan por AM y por AN son las tangentes buscadas.

Comprobación. — Basta unir M y N con O. Los ángulos 1 y 2 son rectos por ángulos inscriptos que abarcan media circunferencia. Por lo tanto:

$$MO \perp MA$$
$$NO \perp NA$$

Es decir, que t y t' son las tangentes buscadas.

Propiedades

145. Teorema. — *Los segmentos de tangentes trazados desde un punto exterior a una circunferencia, comprendidos entre dicho punto y los puntos de tangencia son iguales.*

$$\text{H}\begin{cases}\text{Cif. } O.\\ AB \text{ y } AC \text{ tg. a Cif. } O.\\ \text{Fig. } 136.\end{cases} \quad \text{T}\begin{cases} AB = AC\end{cases}$$

Demostración. — Unimos O con A, con B y con C. Se tiene:

$$\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{ACO}\begin{cases} OA = OA \\ BO = CO \text{ por radios} \\ \widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^{\circ} \text{ por hip.}\end{cases}$$

$$\therefore \quad AB = AC$$

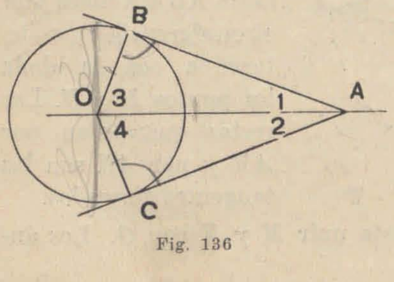


Fig. 136

146. Teorema. — *Dadas las tangentes a una circunferencia, trazadas desde un punto exterior a la misma, el segmento de recta* *comprendido entre el punto exterior y el centro de la circunferencia es bisectriz del ángulo que forman las tangentes y del determinado por los radios perpendiculares a las tangentes dadas.*

$$\text{H}\begin{cases}\text{Cif. } O.\\ A \text{ exterior (Fig. 136)}\\ AB \text{ y } AC \text{ tg. a Cif. } O.\end{cases}\qquad \text{T}\begin{cases}\widehat{1}=\widehat{2}\\ \widehat{3}=\widehat{4}\end{cases}$$

Demostración. — Se tiene que:

$$\overset{\triangle}{ABO}=\overset{\triangle}{ACO}\begin{cases}OA=OA\\ BO=CO \text{ por radios}\\ AB=AC \text{ teor. ant.}\end{cases}$$

$$\therefore \qquad \widehat{1}=\widehat{2} \text{ y } \widehat{3}=\widehat{4}$$

Construcción de las tangentes comunes a dos circunferencias

Dadas dos circunferencias, se nos pide construir las tangentes comunes, sean *exteriores* o *interiores.*

147. Problema I. — *Construir las tangentes exteriores res comunes a dos circunferencias.* — Esta construcción es posible cuando desde el centro de la circunferencia menor se pueden trazar tangentes a la mayor, es decir, cuando O' es exterior a Cif. O.

Construcción. — En el centro de la circunferencia mayor trazamos otra circunferencia de radio $r'' = r - r'$, (Fig. 137). Aplicando la construcción del número (144), trazamos $O'A$ y $O'B$ tangentes a la circunferencia de radio r''. Unimos O con A y prolongamos el segmento hasta cortar a la circunferencia de radio r en C. Unimos O con B y prolongamos el segmento hasta cortar a la circunferencia de radio r en D. Por C trazamos $CE \parallel AO'$ y por D, $DF \parallel BO'$. De este modo se obtiene:

CE y DF tangentes comunes exteriores a ambas circunferencias.

Comprobación. — Por ser AO' tangente a la circunferencia de radio r'' se tiene que $AO' \perp AO$ y por lo tanto CE, paralela a AO', debe ser perpendicular a OC

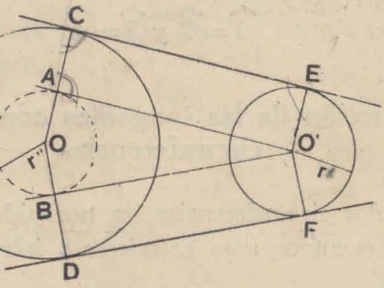


Fig. 137

en el punto C. Con esto queda probado que CE es tangente a la circunferencia de radio r. Hay que probar que también lo es a la de radio r'. En efecto, uniendo E con O', se forma un cuadrilátero $CAO'E$ que tiene los lados $CA = EO'$ y $CE \parallel AO'$ y, por lo tanto, la figura es un paralelogramo. Como $\widehat{ACE} = \widehat{CAO'} = 90^o$, se tiene que $\widehat{CEO'} = 90^o$. Luego CE es tangente a ambas circunferencias.

Análogamente se demostraría que DF es la otra tangente exterior común a ambas circunferencias.

148. Problema II. — *Construir las tangentes interiores comunes a dos circunferencias.* — Esta construcción es posible cuando las circunferencias son exteriores.

Construcción. — En el centro de la circunferencia mayor trazamos otra circunferencia de radio $r'' = r + r'$, (Fig. 138). Aplicando la construcción del número (144) trazamos $O'A$ y $O'B$ tangentes a la circunferencia de radio r''. Unimos O con A y con B y se tienen así los puntos C y D. Por C trazamos $CE \parallel AO'$ y por D, $DF \parallel BO'$, y se tienen las tangentes buscadas CE y DF.

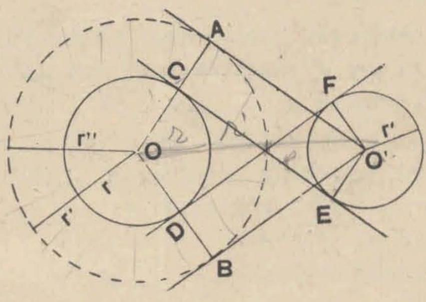


Fig. 138

Comprobación. — Vamos a probar que CE es tangente interior común a ambas circunferencias.

CE es tangente a la circunferencia de radio r, pues $CE \perp OC$ por ser paralela a $AO' \perp AO$. Hay que probar que también lo es a la de radio r'. En efecto, uniendo E con O' se forma un cuadrilátero $CAO'E$ que tiene los lados $CA = O'E$ y $CE \parallel AO'$ y, por lo tanto, la figura es un paralelogramo. Como $\widehat{ACE} = \widehat{CAO} = 90^{\circ}$, se tiene que $\widehat{CEO'} = 90^{\circ}$. Luego CE es tangente a ambas circunferencias.

De igual manera se prueba que DF es la otra tangente.

CAPITULO XIII

PROGRAMA XIII. — **Triángulos y cuadriláteros inscriptos y circunscriptos.** — Todo triángulo es inscriptible en una circunferencia. Todo triángulo es circunscriptible a una circunferencia.

Propiedad de los ángulos de un cuadrilátero inscriptible.

Propiedad de los lados de los cuadriláteros circunscriptibles.

Construcción de triángulos en los que intervenga el radio de la circunferencia inscripta o el de la circunscripta.

Triángulos y cuadriláteros inscriptos y circunscriptos

149. Triángulos y cuadriláteros inscriptos y circunscriptos. — Sea una circunferencia de centro O y sobre ella los puntos A, B, C y D. Si trazamos AB, BC, CD, DA, resulta un cuadrilátero cuyos vértices son puntos de la circunferencia. Todos los cuadriláteros, tales como el $ABCD$... se llaman *inscriptos.* Si por los puntos A, B, C y D, trazamos tangentes a la circunferencia, se forma otro cuadrilátero cuyos lados son todos tangentes a la Cif. O. Todos los cuadriláteros, tales como el $EFGH$ se llaman *circunscriptos.* (Figura 139).

