TEXTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES
AJUSTADOS A LOS PROGRAMAS EN VIGENCIA

GEOMETRIA

CORRESPONDIENTE AL 2.° AÑO DE LOS COLEGIOS NACIONALES

TEXTO AJUSTADO A LOS NUEVOS PROGRAMAS

POR

FELIPE ANGUITA
JOSÉ N. BOLLO
LORENZO DAGNINO PASTORE

TOMO II

CUARTA EDICION

F. CRESPILLO - EDITOR
BOLIVAR 369 - BUENOS AIRES

GEOMETRIA

2.ª PARTE

OBRAS DE LOS MISMOS AUTORES

ARITMETICA, para 1er. *año de los Colegios Nacionales.*

ARITMETICA, para 2do. *año de los Colegios Nacionales.*

ALGEBRA, pàra 3er. *año de los Colegios Nacionales.*

ALGEBRA, para 4to. *año de los Colegios Nacionales.*

GEOMETRIA, para 1er. *año de los Colegios Nacionales.*

GEOMETRIA, para 2do. *año de los Colegios Nacionales.*

GEOMETRIA, para 3er. *año de los Colegios Nacionales.*

GEOMETRIA DEL ESPACIO, para 4to. *año de los Colegios Nacionales.*

TRIGONOMETRIA RECTILINEA Y ESFERICA, para 5to. *año de los Colegios Nacionales, por Felipe Anguita.*

TEXTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES
PARA LOS COLEGIOS NACIONALES

GEOMETRIA

Correspondiente al
2.° Año de los Colegios Nacionales

Por
FELIPE ANGUITA
Profesor Diplomado de Matemáticas y Cosmografía.
Catedrático de los Colegios Nacionales "Mariano Moreno",
"Bartolomé Mitre" y de la Escuela de Mecánica de la Armada.

LORENZO DAGNINO PASTORE
Profesor Diplomado de Matemáticas y Cosmografía. — Ingeniero Civil.
Catedrático del Instituto Nacional del Profesorado Secundario,
del Colegio Nacional "Mariano Moreno" y Liceo de Señoritas.
Profesor Titular y Consejero de la Facultad de Ciencias
Económicas. — Profesor Sustituto de la Facultad
de Ciencias Exactas.

JOSE N. BOLLO
Profesor Diplomado de Matemáticas y Física.
Rector y Profesor del Colegio Nacional "Mariano Moreno".

TOMO II

F. CRESPILLO, Editor
Bolivar, 369
Buenos Aires

F. CRESPILLO EDITOR
BUENOS AIRES

IMPRENTA LÓPEZ — PERÚ 666 — BUENOS AIRES

P R O L O G O

Ofrecemos a la consideración de nuestros colegas y estudiantes este nuevo texto de Geometría respondiendo al Programa del 2º año de los Colegios Nacionales.

Hemos seguido la objetivación experimental cuando era indispensable, pero son las demostraciones puras las que predominan, pues la experimentación a éstas nos llevan por poco que se generalicen las propiedades.

Las comprobaciones a base de hechos sólo sirven para inducir la propiedad general, pero su demostración debe hacerse a pura lógica, aceptando el movimiento en aquéllas, pero no en éstas. Por eso hacemos comprobaciones y deslizamientos cuando ello es imprescindible, pero hacemos demostraciones lógicas preferentemente, porque no perdemos de vista que en la enseñanza secundaria el papel de la Geometría es servir, especialmente, de materia de razonamiento, para aprender a razonar.

Al final de cada capítulo hemos puesto ejercicios de investigación para el alumno, a fin de que ponga a prueba la calidad del conocimiento adquirido y las facultades del propio razonamiento.

Debajo de cada figura se tiene en forma sintética la correspondiente propiedad, a fin de que su conocimiento se haga hasta sin esfuerzo.

Al juicio de nuestros colegas va nuestro modesto trabajo.

F. A.

Marzo de 1938.

A LOS ESTUDIANTES

Es inusitado entre nosotros el dirigir unas palabras a los estudiantes en la primera página de un libro de texto, pero, no obstante ello, nos creemos obligados a hacer tal cosa con el objeto de dar breves indicaciones que contribuyan a que el libro no sea un mero repetidor de las lecciones que explica el profesor, sino un verdadero auxiliar del estudio y un instrumento de trabajo.

Para tal fin recomendamos que al estudiar la lección el estudiante dibuje en papel aparte sólo los elementos y relaciones conocidos en la hipótesis, y nunca la figura completa como se halla en el texto. Luego se va completando la figura a medida que las necesidades de la demostración lo vayan exigiendo, cuidando de marcar con rayitas sencillas, dobles o triples, los segmentos y ángulos respectivamente iguales, con el objeto de que se destaquen los elementos conocidos. De los elementos y relaciones dados y de los construídos, se deducen las consecuencias posibles y que puedan servirnos de paso hacia la tesis, recordando todo lo estudiado anteriormente, y que el texto enuncia, pero hay veces que algunas propiedades no se dicen en el texto sino que está entre paréntesis en tipo negrita el número del párrafo en donde figura la propiedad que se aplica o la razón de la afirma-

ción, y entonces el estudiante debe pensar cuál debe ser esa propiedad, y sólo cuando no la recuerde debe buscar esa referencia y leerla. Nunca hay que pasar por alto esas citas.

Estas indicaciones no son ninguna novedad; las sabe todo el mundo. Pero nosotros las anotamos aquí para que los estudiantes sepan cómo hay que estudiar, y lo hacemos con el noble deseo de que se razone, que se piense, que no se repitan de memoria los teoremas, a fin de que las Matemáticas sean para todos la gimnasia mental que deben ser y no una repetición de razonamientos.

F. A.

Marzo de 1938.

GEOMETRIA DEL ESPACIO

Capítulo I

RECTAS Y PLANOS

1. Entes geométricos. — Los *entes geométricos* son los *puntos*, las *rectas* y los *planos*.

Las representaciones materiales de los entes geométricos son: un grano de arena o el punto ortográfico para el *punto;* un hilo mantenido tirante o el borde de una regla para la *recta,* y un trozo de cartón o un tablero para dibujo para el *plano.*

Designaremos con letras mayúsculas (A, B, C,...) a los puntos, con letras minúsculas (a, b, c,...) a las rectas y sus porciones, y con letras griegas minúsculas (α, β, γ, ...) a los planos.

2. Postulado de existencia. — *Existen infinitos puntos, infinitas rectas e infinitos planos.*

3. Espacio. — Se llama *espacio* al conjunto de los infinitos puntos existentes.

4. Figura geométrica. — Se llama *figura geométrica* a todo conjunto de entes geométricos, excepto el espacio.

5. Geometría del Espacio. — La *Geometría del Espacio* tiene por objeto el estudio de las figuras geométricas que no están en un mismo plano.

6. Definición. — Cuando un ente geométrico contiene a otros, diremos que éstos *pertenecen* o *yacen* o que *están* en aquél, y recíprocamente.

Se indica que *un ente pertenece a otro,* poniendo entre ellos la letra griega ϵ (épsilon).

Así, para expresar que el punto A pertenece a la recta m, fig. 4, escribimos $A \varepsilon m$.

Se indica que *un ente no pertenece a otro,* poniendo entre ellos el signo no ε, o ε cruzado con una rayita.

Para expresar que el segmento AB no pertenece al plano α, fig. 11, escribimos: AB no $\varepsilon\alpha$.

7. Postulados característicos de los entes geométricos. — Los entes geométricos son concepciones de nuestro espíritu inducidas por la observación de objetos materiales. Las primeras propiedades de los entes geométricos, cuya deducción no puede hacerse de otras propiedades, se llaman *postulados* o *verdades primitivas.* Esos postulados son los siguientes:

I. — *Por un punto pasan infinitas rectas,* (Figura 1).

II. — *Por dos puntos pasa una sola recta,* (fig. 2).

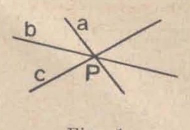


Fig. 1.

Por un punto pasan infinitas rectas.

Fig. 2.

Por dos puntos pasa una sola recta.

III. — *Dada una recta, siempre existen puntos fuera de ella,* (fig. 3).

IV. — *En una recta hay infinitos puntos, no habiendo en ella puntos terminales,* (fig. 4).

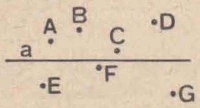


Fig. 3.

Siempre hay puntos fuera de una recta.

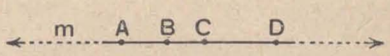


Fig. 4.

En una recta hay infinitos puntos.

Un punto cualquiera de una recta la divide en dos partes opuestas llamadas *semirrectas*. Se llama *segmento* a la parte recta limitada por dos puntos de ella, (figs. 5 y 6).

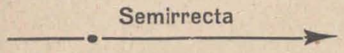


Fig. 5.

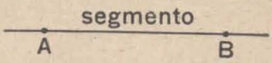


Fig. 6.

V. — *Por una recta pasan infinitos planos,* (fig. 7).

VI. — *La recta determinada por dos puntos de un plano, está toda contenida en él,* (fig. 8).

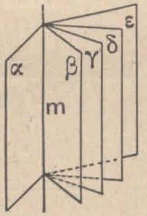


Fig. 7.

Por una recta pasan infinitos planos.

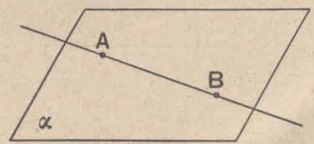


Fig. 8.

Una recta está en un plano si dos puntos de ella lo están.

VII. — *Toda recta de un plano lo divide en dos partes llamados semiplanos. Dos puntos de un mismo semiplano determinan un segmento que no corta a la recta dada, y dos puntos de distintos semiplanos determinan un segmento que corta a la recta dada en un punto,* (fig. 9).

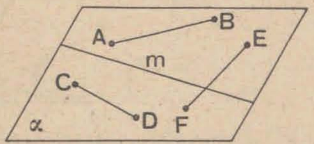


Fig. 9.

Una recta divide al plano en dos semiplanos.

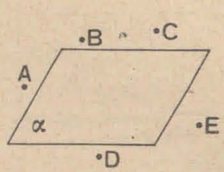


Fig. 10.

Siempre hay puntos exteriores a un plano.

VIII. — *Dado un plano, siempre existen puntos fuera de él,* (fig. 10).

IX. — *Todo plano divide al espacio en dos partes llamadas semiespacios. Dos puntos de un mismo semiespacio determinan un segmento que no corta al plano, y dos puntos de distintos semiespacios determinan un segmento que corta al plano dado en un punto,* (fig. 11).

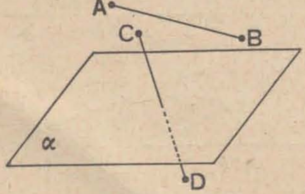


Fig. 11.

El plano divide al espacio en dos semiespacios.

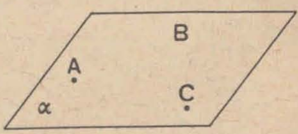


Fig. 12.

Tres puntos no en línea recta forman un plano

Determinación de un Plano

8. Postulado X. — *Tres puntos no en línea recta determinan un plano,* (fig. 12).

9. Corolario I. — *Una recta y un punto fuera de ella determinan un plano,* (fig. 13).

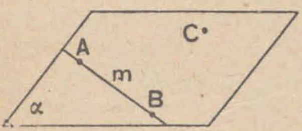


Fig. 13.

Un punto y una recta forman un plano.

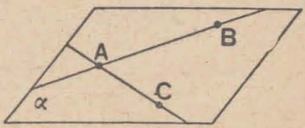


Fig. 14.

Dos rectas que se cortan forman un plano.

En efecto, si tomamos dos puntos en la recta *m*, con el punto dado *C* tendremos tres puntos no en línea recta, y estaremos en el caso del Postulado X.

10. Corolario II. — *Dos rectas que se cortan determinan un plano,* (fig. 14).

En efecto, el punto común *A* y un punto tomado en cada una de las rectas nos hacen aplicar el postulado último.

11. Corolario III. — Sabemos que dos rectas son paralelas cuando estando en un plano no tienen ningún punto común, de donde se deduce que: *Dos rectas paralelas determinan un plano.*

12. Representación de un plano. — En las figuras, un plano se concibe cuando se tienen:

tres puntos no en línea recta,
o una recta y un punto fuera de ella,
o dos rectas que se cortan,
o dos rectas paralelas,

pero usualmente se representa un plano con un paralelogramo que es el dibujo, en perspectiva, de una hoja de cartón colocada lejos del ojo, y con una letra griega en uno de sus ángulos para designarlo, tal como se ha hecho en las figuras 7 a 14.

Intersección de Planos

13. TEOREMA. — *Si dos planos tienen un punto común, tienen común una recta que pasa por dicho punto.*

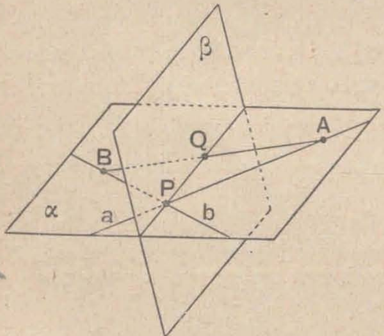


Fig. 15.
La intercesión de dos planos es una recta.

Hipótesis: Planos α y β; P punto común, (fig. 15).

Tesis: Por P pasa una recta común a los planos α y β.

Demostración: Por P trazamos en α, pero en los distintos semiespacios determinados por β, las rectas a y b. En la recta a tomamos el punto A y en en la b el punto B, que por el Postulado IX determinan el segmento AB que corta a β en Q, y que por el Postulado VI estará en α. Como P y Q están en α, la recta PQ también está en α (7, VI), y como P y Q están en β, la recta PQ también está en β, luego, si la recta PQ, que pasa por P, está en α y en β quiere decir que α β tienen una recta común que pasa por el punto P.

14. Intersección de dos planos. — Se llama *intersección* de dos planos, a la recta común a ambos; entonces se dice que un plano *corta* al otro.

Posiciones relativas de una Recta y un Plano

15. Dados una recta y un plano, pueden tener una de las tres posiciones relativas siguientes:

1ª *La recta y el plano tienen un punto común.*

El punto común a una recta y un plano se llama *intersección* o *pie* de la recta y el plano. En tal caso se dice que la recta *corta* al plano, o que el plano *corta* a la recta.

2ª *La recta tiene dos puntos comunes con el plano.*

Entonces, por el *postulado VI* de (**7**), resulta *que todos los puntos de la recta pertenecen al plano;* es decir: *la recta y el plano son coincidentes,* pues la recta *está* o *pertenece* al plano.

3ª *La recta y el plano no tienen ningún punto común;* es decir: la recta y el plano son *paralelos,* que definiremos así:

16. Recta y plano paralelos. — Una recta y un plano son *paralelos,* cuando no tienen ningún punto común.

Si una recta es paralela a un plano, el plano es paralelo a la recta.

Cuando la recta *coincide* con el plano, también suele definirse como paralelos.

PROPIEDADES DE LAS RECTAS Y PLANOS PARALELOS

17. Teorema. — *Si una recta es paralela a otra recta perteneciente a un plano, y pasa por un punto exterior a él, es paralela al plano.*

Hip.) A no ε α; b ε A; $b//a$; a ε α, fig. 16.

Tesis) $b//\alpha$.

Demostración. — Si b no fuese paralela a α tendrían un cierto punto P común, y como las rectas a y b determinan un plano β (**11**), el punto P se encontraría, además, en a, que es la recta común a α y a β. Entonces si b y a tiene P común, y P se halla en a, P pertenece a a y a b, es decir, a y b no son paralelas, lo que es absurdo por oponerse a la hipótesis, luego b y α no tienen punto común:

$$b//\alpha$$

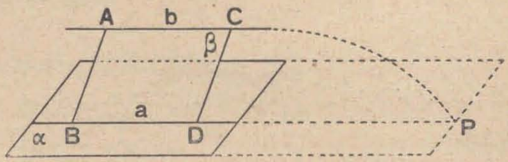


Fig. 16.

La recta paralela a otra de un plano es paralela al plano.

18. Teorema. — *Si una recta es paralela a un plano, todo plano que pase por ella y corte al primero deter-*

mina con éste una recta paralela a la anteriormente considerada.

Hip.) $b // \alpha$; $\beta \varepsilon b$ y corta a α según a, fig. 16.

Tesis) $b // a$.

Demostración. — Para demostrar que las rectas a y b son paralelas, habrá que demostrar que están en un mismo plano y que no tienen ningún punto común.

Ahora bien, las rectas a y b están en un mismo plano β y no tienen ningún punto común, pues si tuviesen común uno, el punto P, este punto estaría en b y en a, y por consiguiente en α, ya que a está en α (**7**, **VI**). Y si b y α tienen P común, no serán paralelas, lo que va contra la hipótesis, luego no es b no $//$ α, luego es b $//$ α.

19. Teorema. — *Si una recta es paralela a un plano, toda paralela a ella trazada por un punto del plano pertenece a él.*

Hip.) $a // \alpha$; $A \varepsilon \alpha$; $AB // a$ fig. 17.

Tesis) $AB \varepsilon \alpha$.

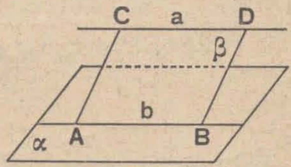


Fig. 17.
Si una recta es paralela a un plano, está en éste la paralela a aquélla.

Demostración.—La recta a y el punto A determinan un plano β (**9**), que por los teoremas (**13**) y (**17**) determinan una recta b contenida en α y paralela a a. Las rectas b y AB deben ser una misma recta, pues si no lo fuesen, por A tendríamos dos paralelas a la recta a, lo que es absurdo, luego AB es b, y como $b \varepsilon \alpha$, es $AB \varepsilon \alpha$.

20. Teorema. — *Si una recta es paralela a dos planos que se cortan, es paralela a la intersección de los mismos.*

Hip.) α y β se cortan según b; $a // \alpha$; $a // \beta$, fig. 18.
Tesis) $a // b$.

Demostración. — Tomemos un punto P de la recta b; por ser b común a α y a β, P también es común a los planos.

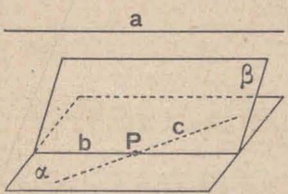


Fig. 18.

La recta paralela a dos planos es paralela a la intersección.

Por P tracemos una recta $c // a$. Como P está en α y en β, c también está en α (**19**) y en β, de manera que c es la intersección de α y β, es decir, es la misma recta b, luego $a // b$.

TRANSLACION

Propiedades de un movimiento de translación rectilínea.

21. Deslizamiento de un plano sobre otro por translación rectilínea. — Consideremos a la superficie de una mesa o al pizarrón del aula como representativos del plano, fig. 19.

En dicho plano tracemos una recta, a y fijemos la regla R con dos chinches para impedir que se mueva. Sabemos, por lo visto en (**7**, VII), que dicha recta a divide al plano en dos semiplanos. Tomemos ahora una hoja de cartón C, que va a representar al semiplano que no contiene a R, y apoyemos uno de sus lados rectos, el b, sobre la regla.

Se comprueba fácilmente que la hoja de cartón *C* puede deslizarse a lo largo de la regla *R*. A ese deslizamiento se le llama *movimiento de translación rectilíneo.*

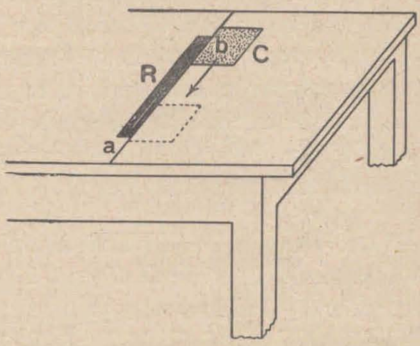


Fig. 19.

Los planos considerados se llaman *planos de deslizamiento,* y las rectas se llaman *recta fija* (la recta *a*), *recta móvil* (la recta a que pertenece *b*).

Si con un alfiler pinchamos a la hoja de cartón sobre la mesa, comprobamos que no es posible ejecutar la translación, luego podemos decir que: *Si el plano móvil que se desliza sobre otro tiene un punto fijo, todo el plano queda fijo.*

22. Translación de un punto. — Si aquel alfiler con que pinchamos la hoja de cartón lo dejamos en el cartón pero sin que se fije sobre la mesa, y hacemos el deslizamiento, la punta del alfiler, que representa *un punto,* trazará sobre la mesa una recta, como podremos comprobarlo.

Luego: *La translación rectilínea de un punto es una recta,* fig. 20.

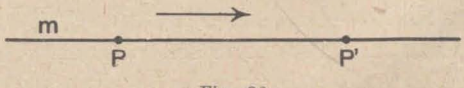


Fig. 20.

23. Translación de una recta sobre sí misma. — Consideremos ahora la recta *m* descrita por la punta del alfiler en el caso anterior. En vez de cartón utilicemos una hoja de papel transparente con una raya *r*, hecha con lápiz, que coincida con la recta *m*. Si deslizamos el papel transparente como lo hacíamos con el cartón, comprobaremos que la raya *r* coincide constantemente con la recta *m*. Como la raya *r* representa una recta, diremos que: *La translación rectilínea de una recta es la misma recta.*

24. Translación de una figura cualquiera. — Si en el cartón móvil *C* de la figura 19 asentamos un objeto cualquiera (un libro o un tintero, por ejemplo), y luego deslizamos el cartón a lo largo de la regla *R*, el objeto considerado efectúa un *movimiento de translación rectilíneo en el espacio.*

Ejemplos: Efectúan movimientos de translación rectilíneos: un vagón de ferrocarril, un tranvía, un ascensor, el cajón de una mesa, la escuadra que se desliza sobre una regla para trazar paralelas, etc.

Observando el movimiento de translación rectilínea de un cuerpo se deduce que:

1º *Todos los puntos del cuerpo describen recorridos iguales en el mismo tiempo.*

2º *Cada una de las aristas del cuerpo describen planos.*

25. Movimiento de translación de una recta. — Rectas paralelas. — Si fijamos una regla *R*, fig. 21, sobre el pizarrón, y luego hacemos deslizar una escuadra *E* sobre ella, y en cada una de las diversas posiciones de la translación de la escuadra trazamos rectas con el cateto mayor y con la hipotenusa, comprobamos que las rectas *a*, *b* y *c* son paralelas, y que también son paralelas *d*, *e*, y *f*.

De aquí deducimos la siguiente:

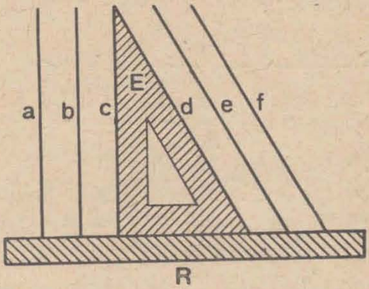


Fig. 21.
Trazado de paralelas con regla y escuadra.

26. Definición. — Dos rectas son *paralelas*, cuando pueden coincidir por una translación rectilínea, fig. 22.

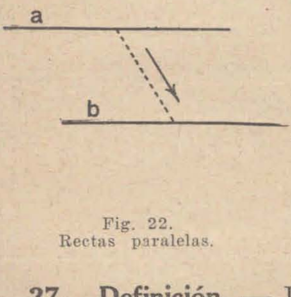


Fig. 22.
Rectas paralelas.

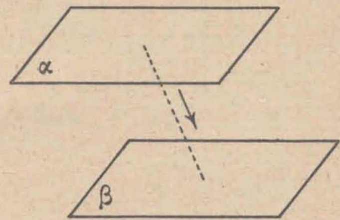


Fig. 23.
Planos paralelos.

27. Definición. — Dos planos son *paralelos*, cuando pueden coincidir por una translación rectilínea, fig. 23.

ANGULO DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

28. TEOREMA. — *Si dos rectas secantes son paralelas, respectivamente, a otras dos rectas secantes, el plano de las dos primeras es paralelo al plano de las otras dos.*

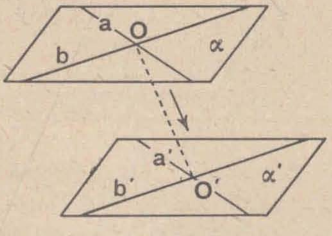


Fig. 24.

Hip.) $a//a'$; $b//b'$; a y b determina α, a' y b' determinan α', fig. 24.

Tesis) $\alpha//\alpha'$.

Demostración. — Hagamos que el plano α efectúe la translación rectilínea OO'. Entonces la recta a coincidirá con su paralela a', y la recta b coincidirá con su paralela b'; es decir, las rectas a y b habrán coincidido con a' y b', pero esas dos rectas coincidentes determinan los planos α y α', luego estos planos que pueden coincidir por una translación rectilínea, son paralelos: $\alpha//\alpha'$.

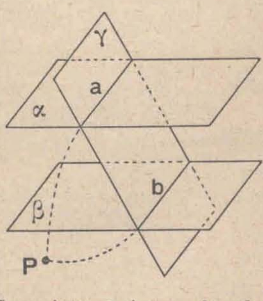
PROPIEDADES DE LOS PLANOS PARALELOS

28a. TEOREMA. — *Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano son paralelas.*

Hip.) $\alpha//\beta$; γ corta a α y a β según a y b.

Tesis) $a//b$.

Demostración. — Si las rectas a y b no fuesen paralelas, se cortarían en un punto P del plano γ, desde que a y b pertenecen a γ. Pero como a está en α y b está en β, el punto P estará en α y en β, es decir, que los planos α y β tienen P común, lo que es absurdo, pues por hipótesis es $\alpha//\beta$, luego a y b no se cortan, es decir: $a//b$.



Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son paralelas.

28b. Teorema. — *Por un punto exterior a un plano pasa un plano y sólo uno paralelo al primero.*

Hip.) α y P; P no ε α.

Tesis) Por P pasa $\beta // \alpha$; β es único.

Demostración. — Por P podemos trazar dos rectas m y n paralelas al plano α. Las rectas m y n determinan un plano β (10) que es paralelo a α. En efecto; β *no* puede cortar a α; pues si lo cortase las rectas m y n serían paralelas a la intersección de α y β (20), lo que es absurdo, pues entonces tendríamos trazadas desde el punto P dos rectas paralelas a la intersección $\alpha\beta$, luego es $\beta // \alpha$.

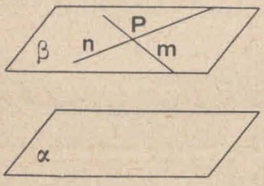
El plano β es único. Si no lo fuese, imaginemos otro plano γ que pase por P y sea $\gamma // \alpha$.

Sea ahora π un plano que pase por P y corte a α según a, a β según b y a γ según c. Como α y β son paralelos, por (**28a**) resulta:

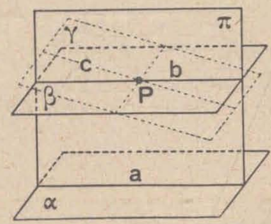
$$b // a \qquad (1)$$

y como es $\gamma // \alpha$, es:

$$c // a \qquad (2)$$



Por un punto exterior a un plano pasa un plano paralelo al dado.



Dicho plano paralelo es único.

pero a, b y c se hallan en π, de manera que de (1) y (2) deducimos que por P en el plano π pasan las rectas b

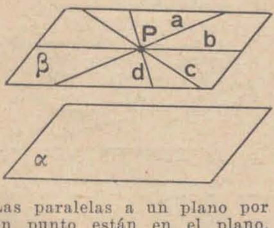
y c paralelas a a, lo que es absurdo por oponerse al *Postulado de Euclides*, luego b y c son una misma recta, lo que implica ser γ y β un solo plano, luego el plano β es único.

28c. Corolario I. — *Si por un punto exterior a un plano se trazan dos rectas paralelas a él, el plano que dichas rectas determinan es paralelo al primero.*

En efecto, por el teorema último tenemos que si m y n son paralelas a α, el plano β, determinado por m y n, es paralelo a α.

28d. Corolario II. — *Todas las rectas paralelas a un plano trazadas por un punto exterior al mismo pertenecen al plano paralelo a aquel trazado por dicho punto.*

En efecto, si las rectas $a, b, c, d,...$ pasan por P, son paralelas a α, pues por el corolario I dos a dos determinan planos que son paralelos a α, pero por (**28b**) todos esos planos son uno solo, luego $a, b, c, d,...$ están en un plano paralelo a α que pasa por P.



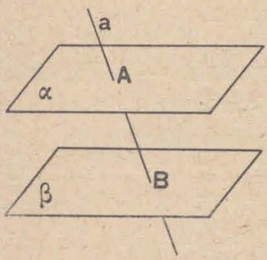
Las paralelas a un plano por un punto están en el plano.

28e. Teorema. — *Si una recta corta a uno de dos planos paralelos, corta también al otro.*

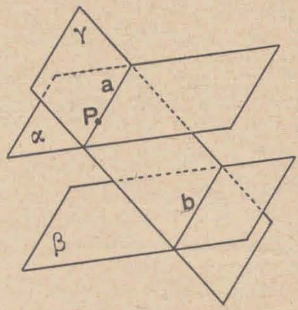
Hip.) $\alpha//\beta$; a corta a α en A.

Tesis) a corta a β.

Demostración. — Si a no cortase a β sería $a//\beta$, y entonces estaría contenida en el plano α (**28d**), lo que va contra la hipótesis, pues a no pertenece al plano α, luego si suponer que a no corta a α conduce a un absurdo, resulta que a corta al plano β.



Si una recta corta a uno de dos planos paralelos, corta al otro.



Si un plano corta a uno de dos planos paralelos, corta al otro.

28f. TEOREMA. — *Si un plano corta a uno de dos planos paralelos, corta también al otro.*

Hip.) $\alpha // \beta$; γ corta a α según a.

Tesis) γ corta a β.

Demostración. — Si γ no cortase a β sería $\gamma // \beta$, y entonces por un punto P de la recta común a α y γ tendríamos, por hipótesis: $\alpha // \beta$
y por el supuesto: $\gamma // \beta$
lo que es absurdo, pues por un punto exterior a un plano pasa un solo plano paralelo a otro (**28a**), luego el plano γ no puede ser paralelo a β, es decir: γ corta a β.

Caracteres del paralelismo de planos

28g. Carácter idéntico. COROLARIO. — *Todo plano es paralelo a sí mismo*:

$$\alpha // \alpha$$

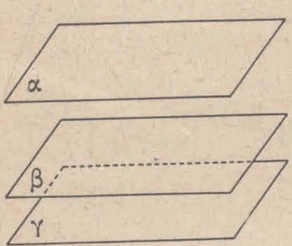
En efecto, dos planos son paralelos cuando son coincidentes (**27**); en realidad se trata de un mismo plano.

28h. Carácter recíproco. COROLARIO. — *Si un plano es paralelo a otro, éste es paralelo al primero:*

Si es $\alpha // \beta$, también es $\beta // \alpha$.

En efecto, si α no tiene punto común con β (**27**), tampoco β tiene punto común con α.

28i. Carácter transitivo. TEOREMA. — *Si un plano es paralelo a otro, y éste es paralelo a un tercero, el primero y el tercero son paralelos.*



Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí.

Hip.) $\alpha // \beta$; $\beta // \gamma$.

Tesis) $\alpha // \gamma$.

Demostración. — Si α y γ no fuesen paralelos, tendrían un punto común por el que se tendrían trazados los planos α y γ paralelos al plano β, lo que es absurdo (**28b**), luego es $\alpha // \gamma$.

28j. COROLARIO. — *Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí.*

Si es $\alpha // \beta$ y $\gamma // \beta$ es: $\alpha // \gamma$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha // \beta \\ \gamma // \beta\end{array}\right\} \text{ es: } \alpha // \gamma.$$

29. Semirrectas de un mismo sentido. — Dos semirrectas paralelas son del *mismo sentido*, cuando están en un mismo semiplano respecto a la recta determinada por los orígenes de las semirrectas mismas.

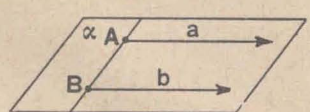
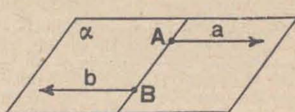


Fig. 25.
Semirrectas de igual sentido.



Fg. 26.
Semirrectas de distinto sentido.

En la fig. 25 las semirrectas *a* y *b* son del mismo sentido.

Las semirrectas de igual sentido también se llaman *concordes.*

30. Semirrectas de distinto sentido. — Dos semirrectas paralelas son de *distinto sentido,* cuando están en semiplanos opuestos respecto a la recta determinada por los orígenes de las semirrectas mismas.

En la fig. 26 las semirrectas *a* y *b* son de distinto sentido.

Las semirrectas de distinto sentido también se llaman *discordes.*

Angulo de dos rectas en el espacio

31. Teorema. — *Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos y del mismo sentido, y pertenecen a planos diferentes, son iguales.*

Hip.) Angulos α y β; $a // a'$; $b // b'$; a y a', b y b', concordes, figura 27.

Tesis) $\alpha = \beta$.

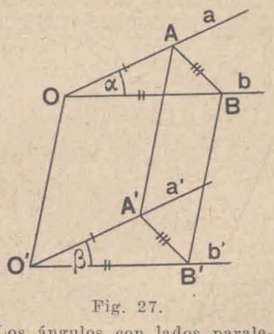


Fig. 27.

Los ángulos con lados paralelos son iguales.

Demostración.—A partir del vértice tomemos sobre a y a' los segmentos $OA = O'A'$, y sobre b y b' los segmentos $OB = O'B'$. Unamos A y B con A' y B' y A con B y A' con B'.

En el cuadrilátero $OO'A'A$ los lados OA y $O'A'$ son iguales y paralelos, luego la figura es un paralelogramo, de donde se deduce que es:

$$OO' = AA' \qquad (1)$$

Análogamente, en el paralelogramo $OO'B'B$ se tiene que:

$$OO' = BB' \qquad (2)$$

y comparando (1) y (2) se deduce que:

$$AA' = BB' \qquad (3)$$

También se tiene que es:

$$\left.\begin{array}{l} OO'//AA' \\ OO'//BB' \end{array}\right\} \therefore AA'//BB' \qquad (4)$$

Entonces el cuadrilátero $AA'B'B$ por (3) y (4) tiene los lados AA' y BB' iguales y paralelos, luego es un paralelogramo, de donde:

$$AB = A'B'$$

Los triángulos AOB y $A'O'B'$ tienen sus tres lados respectivamente iguales, luego son iguales, de donde se deduce que es:

$$\alpha = \beta$$

EJERCICIOS

1. Tres puntos A, B y C no están en línea recta. Decir cuántas rectas, semirrectas y segmentos se forman con ellos.

2. Cuatro puntos de un plano A, B, C y D no están en línea recta. Decir cuántas rectas, semirrectas y segmentos se forman con ellos.

3. Se da un plano α y un punto A fuera de α. Se une A con B y con C, que pertenecen a α. ¿Cuál es la intersección de α con el plano de AB y AC?

4. ¿Cuántos planos determinan cuatro puntos que no están en un mismo plano?

5. Dados una recta y dos puntos exteriores a ella, ¿cuántos planos determinan?

6. Dadas cuatro rectas paralelas de modo que no haya tres en un mismo plano, ¿cuántos planos determinan?

7. Por un punto dado, trazar una recta paralela a un plano dado.

9. Por una recta dada, trazar un plano paralelo a otra recta. Estudiar los diferentes casos.

10. Dadas dos rectas que se cruzan sin cortarse, trazar un plano paralelo a ellas y que equidiste de ambas. Diferentes casos.

11. Por un punto dado trazar un plano que equidiste de tres puntos dados.

12. Si dos planos α y β se cortan y son respectivamente paralelos a otros dos planos α' y β', demostrar: 1º) α' y β' se cortan; 2º) la intersección $\alpha\beta$ es paralela a la intersección $\alpha'\beta'$.

CAPÍTULO II

PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA

32. Nociones preliminares — Hemos visto en el curso de *Primer Año* las siguientes nociones que conviene recordar:

Dos rectas son *perpendiculares,* cuando al cortarse determinan ángulos iguales.

Se llama *ángulo recto* al ángulo formado por dos rectas perpendiculares; o bien el ángulo igual a su adyacente.

También sabemos que: *Por un punto sólo se puede trazar una perpendicular a una recta, y sólo una.*

Esta propiedad siempre es cierta ya sea que el punto pertenezca a la recta o sea exterior a ella.

El teorema siguiente nos permite afirmar que si el punto pertenece a la recta, en el espacio se pueden trazar infinitas perpendiculares a la recta.

33. TEOREMA. — *Por un punto de una recta pasan en el espacio, infinitas perpendiculares a dicha recta.*

Hip.) Recta a; punto P; $P \varepsilon a$, fig. 28.

Tesis) Por P pasan infinitas perpendiculares a a.

Demostración.—Sabemos, por (**7**, V), que por una recta a pasan infinitos planos α, β, γ......, y como, por *Geom.*

Plana, se puede trazar en cada plano una perpendicular a la recta a en el punto P, al haber infinitos planos habrá infinitas perpendiculares a la recta a en el punto P.

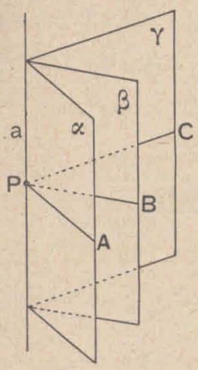


Fig. 28.
Por un punto de una recta pasan infinitas perpendiculares a ella.

34. Teorema. — *Si una recta corta a un plano y es perpendicular a otras dos rectas del plano que pasan por el punto de intersección, es perpendicular a cualquier otra recta del plano que pase por dicho punto.*

Hip.) La recta a corta a α en O; y b y c ε α y pasan por O; $a \perp b$; $a \perp c$; d ε α y pasa por O, figura 29.

Tesis) $a \perp d$.

Demostración. — En α trazamos una recta m que corte a b, c y d; así obtenemos los puntos B, C y d. En la recta a, en cada una de las semirrectas determinadas por O, tomamos los segmentos $OA' =$ $= OA$ y unimos los puntos A y A' con B, C y D.

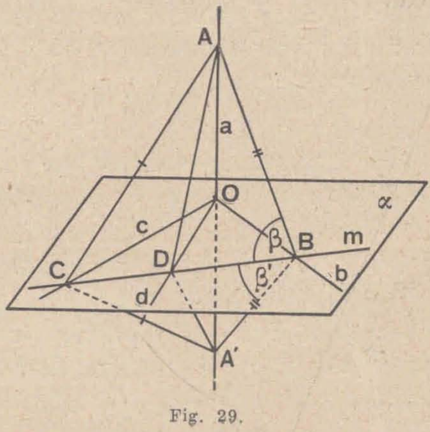


Fig. 29.

En el plano $AA'C$ se tiene por oblícuas que equidistan del pie de la perpendicular, que:

$$AC = A'C \quad (1)$$

Por la misma razón,

en el plano $AA'B$ se tiene:

$$AB = A'B \qquad (2)$$

Los triángulos ABC y $A'BC$ son iguales por tener $AC = A'C$ y $AB = A'B$ por lo demostrado en (1) y (2), respectivamente, y el lado BC común.

