

M. Coppetti

Algebra

PARA EL TERCER AÑO
DE LOS COLEGIOS NACIONALES



"LIBRERIA DEL COLEGIO" S. A.

Nueva

ESTUDIANTE

DOMICILIO N.º

PROVINCIA



OBRAS DEL MISMO AUTOR

PARA LOS COLEGIOS NACIONALES (de estricto acuerdo con los programas de Matemáticas de fecha enero 9 de 1937).

Aritmética (Primer año)	3. ^a edición
Geometría (Primer año)	3. ^a edición
Aritmética (Segundo año)	3. ^a edición
Geometría del Espacio (para el 2. ^o año)	3. ^a edición
Algebra (para el 3. ^{er} año)	1. ^a edición
Geometría (para el 3. ^{er} año)	1. ^a edición
Tabla de Logaritmos, Anualidades, etc.	3. ^a edición

EN PREPARACION:

Algebra y Geometría (para el 4.^o año)

PARA ENSEÑANZA SECUNDARIA, NORMAL, COMERCIAL, etc.

Elementos de Aritmética	5. ^a edición
Algebra Elemental	5. ^a edición
Algebra y Nociones de Trigonometría	4. ^a edición
Curso de Trigonometría Plana	2. ^a edición
Curso de Trigonometría Esférica (agotada)	1. ^a edición
Elementos de Geometría Plana	5. ^a edición
Geometría Racional	4. ^a edición
Elementos de Geometría del Espacio	3. ^a edición
Matemáticas Aplicadas - 1. ^a parte	2. ^a edición
Matemáticas Aplicadas - 2. ^a parte	2. ^a edición

Ing. MARIO COPPETTI



ALGEBRA

PARA EL TERCER AÑO

CONTIENE MAS DE 650 EJERCICIOS Y PROBLEMAS
ENTRE RESUELTOS Y PROPUESTOS

TEXTO AJUSTADO A LOS NUE-
VOS PROGRAMAS DE MATEMA-
TICAS PARA LOS COLEGIOS
NACIONALES



BUENOS AIRES
"LIBRERIA DEL COLEGIO" S. A.
ALSINA Y BOLIVAR
1938

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

\$2,65

132x197

INDICE DE CAPITULOS

Y

PROGRAMA OFICIAL

PARA EL TERCER AÑO DE LOS COLEGIOS NACIONALES
APROBADO EL 9 DE ENERO DE 1937.

ALGEBRA

	Pág.
CAPITULO I. — Números racionales e irracionales	1
Números reales. — Abscisa de un punto sobre un eje. — Igualdad y desigualdad de números reales.	
CAPITULO II. — Elementos de cálculo algebraico	9
Expresiones algebraicas racionales e irracionales. — Monomios y polinomios. — Grado. — Términos semejantes. — Polinomios ordenados. — Suma y resta de monomios y polinomios.	
CAPITULO III. — Multiplicación y división de monomios y polinomios....	22
Identidad. — Identidades notables. — Factores comunes. — Descomposición de polinomios en factores primos. — Expresiones algebraicas fraccionarias. — Las cuatro operaciones fundamentales con ellas. — Simplificación de fracciones.	
CAPITULO IV. — Ecuaciones de primer grado con una incógnita	59
Equivalencia. — Principios generales en que se basa la resolución de ecuaciones. — Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. — Propiedades de las desigualdades. — Desigualdades de primer grado.	
CAPITULO V. — Sistemas de ecuaciones de primer grado	92
Sistemas equivalentes. — Métodos de resolución por sustitución, por reducción, por igualación, por la regla de Crámer. — Discusión de los resultados. — Casos de imposibilidad e indeterminación. — Sistemas sencillos con más de dos incógnitas.	
CAPITULO VI. — Problemas de primer grado	111
Elección de las incógnitas. — Planteo. — Discusión de los resultados. — Cálculo de dos números conociendo su razón y la suma o diferencia de los mismos. — Repartición proporcional. — Problemas sobre mezclas.	
CAPITULO VII. — Representación gráfica	141
Sistema cartesiano. — Coordenadas. — Noción de función. — Variación del binomio de primer grado. — Formas de la ecuación general de primer grado con dos incógnitas. — Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. — Interpretación gráfica de los casos de imposibilidad e indeterminación. — Resolución gráfica de problemas que conducen a sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.	
Ejercicios y problemas	181

DERECHOS DE AUTOR RESERVADOS

[Faint signature]
Nº 0053

PRÓLOGO

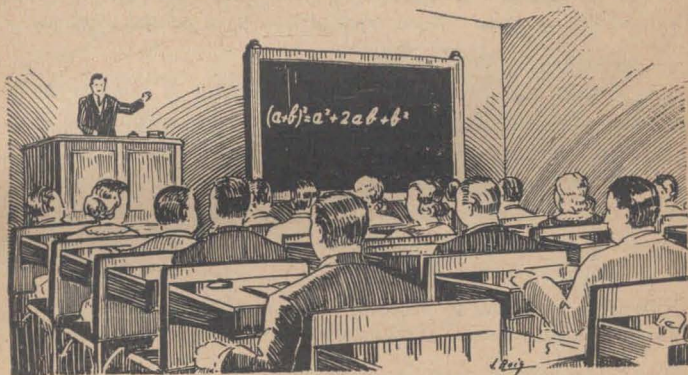
El Maestro y los jóvenes alumnos Jorge y Walther:

MAESTRO. — Jorge, piensa un número.

JORGE. — Ya está. .

MAESTRO. — Agrégale uno.

JORGE. — Ya está.



MAESTRO. — ¿Cuánto te dió?

JORGE. — Cinco.

MAESTRO. — Tú, Walther, adivina el número que pensó Jorge.

WALTHER. $5 - 1 = 4$; este es el número pensado.

MAESTRO. — Bien, Walther, diste un primer paso en *Algebra*.

Los mismos alumnos:

MAESTRO. — Walther, piensa un número, dúplicalo, agrégale 3, di el resultado, y tú, Jorge, adivina el número pensado.

WALTHER. 17.

JORGE. $(17 - 3) : 2 = 7$.

MAESTRO. — Muy bien, Jorge, diste un paso bastante largo en *Algebra*.

Luego el Maestro continúa su clase:

MAESTRO. — Pasos análogos a los que ustedes acaban de dar, fueron dados también desde épocas muy remotas, y en todas las civilizaciones, en el campo de esta hermosa rama de la Matemática.

Lo atestiguan el famoso papiros de *Ahmes* que data de más de 4000 años, y otras obras de los más antiguos algebristas árabes, persas e italianos.

Al respecto, les referiré, tal como lo hizo su autor, uno de los curiosos problemas que figuran en la obra llamada "*Liber Abaci*", que en 1202 publicó el matemático italiano *Leonardo de Pisa*, conocido con el nombre de *Fibonacci*, y que les mostrará el grado de adelanto que acusaba ya en aquella época la ciencia matemática.

El problema es el siguiente:

"Un devoto rogó a Júpiter que le duplicara el número de monedas que tenía en el bolsillo, y que por ello le pagaría 8 monedas. Así se hizo. Entonces rogó a Venus que realizara igual milagro, y pagó 8 monedas; finalmente rogó a Mercurio que le duplicara el número de monedas, y le pagó 8 monedas; así se encontró, finalmente, poseedor de *nada*. ¿Cuántas monedas tenía al principio?"

Fibonacci resuelve el problema por el método llamado en aquel entonces "regula recta" (regla directa).

Dice: "Llamemos *cosa* (en latín *res*) al capital inicial; lo duplicó y tuvo 2 *cosas*; pagó 8 monedas y le quedaron 2 *cosas* — 8 monedas. Lo duplicó la segunda vez, y tuvo 4 *cosas* — 16 monedas. Pagó 8 monedas y quedó con 4 *cosas* — 24 monedas. La duplicó la tercera vez y tuvo 8 *cosas* — 48 monedas. Pagó 8 monedas, y le quedaron 8 *cosas* — 56 monedas, por consiguiente, 8 *cosas* = 56 monedas, y *cosa* = 7 monedas".

Este mismo proceso emplearíamos hoy, en *Algebra*, con la diferencia de que, en lugar de *cosa* diríamos x .

Como vemos, problemas de esta índole se resolvían empleando la llamada "*Algebra retórica*", es decir, mediante un razonamiento algebraico que se traducía en frases, sin ninguna intervención de símbolos.

Más tarde, el matemático francés *Vieta*, en su Tratado publicado en 1591 con el título de *Introducción al Arte analítico*, representó por letras, tanto las cantidades conocidas como las desconocidas, y creó, puede decirse, el álgebra actual, ciencia de los símbolos, cuyo poder, al decir de un historiador matemático, reside precisamente en las combinaciones de sus signos que, facilitando el razonamiento, conducen por vía misteriosa a los resultados deseados.



(1540 -- 1603)
Fco. VIETA

No considero oportuno darles una definición del Algebra, por cuanto cada uno de ustedes podrá hacerlo a su modo, si lo estima necesario, después de haber experimentado la satisfacción de hallar la solución de algunos problemas y cuestiones que se tratarán en este curso.

Sólo les pido que, desde un principio, resuelvan gran cantidad de ejercicios, con lo cual les resultará muy fácil el estudio de la asignatura, y, por otra parte, por ser ésta la única manera de cimentar y coronar con éxito vuestra educación matemática, como disciplina en sí, y como poderoso auxiliar también para el estudio de las otras ciencias del ciclo de enseñanza secundaria.

M. C.

* * *

CAPÍTULO I

NUMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

Números reales

Para abreviar la exposición y mantener la unidad indispensable entre la materia de este curso y la de los anteriores, característica ésta fundamental de los estudios matemáticos, al referirnos a una propiedad ya tratada en el primer o en el segundo año de Aritmética, lo haremos, respectivamente, con las abreviaturas (A_1 N.º...) o (A_2 N.º...), correspondiendo el número al párrafo de nuestros textos de "Aritmética" para los Colegios Nacionales.

1. Breve reseña sobre los números absolutos. — Recordemos del primer curso (A_1 Cap. I-II), que la *adición* y la *multiplicación* de números enteros, es decir, de números de la sucesión natural

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

dan siempre como resultado un número de esta sucesión.

Expresamos esto diciendo que *la adición y la multiplicación son operaciones siempre posibles en el campo de los números enteros*.

2. En cambio, la *división*, como operación para hallar el *cociente* de dos números, es decir, como operación inversa de la multiplicación, no siempre es posible en el campo de los números enteros; por ejemplo, $4:9$ no existe en dicho campo, pero sí en el más amplio de los **números racionales** (A_1 Cap. VII).

Vemos, pues, que para que la división resulte posible en todos los casos, ha sido necesario ampliar el campo de los números enteros introduciendo los números fraccionarios,

3. La extracción de la *raíz cuadrada* de un número racional se encuentra frente a una necesidad análoga a la que se presenta en la división de números enteros.

Así, por ej., si con la letra a representamos un número racional que no sea cuadrado perfecto, su raíz cuadrada es un *número irracional* (A_2 N.º 171), que representamos con el símbolo $\sqrt{a}$.

Recuérdese del curso anterior (A_2 N.º 170), que no solamente son números irracionales las raíces cuadradas de números que no sean cuadrados perfectos; en general, son **números irracionales** *los que tienen infinitas cifras decimales, que no son periódicos y no pueden ser iguales a números racionales.*

Así, por ej., es un número irracional la relación entre la circunferencia y su diámetro, es decir, el número $\pi = 3, 14159\dots$ Citemos como ejemplos de números irracionales, que se estudian en Geometría: la altura de un triángulo equilátero conociendo el lado; la diagonal de un cubo conociendo la arista, etc.

No entramos en la teoría de los números irracionales, a fin de no salir del límite fijado por el programa de esta asignatura; haremos notar únicamente, que en cursos superiores se definen las operaciones con números irracionales, y se demuestra que tienen las mismas propiedades (asociativa, conmutativa, etc.), que las operaciones con números racionales.

4. **Números relativos.** — También la *sustracción* no siempre es posible en el campo de los números absolutos. Así, por ej., carecerían de sentido, en dicho campo, operaciones tales como $3 - 5$, puesto que no existe ningún número absoluto que sumado con 5 dé 3; análogamente diríamos de la operación $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$.

Para hacer posible la sustracción en estos casos, se ha creado una nueva clase de números, llamados *números negativos*. Recordemos del curso anterior (A_2 N.º 218), que para su representación se emplean los números absolutos precedidos del signo *menos*,

Así, por ej., la primera de las sustracciones anteriormente indicadas daría por resultado el número negativo *menos dos*, o sea:

$$3 - 5 = -2$$

Los números absolutos precedidos del signo *más*, se llaman *números positivos*.

Para abreviar la nomenclatura, los números positivos y los negativos reciben el nombre común de **números relativos**, en contraposición con los **números absolutos**, que llevan esta denominación por considerar de ellos solamente su valor *absoluto*, es decir, por prescindir del signo $+$ o $-$ que afecta a los números relativos.

5. Los números racionales y los irracionales reciben el nombre común de NÚMEROS REALES, que pueden ser *absolutos* o *relativos*.

Resumimos en el esquema que sigue, la clasificación de números reales:

Números reales relativos	<table><tr><td>Racionales relativos</td><td><table><tr><td>Enteros</td></tr><tr><td>Fraccionarios</td></tr></table></td></tr><tr><td>Irracionales relativos</td><td></td></tr></table>	Racionales relativos	<table><tr><td>Enteros</td></tr><tr><td>Fraccionarios</td></tr></table>	Enteros	Fraccionarios	Irracionales relativos	
Racionales relativos	<table><tr><td>Enteros</td></tr><tr><td>Fraccionarios</td></tr></table>	Enteros	Fraccionarios				
Enteros							
Fraccionarios							
Irracionales relativos							

NOTA. — Existe un campo más amplio que el de los números reales; el de los *números complejos*, llamados también, impropriamente, *números imaginarios*, cuya teoría se estudia en cursos superiores.

Son números imaginarios, por ej., las raíces de índice par de números negativos. Así, decimos que $\sqrt{-25}$ es un número imaginario, porque no existe en el campo de los números reales; en efecto, no existe ningún número real que elevado al cuadrado dé por resultado el número negativo -25 (A_2 N.º 283).

Abscisa de un punto sobre un eje

6. Representación gráfica de los números reales. — Recordemos del curso anterior (A_2 N.º 217), que, para la representación de ciertas magnitudes, a veces no es suficiente conocer el *número absoluto* que la representa, sino que es necesario también el *sentido*.

Así, por ej., si nos dicen que un auto se encuentra a 20 Km. de la Plata, en la carretera que pasando por dicha localidad y siguiendo la dirección Oeste-Este, une la Capital Federal con Magdalena, para determinar su *ubicación* es necesario otro dato más: saber si el auto se encuentra al *Este* o al *Oeste* de La Plata. Análogamente, se presentan en la práctica infinidad de ejemplos de magnitudes que pueden considerarse en dos sentidos opuestos: las temperaturas *sobre cero* o *bajo cero*; las latitudes *Norte* o *Sur*; las longitudes *Este* u *Oeste*, etc.



En general, sobre una recta, un punto puede moverse en dos *sentidos opuestos*; para distinguirlos, a uno de ellos, elegido arbitrariamente, le llamamos *sentido positivo*, y al otro, *sentido negativo*.

Por ej., dispuesta la recta $x'x$ horizontalmente (fig. 1), se conviene considerar como **SENTIDO POSITIVO** el indicado por la flecha, es decir, de izquierda a derecha, y, por consiguiente, resulta establecido como **SENTIDO NEGATIVO** el opuesto.

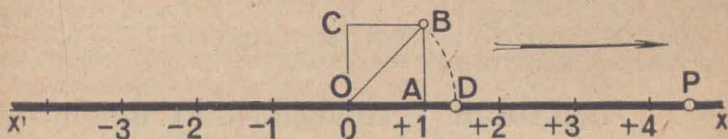
La recta $x'x$ se llama **eje orientado**, o, simplemente **eje**.

Si sobre el eje fijamos un punto O , llamado **origen**, y tomamos un segmento OA como unidad de medida en el sentido positivo del eje, decimos que el punto O es la *representación gráfica del número cero*, y que el punto A es la *representación gráfica del número $+1$* . También decimos que los puntos O y A *corresponden* a los números 0 y $+1$, respectivamente.

Si a partir del origen llevamos sucesivamente, y en cada uno de los dos sentidos, el segmento unidad OA , obtenemos así un conjunto de infinitos puntos, para cada uno de los cuales corresponde un número entero, anteponiéndole el signo positivo si el punto se encuentra a la derecha del origen, y el signo negativo si se encuentra a la izquierda.

7. Como el segmento unidad OA puede imaginarse dividido en un número cualquiera de partes iguales, a cada punto de división *corresponderá un número fraccionario positivo, comprendido entre 0 y 1*, es decir, una fracción propia.

Como este razonamiento puede repetirse para cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos números enteros consecutivos, diremos, pues, que *a cualquier número racional corresponde uno y sólo un punto del eje orientado*.



(fig. 1)

8. Pero existen infinitud de puntos a los que no corresponde número racional alguno. Por ejemplo, tomando la diagonal OB del cuadrado $OABC$ de lado OA , o bien la altura del triángulo equilátero de lado OA , o la circunferencia de diámetro OA , o cualquier múltiplo o submúltiplo de uno de dichos segmentos, a la derecha o a la izquierda del origen O , se hallarán infinitos puntos para los que no corresponde número racional alguno, sino un *número irracional*.

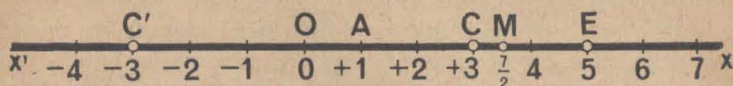
9. A cada punto P del eje corresponde, pues, una distancia OP al origen O , llamada **ABSCISA** del punto, expresada en magnitud y signo por un número real determinado, positivo o negativo, según que el punto P se encuentre a la derecha o a la izquierda del origen, respectivamente.

El punto P se llama *índice* del número.

Recíprocamente, a todo número real, positivo ó negativo, corresponde sobre el eje un punto perfectamente determinado, que tiene por **ABSCISA** aquel número.

Fijado el origen O sobre una recta, el sentido positivo, y la unidad de medida, decimos que hemos establecido sobre la recta un *sistema de abscisas*, siendo la recta el *eje*.

Así, por ej., si $x'x$ es el eje orientado (fig. 2), si O es el origen y OA la unidad de medida, el número natural $(+3)$ se representa con el segmento OC ; el número $(+5)$ se representa con el seg-



(fig. 2)

mento OE ; el número (-3) con OC' . El número fraccionario $7/2 = 3 \frac{1}{2}$ estará representado por el segmento OM , que es la suma de los segmentos $OC = 3$ y $CM = \frac{1}{2}$.

Igualdad y desigualdad de números reales

10. Igualdad de números relativos. — Recordemos del curso anterior que, al *valor absoluto* de un número relativo, es decir, al que se obtiene prescindiendo del signo, se le llama, también, **valor aritmético**, o **módulo** del número (A_2 N.º 219).

Así, por ej., 5 es el módulo de $+5$ y de -5 .