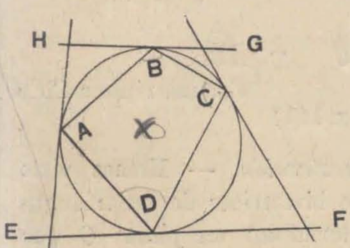


Fig. 139

150. Teorema. — *Todo triángulo es inscriptible en una circunferencia.*

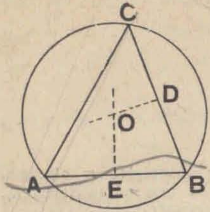


Fig. 140

H $\left\{ \overset{\triangle}{ABC} \right.$ (Fig. 140).

T $\left\{ \overset{\triangle}{ABC} \right.$ inscripto en Cif O.

Demostración. — Hemos visto que tres puntos del plano que no pertenecen a una recta determinan una circunferencia y sólo una. Por los tres vértices de un triángulo pasa, por lo tanto, una circunferencia en la cual aquél queda inscripto.

En la figura se ha tomado:

$$\left. \begin{array}{lll} AE = EB & ; & OE \perp AB \\ BD = DC & ; & OD \perp BC \end{array} \right\} \therefore \quad O \text{ centro de la circunferencia}$$

151. Teorema. — *Todo triángulo es circunscriptible a una circunferencia.*

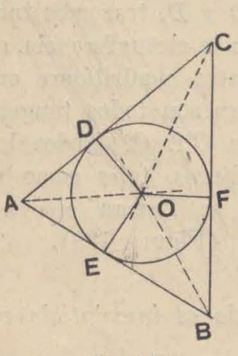


Fig. 141

H $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC} \\ \text{(Fig. 141)} \end{array} \right.$ T $\left\{ \begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC} \\ \text{circunscripto a Cif. } O. \end{array} \right.$

Demostración. — Hemos visto que las bisectrices de un triángulos determinan un punto O que equidista de los tres lados del triángulo. Esto es que

$$OD = OE = OF$$

Por lo tanto, la circunferencia trazada con centro en O y radio $r = OD$, resulta inscripta en el triángulo, o lo que es lo mismo, éste es *circunscripto* a la circunferencia.

Propiedad de los ángulos de un cuadrilátero inscriptible

152. Teorema. — *En todo cuadrilátero inscripto los ángulos opuestos son suplementarios.*

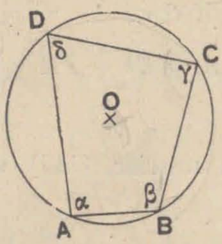


Fig. 142

$$H \begin{cases} \text{Cif.} O. \\ ABCD \text{ inscripto} \\ \text{Fig. } 142. \end{cases}$$

$$T \begin{cases} \alpha + \gamma = 180^\circ \\ \beta + \delta = 180^\circ \end{cases}$$

Demostración. — Los ángulos α y γ por ser inscriptos son iguales a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco. Como α y γ abarcan la circunferencia, pues $BCD + DAB = 360^\circ$, se tiene

$$\alpha + \gamma = 180^\circ$$

Para $\beta + \delta$, una demostración análoga nos conduce a:

$$\beta + \delta = 180^\circ$$

Propiedad de los lados de los cuadriláteros circunscriptibles

153. Teorema. — *En todo cuadrilátero circunscripto, las sumas de los lados opuestos son iguales.*

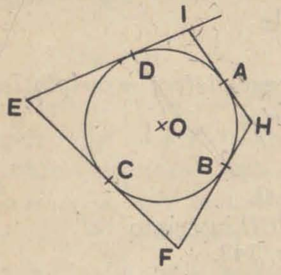


Fig. 143

H: Cif. O, Fig. 143.
$EFHI$, pol. circunscripto,
EI tangente a Cif. O en D,
EF tg. Cif. O en C,
FH tg. Cif. O en B,
HI tg. Cif O en A.

T: $EF + IH = EI + FH$

Demostración. — Por un teorema anterior, (145), se tiene:

$$EC = ED$$
$$CF = FB$$
$$IA = DI$$
$$AH = BH$$

Sumando ordenadamente (prop. uniforme de la suma), se tiene:

$$EC + CF + IA + AH = ED + FB + DI + BH$$

y por las propiedades asociativa y conmutativa de la suma:

$$(EC + CF) + (IA + AH) = (ED + DI) + (FB + BH)$$

o bien: $EF + IH = EI + FH$.

Construcción de triángulos en los que intervenga el radio de la circunferencia inscripta o el de la circunscripta

154. Notación. — Designaremos con r el radio de la circunferencia circunscripta y con ρ el de la circunferencia inscripta.

155. PROBLEMA I. — *Construir un triángulo conociendo* r, a, b. (Fig. 144).

Construcción. — Con centro O y radio r trazamos una circunferencia. Apoyando el compás en un punto B de ella y con abertura igual a a determinamos el punto C. Unimos B con C y con centro en C y abertura igual a b determinamos sobre la circunferencia el punto A. Uniendo B con A y C con A, se tiene el triángulo pedido ABC. Si en lugar de determinar A desde C, lo determinamos desde B, se tiene otro triángulo $BC'C$, que también resuelve el problema.

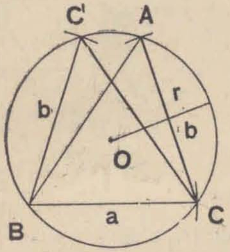


Fig. 144

156. PROBLEMA II. — *Construir un triángulo conociendo* a, ρ, β. (Fig. 145).

Construcción. — Consideremos una recta m y sobre ella un punto B, a partir del cual construímos $BC = a$.

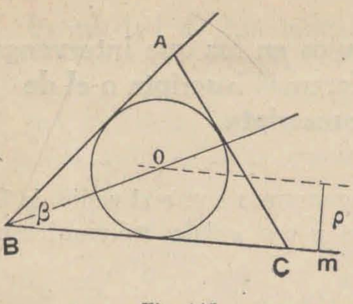
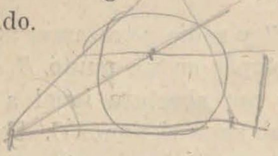


Fig. 145

En B y sobre BC construímos el ángulo β. Construímos la bisectriz de este ángulo y el punto determinado por ésta y la paralela a m trazada a la distancia ρ es el centro de la circunferencia inscripta, que trazamos. Construímos la tangente desde C y se tiene el triángulo ABC pedido.



CAPITULO XIV

PROGRAMA XIV. — **Medida de los ángulos.** — La razón de dos ángulos centrales es igual a la de los arcos correspondientes. La medida de un ángulo central es igual a la del arco correspondiente tomando como unidad el arco que abarca la unidad de ángulo. Transportador. Medida del ángulo inscripto.

157. TEOREMA. — *En el mismo círculo o en círculos iguales, la razón de dos ángulos centrales es igual a la de los arcos correspondientes.*

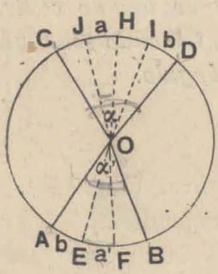


Fig. 146

$$H\begin{cases}\text{Cif. } O.\\ \alpha \text{ y } \alpha' \text{ ángulos centrales}\\ a \text{ y } a' \text{ arcos correspondientes.}\\ \text{(Fig. 146).}\end{cases}$$

$$T\left\{\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{a}{a'}\right.$$

Demostración. — Tomemos un arco b que esté contenido un número exacto de veces en el arco a (4 veces, por ej.) y en el arco a' (3 veces, por ej.). Podemos escribir:

$$a = 4b$$
$$a' = 3b$$

Y por la propiedad uniforme de la división:

$$\frac{a}{a'} = \frac{4b}{3b} \quad \therefore \quad \frac{a}{a'} = \frac{4}{3} \qquad (1)$$

Uniendo O con E, F, J, H e I, los ángulos α y α' quedan divididos en 4 y 3 ángulos respectivamente iguales, que llamaremos β. Podemos escribir:

$$\alpha = 4\beta$$
$$\alpha' = 3\beta$$

Y por la propiedad uniforme de la división:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{4\beta}{3\beta} \therefore \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{4}{3} \qquad (2)$$

De (1) y (2), se tiene: $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\alpha}{\alpha'}$

158. Teorema. — *La medida de un ángulo central es igual a la del arco correspondiente, tomando como unidad el arco que abarca la unidad de ángulo.*

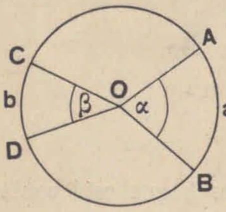


Fig. 147

$$\text{H}\begin{cases} \alpha \text{ ángulo central, (Fig. 147).} \\ a \text{ arco correspondiente,} \\ \beta = \text{unidad de ángulos,} \\ b = \text{unidad de arcos.} \end{cases}$$

T$\{$ Med. de α resp. a β = Med. de a resp. a b.