Como en triángulos iguales a lados iguales se oponen ángulos iguales, al ser $AC = A'C$ resulta:

$$\beta = \beta' \qquad (3)$$

Los triángulos ABD y $A'BD$ son iguales por tener $AB = A'B$ por lo demostrado en (2), $\beta = \beta'$ por lo demostrado en (3), y BD común. Y como en triángulos iguales a ángulos iguales se oponen lados iguales, al ser $\beta = \beta'$ resulta:

$$AD = A'D \qquad (4)$$

En el plano $AA'D$ tenemos $AD = A'D$ por lo demostrado en (4), luego el triángulo $AA'D$ es isósceles, y como DO es la mediana de la base AA', puesto que es $OA = OA'$, y sabemos que en todo triángulo isósceles la mediana de la base es altura de la misma, luego resulta que es:

$$a \perp d$$

35. TEOREMA. — *Todas las perpendiculares a una recta trazadas por uno de sus puntos pertenecen a un plano.*

Hip.) $b, c, d, ... \perp a$ en O, figura 30.

Tesis) $b, c, d, ... \in \alpha$.

Demostración. — Desde luego, las rectas b y c determinan el plano α; sólo falta demostrar que la recta d también pertenece a α.

Supongamos que d no pertenezca a α.

Por (**10**) a y d determinan un plano β que corta a α según d'. Como es, por hipótesis, $a \perp b$ y $a \perp c$, por el teorema anterior debe ser $a \perp d'$. Pero entonces tenemos en β la recta $a \perp d$ por hipótesis y $a \perp d'$ por lo demostrado, lo que es absurdo, pues en un plano no se pueden trazar dos perpendiculares a una recta en un punto, luego al no poder ser d exterior a α por conducirnos a un absurdo, resulta que la recta d pertenece al plano α.

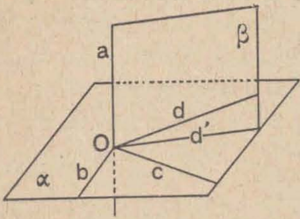


Fig. 30.

De manera análoga se demostraría que cualquier otra recta perpendicular a a en O pertenece a α, luego todas las perpendiculares a una recta trazadas por uno de sus puntos pertenecen a un plano.

36. Recta y plano perpendiculares. — Una recta es *perpendicular* a un plano, cuando es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por su intersección. En tal caso también el plano es perpendicular a la recta. El punto común se llama *pie* de la perpendicular.

Si la recta a es perpendicular a las rectas b, c, d, e,... del plano α, fig. 31, que pasan por la intersección O de a y α, es $a \perp \alpha$, o $\alpha \perp a$. Nótese que, según el teorema (**34**), una recta es perpendicular a un plano cuan-

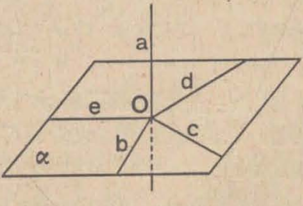


Fig. 31.

Recta perpendicular a un plano.

do es perpendicular a dos rectas de éste que pasen por la intersección y recíprocamente.

37. TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES. — *Si desde el pie de una recta perpendicular a un plano se traza una perpendicular a otra recta del plano, la recta determinada por el pie de estas dos perpendiculares y cualquier punto de la recta perpendicular al plano es también perpendicular a la recta situada en el plano.*

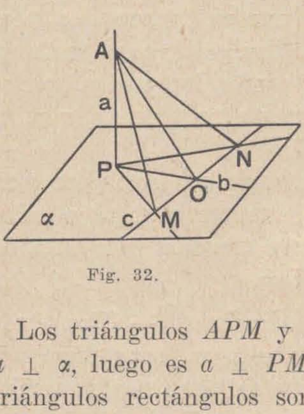


Fig. 32.

Hip.) $a \perp \alpha$; $b \perp c$; b y $c \in \alpha$, fig. 32.

Tesis) $AO \perp c$.

Demostración. — En c construímos $OM = ON$ y unimos M y N con P y con A.

En el plano α se tiene $PM = PN$ por ser oblicuas que equidistan del pie O de la perpendicular.

Los triángulos APM y APN son rectángulos, por ser $a \perp \alpha$, luego es $a \perp PM$ y $a \perp PN$, (**34**). Estos dos triángulos rectángulos son iguales por tener el cateto AP común, y los catetos PM y PN iguales por lo demostrado, luego las hipotenusas también son iguales:

$$AM = AN \qquad (1)$$

El triángulo AMN es isósceles por (1), y como AO es la mediana de la base MN, por ser $OM = ON$ por construcción, y como la mediana de la base de un triángulo isósceles es altura de la base, resulta:

$$AO \perp c$$

38. Corolario. — Como es por hipótesis:

$$b \perp c$$

y por lo demostrado: $AO \perp c$
por (**34**) es $c \perp pl.\ APO$, es decir:

El plano determinado por la perpendicular al plano y la segunda perpendicular, es perpendicular a la tercera recta.

39. Teorema. — *Por un punto de una recta pasa un plano perpendicular a dicha recta y sólo uno.*

Hip.) a; $P \varepsilon a$, fig. 33.

Tesis) Por P pasa un solo plano $\alpha \perp a$.

Demostración. — Sean b y c dos de las infinitas (**33**) perpendiculares a la recta a en el punto P. Por (**10**), b y c determinan el plano α. Como es $a \perp b$ y $a \perp c$, por (**34**) es $a \perp \alpha$, y demostrado que por P pasa $\alpha \perp a$. El plano α es único.

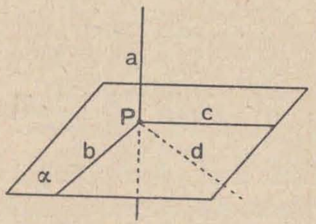


Fig. 33.

Por un punto de una recta sólo pasa un plano perpendicular a dicha recta.

Si no lo fuese, supongamos otro plano β perpendicular a a en P. Tracemos en β y por P la recta d; al ser $a \perp \beta$, es $a \perp d$, de manera que en el punto P tenemos las rectas b, c, y d perpendiculares a a y no pertenecientes a un mismo plano, lo que es absurdo, pues se opone al teorema (**35**), y como este absurdo resulta de suponer que existe otro plano distinto de α, deducimos que α es el único.

40. Teorema. — *Por un punto exterior de una recta pasa un plano perpendicular a dicha recta y sólo uno.*

Hip.) a; P no ε a, fig. 34.

Tesis) Por P pasa un solo plano $\alpha \perp a$.

Demostración. — El punto P y la recta a determinan (**9**) un plano. En ese plano trazamos $PA \perp a$ y por A, en otro plano, la recta $c \perp a$. Las rectas b y c, que se cortan, determinan un plano α que es perpendicular a la recta a.

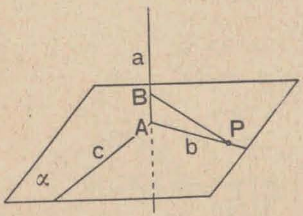


Fig. 34.

Por un punto exterior a una recta sólo pasa un plano perpendicular a dicha recta.

En efecto, se tiene: $a \perp b$ y $a \perp c$, luego (**34**), es $a \perp \alpha$.

El plano α es único. Si no lo fuese, podemos suponer otro plano β que pase por P y sea perpendicular a a. Este plano β cortará a a en un punto B, distinto de A, debiendo ser $a \perp BP$. Como es $a \perp b$, el triángulo ABP tiene dos ángulos rectos, lo que es absurdo, de manera que ese plano β no puede existir, luego el plano α es único.

41. TEOREMA. — *Por un punto de un plano pasa una recta perpendicular al plano y sólo una.*

Hip.) α; P ε α, fig. 35.

Tesis) Por P pasa una sola recta $a \perp \alpha$.

Demostración. — Por P, en α, trazamos una recta b cualquiera, y por P un plano $\beta \perp b$ (**39**), que corta a α según c. En este plano β trazamos la recta a perpendicular a la recta c.

La recta a es la perpendicular a α que pasa por P.

Al ser $b \perp \beta$, es b perpendicular a todas las rectas de β que pasen por su pie, luego es $b \perp a$, o sea $a \perp b$.

Pero por construcción es, también, $a \perp c$, luego la recta a es perpendicular a dos rectas b y c del plano α que pasan por su intersección, luego es $a \perp \alpha$, por el teorema (**34**).

La recta a es única. Si no lo fuese, supongamos que por P pase otra recta $m \perp \alpha$, fig. 36. Las rectas a y m determinan un plano γ, y como se supone $m \perp \alpha$, deberá ser $m \perp CD$, pero entonces resulta en el plano γ las rectas

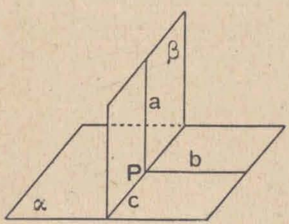


Fig. 35.
Por un punto de un plano pasa una recta perpendicular al plano.

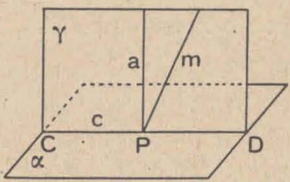


Fig. 36.
La perpendicular a un plano es única.

a y m perpendiculares a CD, lo que por *Geom. Plana* es absurdo, luego la perpendicular m no existe, es decir: a es la única perpendicular a α en P.

42. Teorema. — *Por un punto exterior a un plano pasa una recta perpendicular al plano y sólo una.*

Hip.) α; P no ε α, fig. 37.

Tesis) Por P pasa una sola recta $a \perp \alpha$.

Demostración. — Tracemos en α una recta c cualquiera, y por P un plano β perpendicular a la recta c, siendo CD la intersección de α y β. Por P tracemos $a \perp CD$; a es la perpendicular a α que pasa por P.

En efecto, por construcción es $c \perp \beta$, luego por (**34**) es $c \perp b$, y también es $a \perp b$ por construcción, de manera que por el teorema de las tres perpendiculares (**37**) tenemos que es a perpendicular al plano determinado por b y c, es decir: $a \perp \alpha$.

La recta a es única. Si no lo fuese, supongamos que se pudiese trazar otra recta $m \perp \alpha$, fig. 38. Entonces el triángulo PEH tiene dos ángulos rectos, al ser $a \perp \alpha$ y $m \perp \alpha$, lo que es absurdo, luego la recta m es la misma recta a, es decir, la recta a es la única perpendicular que se puede trazar por P a α.

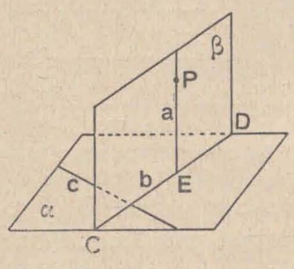


Fig. 37.
Por un punto exterior a un plano pasa una recta perpendicular al plano.

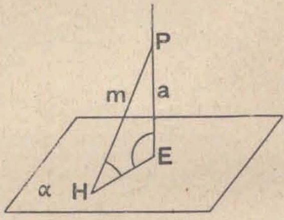


Fig. 38.
La perpendicular a un plano es única.

42a. Teorema. — *Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas.*

Hip.) $a \perp \alpha$ en B; $b \perp \alpha$ en D, fig. 38a.

Tesis) $a // b$.

Demostración. — Unamos D con B y con un punto A cualquiera de la recta a, y luego tracemos en el plano α

la recta $m \perp BD$, de donde resulta, por el teorema de las tres perpendiculares, que es:

$$m \perp AD$$

Además, al ser $b \perp \alpha$, por definición de recta perpendicular a un plano es b perpendicular a toda recta de α que pase por su pie, luego es:

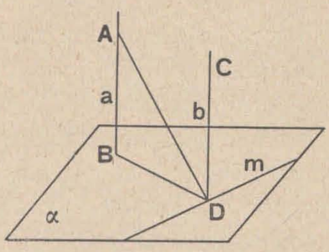


Fig. 38 a.
Dos rectas perp. a un plano son paralelas.

$$b \perp m$$

es decir, que las rectas b, AD y BD son perpendiculares a m en un punto D, luego todas esas perpendiculares están en un mismo plano (**35**), y por consiguiente, (**7**, **VI**), las rectas a y b. están en el mismo plano, en el que se tienen trazadas dos perpendiculares, a y b, a una misma recta BD, por hipótesis, luego son paralelas:

$$a // b$$

42b. Teorema. — *Todo plano perpendicular a una de dos rectas paralelas es perpendicular a la otra.*

Hip.) $a // b$; $\alpha \perp a$ en A, fig. 38b.

Tesis) $\alpha \perp b$.

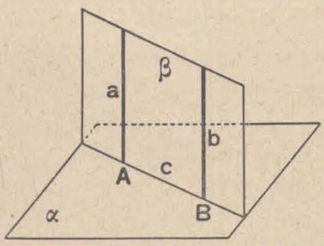


Fig. 38 b.
Si un plano es perp. a una de dos paralelas, es perp. a la otra.

Demostración. — Al ser paralelas las rectas a y b, determinan un plano β (**11**), que tiene, por hipótesis, el punto A común con α, luego tienen común la recta c, (**13**). En el punto B, intersección de

b y α, trazamos una recta $b' \perp \alpha$. Como es $a//b$ por hipótesis, y $b' \perp \alpha$ por construcción, por el teorema anterior resulta $a//b'$, pero por hipótesis es $b//a$, de manera que por el punto B tenemos trazadas dos paralelas, b y b', a la recta a, lo que es absurdo, pues se opone al *Postulado de Euclides,* luego las rectas b y b' son una misma, es decir, que si es $b' \perp \alpha$, es $b \perp \alpha$.

42c. TEOREMA. — *Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.*

Hip.) $a//b$; $c//b$, fig. 38c.

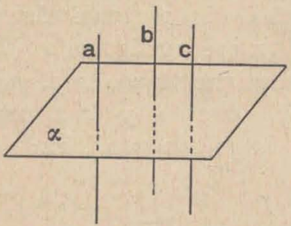


Fig. 38 c.
Dos paralelas a una recta son paralelas entre sí.

Tesis) $a//c$.

Demostración. — Si las rectas estuvieran en un plano, el teorema ya ha sido estudiado en primer año. Supongamos que las rectas dadas están en distintos planos.

Tracemos un plano $\alpha \perp a$; como es $a//b$, por el teorema anterior resulta $\alpha \perp b$. Pero sabemos que es $c//b$, luego también es $\alpha \perp c$, y como las rectas a y c son perpendiculares a α, por (**42a**), resulta $a//c$.

42d. TEOREMA. — *Dos planos perpendiculares a una recta son paralelos.*

Hip.) Planos α y β, y recta a; $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, fig. 38d.

Tesis) $\alpha//\beta$.

Demostración. — Si α y β no fuesen paralelos tendrían un punto común, por el cual habríamos trazado dos planos perpendiculares a la recta a, lo que es absurdo, pues por el teorema (**39**) sabemos que tal cosa es imposible, luego los planos dados no tienen ningún punto común, es decir: $\alpha // \beta$.

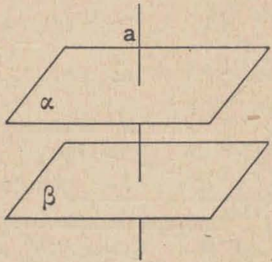


Fig. 38 d.
Dos planos perpendiculares a una recta son paralelos.

42e. TEOREMA. — *Si una recta es perpendicular a uno de dos planos paralelos, es también perpendicular al otro.*

Hip.) $\alpha // \beta$; $m \perp \alpha$ en A, fig. 38e.

Tesis) $m \perp \beta$.

Demostración. — Como los planos α y β son paralelos, la recta m que corta a α también corta a β (**28e**) en B. Si por B trazamos un plano perpendicular a la recta m, por (**42d**) resulta dicho plano paralelo a α, y como este plano paralelo a α es único (**28b**), dicho plano se confunde con β, es decir, es $\beta \perp m$ o sea $m \perp \beta$.

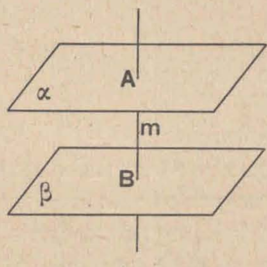


Fig. 38 e.
Si una recta es perp. a uno de dos planos paralelos, es perpendicular al otro.

Segmentos de paralelos comprendidos entre planos paralelos

42f. TEOREMA. — *Si dos planos son paralelos, todos los puntos de uno equidistan del otro.*

Hip.) $\alpha // \beta$; fig. 38f.

Tesis.) Todos los puntos de α equidistan de β.

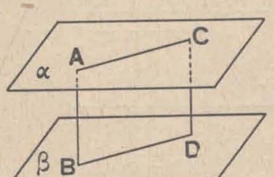


Fig. 38 f.
Dos planos paralelos son equidistantes.

Demostración. — Sean A y C dos puntos de α, y por ellos tracemos AB y CD perpendiculares a β. Por (42a) resulta $AB//CD$, y el plano que determinan corta a los planos dados según las rectas AC y BD (**13**).

Por el teorema (28a) es $AC//BD$, luego la fig. $ABDC$ es un paralelogramo, luego $AB = CD$, es decir, los puntos A y C de α equidistan de β.

Angulo de dos planos

43. Angulo diedro. Definiciones. — Se llama *ángulo diedro* a la parte de espacio comprendida entre dos semiplanos que se cortan, y no pertenecientes a un mismo plano, y tal, que contenga a todo segmento que tenga un extremo en un semiplano y el otro extremo en el otro semiplano.

Si los semiplanos α y β, fig. 39, se cortan según MN y no pertenecen a un mismo plano y un segmento AB tiene sus extremos en los semiplanos dados, la parte de espacio que contiene a AB es lo que se llama ángulo *diedro,* o simplemente *diedro.*

Los semiplanos que forman el diedro se llaman *caras del diedro,* y la intersección se llama *arista.* En el diedro de la fig. 39 las caras son α y β, y la arista MN.

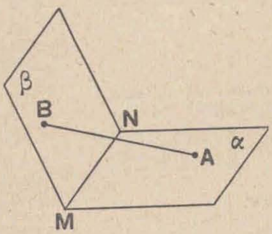


Fig. 39.
Angulo diedro.

Un ángulo diedro se designa leyendo las aristas que determinan su arista, o mejor, las letras griegas correspondientes a sus caras. Así, el diedro de la fig. 39 se lee: *diedro MN,* o *diedro $\alpha\beta$.*

44. Generación de un ángulo diedro. — Si el semiplano β se supone coincidiendo con el semiplano α y suponemos α β animado de un movimiento de rotación alrededor de MN (en sentido contrario al de las agujas de un reloj), cada posición de β habrá formado con α un ángulo diedro.

45. Angulos diedros convexos y cóncavos. — El diedro que hemos definido se llama *ángulo diedro convexo,* y la parte de espacio que no contiene el segmento AB se llama *ángulo diedro cóncavo,* (fig. 40).

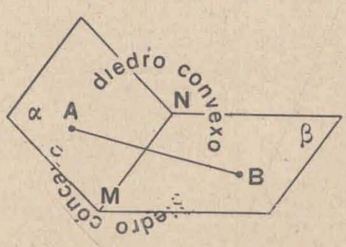


Fig. 40.

Siempre que hablemos de diedros, quedará entendido que nos referimos a diedros convexos.

46. Angulo diedro llano. — Se llama *ángulo diedro llano* al diedro cuyas caras pertenecen a un mismo plano.

Si las caras α y β, fig. 41, del diedro MN pertenecen a un mismo plano, el diedro MN es un diedro llano.

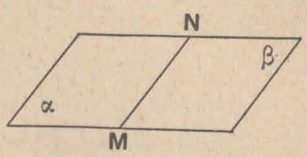


Fig. 41.
Diedro llano.

47. Postulado. — *Todos los ángulos diedros llanos son iguales.*

48. Semiplanos respecto de la arista de un diedro interior al mismo. — Todo punto que pertenezca a un diedro, sin estar en las caras, se llama *punto interior* al diedro. El punto es *exterior* cuando no pertenece ni al diedro ni a las caras.

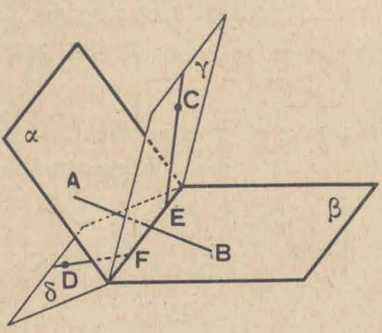


Fig. 42.

En el diedro $\alpha\beta$, fig. 42 el punto C es interior, y el punto D exterior.

La semirrecta determinada por un punto de la arista y un punto interior, se llama *semirrecta interior* al diedro. La semirrecta es *exterior* cuando está determinada por un punto de la arista y un punto exterior.

En la fig. 42 la semirrecta EC es interior y la FD es exterior al diedro. El semiplano determinado por la arista y un punto interior al diedro se llama *semiplano interior* al diedro.

El semiplano es *exterior* si está determinado por la arista y un punto exterior al diedro.

En la fig. 42 el semiplano γ es interior a $\alpha\beta$, y exterior el semiplano δ.

49. Diedros consecutivos. — Dos diedros *son consecutivos,* cuando tienen una cara común y las otros dos se hallan en los semiespacios que determina la cara común.

Los diedros $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$, fig. 43, son consecutivos, pues tienen la cara β común y las caras α y γ se hallan en los semiespacios que determina la cara β.

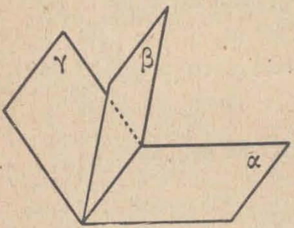


Fig. 43.
Dos diedros consecutivos.

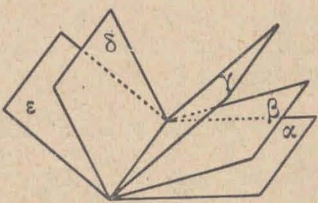


Fig. 44.
Varios diedros consecutivos.

Varios diedros son *consecutivos,* cuando tomados en un cierto orden, el primero es consecutivo con el segundo, el segundo con el tercero, etc.

Los diedros $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ y $\delta\varepsilon$, fig. 44, son consecutivos.

50. Sección normal de un diedro. — Se llama *sección normal* de un diedro, al ángulo que forman las dos semirrectas perpendiculares a la arista en un punto, una en una cara del diedro y la otra en la otra cara.

Si en la fig. 45 es $AO \perp MN$ y está en α, y $BO \perp MN$ y está en β, el ángulo AOB es la sección normal del diedro $\alpha\beta$.

La sección normal de un diedro también se llama *ángulo plano* o *ángulo rectilíneo* del diedro.

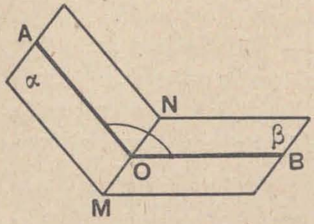


Fig. 45.
Sección normal de un diedro

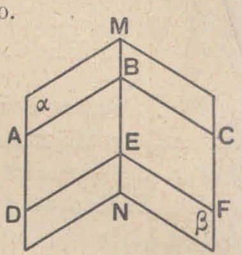


Fig. 46.
Secciones normales de un diedro.

51. Teorema. — *Todas las secciones normales de un diedro son iguales.*

Hip.) $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEF}$ secc. norm. de $\alpha\beta$, fig. 46.

Tesis) $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

Demostración. — Como los ángulos ABC y DEF son secciones normales del diedro $\alpha\beta$, se debe tener:

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp MN \\ DE \perp MN \end{array}\right\} \therefore AB // DE \qquad (1)$$

y además:

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp MN \\ EF \perp MN \end{array}\right\} \therefore BC // EF \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que los ángulos ABC y DEF tienen sus lados respectivamente paralelos, y por (**31**) se deduce que:

$$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$$

Observación. — A todo diedro corresponde una sola sección normal y viceversa, a una sección normal dada corresponde un solo diedro; es decir, entre los diedros y sus secciones normales existe una correspondencia biunívoca.

52. Significado físico de la igualdad de diedros. — Se comprueba experimentalmente que dos diedros físicos (de cartón, madera, etc.) son iguales, cuando coinciden las aristas y las caras. Si en ambos estuvieran trazadas las secciones normales, deslizando un diedro sobre el otro hasta coincidir los vértices, comprobaríamos que las dos secciones normales son coincidentes y por lo tanto iguales, de donde deducimos la siguiente definición:

53. Diedros iguales. — Dos diedros son *iguales* cuando son iguales sus secciones normales, y recíprocamente.

Si en los diedros $\alpha\beta$ y $\gamma\delta$ las secciones normales ABC y DEF, fig. 47, son iguales, también es $\alpha\beta = \gamma\delta$.

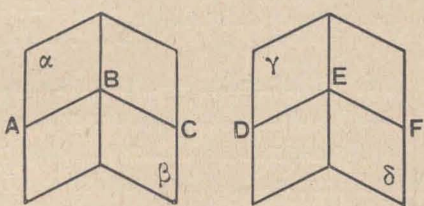


Fig. 47.
Diedros iguales.

54. Corolarios. — De la definición anterior, y recordando los caracteres de la igualdad de ángulos, se deduce:

I. — Todo diedro es igual a sí mismo.

II. — Si un diedro es igual a otro, éste es igual al primero.

III. — Si un diedro es igual a otro, y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.

IV. — Dos diedros iguales a un tercero son iguales entre sí.

55. Secciones igualmente inclinadas de un diedro. — Se llaman *secciones igualmente inclinadas* de un diedro, o de diedros iguales, a los ángulos cuyos vértices están en la arista y sus lados en cada cara del diedro, formando los lados con la arista, en cada una, ángulos iguales.

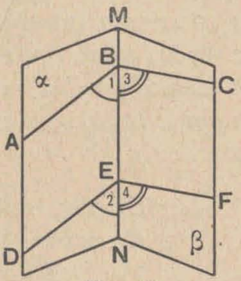


Fig. 48.
Secciones igualmente inclinadas.

Si en el diedro $\alpha\beta$, fig. 48, es:

$$\widehat{1} = \widehat{2}$$

$$\widehat{3} = \widehat{4}$$

los ángulos ABC y DEF son secciones igualmente inclinadas.

56. Postulado. — *En un mismo diedro, o en diedros iguales, las secciones igualmente inclinadas son iguales.*

Recíprocamente: *Si en dos diedros las secciones igualmente inclinadas son iguales, los diedros son iguales.*

Desigualdad de diedros.

57. Criterio físico para reconocer si un diedro es mayor o menor que otro. — Se comprueba experimentalmente que, dados dos diedros físicos, el primero es *mayor* que el segundo, cuando superponiendo las aristas y una de sus caras, estando ambos en uno de los semiespacios determinados por la cara común, la otra cara resulta *exterior* al segundo diedro.

Si al superponer las aristas y una de sus caras, la otra cara es *interior* al segundo diedro, el primer diedro es *menor* que el segundo.

Al superponer dos diedros materiales, comprobamos que si uno es mayor o menor que otro, la sección normal del primer diedro es mayor o menor que la sección normal del segundo diedro. De aquí deducimos la siguiente definición:

58. Diedros desiguales. — Un diedro es *mayor* (*menor*) que otro, cuando su sección normal es *mayor* (*menor*) que la del segundo diedro.

Recíprocamente: Si la sección normal de un diedro es *mayor* (*menor*) que la de otro diedro, el primer diedro es *mayor* (*menor*) que el segundo.

Si en los diedros $\alpha\beta$ y $\gamma\delta$, fig. 49, los ángulos ABC y DEF son las secciones normales y es:

$$\widehat{ABC} > \widehat{DEF} \text{ también es } \alpha\beta > \gamma\delta$$

y recíprocamente.

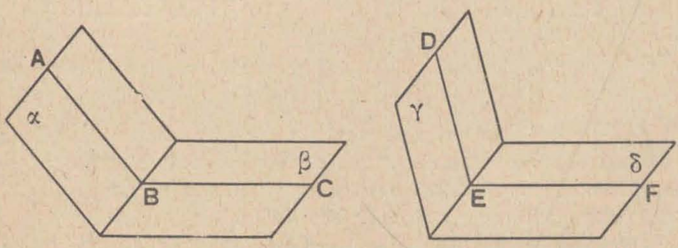


Fig. 49.
Diedros desiguales.

59. Corolarios. — De la definición anterior, y teniendo presente las propiedades de la desigualdad de ángulos, deducimos los siguientes corolarios:

I. — Si un diedro es mayor (menor) que otro, y éste es mayor (menor) que un tercero, el primero es mayor (menor) que el tercero.

II. — Dados dos diedros debe verificarse una sola de estas tres posibilidades: el primero es mayor, o menor, o igual que el segundo.

Operaciones con ángulos diedros

Suma de diedros.

60. Definiciones. — I. Se llama *suma de dos diedros* consecutivos, al diedro convexo, llano o cóncavo, que contiene a éstos y cuyas caras son las caras no comunes de los diedros dados.

La suma de los diedros consecutivos $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$, fig. 50 es el diedro $\alpha\gamma$.

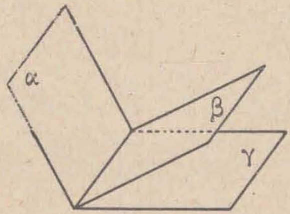


Fig. 50.
Suma de dos diedros consecutivos.

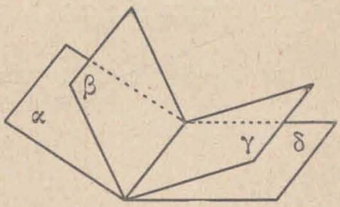


Fig. 51.
Suma de varios diedros consecutivos.

II. — Se llama *suma de varios diedros consecutivos* al diedro convexo, llano o cóncavo, que se obtiene sumando el primero y el segundo, al resultado el tercero, al resultado el cuarto, etc. y así hasta terminar con los diedros dados.

La suma de los diedros consecutivos $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ y $\gamma\delta$, fig. 51, es el diedro $\alpha\delta$.

III. — Se llama *suma de varios diedros cualesquiera*, al diedro que es suma de diedros consecutivos ordenadamente iguales a los diedros dados.

La suma de los diedros $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ y $\varepsilon\varphi$, fig. 52, es el diedro $\pi\psi$, que es suma de los diedros $\pi\ \rho$, $\rho\omega$ y $\omega\ \psi$, respectivamente iguales a los diedros dados.

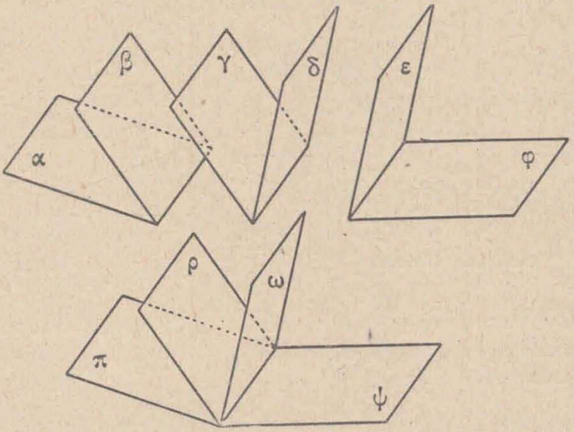


Fig. 52.
Suma de diedros cualesquiera.

61. Corolario. — *Si un diedro es la suma de otros varios, su sección normal es la suma de las secciones normales de los diedros dados.*

62. Propiedades de la suma de diedros. Postulado. — *La suma de diedros goza de las propiedades uniforme, conmutativa, asociativa y monótona de la suma de ángulos, estudiadas en otro curso.*

Resta de diedros

63. Definiciones. — Se llama *diferencia* entre dos diedros llamados minuendo y sustraendo, siendo el primero mayor que el segundo, al diedro que sumado con el sustraendo da una suma igual al minuendo.

La diferencia entre los diedros $\alpha\gamma$ y $\beta\gamma$ fig. 53, es el diedro $\alpha\beta$, pues:

$$\alpha\beta + \beta\gamma = \alpha\gamma$$

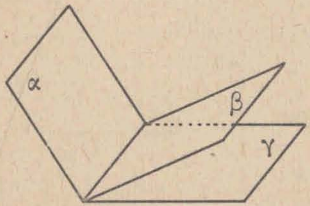


Fig. 53.
Resta de diedros.

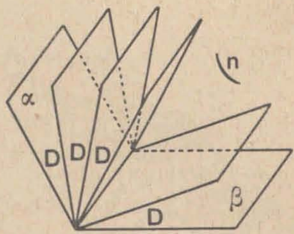


Fig. 54.
Múltiplo de un diedro.

64. Corolario. — *Si un diedro es la diferencia de otros dos, su sección normal es la diferencia de las secciones normales de los diedros dados.*

65. Propiedades de la resta de diedros. Postulado. — *La resta de diedros goza de las propiedades de la resta de ángulos, estudiadas en otro curso.*

Múltiplos y submúltiplos de un diedro

66. Definiciones. — Se llama *producto*, o *múltiplo* de un diedro respecto a un cierto número natural n, a la suma de n diedros iguales al diedro dado.

Dado un diedro D, fig. 54, se tiene que el producto de D por n es:

$$D.n = \overbrace{D + D + D + \ldots + D.}^{n} = \alpha\beta$$

Se llama *cociente* o *sub-múltiplo* de un diedro respecto a un número natural n, al diedro que multiplicado por n dé un producto igual al diedro dado.

Dado el diedro $\alpha\beta$, fig. 54, se tiene que el cociente de $\alpha\beta$ y n es:

$$\alpha\beta : n = D \text{ porque } D.n = \alpha\beta$$

67. Postulado. — *A los diedros les son aplicables los postulados de Arquímedes y de la divisibilidad relativos a los ángulos.*

68. Razón de dos diedros. — Se llama *razón* de dos diedros o su cociente.

El teorema siguiente nos va a mostrar que la razón de dos diedros es igual que la razón de los rectilíneos correspondientes.

69. TEOREMA. — *La razón de dos diedros es igual a la de sus secciones normales correspondientes.*

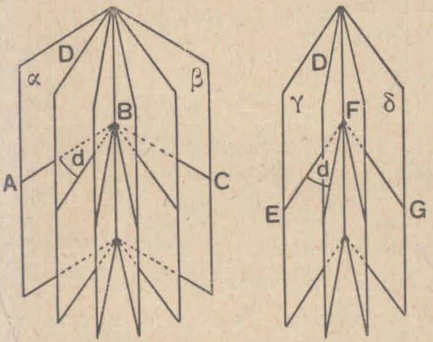


Fig. 55.
La razón de dos diedros es la de sus secciones normales.

Hip.) $\alpha\beta$ y $\gamma\delta$; $\widehat{ABC}$ y $\widehat{EFG}$ secc. norm., figura 55.

Tesis) $\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = \dfrac{\widehat{ABC}}{\widehat{EFG}}$

Demostración. — Supongamos que un cierto diedro D esté contenido un número exacto de veces en el diedro $\alpha\beta$ (5 veces en el ejemplo de la fig.), y que esté contenido otro número exacto de veces en el diedro $\gamma\delta$ (3 veces en el ejemplo de la fig.). Entonces, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\beta = 5.D \\ \gamma\delta = 3.D\end{array}\right\} \therefore \quad \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = \frac{5.D}{3.D} = \frac{5}{3} \qquad (1)$$

Sea d la sección normal del diedro D. Como D está contenido 5 veces en $\alpha\beta$, d está 5 veces en ABC, y también está contenido 3 veces en EFG, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ABC} = 5.d \\ \widehat{EFG} = 3.d\end{array}\right\} \therefore \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{DEF}} = \frac{5.d}{3.d} = \frac{5}{3} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) observamos que los segundos miembros son iguales, luego:

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = \frac{\widehat{ABC}}{\widehat{EFG}}$$

Si no hubiese ningún diedro que estuviese contenido exactamente en ambos diedros, la propiedad subsiste, pero su demostración corresponde a otros cursos.

70. Medida de un diedro. — Si en el caso del teorema anterior tomamos al diedro D como unidad de medida para medir los ángulos diedros, y su sección normal d como unidad de medida para medir las secciones normales, tendremos que *la medida de un ángulo diedro es igual a la medida de su sección normal correspondiente.*

$$\frac{\alpha\beta}{D} = \frac{\widehat{ABC}}{d} = \textit{medida del diedro } \alpha\beta$$

71. Diedros adyacentes. — Dos diedros son *adyacentes* si tienen una cara común y las otras dos son semiplanos opuestos.

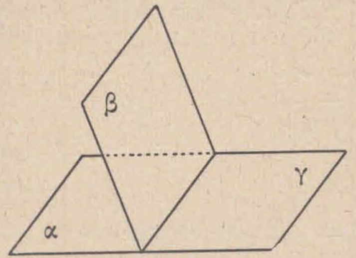


Fig. 56.
Diedros adyacentes.

Los diedros $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$ son adyacentes, fig. 56, pues tienen común la cara β y las otras dos son semiplanos opuestos.

72. Diedros opuestos por la arista. — Dos diedros son *opuestos por la arista* cuando las caras de uno son los semiplanos opuestos de las dos caras del otro.

Los diedros $\alpha\beta$ y $\gamma\delta$, fig. 57, son opuestos por la arista, pues α y γ, y β y δ son semiplanos opuestos.

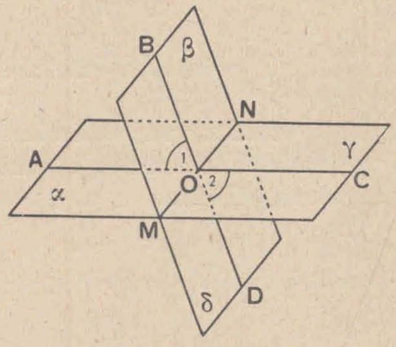


Fig. 57.
Los diedros opuestos por la arista son iguales.

73. TEOREMA. — *Los diedros opuestos por la arista son iguales.*

Hip.) $\alpha\beta$ y $\gamma\delta$ op. por la arista, fig. 57.

Tesis) $\alpha\beta = \gamma\delta$.

Demostración. — Por un punto O de la arista MN trazamos en α $AC \perp MN$, y en β $BD \perp MN$, resultando entonces (**50**) que:

$$\hat{1} = \textit{sección normal de } \alpha\beta \qquad (1)$$

$$\hat{2} = \textit{sección normal de } \gamma\delta \qquad (2)$$

Pero las rectas *AC* y *BD* están en un plano (**10**) y por consiguiente los ángulos 1 y 2 son opuestos por el vértice, luego:

$$\widehat{1} = \widehat{2}$$

y reemplazando en esta igualdad los valores (1) y (2), resulta:

$$\textit{sección normal de } \alpha\beta = \textit{sección normal de } \gamma\delta$$

y si las secciones normales son iguales, los diedros también lo son (**53**), luego:

$$\alpha\beta = \gamma\delta$$

PLANOS PERPENDICULARES

74. Planos perpendiculares. — Dos planos son *perpendiculares,* cuando al cortarse forman dos diedros adyacentes iguales.

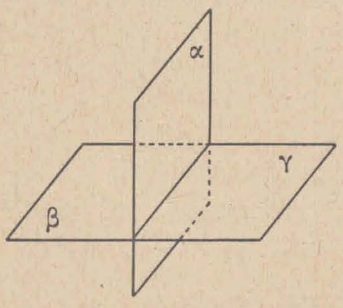


Fig. 58.
Planos perpendiculares.

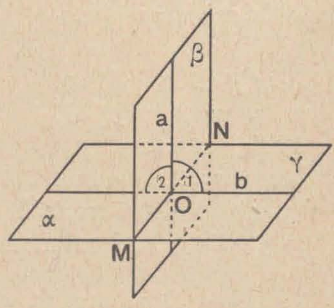


Fig. 59.
Plano que pasa por una recta perpendicular a otro plano.