También vimos en aquel curso (A_2 N.º 223), y se evidencia en éste con la representación gráfica antes indicada de números sobre un eje orientado que:

Dos números relativos son IGUALES si corresponden al mismo punto del eje, por consiguiente, si tienen el mismo módulo y el mismo signo.

Recordemos también, que dos números iguales en valor absoluto pero de signos contrarios, se llaman *números opuestos*; por ej.: $+3$ y -3 . A estos números corresponderán, pues, puntos *simétricos* del eje orientado. (Los puntos C y C' de la fig. 2).

Como para los números absolutos, también son válidas para los números relativos las *leyes o caracteres formales* de las igualdades (A_1 N.º 8):

- 1.ª *Ley reflexiva*: $a = a$
- 2.ª " *simétrica*: si $a = b$, tenemos $b = a$
- 3.ª " *transitiva*: si $a = b$, y $b = c$, tenemos $a = c$.

Análogamente, para el *Postulado* de las igualdades (A_1 N.º 9):

Efectuando con los dos miembros de una igualdad una determinada operación con un número real cualquiera, se obtiene otra igualdad.

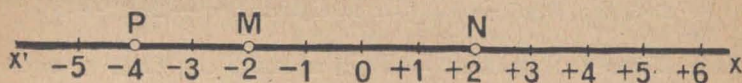
11. Desigualdad de números relativos. — En el curso anterior (A_2 N.º 224), también vimos que, dados dos números positivos, por ej., $(+3)$ y $(+6)$, podemos reemplazarlos por los módulos respectivos 3 y 6; pero siendo 3 menor que 6, tendremos, en consecuencia, la desigualdad

$$+3 < +6$$

Hallándose el número $+3$ a la izquierda de $+6$ en el eje orientado $x'x$ (fig. 3), podemos decir, pues, que *de dos números positivos es menor aquel cuyo índice se encuentra a la izquierda del índice del otro.*

Extendiendo este criterio a dos números relativos cualesquiera, tendremos, pues, la siguiente

PROPIEDAD. — De dos números relativos cualesquiera, es **MENOR** aquel cuyo índice se encuentra a la **IZQUIERDA** del índice del otro.



(fig. 3)

Así, por ej., $-2 < +2$, porque siendo M y N los índices respectivos (fig. 3), el punto M se encuentra a la izquierda del N en el eje orientado $x'x$. Análogamente, $-4 < -2$ por estar P a la izquierda de M .

12. Como consecuencia de la propiedad anterior, tenemos estas otras:

1.ª *El número cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier positivo.*

2.ª *Cualquier número positivo es mayor que cualquier número negativo.*

3.ª De dos números positivos será mayor el que tenga mayor módulo.

4.ª De dos números negativos será mayor el que tenga menor módulo.

EJEMPLO. — De acuerdo con cada una de las cuatro propiedades anteriores, tenemos, respectivamente:

$$1.ª \quad 0 > -2 ; \quad 0 < +2 ; \quad 2.ª \quad +2 > -4 ;$$

$$3.ª \quad +7 > +3 ; \quad 4.ª \quad -2 > -4 ;$$

las que pueden resumirse así:

$$-4 < -2 < 0 < 2 < 3 < 7$$

Si un número a es positivo, escribimos: $a > 0$, y si es negativo, $a < 0$.

13. La propiedad enunciada en el (N.º 11), justifica que, como para los números reales (A_1 N.º 10), para los números relativos se cumplen también las siguientes propiedades:

1.ª Si $a < b$ y $b = c$, tenemos $a < c$.

2.ª Si $a < b$ y $b < c$, tenemos $a < c$.

Esta última es la propiedad *transitiva* de las desigualdades.

EJEMPLO:

$$-2 < 0 ; \quad 0 < +5 , \quad \text{por consiguiente,} \quad -2 < +5$$

14. NOTA IMPORTANTE. — Para abordar con éxito el estudio del Cálculo algebraico que se expondrá en los próximos capítulos, es necesario que el estudiante recuerde muy bien las propiedades y reglas operatorias con números relativos estudiadas en el curso anterior de Aritmética, las que constituyen la base sobre la que se levantará el hermoso edificio del Algebra. Como es sabido, la solidez de un edificio depende, en primer término, de la de sus cimientos; por tanto, estimamos conveniente recomendar al estudiante que empiece por dar un buen repaso a lo tratado en aquel curso sobre números relativos (A_2 N.ºs 226 al 271).

CAPÍTULO II

ELEMENTOS DEL CALCULO ALGEBRAICO

Expresiones algebraicas racionales e irracionales

15. En el curso anterior ya dimos la definición y clasificación de las expresiones algebraicas (A_2 N.^{os} 272 y 273), que recordaremos en éste.

DEFINICIÓN. — Se llama **EXPRESIÓN ALGEBRAICA** a toda combinación de números relativos, o de números relativos y letras, o solamente de letras, ligadas entre sí por los signos de las operaciones a efectuarse con ellas.

Así, por ej., son expresiones algebraicas las siguientes:

$$[11 + (-3)^2] : (-4) ; \sqrt{a^2 - b^2} ; 6a : (2a - a^2)$$

Las diferentes letras que figuran en una expresión algebraica representan, en general, *números reales* diferentes entre sí, tanto positivos como negativos.

Así, por ej., en la expresión $3a^2b$ se entiende, generalmente, que a y b representan números reales diferentes, sin excluir el caso particular de $a = b$.

Siendo las letras símbolos representativos de números reales podemos, pues, aplicar a ellas *todas las reglas de cálculo ya establecidas para dichos números y para las operaciones con ellos.*

16. **CLASIFICACIÓN.** — Una expresión algebraica es **RACIONAL** cuando sólo contiene operaciones racionales con las letras que la forman, de lo contrario es **IRRACIONAL**.

Reciben el nombre genérico de *operaciones racionales*; la adición, sustracción, multiplicación y división, porque, cuando se opera con ellas sobre números racionales, se obtienen como resultados números racionales.

Así, la tercera de las expresiones de los ejemplos anteriores es racional, mientras que la segunda es irracional.

También es racional la expresión $x\sqrt{5} + a\sqrt[3]{3}$, porque la extracción de raíces sólo se refiere a *números*, mientras que es irracional la expresión $3\sqrt{b} + a$.

17. Una expresión algebraica es NUMÉRICA cuando sólo está formada de números relativos; de lo contrario, es LITERAL.

Así, por ej., es numérica la primera de las expresiones de los ejemplos del (N.º 15) y literales las otras dos.

18. Valor de una expresión algebraica. — Si la expresión dada es *numérica*, su *valor* es el que se obtiene efectuando las operaciones indicadas.

Así, por ej., el valor de la primera de las expresiones de los ejemplos del (N.º 15), es:

$$[11 + (-3)^2] : (-4) = (11 + 9) : (-4) = 20 : (-4) = -5$$

Si la expresión dada es literal, tiene un *valor numérico* para cada grupo de valores atribuidos a las letras que contiene. Tenemos, pues, la siguiente

DEFINICIÓN. — Se llama **VALOR NUMÉRICO** de una expresión algebraica para ciertos valores, también numéricos, dados a sus letras, el número que se obtiene reemplazando las letras por los valores numéricos dados, y efectuando luego las operaciones indicadas.

EJEMPLO I. — El valor numérico para $a = 5$ y $b = 3$ de la segunda de las expresiones de los ejemplos del (N.º 15) es:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Para $a = 9$ y $b = 7$ se encuentra el número irracional $\sqrt{32}$.

EJEMPLO II. — La tercera de las expresiones del (N.º 15), o sea $6a:(2a - a^2)$, tiene para $a = 3$, el valor numérico:

$$6 \times 3:(2 \times 3 - 3^2) = 18:(6 - 9) = 18:(-3) = -6$$

NOTA. — Como solamente hemos definido qué se entiende por raíz enésima de un número absoluto (A_2 N.º 157), o positivo, supondremos, pues, por ahora, que en toda expresión que contenga radicales, sólo atribuímos a las letras valores numéricos tales, que las cantidades que figuran bajo el signo radical resulten *positivas*.

Así, la expresión del Ej. II que antecede, carece de valor numérico para $a = 2$, porque su denominador ($2 \times 2 - 2^2$), se anula (A_2 N.º 257, 2.ª), y la fracción no tiene sentido.

Análogamente, en una expresión fraccionaria, el valor numérico del *denominador* tiene que resultar *diferente de cero*, para que la fracción tenga sentido (A_2 N.º 257, 2.ª).

19. Una expresión algebraica es ENTERA RESPECTO DE UNA LETRA, cuando dicha letra no está sujeta a operaciones distintas de las llamadas enteras. Reciben el nombre genérico de *operaciones enteras*, la suma, resta y multiplicación.

Una expresión es **fraccionaria** respecto de una letra, cuando dicha letra figura como divisor en la expresión.

Así, por ej., es entera en x la expresión: $x^3 - 2x + 5$.

La expresión $ax + a^2x^3 + a:x$ es entera respecto de la letra a , pero fraccionaria respecto de la letra x .

Monomios

20. DEFINICIÓN. — Se llama **MONOMIO** al producto de factores numéricos o literales.

Así, por ej., son monomios las expresiones:

$$-2; b; -5x; (-3)a(-4)bca; 2a(b+c)$$

Nótese que en un monomio, los factores pueden ser *frac-*

cionarios. Así, la expresión
$$\frac{-2ab^3}{3n}$$
 es un monomio, puesto

que puede considerarse como el producto de los cuatro factores siguientes:

$$- \frac{2}{3}, a, b^3, \frac{1}{n}$$

21. Monomio reducido. — Si un monomio contiene varios factores numéricos o literales, puede simplificarse efectuando las operaciones indicadas y ponerse en forma más sencilla, llamada forma **reducida**.

Así, el monomio $(-3) a (-4) b c a$ toma la siguiente forma reducida: $12 a^2 b c$.

22. De acuerdo con el (N.º 19), un monomio puede ser *entero respecto de una letra*. Así, el monomio $2 a^3/b$ es entero respecto de la letra a , y fraccionario respecto de la letra b .

Un monomio se llama *entero*, cuando ninguna de sus letras figura como divisor.

Así, por ej., son enteros los monomios: $3 a^5$; $- a^2 b$.

23. Coeficiente de un monomio. — En un monomio se distinguen siempre dos partes: el *coeficiente* y la *parte literal*; esta última es la expresión formada exclusivamente por las letras del monomio.

EL COEFICIENTE de un monomio es el número relativo que multiplica la parte literal del monomio.

Así, por ej., los coeficientes de los monomios

$$- 2 a, \quad \frac{1}{2} a^3 x^2, \quad 0,1 m (p + q), \quad \frac{3 a^5}{4}$$

son, respectivamente:

$$- 2, \quad \frac{1}{2}, \quad 0,1, \quad \frac{3}{4}$$

Cuando en un monomio no existe factor numérico, el coeficiente es $+ 1$, puesto que podemos siempre suponer el factor $+ 1$ en el monomio; así, el coeficiente de $a^2 c b^3$ es 1 , porque

$$a^2 c b^3 = 1 \times a^2 c b^3$$

24. Más generalmente, *el coeficiente de un monomio respecto de una o más letras, es el producto de los restantes factores del monomio.*

Así, por ej., en los monomios $-a^3x$, $(a+b)x$, $2amxy$, los coeficientes respecto de la letra x son:

$$-a^3, \quad a+b, \quad 2am$$

En el último monomio, el coeficiente respecto de la letra y es: $2amx$; respecto de xy es $2am$; etc.

Polinomios

25. Como lo hicimos con los números relativos (A₂ N.º 237), si escribimos varios monomios uno a continuación del otro con los signos respectivos, obtenemos la *suma algebraica* de esos monomios. De aquí la siguiente

DEFINICIÓN. — Se llama **POLINOMIO** a la suma algebraica de monomios.

Así, $\frac{1}{4}a - 0,2ab^3 + 3a^5$ es un polinomio, porque expresa la suma de los tres monomios siguientes: $\frac{1}{4}a$, $-0,2ab^3$ y $3a^5$.

*Los monomios que componen un polinomio, con los signos que le preceden, se llaman **términos** del mismo.*

Un polinomio formado solamente por dos términos, se llama *binomio*; si tiene tres términos, se llama *trinomio*; si tiene cuatro, *cuatrinomio*.

EJEMPLOS: $a - 2b$ es un binomio; $\frac{1}{2}a + 3b - c^2$ es un trinomio; $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ es un cuatrinomio.

26. De acuerdo con los (N.ºs 19 y 22), un polinomio es *entero respecto de una letra*, si son enteros todos sus términos.

Así, respecto a esa letra, son enteros todos los polinomios de los ejemplos del párrafo anterior. En cambio, el polinomio

$2a - 5x + \frac{x^2}{a}$ es entero respecto de la letra x , pero no lo es respecto de la letra a .

G r a d o

27. DEFINICIÓN. — Se llama **GRADO DE UN MONOMIO** entero a la suma de los exponentes de todas sus letras.

Así, por ej., los monomios

$$5 a x, \quad x, \quad - 2 a^2 b^3 x, \quad \frac{3}{4} m x^3$$

son, respectivamente, de *segundo*, de *primero*, de *sexto* y de *cuarto grado*.

28. Un monomio que no contenga cierta letra se dice que es de **grado cero** respecto de esa letra.

Así, por ej., lo es el monomio $2 b c^2$ respecto de la letra a .

Análogamente, un monomio que no contenga parte literal se dice que es de *grado cero*. Así, el número (-5) es un monomio de grado cero.

Esta denominación quedará justificada en el próximo curso, al estudiar las cantidades con exponente cero.

29. DEFINICIÓN. — Se llama **GRADO DE UN MONOMIO RESPECTO DE UNA DE SUS LETRAS** (o respecto de un grupo de letras), al exponente de dicha letra (o a la suma de los exponentes de dichas letras), en la forma *reducida del monomio*. (Toda letra que figure sin exponente se considera como teniendo el exponente 1).

Así, por ej., el monomio

$$5 a x^2 y$$

es de *segundo* grado respecto de x , de *primer* grado respecto de y , de *tercer* grado respecto del grupo de letras x e y , etc.

30. DEFINICIÓN. — Se llama **GRADO DE UN POLINOMIO** entero al mayor grado de sus términos (N.º 27).

Así, por ej., el polinomio

$$3 a^2 - 5 b^3 c + a b^2 + c - 6$$

cuyos términos son, ordenadamente, de grados 2, 4, 3, 1 y 0, es de *cuarto grado*.

31. Se llama GRADO DE UN POLINOMIO RESPECTO DE UNA DE SUS LETRAS, al mayor grado de sus términos respecto de dicha letra (N.º 29).

Así, por ej., el polinomio anterior es de *segundo* grado respecto de la letra a , de *tercer* grado respecto de b , y de *primer* grado respecto de c .

32. Un POLINOMIO se llama HOMOGÉNEO cuando todos sus términos son del mismo grado.

El grado común de todos los términos es lo que se llama *grado de homogeneidad* o, más brevemente, *grado* del polinomio.

Así, por ej., son homogéneos los polinomios:

$$x^2 - 2xy + y^2 ; a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

El primer polinomio es de segundo grado y el otro de tercero.

Términos semejantes

33. DEFINICIÓN. — Se llaman monomios SEMEJANTES los que tienen la misma parte literal; entendiéndose con esto que las letras sean las mismas, que desempeñen todas el mismo papel de factores o divisores y se encuentren todas afectadas de los mismos exponentes (sólo difieren, pues, en sus coeficientes).

Así, por ej., son semejantes los monomios:

$$5ax^2 ; -ax^2 ; \frac{2}{3}ax^2$$

$$\text{También son semejantes estos otros: } \frac{-b}{a^2} ; \frac{5b}{2a^2}$$

En cambio, no son semejantes los monomios

$$5a^3b \quad \text{y} \quad 3ab^3$$

34. Más generalmente, varios monomios son semejantes respecto de una letra (o respecto de un grupo de letras), si son del mismo grado respecto de dicha letra.

Así, por ej., los monomios:

$$-x; \frac{1}{2}axy; -2,5b^2xy$$

son semejantes respecto de x , siendo los coeficientes de cada uno de ellos respecto de dicha letra, respectivamente:

$$-1; \frac{1}{2}ay; -2,5b^2y$$

Los dos últimos monomios son semejantes respecto de xy , siendo los respectivos coeficientes: $\frac{1}{2}a$; $-2,5b^2$.

35. Reducción de términos semejantes. — Si un polinomio contiene dos o más términos que sean *monomios semejantes*, a éstos se les llama **términos semejantes**.

Así, por ej., el polinomio

$$7a + 3b - 2a - 5b - b$$

contiene dos clases de términos semejantes, que son:

$$7a, -2a \quad \text{y} \quad 3b, -5b, -b$$

Como los términos de un polinomio representan números reales, podemos aplicarle, pues, todas las propiedades estudiadas en el curso anterior para los números relativos. Así, aplicando al polinomio del ejemplo anterior las propiedades conmutativa y asociativa de la suma (A_2 N.ºs 228 y 229), tenemos:

$$7a + 3b - 2a - 5b - b = (7a - 2a) + (3b - 5b - b)$$

Sacando el factor común a de la expresión $(7a - 2a)$, resulta:

$$7a - 2a = (7 - 2)a = 5a$$

Análogamente, para la segunda expresión, tenemos:

$$3b - 5b - b = (3 - 5 - 1)b = -3b$$

El polinomio dado $7a + 3b - 2a - 5b - b$ queda así reducido a la forma más simple, $5a - 3b$.

Podemos enunciar, pues, la siguiente

REGLA. — Cuando en un polinomio figuran varios términos semejantes, podemos reemplazarlos por otro término semejante a ellos, cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de dichos términos.

La operación realizada se llama **reducción de términos semejantes**, y el polinomio obtenido, **polinomio reducido**.

EJEMPLO. — El polinomio reducido de

$$5x - 2a - 3x + 7 - x + a - 4x - 6$$

$$\begin{aligned} \text{es: } (5x - 3x - x - 4x) + (-2a + a) + (7 - 6) &= \\ = (5 - 3 - 1 - 4)x + (-2 + 1)a + (7 - 6) &= -3x - a + 1 \end{aligned}$$

En la práctica, no es necesario escribir los polinomios intermediarios obtenidos al invertir el orden de los términos; se efectúan mentalmente las sucesivas reducciones de términos semejantes y sólo se escriben los términos reducidos.

Así, por ej., tenemos:

$$\begin{aligned} a^2 - 5ab + b^2 + 3ab + 2a^2 + 7b^2 + 6a^2 - 2b^2 &= \\ = 9a^2 - 2ab + 6b^2 \end{aligned}$$

Polinomios ordenados

36. DEFINICIÓN. — Un polinomio está **ORDENADO** según las potencias decrecientes (o crecientes) de una letra, si sus términos se suceden de modo que los exponentes de dicha letra vayan decreciendo (o creciendo).

EJEMPLOS. — El polinomio $2a^5 + 4a^3 - 8a^2 + 5$ está ordenado según las potencias decrecientes.

El polinomio:

$$x^4 - 6ax^3 - 5a^3x + 8a^4$$

está ordenado según las potencias *decrecientes* de x y *crecientes* de a .