Demostración. — Aplicando el teorema anterior, podemos escribir:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$$

En el primer miembro tenemos la medida del ángulo α con relación a β, unidad de ángulos, y en el segundo tenemos la medida del arco a con relación a b, unidad de arcos.

Pero la razón del primer miembro es la medida de α, respecto a β, y la razón del segundo miembro es la razón de a respecto a b, y como las razones son iguales, se tiene:

$$\text{Med. de } \alpha \text{ resp. a } \beta = \text{Med. de } a \text{ resp. a } b.$$

Medida del ángulo inscripto

159. Teorema. — *Todo ángulo inscripto en una circunferencia tiene por medida la mitad de la medida del arco comprendido por sus lados.*

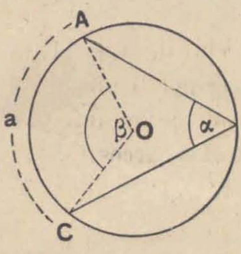


Fig. 148

$$\text{H}\begin{cases}\text{Cif. } O\text{, Fig. 148,}\\ \alpha \text{ ángulo inscripto.}\end{cases}$$

$$\text{T}\left\{\text{Medida de } \widehat{\alpha} = \frac{1}{2} \text{ medida de } a.\right.$$

Demostración. — Unimos O con A y C y se forma el ángulo central β cuyos lados comprenden el mismo arco que el ángulo α. de manera que:

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\beta$$

y entonces:

$$\text{Med. de } \alpha = \frac{1}{2} \text{ med de } \beta \qquad (1)$$

pero (158) se tiene que:

$$\text{Med. de } \beta = \text{Med. de } \alpha \qquad (1)$$

y sustituyendo este valor en (1), resulta:

$$\text{Med. de } \alpha = \frac{1}{2} \text{ med. de } \alpha.$$

CAPITULO XV

PROGRAMA XV. — **Polígonos equivalentes.** — Suma de polígonos. Definición. Polígonos equivalentes: Su definición como sumas de polígonos ordenadamente iguales. Ejemplos: Caracteres idéntico, recíproco y transitivo.

Equivalencia de dos paralelogramos de igual base y altura: distintos casos. Postulado de equivalencia: Si un polígono es suma de varios otros la figura que se obtiene prescindiendo de uno de ellos y sumando los restantes no es equivalente a la primera. Si dos paralelogramos equivalentes tienen igual altura tienen también igual base, y viceversa. Dos cuadrados equivalentes son iguales.

Un triángulo es equivalente a un paralelogramo de igual altura y base igual a la mitad de la del triángulo. Los triángulos de igual base y altura son equivalentes.

Un trapecio es equivalente a un triángulo de igual altura y base igual a la suma de las del trapecio.

Demostración del teorema de Pitágoras por equivalencias.

Transformar un polígono en otro equivalente que tenga un lado menos. Transformar un polígono en un triángulo equivalente. Transformar un rectángulo en cuadrado equivalente.

Polígonos equivalentes

160. Suma de polígonos. — Sean los polígonos *ABCDE*, *FGHI* y *JKLMNR*, que no tienen ningún punto interno común. (Fig. 149).

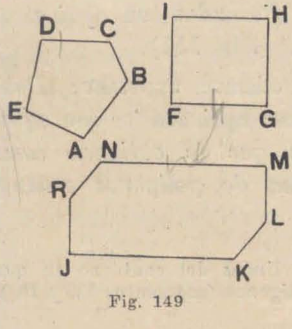


Fig. 149

Dispongamos el *ABCDE* de modo que el lado *DC* se aplique a uno de los lados del *JKLMNR*, de modo que *FG* coincida con el lado *MN*. De este modo hemos formado el nuevo polígono de la fig. 150, que tiene todos y únicamente los pun-

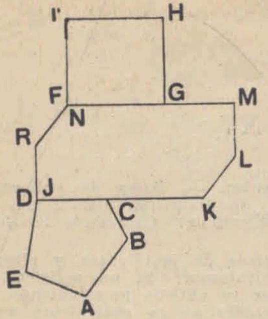


Fig. 150

tos de los tres polígonos dados. El polígono así obtenido es el *polígono suma* de los propuestos. (Fig. 150).

161. Suma de polígonos. — *La suma de varios polígonos que no tienen ningún punto interno común es otro polígono que está formado únicamente por todos los puntos de los polígonos sumandos* (1).

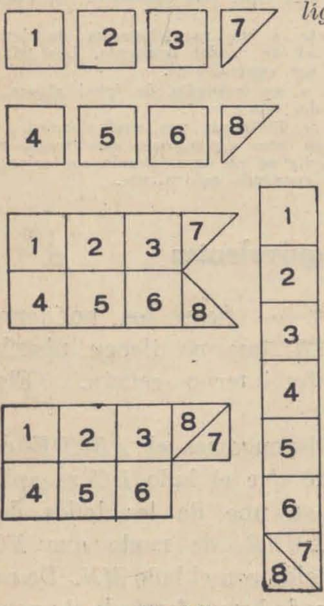


Fig. 151

162. Polígonos equivalentes. — Tengamos los cuadrados 1, 2, 3, 4, 5 y 6 y los triángulos 7 y 8. Se nos pide efectuar su suma y la podemos hacer de distintas maneras *acomodando* los polígonos sumandos en diverso orden, como lo indican las figuras. Todos los polígonos así formados son *equivalentes.* (Fig. 151).

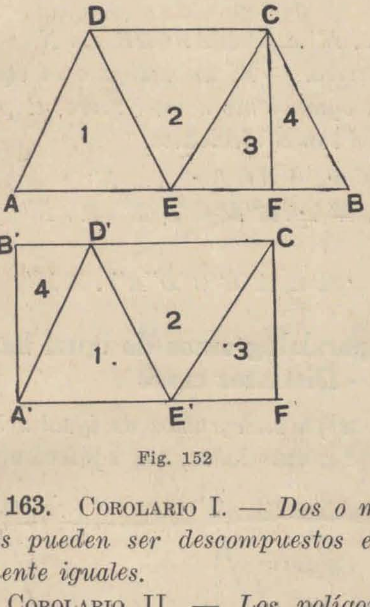
Podemos expresar: *Polígonos equivalentes son aquellos que se obtienen como suma de polígonos ordena-*

(1) En la suma se pierden las líneas del contorno en que hay coincidencia de puntos de dos polígonos (segmentos *FG* y *DC*).

damente iguales y que no tienen ningún punto interno común.