Los planos α y β, fig. 58, son perpendiculares si los diedros $\alpha\beta$ y $\alpha\gamma$ son adyacentes e iguales.

Cuando dos planos se cortan y no son perpendiculares, se llaman *oblícuos.*

75. TEOREMA. — *Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al primero.*

Hip.) $a \perp \alpha$; $\beta \; \varepsilon \; a$, fig. 59.
Tesis) $\beta \perp \alpha$.

Demostración. — Sea O el punto común a la recta a y al plano α, y MN la recta común a α y a β.

En α trazamos $b \perp MN$ en O, y como es $a \perp \alpha$, por (**36**) resulta:

$$a \perp MN \quad \text{y} \quad a \perp b$$

resultando, entonces:

$$\widehat{1} = \textit{sección normal de } \beta\gamma \qquad (1)$$
$$\widehat{2} = \textit{sección normal de } \beta\alpha \qquad (2)$$

Al ser $a \perp b$, los ángulos 1 y 2 son rectos y por consiguiente iguales, luego:

$$\textit{sección normal de } \beta\gamma = \textit{sección normal de } \beta\alpha$$

de donde deducimos (**53**) que los diedros $\beta\gamma$ y $\beta\alpha$ son iguales y adyacentes, y por definición es: $\beta \perp \alpha$.

76. COROLARIO. — *Por un punto perteneciente o exterior a un plano pasan infinitos planos perpendiculares al primero.*

En efecto, por el punto P, fig. 60, o por el punto Q.

pasa una recta $a \perp \alpha$ (**41**) y (**42**), y por dicha recta pasan infinitos planos (**7**,V) y que por el teorema último son perpendiculares al plano dado.

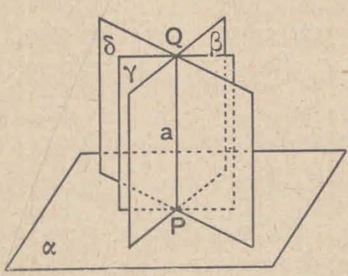


Fig. 60.
Por la perp. a un plano pasan infinitos planos perp. al plano dado.

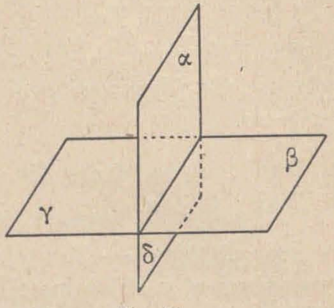


Fig. 61.
Los planos perpendiculares forman diedros iguales.

77. TEOREMA. — *Si un plano es perpendicular a otro, los cuatro ángulos diedros que forma con éste son iguales.*

Hip.) $\alpha \perp \beta$; diedros formados: $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$, fig. 61.

Tesis) $\alpha\beta = \alpha\gamma = \beta\delta = \gamma\delta$.

Demostración. — En efecto, por ser $\alpha \perp \beta$, es:

$$\alpha\beta = \alpha\gamma \qquad (1)$$

y por ser diedros opuestos por la arista, es:

$$\alpha\beta = \gamma\delta \qquad (2)$$
$$\alpha\gamma = \beta\delta \qquad (3)$$

Comparando (1), (2) y (3), resulta:

$$\alpha\beta = \gamma\delta = \beta\delta = \alpha\gamma$$

78. CorolaRIO. — *Si un plano es perpendicular a otro, éste es perpendicular al primero.*

Es decir, si es $\alpha \perp \beta$, también es: $\beta \perp \alpha$.

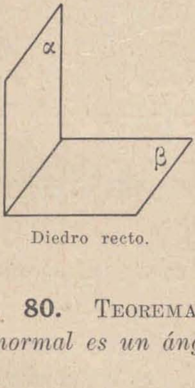
79. Diedros rectos, agudos y obtusos. — un diedro es *recto* cuando sus caras son perpendiculares.

Si es $\alpha \perp \beta$, fig 62, el diedro $\alpha\beta$ es recto.

Un diedro es *agudo* cuando es menor que un diedro recto, fig. 63.

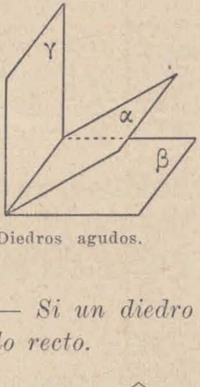
Un diedro es *obtuso* cuando es mayor que un diedro recto, fig. 64.

Fig. 62.



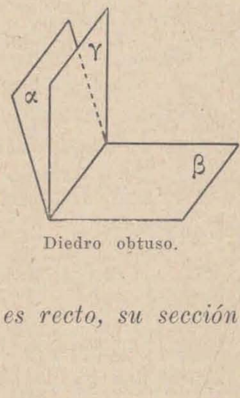
Diedro recto.

Fig. 63.



Diedros agudos.

Fig. 64.



Diedro obtuso.

80. TEOREMA. — *Si un diedro es recto, su sección normal es un ángulo recto.*

Hip.) $\alpha\beta =$ diedro recto; $\widehat{AOB} =$ secc. normal, fig. 65.

Tesis.) $\widehat{AOB} =$ ángulo recto.

Demostración. — Al ser $\alpha\beta$ un diedro recto, es $\alpha \perp \beta$ (**79**), luego es $\alpha\beta = \alpha\gamma$ por (**77**), y si dos diedros son iguales, sus secciones normales también lo son, luego

$\widehat{AOB} = \widehat{AOC}$. Como los ángulos AOB y AOC son ángulos adyacentes e iguales, son rectos, es decir:

$$\widehat{AOB} = \textit{ángulo recto.}$$

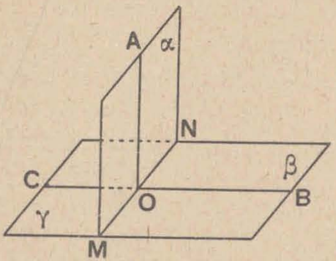


Fig. 65.
La sección normal de un diedro recto es un ángulo recto.

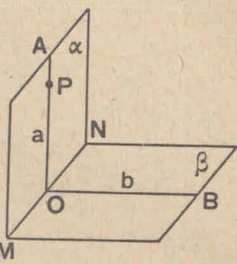


Fig. 66.

81. Corolario I. — *Si la sección normal de un diedro es un ángulo recto, el diedro es recto.*

Es decir, si es $\widehat{AOB}$ = ángulo recto, fig. 65, el diedro $\alpha\beta$ es recto.

82. Corolario II. — *Todos los diedros rectos son iguales.*

83. Teorema. — *Si dos planos son perpendiculares, toda recta de uno de ellos perpendicular a la intersección es perpendicular al otro.*

Hip.) $\alpha \perp \beta$ en MN; $a \,\varepsilon\, \alpha$; $a \perp MN$ en O, fig. 66.
Tesis) $a \perp \beta$.

Demostración. — Tracemos por O en el plano β la recta $b \perp \alpha$; por (**36**) resulta $b \perp a$, o sea:

$$a \perp b$$

y como hipótesis es: $a \perp MN$

se tiene que la recta a es perpendicular a dos rectas del plano β, luego es $a \perp \beta$.

84. Corolario. — *Si dos planos son perpendiculares, toda perpendicular a uno de ellos trazada por un punto del otro pertenece a este otro.*

Si es $\alpha \perp \beta$, fig. 66 y por P, que pertenece a α, trazamos $a \perp \beta$, resulta que a pertenece a α.

Si a no estuviese en α se podría trazar por P otra recta c que estuviese en α y fuese perpendicular a la intersección y por (**83**) resultaría $c \perp \beta$, de manera que por P tendríamos a y c perpendiculares a β, lo que es absurdo, luego c es a, luego a está en α.

85. Teorema. — *Si dos planos que se cortan son perpendiculares a un tercer plano, la intersección de los dos primeros es perpendicular al tercero.*

Hip.) α y β se cortan según a; $\alpha \perp \gamma$; $\beta \perp \gamma$, fig. 67.

Tesis) $a \perp \gamma$.

Demostración. — Por un punto P de la intersección de α y β tracemos una recta $m \perp \gamma$. Como P está en α y en β, m también está en α y en β por el corolario último, de manera que esa perpendicular m a γ está en α y en β, es decir, es la intersección de α y β, pero la intersección es a, luego es

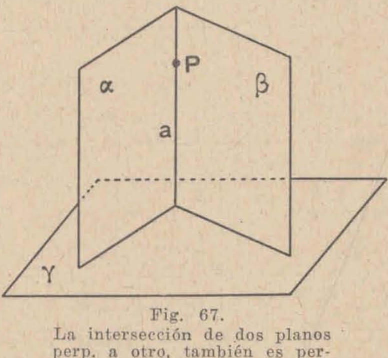


Fig. 67.
La intersección de dos planos perp. a otro, también es perpendicular al mismo.

$$a \perp \gamma.$$

86. TEOREMA. — *Por una recta no perpendicular a un plano pasa un plano y sólo uno perpendicular al primero.*

Hip.) a y α; a no ε α, fig. 68.

Tesis) Por a pasa un solo plano $\beta \perp \alpha$.

Demostración. — Por un punto A de la recta a, tracemos la recta $b \perp \alpha$. Las rectas a y b, que se cortan, determinan un plano β que, por pasar por una recta perpendicular a α (**75**), es perpendicular a α, luego es: $\beta \perp \alpha$.

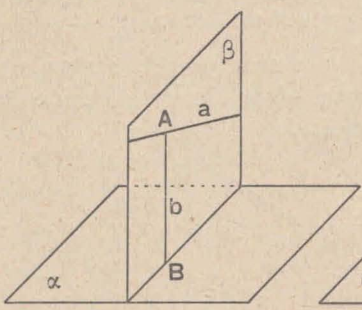


Fig. 68.
Por una recta oblicua a un plano pasa un solo pl. perp. al dado.

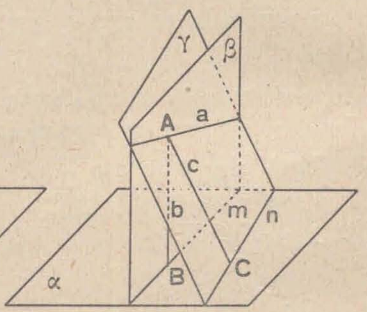


Fig. 69.
El plano que pasa es único.

El plano β es único. Si por a pasara otro plano $\gamma \perp \alpha$, fig. 69, y por el punto A de a trazáramos $b \perp m$ y $c \perp n$, por (**83**) deben ser $b \perp \alpha$ y $c \perp \alpha$, lo que es absurdo, pues se opone al teorema (**40**), luego γ no existe, es decir: β es el único plano que pasa por a y es perpendicular a α.

87. Diedros complementarios. — Dos diedros son *complementarios,* cuando su suma es un diedro recto.

Los diedros $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$ son complementarios, fig. 70, si:

$$\alpha\beta + \beta\gamma = \textit{diedro recto.}$$

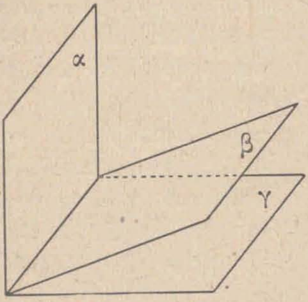


Fig. 70.
Diedros complementarios.

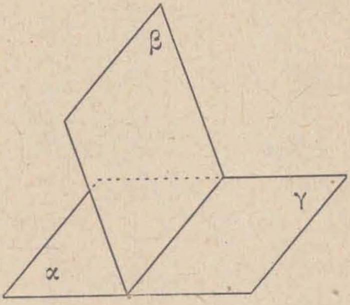


Fig. 71.
Diedros suplementarios.

88. Diedros suplementarios. — Dos diedros son *suplementarios,* cuando su suma es un diedro llano.

Los diedros $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$ son suplementarios, fig. 71, si:

$$\alpha\beta + \beta\gamma = \textit{diedro llano.}$$

89. Corolario. — *Los ángulos diedros adyacentes son suplementarios.*

Si los diedros $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$, fig. 71, son adyacentes (**71**), los semiplanos α y γ deben ser opuestos; luego su suma es el diedro llano $\alpha\gamma$, resultando por definición que los diedros $\alpha\beta$ y $\beta\gamma$ son suplementarios.

90. Bisector de un diedro. — Se llama *bisector de un diedro,* al semiplano que pertenece al diedro y cuyo origen es la arista del mismo y lo divide en dos diedros iguales.

Si $\alpha\gamma = \gamma\beta$, γ es el bisector de $\alpha\beta$, fig. 72.

91. Angulo plano suplementario de un diedro. — Se llama *ángulo plano suplementario de un diedro,* al ángulo suplementario de la sección normal del diedro dado.

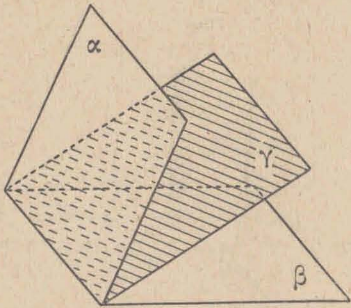


Fig. 72.
Plano bisector de un diedro.

Si el ángulo AOB es la sección normal del diedro $\alpha\beta$, y el ángulo γ es el ángulo suplementario del ángulo AOB, fig. 73:

$$AOB + \gamma = 2R$$

el ángulo γ es el suplementario del diedro $\alpha\beta$.

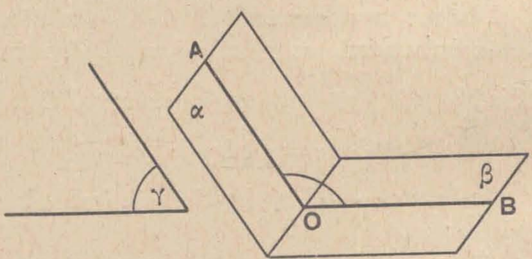


Fig. 73.
Angulo plano suplementario de un diedro.

92. TEOREMA. — *Si por un punto interior a un diedro se trazan perpendiculares a las caras, el ángulo plano formado por las semirrectas que cortan a las caras es suplementario del diedro.*

Hip.) O interior $\alpha\beta$; $OA \perp \alpha$; $OB \perp \beta$, fig. 74.

Tesis) $\widehat{AOB}$ suplementario de $\alpha\beta$.

Demostración. — Las rectas OA y OB determinan el plano π.

Por ser $OA \perp \alpha$, por (**75**) es $\pi \perp \alpha$; por ser $OB \perp \beta$ por (**75**) es $\pi \perp \beta$, y por (**85**) resulta $\pi \perp MN$, de donde deducimos:

$$\left.\begin{array}{l} MN \perp AC \\ \text{y} \quad MN \perp BC \end{array}\right\} \therefore ACB = \textit{sección normal de } \alpha\beta$$

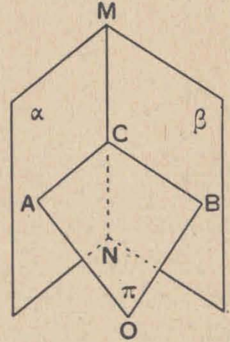


Fig. 74.
El ángulo formado por las perp. a las caras de un diedro es suplementario de él.

Ahora bien; en el cuadrilátero $AOBC$ los ángulos en A y en B son rectos, luego por *Geom. Plana* debe ser:

$$\widehat{AOB} + \widehat{ACB} = 2R$$

y si el ángulo AOB es el suplemento de la sección normal de $\alpha\beta$, es, por definición: $\widehat{AOB}$ *suplementario de* $\alpha\beta$.

93. Triedro trirrectángulo. — Consideremos una recta a perpendicular al plano α. Sea O el pie de la perpendicular, fig. 75. En el plano α tracemos por O las rectas b y c perpendiculares entre sí: $b \perp c$.

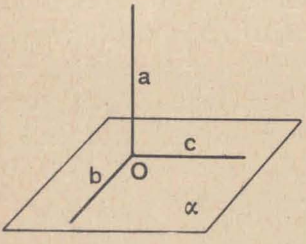


Fig. 75.
Triedro trirrectángulo.

Como la recta a es perpendicular al plano α, por definición debe ser la recta a perpendicular a las rectas b y c, y como éstas son perpendiculares, debe tenerse:

$$a \perp b$$
$$a \perp c$$
$$b \perp c$$

La figura constituída por tres semirrectas que tienen el mismo origen se llama *triedro*, de manera que las semirrectas a, b y c, que tienen común el origen O, constituyen un triedro.

Pero esas tres semirrectas son respectivamente perpendiculares, de manera que se han formado tres ángulos rectos: el ab, el ac y el bc, y en tal caso al triedro que forman se le llama *triedro trirrectángulo*.

SIMETRIA

Simetría respecto a un eje

94. Puntos simétricos respecto a un eje. — Dos puntos son *simétricos* respecto a una recta llamada eje, cuando el eje es perpendicular al segmento que determinan esos puntos, y perpendicular en el punto medio del segmento.

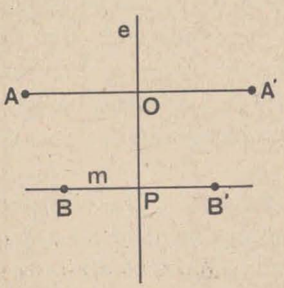


Fig. 76.
Puntos simétricos.

Los puntos A y A' son simétricos respecto al eje e, fig. 76, si se tiene:

$$e \perp AA'; AO = OA'$$

Se comprueba que si plegamos el papel según la recta e, los puntos A y A' coinciden, lo que nos prueba que dos puntos son simétricos respecto a un eje, cuando coinciden haciendo girar 180° a uno de ellos alrededor del eje dado.

95. Construcción de un punto simétrico de otro. — Sea B el punto dado y e el eje, fig. 76. Por B se traza una recta m perpendicular al eje e, y luego en el semiplano determinado por e y que no contiene al punto B se construye $PB' = BP$. El punto B' es el simétrico de B respecto a e en el plano de la figura.

96. Figuras simétricas. — Dos figuras son simétricas respecto a un eje, cuando los vértices de una son ordenadamente simétricos respecto a los vértices de la otra.

En la fig. 77 los polígonos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son simétricos porque:

A' es simétrico de A

B' „ „ „ B

C' „ „ „ C

D' „ „ „ D

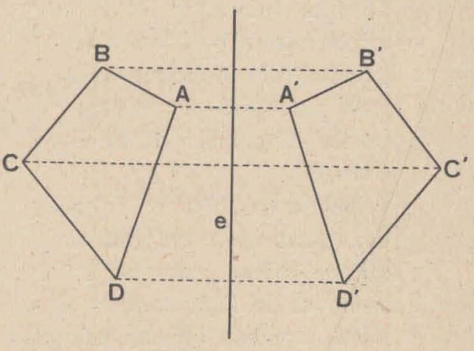


Fig. 77.
Figuras simétricas.

97. Construcción de una figura simétrica de otra. — La figura simétrica de una figura plana respecto de una recta del plano se puede construir de una de las siguientes maneras:

1ª Construímos el punto simétrico de cada vértice de la figura dada, fig. 78.

2ª Se pliega el semiplano que no contiene la figura alrededor del eje *e*, y luego se calca la figura dada, fig. 79.

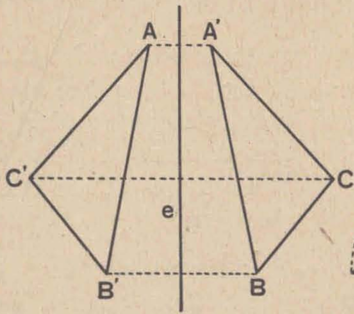


Fig. 78.

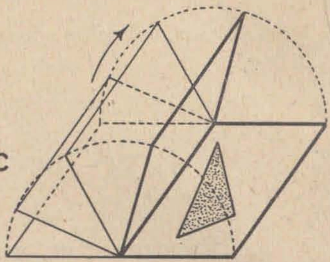


Fig. 79.

3ª Se calca el eje y la figura dada en un papel transparente y luego se invierte el calco colocando los ejes en la misma posición y reproduciendo la figura en la otra parte del plano, como indica el grisado de la figura 80.

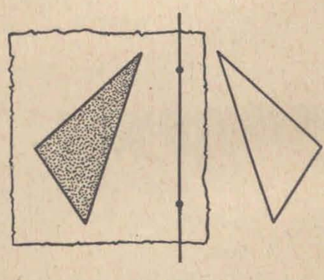


Fig. 80.

Deben tomarse en el eje dos puntos de referencia, que se calcan, como se ha hecho en la figura, pues si no se los tomara la figura calcada podría quedar más alta o más baja que la primitiva figura.

Figuras simétricas respecto a una recta

98. Simétrica de una recta. — La simétrica de una recta es otra recta.

Si la recta *a* corta al eje, fig. 81, basta determinar el punto simétrico *P'* de un punto *P*. Uniendo *O* con *P'* *P'* queda determinada la recta *a'* simétrica a la recta *a*.

Si la recta *b* es paralela al eje, se hallan los simétricos *P'* y *Q'* de dos puntos cualesquiera de la recta. Así queda determinada la recta *b'* simétrica de *b*.

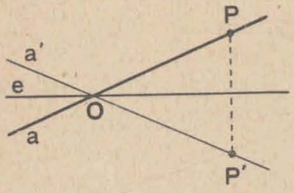


Fig. 81.
La simétrica de una recta es otra recta.

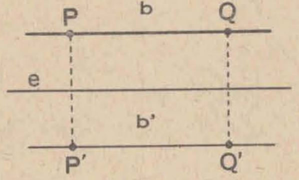


Fig. 82.
Rectas simétricas.

99. Simétrico de un polígono. — Se construye el simétrico de cada vértice del polígono dado, fig. 83.

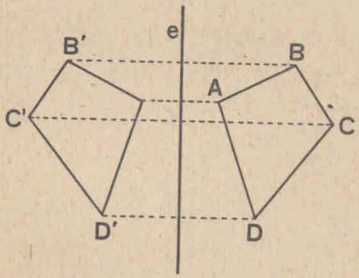


Fig. 83.
Polígonos simétricos.

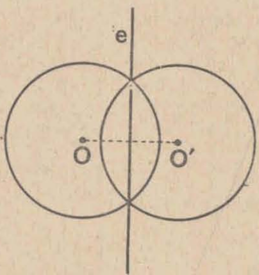


Fig. 84.
Circunferencias simétricas.

100. Simétrica de una circunferencia. — Se halla el punto simétrico del centro de la circunferencia dada, y luego se traza con centro en ese punto y radio igual al dado, una circunferencia, fig 84.

101. Simétrica de una figura cualquiera. — Si la figura es una curva cualquiera, como el rizo de la fig. 85, se marcan en él varios puntos no muy separados y se hallan sus simétricos. Luego se unen éstos en el mismo orden en que están unidos los primeros.

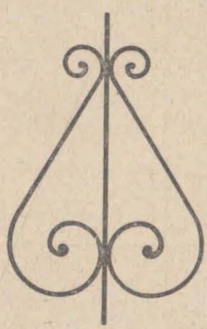


Fig. 85.
Figuras simétricas empleadas en herrería artística.

102. Eje de simetría de una figura. — Una figura tiene *eje de simetría*, cuando al plegarla alrededor del eje coinciden las dos partes en que el eje la divide.

En otros términos, una figura tiene eje de simetría cuando todos los puntos de ella tienen su simétrico respecto al eje de la figura misma.

Ejemplos de figuras con eje de simetría:

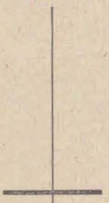


Fig. 86.

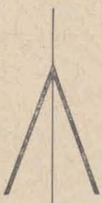


Fig. 87.

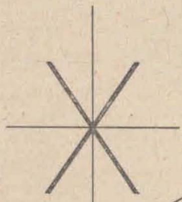


Fig. 88.

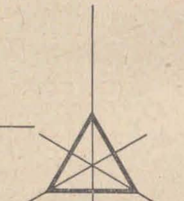


Fig. 89.

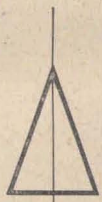


Fig. 90.

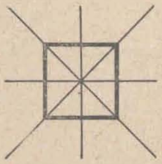


Fig. 91.

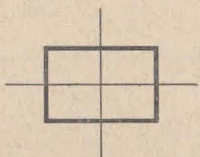


Fig. 92.

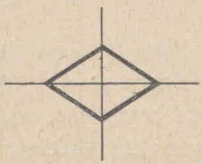


Fig. 93.

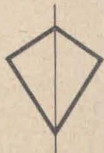


Fig. 94.

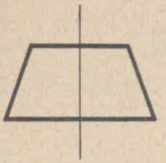


Fig. 95.

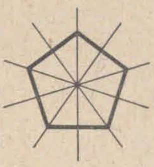


Fig. 96.

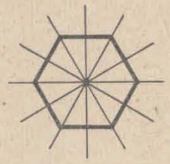


Fig. 97.

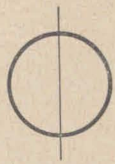


Fig. 98.

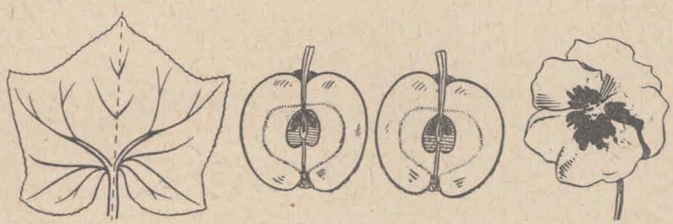


Fig. 99.
La simetría en las hojas, frutos y flores.

103. Aplicaciones. — La simetría de una figura plana respecto a una recta del mismo se emplea en la industria y en las artes decorativas: herrería, carpintería, tipografía, papeles pintados, etc.

104. Problema. — *Hallar la distancia mínima entre dos puntos pasando por una recta.*

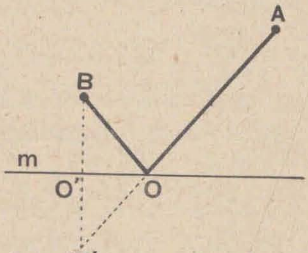


Fig. 100.
Mínima distancia entre dos puntos tocando una recta.

Sean A y B los puntos y m la recta dada, fig. 100. Se trata de determinar la menor distancia que hay entre A y B pasando por m.

Se halla el punto simétrico de B (**95**), que es B'. Luego se une B' con A, quedando así fijado el punto O en la recta m. El punto O se une con A y con B: la menor distancia que hay entre A y B pasando por m es $AO + OB$.

En efecto: la menor distancia entre A y B' es AB', o bien $AO + OB'$. Pero $OB' = OB$ por ser oblícuas que se alejan igualmente del pie de la perpendicular ya que es $BB' \perp m$ y $BO' = O'B$. Entonces tenemos:

Mínima distancia $= AB', = AO + OB' = AO + OB$.

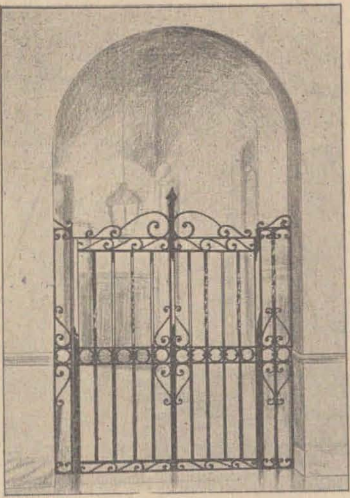


Fig. 101.
Empleo de la simetría en trabajos de herrería.

105. Problema. — Hallar la mínima distancia entre dos puntos interiores a un ángulo, pasando por los lados de éste.

Dados los puntos A y B interiores al ángulo α, fig. 102, se trata de hallar la menor distancia que hay entre A y B pasando por a y b.

Construímos el simétrico de A respecto a a, que es A', y el simétrico de B respecto a b, que es B'. Unimos A' con B' y quedan así fijados los puntos O y O'. Unimos A con O, O con O' y O' con B, y la quebrada $AOO'B$ es la menor distancia buscada.

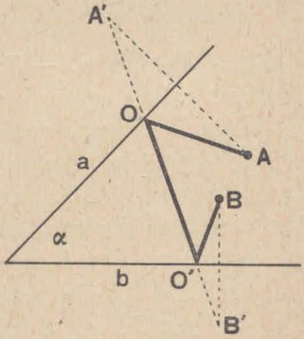


Fig. 102.
Mínima distancia entre dos puntos tocando los lados de un ángulo.

En efecto: la menor distancia entre A' y B' es:

$$\textit{mínima distancia} = A'B' = A'O + OO' + O'B'$$

pero $A'O = AO$ y $O'B' = O'B$ por ser oblicuas que se alejan igualmente del pie de la perpendicular, luego:

$$\textit{mínima distancia} = A'B' = AO + OO' + O'B$$

Simetría respecto a un punto

106. Puntos simétricos respecto a un centro. — Dos puntos son *simétricos* respecto a un punto, llamado *centro,* cuando el centro es el punto medio del segmento que determina los puntos dados.

Los puntos A y A' son simétricos respecto al centro O, fig. 103, si se tiene $OA = OA'$.

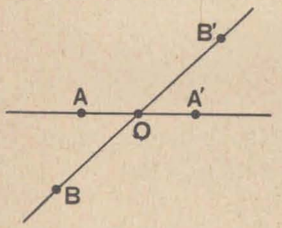


Fig. 103.
Puntos simétricos.

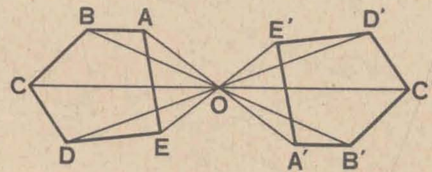


Fig. 104.
Polígonos simétricos.

Se comprueba que si hacemos girar media vuelta, 180°, el punto A' alrededor de O, coincide con A.

107. Construcción de un punto simétrico de otro. — Sea B el punto y O el centro, fig. 103. Unimos B con O y en su prolongación construímos $OB' = OB$. El punto B' es el simétrico de B respecto a O.

108. Figuras simétricas. — Dos figuras son simétricas respecto a un centro, cuando los vértices de una son ordenadamente simétricos respecto de los vértices de la otra.

El polígono *A'B'C'D'E'*, fig. 104, es simétrico de *ABCDE*, respecto a *O*, porque:

A'	es el	simétrico de	*A*
B'	„	„ „	*B*
C'	„	„ „	*C*
D'	„	„ „	*D*
E'	„	„ „	*E*

Si hacemos girar media vuelta, 180°, uno de los polígonos alrededor del centro, coincide con el otro.

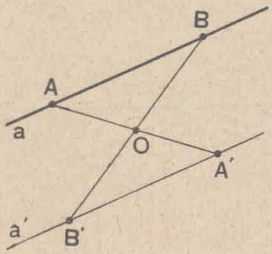


Fig. 105.
La simétrica de una recta es otra recta.

Figuras simétricas respecto a un punto

109. Simétrica de una recta. — La simétrica de una recta es otra recta.

Sea la recta *a* y el centro *O*, fig. 105. En *a* tomamos dos puntos cualesquiera *A* y *B* y hallamos sus simétricos *A'* y *B'*. La recta *a'* que determina estos puntos es la simétrica de la recta *a*.

110. Simétrico de un polígono. — Se construye el simétrico de cada vértice del polígono dado, fig. 104.

111. Simétrica de una circunferencia. — Se halla el simétrico del centro de la circunferencia dada, y luego con radio igual al dado se traza una circunferencia, fig. 106.

112. Simétrica de una figura cualquiera. — Se marcan en ella puntos no muy separados y se hallan sus simétricos. Luego se unen éstos en el mismo orden en que están unidos los primeros, fig. 107.

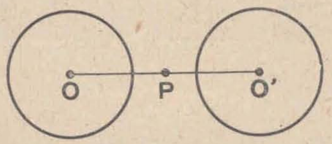


Fig. 106.
Circunferencias simétricas.

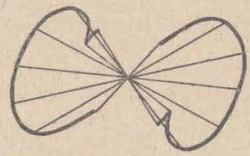


Fig. 107.
Figuras simétricas.

113. Centro de simetría de una figura. — Una figura tiene *centro de simetría O*, cuando todos los puntos de ella tienen su simétrico respecto a *O* en la figura misma.

Ejemplos de figuras con centro de simetría

Fig. 108.

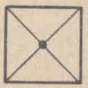


Fig. 109.

Fig. 110.

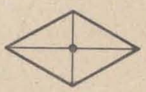


Fig. 111.

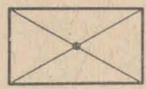


Fig. 112.

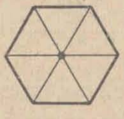


Fig. 113.

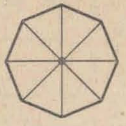


Fig. 114.

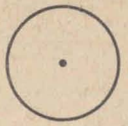


Fig. 115.

114. Figuras directamente iguales. — Dos figuras pertenecientes a un mismo plano son *directamente iguales,* cuando pueden coincidir por un deslizamiento.

Ejemplo: Los triángulos T y T', fig. 117.

Son figuras directamente iguales las que son simétricas respecto a un punto.

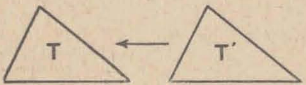


Fig. 117.
Figuras directamente iguales.

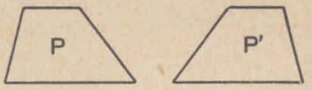


Fig. 118.
Figuras inversamente iguales.

115. Figuras inversamente iguales. — Dos figuras pertenecientes a un mismo plano son *inversamente iguales* cuando para poder coincidir necesitan que gire 180° el plano que las contiene.

Ejemplos: los trapecios P y P', fig. 118.

Son figuras inversamente iguales las que son simétricas respecto a una recta.

Simetría respecto a un plano

116. Puntos simétricos respecto a un plano. — Dos puntos son *simétricos* respecto a un plano, cuando el plano es perpendicular al segmento que determinan en su punto medio.

Los puntos A y A' son simétricos respecto al plano α, fig. 119, si se tiene que es:

$$\alpha \perp A\,A' \text{ y } AO = OA'$$

Si hacemos girar 180° el punto A alrededor del plano α, comprobaremos que coincide con A'.

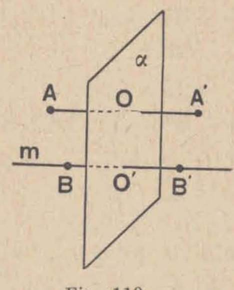


Fig. 119.
Puntos simétricos.

117. Construcción de un punto simétrico de otro. — Sea B el punto dado, fig. 119, y α el plano. Por B se traza una recta m perpendicular al plano α, y luego en el semiespacio determinado por α y que no contiene a B se construye $O'B' = O'B$. El punto B', es el simétrico de B respecto a α.

118. Figuras simétricas. — Dos figuras son simétricas respecto a un plano, cuando los vértices son ordenadamente simétricos respecto a los vértices de la otra, fig. 120.

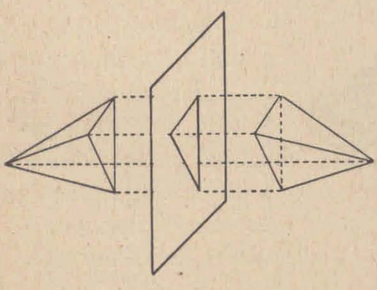


Fig. 120.
Figuras simétricas.

Fig. 121.
Los espejos planos forman figuras simétricas.

Figuras simétricas respecto a un plano

119. Si nos situamos frente a un espejo plano, comprobaremos que:

1º *La imagen simétrica de una recta es otra recta,* que será paralela, oblicua o perpendicular, según sea la recta que consideremos respecto al plano.

2º *La imagen simétrica de una figura plana* (de cartón, por ejemplo), *es otra figura plana inversamente igual a ella.*

3º *La figura simétrica de una mano derecha es una mano izquierda.*

Las manos de una persona son simétricas, inversamente iguales; por eso el guante de una mano no sirve para calzar la otra.

Lo mismo ocurre con los pies.

La imagen de una persona reflejada en un espejo plano es una figura simétrica de ella.

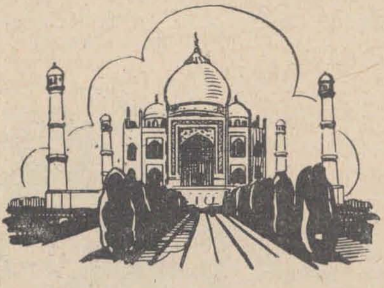


Fig. 122.
Edificio simétrico.
Palacio Taj Mahal, de la India.

La imagen de una embarcación reflejada en el agua es una figura simétrica de ella.

Las fachadas de los grandes edificios públicos generalmente son simétricas: Palacio de Correos, Colegio Nacional "Mariano Moreno", Facultad de Derecho, etc. (fig. 122), de la ciudad de Buenos Aires.

120. Plano de simetría de una figura. — Una figura tiene *plano de simetría* cuando todos los puntos de ella tienen su simétrico respecto al plano en la figura misma.

Ejemplos de figuras con plano de simetría:

Una *recta* tiene por plano de simetría a todos los planos que la contienen.

Un *segmento* tiene por plano de simetría al plano perpendicular a él en su punto medio, fig. 123.

Un *plano* tiene por plano de simetría a sí mismo, y a todos los planos que le son perpendiculares.

Una *figura plana que tiene un eje de simetría,* tiene por plano de simetría al plano perpendicular de la figura y que pasa por el eje, fig. 124.

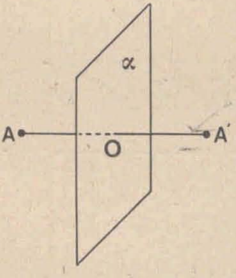


Fig. 123.

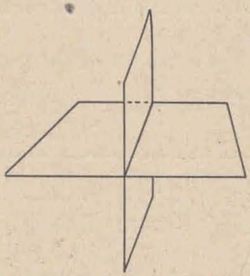


Fig. 124.

121. Elementos de simetría de las figuras. — Hemos dicho que para que dos figuran sean simétricas, deben tener todos sus vértices ordenadamente simétricos.

De aquí deducimos que:

1º Los lados que unen vértices simétricos, también deben ser simétricos.

2º Los ángulos formados por las rectas a que pertenecen esos lados simétricos, también deben ser simétricos.

3º Las caras determinados por vértices simétricos, también son simétricas.

Los vértices simétricos que se corresponden, los ángulos simétricos que se corresponden, y las caras simétricas que se corresponden, se llaman *homólogos* unos de otros, y constituyen los *elementos* de simetría de las figuras.

Relaciones entre las diversas simetrías

122. Figuras con centro, con eje y con plano de simetría. — Las tres clases de simetrías que hemos estudiado están vinculadas entre sí, pudiendo pasarse de una a otra clase mediante las propiedades siguientes cuya demostración omitimos:

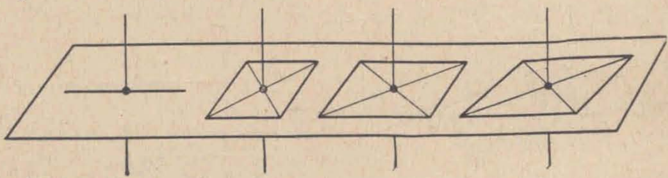


Fig. 125. Fig. 126. Fig. 127. Fig. 128.

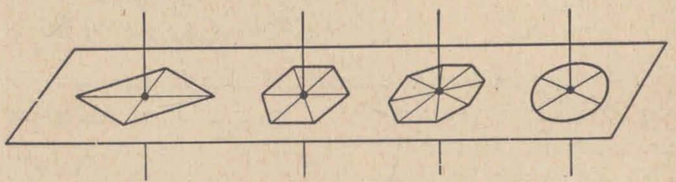


Fig. 129. Fig. 130. Fig. 131. Fig. 132.