Cuando un polinomio contiene más de una letra y queremos ordenarlo según una de sus letras, existiendo, además, varios términos que contienen potencias de igual grado de la letra ordenatriz, podemos proceder como se indica en el ejemplo que sigue:

$$\begin{aligned} ax^2 + x^3 + a^2x + bx^2 - 2abx + a^3 + b^2x + b^3 &= \\ = x^3 + (ax^2 + bx^2) + (a^2x - 2abx + b^2x) + a^3 + b^3 &= \\ = x^3 + (a + b)x^2 + (a^2 - 2ab + b^2)x + a^3 + b^3. \end{aligned}$$

Hemos ordenado según las potencias decrecientes de la letra x .

El binomio $(a + b)$ es el *coeficiente del término en x^2* , por extensión de los vocablos *término* y *coeficiente*.

Análogamente, $(a^2 - 2ab + b^2)$, es el coeficiente del término en x , etc.

37. Un polinomio se llama COMPLETO si contiene todas las potencias de la letra o de las letras ordenatrices, desde la potencia máxima a la potencia cero. De lo contrario, el polinomio es incompleto.

EJEMPLO. — Es completo y está ordenado el polinomio:

$$2x^3 + 5x^2 - 6x + 8$$

Los polinomios de los ejemplos del (N.º 36), son *incompletos*: al primero le faltan los términos de cuarto y de primer grado; al segundo le falta el término de segundo grado en x , que también es el de segundo grado en a .

Suma y resta de monomios y polinomios

38. En el (N.º 25) ya vimos cómo se efectuaba la suma de monomios; de manera que aquí nos concretaremos a agrupar las operaciones con monomios y polinomios.

De acuerdo con la regla demostrada en el curso anterior referente a la suma de números relativos (A₂ N.º 227), podemos establecer en éste la siguiente

REGLA GENERAL. — **Para SUMAR MONOMIOS Y POLINOMIOS se forma el polinomio con los términos de todos ellos.**

39. Suma de monomios. — Sean, por ejemplo, los monomios

$$2a, \quad -0,5a^2b, \quad -3ab^3$$

De acuerdo con la regla general anterior, su suma será el polinomio

$$2a - 0,5a^2b - 3ab^3$$

NOTA. — Es natural que, si entre los sumandos existen términos semejantes, se efectuará su reducción en la suma hallada (N.º 35).

Así, por ej., la suma $2a + 9b - b + 5a - 6b$, queda reducida a la expresión:

$$(2 + 5)a + (9 - 1 - 6)b = 7a + 2b$$

40. Suma de polinomios. — De acuerdo con la regla general, para **SUMAR POLINOMIOS** se escriben todos los términos de los polinomios unos a continuación de los otros, efectuando luego la reducción de términos semejantes.

En la práctica, se dispone la operación de manera de facilitar la reducción de términos semejantes, lo que se consigue mediante la siguiente

REGLA PRÁCTICA. — *Para sumar polinomios, se les da previamente la forma reducida, y se les ordena en el mismo sentido respecto de una misma letra. Luego se escriben los polinomios uno debajo del otro, de manera que se correspondan en columna los términos semejantes, y se efectúa la suma de los términos de cada columna vertical.*

EJEMPLO. — La suma de los polinomios

$2x + 2x^2 + 1$, $4x^3 + x - 3x^2 + 5$, $x - 7$
se dispondrá así:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x + 1 \\ 4x^3 - 3x^2 + x + 5 \\ x - 7 \\ \hline \text{Suma: } 4x^3 - x^2 + 4x - 1 \end{array}$$

41. Resta de monomios y polinomios. — En el curso anterior vimos que, para restar números relativos se suma al minuendo el número opuesto del sustraendo (A₂ N.º 236). En consecuencia, podemos enunciar la siguiente

REGLA. — Para **RESTAR** dos expresiones algebraicas (monomios o polinomios), se suma al minuendo el sustraendo cambiado de signo.

Otra manera más práctica de enunciar la regla, es la siguiente:

Para restar expresiones algebraicas, se escribe el minuendo con sus signos correspondientes, y a continuación el sustraendo con los signos cambiados. Es natural que, si en la diferencia aparecieran términos semejantes, se reducen.

EJEMPLO I. — Para restar del monomio $(-2mn)$ el monomio $(-3mn)$, tendremos:

$$(-2mn) - (-3mn) = -2mn + 3mn = mn$$

EJEMPLO II. — Para restar del monomio $(2ab)$ el polinomio $(4ab - 2c - 5ab)$

tendremos:

$$2ab - (4ab - 2c - 5ab) = 2ab - 4ab + 2c + 5ab$$

cuyo resultado es: $3ab + 2c$

EJEMPLO III. — La diferencia de polinomios

$$(5x - \frac{3}{8}y + 3z) - (2x - y - z - 5)$$

es la siguiente:

$$5x - \frac{3}{8}y + 3z - 2x + y + z + 5 = 3x + \frac{5}{8}y + 4z + 5$$

42. Paréntesis. — Cuando un polinomio contiene un paréntesis comprendido entre signos $+$ o $-$, ese paréntesis se considera como término del polinomio. Así, por ej., diremos que la expresión

$$(a - b) - (b + c - a) + (b - 2c + a)$$

consta de tres términos (es, pues, un trinomio).

Es natural que, para quitar paréntesis, aplicaremos las reglas operatorias que ya hemos dado referentes a la suma o a la resta, según el caso. Recordando, al mismo tiempo, las reglas referentes al empleo de paréntesis dadas en el curso anterior (A₂ N.º 240), podemos enunciar la siguiente

REGLA PRÁCTICA. — Para **SUPRIMIR UN PARÉNTESIS**, si está precedido del signo $+$, se le suprime, sencillamente, sin modificar los signos de los términos que encierra; si está precedido del signo $-$, se cambiará el signo de cada uno de los términos que encierra.

EJEMPLO I. — Quitemos los paréntesis del trinomio que figura en este párrafo:

$$(a - b) - (b + c - a) + (b - 2c + a)$$

Aplicando la última regla práctica, tendremos:

$$a - b - b - c + a + b - 2c + a = 3a - b - 3c$$

EJEMPLO II:

$$\begin{aligned} 3x - [2y - (4x - 6 + y)] + [y - (x + 2) + z] &= \\ = 3x - 2y + (4x - 6 + y) + y - (x + 2) + z &= \\ = 3x - 2y + 4x - 6 + y + y - x - 2 + z &= 6x + z - 8 \end{aligned}$$

43. Inversamente: Dos o más términos de una expresión algebraica se pueden **ENCERRAR DENTRO DE PARÉNTESIS**, conservando cada uno de ellos el signo respectivo, o cambiándole de signo, según que se preceda al paréntesis del signo $+$ o $-$, respectivamente.

EJEMPLO:

$$4a - 3b + 5a - 2b - 6 + a = 4a - (3b - 5a) + (-2b - 6 + a)$$

44. Recuérdese del curso anterior (A₂ N.^{os} 285 al 287), que para suprimir **paréntesis superpuestos**, es decir, como los que figuran en la expresión que sigue:

$$a - \{ b + [-c - (d - e)] - f \}$$

se puede empezar *suprimiendo los paréntesis interiores y prosiguiendo sucesivamente hacia los exteriores*, o bien, *en orden inverso*. También pueden suprimirse aplicando la siguiente

REGLA. — Si un término está encerrado dentro de paréntesis superpuestos, cuando se suprimen simultáneamente todos los paréntesis, el término conserva su signo o lo cambia, según que el número de paréntesis que lo encierran, precedidos del signo $-$, sea par o impar, respectivamente.

Así, por ej., en la expresión anterior tenemos: el término b lo encierra *un* paréntesis precedido del signo $-$, por consiguiente, cambiará de signo, y pondremos $-b$; por igual razón, el otro término $-c$ cambiará de signo, y pondremos $+c$; los términos d y $-e$, los encierran *dos* paréntesis precedidos del signo $-$, por consiguiente, no cambiarán de signo, y pondremos d y $-e$; etc. La expresión sin paréntesis será, pues:

$$a - b + c + d - e + f$$

45. Si un paréntesis es *factor* de un término de una expresión algebraica, para quitarlo es necesario aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación. Volveremos sobre este punto al tratar la multiplicación en el Capítulo siguiente.

* * *

CAPÍTULO III

MULTIPLICACION Y DIVISION DE MONOMIOS Y POLINOMIOS

M u l t i p l i c a c i ó n

46. Producto de monomios. — Sean, por ej., los monomios $(2 a^3 b x)$ y $(-5 a^2 b^3)$ cuyo producto nos proponemos calcular.

En virtud de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación (A_2 N.^{os} 246 y 247) y de la regla de los signos (A_2 N.^o 243) (*), tendremos las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned}(2 a^3 b x) \times (-5 a^2 b^3) &= [(2) (-5)] (a^3 \cdot a^2) (b \cdot b^3) x = \\ &= (-10) a^{3+2} \cdot b^{1+3} \cdot x = -10 a^5 b^4 x\end{aligned}$$

Siendo el procedimiento aplicable a cualquier otro caso, y aún para más de dos factores monomios, resulta, pues, la siguiente

REGLA. — **EL PRODUCTO DE MONOMIOS** es otro monomio, cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes; la parte literal se forma poniendo como exponente de cada letra la suma de los exponentes con que figura esa letra en los diversos factores.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned}(-3 a^2 b^3 c)(-2 a b)(\frac{1}{8} a^3 b d^2)(-4 b^2) &= \\ = [(-3)(-2)(\frac{1}{8})(-4)](a^2 \cdot a \cdot a^3)(b^3 \cdot b \cdot b \cdot b^2) c d^2 &= \\ = -3 a^6 b^7 c d^2\end{aligned}$$

Obsérvese que, *el grado del producto de monomios enteros es igual a la suma de los grados de los monomios factores.*

(*) Recordemos que, dos factores del mismo signo dan producto positivo, y dos factores de signos contrarios dan producto negativo,

47. Producto de un polinomio por un monomio, y vice-versa. — El producto de dos factores, de los cuales uno es un polinomio y el otro un monomio, se efectúa aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación (A_2 N.º 249); por tanto, tendremos la siguiente

REGLA. — Para **MULTIPLICAR UN POLINOMIO POR UN MONOMIO**, se multiplica cada término del polinomio por el monomio y se suman los productos parciales.

EJEMPLO I:

$$\begin{aligned} & (x^3 - 5x^2 + 3x + 2)(-6x^2) = \\ & = (x^3)(-6x^2) + (-5x^2)(-6x^2) + (3x)(-6x^2) + \\ & + (2)(-6x^2) = -6x^5 + 30x^4 - 18x^3 - 12x^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO II:

$$3a^3c \left(\frac{1}{4}a^2b - \frac{1}{8}ab^2 - \frac{1}{3}b^3 \right) = \frac{3}{4}a^5bc - \frac{3}{8}a^4b^2c - a^3b^3c$$

48. NOTAS. — 1.ª Obsérvese que, cuando el monomio y el polinomio son ambos enteros, *el grado del producto es igual a la suma de los grados del polinomio y del monomio.*

2.ª Antes de efectuar la multiplicación de un polinomio por un monomio, es útil reducir los términos semejantes del polinomio, con lo que se logra abreviar la operación.

Además, si algún término del polinomio es a su vez el producto indicado de un polinomio por un monomio, es conveniente efectuar primeramente este producto, porque puede resultar, en algunos casos, una reducción de términos semejantes.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} & 2a^2x [-ay - x(x^2 - 2a) + a(x^2 + y) + x^3] = \\ & = 2a^2x (-ay - x^3 + 2ax + ax^2 + ay + x^3) = \\ & = 2a^2x (2ax + ax^2) = 4a^3x^2 + 2a^3x^3 \end{aligned}$$

49. Producto de polinomios. — Sea, por ej., la multiplicación de $(a + b + c)$ por $(d + e)$.

Considerando primeramente como ya efectuada la suma $(d + e)$, que indicaremos con la letra m , y aplicando la regla anterior (N.º 47), tendremos:

$$(a + b + c)(d + e) = (a + b + c)m = am + bm + cm$$

Pongamos ahora $(d + e)$ en el lugar de m :

$$(a + b + c)(d + e) = a(d + e) + b(d + e) + c(d + e)$$

en la que, aplicando nuevamente la regla del (N.º 47), nos da :

$$(a + b + c)(d + e) = a d + a e + b d + b e + c d + c e$$

Esta última igualdad justifica la siguiente

REGLA. — Para **MULTIPLICAR DOS POLINOMIOS**, se multiplica cada término de uno de los polinomios por cada término del otro, y se suman los productos parciales.

EJEMPLO :

$$\begin{aligned} & (2a^2 - 5a + 1)(a^3 + 3a) = \\ = & \underbrace{(2a^2)(a^3) + (-5a)(a^3) + (1)(a^3)}_{\text{producto por } a^3} + \\ & \underbrace{+ (2a^2)(3a) + (-5a)(3a) + (1)3a}_{\text{producto por } 3a} = \\ = & 2a^5 - 5a^4 + a^3 + 6a^3 - 15a^2 + 3a = \\ & = 2a^5 - 5a^4 + 7a^3 - 15a^2 + 3a \end{aligned}$$

50. NOTA. — Si son más de dos los factores polinomios que se multiplican, aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación, corresponde multiplicar el producto de dos de los factores por el tercero, este segundo producto por un cuarto factor, y así hasta emplear todos los factores.

EJEMPLO :

$$\begin{aligned} (x-3)(5x^2-x+1)(x^2+4) &= (5x^3-x^2+x-15x^2+3x-3)(x^2+4)= \\ &= (5x^3-16x^2+4x-3)(x^2+4)= \\ &= 5x^5-16x^4+4x^3-3x^2+20x^3-64x^2+16x-12= \\ &= 5x^5-16x^4+24x^3-67x^2+16x-12 \end{aligned}$$

51. Producto de polinomios ordenados. — A fin de facilitar la reducción de términos semejantes que aparecieran en la multiplicación, es conveniente ordenar primeramente ambos polinomios según las potencias decrecientes o crecientes de una misma letra, y escribir luego uno debajo de otro los productos parciales, colocando en columnas los monomios semejantes (como indicamos en el N.º 40).

EJEMPLO:

El producto de los polinomios

$$(3x^2 - x + 5) \quad \text{y} \quad (2x + 4)$$

se dispone así:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - x + 5 \\ 2x + 4 \\ \hline 6x^3 - 2x^2 + 10x \\ + 12x^2 - 4x + 20 \\ \hline 6x^3 + 10x^2 + 6x + 20 \end{array}$$

52. Obsérvese en el ejemplo anterior que, como el *producto de los dos términos* ($3x^2$) y ($2x$) de grado “máximo” de cada factor da el término ($6x^3$) de grado máximo del polinomio producto, y como el grado de este último término es la suma de los grados de los factores, tendremos:

El GRADO DEL PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS es igual a la suma de los grados de los factores.

Puede observarse también, fácilmente, que el *producto de los dos términos de grado mínimo de cada factor da el término de grado mínimo del polinomio producto*.

Como el término de grado máximo y el de grado mínimo no se reducen con ningún otro, podemos enunciar, pues, la siguiente propiedad:

El producto de dos polinomios enteros tiene siempre por lo menos dos términos, y, por consiguiente, no podrá ser un monomio.

53. NOTA. — Si el polinomio que se toma como multiplicador no es completo respecto de la letra ordenatriz, conviene dejar en los productos parciales los lugares correspondientes a los términos que faltan.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{r} (a^4 - 2a + 1)(3a^3 + a^2 - 4) = \\ 3a^7 \quad \quad - 6a^4 + 3a^3 \\ \quad a^6 \quad \quad \quad - 2a^3 + a^2 \\ \quad \quad - 4a^4 \quad \quad \quad + 8a - 4 \\ \hline = 3a^7 + a^6 - 10a^4 + a^3 + a^2 + 8a - 4 \end{array}$$

54. Potencia de un monomio. — Como un monomio es un producto, para elevarlo a una potencia aplicamos la regla correspondiente estudiada en el curso anterior (A₂ N.º 148), que dice: *La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de los factores.* Así, por ej., se justifica la siguiente igualdad:

$$(-2 a^4 b^2 x y^2)^3 = (-2)^3 (a^4)^3 (b^2)^3 x^3 (y^2)^3$$

Pero $(-2)^3 = -8$, y aplicando la regla que da la potencia de una potencia (A₂ N.º 151) a los restantes factores del último producto, tenemos:

$$(-2 a^4 b^2 x y^2)^3 = -8 a^{4 \times 3} b^{2 \times 3} x^3 y^{2 \times 3} = -8 a^{12} b^6 x^3 y^6$$

Siendo el procedimiento aplicable a cualquier otro caso, tendremos la siguiente

REGLA. — **La POTENCIA DE UN MONOMIO** se obtiene elevando a esa potencia el coeficiente, y multiplicando por el exponente de la potencia los exponentes de las diversas letras del monomio.

EJEMPLO:

$$(-\frac{3}{5} a^5 b c^3)^2 = (-\frac{3}{5})^2 a^{5 \times 2} b^{1 \times 2} c^{3 \times 2} = \frac{9}{25} a^{10} b^2 c^6$$

I d e n t i d a d

55. Recordemos del curso anterior que, *dos expresiones se llaman EQUIVALENTES*, cuando adquieren los mismos valores numéricos, cualesquiera sean los valores numéricos atribuidos a las letras que figuran en ellas.

Así, por ej., son equivalentes las expresiones:

$$m(a + b) \quad \text{y} \quad ma + mb$$

$$a + b + c + d \quad \text{y} \quad a + (b + c) + d$$

DEFINICIÓN. — **Se llama IDENTIDAD** la igualdad de dos expresiones equivalentes.

Así, por ej., son identidades las expresiones siguientes:

$$m(a + b) = ma + mb$$

$$a + b + c + d = a + (b + c) + d$$

$$(a b)^n = a^n b^n$$

Una identidad expresa siempre una propiedad matemática. Así, la primera de las identidades anteriores, expresa la propiedad distributiva de la multiplicación; la segunda, expresa la propiedad asociativa de la suma; etc.

NOTA. — Para diferenciar las identidades de las igualdades, algunos autores emplean el signo $\equiv$ (con tres barras) en lugar de $=$.

Así, por ej., se escribe la identidad

$$a - (b - c + d) \equiv a - b + c - d$$

Identidades notables

56. Producto de $(a + b)$ por $(a - b)$. — Ofrece especial interés el producto $(a + b)(a - b)$. Efectuando la multiplicación, hallamos:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

que justifica la identidad y regla siguientes:

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

REGLA. — El producto de la suma de dos expresiones por su diferencia, es igual a la diferencia de los cuadrados de las mismas expresiones.

57. NOTA. — Las expresiones referidas en el enunciado que antecede, están representadas en la identidad por las letras a y b . Es natural que estas letras pueden representar monomios o polinomios cualesquiera.

EJEMPLO I:

$$(3a^3 + 5b)(3a^3 - 5b) = (3a^3)^2 - (5b)^2 = 9a^6 - 25b^2$$

EJEMPLO II:

$$(-2xy + z)(-2xy - z) = (-2xy)^2 - z^2 = 4x^2y^2 - z^2$$

EJEMPLO III:

$$(2x+3y-5)(2x+3y+5) = [(2x+3y)-5][(2x+3y)+5] = \\ = (2x+3y)^2 - 25$$

EJEMPLO IV:

$$(x-a+y-b)(x-a-y+b) = \\ = [(x-a)+(y-b)][(x-a)-(y-b)] = \\ = (x-a)^2 - (y-b)^2$$

58. Cuadrado de un binomio. — Puesto que

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b),$$

efectuando la multiplicación (que como ejercicio la dejamos para el estudiante), se encuentra fácilmente la identidad:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

que justifica la siguiente

REGLA. — **EL CUADRADO DE UN BINOMIO** es igual al cuadrado del primer término, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Más brevemente, podemos decir también, que *el cuadrado de un binomio es igual a la suma de los cuadrados de los términos más su doble producto.* (*)

NOTA. — En este caso, así como en todas las identidades que tratemos, es aplicable, también, la Nota del (N.º 57).