Para indicar la equivalencia se emplea el signo: $\doteq$

Ejemplos:



$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AED} = \overset{\triangle}{A'E'D'} \\ \overset{\triangle}{DEC} = \overset{\triangle}{D'E'C'} \\ \overset{\triangle}{CEF} = \overset{\triangle}{C'E'F'} \\ \overset{\triangle}{CFB} = \overset{\triangle}{A'D'B'} \end{array}\right.$$

Se tiene:

$$ABCD \doteq A'F'C'B'$$

Fig. 152

163. Corolario I. — *Dos o más polígonos equivalentes pueden ser descompuestos en triángulos ordenadamente iguales.*

Corolario II. — *Los polígonos suma de polígonos equivalentes son equivalentes.*

Caracteres de la equivalencia

164. Son éstos:

I. Carácter idéntico. — *Todo polígono es equivalente a sí mismo.*

$$\text{Pol. } ABCDE \ldots N \doteq \text{Pol. } ABCDE \ldots N$$

II. Carácter recíproco. — *Si un polígono es equivalente a otro, éste lo es con aquél.*
se tiene que:

Si Pol. $ABCDE \ldots N \doteq$ Pol. $A'B'C'D'E' \ldots N'$
se tiene que:

$$\text{Pol. } A'B'C'D'E' \ldots N' \doteq \text{Pol. } ABCDE \ldots N$$

III. Carácter transitivo. — *Si un polígono es equivalente a otro y éste es equivalente a un tercero, el primero y el último también son equivalentes.*

Si Pol. $ABCDE \ldots N \doteq A'B'C'D'E' \ldots N'$
Pol. $A'B'C'D'E' \ldots N' \doteq A''B''C''D''E'' \ldots N''$
Se tiene:

$$\text{Pol. } ABCDE \ldots N \doteq \text{Pol. } A''B''C''D''E'' \ldots N''$$

Equivalencia de los paralelogramos de igual base y altura. - Distintos casos

165. Teorema. — *Dos paralelogramos de iguales base y alturas con respecto a esos lados, son equivalentes.*

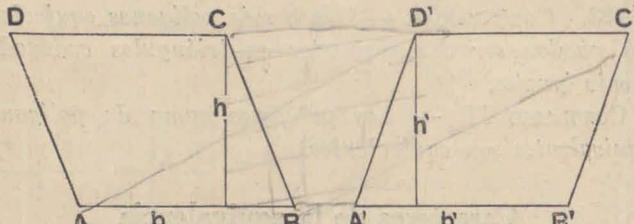


Fig. 153

H $\begin{cases} \text{Paralelogramos} \\ ABCD \text{ y } A'B'C'D' \\ h = h' \\ b = b' \quad \text{(Fig. 153)} \end{cases}$ T $\left\{ \square ABCD \doteq \square A'B'C'D' \right.$

Sobre la base AB construyamos un paralelogramo $ABC'D'$ igual al $A'B'C'D'$. Como $h = h'$, el lado $D'C'$ coincidirá con la recta que contiene a DC, presentándose las siguientes posibilidades:

I. Que $D'C'$ tenga más de un punto común con DC;

II. Que $D'C'$ tenga un solo punto común con DC;

III. Que $D'C'$ no tenga ningún punto común con DC.

I. *Posibilidad.* — En este caso (fig. 154), se tiene que:

$$\overset{\triangle}{DAD'} = \overset{\triangle}{CBC'} \begin{cases} DA = CB & \text{por lados op. paralelogramo} \\ D'A = C'B & \text{por lados op. paralelogramo} \\ DD' = CC' & \text{por ser ambos iguales a} \\ & CD - CD'. \end{cases}$$

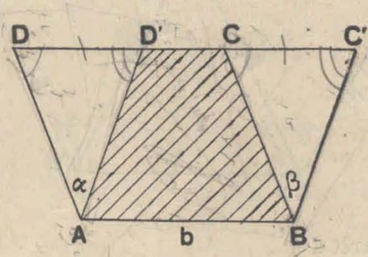


Fig. 154

Por otra parte:

$$\overset{\square}{ABCD} = ABCD' + \overset{\triangle}{DAD'}$$

$$\overset{\square}{ABC'D'} = ABCD' + \overset{\triangle}{CBC'}$$

y como los triángulos DAD' y CBC' son iguales, por (162) es:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{ABC'D'}$$

pero $ABC'D'$ es igual a $A'B'C'D'$ por ~~continuación~~ construcción, luego:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{A'B'C'D'}$$

II. *Posibilidad.* — En este caso (fig. 155), se tiene:

$$\overset{\triangle}{DAC} = \overset{\triangle}{D'BC'} \left\{ \begin{array}{ll} CA = C'B' & \text{por lados op. paralelogramo} \\ DA = D'B & \text{por lados op. paralelogramo} \\ DC = D'C' & \text{por ser respectivamente iguales a AB.} \end{array} \right.$$

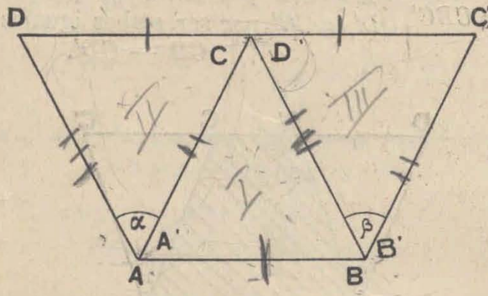


Fig. 155

Por otra parte:

$$\overset{\square}{ABCD} = \overset{\triangle}{ABC} + \overset{\triangle}{DAC}$$

$$\overset{\square}{ABC'D'} = \overset{\triangle}{ABC} + \overset{\triangle}{D'BC'}$$

y como los triángulos DAC y $D'BC'$ son iguales, por (162) es:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{A'BC'D'}$$

pero $ABC'D'$ es igual a $A'B'C'D'$ por construcción, luego:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{A'B'C'D'}$$

III. *Posibilidad.* — Unimos (Fig. 156), A con C y por B trazamos:

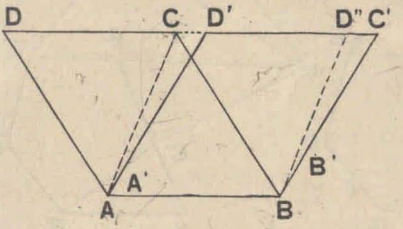


Fig. 156

$$BD'' \parallel AC$$

Se forma de este modo el paralelogramo $ABD''C$ y por II caso:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{ABD''C} \quad (1)$$

Y también por el I caso:

$$\overset{\square}{ABD''C} \doteq ABC'D' \qquad (2)$$

pero por construcción, $ABC'D'$ y $A'B'C'D'$ son iguales. luego:

$$\overset{\square}{ABC'D'} \doteq \overset{\square}{A'B'C'D'} \qquad (3)$$

De (1), (2) y (3), por el carácter transitivo, tenemos:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{A'B'C'D'}$$

166. Postulado de la equivalencia (1). — *Si un polígono es suma de varios otros polígonos la figura que se obtiene prescindiendo de uno de ellos y sumando los restantes no es equivalente a la dada.* (Fig. 157).

---

(1) Formulado por De Zolt.

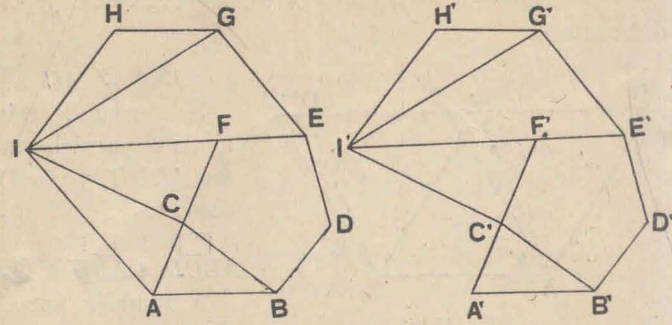


Fig. 157

167. Teorema. — *Si dos paralelogramos equivalentes tienen igual altura tienen también igual base.*

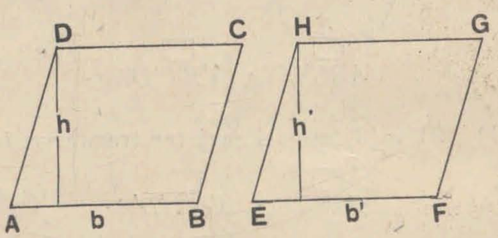


Fig. 158

$$\text{H}\begin{cases} \square ABCD \doteq \square EFGH \\ h = h' \text{ (Fig. 158)} \end{cases} \qquad \text{T}\begin{cases} b = b' \end{cases}$$

Demostración. — Si los segmentos b y b' no fuesen iguales, serían: 1º) $b > b'$, o 2º) $b < b'$.