Las figuras con centro de simetría tienen como eje de simetría a la recta perpendicular al plano de la figura en el centro.

1º *Si una figura plana tiene un centro de simetría, tiene también un eje de simetría, que es la recta perpendicular al plano de la figura en el centro de simetría.* Si consideramos las figuras 108 a 115, con centro de simetría, procediendo como se ha dicho se obtienen las figuras respectivas 125 a 132, con eje de simetría.

2º *Si una figura plana tiene un eje de simetría, también tiene un plano de simetría, que es el plano que pasa por dicha recta y es perpendicular al plano de la figura.* Si consideramos las figuras 86 a 98, con eje de sime-

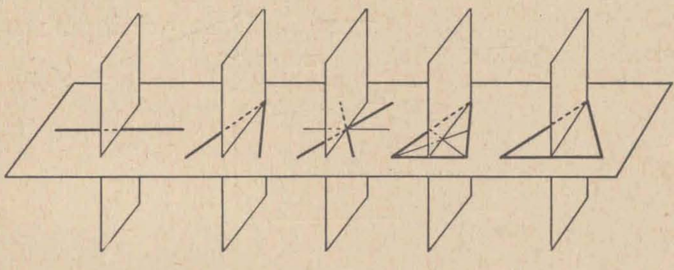


Fig. 133. Fig. 134. Fig. 135. Fig. 136. Fig. 137.

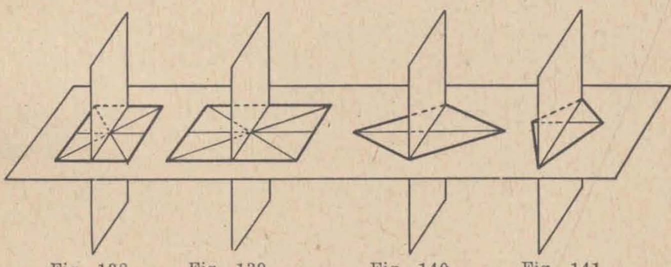


Fig. 138. Fig. 139. Fig. 140. Fig. 141.

Las figuras con eje de simetría tienen como plano de simetría al plano perpendicular al plano de la figura y que pasa por dicho eje.

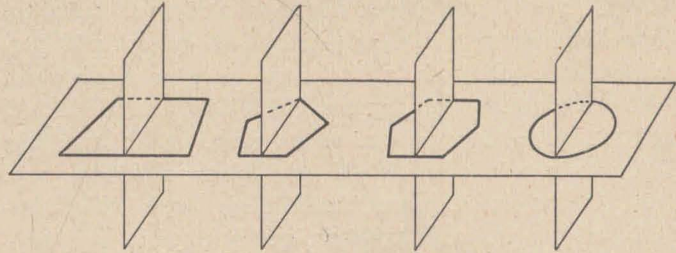


Fig. 142. Fig. 143. Fig. 144. Fig. 145.

tría, trazando *uno* de los distintos planos determinados por los distintos ejes, tenemos las figuras correspondientes 133 a 145 con plano de simetría.

13. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos rectas que se cortan.

14. Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de las caras de un ángulo diedro.

15. Las caras y la arista de un diedro $\alpha\beta$ se cortan con dos planos paralelos. Demostrar que los diedros que se han formado con cada cara del diedro dado son iguales.

16. Demostrar que los planos bisectores de dos diedros adyacentes son perpendiculares.

17. Demostrar que si cuatro semiplanos que tienen común una recta, son tales que de los cuatro diedros que forman el primero es igual al tercero y el segundo es igual al cuarto, el primer semiplano es la prolongación del tercero, y el segundo del cuarto.

18. Demostrar que si dos planos paralelos son cortados por un tercer plano, los diedros alternos internos son iguales, los diedros alternos externos son iguales, y los diedros conjugados son suplementarios.

19. Demostrar que los planos bisectores de dos diedros opuestos por la arista, son un mismo plano.

20. Construir la figura simétrica de un triángulo ABC: 1º, tomando como eje de simetría el lado BC; 2º, tomando como centro de simetría el punto medio de BC; 3º, tomando como eje de simetría la perpendicular a BC en su punto medio.

21. Dado un arco de circunferencia, hallar su eje de simetría.

22. Dado un arco de circunferencia, hallar su simétrico respecto al centro.

23. Demostrar que si una figura tiene dos ejes de simetría rectangulares, la intersección de ellos es un centro de simetría de la figura.

24. Dados dos puntos A y B exteriores a una recta m, encontrar en m un punto C tal CA y CB que formen con m ángulos iguales.

25. Designar y dibujar las letras mayúsculas de imprenta que tienen centro y eje de simetría.

Capítulo III

ESFERA

123. Idea de superficie de revolución. — Se llama *superficie de revolución* a la parte externa de la figura engendrada por una línea cualquiera que gira alrededor de una recta fija a la que está ligada en forma invariable.

Fig. 148.

Fig. 149.

Fig. 150.

Cuerpos de revolución.

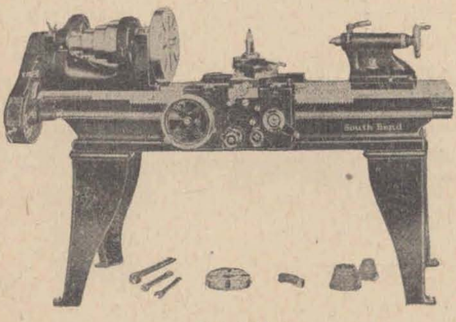


Fig. 151.
Torno mecánico.

La recta fija se llama *eje*, y la línea dada se llama *generatriz*.

Ejemplos: Son superficies de revolución los tiestos, cacharros, jarras, botijos y demás objetos que hacen los alfareros en su torno. Lo mismo los diversos objetos que hacen en el torno respectivo los torneros en madera o los torneros mecánicos.

124. Paralelos. — Se llama *paralelo,* al círculo engendrado por cada punto de la generatriz. El centro de este círculo se halla en el eje, fig. 152.

125. Meridianos. — Se llama *plano meridiano,* el plano que pasa por el eje. La curva determinada por la intersección del plano meridiano y la superficie de revolución se llama corrientemente *meridiano,* fig. 152.

Todo plano meridiano es un plano de simetría de cada paralelo, y por consiguiente de la superficie de la revolución engendrada.

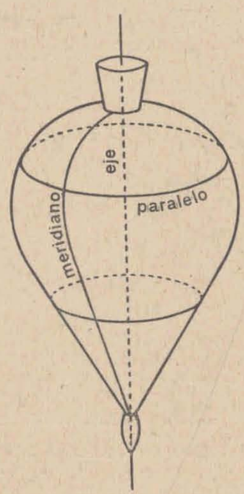


Fig. 152.

126. Superficie esférica. — Definiciones. — Se llama *superficie esférica* a la superficie de revolución engendrada por la rotación de un semicírculo alrededor del diámetro que pasa por sus extremos, fig. 153.

El cuerpo limitado por la superficie esférica se llama *esfera.*

El centro y el radio del semicírculo es el *centro* y el *radio* de la esfera y de la superficie esférica.

Durante el movimiento de rotación del semicírculo, el centro, que está en el eje, permanece fijo, y como el radio siempre es el mismo, deducimos que:

Todos los puntos de la superficie esférica equidistan del centro, o sea: todos los radios son iguales.

También se comprueba que:

La distancia de un punto interior a la esfera es menor que el radio, y que la distancia de un punto exterior es mayor que el radio.

Se llama *cuerda* al segmento que une dos puntos de la superficie esférica; *diámetro* es la cuerda que pasa por el centro.

127. Rectas secante y tangente. — Una recta es *secante* o *tangente* a una superficie esférica si tiene común con ella dos puntos o uno solo. En caso contrario la recta es *exterior.*

128. Esferas iguales. — Dos esferas son *iguales,* si tienen radios iguales.

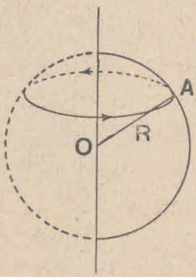


Fig. 153.
Generación de la esfera.

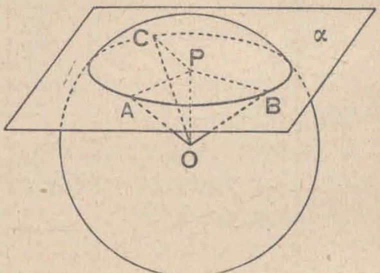


Fig. 154.
Plano secante a una esfera.

129. Intersección de una superficie esférica con un plano. — TEOREMA. — *Si un plano corta a una superficie esférica, la sección que resulta es una circunferencia.*

Hip.) Superficie esférica O de radio R; α corta la esfera O, fig. 154.

Tesis) La sección de α y la superficie esférica O es una circunferencia.

Demostración — Sean A, B, C,... los puntos comunes a la superficie esférica y al plano α.

Como todos los puntos de la superficie esférica equidistan del centro, tenemos:

$$OA = OB = OC = \ldots.$$

Por O tracemos $OP \perp \alpha$ y unamos P con A, B y C. Los triángulos formados son rectángulos (**36**) que tienen el cateto OP común y las hipotenusas OA, OB y OC iguales por ser radios de la superficie, luego esos triángulos son iguales, luego los otros catetos son iguales, es decir:

$$PA = PB = PC$$

lo que nos prueba que los puntos A, B y C del plano equidistan del punto P, luego pertenecen a una circunferencia.

130. Teorema. — *Si la distancia de un plano al centro de una superficie esférica es mayor, igual o menor que el radio, el plano y la superficie esférica no tienen punto común o tienen común un solo punto, o tienen común una circunferencia.*

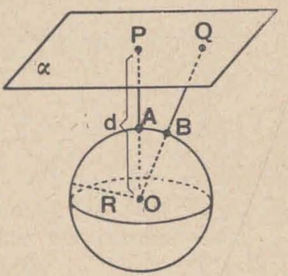


Fig. 155.
Plano exterior a una esfera.

Hip.) Sup. esf. O de radio R; $OP = d =$ dist. de O a α.
$d \gtreqless R$, figs. 155, 156 y 157.

Tesis
I. — Si $d > R$, la sup. esf. y α no tienen punto común;
II. — Si $d = R$, la sup. esf. y α tienen un punto común;
III. — Si $d < R$, la sup. esf. y α tienen común una circunferencia.

Demostración. — I. — Si es $d > R$, el punto P es exterior (**126**); luego P no pertenece a la superficie esférica, fig 155.

Si se tratara de otro punto cualquiera Q se tendría, por ser $OP \perp \alpha$, que en el triángulo rectángulo OPQ la hipotenusa es mayor que un cateto, luego:

$$\left.\begin{array}{r} OQ > OP \\ \text{pero por hipótesis es: } OP > R \end{array}\right\} \therefore OQ > R$$

lo que nos dice que Q es exterior. Pero Q es un punto cualquiera de α, luego todos los puntos de α son exteriores a la superficie esférica, es decir, ésta y α no tienen punto común.

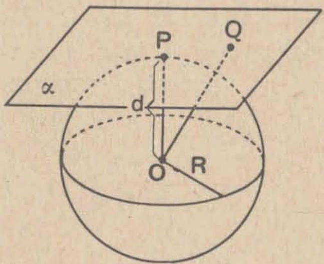


Fig. 156.
Plano tangente a una esfera.

II. — Si es $d = R$, el punto P pertenece a la sup. esf., pero también pertenece a α, luego α y la sup. esf. tienen un punto común, fig. 156.

Cualquier otro punto de α, como Q, no pertenece a la sup. esf. pues resulta su distancia al centro mayor que el radio:

$$\left.\begin{array}{r} OQ > OP \\ \text{Pero: } \quad OP = R \end{array}\right\} \therefore OQ > R$$

lo que nos dice que Q es exterior a la sup. esf., luego P es el único punto común a α y a la sup. esf.

III. — Si es $d < R$, el punto P es interior á la sup. esf., fig. 157. En un plano que pase por OP construímos el triángulo OPB, cuya hipotenusa es igual a R.

Con centro en P y radio PB trazamos una circunferencia en el plano α.

Tomemos un punto C de esta circunferencia; uniéndolo con P y con O resulta un triángulo OPC que es rectángulo, pues es $d \perp \alpha$, e igual al triángulo OPB por tener OP común y $PC = PB$ por ser radios de una misma circunferencia, luego $OC = OB = R$, es decir, que C pertenece a la sup. esf. De la misma manera se prueba que todos los puntos de la circunferencia de centro P pertenecen a la sup esf., y como por construcción dicha circunferencia pertenece a α, resulta que α y la superficie esférica tienen común una circunferencia.

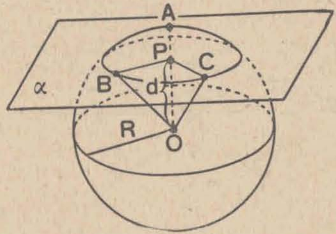


Fig. 157.
Plano secante a una esfera.

131. Planos tangente y secante. — Un plano es *tangente* a una sup. esf., si tiene común con ella un punto, fig. 156.

Un plano es *secante* a una sup. esf. si tiene común con ella una circunferencia, fig. 157.

El plano que no es tangente ni secante, es *exterior*, fig. 155.

132. Teorema. — *Si la distancia de una recta al centro de una esfera es mayor, igual o menor que el radio; la recta y la esfera no tienen punto común, o tienen común un solo punto, o tienen dos puntos comunes.*

Hip.) Sup. esf. O de radio R; OP = dist. de O a m; $d \gtreqless R$, figs. 158, 159 y 160.

Tesis.
I. — Si $d > R$, la sup. esf. y m no tienen punto común;
II. — Si $d = R$, la sup. esf. y m tienen un punto común;
III. — Si $d < R$, la sup. esf. y m tienen dos puntos comunes.

Demostración. — Si es $d > R$, el punto P es exterior, luego P no pertenece a la sup. esf., fig. 158.

Si fuese otro punto Q de m, tendríamos en el triángulo rectángulo OPQ que la hipotenusa es mayor que un cateto:

y como es:
$$\left.\begin{array}{l} OQ > OP \\ OP > R \end{array}\right\} \therefore OQ > R$$

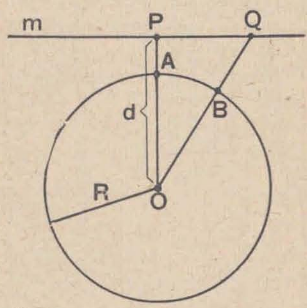


Fig. 158.
Recta exterior a una esfera.

lo que nos dice que Q es exterior, luego la recta m y la sup. esf. no tienen ningún punto común.

II. — Si es $d = R$, fig. 159, el punto P pertenece a la sup. esf., luego la recta m y la sup. esf. tienen un punto común.

Cualquier otro punto de m, como Q, no pertenece a la sup. esf., pues en el triángulo rectángulo OPQ es:

pero
$$\left.\begin{array}{l} OQ > OP \\ OP = R \end{array}\right\} \therefore OQ > R$$

lo que nos dice que Q es exterior a la superficie esférica.

III. — La recta m y el centro O determinan un plano que corta a la superficie esférica según una circunferencia cuya plano es el de la fig. 160, y cuyo radio es el de la superficie esférica.

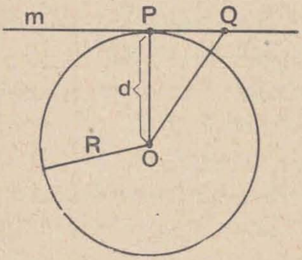


Fig. 159.
Recta tangente a una esfera.

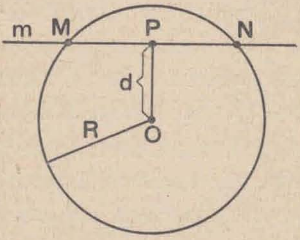


Fig. 160.
Recta secante a una esfera.

Si es $d < R$, el punto P es interior a la circunferencia O (*Geom. Plana*), y sabemos que si una recta m tiene un punto interior a una circunferencia, dicha recta tiene los puntos comunes M y N con la circunferencia. Pero los puntos de la circunferencia son puntos de la superficie esférica, luego M y N, que pertenecen a la recta m, también pertenecen a la superficie esférica.

133. Circunferencias y círculos máximos y menores. — Polos. — Se llama *circunferencia máxima* a la

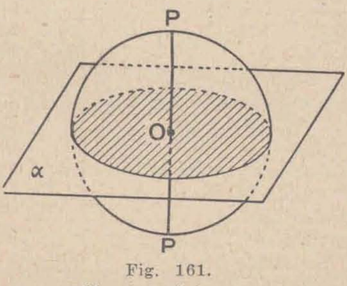


Fig. 161.
Círculo máximo.

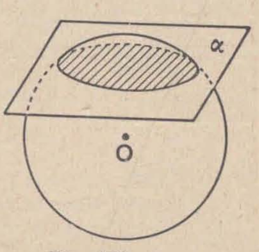


Fig. 162.
Círculo menor.

que resulta al cortar una esfera con un plano que pase por el centro. *Círculo máximo* es el que corresponde a una circunferencia máxima, fig. 161.

El radio de un círculo máximo es el radio de la esfera.

Un círculo máximo divide a la esfera en dos partes iguales llamadas *hemisferios*. Los extremos del diámetro perpendicular a un círculo máximo son los *polos* de la *esfera*. En la fig. 161, los polos son *P* y *P'*.

Si el plano secante no pasa por el centro de la esfera, la circunferencia se llama *circunferencia menor* o *mínima*, y su círculo *círculo menor*, fig. 162.

134. La Tierra como esfera. — Hablando con propiedad, la Tierra no es una esfera, pero se la considera como tal porque en relación con el tamaño de su diámetro (1), el achatamiento que experimenta en los polos es relativamente pequeño.

En *Geografía*, al círculo máximo determinado por la intersección del plano meridiano y la superficie terrestre se llama *Meridiano*, y la longitud de un arco pequeño de meridiano se llama *meridiana*, que es la intersección del plano meridiano y el plano tangente en un lugar cualquiera del globo terráqueo.

Hay tantos meridianos como puntos se consideren en la superficie terrestre.

---

(1) Las dimensiones de la Tierra son las siguientes:
Radio ecuatorial, máximo = 6.377 km.
Radio polar, mínimo = 6.356 km.
Circunferencia meridiana = 40.003 km.
Circunferencia ecuatorial = 40.070 km.
Longitud de la órbita terrestre = 939.200.000 km.

Todos los meridianos tienen *dos puntos comunes,* que son los *polos*: *boreal, ártico* o *norte,* uno; y *austral, antártico,* o *sur,* el otro.

Los polos son los extremos de un diámetro (el menor de todos) llamado *eje del mundo.*

El eje del mundo es perpendicular a un círculo máximo llamado *ecuador,* cuya intersección con la superficie terrestre se llama *línea ecuatorial.*

Se llama *paralelo* a la intersección con la superficie esférica de todo plano paralelo al ecuador.

En un punto cualquiera de la superficie terrestre no pasa más que un solo meridiano y un solo paralelo. La situación de un lugar o de una localidad en la superficie terrestre está determinada con exactitud cuando se conocen el meridiano y el paralelo que pasan por dicha localidad.

Los meridianos se determinan con relación a un meridiano inicial, llamado *primer meridiano* o *meridiano cero,* elegido arbitrariamente, y que es para todos los países modernos el que pasa por *Greenwich,* pueblo de los alrededores de *Londres,* con un Observatorio Astronómico.

Se llama *longitud* de un lugar, el ángulo diedro formado por el meridiano del lugar y el *primer meridiano.* Este ángulo se expresa en grados, minutos y segundos, y se cuenta indiferentemente sobre el ecuador o sobre un paralelo cualquiera. Se mide en el *sentido este* o en el *sentido oeste,* de 0º a 180º.

Todos los puntos de un mismo meridiano tienen igual longitud.

La posición de un paralelo se determina por el valor del arco de meridiano comprendido entre ese paralelo y el ecuador. Se expresa ese arco en grados, minutos y segundos, y su valor se llama *latitud* del lugar.

La latitud se cuenta a partir del ecuador hacia el norte o hacia el sur, y se mide de 0º a 90º.

Todos los puntos de un mismo paralelo tienen la misma latitud.

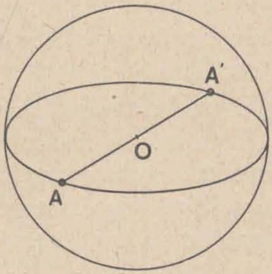


Fig. 164.
El centro de simetría de la esfera es su centro.

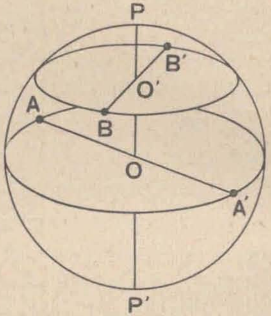


Fig. 165.
El eje de simetría de la esfera es su diámetro.

135. Simetrías en la esfera. — En la esfera se tiene:

1º *El centro de una esfera es el centro de simetría de la misma.*

En efecto, basta considerar los extremos de un diámetro cualquiera AA', fig. 164. Como todos los radios de la esfera son iguales, es $OA = OA'$, luego A y A' son puntos simétricos respecto al centro O.

2º *Todo diámetro de una esfera es un eje de simetría de la misma.*

En la fig. 165, sea PP' un diámetro cualquiera. Sea A un punto cualquiera de la superficie esférica. Por A

tracemos un plano perpendicular al diámetro *PP'*. Sabemos (**129**) que este plano determina un círculo al cortar a la esfera. Sea *BB'* un diámetro de este círculo menor. Por ser dicho círculo perpendicular a *PP'* (**36**), es $BB' \perp PP'$, pero también es $BO = O'B'$ por ser radios de un mismo círculo, luego los puntos *B* y *B'* son simétricos respecto al diámetro *PP'*.

Lo mismo se demostraría si el punto *A* perteneciera al plano del círculo máximo de la esfera.

3º *Todo plano que pase por el centro de una esfera es un plano de simetría de la misma.*

En la figura 166, sea α la sección producida por un plano que pasa por el centro *O*. Sea *A* un punto cualquiera de la superficie esférica. Por *A* tracemos *AA'* perpendicular al plano α. Unamos el centro *O* con *A*, *A'* y con *M*. Los triángulos formados *OAM* y *OA'M* son rectángulos que tienen el cateto *OM* común y las hipotenusas *OA* y *OA'* iguales por ser radios de la esfera, luego los otros catetos son iguales: $AM = A'M$, y como es por construcción $AA' \perp \alpha$, resulta que *A* y *A'* son puntos simétricos respecto al plano

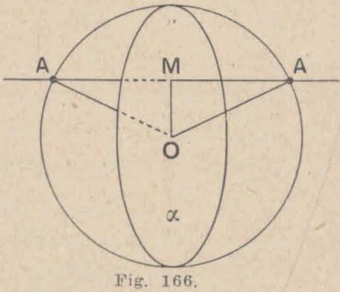


Fig. 166.
Un círculo máximo es un pl. de simetría de la esfera.

136. Teorema. — *Por cuatro puntos no pertenecientes a un mismo plano pasa siempre una esfera y sólo una.*

Hip.) A, B, C y D puntos no coplanares, fig. 167.
Tesis) Por A, B, C y D sólo pasa una esfera.

Demostración. — Unamos los puntos B y C con A y D, resultando así dos triángulos, y sean M y N los centros de las circunferencias circunscriptas a los dos triángulos. Por M trazamos $a \perp$ pl. ABC, y por N la recta $b \perp$ pl. BCD.

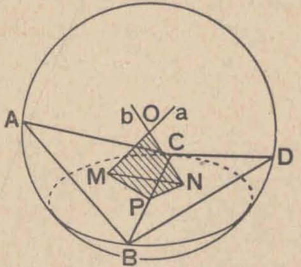


Fig. 167.
Por cuatro puntos no coplanares pasa una esfera.

La recta a es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A, B, y C, y la recta b es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de B, C y D.

Demostraremos que a y b se cortan en O.

Tomemos el punto medio P de BC y unámoslo con M y con N. Como M equidista de B y C, el triángulo MBC es isósceles, luego la mediana MP es perpendicular a BC. Por la misma razón es $NP \perp BC$, luego (**34**) BC es perpendicular al plano que pasa por M, N y P, y por (**85**) el pl. MNP es perpendicular a los planos de los dos triángulos, pero entonces, por (**83**) las rectas a y b se hallan en dicho plano MNP, y como los ángulos que forman a y b con MN no son suplementarios, las rectas a y b se cortan en un cierto punto O, que equidista de los puntos dados, luego O es el centro de una esfera que pasa por ellos.

Por los puntos dados no puede pasar otra esfera, pues el punto O es el único que equidista de A, B, C y D.

137. Posiciones relativas de dos esferas. — Dos esferas son *exteriores* cuando no tienen ningún punto común.

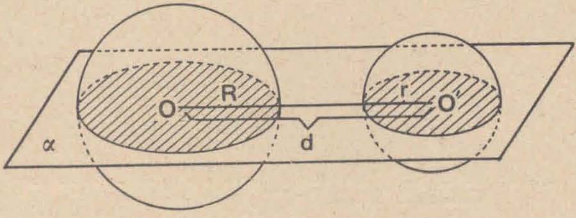


Fig. 168.
Esferas exteriores.

Comprobamos, fig. 168, que si dos esferas son exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios:

$$d > R + r$$

Dos esferas son *tangentes* si tienen un punto común.

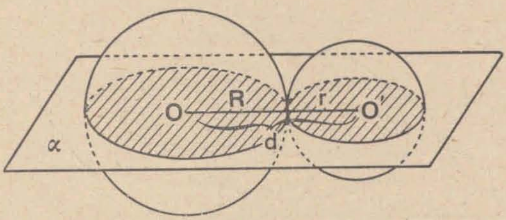


Fig. 169.
Esferas tangentes exteriormente.

Si dos esferas son tangentes *exteriormente*, fig. 169, la distancia de los centros es igual a la suma de los radios:

$$d = R + r$$

Si son tangentes *interiormente*, fig. 170, la distancia de los centros es igual a la diferencia de los radios:

$$d = R - r$$

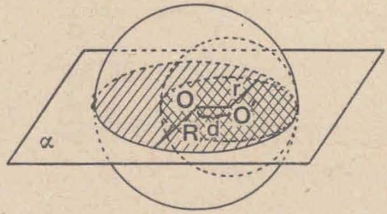


Fig. 170.
Esferas tangentes interiormente.

Dos esferas son *secantes* si tienen común una circunferencia.

Si dos esferas son secantes, fig. 171, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios:

$$d < R + r$$

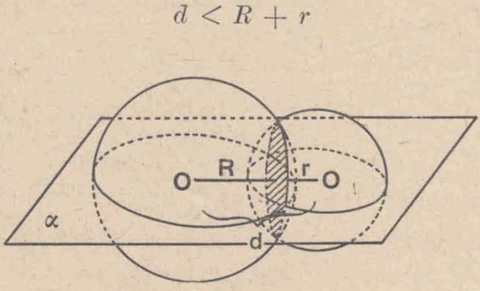


Fig. 171.
Esferas secantes.

Se demuestra que si dos esferas son secantes, la distancia de los centros es perpendicular al plano de la circunferencia común.

Si una esfera es interior a otra, fig. 172, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios:

$$d < R - r$$

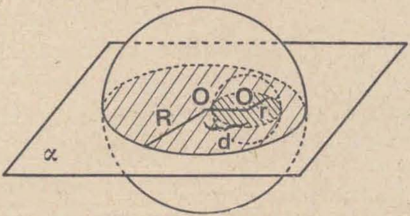


Fig. 172.
Esfera interior a otra.

138. Zona y segmento esféricos. — Se llama *zona* a la parte de superficie esférica comprendida entre dos secciones paralelas. Las secciones se llaman *bases* y *altura* es la distancia de los planos paralelos, fig. 173.

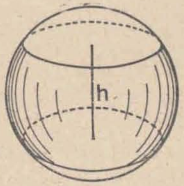


Fig. 173.
Zona esférica.

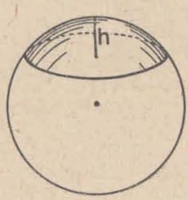


Fig. 174.
Casquete esférico.

Si uno de los dos planos es tangente a la esfera, la zona resulta de una sola base, y entonces se llama *casquete*, figura 174.

Se llama *segmento esférico* a la parte de esfera comprendida entre dos planos paralelos. Si el segmento corresponde a una zona, se llama *bibásico*, fig. 173, y si corresponde a un casquete, se llama *monobásico*, fig. 174.

139. Huso y cuña esféricos. — Se llama *uso esférico* a la parte de superficie esférica comprendida entre dos semi-circunferencias máximas que tienen el mismo diámetro, fig. 175.

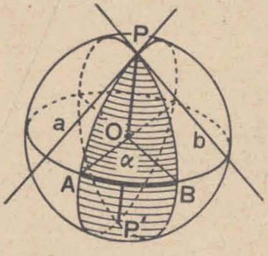


Fig. 175.
Huso y cuña esféricos.

Angulo del huso es el formado por las tangentes *a* y *b* a los semimeridianos en un extremo del diámetro, fig. 192. Este ángulo es igual al diedro que forman las semicircunferencias.

Se llama *cuña esférica* a la parte de esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que tienen un mismo diámetro, y el huso correspondiente, fig. 175.

EJERCICIOS

26. La intersección de dos círculos máximos de una esfera, ¿qué elemento es de la esfera?

27. Por dos puntos *A* y *B* tomados en la superficie esférica pasa un solo círculo máximo.

28. Por tres puntos *A*, *B* y *C* tomados en la superficie esférica pasa un solo círculo menor.

29. Si se corta una esfera con dos planos paralelos que equidistan del centro, las secciones obtenidas son iguales.

30. Se traza un plano secante a una esfera y perpendicular a uno de sus diámetros. Demostrar que los puntos de la circunferencia obtenida equidistan de los extremos dèl diámetro. Diversos casos.

31. Propiedad recíproca de la anterior.

32. Todo ángulo cuyo vértice está en la superficie esférica y cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro, es recto.

33. ¿Cuáles son los elementos de simetría de un hemisferio?

34. Todas las tangentes a una esfera trazadas para un punto de su superficie, pertenecen a un mismo plano.

35. Si por un punto se traza una normal a una esfera y una oblicua, la oblicua es mayor que la normal.

36. Trazar un plano tangente a una esfera y que sea paralelo a un plano dado.

37. Trazar un plano tangente a una esfera y que pase por una recta dada.

Capítulo IV

CILINDRO DE REVOLUCION

140. Superficie cilíndrica. — Se llama *superficie cilíndrica* a la superficie engendrada por una recta que se mueve paralelamente a una recta dada, y apoyándose siempre en una curva fija.

Las diversas posiciones de la recta se llaman *generatrices*.

La curva en que se apoya se llama *directriz*, fig. 176.

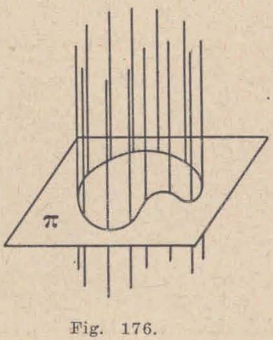


Fig. 176.
Superficie cilíndrica.

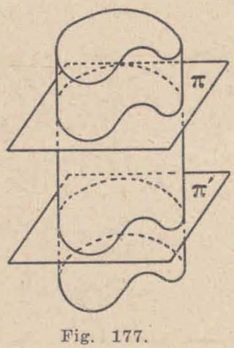


Fig. 177.
Cilindro indefinido.

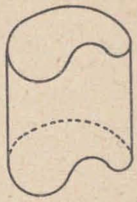


Fig. 178.
Cilindro definido.

141. Superficie cilíndrica circular. — Se llama *superficie cilíndrica circular* al conjunto de rectas que pasan por los puntos de una circunferencia y son perpendiculares al plano de la misma.

El conjunto de rectas *a, b, c,...* perpendiculares al plano de la circunferencia *O*, en *A, B, C,...* es una superficie cilíndrica circular, fig. 179.

Podemos decir, también, que la superficie cilíndrica circular está engendrada por una recta que recorre una circunferencia perpendicularmente al plano de la misma.

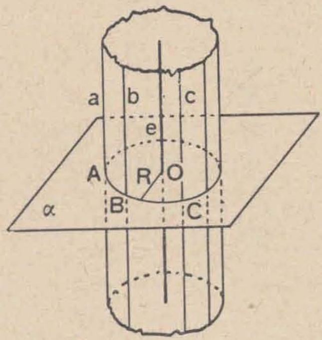


Fig. 179.
Superficie cilíndrica circular.

La circunferencia dada se llama *directriz;* cada una de las rectas se llama *generatriz,* y la perpendicular al plano de la circunferencia que pasa por el centro de ella se llama *eje.* El radio de la circunferencia es el *radio* de la superficie cilíndrica. De las definiciones dadas se deduce que todas las generatrices y el eje de un cilindro son paralelos.

142. Superficies cilíndricas iguales. — Dos superficies cilíndricas circulares son *iguales,* cuando los radios son iguales.

143. Cilindro. Definiciones. — Se llama *cilindro indefinido* a la parte de espacio limitado por una sup. cil. circ. y que contiene al eje de ella, fig. 180.

Se llama *cilindro definido,* o simplemente *cilindro* a la parte de cilindro indefinido comprendido entre dos planos paralelos que cortan a todas las generatrices, fig. 181.

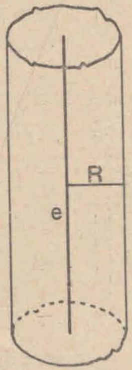


Fig. 180.
Cilindro indefinido.

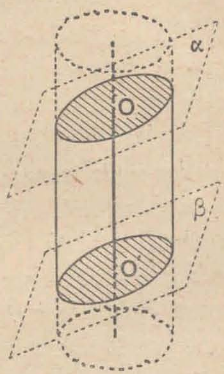


Fig. 181.
Cilindro definido.

Las secciones obtenidas se llaman *bases,* y *altura* la distancia entre las dos bases. La parte de eje del cilindro indefinido comprendida entre las bases es el *eje* del cilindro.

Para designar un cilindro se leen las letras correspondientes a los centros de sus bases. En la fig. 181 tenemos el cilindro *OO'*.

144. Cilindros recto y oblicuo. — Se llama *cilindro recto* al cilindro cuyas generatrices son perpendiculares a las bases, fig. 182.

Se llama *cilindro oblícuo* al cilindro cuyas generatrices son oblícuas a las bases, fig. 183.

En el cilindro oblícuo la altura es menor que el eje y que las generatrices.

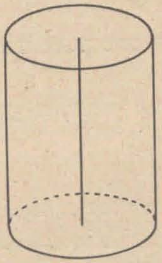


Fig. 182.
Cilindro recto.

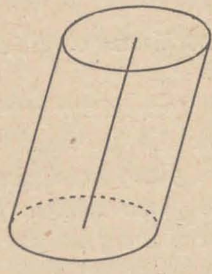


Fig. 183.
Cilindro oblícuo.

145. Cilindro de revolución. — Se llama *cilindro de revolución* a la figura engendrada por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados, figura 184.

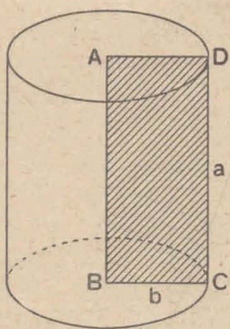


Fig. 184.
Cilindro de revolución

El lado *AB* sobre el cual gira es el *eje* o altura; el lado que gira es el *radio* y el lado *CD* paralelo al eje es la generatriz.

Siendo un rectángulo la figura que engendra al cilindro, se comprende que: *las bases superior e inferior del cilindro son círculos iguales, paralelos y perpendiculares al eje.*

146. Convención. — *Siempre que nos refiramos a un cilindro, quedará entendido que nos referimos al cilindro de revolución.*

147. Cilindros iguales. — Dos cilindros son *iguales* si los radios de sus bases y sus alturas son respectivamente iguales.

Intersección de un cilindro con un plano paralelo al eje

148. Un plano puede cortar a un cilindro paralelamente al eje de varias maneras:

1º el plano pasa por el eje;

2º el plano no pasa por el eje, pero corta al cilindro;

3º el plano pasa por una sola generatriz del cilindro;

4º el plano no corta al cilindro.

149. Plano secante. — Se llama *plano secante,* al plano que corta a un cilindro.

150. 1º **El plano pasa por el eje.** — TEOREMA. — *Si un plano corta a un cilindro y pasa por su eje, la sección que se obtiene es un rectángulo.*

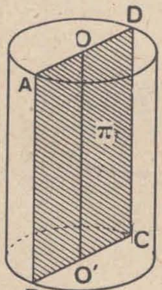


Fig. 185.
Plano secante a un cilindro.

Hip.) Cilindro OO'; plano π pasa por OO'; sección $ABCD$, fig. 185.

Tesis). $ABCD$ es un rectángulo.

Demostración. — Sabemos que las bases de un cilindro son círculos iguales y paralelos (**145**, *in fine*), luego al cortar los planos a que pertenecen con el plano π, las intersecciones serán paralelas (**28a**), luego es $AD // BC$.

Pero las bases son círculos iguales, luego sus diámetros son iguales, es decir: $AD = BC$.

Entonces el cuadrilátero *ABCD* tiene dos lados opuestos iguales y paralelos, luego es un paralelógramo.

En la figura *ABO'O*, que sabemos es un rectángulo, el ángulo *B* es recto, luego todos los demás ángulos de *ABCD* son rectos, luego la sección es un rectángulo.

151. COROLARIO. — *La sección obtenida es el duplo del rectángulo que engendra al cilindro.*

152. 2º El plano no pasa por el eje, pero corta al cilindro. — TEOREMA. — *Si un plano corta a un cilindro, sin pasar por el eje pero paralelo a él, la sección que se obtiene es un rectángulo.*

Hip.) Cilindro OO'; plano $\pi // OO'$; sección *ABCD*, figura 186.

Tesis). *ABCD* es un rectángulo.

Demostración. — Unamos *O* con *A* y con *D*, y *O'* con *B* y con *C*. Las figuras *OABO'* y *ODCO'* son rectángulos, por definición de cilindro de revolución, luego es

$$OO' = AB = DC$$

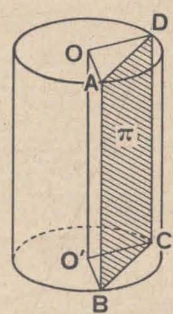


Fig. 186.
Plano secante a un cilindro.

y además: $AB // DC$, luego el cuadrilátero *ABCD* que tiene dos lados opuestos iguales y paralelos es un paralelogramo.

Al ser $AB \perp BO'$, es *AB* perpendicular al plano que engendra *O'B*, luego es, por (**36**), $AB \perp BC$, luego el ángulo *ABC* es recto, luego el paralelogramo *ABCD* es un rectángulo.

153. Corolario. — *La sección que se obtiene es tanto menor cuanto mayor sea la distancia del plano π al eje.*

154. 3º El plano pasa por una sola generatriz del cilindro. Plano tangente. — En tal caso el plano es *tangente* al cilindro, que definiremos así: Se llama plano *tangente* a un cilindro, al que toca al cilindro según una generatriz.