EJEMPLO I:

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = \\ = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

EJEMPLO II:

$$[a+(b+c)]^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = \\ = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

59. Obsérvese en la identidad anterior que, mientras que los cuadrados de los dos términos del binomio son siempre positivos, cualesquiera sean los signos de estos términos, el

(*) Esta regla, así como la que veremos más adelante referente al cubo de una suma (N.º 60), ya han sido halladas en el curso anterior para la suma de dos números absolutos.

doble producto tiene el signo $+$ o $-$, según que los términos del binomio tengan el mismo signo o signo contrario, respectivamente. Así, por ej., si el binomio que elevamos al cuadrado es $(a - b)$, el doble producto será $-2ab$, y aquella identidad se escribe así:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Las dos identidades pueden escribirse en la forma única siguiente:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

NOTA. — El doble signo $\pm$ de esta identidad, así como de cualquier otra, significa que resume *dos identidades*: una tomando para *todos* los términos el signo superior; la otra, tomando para *todos* los términos el signo inferior.

EJEMPLO I:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}b\right)^2 &= \left(\frac{3}{4}a^2\right)^2 - 2\left(\frac{3}{4}a^2\right)\left(\frac{1}{2}b\right) + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \\ &= \frac{9}{16}a^4 - \frac{3}{4}a^2b + \frac{1}{4}b^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO II:

$$\begin{aligned} (-3 - 7x^3)^2 &= [(-3) + (-7x^3)]^2 = \\ &= (-3)^2 + 2(-3)(-7x^3) + (-7x^3)^2 = \\ &= 9 + 42x^3 + 49x^6 \end{aligned}$$

Este ejemplo es del mismo tipo del primero del (N.º 58), puesto que basta poner en evidencia el factor -1 cuyo cuadrado es $+1$.

60. Cubo de un binomio. — Por definición de cubo, tenemos:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) = \\ &= (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) \end{aligned}$$

Efectuando esta última multiplicación, llegamos a la identidad:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

que justifica la siguiente

REGLA. — **EL CUBO DE UN BINOMIO** es igual al cubo del primer término, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

61. Si en la identidad anterior cambiamos el signo de b , cambian también de signo los términos que contienen las potencias *impares* de b que se obtienen:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Como ejercicio, enuncie el estudiante en este caso la regla respectiva, es decir, la que da el desarrollo del cubo de una diferencia.

Si también cambiamos el signo de a , resulta:

$$(-a - b)^3 = -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$$

Si observamos que $(-a - b)$ es el número opuesto de $(a + b)$, y recordando que al cambiar de signo a la base de una potencia de grado impar, la potencia cambia de signo, resulta justificado, pues, por otro procedimiento, la diferencia que existe entre los desarrollos de $(a + b)^3$ y $(-a - b)^3$.

EJEMPLO I:

$$\begin{aligned} (2a^2 + mx)^3 &= (2a^2)^3 + 3(2a^2)^2 mx + 3(2a^2)(mx)^2 + (mx)^3 = \\ &= 8a^6 + 12a^4 mx + 6a^2 m^2 x^2 + m^3 x^3 \end{aligned}$$

EJEMPLO II:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}a^3b - 2\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}a^3b\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}a^3b\right)^2 2 + 3\left(\frac{1}{2}a^3b\right)2^2 - 2^3 = \\ &= \frac{1}{8}a^9b^3 - \frac{3}{2}a^6b^2 + 6a^3b - 8 \end{aligned}$$

62. Cuadrado de un polinomio. — Aplicando la propiedad asociativa de la suma, transformamos un polinomio en un binomio. Luego desarrollaremos su cuadrado aplicando la regla del (N.º 58). Así, el desarrollo del Ejemplo II del (N.º 58), nos daría el cuadrado de un trinomio:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= [a + (b + c)]^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \end{aligned}$$

Análogamente para un cuatrinomio:

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^2 &= [(a + b + c) + d]^2 = \\ &= (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 \end{aligned}$$

Del mismo modo procederíamos para un polinomio de un número cualquiera de términos; la regla que enunciaremos es válida para el caso general:

REGLA. — **EL CUADRADO DE UN POLINOMIO** es igual a la suma de los cuadrados de sus términos, más el doble producto de cada término por cada uno de los que le siguen.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} & (x^3 - x^2 + x + 1)^2 = \\ & x^6 + x^4 + x^2 + 1 + 2x^3(-x^2) + 2x^3x + 2x^3 + 2(-x^2)x + 2(-x^2) + 2x = \\ & = x^6 + x^4 + x^2 + 1 - 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 2x^3 - 2x^2 + 2x = \\ & = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

63. **Otras identidades usuales.** — También son de uso frecuente y, por tanto, resulta conveniente su retención, las identidades siguientes:

$$(x^2 + ax + a^2)(x - a) = x^3 - a^3$$

$$(x^2 - ax + a^2)(x + a) = x^3 + a^3$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

cuya verificación dejamos como ejercicio para el estudiante.

Como ejercicio de multiplicación de polinomios, halle el estudiante identidades análogas a la última, multiplicando cuatro o más factores binomios que tengan iguales entre sí sus primeros términos.

División

64. Trataremos únicamente de la división de monomios y polinomios *enteros*.

Pueden presentarse tres casos de división algebraica:

1.º División de monomio por monomio.

2.º " " polinomio " "

3.º " " " " polinomio,

Recuérdese que, según la definición de división que se ha dado en el curso anterior (A₂ N.º 255), *el producto del cociente por el divisor debe dar el dividendo*.

65. División de monomios. — Recordando también el (N.º 46), tendremos que el coeficiente del monomio dividendo será el producto de los coeficientes del divisor y del cociente; por tanto, el de este último se obtendrá *dividiendo* el coeficiente del dividendo por el del divisor.

También tendremos que el exponente de una letra en el dividendo, será la suma de los exponentes de la misma letra del divisor y cociente; por tanto, el exponente de una letra del cociente se obtendrá *restando* al exponente del dividendo el del divisor de la misma letra.

Finalmente, debiendo contener el dividendo todas las diferentes letras del divisor y del cociente, si hay una letra que solamente se encuentre en el dividendo deberá aparecer igualmente en el cociente.

Lo antedicho justifica la siguiente

REGLA. — **EL COCIENTE DE UN MONOMIO POR OTRO** es el monomio cuyo coeficiente es el cociente de coeficientes, y la parte literal estará formada por todas las letras cuyos exponentes serán las diferencias entre los que tienen el dividendo y el divisor.

Las letras que figuren en el dividendo y en el divisor con igual exponente, darán por cociente *1* y, por tanto, no figurarán en el cociente.

Si hay letras en el divisor que no figuren en el dividendo o tienen exponente mayor, no es posible reducir el cociente a *monomio entero*. Prescindiremos por ahora de este caso, que volveremos a tratar más adelante, en la división de fracciones.

EJEMPLO I:

Dividir $-6a^3b^4x^5$ por $2a^2bx^3$

El cociente de coeficientes es $(-6):(2) = -3$

" exponente de *a* es $3-2 = 1$

" " " *b* " $4-1 = 3$

" " " *x* " $5-3 = 2$

El resultado es, $(-6a^3b^4x^5):(2a^2bx^3) = -3ab^3x^2$

Efectúese la *prueba* multiplicando el cociente por el divisor.

EJEMPLO II:

$$(-3 a^2 b^5 x^2 y^3) : (-4 a b^3 x^2 y) = \frac{3}{4} a b^2 y^2$$

66. Cuando el cociente de dos monomios enteros es un monomio entero (caso de los dos ejemplos anteriores), se dice que el monomio dividendo es *divisible* por el monomio divisor.

De lo expuesto podemos enunciar la siguiente propiedad:

Para que un monomio sea divisible por otro, es necesario que los grados de las letras del divisor no sean mayores que los de las mismas letras del dividendo.

67. División de polinomio por monomio. — Puesto que dividir un polinomio por un monomio significa dividir una suma por un número, aplicaremos, en consecuencia, la propiedad distributiva de la división ya tratada en el curso anterior (A₂ N.º 262). Por tanto, tendremos la siguiente

REGLA. — **EL COCIENTE DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIO** es la suma de los cocientes de cada término del dividendo por el divisor.

En cada una de las divisiones parciales se aplicará la regla del (N.º 65).

EJEMPLO I:

$$\begin{aligned} & (8x^5 - x^4 - 2x^2) : 2x = \\ & = (8x^5) : (2x) + (-x^4) : (2x) + (-2x^2) : (2x) = \\ & = 4x^4 - \frac{1}{2}x^3 - x \end{aligned}$$

EJEMPLO II:

$$(2ax^4 - 5a^2x^3 + x^2) : (-x^2) = -2ax^2 + 5a^2x - 1$$

Cuando el cociente de un polinomio por un monomio, ambos enteros, es también un polinomio entero, se dice que *el polinomio es divisible por el monomio*.

68. División de polinomio por polinomio. — **División exacta.** — En lo sucesivo, al referirnos a polinomios, supondremos que se trata únicamente de polinomios *enteros*. Decimos que, *un polinomio es divisible por otro cuando existe un tercer polinomio, o eventualmente un monomio, que multiplicado por el segundo reproduce el primero,*

Así, por ej., si A y B son los polinomios dados, y C el polinomio que multiplicado por B da A , decimos que A es el *dividendo*, B el *divisor* y C el *cociente exacto*; podemos, en consecuencia, escribir:

$$A = B \times C, \text{ o bien, } A : B = C$$

La operación se llama, entonces, **división exacta**.

EJEMPLO: $(a^2 - b^2)$ es divisible tanto por $(a + b)$ como por $(a - b)$, puesto que $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$.

69. Veamos ahora cómo se halla el cociente de dos polinomios, en el caso de una división exacta.

Con la intención de facilitar la explicación, efectuaremos primeramente la multiplicación de dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de una de sus letras; luego, mediante el polinomio producto y uno de los factores, trataremos de obtener el otro factor.

Efectuemos, por ej., el producto $(2a^3 - a)(a^2 + 3)$.

$$\begin{array}{r} (2a^3 - a)(a^2 + 3) = \\ \hline 2a^5 - a^3 \\ \quad + 6a^3 - 3a \\ \hline = 2a^5 + 5a^3 - 3a \end{array}$$

Ahora, con los polinomios

$$(2a^5 + 5a^3 - 3a) \quad \text{y} \quad (2a^3 - a)$$

tratemos de obtener el otro. Para ello, obsérvese que el primer término del polinomio que queremos obtener, multiplicado por $2a^3$ (primer término del segundo), debe dar $2a^5$ (primer término del producto); por tanto, inversamente, aquel término se obtendrá dividiendo $2a^5$ por $2a^3$. Así obtenemos a^2 .

Pero el polinomio $(2a^5 + 5a^3 - 3a)$ se obtuvo mediante la suma de dos polinomios, de los cuales uno es el producto de $(2a^3 - a)$ por (a^2) ; por tanto, si de $(2a^5 + 5a^3 - 3a)$ se resta este último producto que es $(2a^5 - a^3)$, la dife-

rencia que se obtiene, que es $(6a^3 - 3a)$, resultará ser el producto de $(2a^3 - a)$ por el segundo término desconocido del polinomio que deseábamos obtener; por consiguiente, dividiendo su primer término $6a^3$ por el primer término $2a^3$, se hallará este segundo término, que es 3.

El cociente que buscábamos es, pues, $a^2 + 3$.

La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r|l}
 2a^5 + 5a^3 - 3a & 2a^2 - a \\
 -2a^5 + \quad a^3 & \quad a^2 + 3 \\
 \hline
 & 6a^3 - 3a \\
 & -6a^3 + 3a \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

70. Con un razonamiento análogo al del ejemplo anterior, podemos deducir la regla para obtener el cociente de dos polinomios, que se fundaría, pues, en los dos principios siguientes:

1.º *Estando ordenados el dividendo y el divisor con respecto a las potencias decrecientes (o crecientes) de una misma letra, el primer término del cociente se obtiene dividiendo el primero del dividendo por el primero del divisor.*

Este principio es evidente, por otra parte, puesto que, de acuerdo con el (N.º 51), el primer término del producto de dos polinomios ordenados (que llamamos dividendo, en este caso), resulta de multiplicar el primer término del multiplicando (divisor) por el primero del multiplicador (cociente).

2.º *Si del dividendo se resta el producto del divisor por el primer término del cociente, dividiendo el primer término de esta diferencia (o dividendo parcial) por el primero del divisor, se obtiene el segundo término del cociente.*

En efecto, siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente, si se resta del primero el producto del divisor por el primer término del cociente, la diferencia será el producto del divisor por los demás términos del cociente. Por tanto, según el principio anterior, si se divide el primer

término de esta diferencia por el primero del divisor, se tendrá el segundo término del cociente. Esta primera diferencia se llama *primer dividendo parcial*.

De acuerdo con los dos principios anteriores, el cociente exacto se obtendrá con la siguiente

REGLA. — Para **DIVIDIR DOS POLINOMIOS** ordenados según las potencias decrecientes de una misma letra, se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, y el resultado es el primer término del cociente. Se multiplica éste por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, obteniéndose así el primer dividendo parcial. Se opera con este dividendo parcial del mismo modo que con el dado, y así sucesivamente hasta obtener un dividendo parcial igual a cero.

EJEMPLO:

$$(5x^4 - 13x^3 + 22x^2 - 11x + 3) : (x^2 - 2x + 3)$$

Dispondríamos la operación así:

$$\begin{array}{r}
 5x^4 - 13x^3 + 22x^2 - 11x + 3 \quad | \quad x^2 - 2x + 3 \\
 \underline{- 5x^4 + 10x^3 - 15x^2} \quad | \quad \underline{5x^2 - 3x + 1} \\
 3x^3 + 7x^2 - 11x + 3 \\
 \underline{3x^3 - 6x^2 + 9x} \\
 x^2 - 2x + 3 \\
 \underline{- x^2 + 2x - 3} \\
 0
 \end{array}$$

Hemos dividido $5x^4$ (primer término del dividendo) por x^2 (primer del divisor), lo que nos dió $5x^2$, primer término del cociente.

Hemos multiplicado este primer término $5x^2$ por todo el divisor; como este producto debemos restarlo del dividendo, después de multiplicar cambiamos de signo a cada producto parcial, y luego reducimos términos semejantes. Así, diremos: $+5x^2$ por $+x^2$, da $+5x^4$, pero para restar, pondremos: $-5x^4$ debajo del término semejante del dividendo; luego, $+5x^2$ por $-2x$, da $-10x^3$, pero para restar, pondremos: $+10x^3$ debajo del término $-13x^3$ del dividendo, y así sucesivamente.

71. En la práctica conviene, para el cálculo de los sucesivos dividendos parciales, efectuar simultáneamente las multiplicaciones y sustracciones, como indicamos a continuación:

$$\begin{array}{r|l}
 5x^4 - 13x^3 + 22x^2 - 11x + 3 & x^2 - 2x + 3 \\
 - 3x^3 + 7x^2 - 11x + 3 & 5x^2 - 3x + 1 \\
 \hline
 x^2 - 2x + 3 & \\
 0 &
 \end{array}$$

72. Si en el dividendo faltara alguna potencia de la letra ordenatriz, conviene dejar en blanco el lugar de los términos que faltan.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & -a^2 & x - a \\
 ax^2 & -a^3 & x^2 + ax + a^2 \\
 \hline
 a^2x - a^3 & \\
 0 &
 \end{array}$$

NOTA. — Como ejercicio, compruebe el estudiante las divisiones de los ejemplos anteriores, multiplicando el cociente por el divisor, debiendo obtener el dividendo.

Otra manera de efectuar la prueba es la de dividir el dividendo por el cociente, debiendo obtener como resultado el divisor. (Como ejercicio de división, efectúe el estudiante por este procedimiento las pruebas de las divisiones de los ejemplos anteriores).

73. **División inexacta.** — Los polinomios divididos en los dos ejemplos anteriores habían sido preparados de antemano, a fin de que dieran cocientes exactos. Pero podemos tomar dos polinomios enteros cualesquiera, y dividirlos aplicando la misma regla.

Si llegamos a un dividendo parcial nulo, quiere decir que habremos obtenido un cociente exacto. Pero en la mayoría de los casos, llegamos a un dividendo parcial cuyo primer término no es divisible por el primero del divisor, por ser de *grado inferior al del divisor*; entonces, ya no es posible continuar la división.

$$\begin{array}{r} \text{EJEMPLO: } 8x^4 - 2x^3 \quad - \quad x + 3 \mid x^3 - x + 2 \\ - 2x^3 + 8x^2 - 17x + 3 \mid 8x - 2 \\ 8x^2 - 19x + 7 \end{array}$$

El último dividendo parcial obtenido ($8x^2 - 19x + 7$) se llama *resto*; el cociente ($8x - 2$) se llama *cociente entero*, y la operación se llama **división inexacta**.

De manera que, en el caso de división inexacta, deberá modificarse la regla del (N.º 70), en su parte final, donde dice: "...hasta obtener un dividendo parcial igual a cero", debiendo decir, en este caso, ...*hasta obtener un dividendo parcial, llamado resto, de grado menor que el divisor*.

74. Como el resto obtenido en la división inexacta resultó de restar del dividendo sucesivamente el producto del divisor por cada uno de los términos del cociente, es decir:

$$\text{Dividendo} - (\text{divisor} \times \text{cociente}) = \text{resto}$$

si llamamos D al dividendo, d al divisor y R al resto, se verificará la identidad

$$D = d \times c + R$$

Mediante esta igualdad puede verificarse la división; esta verificación constituye la *prueba* de la operación efectuada. Así, para el ejemplo del párrafo anterior, tendríamos:

$$8x^4 - 2x^3 - x + 3 = (x^3 - x + 2)(8x - 2) + (8x^2 - 19x + 7)$$

NOTA. — Es natural que, si el *resto de una división es nulo*, es decir, si tenemos $R = 0$, la identidad anterior se transforma en

$$D = d \times c$$

y entonces la *división es exacta*, estando, pues, en el caso del (N.º 68).

75. Dividiendo ambos miembros de la identidad anterior ($D = d \times c + R$) por d , tendremos:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{R}{d}$$

De acuerdo con esta identidad, vemos que puede completarse el cociente entero de una división; para ello, se le suma

el cociente que resulta de dividir el resto por el divisor. A la suma $(c + R:d)$ se llama *cociente completo*, distinguiéndose así del *cociente exacto* obtenido en una división exacta.

EJEMPLO:

En la división del último ejemplo, el cociente completo es:

$$8x - 2 + \frac{8x^2 - 19x + 7}{x^3 - x + 2}$$

76. División de monomio por polinomio. — Esta división puede considerarse como un caso particular de la de polinomios; por tanto, se efectúa con la regla ya dada para los polinomios. Es natural que, en este caso, la división nunca puede ser exacta, porque si lo fuera, el producto del cociente (supuesto exacto), multiplicado por el divisor, que es un polinomio, no podría dar el dividendo, que es un monomio (N.º 52).