Supongamos que fuese $b > b'$. Entonces (Fig. 159) sobre AB construímos $AI = b'$ y trazamos:

$$JI \,/\!/\, AD$$

Se forma el paralelogramo *AIJD* que es, por (165):

$$\overset{\square}{AIJD} \doteq \overset{\square}{EFGH}$$

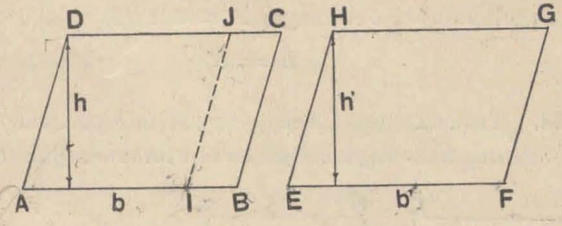


Fig. 159

Pero esto es un absurdo, pues *EFGH* no puede ser simultáneamente equivalente al *ABCD* (por hipótesis) y a una parte del mismo *AIJD*.

Por lo tanto: $b \not> b'$

Supongamos que fuese $b < b'$. Efectuaríamos la demostración análoga construyendo b sobre b'. (Fig. 160). y tendríamos que:

$$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{EIJH}$$

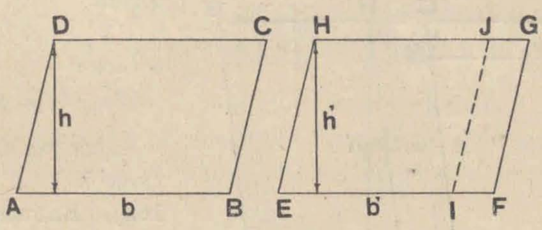


Fig. 160

lo que es imposible, pues, es $\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{EFGH}$ por hipótesis y no puede serlo con un paralelogramo que es parte del mismo.

Por lo tanto: $b \not< b'$

No pudiendo ser b ni mayor ni menor que b', deberá ser:

$$b = b'$$

168. Teorema (recíproco). — *Si dos paralelogramos equivalentes tienen igual base tienen también igual altura.*

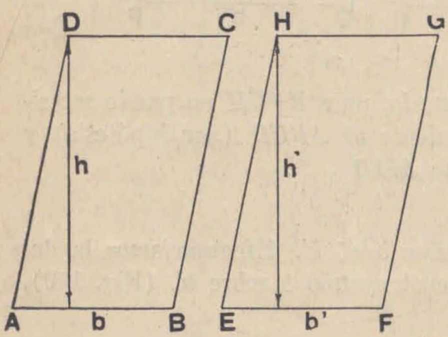


Fig. 161

H $\begin{cases} \square ABCD \doteq \square EFGH \\ b = b' \text{ (Fig. 161).} \end{cases}$

T $\{ h = h'$

Demostración. — Si las alturas h y h' no fuesen iguales, serían:

1º) $h > h'$,

o bien:

2º) $h < h'$

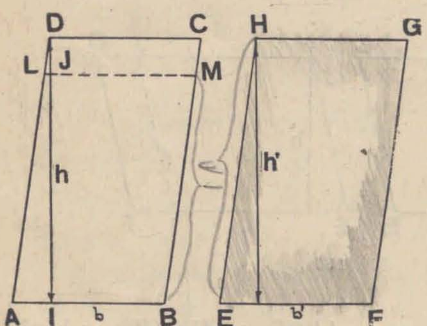


Fig. 162

Supongamos que fuese $h > h'$ (Fig. 162). Entonces sobre h construimos $h' = IJ$ y trazamos por J, $LM \parallel AB$.

Se debe tener que:

$$\overset{\square}{EFGH} \doteq \overset{\square}{ABML}$$

por tener respectivamente iguales las bases y las alturas correspondientes a dichas bases.

Esta equivalencia es imposible, pues es $\overset{\square}{EFGH} \doteq \overset{\square}{ABCD}$ por hipótesis, y no puede ser equivalente simultáneamente con $ABML$ que es un paralelogramo parte de aquél.

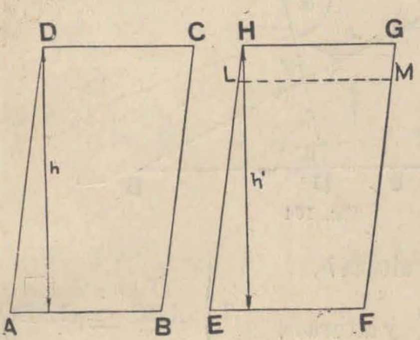


Fig. 163

Por lo tanto

$$h \not> h'$$

Supongamos que fuese $h < h'$ (Fig. 163). Sobre h' construímos h y trazamos $LM \parallel EF$.

Se debe tener:

$\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{EFML}$ por tener respectivamente iguales las bases y las alturas correspondientes a dichas bases.

Esta equivalencia es imposible, pues es $\overset{\square}{ABCD} \doteq \overset{\square}{EFGH}$ por hipótesis, y no puede ser equivalente simultáneamente con $ABML$ que es un paralelogramo parte de aquél.

Por lo tanto: $\qquad h \not< h'$

No pudiendo ser h ni mayor ni menor que h', deberá ser:

$$h = h'$$

169. Corolario. — *Los cuadrados equivalentes son iguales.*

En efecto, tienen respectivamente igual las bases y las alturas.

170. Teorema. — *Todo triángulo es equivalente a un paralelogramo de igual altura y de base igual a la mitad de la del triángulo.*

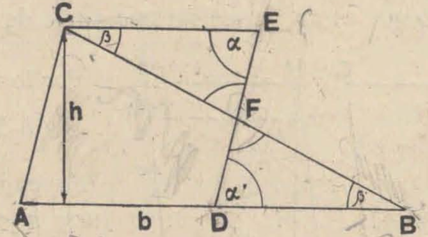


Fig. 164

H $\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC} \text{ de base } b \text{ y altura } h, \\ \overset{\square}{ADEC} \text{ de base } \frac{b}{2} \text{ y altura } h, \\ \text{(Fig. 164).} \end{cases}$

T $\left\{ \overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\square}{\cancel{ABEC}} \right.$ ADEC

Demostración. — Se tiene:

$$\overset{\triangle}{CEF} = \overset{\triangle}{DFB} \begin{cases} \hat{\alpha} = \hat{\alpha}' \text{ alter. inter. entre } CE \,/\!/\, DB \\ \hat{\beta} = \hat{\beta}' \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad CE \,/\!/\, DB \\ CE = DB \text{ por ser ambos segmentos iguales a } AD. \end{cases}$$

Pero: $\overset{\triangle}{ABC} \doteq ADFC + \overset{\triangle}{DFB}$

y $\overset{\square}{ADEC} \doteq ADFC + \overset{\triangle}{CEF}.$

Por definición de polígonos equivalentes:

$$\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\square}{ADEC}.$$

171. Teorema. — *Los triángulos de igual base y altura son equivalentes.*

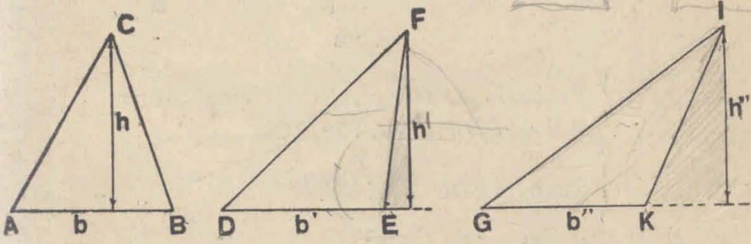


Fig. 165

$$\text{H}\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC},\ \overset{\triangle}{DEF} \text{ y } \overset{\triangle}{GKI} \\ h = h' = h'' \\ b = b' = b'' \text{ (Fig. 165)} \end{cases} \qquad \text{T}\left\{ \overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\triangle}{DEF} \doteq \overset{\triangle}{GKI} \right.$$

Demostración. — Cada triángulo es equivalente a un paralelogramo de igual altura y de base mitad de la del triángulo. Y todos esos paralelogramos son equivalentes.