Así, en la fig. 187 el plano π que toca al cilindro *OO'* según la generatriz *AB*, es tangente al cilindro *OO'*.

155. Propiedad del plano tangente a un cilindro. Teorema. — *Todo plano tangente a un cilindro es perpendicular al plano determinado por el eje y la generatriz de contacto.*

Hip.) Cilindro *OO'*; pl. π es tangente al cilindro según la generatriz *AB*; pl. α, determinado por *AB* y *OO'*, figura 187.

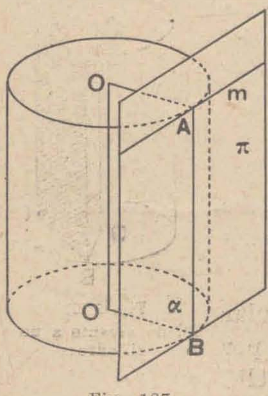


Fig. 187.
Plano tangente a un cilindro.

Tesis) $\pi \perp \alpha$.

Demostración. — En π consideremos la recta *m* tangente en *A* a la circunferencia *O*. Esta tangente es perpendicular al radio que pasa por dicho punto, luego es $OA \perp m$. Pero, por ser un cilindro de revolución, es $OA \perp AB$, luego si *OA* es perpendicular a dos rectas del plano π es perpendicular al plano π, es decir: $OA \perp \pi$.

Procediendo de igual manera

respecto al radio $O'B$ llegaremos a igual conclusión: $O'B \perp \pi$. Pero si dos rectas, la OA y la $O'B$, son perpendiculares a un plano, el plano π, el plano determinado por dichas rectas es perpendicular al plano dado, luego el plano α es perpendicular al plano π: $\alpha \perp \pi$.

156. 4º El plano no corta al cilindro. Plano exterior. — En tal caso el plano es *exterior* al cilindro.

En la figura 188, el plano π es exterior al cilindro OO', pues siendo paralelo al eje, no corta al cilindro.

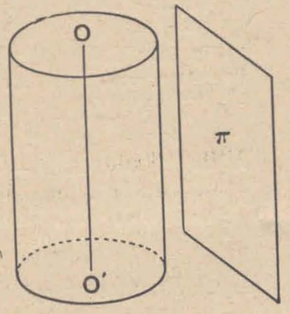


Fig. 188.
Plano exterior a un cilindro

157. Corolarios. — De las propiedades que acabamos de estudiar, deducimos que:

1º *Si un plano es secante a un cilindro, su distancia al eje es menor que el radio, y corta al cilindro según dos generatrices;*

2º *Si un plano es tangente a un cilindro, su distancia al eje es igual que el radio, y corta al cilindro según una generatriz;*

3º *Si un plano es exterior a un cilindro, su distancia al centro es mayor que el radio, y no corta al cilindro.*

158. Tangente a una esfera. — Una recta es *tangente* a una esfera, cuando toca a la esfera en un solo punto.

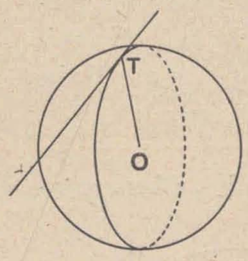


Fig. 189.
Recta tangente a una esfera.

La recta *a*, fig. 189, es tangente a la esfera *O* porque la toca en un solo punto.

Se deduce fácilmente que la tangente a una esfera es tangente al círculo máximo determinado por el plano que determinen la recta dada y el centro de la esfera.

159. Teorema. — *La recta tangente a una esfera es perpendicular al radio de la esfera que pasa por dicho punto.*

Hip.) Recta a y esfera O; a tg. O en T, fig. 189.

Tesis). $a \perp O\,T$.

Demostración. — La recta y el punto O determinan un plano que corta a la esfera según una circunferencia máxima. Ahora bien, esta circunferencia tiene común con a el punto T, luego a es tangente a ella, y por consiguiente, perpendicular al radio que pasa por T. Pero este radio de la circunferencia es el radio de la esfera, luego es $a \perp O\,T$.

160. Teorema. — *Todas las tangentes trazadas a una esfera por los puntos de una circunferencia máxima, son paralelas.*

Hip.) Esfera O; cif. máxima O; a, b y c tangentes a O en A, B y C, respect., fig. 190.

Tesis) $a // b // c // \ldots$

Demostración. — Tracemos por O la recta e perpendicular al plano del círculo máximo. Por (**36**) resulta: $e \perp AO$, $e \perp BO$, $e \perp CO$.

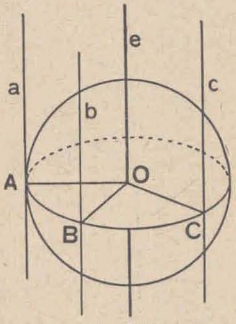


Fig. 190.
Tangentes a una esfera.

Al ser a tangente a la esfera en el punto A, por el teorema anterior es $a \perp AO$ y como es $e \perp AO$, resulta que a y e son paralelas por ser perpendiculares a una misma recta, luego: $a // e$.

De la misma manera demostraremos que es $b // e$ y $c // e$. Comparando estas relaciones de paralelismo deducimos que es: $a // b // c$.

A igual conclusión llegaríamos si fuesen más tangentes.

161. Esfera inscripta. — Corolario. — Conforme con la definición de superficie cilíndrica circular, podemos decir que: *Todas las tangentes a una esfera trazadas por los puntos de una circunferencia máxima constituyen una superficie cilíndrica circular.*

En tal caso, la esfera está *inscripta* en la superficie cilíndrica circular, y ésta está circunscripta a la esfera.

La circunferencia dada se llama *circunferencia de contacto.*

162. Planos tangentes a un cilindro que pasan por una recta paralela al eje. — Teorema. — *Por una recta* *exterior a un cilindro y paralela al eje pasan dos planos tangentes al cilindro.*

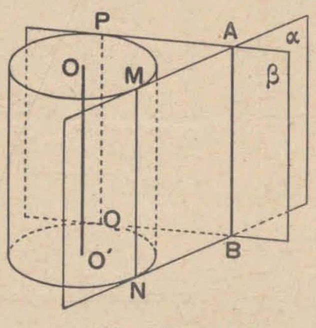


Fig. 191.
Planos tangentes a un cilindro.

Hip.) Cilindro OO'; AB ext. y $//OO'$, fig. 191.

Tesis). Por AB pasan dos planos tangentes a OO'.

Demostración. — Sea A el punto en que AB corta al plano que contiene a la base superior del cilindro, de centro O. Por A, punto exterior a la circunferencia O, sabemos que se pueden trazar dos rectas tangentes a O. Sean AM y AP esas dos tangentes.

Por M tracemos una recta MN paralela a OO'; esta recta MN es una generatriz del cilindro (**140**). Como es:

$$\left.\begin{array}{l} MN//OO' \text{ por const.} \\ AB//OO \text{ por hip.} \end{array}\right\} \text{es } \underline{MN//AB}$$

Las rectas paralelas MN y AB determinan un plano α, (**11**), que tienen común con el cilindro una generatriz, luego es el plano α tangente al cilindro OO'.

Lo mismo se demostraría que por AB pasa otro plano β que es tangente a OO' según la generatriz PQ, luego por AB pasan dos planos tangentes al cilindro dado.

163. Planos tangentes a una esfera, que pasan por una recta determinada. — TEOREMA. — *Por una recta* *exterior a una esfera pasan dos planos tangentes a dicha esfera.*

Hip.) Esfera O; AB ext. a O, fig. 192.

Tesis). Por AB pasan dos planos tangentes a la esfera O.

Demostración. — Por el punto O trazamos el plano π perpendicular a AB. Al pasar el plano π por el centro O, determina en la esfera una circunferencia de centro O, (**129**), y en

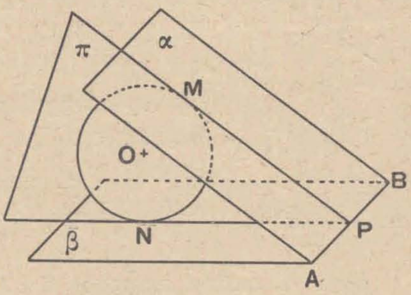


Fig. 192.
Planos tangentes a una esfera.

la recta AB determina el punto P. En el plano π sabemos que por P se pueden trazar dos tangentes a la circunferencia O. Sean PM y PN esas dos tangentes.

El punto M y la recta AB determinan el plano α, que es tangente a la esfera O en el punto M. Lo mismo ocurre con N y AB, que determinan el plano β, tangente en N, luego por AB pasan dos planos tangentes a la esfera O.

Simetría en el cilindro

164. Simetría central. — *En un cilindro, el punto medio de su eje o altura es el centro de simetría.*

Sea O, fig. 193, el punto medio de la altura, y P un punto cualquiera de la superficie del cilindro.

Por O tracemos PP'. El punto P' es el simétrico de P. En efecto: tracemos por P y por P' sendas perpendiculares al eje AB. Se forman los triángulos rectángulos POC y $P'OD$, *que son iguales por tener los catetos* PC y PD iguales por ser radios del cilindro, y los ángulos 1 y 2 iguales por ser opuestos por el vértice. Al ser iguales los triángulos rectángulos, sus hipotenusas son iguales, luego $PO = OP'$, luego P y P' son simétricos, luego O es el centro del simetría del cilindro.

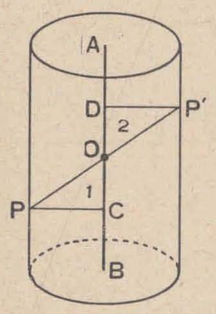


Fig. 193.
Centro de simetría en el cilindro.

165. Simetría respecto a un eje. — *El eje de un cilindro es un eje de simetría.*

En efecto: la rotación de 180° del cilindro hace que coincida consigo mismo, fig. 194, luego el eje de rotación es un eje de simetría de todos sus meridianos.

166. Simetría respecto a un plano. — *Todo plano que pase por el eje de rotación es un plano de simetría.*

Ya hemos visto (**122**, 2º) que toda figura que tiene un eje de simetría tiene también un plano de simetría, que es el plano que pasa por dicho eje, fig. 194. Como el cilindro de revolución tiene un eje de simetría, tiene como plano de simetría a todos los planos que pasan por el eje.

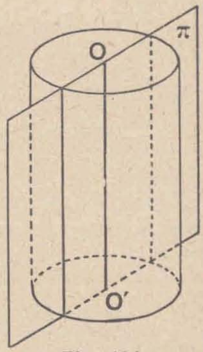


Fig. 194.
Eje y plano de simetría en un cilindro.

167. La simetría respecto a un eje y a un plano en el cilindro puede demostrarse directamente de la misma manera como lo hacemos en el cono, en el Capítulo siguiente.

Intersección de un cilindro con un plano cualquiera

168. Un plano cualquiera puede cortar a un cilindro de dos maneras diferentes:

1º perpendicularmente al eje;

2º oblícuamente al eje.

(Nótese que quedan excluídas las posiciones del plano paralelo al eje porque ya se ha estudiado en las páginas 106 a 109 y siguientes).

169. Sección normal. — *Sección* de una superficie cilíndrica es la figura que resulta al cortar con un plano todas sus generatrices.

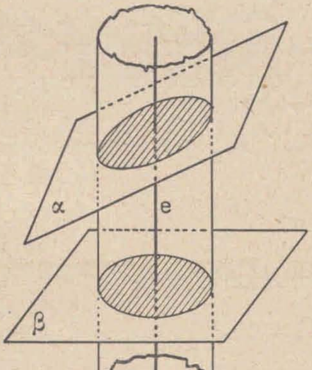


Fig. 195.
Secciones en el cilindro.

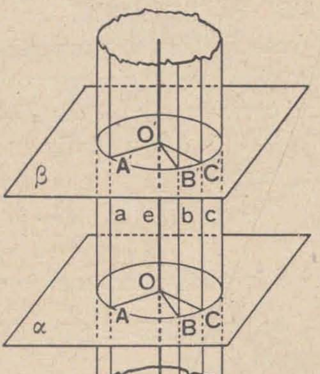


Fig. 196.
La sección normal es una circunferencia.

Si el plano corta perpendicularmente a las generatrices, la sección se llama *sección normal.*

Para que una sección sea normal, basta que el plano secante sea perpendicular al eje de la superficie cilíndrica.

En la fig. 195 la sección producida por α es una sección cualquiera, mientras que si es $\beta \perp e$, la sección producida es una sección normal.

170. 1º **Plano perpendicular al eje.** — TEOREMA. — *La sección normal de una superficie cilíndrica circular es una circunferencia.*

Hip.) Sup. cil. circular de eje e y radio R; $\beta \perp e$, figura 196.

Tesis). La sección producida por β es una circunferencia.

Demostración: Las generatrices y el eje son paralelas (**140**), es decir: $a /\!/ e$. Por hipótesis es $\alpha \perp e$ y $\beta \perp e$, y como dos planos perpendiculares a una recta son paralelos **42d**), es $\beta /\!/ \alpha$, y como a y e determinan un plano que corta a α y β en OA y $O'A'$, por (**47**) resulta $O'A' /\!/ OA$, luego la figura $AOO'A'$ es un paralelogramo, luego:

$$O'A' = OA \qquad (1)$$

De la misma manera se demostraría que:

$$O'B = OB;\ O'C' = OC; \ldots\ldots \qquad (2)$$

Pero los segundos miembros de (1) y (2) son iguales por hipótesis, luego:

$$O'A' = O'B' = O'C' \ldots\ldots$$

y si todos los puntos de la sección producida por β equidistan de O, esa sección es una circunferencia.

171. COROLARIOS. — I. *Las secciones normales de una superficie cilíndrica circular son paralelas e iguales.*

II. *Al ser circunferencias las secciones normales de una superficie cilíndrica, en el cilindro dichas secciones son círculos.*

172. 2º **Plano oblicuo al eje.** — Si el plano π, fig. 197, corta al cilindro de eje OO', la sección obtenida es una elipse.

Su estudio corresponde a otros cursos.

173. Cilindro truncado. — Se llama *cilindro truncado*, o *tronco de cilindro*, a la parte de cilindro comprendida entre una base y la sección producida por un plano que lo corta ablicuamente.

En la fig. 197 el plano π ha determinado dos cilindros truncados.

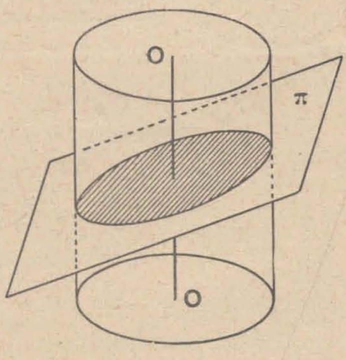


Fig. 197.
Plano oblicuo a un cilindro.

174. Desarrollo de un cilindro. — Para *desarrollar un cilindro* se considera a su superficie como formada por una hoja de papel y se la corta según una generatriz. Luego se la desenrolla y se extiende en un plano. Se obtiene así un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro, y cuya altura es la altura o generatriz del cilindro, fig. 198.

Al rectángulo obtenido se le agregan los círculos de la base.

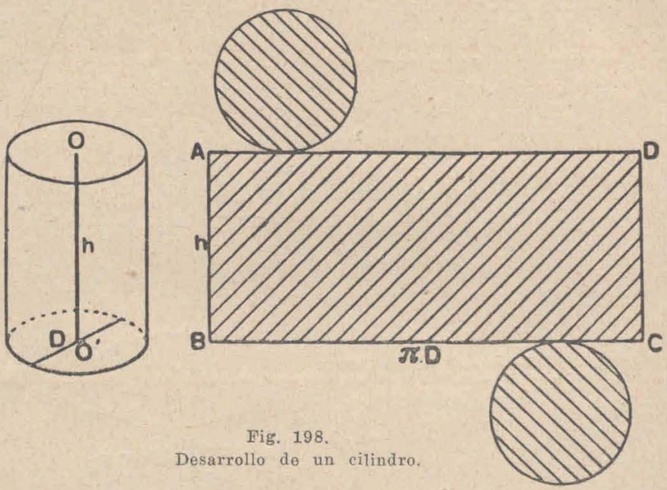


Fig. 198.
Desarrollo de un cilindro.

EJERCICIOS

38. Construir un cilindro dadas tres generatrices.

39. Por un punto dado trazar los planos tangentes a un cilindro.

40. Dos cilindros son tangentes. Trazar el plano tangente común.

41. Dados una esfera y un cilindro, trazar los planos tangentes comunes.

42. Dados dos cilindros paralelos, trazar los planos tangentes comunes.

43. Por un punto dado, trazar todas las rectas que equidistan de otro punto dado.

44. Construir un cono dadas tres generatrices.

45. Por un punto dado, trazar los planos tangentes a un cono.

46. Dados una esfera y un cono, trazar los planos tangentes comunes.

47. Dados un cono y un punto, trazar los planos tangentes al cono y que estén a una cierta distancia *d* del punto dado.

Capítulo V

CONO DE REVOLUCION

175. Superficie cónica. — Se llama *superficie cónica* a la superficie engendrada por una recta que se mueve apoyándose constantemente en un punto dado y siguiendo a una curva fija.

El punto dado se llama *vértice* o *cúspide;* las diversas posiciones de la recta se llaman *generatrices;* la curva en que se apoya se llama *directriz,* fig. 199.

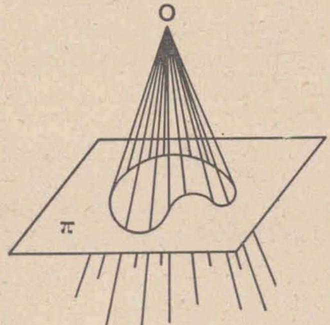


Fig. 199.
Superficie cónica.

176. Superficie cónica circular. — Definiciones. — Se llama *superficie cónica circular* al conjunto de semirrectas determinadas por un punto de una recta perpendicular al plano de una circunferencia en el centro de la misma, y los puntos de la circunferencia, figura 200.

Podemos decir también, que la superficie cónica circular está engendrada por una recta que recorre una circunferencia, apoyándose en un punto de la recta perpendicular al plano de la circunferencia en su centro.

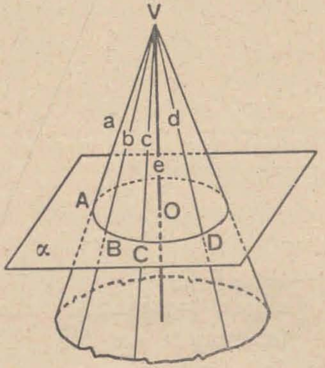


Fig. 200.
Superficie cónica circular.

El punto V de la perpendicular e en O al plano α, origen de las semirrectas, se llama *vértice* y *generatrices* las semirrectas a, b, c,... La circunferencia O se llama *directriz*, y la perpendicular VO se llama *eje*.

177. Corolario. — *Todas las generatrices forman con el eje ángulos agudos iguales.*

El ángulo formado por el eje VO y una generatriz VA se llama *abertura*. La *abertura* siempre es un ángulo agudo.

178. Superficies cónicas iguales. — Dos superficies cónicas circulares son *iguales*, si sus aberturas también lo son.

179. Cono. — Se llama *cono indefinido* a la parte de espacio limitada por una superficie cónica circular y que contiene al eje de ella, fig. 201.

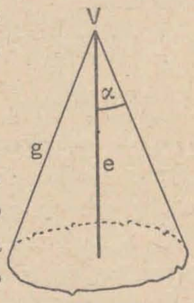


Fig. 201.
Cono indefinido.

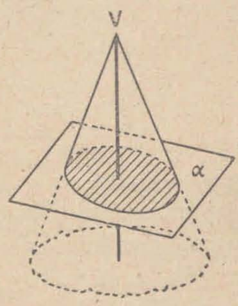


Fig. 202.
Cono definido.

Se llama *cono finito*, o simplemente *cono*, a la parte de cono indefinido comprendida entre el vértice y la sección producida por un plano que corta a todas las generatrices, fig. 202. La sección obtenida es la *base* del cono; *altura* es la distancia del vértice a la base.

Si la base es perpendicular al eje, el cono es *recto*.

180. Tronco de cono. — Se llama *tronco de cono* a la parte de cono comprendida entre su base y la sección producida por un plano que corte a todas las generatrices, fig. 203.

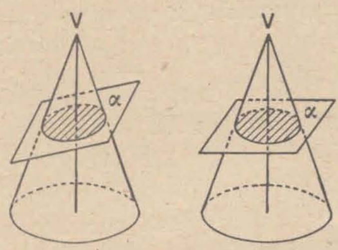


Fig. 203.
Troncos de cono.

La nueva sección y la base del cono son las *bases* del tronco de cono. Si las bases son paralelas y perpendiculares al eje del cono, el tronco es *recto de bases paralelas*.

181. Cono de revolución. — Se llama *cono de revolución* a la figura engendrada por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos, figura 204.

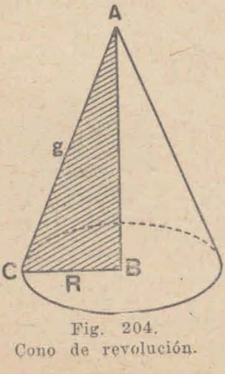


Fig. 204.
Cono de revolución.

El lado sobre el cual gira es el *eje* o *altura;* el cateto que gira es el radio de la base del cono, y la hipotenusa es la *generatriz*.

De la definición de cono de revolución se deduce que: *todas las generatrices son iguales.*

182. Convención. — *Siempre que nos refiramos a un cono, quedará entendido que nos referimos al cono de revolución.*

183. Conos iguales. — Dos conos son *iguales* si son iguales sus alturas y los radios de sus bases, respectivamente.

Intersección de un cono con un plano que pasa por el vértice

184. Un plano que pase por el vértice de un cono puede cortarlo de varias maneras:

1ª el plano pasa por al eje;

2ª el plano no pasa por el eje, pero corta al cono;

3ª el plano pasa por una sola generatriz del cono;

4ª el plano no corta al cono.

185. Plano secante. — Se llama *plano secante,* al plano que corta a un cono.

186. 1º **El plano pasa por el eje.** — TEOREMA. — *Si un plano corta a un cono y pasa por su eje, la sección que se obtiene es un triángulo isósceles.*

Hip.) Cono VO; plano π pasa por VO; sección VAB, fig. 205.

Tesis) VAB es un triángulo isósceles.

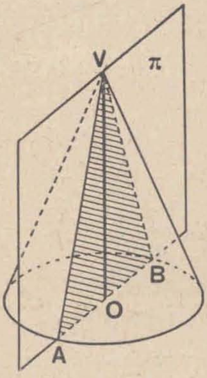


Fig. 205.
Plano secante que pasa por el eje.

Demostración. — Al pasar el plano π por VO, pasa por O, que es el centra del círculo de la base, luego la intersección de π con el plano de la base es el diámetro AB.

Las intersecciones de π con la superficie cónica son las generatrices VA y VB, que son iguales (**181**), luego el triángulo VAB, que tiene dos lados iguales, es isósceles.

187. Corolario. — *La sección obtenida es el duplo del triángulo rectángulo que engendra al cono.*

Si un plano corta a un cono pasando por el vértice pero sin pasar por el eje, la sección que se obtiene es un triángulo isósceles.

188. 2º **El plano no pasa por el eje, pero corta al cono** — Teorema. — *Si un plano corta a un cono pasando por el vértice pero sin pasar por el eje, la sección que se obtiene es un triángulo isósceles.*

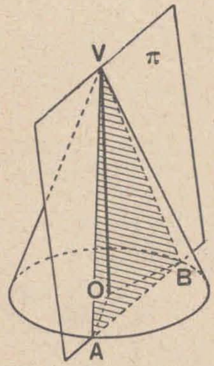


Fig. 206.
Plano secante que no pasa por el eje.

Hip.) Cono VO; plano π pasa por V, pero no por VO; sección VAB, fig. 206.

Tesis) VAB es un triángulo isósceles.

Demostración. — El plano π corta al plano de la base según la secante AB. Si unimos A y B con V, resulta $VA = VB$, *pues todas las generatrices de un cono de revolución son iguales*, luego el triángulo VAB que tiene dos lados iguales, es isósceles.

189. Corolario. — *La sección que se obtiene es tanto menor cuanto mayor sea la distancia del plano π al centro O.*

190. El plano pasa por una sola generatriz del cono. — Plano tangente. — Si el plano que pasa por el vértice pasa, además, por una sola generatriz del cono, el plano es *tangente* al cono, que definiremos así: Se llama plano *tangente* a un cono, al que toca al cono según una generatriz.

Así, en la fig. 207, el plano π que toca al cono VO según una generatriz VO, es tangente al cono.

191. Propiedad del plano tangente a un cono. — Teorema. — *Todo plano tangente a un cono es perpendicular al plano determinado por el eje y la generatriz de contacto.*

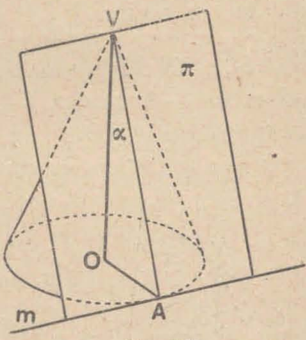


Fig. 207.
Plano tangente a un cono

Hip.) Cono VO; plano π tangente a VO según VA; plano α determinado por VO y VA, fig. 209.

Tesis) Plano $\pi \perp$ plano α.

Demostración. — En el plano π consideremos la recta m tangente en A a la circunferencia O. Esta tangente es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia, luego es: $OA \perp m$.

Unamos A con V. La generatriz VA y la recta m determinan el plano π que pasa por V y por la generatriz VA.

El plano π es perpendicular al plano α, determinado por VA y VO.

En efecto: tenemos que es:

$VO \perp OA$, por definición de cono de revolución,

y $OA \perp m$, por construcción.

luego, por el teorema de las tres perpendiculares resulta (**37**):

$$\pi \perp \alpha$$

192. 4º **El plano no corta al cono.** — En tal caso el plano se llama *plano exterior*, fig. 208.

193. Corolarios. — De las propiedades que acabamos de estudiar, deducimos que:

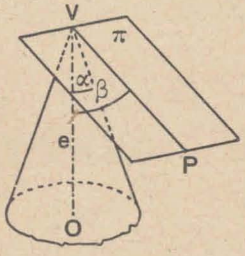


Fig. 208.
Plano exterior a un cono.

1º *Si un plano es secante a un cono y pasa por el eje, corta al cono según dos generatrices*, figura 205.

2º *Si un plano pasa por el vértice de un cono y no pasa por el eje, corta al cono según dos generatrices, y el ángulo que forma con el eje del cono es menor que la abertura del mismo*, fig. 206.

3º *Si un plano es tangente a un cono, el ángulo que forma con el eje es igual a la abertura del cono*, fig. 207.

4º *Si un plano pasa por el vértice de un cono y es exterior al mismo, el ángulo que forma con el eje es mayor que la abertura del cono*, fig. 208.

Planos tangentes a una esfera, que pasan por un punto determinado

194. Teorema. — *Todas las tangentes a una esfera trazados por un punto exterior a ella, son iguales.*

Hip.) Esfera O; punto P; tangentes PA, PB, PC,... fig. 209.

Tesis) $PA = PB = PC = \ldots$

Demostración. — El eje PO con cada uno de los puntos A, B, C,... determinan planos, que cortan a la esfera según círculos máximos, pues pasan por el centro O. Todos esos círculos son iguales, pues tienen el mismo radio, el de la esfera, luego todos las tangentes trazadas a esos círculos iguales desde el mismo punto P, son iguales. Pero estas tangentes iguales $PA = PB = PC = \ldots$ son, al mismo tiempo, tangentes a la esfera, luego todas las tangentes trazadas a una esfera desde un mismo punto son iguales.

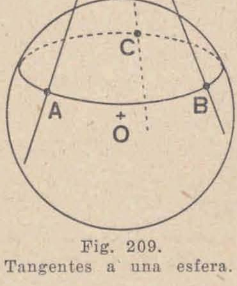


Fig. 209.
Tangentes a una esfera.

195. Esfera inscripta. — Corolarios. — I. *Por el punto exterior P se pueden trazar infinitas tangentes a la esfera O.*

Esas infinitas tangentes constituyen un cono circunscripto a la esfera O, luego podemos decir:

Una esfera está inscripta en un cono, cuando la esfera es tangente a todas las generatrices del cono, fig. 210.

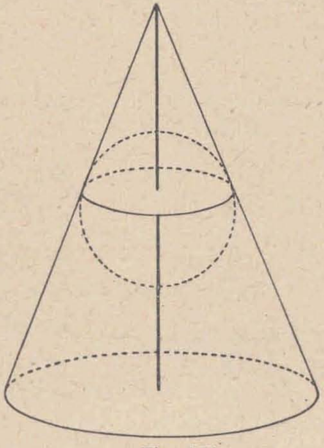


Fig. 210.
Esfera inscripta en un cono.

196. II. Por cada una de las generatrices del cono pasa un plano tangente al cono, y como éstas son tangentes a la esfera y pasan por el punto P, aquellos planos también son tangentes a la esfera, luego:

Por un punto exterior a una esfera pasan infinitos planos tangentes a ella.

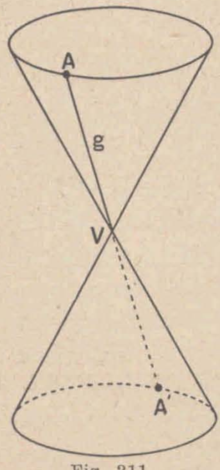


Fig. 211.
Simetría central en el cono.

Simetría en el cono

197. Simetría central. — *Si se considera un cono de dos napas, el vértice es un centro de simetría.*

Sea V el vértice de un cono recto de dos napas, fig. 211. Todo punto de una napa tiene su simétrico en la otra napa.

Sea A el punto considerado, perteneciente a la superficie cónica. Tracemos desde V la generatriz g que pase por A.

Por definición de superficie cónica, todo punto de la generatriz pertenece a la superficie cónica, luego si tomamos en g $VA' = VA$, el punto A' pertenece al cono y es el simétrico de A.

198. Simetría respecto a un eje. — *El eje de un cono es un eje de simetría.*

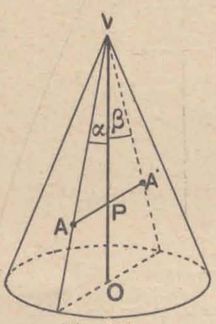


Fig. 212.
Eje de simetría en el cono.

Sea el cono de vértice V, fig. 212, y cuyo eje es VO.

Este eje o altura del cono es un eje de simetría del mismo.

En efecto, consideremos un punto A del cono. Este punto tiene su simétrico respecto al eje en el mismo cono.

Por A trazamos $AP \perp VP$ y prolongamos hasta cortar a la superficie cónica en A'.

El punto A' es el simétrico de A. Unamos V con A'. Los triángulos VPA y VPA' son rectángulos, por construcción, y tienen el cateto VP común y el ángulo α igual al ángulo β, pues en un cono el ángulo formado por el eje y las generatrices son iguales. Luego es $\triangle\ VPA = \triangle\ VPA'$.

Como en triángulos iguales a ángulos iguales se oponen lados iguales, al ser $\alpha = \beta$, es $PA = PA'$, y como es $AA' \perp VP$, resulta que A y A' son puntos simétricos.

199. Simetría respecto a un plano. — *Todo plano que pase por el eje es un plano de simetría.*

Sea el cono de cértice V, fig. 213, cuyo eje es VO.

Todo plano, como el plano π, que pase por VO es un plano de simetría del cono.

Consideremos al punto A, de la superficie cónica. Por A tracemos $AP \perp \pi$, y prolonguemos hasta cortar en A' a la superficie cónica.

Unamos V con P, con A y con A'.

Los triángulos formados VPA y VPA' son rectángulos, pues por ser $AP \perp \pi$, es (36) $AP, \perp VP$, y además son iguales, pues tienen el cateto VP común y los ángulos α y β iguales por estar formados por el eje y las generatrices.

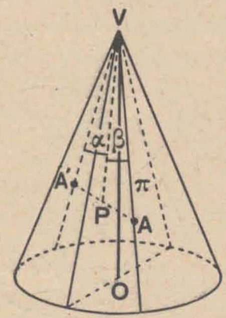


Fig. 213.
Plano de simetría en un cono.

Luego es $\triangle\ VPA = \triangle\ VPA'$, de donde se deduce que si es $\alpha = \beta$ también es $PA = PA'$ y como es $AA' \perp \pi$, resulta que A y A' son puntos simétricos.

Intersección de un cono con un plano cualquiera

200. Un plano puede cortar a un cono de revolución de diversas maneras:

1º por su eje;
2º paralelamente a su eje.
3º perpendicular a su eje;
4º paralelamente a una generatriz;
5º oblicuamente a su eje.

201. 1º **Plano que pasa por el eje.** — *Si un plano pasa por el eje de un cono, la sección que se obtiene es un triángulo isósceles cuya altura es el eje y cuya base es el diámetro de la base*, fig. 214.

Esta propiedad ya se ha demostrado en el párrafo **186.**

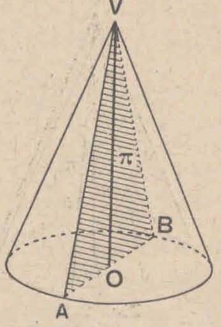


Fig. 214.
Sección en un cono.

202. 2º **Plano paralelo al eje.** — Si consideramos un cono de dos napas, fig. 215, y un plano π que corte a las dos napas paralelamente al eje, resulta como sección dos figuras simétricas, que constituyen las dos ramas de una curva que se llama *hipérbola,* y cuyo estudio corresponde a otros cursos.

203. Sección normal. — Sección de una superficie cilíndrica es la figura que resulta al cortar con un plano todas sus generatrices. Si el plano es perpendicular al eje, la sección se llama *sección normal.*

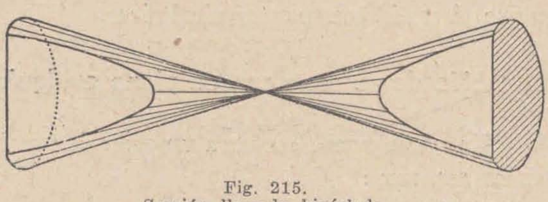


Fig. 215.
Sección llamada hipérbola.

En la fig. 216 la sección producida por α es una sección cualquiera, mientras que si es $\beta \perp e$, la sección producida es una sección normal.

204. 3º **Plano perpendicular al eje.** — Teorema. — *Todo plano perpendicular al eje de un cono, determina una sección circular.*

Hip.) Cono V; eje VO; pl. $\beta \perp VO$, fig. 217.

Tesis) La sección producida por β es un círculo.

Demostración. — El plano β corta a todas las generatrices de la sup. cón. circ. dada, por ejemplo a la generatriz a. En efecto, el plano determinado por a y e tiene

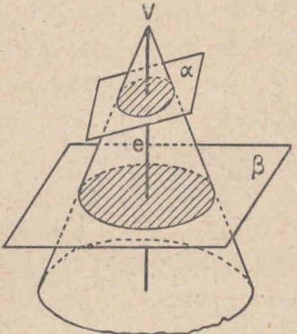


Fig. 216.
Secciones normal y oblicua.

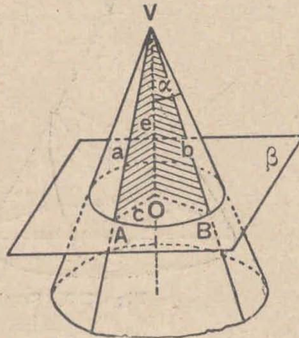


Fig. 217.
Sección circular.

el punto O común con β, luego (**13**) tendrá común una recta c que encontrará en A a la recta a porque la abertura α es un ángulo agudo (**175**) y el ángulo en O es recto, luego:

$$\widehat{AVO} + \widehat{AOV} < 2\,R$$

luego c y a se cortan por no formar ángulos conjugados suplementarios, y como c está en β, resulta que β corta a a.

De igual manera se demuestra que β corta a las demás generatrices.

Sea b otra generatriz cuya intersección con β es B. Uniendo B con O resulta el triángulo rectángulo VOB que es igual al triángulo rectángulo VOA por tener VO común y los ángulos en V iguales a α, luego $OA = OB$, es decir, los puntos A y B están en β y equidistan de O.

De igual manera se prueba que los demás puntos de la sección equidistan de O, luego la intersección es una circunferencia.

205. 4º **Plano paralelo a una generatriz.** — Si consideramos un cono *V*, fig. 218, y un plano π paralelo

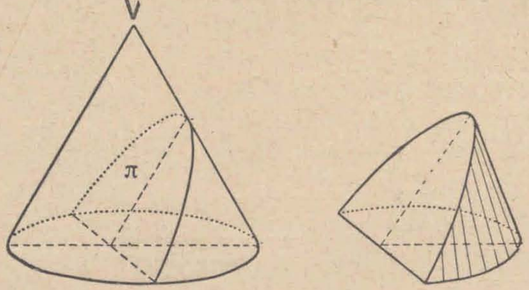


Fig. 218. Sección llamada parábola.

a una de las generatrices del cono, la sección que resulta es una curva que se llama *parábola.* El estudio de esta curva se hace en cursos superiores.

206. 5º **Plano oblicuo al eje.** — Si el plano π, fig. 219, es oblicuo al eje del cono *V*, la sección que se obtiene es una elipse. Su estudio también se hace en cursos superiores.

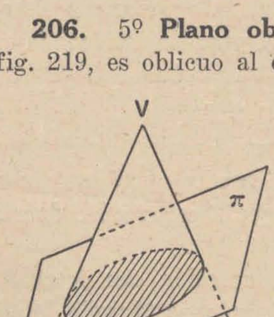


Fig. 219.
Sección llamada elipse.

207. Nota. — Las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano que ocupa diversas posiciones respecto al eje son: la *circunferencia,* la *elipse,* la *hipérbola* y la *parábola* que constituyen lo que se denomina *familia de las cónicas,* atendiendo a su origen.

En las figs. 220 a 222 damos un ejemplo de esas curvas situadas en el plano de del libro.

208. Desarrollo de un cono. — Para *desarrollar un cono* consideramos a su superficie como formada por una

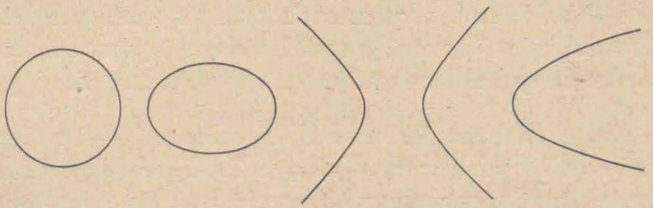


Fig. 220. Circunferencia. Fig. 221. Elipse. Fig. 222. Hipérbola. Fig. 223. Parábola.

hoja muy delgada, como el papel, y se la corta según ya generatriz. Luego se la desarrolla y se la extiende en un plano. La figura que se obtiene es un sector circular cuyo radio es la generatriz del cono, y cuya base es un

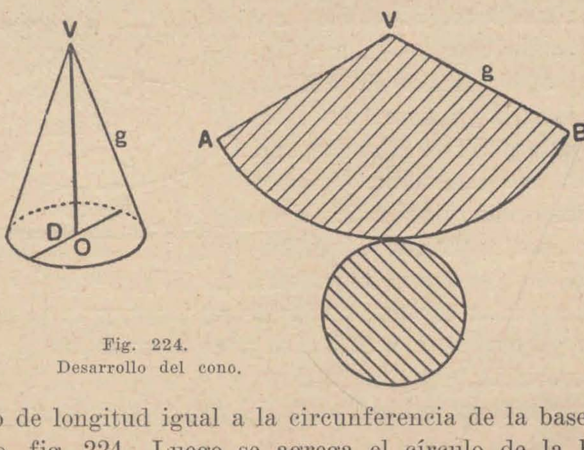


Fig. 224.
Desarrollo del cono.

arco de longitud igual a la circunferencia de la base del cono, fig. 224. Luego se agrega el círculo de la base.