EJEMPLO I:

$$\begin{array}{r} x^3 \\ -x^2 \\ +x \\ -1 \end{array} \quad \begin{array}{r} | x + 1 \\ | x^2 - x + 1 \end{array}$$

Tendríamos, pues:

$$x^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1) + (-1)$$

EJEMPLO II:

Efectuemos la división del ejemplo anterior, ordenando el divisor según las potencias decrecientes de x ; tendremos:

$$\begin{array}{r} x^3 \\ -x^4 \\ +x^5 \\ -x^6 \\ \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} | 1 + x \\ | x^3 - x^4 + x^5 - \dots \end{array}$$

Como vemos, la operación puede continuarse indefinidamente; podemos decir que el cociente consta de un número *infinito* de términos. Análogamente obtendríamos:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

Una suma como esta última, es decir, de un número infinito de términos, que se deducen unos de otros mediante una ley determinada cualquiera, se llama una *serie*.

La expresión del primer miembro de la igualdad anterior se llama la *suma* de la serie.

Se dice también, que el segundo miembro es el *desarrollo en serie* de la expresión del primer miembro.

El estudio de las series constituye uno de los tópicos de más trascendencia, en el estudio de la Matemática superior.

EJEMPLO III. — Procediendo como en el ejemplo anterior, se encuentran los siguientes desarrollos en serie:

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$$

Como ejercicio de división, dejamos que el estudiante halle estos desarrollos.

NOTA. — Del desarrollo en serie del Ejemplo II hubiéramos podido deducir estos últimos, reemplazando la letra (x) por $(-y)$, o por (z^2) , respectivamente.

77. Ley de formación del cociente por $x-a$.

Sea un polinomio entero en x , ordenado según las potencias decrecientes de x ; hallaremos el cociente de su división por el binomio $x-a$.

Para facilitar el razonamiento, nos concretaremos a uno de tercer grado:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

advirtiendo que los términos del cociente que encontraremos, están sujetos a una ley, o regla general, llamada *regla de Ruffini* (*), que nos permitirá hallar dicho cociente, sin efectuar la división, cualquiera sea el grado del dividendo.

(*) PABLO RUFFINI (1765-1822), médico y matemático italiano. Rector de la Universidad de Módena, fué, además, profesor de Clínica médica, de Medicina práctica y de Matemáticas. Esta última ciencia le debe preciosos descubrimientos sobre la teoría de ecuaciones y, especialmente, la demostración de la imposibilidad de la solución general de las ecuaciones algebraicas de grado superior al cuarto.

Para ello, efectuemos primeramente dicha división:

$$\begin{array}{r}
 Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \mid x - a \\
 \hline
 - Ax^3 + Aax^2 \\
 \hline
 (Aa + B)x^2 + Cx + D \\
 - (Aa + B)x^2 + (Aa + B)ax \\
 \hline
 [(Aa + B)a + C]x + D \\
 - [(Aa + B)a + C]x + [(Aa + B)a + C]a \\
 \hline
 [(Aa + B)a + C]a + D
 \end{array}$$

Si examinamos el cociente, vemos: que su *primer* término, Ax^2 , es igual al *primero* del dividendo, o sea Ax^3 , disminuído una unidad el exponente de x , cuyo exponente va disminuyendo una unidad en cada uno de los términos siguientes; el *segundo* coeficiente $(Aa + B)$, es igual al del término anterior, o sea A , multiplicado por a , y sumado con el coeficiente B del *segundo* término del dividendo; el *tercer* coeficiente $[(Aa + B)a + C]$, es igual al del término anterior, o sea $(Aa + B)$, multiplicado por a , y sumado con el coeficiente C del *tercer* término del dividendo.

El resto, $[(Aa + B)a + C]a + D$, es igual al *último* término del cociente, o sea $[(Aa + B)a + C]$, multiplicado por a , y sumado con el *último* término D del dividendo.

Podemos enunciar, pues, la siguiente

REGLA. — EL COCIENTE DE LA DIVISIÓN POR $x - a$ **de un polinomio entero en** x , **supuesto completo y ordenado según las potencias decrecientes de** x , **es otro polinomio igualmente ordenado y supuesto completo, que se obtiene así:**

1.º El primer término del cociente es igual al primero del dividendo, disminuído su exponente en una unidad.

2.º Cualquier coeficiente de los términos del cociente se obtiene multiplicando por a el coeficiente del término que le precede, y sumando a ese producto el coeficiente del término que ocupa igual lugar en el dividendo.

3.º El resto de la división se obtiene multiplicando por a el último término del cociente, y sumando a ese producto el último término del dividendo.

EJEMPLO. — Sin efectuar la división, hallaremos el cociente y el resto de:

$$(5x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 3)$$

En este caso, tenemos $a = 3$. Aplicando la regla anterior, tenemos para el cociente:

$$\begin{aligned} 1.^{\text{er}} \text{ término} &= 5x^3 \\ \text{Coeficiente del } 2.^{\text{o}} \text{ término} &= 5 \times 3 + (-8) = 7 \\ \text{" " } 3.^{\text{er}} \text{ " } &= 7 \times 3 + 4 = 25 \\ \text{" " } 4.^{\text{o}} \text{ " } &= 25 \times 3 + 1 = 76 \\ \text{Resto de la división} &= 76 \times 3 + (-6) = 222 \end{aligned}$$

El cociente es, pues: $5x^3 + 7x^2 + 25x + 76$, y el resto, 222.

78. En la regla anterior se ha supuesto el dividendo y el cociente *completos*. Si alguno de estos polinomios no fuera completo, se le consideraría como tal, imaginando que tengan coeficiente *cero* los términos que faltan.

EJEMPLO. — En la división $(x^5 - x^3 + 2x^2 + 8) : (x - 4)$ cuyo dividendo carece de términos en x^4 y en x , lo completaremos así:

$$x^5 + 0x^4 - x^3 + 2x^2 + 0x + 8$$

Tendremos, pues:

$$\begin{aligned} \text{Primer término del cociente} &= x^4 \\ \text{Coeficiente del } 2.^{\text{o}} \text{ término} &= 1 \times 4 + 0 = 4 \\ \text{" " } 3.^{\text{er}} \text{ " } &= 4 \times 4 - 1 = 15 \\ \text{" " } 4.^{\text{o}} \text{ " } &= 15 \times 4 + 2 = 62 \\ \text{" " } 5.^{\text{o}} \text{ " } &= 62 \times 4 + 0 = 248 \\ \text{Resto} &= 248 \times 4 + 8 = 1000 \end{aligned}$$

El cociente es, pues: $x^4 + 4x^3 + 15x^2 + 62x + 248$, y el resto, 1000.

79. Téngase presente que, si el binomio divisor es de la forma $x + a$, basta expresarlo en la forma $x - (-a)$; en consecuencia, en la aplicación de la Regla de Ruffini, en lugar de multiplicar por a , se multiplicará por $-a$.

EJEMPLO. — En la división $(x^3 + 4x^2 + 6x - 2) : (x + \frac{1}{2})$, tendremos:

$$2.^{\circ} \text{ coeficiente} = 1 \times (-\frac{1}{2}) + 4 = \frac{7}{2}$$

$$3.^{\text{er}} \quad \quad \quad = (\frac{7}{2})(-\frac{1}{2}) + 6 = \frac{17}{4}$$

$$\text{Resto} \dots = (\frac{17}{4})(-\frac{1}{2}) - 2 = -\frac{33}{8}$$

El cociente es, pues: $x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{17}{4}$, y el resto, $-\frac{33}{8}$.

80. Resto de la división por $x - a$.

Cuando solamente interesa conocer el resto de la división del polinomio por el binomio $x - a$, es útil poder determinar fácilmente ese resto sin efectuar la división, o bien sin calcular los sucesivos coeficientes del cociente.

Al efecto, volviendo al ejemplo de la división del (N.º 77), vimos que el polinomio dividido, que ahora representamos, simbólicamente, por $P(x)$, o sea,

$$P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

dividido por $x - a$, nos da el resto (que ahora representamos por R):

$$R = [(Aa + B)a + C]a + D$$

Efectuando operaciones en esta última expresión, tenemos:

$$R = Aa^3 + Ba^2 + Ca + D$$

Obsérvese que este valor de R es el que se obtendría reemplazando en el polinomio $P(x)$ en lugar de x el valor a , y que se representa así: $P(a)$. Como el razonamiento efectuado para el polinomio dado de tercer grado, tiene carácter general, nos resulta demostrada, pues, la siguiente

PROPIEDAD. — **El RESTO de la división de un polinomio entero en x por un binomio de la forma $x - a$ es igual al valor que adquiere el polinomio para $x = a$; es decir, que tenemos:**

$$R = P(a)$$

La regla que antecede también puede demostrarse directamente. En efecto, si llamamos $Q(x)$ al cociente de la división del polinomio $P(x)$ por el binomio $x - a$, y R al resto, de acuerdo con la identidad del (N.º 74), tenemos:

$$P(x) = (x - a) \times Q(x) + R$$

Como esta identidad se verifica para cualquier valor de x , podemos hacer en ella $x=a$, y nos resulta:

$$P(a) = (a-a) \times Q(a) + R$$

(Téngase presente que R es independiente de x , porque es de grado inferior al divisor). Como $(a-a)=0$, se anula su producto por $Q(a)$, y nos resulta:

$$P(a) = R$$

es decir, que obtenemos la identidad que resume la regla anterior.

EJEMPLO I. — Calculando por esta regla el resto de la división

$$(5x^4 - 8x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 3)$$

ya tratada en el Ejemplo del (N.º 77), tenemos:

$$R=P(3)=5 \times 3^4 - 8 \times 3^3 + 4 \times 3^2 + 3 - 6 = 405 - 216 + 36 + 3 - 6 = 222$$

EJEMPLO II. — El resto de la división ya tratada en el (N.º 79),

$$\text{o sea,} \quad (x^3 + 4x^2 + 6x - 2) : (x + \frac{1}{2})$$

$$\text{es:} \quad R = (-\frac{1}{2})^3 + 4(-\frac{1}{2})^2 + 6(-\frac{1}{2}) - 2 = -\frac{1}{8} + 1 - 3 - 2 = -\frac{33}{8}$$

81. Divisibilidad por $x-a$.

Si el resto de la división de un polinomio $P(x)$ por el binomio $(x-a)$ es *nulo*, significa que el polinomio es *divisible* por el binomio (Nota del N.º 74). Pero, según el (N.º 80), dicho resto es: $P(a) = 0$, relación ésta que nos justifica la siguiente

PROPIEDAD. — Para que un polinomio sea **DIVISIBLE POR** $x-a$ es necesario y suficiente que adquiera el valor **cero** (es decir, que se anule), sustituyendo en él x por a .

EJEMPLO. — El polinomio $x^4 - 5x^2 + 4x - 4$ es divisible por $x-2$, porque para $x=2$ nos da: $2^4 - 5 \times 2^2 + 4 \times 2 - 4 = 0$.

82. Como **corolarios** de la propiedad anterior tenemos las cuatro propiedades siguientes:

La diferencia de dos potencias de igual grado es divisible por la diferencia de las bases.

Así, $x^m - a^m$ es divisible por $x - a$, porque el resto de la división es $R = a^m - a^m = 0$.

Como aplicación de la propiedad anterior, efectuemos la división, ya sea por el método general, o por la regla de Ruffini; expresando luego que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente (N.º 64), nos resulta la siguiente identidad:

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1})$$

Haciendo en ella $a=1$, y recordando que cualquier potencia de 1 es igual a 1, obtenemos, como caso particular, esta otra identidad, también muy usada en Matemáticas:

$$x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1).$$

83. *La suma de dos potencias de igual grado no es divisible por la diferencia de las bases.*

En efecto, en este caso $R = a^m + a^m = 2a^m \neq 0$.

84. *La diferencia de dos potencias de igual grado es divisible por la suma de las bases, sólo cuando el grado es par.*

En efecto, en este caso, el resto es: $R = (-a)^m - a^m$, y se obtienen valores diferentes, según que m sea par o impar:

Para m par, resulta: $R = a^m - a^m = 0$.

“ “ impar “ $R = -a^m - a^m = -2a^m \neq 0$.

Así, por ejemplo, la diferencia $x^4 - a^4$ es divisible por la suma $x + a$. Efectuando la división y aplicando luego la definición de división (N.º 64), resulta la identidad:

$$x^4 - a^4 = (x + a)(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3)$$

85. *La suma de dos potencias de igual grado es divisible por la suma de las bases, sólo cuando el grado es impar.*

Esta propiedad se justifica en forma análoga a la anterior; como ejercicio, lo dejamos para el estudiante.

Así, por ej., la suma $x^3 + a^3$ es divisible por la suma $x + a$; efectúese la división y justifíquese la segunda de las identidades del (N.º 63),

Factores comunes

86. Sean dados un polinomio y un monomio enteros, el primero de los cuales suponemos sea divisible por el segundo (N.º 67). Por ejemplo:

$$12 a^3 b^3 + 8 a^2 b^5 - 20 a^2 b^2 \quad y \quad 2 a^2 b$$

Efectuemos la división:

$$(12 a^3 b^3 + 8 a^2 b^5 - 20 a^2 b^2) : 2 a^2 b = 6 a b^2 + 4 b^4 - 10 b$$

de donde, por definición de división (N.º 64), tenemos:

$$12 a^3 b^3 + 8 a^2 b^5 - 20 a^2 b^2 = 2 a^2 b (6 a b^2 + 4 b^4 - 10 b)$$

El polinomio dado resulta así descompuesto en dos factores, uno de los cuales, el monomio, es un *factor común* de los términos del polinomio. La transformación indicada en la última igualdad, se llama *poner en evidencia un factor*, o bien, decimos que **se saca un factor común**. (A₂ N.º 263). Tenemos, en consecuencia, la siguiente

REGLA. — Para **SACAR UN FACTOR COMUN** de los términos de un polinomio, se multiplica el factor que se desea sacar por la suma de los cocientes que resultan de dividir cada término del polinomio por dicho factor.

87. Generalmente se saca el *máximo común divisor* de los términos del polinomio; es decir, el monomio cuya parte literal es el producto de las potencias de *más alto grado* de las letras *comunes* a todos los términos del polinomio, y cuyo coeficiente es el máximo común divisor de todos los coeficientes del polinomio.

EJEMPLO I. — En el Ejemplo del (N.º 86), sacando el máximo común divisor, que es $4 a^2 b^2$, tenemos:

$$12 a^3 b^3 + 8 a^2 b^5 - 20 a^2 b^2 = 4 a^2 b^2 (3 a b + 2 b^3 - 5)$$

EJEMPLO II:

$$\begin{aligned} & (x - 2y)^2 - 8y(x - 2y) - 4x(2y - x) = \\ & = (x - 2y)^2 - 8y(x - 2y) + 4x(x - 2y) = (x - 2y) [(x - 2y) - 8y + 4x] = \\ & = (x - 2y)(5x - 10y) = (x - 2y) 5 (x - 2y) = 5(x - 2y)^2, \end{aligned}$$

88. NOTA. — *De un polinomio, a veces interesa poner en evidencia una cierta expresión algebraica, aunque ella no sea factor de todos los términos del polinomio.*

Esto se consigue aplicando también la regla anterior; el cociente que se obtiene en este caso, no resulta entero.

Así, por ej., si en el polinomio $ax^2 + bx + c$ deseamos poner en evidencia el factor a , tenemos:

$$ax^2 + bx + c = a \left\{ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right\}$$

Descomposición de polinomios en factores primos

89. En algunos casos es conveniente transformar un polinomio en el producto de expresiones algebraicas enteras, operación ésta que se llama **descomposición de un polinomio en factores**; se le llama, también, *factoreo algebraico*.

No siempre es posible esta descomposición, ni existen reglas generales para realizarla. Al efecto se ensayan ciertos procedimientos, generalmente en el orden que se indican a continuación, que se fundan en las propiedades anteriormente estudiadas.

90. Sacar un factor común total. — Se aplica la regla del (N.º 86).

El factor que se saca es generalmente el máximo común divisor de todos los términos del polinomio que se desea transformar en producto.

Así, por ej., tendremos:

$$\begin{aligned} 6a^3b^5c^2 + 10a^3b^4c - 2a^2b^5c^3 &= \\ &= 2a^2b^3c(3ab^2c + 5ab - b^2c^2) \end{aligned}$$

91. Sacar un factor común parcial. — Sea, por ej., el polinomio:

$$3ax - 6x + 2ay - 4y$$

Observemos que los dos primeros términos tienen el factor

común $3x$; los dos últimos, el factor común $2y$. Sacando esos factores comunes parciales, tenemos:

$$3ax - 6x + 2ay - 4y = 3x(a - 2) + 2y(a - 2)$$

Como el factor polinomio que queda en cada producto es el mismo, podemos, a su vez, sacarlo como factor común. y nos resulta:

$$3ax - 6x + 2ay - 4y = (3x + 2y)(a - 2)$$

es decir, que logramos descomponer el polinomio dado en factores.

El procedimiento empleado puede enunciarse, en general, así:

Se agrupan convenientemente los términos del polinomio dado en dos o más polinomios de igual número de términos, sacando luego en cada uno de estos polinomios parciales, el factor común que apareciere; si el polinomio que queda dentro de cada paréntesis es el mismo, éste se saca, a su vez, como factor común.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} m^2a^2x + mbx - 5na^2 - mx + 5n - 5nb &= \\ &= (m^2a^2x + mbx - mx) - (5na^2 + 5nb - 5n) = \\ &= mx(a^2 + b - 1) - 5n(a^2 + b - 1) = (mx - 5n)(a^2 + b - 1) \end{aligned}$$

92. Diferencia de cuadrados. — Si aplicamos la ley simétrica a la identidad del (N.^o 56), tenemos:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

que nos justifica el siguiente enunciado general:

La diferencia de los cuadrados de dos expresiones es igual al producto de la suma por la diferencia de dichas expresiones.

Por este procedimiento podremos descomponer, pues, una diferencia en un producto de dos expresiones binomias.

EJEMPLO I. $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5).$

EJEMPLO II. $\frac{1}{4}a^2x^6 - 8 = (\frac{1}{2}ax^3 + \sqrt{8})(\frac{1}{2}ax^3 - \sqrt{8}).$

EJEMPLO III. $418^2 - 312^2 = (418 + 312)(418 - 312).$

$$\text{EJEMPLO IV.} \quad (x+a)^2 - (y-a)^2 = \\ = [(x+a) + (y-a)][(x+a) - (y-a)] = (x+y)(x-y+2a)$$

93. Diferencia de potencias de igual grado. — De acuerdo con la propiedad del (N.º 82) sabemos que la diferencia de dos potencias de igual grado es siempre divisible por la diferencia de las bases; en consecuencia, de acuerdo con la identidad:

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^{m-1})$$

demostrada en aquel párrafo, tenemos el siguiente enunciado general:

La diferencia de dos potencias de igual grado es igual al producto de la diferencia de las bases, por el cociente que resulta de dividir la diferencia de potencias dadas por la diferencia de las bases. (Este cociente puede obtenerse por la regla de Ruffini).