Luego, también:

$$\overset{\triangle}{ABC} \doteq \overset{\triangle}{DEF} \doteq \overset{\triangle}{GKI}$$

172. Teorema. — *Un trapecio es equivalente a un triángulo de igual altura y base igual a la suma de las bases del trapecio.*

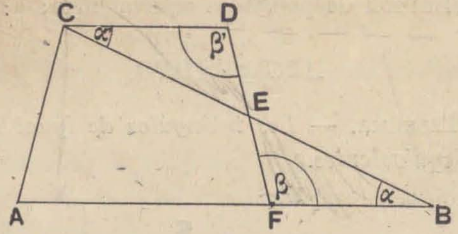


Fig. 166

H $\begin{cases} \text{Trapecio } AFDC \text{ y } \overset{\triangle}{ABC} \text{ de igual altura} \\ AF + CD = AB, \text{ Fig. 166.} \end{cases}$

T $\begin{cases} \text{Trap. } AFDC \doteq \overset{\triangle}{ABC}. \end{cases}$

Demostración — Se tiene:

$$\overset{\triangle}{CDE} = \overset{\triangle}{EFB} \begin{cases} \alpha = \alpha' \text{ por alter. inter. entre } CD \;/\!/\; FB \\ \beta = \beta' \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad \text{CD} \;/\!/\; \text{FB} \\ CD = FB, \text{ por hipótesis.} \end{cases}$$

Pero: $\qquad AFDC \doteq AFEC + \overset{\triangle}{CED}$

y $\qquad \overset{\triangle}{ABC} \doteq AFEC + \overset{\triangle}{EFB}$

Por definición de polígonos equivalentes:

$$\text{Trap. } AFDC \doteq \overset{\triangle}{ABC}$$

Demostración del teorema de Pitágoras por equivalencias

173. TEOREMA. — *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.*

$$\text{H}\left\{\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC}\text{, rectángulo, Fig. 167,} \\ ABED = \text{cuad. de la hipotenusa,} \\ BHNC = \quad\text{,,}\quad \text{del cateto } BC\text{,} \\ ACJF = \quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad AC. \end{array}\right.$$

$$\text{T}\left\{\ \overset{\square}{ABED} \doteq \overset{\square}{BHNC} + \overset{\square}{ACJF}\right.$$

Demostración. — Construímos $CM \perp DE$ y unimos C con D. Se tiene que $\overset{\triangle}{ADC} \doteq \frac{1}{2}\, ADML$ por tener la misma base AD y la misma altura AL.

Unimos F con B y se tiene:

$$\overset{\triangle}{ADC} = \overset{\triangle}{AFB}\left\{\begin{array}{l} AF = AC \text{ lados de un cuadrado} \\ AB = AD \text{ lados de un cuadrado} \\ \widehat{1} = \widehat{2} = 90^{\circ} + a. \end{array}\right.$$

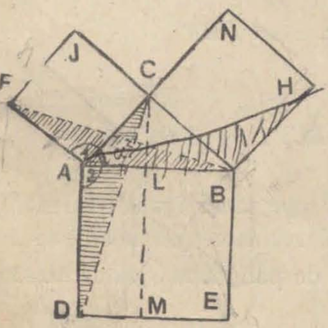


Fig. 167

Por lo tanto:

(1) $\overset{\triangle}{AFB} \doteq \frac{1}{2}\, ADML$

Y también:

(2) $\overset{\triangle}{AFB} \doteq \frac{1}{2}\, ACJF$

por tener la misma base FA y la misma altura CA.

Luego de (1) y (2):

$$\overset{\square}{ADML} \doteq ACJF \qquad (3)$$

y del mismo modo se demuestra que: $\overset{\square}{MEBL} \doteq BHNC$ (4)
y finalmente, sumando (3) y (4):

$$ABED \doteq BHNC + ACJF$$

Transformar un polígono en otro equivalente que tenga un lado menos

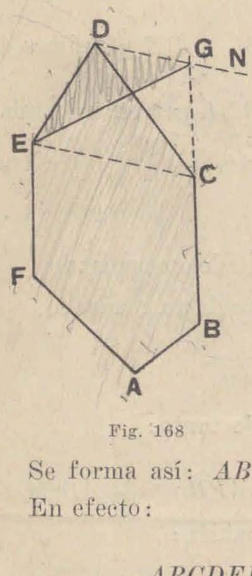


Fig. 168

174. Problema. — Sea el polígono $ABCDEF$ (exágono) (Fig. 168), que se desea transformar en otro equivalente de un lado menos (pentágono). Construímos el segmento EC determinado por dos vértices no consecutivos. Por el vértice D trazamos

$$DN \parallel EC.$$

Prolongamos el lado BC hasta cortar a DN en G y trazamos FG.

Se forma así: $ABGEF \doteq ABCDEF$
En efecto:

$$ABCDEF = ABCEF + \overset{\triangle}{EDC}.$$

Pero como $\overset{\triangle}{ECG} \doteq \overset{\triangle}{EDC}$ por tener igual base EC y la misma altura (perpendiculares entre paralelas), se tiene, conforme a la definición de polígonos equivalentes:

$$ABGEF \doteq ABCDEF.$$

Transformar un polígono en un triángulo

175. Problema. — Para transformar un polígono en un triángulo equivalente, se procede a transformar el polígono dado en otro de un lado menos (problema anterior). El polígono así obtenido se transforma en otro

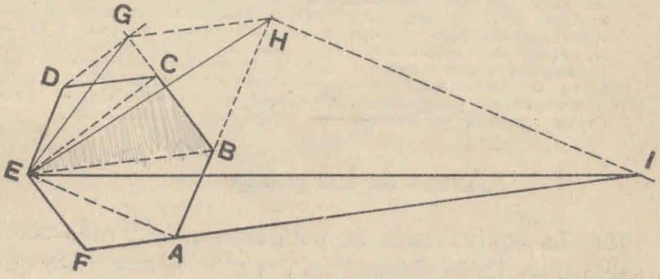


Fig. 169

equivalente de un lado menos (problema anterior) y así sucesivamente hasta llegar al triángulo. En la figura 169 puede verse cómo se ha pasado del exágono al pentágono, de éste al cuadrilátero y de éste al triángulo.

CAPITULO XVI

PROGRAMA XVI. — **Areas de los Polígonos.** — La equivalencia de polígonos considerada como igualdad. Lo que tiene igual un polígono con todos los que son equivalentes a él se llama superficie de dicho polígono. El área es la medida de la superficie. La razón de las superficies de dos rectángulos de igual base es igual a la de las alturas correspondientes. La razón de las superficies de dos rectángulos de igual altura es igual a la de las bases correspondientes. La razón de las superficies de dos rectángulos cualesquiera es igual a la de los productos de sus bases por sus alturas. Area del rectángulo. Area del cuadrado. Area de un paralelogramo. — Area de un triángulo. — Area de un trapecio. — Area de un polígono. — Aplicaciones.

Areas de los polígonos

176. La equivalencia de polígonos considerada como igualdad. — En la Geometría 1ª parte, hemos visto que los caracteres formales de la igualdad de dos *entes* cualesquiera son: 1º carácter idéntico; 2º carácter recíproco y 3º carácter transitivo.