Para dibujar el desarrollo del cono se traza un arco, con centro *V* y radio igual a la generatriz del cono, y luego se toma con el compás el diámetro *D* de la base del cono y a partir de un punto A, se lleva tres veces dicho diámetro, resultando el punto *B*. Uniendo *A* y *B* con *V* se obtiene un sector circular sensiblemente igual al desarrollo del cono, y suficiente como para construcciones en que no se requiera una gran exactitud.

209. Tronco de cono de revolución. — Se llama *tronco de cono de revolución,* a la figura engendrada por el movimiento de un trapecio rectángulo que gira alrededor de su altura fig. 225.

La altura *AB* del trapecio es el *eje* del tronco del cono; las bases del trapecio, *AD* y *BC,* son los *radios* de los círculos de las bases, y el lado *CD* es la *generatriz* del :ronco del cono.

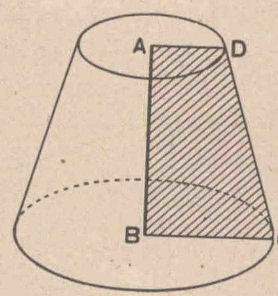


Fig. 225.
Tronco de cono de revolución

210. Desarrollo de un tronco de cono. — Para desarrollar un tronco de cono se considera a su superficie como formada por una hoja de papel según una generatriz. Luego se la desenrolla y se extiende en un plano. Se obtiene así un trapecio circular cuyas bases sean arcos iguales a las longitudes de las circunferencias de sus bases, y cuya altura es la generatriz, fig. 226. Luego se agregan los círculos correspondientes a las bases.

Para dibujar el desarrollo del tronco de cono se procede así:

Se prolonga el eje *BA* y la generatriz *CD* hasta que se corten en el punto *O*.

Luego con radio *OD* se traza un arco, haciendo centro en *P*, y con radio *OC* se traza otro arco, haciendo centro en el mismo punto *P*. Se une un punto *G* de este arco con *P*, resultando así el punto *E*. Con el compás se torna el diámetro mayor *CM* y se corta al arco de origen *G*, a partir de *G*, tres veces, obteniéndose así el punto *H*, que unido con *P* nos determina el punto F, quedando así construído el desarrollo.

Luego se dibujan los círculos de las bases.

Este procedimiento no es rigurosamente exacto, pero para las construcciones de la práctica es suficiente.

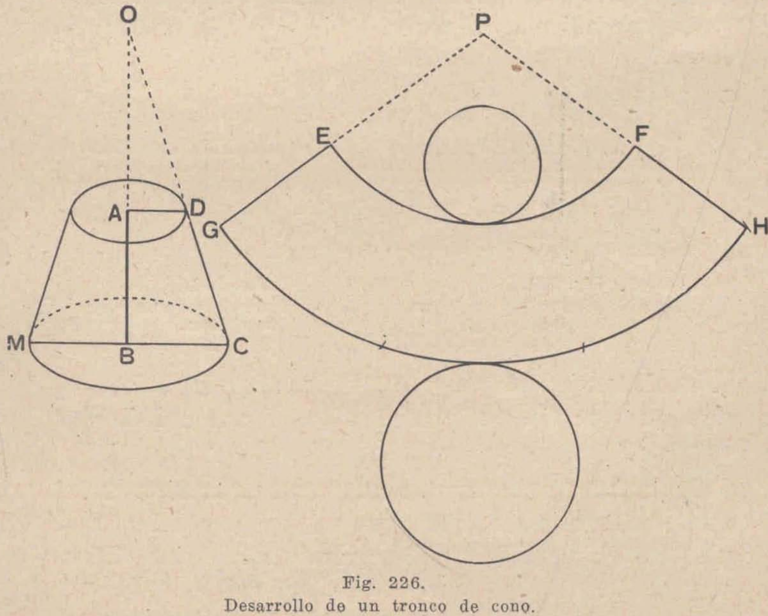


Fig. 226.
Desarrollo de un tronco de cono.

CAPÍTULO VI

PERPENDICULARES Y OBLICUAS A UN PLANO DESDE UN PUNTO EXTERIOR

211. Distancia de un punto a un plano. — Se llama *distancia* de un punto a un plano, al segmento que tiene sus extremos en el punto y en el plano, respectivamente, y es perpendicular al plano.

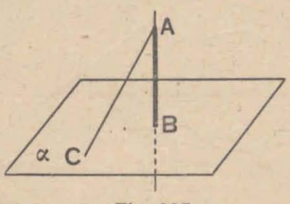


Fig. 227.
Distancia de un punto a un plano.

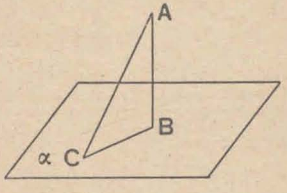


Fig. 228.
La perpendicular es menor que la oblicua.

La distancia del punto A al plano α, fig. 227, es el segmento que tiene el extremo A en el punto dado y el extremo B en el plano, y es, además: $AB \perp \alpha$.

Cualquier otro segmento que tenga sus extremos en el punto y en el plano, pero que no sea perpendicular al plano, se llama *oblicuo*. El segmento AC es una oblicua al plano α.

212. Teorema. — *La distancia de un punto a un plano es menor que cualquier segmento oblícuo comprendido entre el punto y el plano.*

Hip.) $AB =$ dist. de A a α; AC oblícua, fig. 228.

Tesis). $AB < AC$.

Demostración. — Unamos B con C. El triángulo ABC es rectángulo, pues por hipótesis es $AB \perp \alpha$, luego es $AB \perp BC$. Pero sabemos que en un triángulo rectángulo un cateto es menor que la hipotenusa, luego:

$$AB < AC.$$

213. Teorema recíproco. — *El menor de todos los segmentos que se pueden trazar desde un punto a un plano, es perpendicular al plano.*

Hip.) A y α; $AO, AB, AC, AD, \ldots$; $AO < AB$; $AO < AC$; $AO < AD, \ldots$, fig. 229.

Tesis). $AO \perp \alpha$.

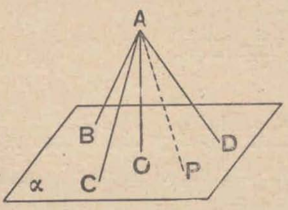


Fig. 229.
La perpendicular es la menor distancia de un punto a un plano.

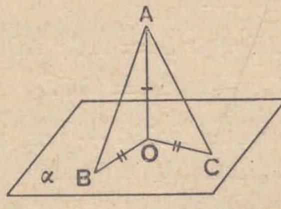


Fig. 230.
Las oblicuas que equidistan del pie de la perp. son iguales.

Demostración. — Si AO no fuese perpendicular a α, se podría trazar (**42**) un segmento $AP \perp \alpha$. Entonces, por el teorema anterior, será $AP < AO$, lo que es absurdo, pues se opone a la hipótesis, luego es $AO \perp \alpha$.

214. TEOREMA. — *Dos segmentos oblicuos comprendidos entre un punto y un plano, y cuyos pies equidistan del de la perpendicular trazada por el punto al plano son iguales.*

Hip.) $AO \perp \alpha$; AB y AC oblicuas; $OB = OC$, figura 230.

Tesis). $AB = AC$.

Demostración. — Los triángulos rectángulos AOB y AOC son iguales por tener los catetos respectivamente iguales, luego las hipotenusas también lo son:

$$AB = AC.$$

215. TEOREMA RECÍPROCO. — *Dos segmentos oblicuos iguales comprendidos entre un punto y un plano, equidistan del pie de la perpendicular trazada por el punto al plano.*

Hip.) $AB = AC$; $AO \perp \alpha$, fig. 230.

Tesis). $OB = OC$.

Demostración. — Los triángulos AOB y AOC son rectángulos (**18**) e iguales por tener las hipotenusas iguales, por hipótesis, y el cateto AO común, luego los otros catetos son iguales:

$$OB = OC.$$

216. TEOREMA. — *De dos segmentos oblicuos comprendidos entre un punto y un plano, aquel cuyo pie dis-*

ta más del de la perpendicular trazada por el punto al plano, es mayor.

Hip.) $AO \perp \alpha$; AB y AC oblicuas; $OB > OC$, fig. 231.

Tesis). $AB > AC$.

Demostración. — Al ser $OB > OC$ podemos tomar un punto D, interno a OB, tal que sea $OD = OC$; entonces, por (**214**), resulta:

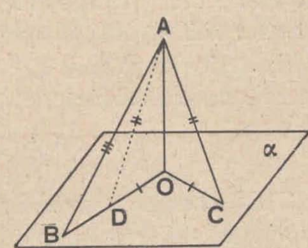


Fig. 231.
La oblicua que más dista del pie de la perp. es la mayor.

$$AD = AC.$$

En el plano AOB, tenemos que es $OB > OD$, y por *Geom. Plana* sabemos que en un mismo plano la oblícua que dista más del pie de la perpendicular es la mayor, luego es $AB > AD$, y reemplazando AD por su igual AC, resulta:

$$AB > AC.$$

217. Teorema recíproco. — *De dos segmentos oblicuos desiguales comprendidos entre un punto y un plano, el mayor dista más del pie de la perpendicular trazada por el punto al plano.*

Hip.) $AO \perp \alpha$; $AB > AC$, fig. 231.

Tesis). $OB > OC$.

Demostración. — Si OB no fuese mayor que OC, sería igual o menor.

Supongamos que sea $OB = OC$; entonces, por (**214**), debe ser $AB = AC$, lo que es absurdo, pues se opone a la hipótesis, luego $OB \neq OC$.

Supongamos que sea $OB < OC$; entonces, por (**216**), debe ser $AB < AC$, lo que es absurdo, pues se opone a la hipótesis, luego $OB \nless OC$. Al no ser OB ni igual ni menor que OC, será:

$$OB > OC.$$

218. Lugares geométricos. — Se llama *lugar geométrico* a la figura constituída por todos los puntos que gozan de una determinada propiedad.

Para demostrar que una figura es el lugar geométrico de los puntos que gozan de una propiedad dada, basta probar:

1º) Que todos los puntos de la figura gozan de la misma propiedad;

y 2º) Que todo punto que goza de la propiedad pertenece al lugar.

219. Teorema. — *El lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto dado es una circunferencia cuyo centro es el pie de la perpendicular trazada por el punto al plano.*

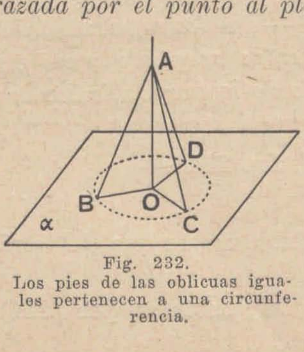


Fig. 232.
Los pies de las oblicuas iguales pertenecen a una circunferencia.

Hip.) A y α; $AO \perp \alpha$, figura 232.

Tesis). El lugar geométrico de los puntos de α que equidistan de A es una circunf. de centro O.

Demostración. — El punto A puede estar en el plano o fuera de él. Si A está en α, sabemos por *Geom. Plana* que el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A es una circunferencia.

El punto es exterior al plano. Con radio OB cualquiera trazamos una circunferencia. Debemos probar que todos los puntos de la cif. O equidistan de A, y que todos los puntos que equidistan de A están en una circunferencia.

1º) *Todos los puntos de la cif. O equidistan de A.*

Siendo $OB = OC = OD = \ldots$, por construcción, por el teorema (**214**) es $AB = AC = AD = \ldots$, y demostrada la primera parte.

2º *Todos los puntos del plano que equidistan de A están en una circunferencia.*

Si se tiene que $AB = AC = AD = \ldots.$ por el teorema (**215**) sabemos que es $OB = OC = OD = \ldots.$ Pero si los puntos $A, B, C, D, \ldots$ del plano α equidistan de O, dichos puntos pertenecen a una circunferencia O de radio OB, y demostrada la segunda parte.

220. Teorema. — *El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos de un segmento es un plano perpendicular al segmento en su punto medio.*

Hip.) Segmento AB; $\alpha \perp AB$ en O; $OA = OB$, fig. 233.

Tesis) α es el lugar geom. de los puntos que equidistan de A y B.

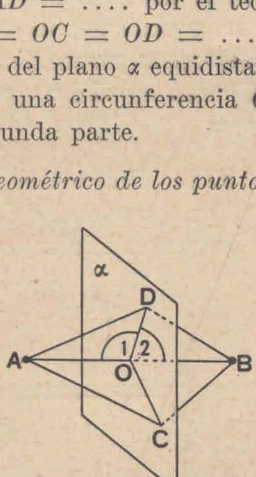


Fig. 233.
los extremos de un segmento están en un pl. perp. al segm. en su punto medio.

Demostración. — Hay que demostrar que todo punto del plano equidista de A y de B, y que todo punto que equidista de A y de B está en el plano.

1º) *Todo punto de α equidista de A y de B.*

Sea C un punto de α. Uniéndolo con A, B y O resultan los triángulos rectángulos (**36**) AOC y BOC, que son iguales, pues tienen el cateto OC común y $OA = OB$ por hipótesis, luego las hipotenusas son iguales, es decir:

$$AC = BC$$

y demostrada la primera parte.

2º *Todo punto que equidista de A y de B está en α.*

Sea D un punto tal, que sea $AD = BD$, y unamos D con O. El triángulo ABD es isósceles y el segmento OD por ser mediana de la base AB, por hipótesis, es también altura, luego es $OD \perp AB$. Pero todas las perpendiculares a una recta en un punto están en un mismo plano (**35**) que es perpendicular a la recta en dicho punto, luego OD está en dicho plano α, y por consiguiente: D está en α.

221. Proyección de un punto sobre un plano. — Se llama *proyección* de un punto sobre un plano, al pie de la perpendicular trazada por el punto al plano.

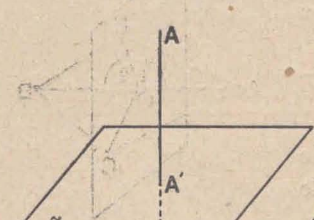


Fig. 234.
Proyección de un punto sobre un plano.

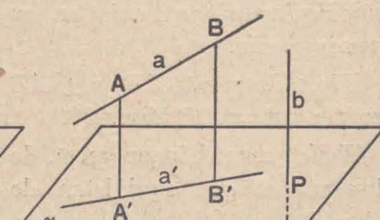


Fig. 235.
Proyección de una recta sobre un plano.

La perpendicular se llama *proyectante,* y el plano *plano de proyección.*

La proyección de A sobre α es A', siempre que sea $AA' \perp \alpha$, fig. 234. Si el punto está en el plano, su proyección es el punto mismo.

222. Proyección de una recta. — Se llama *proyección* de una recta sobre un plano, a la recta determinada por la proyección de dos puntos cualesquiera de la recta dada.

El plano formado por las dos proyectantes se llama *plano proyectante.*

La proyección de la recta a sobre α es la recta a', determinada por las proyecciones A' y B' de dos puntos A y B de la recta a, fig. 235.

Si la recta es perpendicular al plano, su proyección es el pie.

Así, si es $b \perp \alpha$ en P, el punto P es la proyección de b, figura 235.

223. Angulo de una recta y un plano. — Se llama *ángulo de una recta y un plano,* siendo la recta oblícua al plano, al ángulo agudo determinado por la recta y su proyección sobre el plano.

Si b es la proyección de a sobre π, fig. 236, el ángulo α es el ángulo de la recta a y el plano α.

Si la recta a fuese perpendicular al plano π, no hay ángulo.

224. Normal a un plano. — Se llama *normal* a un plano, a la recta que es perpendicular al plano.

En la fig. 234, la recta $AA' \perp \alpha$, es la normal de α.

225. Teorema. — *El ángulo de una recta y un plano es menor que cualquiera de los ángulos formados por la recta dada con cualquier otra recta que pase por su pie en el plano.*

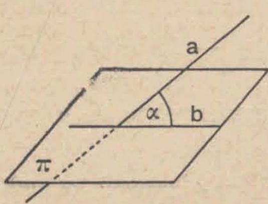


Fig. 236.
Angulo de una recta y un plano.

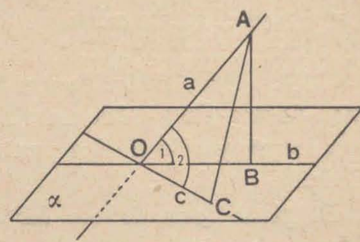


Fig. 237.
El ángulo de una recta y un plano es mínimo.

Hip.) a oblic. a α; b proyec. de a; $\widehat{1}$ = áng. de a y α; $c \varepsilon \alpha$ y pasa por O; $\widehat{2}$ = áng. de a y c, fig. 237.

Tesis.) $\widehat{1} < \widehat{2}$.

Demostración. — Por un punto cualquiera de a, trazamos $AB \perp \alpha$, y luego en c tomamos $OC = OB$ y unimos A con C. Al ser $AB \perp \alpha$, resulta que AC es oblicua, luego (**212**):

$$AB < AC.$$

Los triángulos AOB y AOC tienen OA común, $OB = OC$ por construcción, y el tercer lado desigual, $AB < AC$, por lo demostrado, y como sabemos por *Geom. Plana* que a menor lado se opone menor ángulo, tenemos que:

$$\widehat{1} = \widehat{2}$$

226. Angulo de una recta con la normal a un plano. — COROLARIO. — *El ángulo de una recta y un plano es el complemento del ángulo de la recta y la normal al plano trazado por uno de sus puntos,* fig. 237.

227. Inclinación de una recta. — Se llama *inclinación de una recta,* al ángulo que forma esta recta con un plano horizontal.

Este ángulo *siempre es agudo,* y es el formado por la recta y su proyección sobre un plano horizontal.

También es el complemento del ángulo que forman la recta y la vertical trazada por uno de sus puntos, figura 237.

228. Pendiente de una recta. — Se llama *pendiente* de una recta, al cociente que se obtiene al dividir la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano, por la distancia que hay entre el pie de esa perpendicular y elel vértice del ángulo.

En la fig. 237, la pendiente de la recta a es el cociente $\frac{AB}{OB}$.

Más adelante veremos que a ese cociente se le llama *tangente* del ángulo AOB, luego: *la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma con su proyección.*

229. Inclinación de un plano. — Se llama *inclinanación de un plano,* al ángulo diedro agudo que forma este plano con el plano horizontal.

Dado el plano α, y el plano horizontal β, fig. 238, la inclinación del plano α es el diedro agudo $\alpha\beta$.

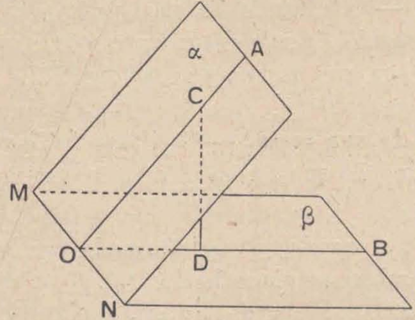


Fig. 238.
Inclinación de una recta y un plano.

230. Pendiente de un plano.— La *pendiente* de un plano es la pendiente de la recta del plano perpendicular a la intersección del plano dado y el plano horizontal. A dicha recta se le llama *recta de máxima pendiente del plano.*

Si en el plano α, fig. 238, trazamos $AO \perp MN$, la pendiente de α es la pendiente de AO, y como la pendiente de AO es $\frac{CD}{OD}$, resulta que este cociente es la pendiente del plano α.

231. Recta de máxima pendiente. — TEOREMA. — *Si por un punto de un plano se traza una recta perpendicular a la intersección de ese plano con el plano horizontal, dicha es la de máxima pendiente del plano.*

Hip.) pl. α; β pl. horizontal; $AO \in \alpha$; $AO \perp MN$, figura 239.

Tesis.) AO = *recta de máxima pendiente de* α.

Demostración. — Por un punto cualquiera de AO, tracemos $CD \perp \beta$, y unamos O con D; resulta que OB

es la proyección de AO (**222**). La pendiente $\frac{CD}{OD}$ es la máxima que puede obtenerse con los planos α y el horizontal β.

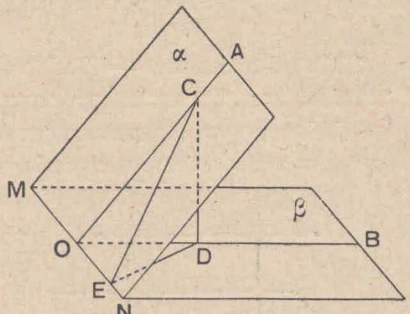


Fig. 239.
Recta de máxima pendiente.

Supongamos que no lo fuera. Entonces habría otra recta del plano α que determinaría una razón mayor que la razón $\frac{CD}{OD}$.

Sea CE esa recta; entonces su pendiente será $\frac{CD}{ED}$. Pero ED es mayor que OD, pues OD es una perpendicular a MN y DE es una oblicua. Entonces la razón $\frac{CD}{ED}$ es menor que $\frac{CD}{OD}$, pues el numerador de las dos es el mismo, mientras que el denominador de la primera es mayor que el denominador de la segunda, luego

$$\frac{CD}{ED} < \frac{CD}{OD}$$

luego la recta CE tiene menor pendiente que OA.

De igual manera se probaría que cualquier otra recta que no sea $OA \perp MN$, tendría menor pendiente, luego OA es la recta de máxima pendiente del plano α.

232. Aplicación. — Para evitar la recta de máxima pendiente al subir un plano inclinado (calle, montaña, etc.), es preferible seguir un camino en zig-zag, que es lo que ocurre en los caminos serranos, en donde para llegar a grandes alturas en automóvil el camino recorre un sendero que no es el que directamente conduce a la cumbre, que a lo mejor no podría subirlo el vehículo.

233. PROBLEMA. — *Dadas dos rectas alabeadas, determinar un segmento que sea perpendicular a las rectas dadas y que sea menor que cualquier otro segmento que tenga un extremo en cada una de dichas rectas.*

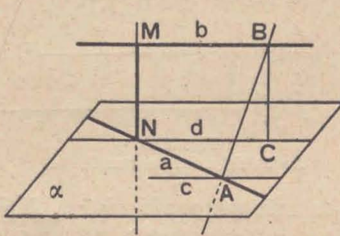


Fig. 240.
Mínima distancia entre dos rectas alabeadas.

Sean a y b las dos rectas alabeadas dadas, figura 239.

Se trata de encontrar el menor segmento que sea perpendicular a las dos rectas dadas.

Por un punto cualquiera A de a tracemos $c//b$, quedando así determinado (**10**) el plano α.

Por un punto cualquiera B de b tracemos $BC \perp \alpha$, y por el punto C de α tracemos $d/\!/c$, resultando (**42c**) $b//d$.

Si por el punto N, común a d y a, y en el plano de las paralelas b y d, trazamos $MN//BC$, como es $BC \perp \alpha$, por (**42b**) es $MN \perp \alpha$, luego es:

$$MN \perp a, \qquad (1)$$

Pero si es $MN \perp \alpha$, es $MN \perp d$, y como es $d//b$, por *Geom. Plana* es:

$$MN \perp b \qquad (2)$$

El segmento MN es el buscado; pues de (1) y (2) deducimos que es perpendicular a las rectas dadas a y b.

Supongamos que otra recta, como AB, fuese perpendicular a las rectas dadas. Si fuese $AB \perp b$, como es $b /\!/ c$, sería $AB \perp c$, y como suponemos $AB \perp a$, sería $AB \perp \alpha$, determinado por a y c, y entonces tendríamos trazado desde B dos perpendiculares, AB y la BC, al plano α, lo que es absurdo (**24**), luego si suponer AB perpendicular a las rectas dadas nos conduce a un absurdo, no existe esa perpendicular, luego MN es la única perpendicular a a y b.

El segmento MN es el menor de cuantos tengan sus extremos en las rectas dadas.

En efecto, por ser $BC \perp \alpha$ y AB oblicua, es $BC < AB$, y como $MN = BC$ por ser $b /\!/ c$, resulta que es:

$$MN < AB$$

EJERCICIOS

48. Si se traza por el centro de una circunferencia una perpendicular al plano de ella, todo punto de la perpendicular equidista de la circunferencia.

49. Hallar en una recta m un punto que equidiste de dos puntos dados. Distintos casos.

50. Hallar el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de dos puntos dados no pertenecientes al plano dado.

51. Hallar los puntos de un plano α que equidisten de dos puntos A y B pertenecientes a α.

52. Idem en el caso de que A esté en α y B no.

53. Idem en el caso de que A y B no estén en α.

54. ¿Cuáles son los puntos del espacio más próximo a un punto A que a un punto B?

55. Una recta y un plano perpendiculares a una misma recta son paralelos.

56. Si por un punto se trazan tres segmentos iguales, por sus extremos no comunes se puede trazar una circunferencia.

57. Si por un punto P se trazan dos paralelos PA y PB a un plano α, y por P se trazan dos planos respectivamente perpendiculares a PA y PB, la intersección de estos planos es perpendicular a α.

58. Un plano perpendicular a la intersección de dos planos es perpendicular a cada uno de los planos.

59. Si dos planos son perpendiculares y una recta es perpendicular a uno de ellos en un punto distinto de la intersección, es paralela al otro plano.

60. Las proyecciones de dos rectas paralelas sobre un plano son paralelas.

62. Una recta oblicua a un plano es perpendicular a una recta del plano que pasa por su pie.

63. Trazar un plano que pase por dos puntos dados y que sea equidistante de otros dos puntos dados.

64. Dada una recta m y dos puntos A y B en el espacio, hallar un punto en la recta que equidiste de A y de B.

65. Dado un triángulo ABC y un plano α, halla un punto de α que equidiste de A, B y C.

66. Por un punto dado, trazar una recta que corte a dos rectas alabeadas dadas.

67. Por una recta m trazar un plano equidistante de dos puntos A y B, exteriores a m.

68. Por un punto dado trazar un plano perpendicular a dos planos dados.

69. ¿Cuál es la inclinación de una recta cuya pendiente es 1?

70. ¿Cuál es la pendiente de una recta cuya inclinación es de 60?

71. Demostrar que el ángulo de una recta m y un plano α es igual al ángulo de m' y α', siempre que sean $m \parallel m'$ y $\alpha \parallel \alpha'$.

72. El techo de una torre cuadrada de 6 m. de lado está formado por cuatro triángulos equiláteros. Calcular la inclinación de cada plano y de cada arista.

Capítulo VII

ANGULOS TRIEDROS Y POLIEDROS

Angulos poliedros

234. Definiciones. — Elementos. — Se llama *ángulo triedro*, o simplemente *triedro*, al conjunto de puntos comunes a los tres diedros determinados por tres semirrectas que tienen origen común y no están en un mismo plano.

Al decir *los tres diedros determinados por tres semirrectas*, consideramos que cada dos semirrectas determinan un plano, y cada dos planos determinan un diedro cuya arista es cada una de las semirrectas dadas.

El punto común se llama *vértice*, las semirrectas *aristas*, y los planos determinados *caras*.

Se llama *diedro* del triedro a cada uno de los diedros formados por dos caras. Un triedro tiene tres diedros y tres caras, que son ángulos. Los diedros y caras de un triedro son los *elementos* del triedro.

Las tres caras de un triedro dividen al espacio en dos regiones: una está formada por los puntos comunes a los tres diedros, que es el triedro, y otra formada por los puntos que no pertenecen al triedro.

En el triedro de la fig. 241 el vértice es V, las aristas a, b y c, y las caras $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ y $\widehat{ac}$.

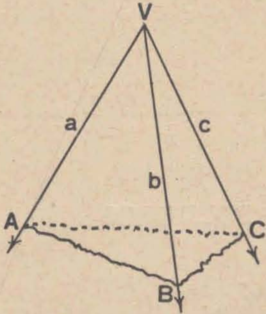


Fig. 241.
Triedro.

Un triedro se designa con la letra del vértice, o bien nombrando sucesivamente las letras de sus aristas, o nombrando la letra del vértice y las letras mayúsculas puestas una en cada arista. Así, el triedro de la fig. 241 se puede leer de una de las siguientes maneras:

Triedro V; triedro abc; triedro VABC.

Un triedro es *rectángulo* si uno de sus diedros es recto; *birrectángulo,* si dos de sus diedros son rectos; y *trirrectángulo* si los tres diedros son rectos.

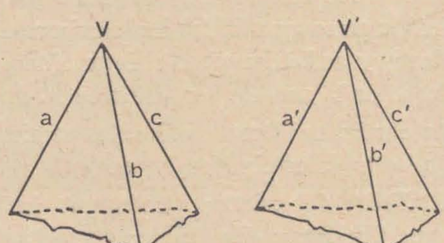


Fig. 242.
Fig. 242. Triedros iguales.

235. Triedros iguales. — Dos triedros son *iguales,* cuando las caras y diedros de uno son ordenadamente iguales a las caras y diedros del otro.

Si en los triedros *V* y *V'*, fig. 242, se tiene que es:

$$\widehat{a} = \widehat{a'};\ \widehat{b} = \widehat{b'};\ \widehat{c} = \widehat{c'}$$

y además: $\widehat{ab} = \widehat{a'b'};\ \widehat{ac} = \widehat{a'c'};\ \widehat{bc} = \widehat{b'c'}$

resulta que es:

$$\textit{triedro } V = \textit{triedro } V'$$

236. Triedros simétricos. — Dos triedros son *simétricos, u opuestos por el vértice,* cuando las aristas de uno son las prolongaciones de las aristas del otro y el vértice es común.

Los triedros *abc* y *a'b'c'*, fig. 243, son simétricos, pues *a* y *a'*, *b* y *b'*, *c* y *c'* son semirrectas opuestas.

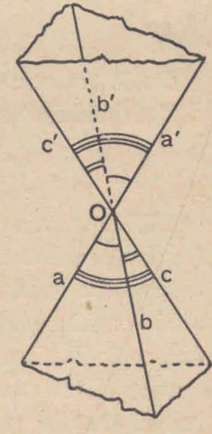


Fig. 243.
Triedros simétricos.

237. TEOREMA. — *Dos triedros simétricos son iguales.*

Hip.) Triedros *abc* y *a'b'c'* simétricos, fig. 243.

Tesis.) Triedro *abc* = triedro *a'b'c'*.

Demostración. — Hay que probar la igualdad de las caras y de los diedros, respectivamente.

1º) *Igualdad de las caras.* — Por definición de triedros simétricos son *a* y *a'*, *b* y *b'* semirrectas opuestas, luego los ángulos determinados son iguales por ser opuestos por el vértice.

y análogamente:
$$\left.\begin{aligned}\widehat{ab} &= \widehat{a'b'} \\ \widehat{bc} &= \widehat{b'c'} \\ \widehat{ac} &= \widehat{a'c'}\end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

2º) *Igualdad de los diedros.* — Las caras *ab* y *a'b'* pertenecen a un mismo plano, así como las caras *ac* y *a'c'*, luego los diedros *a* y *a'* son iguales por ser opuestos por la arista:

y análogamente:
$$\left.\begin{aligned}\widehat{a} &= \widehat{a'} \\ \widehat{b} &= \widehat{b'} \\ \widehat{c} &= \widehat{c'}\end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

De las relaciones (I) y (II) y teniendo en cuenta la definición, deducimos que:

triedro *abc* = triedro *a'b'c'*

238. Sentido de un triedro. — El *sentido de un triedro* consiste en la manera de enunciar sus aristas, sea de derecha a izquierda, o de izquierda a derecha.

Si consideramos el triedro de la figura 241 y un reloj dispuesto horizontalmente, con la esfera hacia arriba, el *sentido directo,* o *positivo,* consiste en enunciar las aristas en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. Así, el sentido directo del triedro *V*, fig. 241, es *abc.* Entonces el triedro es *directo* o *positivo.*

El *sentido retrógrado,* o *negativo,* consiste en enunciar las aristas en el mismo sentido que el movimiento de las agujas del reloj. Así, el sentido retrógrado del mismo triedro *V* es *acb*. Entonces el triedro es *retrógrado* o *negativo*.

239. TEOREMA. — *Dos triedros simétricos no son, en general, superponibles.*

Hip.) Triedro *abc* y triedro *a'b'c'*, simétricos, fig. 243.

Tesis) Los triedros *abc* y *a'b'c'* no son superponibles.

Demostración. — Los elementos de los dos triedros de la fig. 243 son respectivamente iguales, y también son iguales los mismos triedros, como se ha demostrado en (**237**). Esos diversos elementos no están dispuestos de la misma manera en los dos triedros, pues tienen sentidos contrarios. En efecto: el sentido directo del inferior es *abc*, mientras que el sentido directo del superior es *a'b'c'*, de manera que si los quisiéramos superponer no se podría, pues *a* y *a'* coincidirían por ser iguales, pero *b* y *c'* no, pues no son iguales, luego los dos triedros simétricos dados no son superponibles.

240. OBSERVACIÓN. — Ya hemos dicho en (**115**) que las figuras que son *iguales por simetría*, se llaman *inversamente iguales*, luego los dos triedros dados son *triedros inversamente iguales.*

241. COROLARIO. — *Si los dos triedros dados tienen dos diedros respectivamente iguales cada uno, son superponibles.*

Si un triedro tiene dos diedros iguales se llama *isoángulo.*

242. Orientación de una recta. — Dada una recta *a,* fig. 244, comprobamos que puede recorrerse en dos *sentidos opuestos,* que en el caso de la figura podría ser de izquierda a derecha, o de derecha a izquierda, pero que con más precisión diremos que puede recorrerse en el sentido de *A* hacia *B,* o en el sentido de *B* hacia *A.*

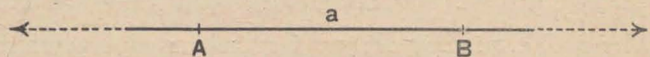


Fig. 244.
Una recta puede recorrerse en dos sentidos opuestos.

En cualquiera de los *sentidos* en que se la considere recorrida a la recta *a* se comprueba que la recta *no tiene ni primero ni último punto.*

A esos dos sentidos opuestos se les llama *ordenamientos naturales.*

Se llama *sentido directo,* o *positivo,* al recorrer la recta de *A* hacia *B;* y *sentido inverso,* o *negativo,* al recorrer la recta de *B* hacia *A.*

243. Orientación de un plano. — De manera análoga a como hemos visto que puede *recorrerse* una recta, puede recorrerse un plano. Sólo que aquí no tenemos los mismos dos sentidos de la misma forma, pues no debemos olvidar que un plano se considera *ilimitado* en todas sus direcciones.

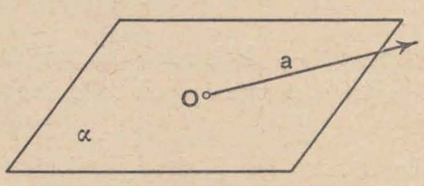


Fig. 245.
Un plano puede recorrerse en dos sentidos opuestos.

Si en el plano α, fig. 245, consideramos un punto fijo O y una semirrecta a de origen O, comprobamos que haciendo girar la semirrecta a alrededor del punto fijo O podemos recorrer el plano en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj, o en el mismo sentido que las mismas agujas.

En cualquiera de los dos sentidos el plano es ilimitado.

Se llama *sentido directo*, o *positivo*, al recorrer el plano en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj; y *sentido retrógrado*, o *negativo*, al recorrer el plano en el mismo sentido que el movimiento de las agujas de un reloj.

244. Sentido de un diedro. — Un ángulo diedro puede considerarse engendrado por el movimiento de una de sus caras alrededor de su arista.

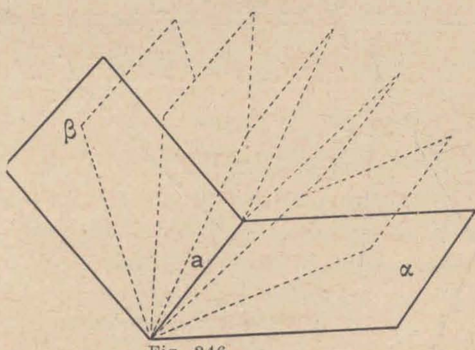


Fig. 246.
Un diedro puede considerarse engendrado en dos sentidos opuestos.

Al diedro $\alpha\beta$ de la fig. 246 lo podemos considerar experimentalmente como engendrado por el movimiento de la cara β alrededor de a separándose de la cara α que queda fija, como cuando se abre un cuaderno; o bien por el movimiento de la cara α alrededor de a separándose de β.

Un diedro *está dirigido,* u *orientado,* cuando se conoce o se fija el sentido en que se considere engendrado.

El sentido es *directo,* o *positivo,* cuando se lo considera engendrado de α hacia β, o sea, en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj; y el sentido es *retrógrado,* o *negativo,* cuando se lo considera engendrado de β hacia α, o sea en el mismo sentido que el movimiento de las agujas de un reloj.

245. Angulo de las normales a un diedro. — El estudio de esta propiedad se ha hecho ya en la pág. 65.

246. Triedros suplementarios. — Dos triedros son *suplementarios,* cuando las caras y diedros de uno son suplementarios de los diedros y caras del otro.

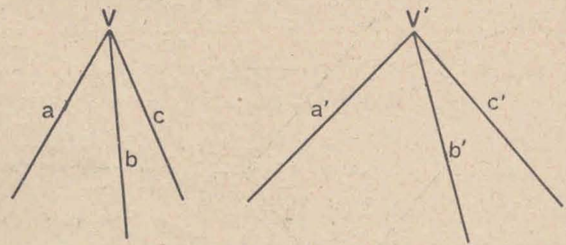


Fig. 247.
Triedros suplementarios.

Los triedros V y V', fig. 247, son suplementarios si se tiene que:

cara ab supl. diedro c', y cara $a'b'$ supl. diedro c,
cara bc „ „ a', „ „ $b'c'$ „ „ a,
cara ac „ „ b', „ „ $a'c'$ „ „ b.

247. Corolario. — *Los triedros suplementarios de triedros iguales son iguales.*

Es decir, si los triedros *S* y *S'* son suplementarios de los triedros *T* y *T'*, y es $T = T'$, también es $S = S'$.

248. Teorema. — *Si por un punto interior a un triedro se trazan las semirrectas que tienen por origen ese punto y cortan perpendicularmente a las caras, el triedro que forman es suplementario del dado.*

Hip.) Triedro *V*; *V'* interior a *V*; $a' \perp$ pl. bc; $b' \perp$ pl. ac; $c' \perp$ pl. ab, fig. 248.

Tesis) Triedro *V* es suplementario del triedro *V'*.

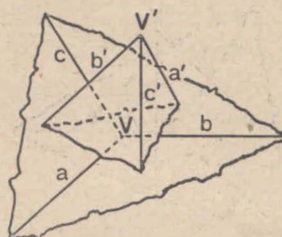


Fig. 248.