EJEMPLO I.

$$x^4 - 16 = x^4 - 2^4 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$$

$$\text{EJEMPLO II.} \quad 8a^3 - 125 = (2a)^3 - 5^3 =$$

$$= (2a-5)[(2a)^2 + 5(2a) + 5^2] = (2a-5)(4a^2 + 10a + 25)$$

94. De acuerdo con la propiedad del (N.º 84), la *diferencia* de dos potencias de igual grado también *es divisible* por la suma de las bases cuando el exponente es par; procederemos, pues, como antes (N.º 93).

Así, para la diferencia de potencias del Ejemplo I de dicho párrafo, tenemos esta otra forma de descomposición:

$$x^4 - 16 = x^4 - 2^4 = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$$

95. Tratándose de la diferencia de potencias *pares*, también puede considerarse como la *diferencia de cuadrados*, y aplicarse el (N.º 92).

Así, para el ejemplo anterior, tenemos:

$$x^4 - 16 = x^4 - 2^4 = (x^2)^2 - (2^2)^2 = (x^2 + 2^2)(x^2 - 2^2) = \\ = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$$

96. Suma de potencias de igual grado. — De acuerdo con la propiedad del (N.º 85), la suma de dos potencias de igual grado *sólo es divisible* por la suma de las bases cuando el grado es *impar*; como en el (N.º 93), tenemos, pues, el siguiente enunciado general:

La suma de dos potencias de igual grado impar, es igual al producto de la suma de las bases, por el cociente que resulta de dividir la suma de potencias dadas por la suma de las bases.

Así, tenemos la identidad:

$$x^m + a^m = (x + a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \dots + a^{m-1})$$

EJEMPLO:

$$x^5 + 32 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

97. Trinomio cuadrado perfecto. — Un trinomio se llama *cuadrado perfecto*, cuando es el desarrollo del cuadrado de un binomio.

Si aplicamos la ley simétrica a la identidad del (N.º 59), tenemos:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Vemos que el trinomio $a^2 \pm 2ab + b^2$ es un cuadrado perfecto, porque es el desarrollo del cuadrado $(a \pm b)^2$.

La identidad anterior nos justifica, pues, el siguiente enunciado general:

Para que un trinomio sea cuadrado perfecto, es necesario que uno de sus términos sea duplo del producto de las raíces cuadradas de los otros dos.

Verificada la condición enunciada, el trinomio es **el cuadrado de la suma o de la diferencia de aquellas raíces**, según que el doble producto sea *positivo* o *negativo*, respectivamente.

EJEMPLO I. — El trinomio $x^4 + 2x^2y^3 + y^6$ es un cuadrado perfecto, porque tenemos: $2x^2y^3 = 2\sqrt{x^4}\sqrt{y^6}$.

El trinomio dado puede escribirse así:

$$x^4 + 2x^2y^3 + y^6 = (x^2 + y^3)^2$$

EJEMPLO II. — El trinomio $m^2 + 3 + 2m\sqrt{3}$ es el desarrollo de $(m + \sqrt{3})^2$, porque $2m\sqrt{3} = 2\sqrt{m^2}\sqrt{3}$.

98. Cuatrinomio cubo perfecto. — Un cuatrinomio se llama *cubo perfecto*, cuando es el desarrollo del cubo de un binomio.

Si aplicamos la ley simétrica a la identidad del (N.º 60), tenemos:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Vemos que el cuatrinomio $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ es un cubo perfecto, porque es el desarrollo del cubo $(a + b)^3$.

La identidad anterior nos justifica, pues, el siguiente enunciado general:

Para que un cuatrinomio sea cubo perfecto, es necesario que, ordenado según las potencias decrecientes de una de sus letras, tenga: el segundo término igual al triplo del cuadrado de la raíz cúbica del primero, multiplicado por la raíz cúbica del último; el tercer término igual al triplo de la raíz cúbica del primero por el cuadrado de la raíz cúbica del último.

Verificadas las condiciones antedichas, el cuatrinomio es **el cubo de la suma o de la diferencia de aquellas raíces cúbicas**, según que los términos sean *todos positivos*, o *alternativamente positivos y negativos*, respectivamente.

EJEMPLO I. — El cuatrinomio $8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3$ es un cubo perfecto, porque, estando ordenado según las potencias decrecientes de la letra a , tenemos, también:

$$3(\sqrt[3]{8a^3})^2 \cdot \sqrt[3]{125b^3} = 3(2a)^2 5b = 60a^2b = 2.^\circ \text{ término}$$

$$3\sqrt[3]{8a^3} (\sqrt[3]{125b^3})^2 = 3(2a)(5b)^2 = 150ab^2 = 3.^\circ \text{ término}$$

El cuatrinomio dado puede escribirse, pues, así:

$$8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3 = (\sqrt[3]{8a^3} + \sqrt[3]{125b^3})^3 = (2a + 5b)^3.$$

EJEMPLO II:

$$\begin{aligned} 64 - 96m^2x + 48m^4x^2 - 8m^6x^3 &= \\ = 4^3 - 3 \cdot 4^2(2m^2x) + 3 \cdot 4(2m^2x)^2 - (2m^2x)^3 &= (4 - 2m^2x)^3 \end{aligned}$$

Expresiones algebraicas fraccionarias

99. Concepto. — En el curso anterior ya dimos el concepto de fracción (A₂ N.º 264). Recordemos que el *cociente indicado* del número relativo a por el número relativo b , se expresa con el símbolo $a:b$, o bien, $\frac{a}{b}$, que se llama *fracción algebraica*, o, simplemente, *fracción*, siendo a el *numerador* y b el *denominador* (ambos son los *términos* de la fracción).

Si a y b son expresiones algebraicas *enteras*, pudiendo ser la letra a también una expresión numérica, tenemos la siguiente

DEFINICIÓN. — Una **EXPRESION ALGEBRAICA FRACCIONARIA**, o simplemente **FRACCION ALGEBRAICA**, es el cociente indicado de dos expresiones algebraicas enteras.

Así, por ej., son fracciones algebraicas las expresiones:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 5} ; \quad \frac{-3}{a + 2b}$$

100. Como se trata de expresiones literales, de acuerdo con el (N.º 18), sólo tendrán un *valor numérico* para cada valor que se atribuya a sus letras. Así, para la primera de las fracciones del ejemplo que antecede, tenemos:

Para $x = 2$ el numerador vale $(2^2 - 2 \times 2 - 3) = -3$ y el denominador vale $(2 - 5) = -3$; por tanto, la fracción vale $(-3) : (-3) = +1$.

Para $x = -1$ el numerador se anula, y el denominador vale (-6) ; por tanto, la fracción vale 0. (A₂ N.º 257, 1.ª). Diremos, pues:

Una fracción algebraica se anula cuando se atribuyen a las letras valores tales que anulen el numerador, sin anular el denominador.

Para $x = 5$ el numerador vale $(+12)$ y el denominador se anula; por tanto, la fracción *carece de valor numérico*. (A₂ N.º 257, 2.ª). Podemos decir, pues:

Una fracción algebraica carece de valor numérico para los valores de las letras que anulan el denominador.

101. De acuerdo con el (N.º 18), dos fracciones algebraicas son *equivalentes* cuando adquieren los mismos valores numéricos para iguales valores de las letras.

Así, por ej., son fracciones equivalentes las siguientes:

$$\frac{x^2 + 1}{x + 2} \quad \text{y} \quad \frac{x^3 + x}{x^2 + 2x}$$

Como ejercicio, verifique el estudiante la equivalencia de estas fracciones.

Simplicación de fracciones

102. DEFINICIÓN. — *Simplificar una fracción algebraica es obtener otra equivalente que tenga sus términos de menor grado.*

Como una fracción algebraica se transforma en una fracción aritmética para cada valor numérico atribuido a sus letras, gozará, en consecuencia, de las mismas propiedades de las fracciones numéricas estudiadas en los cursos anteriores. Para su simplificación podemos emplear, pues, la siguiente

REGLA. — Para **SIMPLIFICAR** fracciones algebraicas se dividen sus dos términos por un divisor común.

La fracción así obtenida será equivalente a la primera, siempre que no se divida por cero, o por una expresión algebraica que tome el valor cero para algún valor particular de sus letras.

103. Como para las fracciones aritméticas, conviene emplear como divisor de los dos términos de la fracción, su *máximo común divisor*, reduciendo así la fracción a su *más simple expresión*, es decir, obteniendo una fracción *irreducible*,

EJEMPLO I:

En la fracción $\frac{15 a^3 b^5 c d^2}{24 a^4 b^2 c^2 d}$, el máximo común divisor de los dos términos es $3 a^3 b^2 c d$; por consiguiente, tendremos:

$$\frac{15 a^3 b^5 c d^2 : 3 a^3 b^2 c d}{24 a^4 b^2 c^2 d : 3 a^3 b^2 c d} = \frac{5 b^3 d}{8 a c}$$

EJEMPLO II:

En la fracción $\frac{a x + a}{x^2 + 2 x + 1}$ podemos sacar la letra a como factor común en el numerador, obteniendo $a(x+1)$. El denominador es el desarrollo de $(x+1)^2$; por tanto, dividiendo los dos términos de la fracción por el divisor común $(x+1)$, tendremos:

$$\frac{a x + a}{x^2 + 2 x + 1} = \frac{a(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1}$$

Como el divisor empleado $(x+1)$ se anula para $x = -1$, para este último valor la igualdad anterior no es válida.

EJEMPLO III: Simplificar $\frac{x^3 + a^3}{x^2 - a^2}$

El numerador es divisible por $x+a$ (N.º 96) obteniendo como cociente $x^2 - ax + a^2$; el denominador es la diferencia de cuadrados (N.º 92). Tendremos, pues:

$$\frac{x^3 + a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x+a)(x^2 - ax + a^2)}{(x+a)(x-a)} = \frac{x^2 - ax + a^2}{x-a}$$

104. Reducción a común denominador. — DEFINICIÓN. — Reducir varias fracciones a común denominador es obtener otras, respectivamente equivalentes a ellas, y que tengan el mismo denominador.

Con un criterio como el empleado al principio del (N.º 102) respecto de la analogía entre las fracciones algebraicas y las aritméticas, tendremos, pues, la siguiente

REGLA. — Para reducir fracciones algebraicas a **COMÚN DENOMINADOR** se multiplican los dos términos de cada una por los denominadores de las demás.

EJEMPLO. — Sean las fracciones

$$\frac{2}{x-3}, \quad \frac{5}{x+2}, \quad \frac{x+1}{x}$$

Aplicando la regla anterior a cada una de ellas, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-3} &= \frac{2(x+2)x}{(x-3)(x+2)x} = \frac{2x^2+4x}{x^3-x^2-6x} \\ \frac{5}{x+2} &= \frac{5(x-3)x}{(x+2)(x-3)x} = \frac{5x^2-15x}{x^3-x^2-6x} \\ \frac{x+1}{x} &= \frac{(x+1)(x-3)(x+2)}{x(x-3)(x+2)} = \frac{x^3-7x-6}{x^3-x^2-6x} \end{aligned}$$

105. Cuando los denominadores tienen factores comunes, conviene reducir las fracciones al *mínimo denominador común*. Para ello se empleará un procedimiento análogo al de Aritmética para las fracciones ordinarias (A₁ N.º 203), considerando cada letra como un factor primo. Siga el estudiante las operaciones del ejemplo siguiente.

EJEMPLO. — Sean las fracciones algebraicas

$$\frac{3a}{4b^4}, \quad \frac{c}{6a^2b^3}, \quad \frac{1}{6a^4}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores es: $12a^4b^4$.

Los cocientes de dividir este M. C. M. por cada denominador son, respectivamente:

$$(12 a^4 b^4) : (4 b^4) = 3 a^4 ; \quad (12 a^4 b^4) : (6 a^2 b^3) = 2 a^2 b$$

$$(12 a^4 b^4) : (6 a^4) = 2 b^4$$

En consecuencia, las fracciones reducidas a su mínimo común denominador, son:

$$\frac{3 a^4 \cdot 3 a^4}{4 b^4 \cdot 3 a^4} = \frac{9 a^8}{12 a^4 b^4}, \quad \frac{c \cdot 2 a^2 b}{6 a^2 b^3 \cdot 2 a^2 b} = \frac{2 a^2 b c}{12 a^4 b^4}$$

$$\frac{1 \cdot 2 b^4}{6 a^4 \cdot 2 b^4} = \frac{2 b^4}{12 a^4 b^4}$$

Las cuatro operaciones fundamentales con fracciones algebraicas

106. Como vimos en los párrafos que preceden, podemos operar con las fracciones algebraicas lo mismo que con las aritméticas, tratadas en los cursos anteriores.

107. **Adición.** — La identidad que expresa la propiedad distributiva de la división (A_2 N.º 262), o sea

$$(a + b + c) : m = a : m + b : m + c : m$$

puede escribirse así:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a + b + c}{m}$$

la que nos origina la siguiente

REGLA. — La **SUMA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS** que tengan igual denominador es otra fracción que tiene el mismo denominador y cuyo numerador es la suma de los numeradores.

La suma de fracciones de distinto denominador, se efectúa reduciéndolas previamente a común denominador.

EJEMPLO I. — Aplicando la regla del (N.º 104), luego la anterior, y simplificando, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{5a}{2x} + \frac{2a}{3x^2} + 5 &= \frac{5a \cdot 3x}{6x^2} + \frac{2a \cdot 2}{6x^2} + \frac{5 \cdot 6x^2}{6x^2} = \\ &= \frac{15ax + 4a + 30x^2}{6x^2} \end{aligned}$$

EJEMPLO II:

$$\frac{2}{1-x} + \frac{3}{1+x} = \frac{2(1+x) + 3(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2+2x+3-3x}{1-x^2} = \frac{5-x}{1-x^2}$$

108. Sustracción. — Como para la sustracción de números relativos, aplicaremos la siguiente

REGLA. — La **DIFERENCIA DE DOS FRACCIONES ALGEBRAICAS** se obtiene sumando a la fracción minuyendo la opuesta de la fracción sustraendo.

Si se quiere, puede emplearse la regla de la suma (N.º 107), en la que se reemplazará la palabra *suma* por *resta*.

EJEMPLO:

$$\frac{x+y}{y} - \frac{x-y}{x} = \frac{(x+y)x - (x-y)y}{yx} = \frac{x^2+yx - xy+y^2}{yx} = \frac{x^2+y^2}{yx}$$

109. Multiplicación. — **REGLA.** — El **PRODUCTO DE FRACCIONES ALGEBRAICAS** es la fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores, y por denominador el producto de los denominadores.

EJEMPLO I:

$$\frac{a}{x^2-1} \times \frac{x+1}{2} = \frac{a(x+1)}{2(x^2-1)} = \frac{a(x+1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{a}{2(x-1)}$$

EJEMPLO II:

$$\frac{a^2+2a+1}{3a} \times \frac{6a^2}{2(a+1)} \times \frac{a-1}{b} = \frac{(a+1)^2 6a^2 (a-1)}{3a \cdot 2(a+1)b} = \frac{a(a^2-1)}{b}$$

110. División. — REGLA. — EL COCIENTE DE DOS RACCIONES ALGEBRAICAS es igual al producto de la racción dividiendo por la fracción inversa (o recíproca) del livisor.

EJEMPLO I:

$$\frac{x^2}{2x-3} : \frac{4x}{x-5} = \frac{x^2}{2x-3} \times \frac{x-5}{4x} = \frac{x^3-5x^2}{8x^2-12x} = \frac{x^2-5x}{8x-12}$$

EJEMPLO II:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b} : \frac{a^2+ab}{b^2} &= \frac{a}{2b} \times \frac{b^2}{a^2+ab} = \\ &= \frac{ab^2}{2b(a^2+ab)} = \frac{ab^2}{2ab(a+b)} = \frac{b}{2(a+b)} \end{aligned}$$

111. Operaciones combinadas. — Las cuatro operaciones llamadas racionales, o sea, la adición, sustracción, multiplicación y división de fracciones, dan como resultado una fracción algebraica; por tanto, cualquier combinación de estas cuatro operaciones dará también como resultado una sola fracción algebraica.

EJEMPLO I:

$$\left[1 - \frac{b}{a} \right] \frac{b}{b-a} = \frac{a-b}{a} \cdot \frac{b}{b-a} = \frac{(a-b)b}{a(b-a)} = -\frac{b}{a}$$

EJEMPLO II:

$$\begin{aligned} \left[\frac{a}{b(a-b)} - \frac{b}{a(b-a)} \right] : \frac{a^2+b^2}{ab} &= \left[\frac{a^2-ab}{b} - \frac{b^2-ab}{a} \right] \times \frac{ab}{a^2+b^2} = \\ &= \frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{ab} \times \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{a^4-b^4}{a+b} \times \frac{1}{a^2+b^2} = \\ &= \frac{(a^2+b^2)(a^2-b^2)}{(a+b)(a^2+b^2)} = \frac{a^2-b^2}{a+b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b} = a-b \end{aligned}$$

CAPITULO IV

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

Preliminares

112. Identidades. — En el (N.º 55) vimos que, la igualdad de dos expresiones equivalentes se llama *identidad*.

Por ejemplo, lo es la siguiente, ya estudiada en el (N.º 58) :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

De una identidad pueden deducirse otras, aplicando las propiedades de las igualdades (A₁ N.º 8). Por ejemplo, podemos sumar a ambos miembros un mismo número, o multiplicarlos por un mismo número, etc. Así, podemos sumar $-b^2$ a los dos miembros de la identidad anterior, obteniendo

$$(a + b)^2 - b^2 = a^2 + 2ab$$

y luego sacar en el segundo miembro el factor común a :

$$(a + b)^2 - b^2 = a(a + 2b) \quad [1]$$

Decimos que la [1] es también una identidad.

113. Si damos valores numéricos arbitrarios a las letras de una identidad, llegamos a obtener dos valores numéricos iguales para ambos miembros, salvo, como es natural, para aquellos valores excepcionales de las letras que den operaciones irrealizables con esos números.

114. Ecuaciones. — Si escribimos

$$a = 2$$

¿será esta expresión una identidad?

Ciertamente que no, puesto que si damos a la letra a un valor numérico distinto de 2, no obtenemos valores iguales, o, en otros términos, la igualdad ya no resulta satisfecha: es absurda.

Para que la igualdad se satisfaga, la letra a admite *solamente el valor 2*.

Podemos decir que la igualdad $a=2$ se estableció con el *objeto de indicar que la letra (a) puede admitir solamente el valor 2*.

Veamos otro ejemplo; sea

$$a^2 = 9$$

Aquí también, la letra a solamente admite *dos valores*: $+3$ y -3 ; la igualdad es absurda para otros valores de a ; por consiguiente, no es una identidad.

Vemos, pues, que se destacan claramente dos tipos de igualdades: las primeras, que llamamos identidades, y estas últimas, que no lo son, porque no se satisfacen para valores arbitrarios de las letras, sino para un número limitado de valores (*uno* en el primer ejemplo, y *dos* en el segundo).

Las igualdades de condición como estas últimas se llaman *ecuaciones*. Podemos, en consecuencia, dar la siguiente

DEFINICIÓN. — Se llama **ECUACIÓN** la igualdad establecida a los efectos de determinar los valores que deben atribuirse a cierta letra (o más letras), a fin de que aquélla resulte satisfecha, o, en otros términos, a los efectos de buscar los valores para los cuales la igualdad se transforme en una identidad.