En las equivalencias de polígonos que acabamos de estudiar, vemos que las *relaciones* cumplen dichos caracteres formales y por lo tanto puede afirmarse que tienen *algo* igual. Por lo tanto diremos:

SUPERFICIE. — *Lo que tiene de igual un polígono con todos los que le son equivalentes a él, se llama superficie de dicho polígono.*

AREA. — *El área de una figura es la medida de su superficie.*

Por lo tanto no debe confundirse *superficie* con *área*. La superficie es lo que tiene de igual una figura con su equivalente y el área es la medida de esa superficie.

177. TEOREMA. — *La razón de las superficies de dos rectángulos de igual base es igual a la de las alturas correspondientes.*

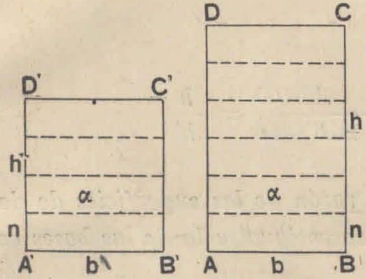


Fig. 170

H $\begin{cases} \text{Rectángulos} \\ ABCD \text{ y } A'B'C'D' \\ b' = b \text{ (Fig. 170)} \end{cases}$

T $\left\{ \dfrac{\text{Sup. } ABCD}{\text{Sup. } A'B'C'D'} = \dfrac{b'}{b} \right.$

Demostración. — Sea n un segmento contenido exactamente en h y h', 4 y 6 veces, por ejemplo:

$$h = 6n$$
$$h' = 4n$$

Y por la propiedad uniforme de la división

$$\frac{h}{h'} = \frac{6n}{4n} \quad \therefore \quad \frac{h}{h'} = \frac{6}{4} \qquad (1)$$

Por las divisiones determinadas por n en h y h' trazamos paralelas a b y b', respectivamente. De este modo las superficies $ABCD$ y $A'B'C'D'$ han quedado divididas en 6 y 4 rectángulos α. Es decir que:

$$\text{Superficie} \quad ABCD = 6\alpha$$
$$\text{Superficie} \quad A'B'C'D' = 4\alpha$$

Y por la propiedad uniforme de la división

$$\frac{\text{Superficie } ABCD}{\text{Superficie } A'B'C'D'} = \frac{6\alpha}{4\alpha} \therefore \frac{\text{Superficie } ABCD}{\text{Superficie } A'B'C'D'} = \frac{6}{4} \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$\frac{\text{Superficie } ABCD}{\text{Superficie } A'B'C'D'} = \frac{h}{h'}$$

178. TEOREMA. — *La razón de las superficies de dos rectángulos de igual altura es igual a la de las bases correspondientes.*

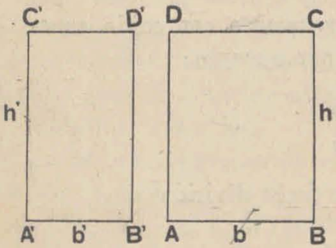


Fig. 171

$$\text{H}\begin{cases}\text{Rectángulos}\\ ABCD \text{ y}\\ A'B'C'D'\\ h' = h \quad \text{(Fig. 171)}\end{cases}$$

$$\text{T}\left\{\frac{\text{Superficie } ABCD}{\text{Superficie } A'B'C'D'} = \frac{b}{b'}\right.$$

Demostración. — Considerando a las alturas como bases y a las bases como alturas, nos colocamos en el teorema anterior. Podemos escribir:

$$\frac{\text{Superficie } ABCD}{\text{Superficie } A'B'C'D'} = \frac{b}{b'}$$

179. Teorema. — *La razón de las superficies de dos rectángulos cualesquiera es igual a la de los productos de sus bases por sus alturas.*

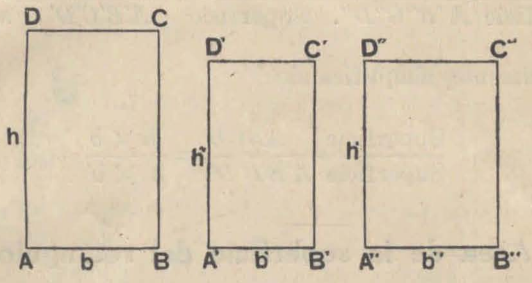


Fig. 172

H $\left\{\begin{array}{l}\text{Rectángulos}\\ ABCD \text{ y}\\ A'B'C'D' \text{ (Fig. 172)}\\ b \neq b'\\ h \neq h'\end{array}\right.$ T $\left\{\dfrac{\text{Superficie } ABCD}{\text{Superficie } A'B'C'D'} = \dfrac{b \times h}{b' \times h'}\right.$

Demostración. — Construímos un rectángulo *auxiliar* que tenga la base b y la altura h'. Sea el $A''B''C''D''$.

Comparando el $ABCD$ con el $A''B''C''D''$ se tiene:

$$\frac{\text{Superficie } ABCD}{\text{Superficie } A''B''C''D''} = \frac{h}{h'} \qquad (1)$$

Comparando el $A''B''C''D''$ con el $A'B'C'D'$, se tiene

$$\frac{\text{Superficie } A''B''C''D''}{\text{Superficie } A'B'C'D'} = \frac{b}{b'} \qquad (2)$$

Por la propiedad uniforme de la multiplicación, de (1) y (2), se obtiene:

$$\frac{\text{Superficie}\ \ ABCD.\ \text{Superficie}\ A''B''C''D''}{\text{Superficie}\ A''B''C''D''.\ \text{Superficie}\ \ A'B'C'D'} = \frac{h \times b}{h' \times b'}$$

y finalmente, simplificando:

$$\frac{\text{Superficie}\ \ ABCD}{\text{Superficie}\ A'B'C'D'} = \frac{h \times b}{h' \times b'}$$

Area de la superficie del retángulo

180. Teorema. — *El área de la superficie de un rectángulo se obtiene multiplicando la medida de su base por la medida de su altura, con relación a una misma unidad.*

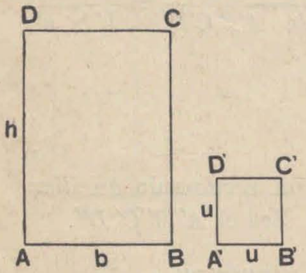


Fig. 173

H $\left\{\begin{array}{l}\text{rectángulo } ABCD \\ u = \text{unidad de medida de } b \text{ y de } h. \\ \text{(Fig. 173).}\end{array}\right.$

T $\{$ Area de la sup. $ABCD =$ medida $b \times$ medida h.

Demostración. — Por el teor. anterior tenemos:

$$\frac{\text{Superficie}\ \ ABCD}{\text{Superficie}\ A'B'C'D'} = \frac{b\,.\,h}{u\,.\,u}$$

Pero

$$\frac{\text{Sup. } ABCD}{\text{Sup. } A'B'C'D'} = \text{med. de la sup. } ABCD = \text{área de la sup. } ABCD$$

$$\frac{b}{u} = \text{medida de } b \text{ con respecto a } u$$

$$\frac{h}{u} = \text{medida de } h \text{ con respecto a } u$$

Entonces:

Area de la superficie $ABCD$ = medida $b \times$ medida h

181. AREA DE LA SUPERFICIE DEL CUADRADO. — *El área de la superficie de un cuadrado se obtiene elevando al cuadrado la medida del lado.*

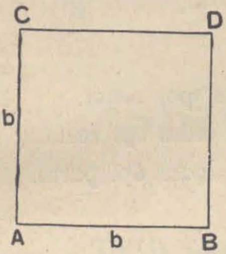


Fig. 174

El cuadrado (Fig. 174) es un rectángulo especial en que la medida de la base es igual a la medida de la altura.

Por lo tanto:

Area de la superficie $ABCD$ = (medida de $b)^2$.