Demostración. — Como es, por hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} a' \perp \text{pl. } bc \\ \text{y } b' \perp \text{pl. } ac \end{array}\right\} \text{por } (\mathbf{92}) \text{ es: cara } a'b' \text{ supl. diedro } c$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{cara } a'b' \text{ supl. diedro } c \\ \text{y análogamente:} & \text{cara } b'c' \text{ supl. diedro } a \\ & \text{cara } a'c' \text{ supl. diedro } b \end{array}\right\} (\text{I})$$

Por hipótesis es $a' \perp$ pl. bc y $b' \perp$ pl. ac, luego (**75**) el plano que pasa por a' y b' es perpendicular a los planos ac y bc. Pero si dos planos que se cortan y son perpendiculares a un tercero, su intersección es perpendicular al tercero (**85**), luego:

$$\left.\begin{array}{l} c \perp \text{pl. } a'b' \\ a \perp \text{pl. } b'c' \end{array}\right\} \text{y por } (\mathbf{92}) \text{ es: cara } ac \text{ supl. diedro } b'$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{cara } ac \text{ supl. diedro } b' \\ \text{y análogamente:} & \text{cara } ab \text{ supl. diedro } c' \\ & \text{cara } bc \text{ supl. diedro } a' \end{array}\right\} (\text{II})$$

De las relaciones (I) y (II) deducimos que se cumplen las condiciones para que los triedros V y V' sean suplementarios, luego:

el triedro V es suplementario del triedro V'

249. Teorema. — *La suma de los diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.*

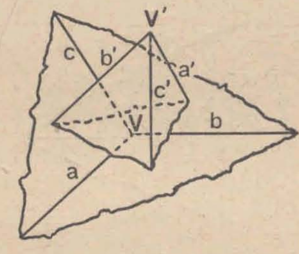


Fig. 249.

Hip.) Triedro abc, fig. 249.

Tesis) $2R<a+b+c<6R$.

Demostración. — Sea V' un punto interior al diedro abc, y por ese punto tracemos el triedro $a'b'c'$ suplementario del triedro dado.

Al ser $b' \perp$ pl. ac y $c' \perp$ pl. ab, resulta por (**92**) que el diedro a es suplementario del ángulo $b'c'$, es decir:

$$a + b'c' = 2R$$

de donde deducimos, restando a ambos miembros $b'c'$, que:

$$a = 2R - b'c'$$

y análogamente:
$$b = 2R - a'c'$$
$$c = 2R - a'b'$$

Sumando ordenadamente, tendremos:

$$a + b + c = 6R - b'c' - a'c' - a'b'$$

y encerrando a los términos negativos en un paréntesis precedido de signos menos, resulta:

$$a + b + c = 6R - (b'c' + a'c' + a'b') \quad (1)$$

La expresión (1) es una diferencia en la que el sustraendo no es cero, pues si lo fuese el triedro $a'b'c'$ no existiría, luego la diferencia $a + b + c$ es menor que el minuendo $6R$:

$$a + b + c < 6R$$

Sabemos que en todo triedro la suma de las caras es menor que cuatro rectos, luego en el triedro $a'b'c'$ se tiene:

$$b'c' + a'c' + a'b' < 4R$$

y reemplazando este valor en la expresión (1), resulta:

$$a + b + c = \underbrace{6\,R - (\textit{menos que } 4\,R)}_{\textit{más de } 2R}$$

de donde deducimos que:

$$a + b + c > 2R \qquad (3)$$

De (2) y (3) se deduce que la suma de los diedros es menor que 6 rectos y mayor que 2 rectos, luego:

$$2R < a + b + c < 6R$$

Igualdad de triedros

250. Triedros iguales. — Ya hemos dicho en (**235**) que para que los iguales se necesitriedros sean ta que las caras y diedros del uno sean ordenadamente iguales a las caras y diedros del otro.

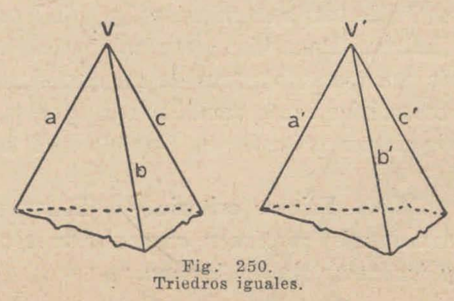


Fig. 250.
Triedros iguales.

Así, si en los triedros V y V', fig. 250 es:

$$\hat{a} = \hat{a}'; \ \hat{b} = \hat{b}'; \ \hat{c} = \hat{c}'$$

y $$\widehat{ab} = \widehat{a'b'}; \ \widehat{ac} = \widehat{a'c'}; \ \widehat{bc} = \widehat{b'c'}$$

resulta que es $V = V'$.

251. Caracteres de la igualdad de triedros. — Fácilmente se demuestra que la igualdad de triedros goza de los caracteres idéntico, recíproco y transitivo:

I. — *Todo triedro es igual a sí mismo;*

II. — *Si un triedro es igual a otro, éste es igual al primero;*

III. — *Si un triedro es igual a otro, y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.*

Dejamos como ejercicio al estudiante que demuestre las tres propiedades que quedan enunciadas.

Criterios de igualdad de triedros

252. Ya sabemos que para que dos triedros sean iguales deben cumplirse seis condiciones: igualdad ordenada de las tres caras, e igualdad ordenada de los tres diedros. Pues bien; con tal que se cumpla la igualdad de una parte, de tres de los seis elementos, los restantes automáticamente también son iguales, resultando así los siguientes *criterios* de igualdad de triedros.

253. Primer criterio. — TEOREMA. — *Dos triedros son iguales si tienen respectivamente iguales un diedro y las caras que lo forman.*

Hip.) Triedros *abc* y *a'b'c'*; $\widehat{a} = \widehat{a'}$; $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$; $\widehat{ac} = \widehat{a'c'}$, fig. 251.

Tesis) Triedro *abc* = triedro *a'b'c'*.

Demostración. — Como los diedros *a* y *a'* son iguales, y también los ángulos *ab* y *a'b'*, y *ac* y *a'c'*, resulta que los ángulos *bc* y *b'c'* también son iguales por ser secciones igualmente inclinadas de diedros iguales (**56**). Y demostrada así la igualdad de las terceras caras de los triedros dados.

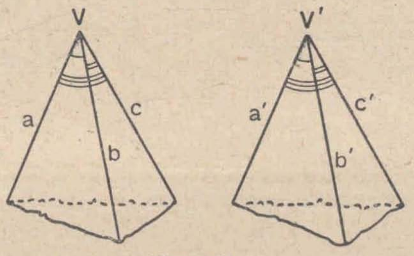


Fig. 251.
Los triedros que tienen un diedro y las caras que lo forman respect. iguales, son iguales.

Por hipótesis es $\widehat{ac} = \widehat{a'c'}$, y $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$, y $\widehat{bc} = \widehat{b'c'}$ por lo demostrado, luego si las secciones igualmente inclinadas son iguales, los diedros también lo son, por lo visto en (**56**), luego los diedros *b* y *b'* son iguales. Y como de la misma manera se demuestra que los diedros *c* y *c'* son iguales, se deduce que:

triedro *abc* = *triedro a'b'c'*.

254. Segundo criterio. — TEOREMA. — *Dos triedros son iguales si tienen respectivamente iguales una cara y los diedros adyacentes.*

Hip.) Triedros abc y $a'b'c'$; $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$; $\widehat{a} = \widehat{a'}$; $\widehat{b} = \widehat{b'}$, fig. 252.

Tesis) Triedro abc = triedro $a'b'c'$.

Demostración. — Sean S *y* S' los triedros suplementarios de los triedros V y V', respectivamente.

Por definición de triedros suplementarios, tenemos:

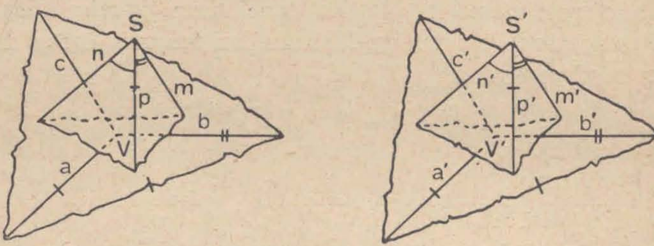


Fig. 252.
Los triedros que tienen dos diedros y la cara comprendida respect. iguales, son iguales.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{np} + \widehat{a} = 2R \\ \widehat{n'p'} + \widehat{a'} = 2R\end{array}\right\} \text{pero } \widehat{a} = \widehat{a'}, \text{ luego es: } \widehat{np} = \widehat{n'p'} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{mp} + \widehat{b} = 2R \\ \widehat{m'p'} + \widehat{b'} = 2R\end{array}\right\} \text{pero } \widehat{b} = \widehat{b'}, \text{ luego es: } \widehat{mp} = \widehat{m'p'} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{p} + \widehat{ab} = 2R \\ \widehat{p'} + \widehat{a'b'} = 2R\end{array}\right\} \text{pero } \widehat{ab} = \widehat{a'b'}, \text{ luego es: } \widehat{p} = \widehat{p'} \quad (3)$$

Las expresiones (1), (2) y (3) nos dicen que los triedros S y S' tienen respectivamente iguales dos caras y el diedro comprendido, luego, por el teorema último, es:

triedro S = triedro S'

y como sus suplementarios son los triedros *abc* y *a'b'c'*, y sabemos (**247**) que los triedros suplementarios de triedros iguales son iguales, resulta:

triedro abc — triedro a'b'c'.

255. Tercer criterio. — TEOREMA. — *Dos triedros son iguales si tienen respectivamente iguales sus tres caras.*

Hip.) Triedros *abc* y *a'b'c'*; $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$; $\widehat{bc} = \widehat{b'c'}$; $\widehat{ac} = \widehat{a'c'}$, fig. 253.

Tesis) Triedro *abc* = triedro *a'b'c'*.

Demostración. — Al ser $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$ y $\widehat{ac} = \widehat{a'c'}$, las caras $\widehat{bc}$ y $\widehat{b'c'}$ son secciones igualmente inclinadas de los diedros *a* y *a'*, y como estas secciones son iguales (**56**),

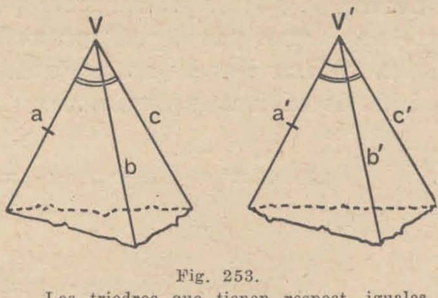


Fig. 253.
Los triedros que tienen respect. iguales sus tres caras son iguales.

los diedros *a* y *a'*, también son iguales, luego por el segundo criterio de igualdad de triedros, resulta:

triedro abc = triedro a'b'c'.

256. Cuarto criterio. — TEOREMA. — *Dos triedros son iguales si tienen respectivamente iguales sus tres diedros.*

Hip.) Triedro abc y $a'b'c'$; $\widehat{a} = \widehat{a'}$; $\widehat{b} = \widehat{b'}$; $\widehat{c} = \widehat{c'}$; fig. 254.

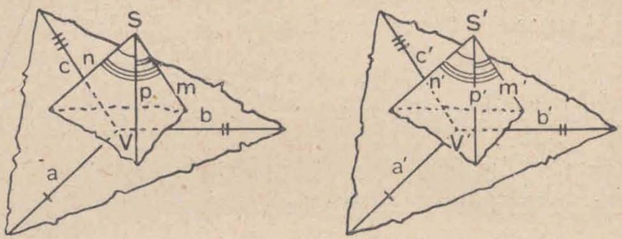


Fig. 254.
Los triedros que tienen respect. iguales sus tres diedros son iguales.

Tesis) Triedro abc = triedro $a'b'c'$.

Demostración. — Sean S y S' los triedros suplementarios de los triedros V y V' respectivamente, para lo cual sabemos que basta trazar por S y S' perpendiculares a las caras de los triedros V y V', respectivamente.

Por definición de triedros suplementarios tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{np} + \widehat{a} = 2R \\ \widehat{n'p'} + \widehat{a'} = 2R \end{array}\right\} \text{ pero } \widehat{a} = \widehat{a'}, \text{ luego es: } \widehat{np} = \widehat{n'p'} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{mp} + \widehat{b} = 2R \\ \widehat{m'p'} + \widehat{b'} = 2R \end{array}\right\} \text{ pero } b = b', \text{ luego es: } \widehat{mp} = \widehat{m'p'} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{mn} + \widehat{c} = 2R \\ \widehat{m'n'} + \widehat{c'} = 2R \end{array}\right\} \text{ pero } c = c', \text{ luego es: } \widehat{mn} = \widehat{m'n'} \quad (3)$$

Las expresiones (1), (2) y (3) nos dicen que los triedros S y S' tienen respectivamente iguales las tres caras, luego, por el teorema último, es:

$$\text{triedro } S = \text{triedro } S'$$

y como sus suplementarios son los triedros abc y $a'b'c'$, y sabemos que los triedros suplementarios de triedros iguales son iguales, resulta:

$$\text{triedro } abc = \text{triedro } a'b'c'.$$

Relaciones entre las caras de un triedro

257. Teorema. — *En todo triedro una cara es menor que la suma de las otras dos.*

Hip.) Triedro abc, fig. 255.

Tesis) $\widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc}$

Demostración. — El teorema es cierto para la menor de las caras; demostraremos que también es cierto para la cara mayor, que suponemos sea ac.

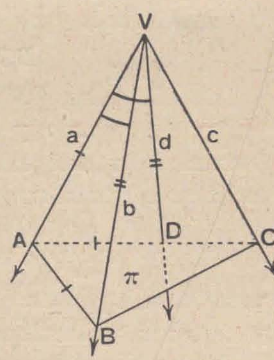


Fig. 255.
En un triedro una cara es menor que la suma de las otras dos.

En la cara ac construyamos una semirrecta d que forme con a un ángulo ad igual al ángulo ab:

$$\widehat{ad} = \widehat{ab}$$

En las semirrectas b y d construyamos $VD = VB$, y por B y D tracemos un plano cualquiera π, que corta en A a la semirrecta a' y en C a la semirrecta c.

Los triángulos VAD y VAB son iguales por tener VA común, $VD = VB$ por construcción, y $\widehat{ad} = \widehat{ab}$ por construcción, y como sabemos que en triángulos iguales a ángulos iguales se oponen lados iguales, resulta que es $AD = AB$.

Sabemos que en todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos, luego en el triángulo ABC se verifica:

$$AC < AB + BC$$

o bien: $$AD + DC < AB + BC$$

pero sabemos que es: $$AD = AB$$

y restando ordenadamente estas dos expresiones, por la propiedad monótona de la resta, resulta:

$$AD + DC - AD < AB + BC - AB$$

y simplificando, queda:

$$DC < BC \qquad (1)$$

Los triángulos VDC y VBC tienen dos lados iguales, VC por ser común y $VD = VB$ por construcción, y los terceros lados desiguales por lo demostrado en (1); y como a menor lado se opone menor ángulo, tenemos:

$$\widehat{dc} < \widehat{bc}$$

pero sabemos que es: $$\widehat{ad} = \widehat{ab}$$

y sumando ordenadamente, por la propiedad monótona de la suma, resulta:

$$\widehat{ad} + \widehat{dc} < \widehat{ab} + \widehat{bc}$$

pero la suma de los ángulos ad y dc es el ángulo ac, luego se tiene, finalmente, que es:

$$\widehat{ac} < \widehat{ab} + \widehat{bc}$$

258. Teorema. — *La suma de las caras de un triedro es menor que cuatro rectos.*

Hip.) Triedro *abc*, figura 256.

Tesis) $\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ac} < 4\text{R}$

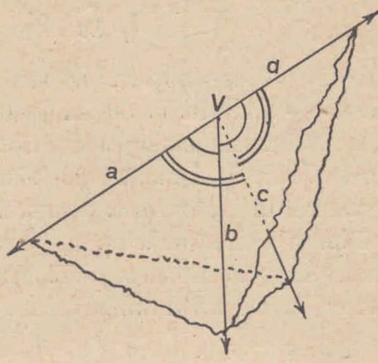


Fig. 256.
Las tres caras de un triedro suman menos de 4 rectos.

Demostración. — Tracemos la semirrecta *d*, opuesta a la semirrecta *a*. Así queda da formado el triedro *bcd*, en el que, por el teorema último, una cara es menor que la suma de los otros dos:

$$\widehat{bc} < \widehat{bd} + \widehat{cd} \quad (1)$$

Pero los ángulos *bd* y *ab*, y los ángulos *cd* y *ac*, son suplementarios por ser adyacentes, luego es:

$$\widehat{bd} = 2R - \widehat{ab}$$

y análogamente: $\widehat{cd} = 2R - \widehat{ac}$

y reemplazando estos valores en (1), resulta:

$$\widehat{bc} < 2R - \widehat{ab} + 2R - \widehat{ac}$$

o bien: $\widehat{bc} < 4R - \widehat{ab} - \widehat{ac}$

y sumando a ambos miembros *ab* + *ac*, lo que es posible por la propiedad uniforme de la suma, resulta:

$$\widehat{bc} + \widehat{ab} + \widehat{ac} < 4R - \widehat{ab} - \widehat{ac} + \widehat{ab} + \widehat{ac}$$

y después de simplificar, queda:

$$\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{ac} < 4R$$

259. Comparación de los triángulos con los triedros. — El estudio de los triángulos y de los triedros ofrece algunas analogías y diferencias. Por lo pronto, los criterios de igualdad de triángulos y los criterios de igualdad de los triedros presentan una gran correlación.

Damos a continuación un cuadro con las principales analogías y diferencias, si bien algunas de las propiedades no las hemos estudiado para los triedros.

Analogías

TRIÁNGULOS	TRIEDROS
En todo triángulo:	En todo triedro:
Un *lado* es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.	Una *cara* es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.
A *lados iguales* se oponen *ángulos iguales,* y recíprocamente.	A *caras iguales* se oponen *diedros iguales,* y recíprocamente.
A *mayor lado* se opone *mayor ángulo.*	*A mayor cara* se opone *mayor diedro.*
Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido desigual, a *mayor ángulo* se opone *mayor lado.*	Si dos triedros tienen dos caras respectivamente iguales y el diedro comprendido desigual, a *mayor diedro* se opone *mayor cara.*

Diferencias

La suma de los *ángulos* es igual a dos rectos.	La suma de los *diedros* está comprendida entre 2 y 6 rectos.
Un *ángulo exterior* es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.	Un *diedro exterior* es menor que la suma de los diedros interiores no adyacentes.
Cada *lado* puede ser tan grande como se quiera.	Cada *cara* es menor que 2 rectos.
La suma de los *lados* no está sujeta a ninguna condición.	La suma de las *caras* es menor que 4 rectos.

ANGULOS POLIEDROS

260. Definiciones. — Se llama *ángulo poliedro* al conjunto de puntos comunes a los diedros determinados por varias semirrectas que tienen el origen común y tres consecutivas no están en un mismo plano.

Al decir *los diedros determinados por varias semirrectas,* consideramos que cada dos semirrectas consecutivas determinan un plano, y cada dos planos consecutivos determinan un diedro cuya arista es cada una de las semirrectas dadas.

El punto común se llama *vértice,* las semirrectas *aristas,* y los planos determinados *caras,* y *diedros del ángulo poliedro* a los diedros que forman las caras.

Si el ángulo poliedro tiene 3, 4, y,... aristas, se llama respectivamente, *triedro, tetraedro, pentaedro,* etc.

261. Poliedros cóncavos y convexos. — Un ángulo poliedro es *convexo,* cuando el plano determinado por dos aristas consecutivas deja a las demás aristas en un mismo semiespacio; en caso contrario es *cóncavo.*

Así, en la fig. 257 tenemos un ángulo poliedro convexo. Comprobamos que si se cortan todas las aristas del ángulo poliedro con un plano, la sección que resulta es un *polígono convexo.*

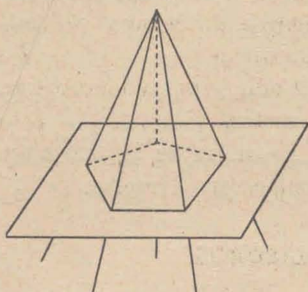


Fig. 257.
Angulo poliedro convexo

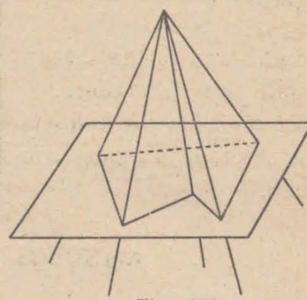


Fig. 258.
Angulo poliedro cóncavo.

En la fig. 258 tenemos un ángulo poliedro cóncavo. Se comprueba que si se cortan todas las aristas del ángulo poliedro con un plano, la sección que resulta es un *polígono cóncavo.*

262. Convención. — *Siempre que hablemos de ángulos poliedros, quedará entendido que nos referimos a ángulos poliedros convexos.*

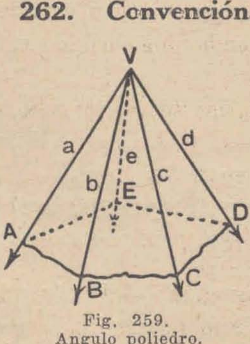


Fig. 259.
Angulo poliedro.

263. Notación. — En el ángulo poliedro de la fig. 259 el vértice es V, las aristas *a, b, c, d* y *e,* y las caras *ab, bc, cd, de* y *ca.*

Un ángulo poliedro se designa con la letra del vértice, o bien nombrando sucesivamente las letras de sus aristas, o nombrando la letra del vértice y las letras mayúsculas puestas una en cada arista. Así el triedro de la fig. 259 se puede leer de una de las siguientes maneras:

Ang. pol. V; áng. pol. abcde; áng.pol. V. ABCDE.

Relación entre una cara y la suma de las demás

264. Teorema. — *En todo ángulo poliedro una cara es menor que la suma de las demás.*

Hip.) *Ang. pol. abcde,* fig. 260.

Tesis) $\widehat{ab} < \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} + \widehat{ea}.$

Demostración. — Descompongamos el ángulo poliedro dado en ángulos triedros haciendo pasar planos por e y b, y e y c.

Sabemos que en todo triedro una cara es menor que la suma de los otros dos, luego en el triedro abe se tiene:

$$\widehat{ab} < \widehat{be} + \widehat{ea}$$

y en el triedro bce: $\widehat{be} < \widehat{bc} + \widehat{ce}$

y en el triedro cde: $\widehat{ce} < \widehat{cd} + \widehat{de}$

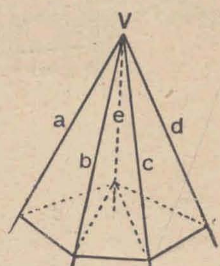


Fig. 260.
Una cara es menor que la suma de las demás.

Sumando ordenadamente, por la propiedad uniforme de la suma, se tiene:

$$\widehat{ab} + \widehat{be} + \widehat{ce} < \widehat{be} + \widehat{ea} + \widehat{bc} + \widehat{ce} + \widehat{cd} + \widehat{de}$$

y suprimiendo los sumandos be y ce que figuran en ambos miembros, pues por la propiedad monótona de la resta eso equivale a restar $bc + ce$ de ambos miembros, resulta:

$$\widehat{ab} < \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} + \widehat{ea}$$

265. Teorema. — *La suma de las caras de un ángulo poliedro es menor que cuatro rectos.*

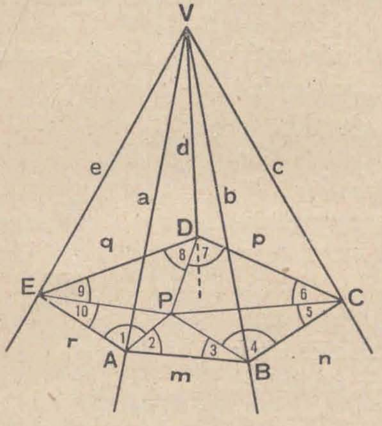


Fig. 261.

Hip.) Angulo pol. *abcde*, fig. 261.

Tesis.) $\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} + \widehat{ea} < 4R$.

Demostración.—Consideremos un plano que corte a todas las aristas formando el polígono $ABCDE$.

Unamos un punto interior P del polígono con los vértices A, B, C, E. Resultan tantos triángulos con vértice en P, como triángulos hay con vértice en V, 5 triángulos en nuestro caso, y como la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos, se tiene:

suma áng. de los triángulos en $P = 5.2R = 10R$
suma áng. de los triángulos en $V = 5.2R = 10R$

Como sabemos que en todo triedro una cara es menor que la suma de las otras dos, en los triedros formados en A, B... E, se tiene:

en el triedro $A: \widehat{ar} + \widehat{am} > \widehat{1} + \widehat{2}$

,, ,, ,, $B: \widehat{bm} + \widehat{bn} > \widehat{3} + \widehat{4}$

,, ,, ,, $C: \widehat{cn} + \widehat{cp} > \widehat{5} + \widehat{6}$

,, ,, ,, $C: \widehat{dp} + \widehat{dq} > \widehat{7} + \widehat{8}$

,, ,, ,, $E: \widehat{eq} + \widehat{er} > \widehat{9} + \widehat{10}$

Sumando ordenadamente, y observando que el primer miembro es la suma de los ángulos de la base de los triángulos formados alrededor de V, y que el segundo miembro es la suma de los ángulos de la base de los triángulos formados alrededor de P, tenemos:

Suma áng. base triáng. en $V >$ *Suma áng. base triáng. en* P

y como hemos visto que la suma de los ángulos de los triángulos en V es igual a la suma de los ángulos de los triángulos en P, debe ser, entonces, la suma de los ángulos de vértice en V menor que la suma de los ángulos de vértice en P:

Suma áng. de vértice en $V <$ *Suma áng. de vértice en* P

pero sabemos que el segundo miembro es igual a cuatro rectos, por ser la suma de los ángulos formados alrededor de un punto, luego:

Suma áng. de vértice en $V < 4R$

es decir: $\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} < \widehat{4R}$

266. Sección de un ángulo poliedro. — Se llama *sección* de un ángulo poliedro, al polígono que se obtiene al cortar todas las aristas con un plano.

En la fig. 261 el polígono $ABCDE$ es una sección del ángulo poliedro $V.\ ABCDE$.

Secciones paralelas son las obtenidas con planos paralelos.

267. Angulos poliedros iguales. — Dos ángulos poliedros son *iguales*, cuando las caras y diedros del uno son ordenadamente iguales a las caras y diedros del otro.

Si en los ángulos poliedros *abcde* y *a'b'c'd'e'* *es*:

$$\widehat{a} = \widehat{a'};\ \widehat{b} = \widehat{b'};\ \widehat{c} = \widehat{c'};\ \widehat{d} = \widehat{d'};\ \widehat{e} = \widehat{e'}$$

y además:

$$\widehat{ab} = \widehat{a'b'};\ \widehat{bc} = \widehat{b'c'};\ \widehat{cd} = \widehat{c'd'};\ \widehat{de} = \widehat{d'e'};\ \widehat{ea} = \widehat{e'a'},$$

resulta que es:

$$\text{áng. pol. } abcde = \text{áng. pol. } a'b'c'd'e'.$$

EJERCICIOS

73. Si las tres caras de un triedro son iguales, todo plano que lo corte por puntos de las aristas equidistantes del vértice determina un triángulo equilátero.

74. Se desea construir un triedro cuyas caras sean iguales al ángulo interior de un polígono regular. ¿Qué polígonos regulares deberán elegirse?

75. Idem, ídem si se tratara de un ángulo poliedro.

76. Se desea construir un ángulo poliedro con ángulos internos de un exágono regular y un octógono regular. ¿Es posible?

77. En todo triedro los planos bisectores de sus diedros se cortan según una recta común.

78. En todo triedro los planos perpendiculares a sus caras trazados por las aristas opuestas se cortan según una recta común.

79. Las cuatro caras de un tetraedro son triángulos equiláteros. Demostrar que todos sus diedros son iguales.

80. Construir un triedro trirrectángulo cuyas aristas pasen por tres puntos dados.

Capítulo VIII

POLIEDROS

268. En las páginas 66 a 82 hemos estudiado la simetría respecto a una recta, a un punto y a un plano, por lo que nos remitimos a dichas páginas para su repaso, así como para ver las relaciones que hay entre las distintas simetrías.

Ejes de simetría de orden superior

269. Definiciones. — Se llama *poliedro* a la figura limitada por todas sus partes por porciones de plano.

Así, son poliedros una regla, una caja, un lápiz, un ladrillo, etc.

En un poliedro hay que considerar:

Las *caras,* que son los polígonos planos que forman la *superficie* del poliedro;

Las *aristas,* que son los lados de esos polígonos, y que son los segmentos de recta determinados por dos caras contiguas;

Los *vértices,* que son los extremos de las aristas. Cada vértice es la intersección común de tres aristas por lo menos;

Los *ángulos diedros,* que son los ángulos formados por dos caras contiguas que tienen una arista común;

Los *ángulos poliedros,* que son los ángulos formados por tres o más caras que tienen un vértice común;

Las *diagonales,* que son los segmentos que unen dos vértices que no están en una misma cara;

La *superficie del poliedro,* que es la suma de las áreas de todas sus caras;

El *volumen del poliedro,* que es la porción de espacio que ocupa el poliedro.

270. Diversos poliedros. — El nombre de algunos poliedros depende del número de sus caras:

Si tiene 4 caras, se llama *tetraedro;*
Si tiene 5 caras, se llama *pentaedro;*
Si tiene 6 caras, se llama *exaedro;*
Si tiene 8 caras, se llama *octaedro;*
Si tiene 12 caras, se llama *dodecaedro;*
Si tiene 20 caras, se llama *icosaedro,* etc.

En general, si un poliedro tiene n caras, se llama poliedro de n caras.

El más simple de los poliedros es el *tetraedro,* que tiene cuatro caras triangulares.

La importancia del tetraedro con respecto a los poliedros es análoga a la que tiene el triángulo respecto a los polígonos.

Algunos poliedros tienen nombres especiales, *prismas, pirámides,* cuyo estudio haremos más adelante.

271. Poliedros convexo y cóncavo. — Un poliedro es *convexo,* fig. 262, cuando el plano a que pertenece cada cara deja a los demás en un mismo semiespacio; en caso contrario es *cóncavo*, fig. 263.

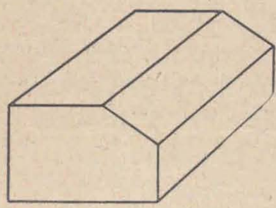


Fig. 262.
Poliedro convexo.

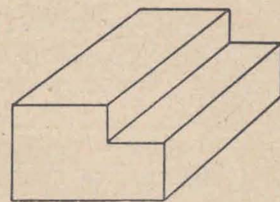


Fig. 263.
Poliedro cóncavo.

272. Convención. — *En lo sucesivo, cuando hablemos de poliedros, nos referiremos a los poliedros convesos.*

273. Poliedros iguales. — Dos poliedros son *iguales*, cuando son ordenadamente iguales las caras y los ángulos poliedros.

274. OBSERVACIÓN. — No hay que confundir un *ángulo poliedro* con un *poliedro*, ni las caras de un ángulo poliedro, que son *ángulos planos*, con las caras de un poliedro que son *polígonos*.

Superficie prismática

275. Definiciones. — Se llama *superficie prismática* a la figura determinada por tres o más rectas paralelas, llamadas aristas y dadas en un cierto orden, y las tiras de plano comprendidas entre cada dos rectas consecutivas

En la figura 264 el conjunto de las rectas paralelas *a, b, c, d , e,* y las tiras de planos *ab, bc, cd, de* y *ea,* constituye con la superficie prismática *abcde.* Las rectas dadas son las *aristas,* las tiras de planos son las *caras,* y los diedros que forman dos caras consecutivas son los diedros de la superficie prismática.

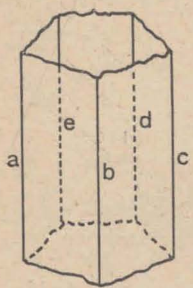


Fig. 264. superficie prismática

Si la superficie prismática tiene 3, 4, 5,... aristas, se llama, respectivamente, *triangular, cuadrangular, pentagonal,* etc.

Una superficie prismática es *convexa,* cuando el plano determinado por dos aristas consecutivas deja a las demás aristas en un mismo semiespacio; en caso contrario es *cóncava.*

En lo sucesivo, siempre que hablemos de superficies prismáticas quedará entendido que nos referimos a las convexas.

Una superficie prismática se designa con las letras de sus aristas.

276. Sección de una superficie prismática. — Se llama *sección* de una superficie prismática, al polígono que se obtiene al cortar todas las aristas con un plano.

En la fig. 265 el polígono *ABCDE* es una sección de la superficie prismática *abcde.*

Secciones paralelas son las obtenidas con planos paralelos.

277. Teorema. — *Dos secciones paralelas de una misma superficie prismática, son iguales.*

Hip.) *Sup. prism. abcde;* $\alpha // \beta$; *P* y *P* polígonos obtenidos, fig. 265.

Tesis.) $P = P'$.

Demostración. — Como es $\alpha // \beta$ y el plano determinado por *a* y *b* corta a α y a β, y sabemos que las intersecciones de dos planos paralelos con otro plano son paralelos, es:

$$AB \; // \; A'B'$$

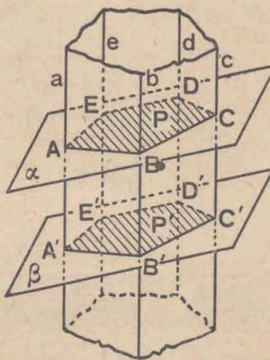


Fig. 265.
Secciones paralelas de una superficie prismática.

pero como es por hipótesis $a // b$, la figura $ABB'A'$ es un paralelogramo, y como los lados opuestos de un paralelogramo son iguales, es:

$$AB = A'B'$$

De la misma manera demostraríamos que los demás lados de los polígonos *P* y *P'* son respectivamente iguales.

Se ha visto que es $AB // A'B'$, y por la misma razón es $BC // B'C'$, de manera que los ángulos *ABC* y *A'B'C'* tienen sus lados respectivamente paralelos, luego son iguales (**31**):

$$ABC = A'B'C'$$

y de la misma manera se demostrará la igualdad de los restantes ángulos de *P* y *P'*.

Y si los lados de *P* y *P'* y sus ángulos son respectivamente iguales, es:

$$P = P'$$

278. Sección normal. — Se llama *sección normal* de una superficie prismática al polígono que resulta al cortar todas las aristas con un plano perpendicular a una de ellas.

Nótese que si el plano es perpendicular a una de las aristas, es perpendicular a las restantes.

Del teorema último y teniendo en cuenta la definición de sección normal, se deduce el siguiente:

279. Corolario. — *Las secciones normales de una superficie prismática son paralelas e iguales.*

280. Superficies prismáticas iguales. — Dos superficies prismáticas son *iguales*, cuando sus secciones normales también lo son.

Si las superficies prismáticas son S y S', y N y N' sus secciones normales y es $N = N'$, también es:

$$Sup.\ prism.\ S = Sup.\ prism.\ S'$$

Prisma

281. Definiciones. — *Se llama prisma indefinido* a los puntos de espacio que pertenecen a todos los diedros de una superficie pricmática, fig. 266.

Se llama *prisma finito* o simplemente *prisma*, a la parte de prisma indefinido comprendida entre dos planos paralelos que cortan a todas las aristas.

Las secciones producidas por los planos paralelos son las *bases*, y las porciones de tiras de la superficie prismática son las *caras laterales*. En el prisma $ABCD\ A'B'C'D'$

fig. 267, las secciones $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son las bases y los cuadriláteros AB', BC', CD' y DA' son las caras laterales.

Altura de un prisma es la distancia de un punto de una base al plano que contiene a la otra.

Diagonal de un prisma es el segmento de recta determinado por dos vértices que están en caras diferentes.

Según sea el polígono de la base, así se llama el prisma: *triangular, cuadrangular, pentagonal* etcétera.

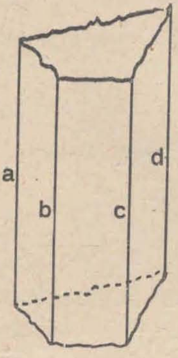


Fig. 266.
Prisma indefinido.

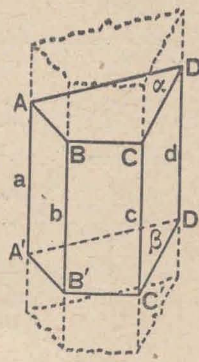


Fig. 267.
Prisma.

282. Corolario. — De la definición de prisma se deduce:

I. — Las aristas laterales de un prisma son iguales y paralelas.

II. — Las caras laterales de un prisma son paralelogramos.

283. Prisma recto. — Un prisma es *recto* cuando las aristas laterales son perpendiculares a las bases, (fig. 268), y oblícuo en caso contrario, (fig. 269).

Un prisma es *regular*, si es recto y sus bases son polígonos regulares.

284. Corolarios. — I. *Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos.*

II. — Las caras laterales de un prisma regular son iguales.

III. — La altura de un prisma recto es igual a una arista lateral.

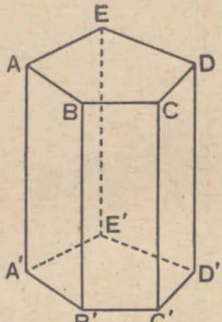


Fig. 268.
Prisma recto.

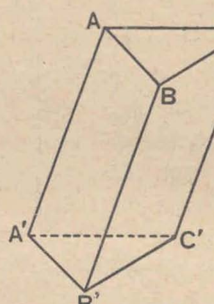


Fig. 269.
Prisma oblicuo.

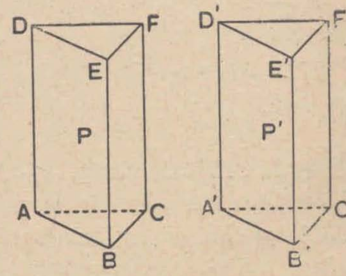
285. Prismas iguales. — Dos prismas son *iguales,* si las caras laterales son ordenadamente iguales (**271** y **280**).

286. Teorema. — *Dos prismas rectos de igual base y altura son iguales.*

Hip.) Prismas *rectos P* y *P'* $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$; $AD = A'D'$, fig. 270.

Tesis.) Pr. P = Pr. P'.

Demostración. — Siendo iguales las bases, se tiene que:



Fg. 270.
Prismas iguales.

$$AB = A'B'; \quad BC = B'C'; \quad CA = C'A' \quad (1)$$

Como las caras laterales son paralelogramos, y los lados opuestos de un paralelogramo son iguales, tenemos:

$$AD = BE = CF$$
$$\text{y } A'D' = B'E' = C'F'$$

Pero los primeros miembros son aguales por hipótesis, luego, por el carácter transitivo de la igualdad, resulta:

$$AD = A'D' = BE = B'E' = CF = C'F' \quad (2)$$

De (1) y (2) deducimos que los rectángulos laterales de ambos prismas tienen las bases y las alturas respectivamente iguales, luego dichas caras son iguales, luego es:

$$\text{Pr. } P = \text{Pr. } P'.$$

Paralelepípedo

287. Definiciones. — Se llama *paralelepípedo* al prisma cuyas bases son paralelogramos, fig. 271.

Dos caras son *opuestas*, cuando no tienen ninguna arista común.

Se llama *diagonal* al segmento determinado por dos vértices que están en planos diferentes.

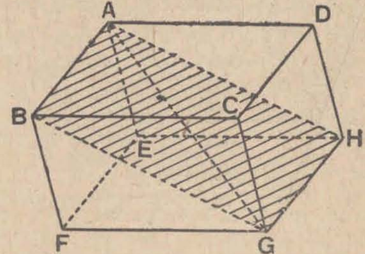


Fig. 271.
Paralelepípedo.

Plano diagonal de un paralelepípedo es el determinado por dos aristas laterales que no están en una misma cara.