115. Si nos proponen el siguiente problema: ¿cuál es el número cuyo triplo, disminuído en 8 unidades resulta igual a aquel número?

Indicando con x el número pedido, su triplo es $3x$, y disminuído en 8 unidades es $(3x - 8)$. Según la condición impuesta, esta diferencia tiene que ser igual al número pedido x ; por tanto, podemos establecer la siguiente igualdad:

$$3x - 8 = x$$

Podemos comprobar que esta igualdad solamente se satis-

face si damos a x el valor 4, mientras que, para otros valores resulta absurda. Este valor (que, como veremos más adelante, es único), es la *solución de la ecuación* anterior, y es también la solución del problema.

116. Si una ecuación contiene varias letras, puede suceder que alguna de ellas tenga valores prefijados.

Así, supongamos que nos piden: calcular la altura de un rectángulo del cual se conocen el área y la base. Si indicamos con S el área, b la base, y con x la altura desconocida, como el área de un rectángulo (A_2 N.º 56) es $b \times x$, tendremos:

$$S = b \times x$$

En esta ecuación las letras S y b representan cantidades *conocidas*, mientras que x es una cantidad *desconocida*.

Las letras que representan cantidades desconocidas se llaman incógnitas.

Generalmente, se representan las incógnitas mediante las últimas letras del alfabeto: $x, y, z, \dots$

Los términos que no contienen incógnitas se llaman *términos conocidos* o *independientes de la incógnita*.

117. Resolver una ecuación, quiere decir *operar convenientemente con ella hasta hallar cuáles son los valores que debemos atribuir a la incógnita (o a las incógnitas) para que la ecuación se transforme en una identidad*.

Estos valores se llaman **soluciones** de la ecuación, y se dice que la *satisfacen* o la *verifican*.

Cuando la ecuación contiene una sola incógnita, las soluciones se llaman, también, **raíces** de la ecuación.

EJEMPLO I. — En la ecuación $a - 3 = 2$, la incógnita es a , puesto que figura en ella una sola letra. La solución o raíz de la ecuación es evidentemente $a = 5$, puesto que este valor la satisface: $5 - 3 = 2$ (identidad). Hemos tratado una ecuación con una incógnita.

EJEMPLO II. — La ecuación $x^2 + 3x = 4$ tiene las dos raíces: $x = 1$, $x = -4$; se demostrará en el próximo curso, que solamente admite dos raíces.

EJEMPLO III. — La ecuación con *dos incógnitas* x , y ,

$$y = x - 3$$

admite infinitas soluciones:

$$x = 1 \quad , \quad y = -2 \quad \text{puesto que} \quad -2 = 1 - 3$$

$$x = -1 \quad , \quad y = -4 \quad \text{" " } \quad -4 = -1 - 3$$

$$x = 1/2 \quad , \quad y = -5/2 \quad \text{" " } \quad -5/2 = 1/2 - 3$$

118. Clasificación de ecuaciones. — Una ecuación se llama *irracional*, *racional*, *entera* o *fraccionaria*, según que sus dos miembros sean, respectivamente, expresiones irracionales, racionales, enteras o fraccionarias, *respecto de la incógnita* (o *de las incógnitas*) (N.^{os} 16 y 19).

Así, por ej., de las ecuaciones

$$\sqrt{x-3} = 2 \quad ; \quad x\sqrt{2} + x^2 = 3 \quad ; \quad 2/x - 3/y = 1$$

la primera es *irracional*; la segunda es *racional* y *entera*, porque la incógnita no figura bajo signo radical ni como divisor; la tercera es *fraccionaria*, porque la incógnita (o incógnitas) figuran como divisores.

Equivalencia

119. Sean las dos ecuaciones

$$x + 1 = 3 \quad , \quad x + 5 = 7$$

Vemos fácilmente que ambas tienen como solución el número 2.

Este número resulta, pues, *indiferentemente determinado*, ya sea por la primera o segunda ecuación. Por ese motivo, decimos que las ecuaciones se equivalen, o que son *equivalentes*. En general, damos la siguiente

DEFINICIÓN. — Dos ecuaciones se llaman **EQUIVALENTES** cuando tienen las mismas soluciones.

Para afirmar que dos ecuaciones son equivalentes, no basta que todas las soluciones de una lo sean de la otra; es necesario también que *todas* las soluciones de la segunda lo sean de la primera.

Por ejemplo, son equivalentes las ecuaciones

$$x - 3 = 0 \quad \text{y} \quad 5(x - 3) = 0$$

porque ambas admiten la solución $x = 3$, y no pueden admitir otra. En efecto, el producto $5(x - 3)$ será nulo únicamente cuando $(x - 3)$ también lo sea, es decir, cuando $x = 3$.

En cambio, no son equivalentes las ecuaciones

$$x - 3 = 0 \quad \text{y} \quad x(x - 3) = 0$$

porque, si bien admiten la solución $x = 3$, en cambio la segunda ecuación admite también la solución $x = 0$, que no lo es de la primera.

Principios generales en que se basa la resolución de ecuaciones

120. Transformación de ecuaciones. — Para resolver una ecuación, la transformamos en otra equivalente más fácil para resolver, ésta en otra, y así sucesivamente, hasta llegar a una ecuación completamente resuelta, es decir, del tipo $x = a$, cuya raíz es, evidentemente, el número a .

Estas transformaciones se justifican por los dos teoremas que veremos a continuación.

121. TEOREMA I. — Si a los dos miembros de una ecuación se les **SUMA** una misma expresión que tenga valor determinado, se obtiene una ecuación equivalente.

Sea, por ejemplo, la ecuación:

$$5x - 2 = x + 10 \quad [1]$$

y $(2x - 1)$ una expresión que sumaremos a ambos miembros; obtenemos:

$$5x - 2 + (2x - 1) = x + 10 + (2x - 1) \quad [2]$$

Se trata de probar que las ecuaciones [1] y [2] son equivalentes.

1.º *Toda raíz de la [1] es raíz de la [2].* — Fácilmente puede verse que el número 3 es raíz de la [1], porque para

$x=3$ ambos miembros toman el valor numérico 13 ; pero para $x=3$, la expresión $(2x-1)$ que sumamos toma el valor numérico 5, de modo que ambos miembros de la [2] tomarán el valor numérico $13+5=18$. Por consiguiente, el número 3 es también raíz de la [2].

2.^o *Toda raíz de la [2] es raíz de la [1].* — El número 3 es raíz de la [2] porque para $x=3$ sus dos miembros toman el valor 18 ; pero para $x=3$, la expresión $(2x-1)$ toma el valor numérico 5, que restado a ambos miembros de la [2] dan por resultado $18-5=13$, lo que nos prueba que 3 es también raíz de la [1].

NOTAS. — 1.^a Es evidente que el razonamiento empleado es general, y se aplica a ecuaciones con un número cualquiera de incógnitas.

2.^a Como caso particular es natural que, la expresión que sumamos a ambos miembros de la ecuación puede ser una cantidad independiente de la incógnita.

3.^a En lugar de sumar, podemos *restar* a ambos miembros de una ecuación una misma expresión algebraica que también resulta una ecuación equivalente, pues sabemos que restar equivale a sumar la expresión opuesta.

EJEMPLO. — Dada la ecuación: $x-5=4$, son *equivalentes* a ella, las siguientes:

$$x-5+2=4+2; \quad x-5+3x=4+3x$$

porque cada una admite la solución única $x=9$. La primera de estas dos últimas se obtuvo sumando el número 2 a los dos miembros de la ecuación dada; la última, sumándole $3x$.

122. Como *consecuencia* de la Nota 3.^a que antecede, tenemos:

Se puede SUPRIMIR UN TÉRMINO COMÚN a los dos miembros de una ecuación.

EJEMPLO. — En la ecuación $x - x^2 + 9 = 3 - x^2$ se puede suprimir el término común $-x^2$. En efecto, en virtud del teorema que antecede, sumando $+x^2$ a los dos miembros de la ecuación, obtenemos:

$$x - x^2 + 9 + x^2 = 3 - x^2 + x^2$$

y reduciendo los términos semejantes en cada miembro, resulta:

$$x - 9 = 3$$

123. Trasposición de términos. — El teorema anterior nos permitirá *pasar un término de un miembro a otro de una ecuación*, operación que se llama *trasposición de términos*.

Sea, por ejemplo, la primera ecuación del (N.º 121):

$$5x - 2 = x + 10$$

Si sumamos a los dos miembros la expresión $(-x)$, obtenemos la ecuación equivalente

$$5x - 2 - x = x + 10 - x$$

Pero en el segundo miembro, los términos x y $-x$ se pueden *eliminar*, es decir, que se *destruyen*, por ser términos opuestos; la ecuación queda reducida, pues, a esta otra:

$$5x - 2 - x = 10$$

Vemos que el término x que se encontraba en el segundo miembro de la ecuación inicial pasó al primer miembro, pero con signo contrario; podemos enunciar, pues, la siguiente

REGLA. — **Para PASAR UN TÉRMINO de un miembro a otro de una ecuación, se cambia el signo de ese término.**

EJEMPLO. — Sea la ecuación: $x - 5y - 3 = 2x - 3y + 4$. Pasaremos al primer miembro los términos que contienen las incógnitas, y al segundo los términos independientes. Aplicando la regla anterior, tenemos: $x - 5y - 2x + 3y = 4 + 3$.

124. Como *consecuencia* del párrafo anterior, tenemos:

Puede reducirse a cero el segundo miembro de una ecuación.

EJEMPLO. — Dada la ecuación:

$$x^2 + 4x + 5 = 7x - 8 - x^2$$

trasponiendo todos los términos al primer miembro, tenemos:

$$x^2 + 4x + 5 - 7x + 8 + x^2 = 0$$

y, reduciendo términos semejantes, resulta:

$$2x^2 - 3x + 13 = 0$$

Esta transformación se llama **reducción de una ecuación a cero** (*), y se indica, simbólicamente, así:

$$A(x) = 0$$

125. TEOREMA II. — Si ambos miembros de una ecuación se **MULTIPLICAN** por un factor independiente de la incógnita, y distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

En la demostración del Teorema I empleamos una ecuación particular; en éste variaremos el método por razones didácticas, empleando una ecuación general.

Sea la ecuación:

$$A(x) = B(x) \quad [1]$$

en la que $A(x)$ y $B(x)$ representan, simbólicamente, las expresiones algebraicas de cada miembro de la ecuación dada.

El valor numérico que toma la expresión $A(x)$ para $x=a$ se representa así: $A(a)$, y, análogamente, el que toma $B(x)$ es $B(a)$.

Sea K un número cualquiera distinto de cero. Si multiplicamos los dos miembros de la [1] por K tendremos:

$$[A(x)] \cdot K = [B(x)] \cdot K \quad [2]$$

Probaremos que las ecuaciones [1] y [2] son equivalentes.

1.º *Toda raíz de la [1] es raíz de la [2].* — En efecto,

(*) El matemático inglés TOMAS HARRIOT (1568-1621) fué el primero que dió a las ecuaciones enteras la forma $A(x) = 0$. Entre las consecuencias de esta transformación merece citarse, la de escribir una ecuación entera en la forma $A(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\dots = 0$, que sugirió al matemático francés d'Alembert (1717-1783) el teorema que lleva su nombre, según el cual toda ecuación de grado m , tiene m raíces.

si $x = a$ es una raíz de la [1], sustituyendo en ella x por a tenemos la identidad:

$$A(a) = B(a) \quad [3]$$

Multiplicando los dos miembros de esta última por K tendremos otra identidad

$$[A(a)] \cdot K = [B(a)] \cdot K \quad [4]$$

la que nos prueba que el número a es raíz de la [2].

2.º *Toda raíz de la [2] es raíz de la [1].* — Si $x = a$ es raíz de la [2], sustituyendo en ella x por a tenemos la identidad [4], y dividiendo ambos miembros por el número K , distinto de cero, resulta la [3], lo que nos prueba que a es raíz de la [1].

Las dos ecuaciones son, pues, equivalentes.

NOTA. — En lugar de multiplicar podemos *dividir* ambos miembros de una ecuación por un número diferente de cero, que también resulta una ecuación equivalente, pues sabemos que dividir por un número K equivale a multiplicar por $1/K$.

EJEMPLO. — Las ecuaciones:

$$4x + 3 = x ; \quad 8x + 6 = 2x$$

son *equivalentes*, porque cada una de ellas admite la solución única $x = -1$; la segunda ecuación se obtuvo multiplicando por el número 2 los dos miembros de la primera; inversamente, la primera puede obtenerse de la segunda dividiendo sus miembros por 2, es decir, *multiplicándolos por $\frac{1}{2}$* .

126. Trasposición de factores o divisores. — El teorema anterior nos permitirá *pasar un factor o un divisor* de un miembro a otro de una ecuación.

Sea, por ejemplo, la ecuación

$$6x - 8 = 5$$

Como el primer miembro tiene el factor 2, podemos pasarlo al segundo miembro dividiendo por él ambos miembros de la ecuación, obteniendo la ecuación equivalente:

$$3x - 4 = \frac{5}{2}$$

Si trasponemos el término -4 al segundo miembro, tendremos:

$$3x = \frac{5}{2} + 4, \text{ o sea, } 3x = \frac{13}{2}, \text{ de donde, } x = \frac{13}{6}$$

Es evidente que esta última ecuación sólo se satisface para el valor $\frac{13}{6}$; por tanto, ésta es la única raíz de la ecuación dada.

Tratemos un ejemplo de trasposición de un divisor. Sea la ecuación

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{2} + 3$$

Pasamos el divisor 4 del primero al segundo miembro, multiplicando por 4 ambos miembros, lo que nos da:

$$x = \frac{4}{2} + 12, \text{ de donde, } x = 14$$

Este número 14 es la única raíz de la ecuación propuesta.

En estos dos ejemplos hemos *resuelto* las dos ecuaciones dadas, y podemos decir, que este es el camino que debemos seguir para resolver una ecuación, camino que detallaremos más adelante (N.^{os} 133 y siguientes).

127. Eliminación de denominadores. — Sea, por ejemplo, la ecuación:

$$\frac{5x}{2} - \frac{3}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

cuyos términos tienen *todos* el mismo denominador.

Si multiplicamos ambos miembros de la ecuación por el denominador común 2 (lo que es lícito en virtud del Teorema II), y luego simplificamos, obtenemos la ecuación equivalente

$$5x - 3 = x + 1$$

que es de forma *entera*; la operación realizada se llama *eliminación de denominadores*.

Tratemos otra ecuación con términos de *diferentes* denominadores; por ejemplo:

$$\frac{x}{4} - \frac{1}{2} = \frac{2x}{3} + 1$$

Reduzcamos las expresiones enteras y fraccionarias a común denominador; para ello nos conviene emplear el mínimo común múltiplo de los denominadores, que en este caso es 12, y obtenemos:

$$\frac{3x}{12} - \frac{6}{12} = \frac{8x}{12} + \frac{12}{12}$$

Procediendo como en el ejemplo anterior, eliminamos los denominadores, y obtenemos la ecuación equivalente:

$$3x - 6 = 8x + 12$$

En la práctica, no es necesario escribir el común denominador, porque basta multiplicar desde un principio los dos miembros de la ecuación dada por el mínimo común múltiplo de los denominadores y simplificar, para lograr eliminar los denominadores.

El procedimiento indicado justifica, pues, la siguiente

REGLA. — Para **ELIMINAR LOS DENOMINADORES DE UNA ECUACIÓN** se multiplica el numerador de cada fracción por el cociente entre el mínimo común múltiplo de los denominadores y el denominador correspondiente (que se suprime); cualquier otro término se multiplica por dicho mínimo común múltiplo.

EJEMPLO. — Sea la ecuación $\frac{x}{a} - \frac{a}{b} = \frac{x}{b} + \frac{b}{a}$

El M. C. M. de los denominadores es ab ; dividiéndolo por el denominador de la primera fracción, obtenemos el cociente $(ab):a=b$, y multiplicando luego el numerador por dicho cociente, obtenemos ax . Prosiguiendo análogamente con las restantes fracciones, logramos la ecuación equivalente:

$$bx - a^2 = ax - b^2$$

sin denominadores.

128. Como **corolarios** del Teorema II, tenemos:

1.^o *Se puede suprimir un factor constante común a todos los términos de una ecuación.*

En efecto, esa supresión equivale a *dividir* todos los términos de la ecuación por un mismo número independiente de la incógnita.

EJEMPLO I. — En la ecuación: $8x + 4 = 12x - 16$ podemos suprimir el factor común 4, obteniendo la ecuación equivalente: $2x + 1 = 3x - 4$.

EJEMPLO II. — En la ecuación: $ax^2 - a^2x = 0$ podemos suprimir el factor común a , pero *no es lícito suprimir el factor común x .*

2.^o *Se puede cambiar de signo a todos los términos de una ecuación.*

En efecto, esto equivale a multiplicar o a dividir todos los términos por -1 .

129. Nota al Teorema II. — *Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por un factor dependiente de la incógnita, pueden introducirse nuevas raíces* (los valores que anulan dicho factor), *o suprimirse algunas raíces* (los valores que anulan al denominador del factor, si éste tiene forma fraccionaria).

Sea, por ejemplo, la ecuación

$$x - 3 = 2x - 8$$

que tiene la raíz 5. Si multiplicamos ambos miembros por el factor $(x - 2)$, tendremos la nueva ecuación

$$(x - 3)(x - 2) = (2x - 8)(x - 2)$$

que admite la raíz de la primera, pero no le es equivalente.

En efecto, fácilmente puede verificarse que esta última ecuación admite la raíz $x = 5$ de la primera, pero admite, además, la raíz $x = 2$, que no lo es de la primera; vemos que esta operación ha introducido una nueva raíz (la que resulta de resolver la ecuación $x - 2 = 0$).

Otro ejemplo: la ecuación $(x - 3)(x - 5) = 0$ tiene las raíces $x = 3$ y $x = 5$, lo que resulta fácil comprobar. Pero si multi-

pliquemos ambos miembros por el factor fraccionario $\frac{1}{x-3}$, re-

sulta la nueva ecuación: $x-5=0$, cuya única raíz es $x=5$; vemos que ha desaparecido la raíz $x=3$ (o sea el valor de x que anula el denominador $x-3$).

Si el factor por el cual se multiplica es una expresión algebraica que no puede anularse, es natural que no se introducen raíces al multiplicar los dos miembros de la ecuación por él. Por ejemplo, si los factores son:

$$(1+x^2); (-3-x^2-y^2); [2+(x-3)^2]$$

130. Como consecuencia de la Nota anterior, tenemos:

Cuando se eleva al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación que admite todas las soluciones de la ecuación dada, pero que, en general, no le es equivalente.

EJEMPLO. — Sea la ecuación: $3-x=\sqrt{x-3}$

Elevando al cuadrado los dos miembros, tenemos:

$$(3-x)^2 = x-3, \text{ de donde, } (3-x)^2 + (3-x) = 0$$

y sacando el factor común $(3-x)$, resulta:

$$(3-x)(3-x+1) = 0$$

que admite, evidentemente, las dos raíces $x=3$ y $x=4$. La primera verifica la ecuación primitiva, pero la segunda no.