Area de la superficie de un paralelogramo

182. TEOREMA. — *El área de la superficie de un paralelogramo se obtiene multiplicando la medida de su base por la medida de su altura, con relación a una misma unidad.*

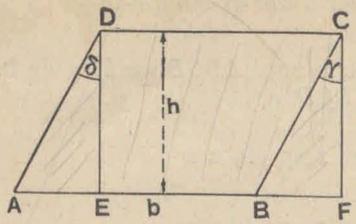


Fig. 175

H { Paralelogramo
$ABCD$
$AD =$ y $\parallel CB$
$AB =$ y $\parallel CD$
(Fig. 175)

T { Area $ABCD$ = med. de $b \times$ med. de h
con respecto a la misma unidad.

Demostración. — Construyamos:

$DE \perp AB$
$CF \perp AB$ $\therefore$ $DEFC$ rectángulo

Se tiene

$\overset{\triangle}{AED} = \overset{\triangle}{BFC}$ { rectángulos, por const.
$DE = CF$ lados op. rectáng.
$AD = BC$ lados op. paral.

Pero:

Superficie $ABCD$ = Superficie $DECF$

por ser:

$ABCD = \overset{\triangle}{DEBC} + AED$ { y siendo los sumandos
$DECF = \overset{\triangle}{DEBC} + \overset{\triangle}{BFC}$ { iguales las sumas son iguales.

Entonces:

área superficie $ABCD$ = área superficie $DECF$

Por consiguiente:

área superficie $ABCD$ = medida $b \times$ medida h

Area de la superficie de un triángulo

183. TEOREMA. — *El área de la superficie de un triángulo se obtiene multiplicando la mitad de la medida de su base por la medida de su altura con relación a una misma unidad.*

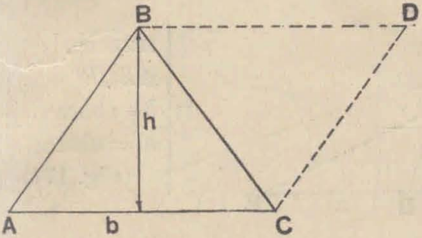


Fig. 176

H: $\overset{\triangle}{ABC}$ (Fig. 176). b = base, h = altura

T: área $\overset{\triangle}{ABC}$ = mitad de medida b × medida h con respecto a la misma unidad.

Demostración: Por B y por C, trazamos:

$$CD \parallel AB$$
$$BD \parallel AC$$

se tiene el paralelogramo $ABDC$ en el que $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{BCD}$

$$\text{superficie } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2} \text{ superficie } ABDC$$

$$\text{área sup. } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2} \text{ área sup. } ABDC$$

$$\text{área sup. } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2} \text{ medida } b \cdot \text{medida } h$$

$$\text{área sup. } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{\text{medida } b \text{. medida } h}{2}$$

Area de la superficie de un trapecio

184. Teorema. — *El área de la superficie de un trapecio se obtiene multiplicando la semisuma de las medidas de sus bases por la medida de su altura, con respecto a la misma unidad.*

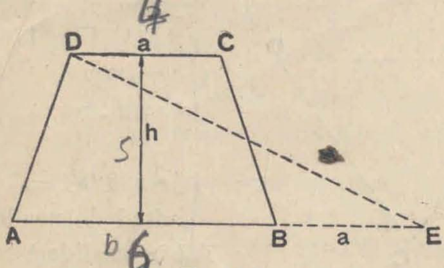


Fig. 177

H: trapecio $ABCD$; b = base; h = altura (Fig. 177)

T: $$\text{área } ABCD = \frac{\text{medida } (a+b)}{2} \times \text{Med. } h \text{ con respecto a la misma unidad.}$$

Demostración. — Prolongamos b, tal que $AE = b + a$ y unimos D con E.

Hemos visto que:

$$\text{superficie } ABCD = \text{superficie } \overset{\triangle}{ADE}$$

$$\text{área sup. } ABCD = \text{área sup. } \overset{\triangle}{ADE}$$

$$\text{área sup. } ABCD = \frac{\text{medida } (b+a)}{2} \text{ medida } h.$$

Area de la superficie de un polígono

185. Teorema. — *El área de la superficie de un polígono regular se obtiene multiplicando la medida de su* *perímetro por la mitad de la medida de su apotema con respecto a la misma unidad.*

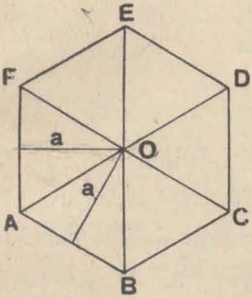


Fig. 178

H: *ABCDEF* polígono regular, *a* apotema, n = número de lados. Figura 178.

T: Area de la superficie *ABCDEF* $= \frac{1}{2}$ medida de $a \times$ medida de p con respecto a la misma unidad.

Demostración: Trazamos OA, OB, ..., OF, y tenemos los triángulos $AOB = BOC \ldots = FOA$ por tener sus tres lados respectivamente iguales (dos por radios de la misma circunferencia y los terceros por lados de un mismo polígono regular).

Por lo tanto:

Area superficie *ABCDEF* = área sup. $AOB \times n$, siendo n el número de triángulos formados.

Area superficie *ABCDEF* $= \dfrac{\text{medida } a}{2} \times$ medida $AB \times n$.

Pero medida $AB \times n$ = perímetro p:

Area superficie *ABCDEF* $= \dfrac{\text{medida } a}{2}$ medida p

APLICACIONES:

I) *Hallar el área de la superficie de un rectángulo tal que:*

$$b = 5 \text{ m}$$
$$h = 8{,}70 \text{ m}.$$

Aplicando:

$$\text{área sup. rect.} = \text{medida } b \,.\, \text{medida } h\,.$$
$$\text{área sup. rect.} = 5 \text{ m} \times 8{,}70 \text{ m} = 43{,}50 \text{ m}^2.$$

II) *Hallar el área de la superficie de un paralelogramo, cuya base es 5,35 m y cuya altura es 4 m.*

Aplicando:

$$\text{área sup. paralelogramo} = \text{medida } h \,.\, \text{medida } b\,.$$
$$\text{área sup. paralelogramo} = 5{,}35\ m \times 4\ m = 21{,}40\ m^2.$$

III) *Hallar el área de la superficie de un trapecio tal que:*

$a = 7\ m \qquad b = 11\ m \ \text{ y } \ h = 3.50\ m.$

Aplicando:

$$\text{área superf. trapecio} = \text{medida } \frac{a + b}{2} \times \text{medida } h.$$

$$\textit{área superf. trapecio} = \frac{7\ m + 11\ m}{2} \times 3{,}50\ m.$$

$$\text{área superf. trapecio} = 9\ m \times 3.50\ m = 31{,}50\ m^2.$$

IV) *Hallar el área de la superficie de un triángulo, tal que:*

$b = 8{,}50\ m \ \text{ y } \ h = 6\ m.$

Aplicando:

$$\text{área sup. triángulo} = \frac{\text{medida } b \times \text{medida } h}{2}$$

$$\text{área sup. triángulo} = \frac{8{,}50\ m \times 6\ m}{2} = 8{,}50\ m \times 3\ m =$$
$$= 25{,}50\ m^2.$$

V) *Hallar el área de la superficie de un pentágono regular cuyo lado es de 8 metros y cuya apotema es de 3 metros:*

Aplicando:

$$\text{área sup. polígono regular} = \text{medida } p\,.\ \text{medida } \frac{a}{2}$$

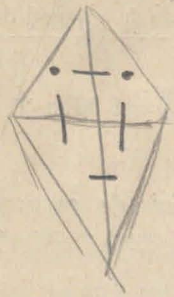
$$\text{área sup. políg. reg.} = 40\ m \times \frac{3m}{2} = 40\ m \times 1.50\ m. =$$
$$= 60\ m^2.$$

VI) *Hallar el área de la superficie de un cuadrado, tal que el lado es de 8 metros.*

Aplicando:

$$\text{área sup. cuadrado} = (\text{medida } h)^2$$
$$\text{área sup. cuadrado} = (8\ m)^2 = 64\ m^2.$$

(1)



INDICE