En el paralelepípedo de la fig. 271 son caras opuestas *ABFE*, y *CGHD*; *AG* es una diagonal y *ABGH* es un plano diagonal.

Designaremos un paralelepípedo anteponiendo *Ppd* a las letras de sus vértices.

288. TEOREMA. — *En todo paralelepípedo las caras opuestas son iguales.*

Hip.) *Ppd. ABCDEFGH*; I y II caras opuestas, figura 272.

Tesis.) I = II.

Demostración. — Como las bases de un paralelepípedo son paralelogramos por definición, se tiene:

$$AB = DC \quad \text{y} \quad EF = HG \qquad (1)$$

y como las aristas laterales de un prisma son iguales, (**282**, *I*), resulta que es:

$$AE = BF = CG = DH \qquad (2)$$

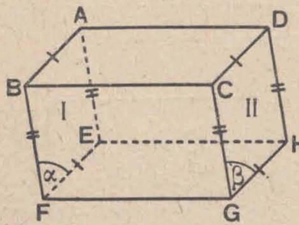


Fig. 272.
Las caras opuestas de un Ppd. son iguales.

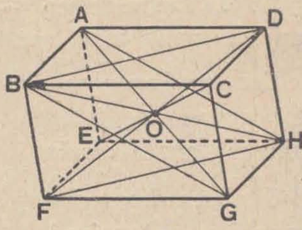


Fig. 273.
Las diagonales de un Ppd. se cortan en partes iguales.

Además, como las caras laterales de un prisma son paralelogramos, resulta:

$$BF // CG$$

y por definición de *Ppd*: $EF // GH$

Entonces, los ángulos α y β que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales:

$$\alpha = \beta \qquad (3)$$

De (1), (2) y (3), deducimos que los paralelogramos I y II, que tienen sus lados iguales, respectivamente, e igual un ángulo, son iguales, luego: $I = II$.

289. Teorema. — *En todo paralelepípedo las diagonales concurren en un punto que divide a cada una de ellas en partes iguales.*

Hip.) *Ppd* $ABCDEFGH$; AG, BH, CE y DF diagonales, fig. 273.

Tesis.) Las diag. tienen un punto común que las divide en dos partes iguales.

Demostración. — Los segmentos AB y GH son iguales y paralelos (**280** y **285**), luego el cuadrilátero $ABGH$ es un paralelogramo, de manera que sus diagonales AG y BH se cortan en un punto O que las divide en dos partes iguales.

El cuadrilátero $BFHD$ también es un paralelogramo, luego sus diagonales BH y FD se cortan en el mismo punto O que las divide en dos partes iguales.

Procediendo de la misma manera demostraremos que la cuarta diagonal CE pasa por O y queda dividida en dos partes, luego las *diagonales tienen un punto común que las divide en dos partes iguales.*

290. Teorema. — *Si un plano corta a cuatro aristas paralelas de un paralelepípedo, la sección que resulta es un paralelogramo.*

Hip.) *Ppd.* $ABCDEFGH$; plano α corta a AD en P, a BC en Q, a FG en R y a EH en S., fig. 274.

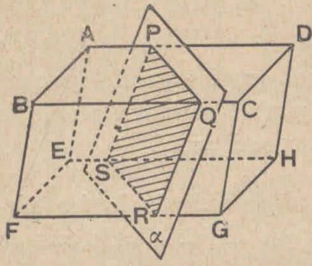


Fig. 274.
La sección de un Ppd. es un paralelogramo.

T*esis*) $PQRS$ es un paralelogramo.

Demostración. — Los segmentos PQ y RS son paralelos por ser intersecciones de dos planos paralelos con α, luego $PQ /\!/ RS$. Por la misma razón es $PS /\!/ QR$, luego la figura $PQRS$ que tiene sus cuatro lados paralelos dos a dos es un paralelogramo.

Paralelepípedo rectángulo

291. Definición. — Un paralelepípedo es *rectángulo* cuando las bases y las caras laterales son rectángulos, figura 275.

292. Teorema. — *En todo paralelepípedo rectángulo los diagonales son iguales.*

Hip.) Ppd. rect. $ABCDEFGH$; diag. AH, BE, CF, DG, fig. 275.

Tesis.) $AH = BE = CF = $
$= DG$.

Demostración. — Uniendo H con A y con F, y E con G y con B resultan los triángulos AFH y BGE que son rectángulos porque AF y BG son

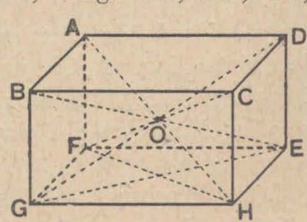


Fig. 275.
Paralelepípedo rectángulo.

perpendiculares al plano $FGHE$, luego (**36**) es $AF \perp FH$, y $BG \perp GE$, y además son iguales por tener $AF = BG$ porque las aristas laterales de un prisma son iguales, y $FH = GE$ por ser diagonales de un rectángulo, luego las hipotenusas son iguales, es decir:

$$AH = BE \qquad (1) \quad .$$

De manera análoga se demuestra que es:

$$BE = CF \quad \text{y} \quad CF = DG \qquad . \ (2)$$

Y comparando las igualdades (1) y (2), resulta:

$$AH = BE = CF = DG$$

293. Corolario. — *El punto de intersección de las diagonales de un paralelepípedo rectángulo equidista de todas las caras del mismo.*

Romboedro

294. Definiciones. — Se llama *romboedro* al paralelepípedo que tiene iguales todas sus aristas, fig. 276.

En general, las caras laterales y las bases de un romboedro son rombos.

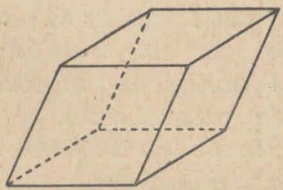


Fig. 276.
Romboedro oblícuo.

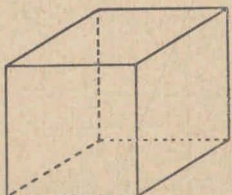


Fig. 277.
Romboedro recto.

Un romboedro es *recto* cuando sus caras laterales son cuadradas, fig. 277.

295. Teorema. — *En todo romboedro recto los planos diagonales determinados por las aristas perpendiculares a las bases son perpendiculares y bisectores de los diedros por cuyas aristas pasan.*

Hip.) Romb. recto $ABCDEFGH$; α y β pl. diagonales, fig. 278.

Tesis) 1º) $\alpha \perp \beta$;

2º) α bisector de los diedros BG y DE; β bisector de los diedros AF y CH.

Demostración. — 1º) Al ser cuadradas las caras laterales, resulta que BG y DE, AF y CH son perpendiculares a las bases del romboedro, y como sabemos que si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al plano dado, los planos α y β que pasan por dichas perpendiculares son perpendiculares a las bases, de manera que los ángulos BOO' y COO' son rectos, es decir, el ángulo BOC es la sección normal del diedro $\alpha\beta$. Pero el ángulo BOC es recto por estar formado por las diagonales de un rombo, que son perpendiculares, luego si la sección normal es un ángulo recto, el diedro es recto, luego los planos son perpendiculares: $\alpha \perp \beta$.

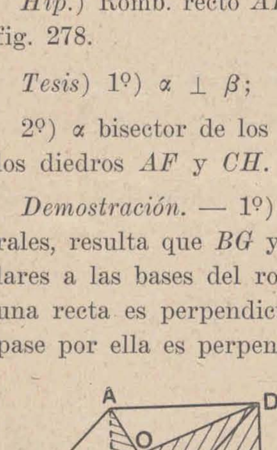


Fig. 278.

2º) Los ángulos 1 y 2 son iguales por ser BD diagonal de un rombo, pero como BG es perpendicular a BA y a BC, también lo es a BD (**34**), luego los ángulos 1 y 2 son las secciones rectas de los diedros formados por los planos α y $ABGF$, y α y $BCHG$. Y si las secciones rectas son iguales (**51**), los diedros formados también lo son, luego α es el plano bisector del diedro BG. Análogamente, α es bisector del diedro DE.

De la misma manera se demuestra que β es bisector de los diedros AF y CH.

296. Base media de un romboedro. — Se llama *base media* de un romboedro a la sección que resulta al cortarlo con un plano paralelo a las bases y que pase por el punto de intersección de sus diagonales.

Cubo

297. Definición. — Se llama *cubo* al paralelepípedo cuyas bases y caras laterales son cuadradas, fig. 279.

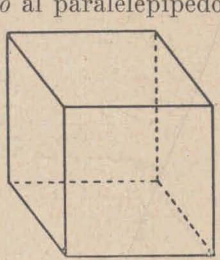


Fig. 279. Cubo

De la definición dada se deduce que todas las aristas son iguales, y que las tres aristas que concurren en un punto son perpendiculares dos a dos.

298. Propiedades del cubo. — Como el cubo es un paralelepípedo rectángulo (**291**) y un romboedro recto respecto de cualquiera de sus caras (**294**), sus propiedades son las de una y otra figura. Esas propiedades son:

I. — *Todas sus caras son iguales.*

II. — *Las diagonales son iguales y se cortan en partes iguales.*

III. — *Los planos diagonales son iguales y bisectores de los diedros que forman sus caras.*

Pirámide

299. Definiciones. — Se llama *pirámide,* al poliedro que se obtiene al cortar con un plano todas las aristas de un ángulo poliedro, sin pasar por el vértice.

La sección que resulta se llama *base,* los triángulos determinados son las *caras laterales* de la pirámide. El vértice del ángulo poliedro es el vértice o *cúspide* de la pirámide.

Si la base es un triángulo, la pirámide se llama *tetraedro* o *pirámide triangular;* si es un cuadrilátero se llama *cuadrangular;* si es un pentágono se llama *pentagonal,* etc. (*). *Altura* de una pirámide es la distancia del vértice a la base.

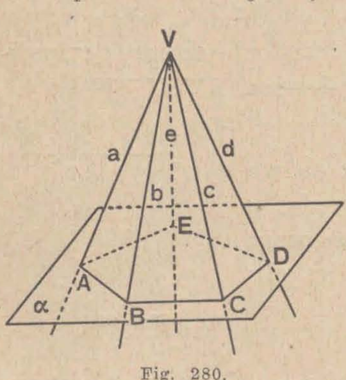


Fig. 280.
Pirámide.

En la fig. 280 se tiene una pirámide pentagonal; *V* es el vértice, el polígono *ABCDE* es la base, y las caras son *VAB, VBC* y *VEA.*

(*) Si una pirámide tiene por base un polígono de 3, 4, 5, ... n lados, tiene (3+1), (4+1), (5+1), ... (n+1), vértices y (2×3), (2×4), (2×5), ... (2×n) aristas.

300. Pirámide regular. — Una pirámide es *regular*, o *equilátero*, si la base es un polígono regular y el vértice es un punto de la perpendicular a la base trazada por el centro de ella.

La pirámide $V.\ ABCDEF$ de la fig. 281 es regular porque la base es un polígono regular y el vértice V está en la perpendicular VO a la base en su centro O.

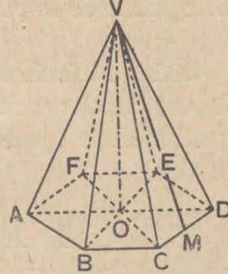


Fig. 281.
Pirámide regular.

De las definiciones de pirámide y de altura, y teniendo en cuenta que la perpendicular es menor que cualquier oblicua, deducimos los siguientes:

301. Corolarios. — En toda pirámide recta se verifica:

I. — *El pie de la altura es el centro del polígono de la base;*

II. — *Las aristas laterales son iguales;*

III. — *Las caras laterales son triángulos isósceles e iguales;*

IV. — *Las alturas de las caras laterales son iguales.*

V. — *La altura forma ángulos iguales con las aristas laterales.*

302. Apotema y eje de una pirámide regular. — *Apotema* de una pirámide *regular* es la *altura* de una cara lateral.

El *eje* de una pirámide regular es la recta determinada por el centro de la base y el vértive.

En la pirámide de la fig. 281 la apotema es VM y el eje es la recta que determinan V y O.

El eje de una pirámide es un *eje de simetría* cuando todo punto de la pirámide tiene su simétrico en la misma.

303. Pirámides iguales. — Dos pirámides son *iguales,* cuando las caras y ángulos poliedros de una son respectivamente iguales a las caras y ángulos poliedros de la otra.

304. Casos de igualdad de tetraedros. — Por razones de brevedad no demostraremos los siguientes casos de igualdad de tetraedros, que proponemos como ejerci-

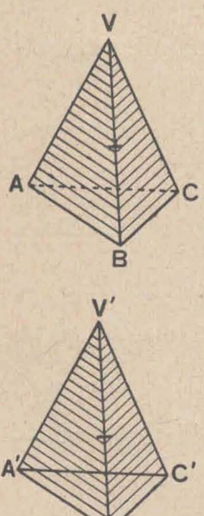


Fig. 282.

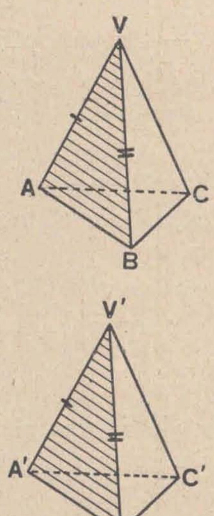


Fig. 283.

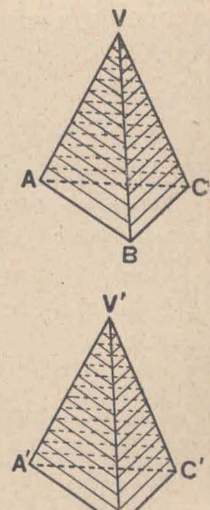


Fig. 284.

cio de aplicación de la igualdad de triedros y de triángulos.

305. I. Teorema. — *Dos tetraedros son iguales si tienen respectivamente iguales dos caras y el diedro comprendido,* fig. 282.

Si es $\triangle\, VAB = \triangle\, V'A'B'$; $\triangle\, VBC = \triangle\, V'B'C'$, y $VB = V'B'$, es tetr. $V.\ ABC =$ tetr. $V'.\ A'B'C'$.

306. II. Teorema. — *Dos tetraedros son iguales si tienen respectivamente iguales dos diedros y la cara comprendida,* fig. 283.

Si es $\widehat{VA} = \widehat{V'A'}$; $\widehat{VB} = \widehat{V'B'}$, y $\triangle\, VAB = \triangle\, V'A'B'$, es tetr. $V.\ ABC =$ tetr. V'. $A'B'C'$.

307. III. Teorema. — *Dos tetraedros son iguales si tienen respectivamente iguales sus tres caras,* fig. 284.

Si es: $\triangle\, VAB = \triangle\, V'A'B'$; $\triangle\, VBC = V'B'C'$, y $\triangle\, VAC = \triangle\, V'A'C'$, es tetr. $V.\ ABC =$ tetr. $V'.\ A'B'C'$.

Propiedades de simetría de los prismas

308. Teorema. — *En todo paralelepípedo el punto de intersección de las diagonales es un centro de simetría.*

Hip.) *Ppd.* $ABCDEFGH$; O intersección de las diagonales, fig. 285.

Tesis) O es un centro de simetría del *Ppd.*

Demostración. — Si se nos da un punto P de la superficie del *PPd.* dado, este punto tiene su simétrico respecto a O en la superficie lateral.

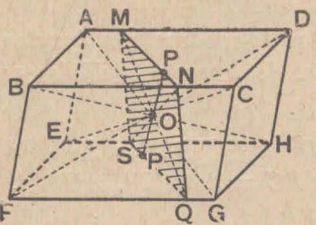


Fig. 285

La intersección de las diagonales de un ppd. es un centro de simetría.

Tracemos un plano α que pase por O y por P y que corte a cuatro aristas del paralelepípedo. La sección $MNQS$ obtenido es, por el teorema (**290**), un paralelogramo, cuyas diagonales MQ y NS son las intersecciones de los planos diagonales que pasan por AD y FG, y por BC y EH, al cortar a α. Y como el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo es un centro de simetría del mismo, resulta que el simétrico respecto a O de P es P', que está en la superficie del paralelepípedo, luego O es un centro de simetría del paralelepípedo.

309. Teorema. — *El punto de intersección de las diagonales de un paralelepípedo rectángulo es un centro de simetría; las perpendiculares trazadas a las caras por dicho centro son ejes de simetría, y los planos que éstos determinan dos a dos son planos de simetría.*

Hip. Ppd. rect. $ABCDEFGH$, fig. 286; O inters. de las diag.; $MN \perp ABCD$; $PQ \perp AFED$; $RS \perp CHED$; α, β γ planos determinados dos a dos por MN, PQ y RS.

Tesis
- 1º O es un centro de simetría;
- 2º MN, PQ y RS son ejes de simetría;
- 3º α, β y γ son planos de simetría.

Demostración. —

1º) El punto O es un centro de simetría, pues así lo hemos demostrado en (**308**) para todo paralelepípedo.

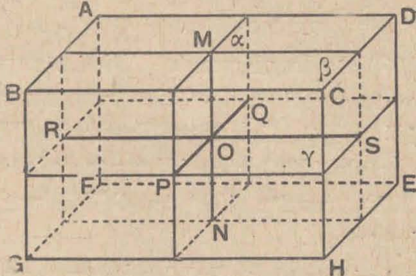


Fig. 286
Simetría en el paralelepípedo rectángulo.

2º) Dado un punto T de la superficie del *Ppd.*, este punto tiene su simétrico respecto a un eje, por ejemplo MN, fig. 287.

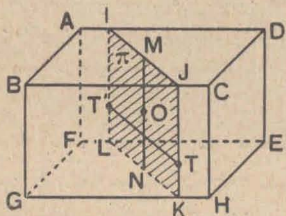


Fig. 287
Simetría respecto a un eje en el ppd.

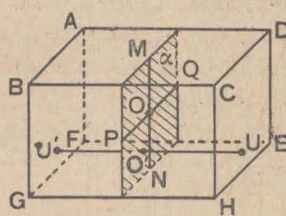


Fig. 288
Simetría respecto a un plano en el ppd.

El punto T y MN determinan un plano π que corta al *Ppd.* según un rectángulo cuyo centro es O. Como MN pasa por O y es perpendicular a las bases del *Ppd.*, es perpendicular a las bases del rectángulo $IJKL$, resultando, por *Geom. Plana*, que MN es un eje de simetría del rectángulo $IJKL$, luego el simétrico de T es T', que por estar en IL está en la superficie del *Ppd.*, luego MN es un eje de simetría del *Ppd.*

Análogamente se demuestra que PQ y RS son también ejes de simetría.

3º) Dado un punto U de la superficie del *Ppd.*, este punto tiene su simétrico respecto a α, determinado por MN y PQ, fig. 288. Tracemos $UU' \perp \alpha$. Como α es paralelo (**28c**) y equidistante de las caras $ABGF$ y $CHED$ (**293**), resulta $UO' = O'U'$, luego α es un plano de simetría.

Análogamente se demuestra que β y γ son también planos de simetría.

310. Teorema. — *En todo romboedro recto el punto de intersección de las diagonales es un centro de simetría; la perpendicular a las bases trazada por dicho centro y las diagonales de la base media son ejes de simetría y los planos determinados por éstos dos a dos son planos de simetría.*

Hip.) Romb. recto $ABCDEFGH$, fig. 289; AH, BE, CF y DG diagonales; O intersección de las diagonales; MN pasa por O y es perpendicular a las bases $PQRS$ base media de las diagonales PR y QS.

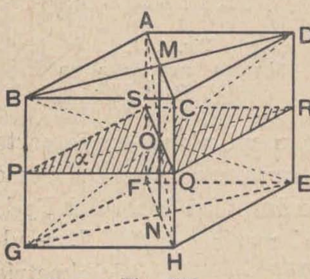


Fig. 289
Simetría en el romboedro recto.

Tesis) 1º) O es un centro de simetría;

2º) MN es un eje de simetría;

3º) PR y QS son ejes de simetría.

4º) Los planos MN y PR, MN y QS, PR y QS son planos de simetría.

Demostración. — 1º) En todo paralelepípedo el punto de intersección de las diagonales es un centro de simetría (**308**), y como el romboedro es un paralelepípedo, resulta que es O un centro de simetría.

2º) Como MN es perpendicular a las bases y pasa por O, por (**309**) es MN un eje de simetría.

3º) De manera idéntica a la demostración de la 2ª parte del teorema (**309**), se prueba que PR y QS son ejes de simetría.

Propiedades de simetría de las pirámides

311. TEOREMA. — *Si una pirámide regular tiene un número par de caras laterales, el eje de la pirámide es un eje de simetría de la misma.*

Hip.) Pirám. $V.\ ABCD$ reg., VO eje de la pirám., fig. 290.

Tesis) VO eje de simetría de la pirámide.

Demostración. — Si se nos da un punto P de la superficie lateral de la pirámide, este punto tiene su simétrico con respecto al eje VO en la superficie lateral.

Tracemos el plano π, determinado por el eje VO y el punto P. Este plano tiene el punto O común con el plano de la base, luego también tiene común la recta

MN (**13**). Como la base de la pirámide es un polígono regular de un número par de lados, su centro es un centro de simetría, y como *MN* pasa por dicho centro, los puntos *M* y *N* son simétricos respecto a *O*, luego es $OM = ON$.

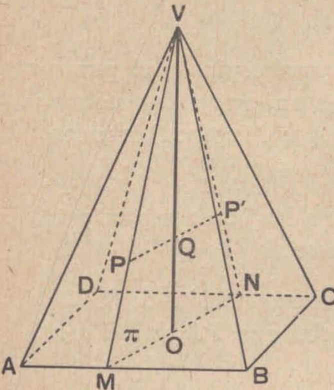


Fig. 290
Eje de simetría de una pirámide.

Pero por ser una pirámide regular es *VO* perpendicular al plano de la base, luego es $VO \perp MN$, de donde se deduce que $VM = VN$ por ser oblicuas que equidistan del pie de la perpendicular, luego el triángulo *VMN* es isósceles, y como *VO* es su altura, que sabemos es el eje de simetría del mismo, resulta que el simétrico de *P* es *P'*, que se obtiene trazando $PP' \perp VO$. El punto *P'*, por pertenecer a *VN*, pertenece a la superficie lateral de la pirámide, luego:

VO es el eje de simetría de la pirámide.

312. Teorema. — *Todo plano que pase por el eje una arista de una pirámide regular, es un plano de simetría.*

Hip.) Pirám. reg. *V. ABC; VO* eje; pl. α pasa por *VA* y *VO*, fig. 291.

Tesis) El pl. α es un plano de simetría de la pirám. dada.

Demostración. — El plano α será un plano de simetría cuando todo punto *P* la de superficie lateral tenga su simétrico en ella. Unamos V con P y luego tracemos por VP el plano β perpendicular al plano α. El plano β corta la cara VAB según VN.

Ahora bien: al ser $VO \perp ABC$, por ser VO eje, es pl. $\alpha \perp$ pl. ABC, por (**75**). Por construcción es pl. $\alpha \perp$ pl. β, luego la intersección de β y ABC es perpendicular al plano α, por (**85**).

Pero por ser ABC un polígono regular es AB un eje de simetría del mismo, luego si es $MN \perp BD$, los puntos M y N son simétricos, luego es:

$$MQ = RN.$$

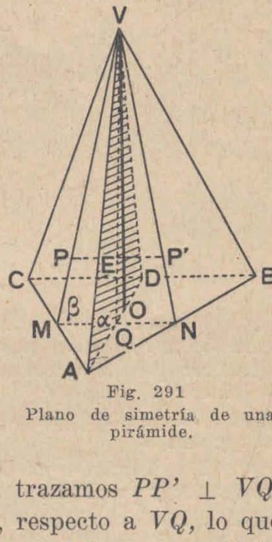


Fig. 291
Plano de simetría de una pirámide.

El triángulo VMN es isósceles, pues es $VM = VN$ por ser oblicuas que se alejan igualmente del pie de perpendicular, de manera que si trazamos $PP' \perp VQ$, los puntos P y P' son simétricos, respecto a VQ, lo que significa que es $PE = EP'$. Pero también es, por (**83**), $PP' \perp \alpha$, luego los puntos P y P' son simétricos respecto al plano α, luego:

α es un plano de simetría de la pirámide.

313. Corolario. — Observemos que al ser el punto O el centro del polígono de la base, el segmento OD es la apotema del polígono de la base, luego VD es la apotema de la pirámide. Pero el plano α pasa por el eje de la pirámide y por una apotema de ella, luego: *Todo plano que pase por el eje y una apotema de una pirámide regular es un plano de simetría.*

EJERCICIOS

81. Con un plano se cortan todas las aristas de un prisma. En un mismo semiespacio y en cada arista se toman segmentos iguales. Demostrar que los extremos de estos segmentos están en un mismo plano.

82. Un paralelepípedo es rectángulo si todas las diagonales son iguales.

83. Las diagonales de dos caras opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas.

84. Hallar los elementos de simetría de un prisma recto cuyas bases son: 1º, rombos; 2º, rectángulos; 3º, cuadrados.

85. Hallar los elementos de siemtría de un prisma recto cuyas bases son exágonos regulares.

Capítulo IX

POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

314. Definición. — Un poliedro es *regular* si todos sus ángulos poliedros son iguales y sus caras son polígonos regulares iguales. Ejemplo: el cubo, fig. 295.

315. Teorema. — *Existen sólo cinco poliedros regulares convexos, que son: el tetraedro, el exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.*

Demostración. — Se pueden formar tantos poliedros regulares como ángulos poliedros se puedan formar con polígonos regulares, y para ello debemos recordar (**265**) que la suma de las caras de un ángulo poliedro es menor que cuatro rectos.

Poliedros que se forman con triángulos equiláteros. El ángulo interior de un triángulo equilátero vale 60°.

1°) Se pueden formar ángulos poliedros con 3 ángulos de triángulos equiláteros, pues $60° \times 3 = 180° < 4R$. Así se obtiene el *tetraedro,* que tiene 4 caras que son triángulos equiláteros iguales.

2°) Se pueden formar ángulos poliedros con 4 ángulos de triángulos equiláteros, pues $60° \times 4 = 240° < 4\,R$. Así se obtiene el *octaedro,* que tiene 8 caras que son triángulos equiláteros.

3º) Se pueden formar ángulos poliedros con 5 ángulos de triángulos equiláteros, pues $60^\circ \times 5 = 300^\circ < 4\,R$. Así se obtiene el *icosaedro,* que tiene 20 caras que son triángulos equiláteros.

Seis ángulos de triángulos equiláteros no se pueden agregar, pues entonces no se forma ángulo poliedro.

Poliedros que se forman con cuadrados. El ángulo interior de un cuadrado vale 90°.

4º) Se pueden formar ángulos poliedros con 3 ángulos de cuadrados, pues $90^\circ \times 3 = 270^\circ < 4\,R$. Así se obtiene el exaedro o cubo, que tiene 6 caras que son cuadradas.

Cuatro cuadrados no se pueden agrupar, pues entonces no se forma ángulo poliedro.

Poliedros que se forman con pentágonos regulares. El ángulo interior de un pentágono regular vale 108°.

5º) Se pueden formar ángulos poliedros con 3 ángulos de pentágonos regulares, pues $108^\circ \times 3 = 324^\circ < 4\,R$. Así se obtiene el *dodecaedro,* pues tiene 12 caras que son pentágonos regulares.

Cuatro pentágonos no se pueden agrupar, pues entonces no se forma ángulo poliedro.

Con 3 exágonos regulares no se puede formar ángulo poliedro, pues como cada ángulo vale 120°, la suma de los tres no es menor que cuatro rectos. Con mayor razón no se pueden formar ángulos poliedros con eptágonos, octógonos, etc., pues entonces la suma de las caras no es menor que cuatro rectos, sino mayor, y tal cosa es imposible.

316. Construcción del tetraedro regular. — De una hoja de cartulina se recorta un triángulo equilátero *ABC*, fig. 292.

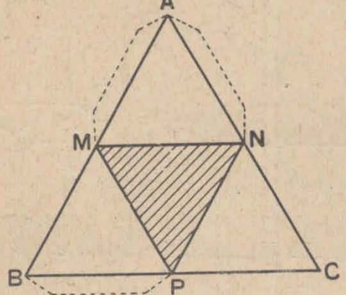


Fig. 292
Desarrollo del tetraedro regular.

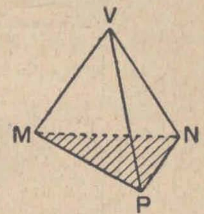


Fig. 293
Tetraedro regular.

Se unen los puntos medios *M*, *N* y *P* de los lados, resultando así descompuesta la figura *ABC* en cuatro triángulos equiláteros iguales. Luego se doblan las esquinas alrededor de *MN*, *MP* y *NP*, de manera que se junten los puntos *A*, *B* y *C* en un solo punto *V*, tal como se ve en la fig. 293.

Las caras de la fig. 293 son triángulos equiláteros iguales, y los ángulos poliedros *V*, *M*, *N* y *P* son iguales por estar formados por tres caras de 60° cada una.

317. Construcción del exaedro regular. — De una hoja de cartulina se recorta una figura formada por seis cuadrados, como indica la fig. 294. Luego se dobla alrededor del *CN* el cuadrado I, de *CF* el II, de *NK* el III, de *JG* el VI y de *FK* el V, todos doblados en un mismo sentido, resultando así el exaedro o cubo de la fig. 295, después de unir los cuadrados de manera que cada dos tengan un lado común.

Las caras de la fig. 295 son cuadrados iguales y los ángulos poliedros son iguales por estar formados por tres caras de 90° cada una.

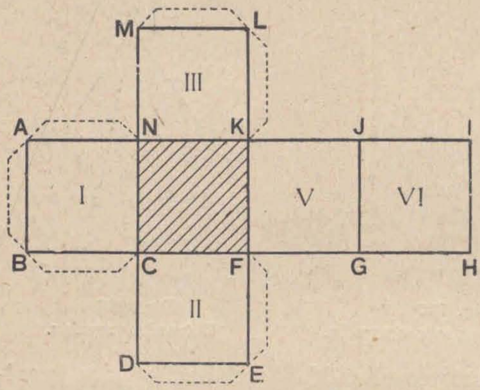


Fig. 294
Desarrollo del cubo.

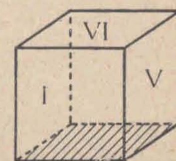


Fig. 295
Cubo o exaedro.

318. Construcción del octaedro regular. — De una hoja de cartulina se recorta una figura formada por

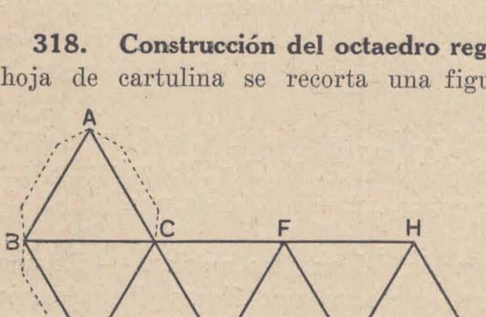


Fig. 296
Desarrollo del octaedro regular.

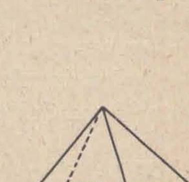


Fig. 297
Octaedro regular

ocho triángulos equiláteros iguales, como indica la figura 296.

Luego se doblan los triángulos alrededor de cada lado común a dos de ellos, en un mismo sentido, resultando así el octaedro regular de la fig. 297, después de unir los triángulos de manera que cada dos tengan un lado común.

Las caras de la fig. 297 son triángulos equiláteros iguales, y los ángulos poliedros son iguales por estar formados por cuatro caras de 60° cada una.

319. Construcción del dodecaedro regular. — De una hoja de cartulina se recorta una figura formada por doce pentágonos iguales, como indica la fig. 298. Luego se doblan los pentágonos alrededor de cada lado común a

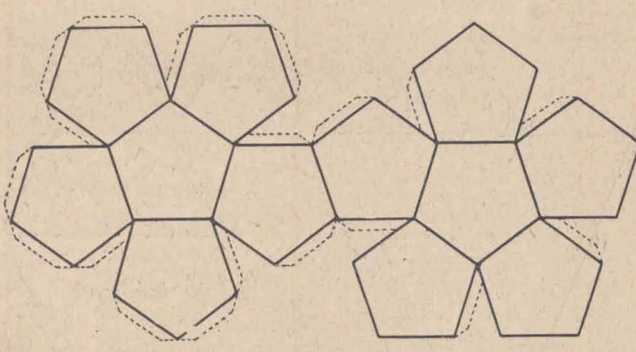


Fig. 298
Desarrollo del dodecaedro regular.

dos de ellos, en un mismo sentido, resultando así, después de unir los pentágonos de manera que cada dos tengan un lado común, el dodecaedro regular de la fig. 299.

Las caras de la fig. 299, son pentágonos regulares iguales y los ángulos poliedros son iguales por estar formados por tres caras de 108° cada una.

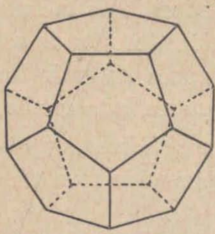


Fig. 299
Dodecaedro regular.

320. Construcción del icosaedro regular. — De una hoja de cartulina se recorta una figura formada por veinte triángulos equiláteros, como lo indica la fig. 300. Luego se doblan los triángulos alrededor de cada lado común a dos de ellos, en un mismo sentido, resultando, después de unir MN con KL, y juntar los vértices A, B, C, D, E en un solo punto, los vértices F, G, H, I, J en otro solo punto, la fig. 301, que es un icosaedro regular.

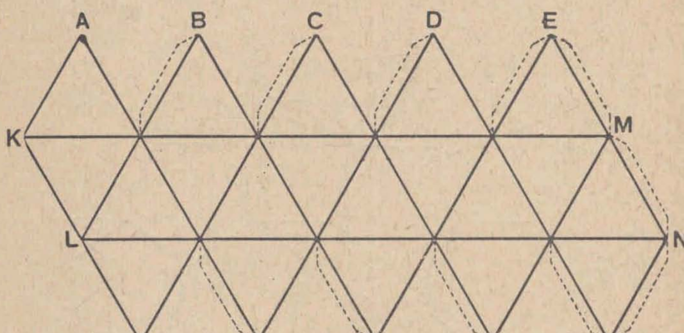


Fig. 300
Desarrollo del icosaedro regular.

Las caras de la fig. 301 son triángulos equiláteros iguales, y los ángulos poliedros iguales por estar formados por cinco caras de 60° cada una.

320. Número de caras, aristas y vértices de los poliedros regulares.

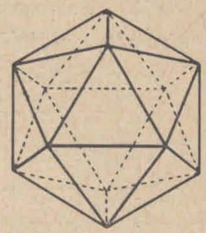


Fig. 301
Icosaedro regular.

De la observación de los cinco poliedros regulares deducimos el cuadro siguiente en el que consta el número de *lados de cada cara*, de *aristas en cada vértice*, de *caras*, de *vértices* y de *aristas*:

Poliedro	Lados de cada cara	Aristas en cada vértice	Caras C	Vértices V	Aristas A
Tetraedro . .	3	3	4	4	6
Cubo	4	3	6	8	12
Octaedro . .	3	4	8	6	12
Dodecaedro . .	5	3	12	20	30
Icosaedro . .	3	5	20	12	30

321. Fórmula de Euler. — Comprobamos que en el cuadro anterior el número de *caras* (C) más el número de *vértices* (V), es igual al número de *aristas* (A) más 2. Es decir, que es:

$$C + V = A + 2$$

que se conoce con el nombre de *Fórmula de Euler.*

322. Centro de un poliedro regular. — Se llama *centro* de un poliedro regular al punto equidistante de todos sus vértices.

Se demuestra que en todo poliedro regular se verifica:

1º) El centro equidista de todas sus caras;

2º) Las perpendiculares trazadas a las diferentes caras por sus respectivos centros, pasan todas por el centro del poliedro;

3º) Los planos mediatrices de las aristas y los planos bisectores de los diedros pasan todos por el centro del poliedro.

Todo poliedro regular se puede descomponer en tantas pirámides regulares e iguales como caras tenga el poliedro, y cuyo vértice común es el centro del poliedro, y cuyas bases son las caras del poliedro.

323. Poliedro regular inscripto y circunscripto. — Un poliedro regular está *inscripto* en una esfera si todos sus vértices son puntos de la superficie esférica. El centro de la esfera es el centro del poliedro.

Un poliedro está *circunscripto* a una esfera si todas sus caras son tangentes a la esfera. El centro de la esfera es el centro del poliedro.

324. Poliedros conjugados. — Dos poliedros se llaman *conjugados,* cuando los vértices de uno son los centros de las caras del otro poliedro.

El poliedro conjugado de un tetraedro es otro tetraedro, el de un octaedro es un cubo y recíprocamente, y el de un icosaedro es un dodecaedro, y recíprocamente.

Propiedades de simetría de los poliedros regulares

324. Simetría en el tetraedro regular. — En el tetraedro regular el plano determinado por una arista y el punto medio de la arista opuesta es un plano de simetría. Como tiene sus aristas, tiene seis planos de simetría.

No tiene ni centro ni ejes de simetría.

325. Simetría en el cubo. — En el cubo o exaedro regular se tiene:

1º) Un centro de simetría, que es el punto de intersección de sus diagonales (**308**), fig. 302;

2º) Nueve ejes de simetría: 3 son las perpendiculares a las caras trazadas por el centro de simetría a las caras (**309**), fig. 303, y 6 son las diagonales de las tres bases medias (**310**), fig. 304;

3º) Nueve planos de simetría: 3 son las bases medias (**310**), y 6 son los planos diagonales (**310**).

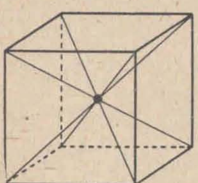


Fig. 302

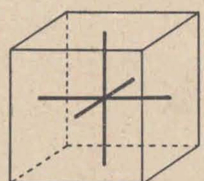


Fig. 303

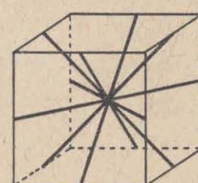


Fig. 304

Centro y ejes de simetría en el cubo.

326. Simetría en el octaedro regular. — En el octaedro regular se tiene:

1º) Un centro de simetría, que es el punto de intersección de sus diagonales (**308**), fig. 305;

2º) Nueve ejes de simetría: 3 son los formados por sus diagonales, fig. 306, y 6 son los segmentos determinados por los puntos medios de dos aristas opuestas;

3º) Nueve planos de simetría: 3 son los planos diagonales, y 6 son los planos determinados por cada diagonal y el punto medio de cada arista.

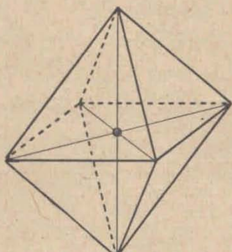


Fig. 305

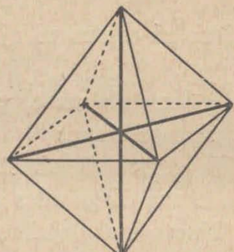


Fig. 306

Centro y ejes de simetría en el octaedro.

EJERCICIOS

86. Ningún poliedro tiene siete aristas.

87. Cortar un cubo con un plano de manera que la sección sea un exágono regular.

89. Calcular el número de diagonales de cada uno de los poliedros regulares.

90. Inscribir un cubo en un cono de manera que cuatro vértices estén en la superficie cónica y cuatro en la base.

INDICE

Pág.