131. Para resolver una **ecuación fraccionaria**, es necesario transformarla previamente en entera. Esto se logra multiplicando ambos miembros de la ecuación por el producto de los denominadores, o mejor aún, como lo indicamos en el (N.º 127), empleando el mínimo común múltiplo de los denominadores.

La multiplicación indicada puede introducir raíces extrañas (N.º 129); por tanto, es necesario tomar la precaución de ensayar todas las raíces de la nueva ecuación, sustituyéndolas en la ecuación dada y descartando las que no la satisfacen. Trataremos algunos ejemplos de ecuaciones fraccionarias en los próximos párrafos.

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

132. Grado de una ecuación entera. — Si en una ecuación eliminamos los denominadores (procediendo como lo indicamos en el párrafo N.º 121), efectuamos operaciones indicadas y trasponemos todos los términos al primer miembro, reducimos la ecuación a cero (N.º 124), es decir que la llevamos a la forma $A = 0$; si luego reducimos los términos semejantes, resulta para la expresión A un polinomio entero, cuyo grado con respecto a las incógnitas es el grado de la ecuación.

Los términos que no contienen la incógnita se llaman *términos independientes* o *términos de grado cero*.

EJEMPLO I. — La ecuación $3x + 2 = x^2 - 4x$ es de segundo grado, porque trasponiendo todos sus términos al primer miembro toma la forma equivalente: $-x^2 + 7x + 2 = 0$.

EJEMPLO II. — La ecuación $3(2x^2 - 1) = 2(3x^2 - x + 1)$ equivale a $6x^2 - 3 = 6x^2 - 2x + 2$.

Reduciendo la ecuación a cero, y simplificando, tenemos:

$$2x - 5 = 0$$

Tanto esta ecuación como la primitiva, son de primer grado, aunque aparentemente la ecuación dada parecía de segundo grado.

133. Regla para resolver una ecuación entera. — Como vimos, cualquier ecuación racional entera puede reducirse a la forma de un polinomio igualado a cero; si la ecuación es fraccionaria, también sabemos hacer depender su resolución de la de un polinomio entero (N.º 131). En este Capítulo nos ocuparemos solamente de la resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, es decir, de las que pueden llevarse a la forma tipo:

$$ax + b = 0$$

en la que x es la incógnita, a y b son cantidades conocidas.

Si trasponemos los términos conocidos al segundo miembro, la forma tipo anterior puede presentarse también así:

$$A x = B$$

siendo A y B cantidades conocidas.

Consideraremos primeramente un ejemplo. Sea la ecuación:

$$\frac{x-1}{4} + 3x = \frac{x+2}{8} + \frac{23}{4}$$

1.º *Eliminemos los denominadores:* Para ello calculamos el M. C. M. de los denominadores, que es 8; aplicando luego la regla del (N.º 127), obtenemos la ecuación equivalente:

$$(x-1) \cdot 2 + (3x) \cdot 8 = x + 2 + 23 \times 2$$

en la que efectuando operaciones indicadas, nos da

$$2x - 2 + 24x = x + 2 + 46$$

2.º *Pasemos los términos que contienen x al primer miembro, y los independientes al segundo;* en virtud del (N.º 123) obtenemos la ecuación equivalente:

$$2x + 24x - x = 2 + 46 + 2$$

3.º *Reduzcamos los términos semejantes:*

$$25x = 50$$

4.º *Dividamos los dos miembros por el coeficiente de la incógnita, que en este caso es 25, y obtenemos la ecuación equivalente:*

$$x = \frac{50}{25}, \quad \text{o sea,} \quad x = 2$$

La ecuación dada es equivalente a esta última, que tiene evidentemente la única solución: 2, que lo es también de la primera, en virtud de los Teoremas I y II aplicados en las transformaciones.

Si bien el estudiante ya se habrá dado cuenta de las diversas operaciones y de su orden conveniente en la resolución

de una ecuación de primer grado con una incógnita, estimamos oportuno resumirlas en la siguiente

REGLA. — Para **RESOLVER UNA ECUACIÓN ENTERA** de primer grado con una incógnita:

1.º Se eliminan denominadores si los hay, y se efectúan las operaciones indicadas.

2.º Se trasponen al primer miembro todos los términos que contienen la incógnita, y al segundo los términos independientes.

3.º Se reducen los términos semejantes en ambos miembros, sacando la incógnita como factor común.

4.º Se divide el segundo miembro por el coeficiente de la incógnita, siempre que este coeficiente no sea nulo; el cociente obtenido es la única raíz de la ecuación.

5.º Conviene verificar la raíz hallada sustituyendo su valor en los dos miembros de la ecuación dada, debiéndose obtener así una identidad.

134. Ejemplos. — Como aplicaciones de la Regla del (N.º 133), tenemos:

EJEMPLO I. — Resolvamos la ecuación fraccionaria

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{5}{8}$$

Eliminación de denominadores:

$$8(x-1) = 5(x-2)$$

Realización de operaciones indicadas:

$$8x - 8 = 5x - 10$$

Trasposición de términos:

$$8x - 5x = -10 + 8$$

Reducción de términos semejantes:

$$3x = -2$$

División por el coeficiente de la incógnita:

$$x = -\frac{2}{3}$$

Por tratarse de una ecuación fraccionaria, debe verificarse si este valor no anula algún denominador de la ecuación dada. Reemplaza-

zando $x = -\frac{2}{3}$ en el denominador, nos da: $-\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$, valor que, por ser diferente de cero, nos indica que puede admitirse la solución $-\frac{2}{3}$.

Verificación: Calculando el primer miembro, tenemos:

$$\frac{-\frac{2}{3} - 1}{-\frac{2}{3} - 2} = \frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{8}{3}} = \frac{5}{8}$$

valor éste, idéntico al segundo miembro de la ecuación dada; por tanto, queda verificada la raíz.

EJEMPLO II. — Resolvamos la ecuación

$$(x - 2)(8x - 3)(x + 4) = 0$$

Como el primer miembro es un producto indicado y el segundo miembro es nulo, todo valor de x que anule uno de los factores anulará el producto (A₁ N.º 75). Por consiguiente, la ecuación dada origina estas otras equivalentes:

$$x - 2 = 0, \quad 8x - 3 = 0, \quad x + 4 = 0$$

que resueltas nos dan:

$$x = 2, \quad x = \frac{3}{8}, \quad x = -4$$

EJEMPLO III. — Resolvamos la ecuación

$$(x - 2) \left[3 + \frac{1}{x - 2} \right] = 0$$

Por el criterio aplicado en el ejemplo anterior, la ecuación dada se desdobra en

$$x - 2 = 0, \quad 3 + \frac{1}{x - 2} = 0$$

La primera de estas dos ecuaciones tiene como única solución $x = 2$; pero este valor sustituido en la ecuación dada anula el denominador que en ella figura, y, por tanto, la fracción carece de sentido para ese valor; el número 2 no es, pues, raíz de la ecuación dada.

Resolvamos ahora la segunda ecuación: $3 + \frac{1}{x - 2} = 0$.

Eliminamos denominadores y efectuamos operaciones indicadas:

$$3x - 6 + 1 = 0$$

Trasponemos términos: $3x = 6 - 1$.

Reducimos términos semejantes: $3x = 5$.

Dividimos por el coeficiente de la incógnita, y obtenemos la única raíz: $x = 5/3$.

Este valor no anula el denominador de la fracción que figura en la ecuación dada; por consiguiente, es raíz de la misma.

Como ejercicio, dejamos la verificación para el estudiante.

135. Ecuaciones irracionales. — La resolución de una ecuación irracional requiere la transformación previa en entera. Para ello, si la ecuación contiene un solo radical, se aísla éste en uno de los miembros, transponiendo los otros términos al otro miembro, operación que se llama *aíslar el radical*. Luego se elevan los dos miembros a la potencia igual al índice del radical, con lo que se logra una ecuación que admite todas las soluciones de la ecuación propuesta, pero que, sin embargo, no le es equivalente (N.º 130).

En general, cuando se resuelve una ecuación entera obtenida mediante elevaciones a potencias, es necesario *verificar* si las raíces obtenidas satisfacen la ecuación propuesta, y conservar solamente aquellas que la satisfacen.

EJEMPLO I. — Sea la ecuación: $\sqrt{x+1} - 2 = 0$.

Aislando el radical, tenemos: $\sqrt{x+1} = 2$.

Elevando al cuadrado los dos miembros, resulta:

$$x + 1 = 4, \quad \text{de donde,} \quad x = 3$$

Este último valor satisface la ecuación dada; es, pues, la única solución de dicha ecuación.

EJEMPLO II. — La ecuación tratada en el Ejemplo del (N.º 130) nos da dos soluciones para la ecuación transformada: $x = 3$ y $x = 4$; pero sólo la primera satisface la ecuación dada, que era:

$$3 - x = \sqrt{x - 3}$$

136. Cuando la ecuación contiene *dos radicales cuadrados*, se aísla primeramente uno de ellos, y luego se elevan ambos miembros al cuadrado, obteniendo así una nueva ecuación con sólo un radical; se procede luego con ésta como indicamos en el párrafo anterior.

EJEMPLO. — Sea la ecuación: $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$.

Aislando el primer radical, y luego elevando al cuadrado, tenemos:

$$\sqrt{x+5} = 5 - \sqrt{x} \quad ; \quad x + 5 = 25 - 10\sqrt{x} + x$$

Reduciendo términos semejantes y simplificando: $\sqrt{x} = 2$.

Elevando al cuadrado, tenemos: $x = 4$, solución esta que verifica la ecuación dada.

137. Discusión de la ecuación de primer grado. — Después de realizadas las tres primeras operaciones indicadas en la Regla del (N.º 133), toda ecuación de primer grado con una incógnita se lleva a la forma tipo:

$$Ax = B \quad [1]$$

Si A es diferente de cero, podemos dividir los dos miembros por A , y tenemos:

$$x = \frac{B}{A} \quad [2]$$

El examen de los distintos casos que se pueden presentar, según los valores de A y de B , constituye la *discusión* de la ecuación [1].

1.º Si $A \neq 0$, la ecuación [1] es **determinada**. La única solución está dada por la expresión [2], que puede ser un número entero o fraccionario, positivo o negativo, y también nulo.

En efecto, el cociente entre dos números existe siempre y es único, si el divisor es diferente de cero.

Como caso particular, si $A \neq 0$ y $B = 0$, la solución es *nula*.

2.º Si $A = 0$ y $B \neq 0$, la ecuación [1] es **imposible**, es decir, no tiene **ninguna solución**.

En efecto, se tendría la ecuación: $0.x = B$, que, en virtud de la ley de la multiplicación por cero, no se satisface para ningún valor que se atribuya a x .

3.º Si $A = 0$ y $B = 0$, la ecuación [1] es **indeterminada**, es decir, admite **infinitas soluciones**.

En efecto, se tendría la ecuación: $0 \cdot x = 0$, que, en virtud de la ley de la multiplicación por cero, se satisface para cualquier valor que se atribuya a x .

Resumimos los resultados de la discusión en el siguiente cuadro:

DISCUSION DE LA ECUACION $Ax = B$		
Hipótesis	Solución	La ecuación es:
$A \neq 0$	única: $x = \frac{B}{A}$	determinada
$A = 0 \left\{ \begin{array}{l} B \neq 0 \\ B = 0 \end{array} \right.$	ninguna	imposible
	infinitas	indeterminada

EJEMPLO. — Sea la ecuación: $a(x - b) = b(a - x) - (a + b)x$. Efectuando operaciones indicadas, trasponiendo términos y reduciendo términos semejantes, resulta:

$$2(a + b)x = 2ab \quad [1]$$

de la que, si $(a + b)$ es diferente de cero, tenemos:

$$x = \frac{ab}{a + b} \quad [2]$$

Como ejercicio, verifique el estudiante esta raíz.

Discusión. — Obsérvese, primeramente, que si $a + b = 0$, es decir, si $a = -b$, no es posible el pasaje de la [1] a la [2], porque no es lícito dividir los dos miembros de una ecuación por una cantidad idénticamente nula.

Además, tenemos: Si $a + b \neq 0$, la ecuación dada admite la *sola* solución dada por la [2], solución que, como caso particular, será igual a cero si a o b son nulos.

Si $a + b = 0$, y $ab = 0$, condiciones que se verifican simultáneamente únicamente en el caso que se tenga $a = b = 0$, la ecuación es *indeterminada*.

Si $a + b = 0$, pero a y b son diferentes de cero, la ecuación es *imposible*.

Así, por ej., la ecuación propuesta admitirá una solución única, para los valores $a = -3$ y $b = 6$. Expresa el estudiante la ecuación y la raíz en este caso.

Propiedades de las desigualdades

138. En el primer curso (A_1 , N.^{os} 10 y 11) ya enunciamos algunas propiedades de las desigualdades entre *números absolutos*, así como el Postulado correspondiente, que se expresa así: *Efectuando con los dos miembros de una desigualdad una determinada operación con un número, se obtiene otra desigualdad en el mismo sentido que la primera.*

En los (N.^{os} 11 al 13), tratamos también de la desigualdad de *números relativos* y algunas propiedades; ampliaremos, ahora, el estudio de estas últimas.

139. Desigualdades equivalentes. — Dos desigualdades se llaman *equivalentes* cuando, verificándose una de ellas, se verifica también la otra.

Téngase presente que, si una desigualdad es literal, para verificar su equivalencia con otra, será necesario constatar que, para todos los valores de las letras para los cuales resulta verdadera una de las desigualdades, también lo es la otra, y recíprocamente.

140. TEOREMA I. — Son EQUIVALENTES las desigualdades:

$$a > b \quad \text{y} \quad a - b > 0.$$

Análogamente, $a < b$ equivale a $a - b < 0$.

En efecto, suponer $a > b$ equivale decir que el número a se encuentra a la derecha de b en la representación de los números reales sobre una recta (N.^o 11); significa, pues, que existe un número positivo c que sumado con b da a , lo que puede escribirse así: $b + c = a$, y, por consiguiente, $a - b = c$. Puesto que c es positivo, esta igualdad equivale a la desigualdad $a - b > 0$.

Se demuestra en forma análoga que, si $a < b$, se tiene $a - b < 0$.

141. TEOREMA II. — Se pueden INVERTIR LOS DOS MIEMBROS de una desigualdad, siempre que se cambie su sentido (es decir, que se cambie el signo $>$ por el $<$).

Significa, pues, que son equivalentes las desigualdades:

$$a > b, \quad \text{y} \quad b < a.$$

En efecto, siendo $a > b$, en virtud del Teorema I que antecede, tenemos: $a - b > 0$, y por consiguiente, $b - a < 0$, o sea, $b < a$.

Este Teorema se llama, también, *Principio de equivalencia*.

142. TEOREMA III. — Se puede SUMAR o RESTAR a los dos miembros de una desigualdad un mismo número, sin que ésta cambie de sentido.

Significa que, si

$$a > b, \quad \text{tenemos:} \quad a \pm m > b \pm m$$

siendo m un número relativo cualquiera.

En efecto, fácilmente se verifica la identidad:

$$a - b = (a + m) - (b + m)$$

que nos justifica que la expresión $a - b$ tiene el mismo signo que $(a + m) - (b + m)$, y recíprocamente.

Así, por ej., si

$$a - b > 0, \quad \text{tendremos:} \quad (a + m) - (b + m) > 0$$

es decir que, si

$$a > b, \quad \text{tenemos:} \quad a + m > b + m$$

Sólo hicimos el razonamiento para el caso de la suma, puesto que restar un número equivale a sumar el opuesto (A_2 N.º 236).

EJEMPLOS: 1.º Siendo $+2 > -5$, tenemos:

$$+2 - 6 > -5 - 6, \quad \text{o sea,} \quad -4 > -11.$$

2.º Siendo $-7 < -1$, tenemos

$$-7 + 3 < -1 + 3, \quad \text{o sea,} \quad -4 < +2.$$

143. **TEOREMA IV.** — Se pueden **SUMAR** ordenadamente varias **DESIGUALDADES** que tienen el **MISMO SENTIDO**, que se obtiene otra desigualdad de igual sentido de aquéllas.

Significa, por ejemplo, que si

$$a > b, \quad c > d, \quad e > f,$$

tenemos:

$$a + c + e > b + d + f$$

En efecto, resultando por hipótesis *positivos* los números $(a-b)$, $(c-d)$, $(e-f)$, su suma es, por consiguiente, *positiva*. Pero esa suma puede escribirse así:

$$(a-b) + (c-d) + (e-f) = (a+c+e) - (b+d+f)$$

Siendo, pues, esta última diferencia *positiva*, en virtud del Teorema I, tenemos:

$$a + c + e > b + d + f$$

EJEMPLO.—Siendo, $+2 > 0$; $-3 > -4$; $+5 > -1$; $+8 > +7$, tenemos:

$$+2 - 3 + 5 + 8 > 0 - 4 - 1 + 7, \text{ o sea, } +12 > +2$$

144. **TEOREMA V.** — Se pueden **MULTIPLICAR** los dos miembros de una desigualdad por un mismo número, que se obtiene otra desigualdad: del **MISMO SENTIDO** si el factor es **POSITIVO**, o de **SENTIDO CONTRARIO** si el factor es **NEGATIVO**.

Significa que, verificándose la desigualdad: $a > b$

y siendo m un número *positivo*, tenemos: $am > bm$

Si m es *negativo*, tenemos: $am < bm$

En efecto, en virtud de la propiedad distributiva de la multiplicación (A_2 N.º 249), tenemos la identidad:

$$(a-b)m = am - bm$$

Como por hipótesis resulta positivo el número $(a-b)$, si m es un número *positivo*, el producto $(a-b)m$ también

será positivo (A_2 N.º 243), y, en consecuencia, la identidad que antecede nos justifica que el número $(am - bm)$ es positivo; tenemos, pues:

$$am - bm > 0, \text{ o sea, } am > bm$$

Si m es *negativo*, el producto $(a-b)m$ será negativo (A_2 N.º 243), y aquella identidad nos justifica que el número $(am - bm)$ es negativo; tenemos, pues:

$$am - bm < 0, \text{ o sea, } am < bm$$

EJEMPLOS. — Sea la desigualdad, $-3 > -7$.

1.º Multiplicando por $+5$, tenemos: $-15 > -35$.

2.º Multiplicando por -5 , tenemos: $+15 < +35$.

145. COROLARIO I. — Si se **CAMBIA DE SIGNO** a los dos miembros de una desigualdad, ésta cambia de sentido.

En efecto, cambiar de signo a los dos miembros de una desigualdad, equivale a multiplicarlos por -1 .

EJEMPLOS: 1.º Siendo $+6 > -8$, tenemos: $-6 < +8$.

2.º Siendo $+1/2 < +5$, tenemos: $-1/2 > -5$.

146. COROLARIO II. — Se pueden **DIVIDIR** los dos miembros de una desigualdad por un mismo número, que se obtiene otra desigualdad: de **IGUAL SENTIDO** si el divisor es **POSITIVO**, o de **SENTIDO CONTRARIO** si el divisor es **NEGATIVO**.

En efecto, dividir por un número equivale a multiplicar por su inverso (o recíproco), que es de igual signo que dicho número.

EJEMPLOS: Sea la desigualdad, $-14 < +8$

1.º Dividiendo por $+2$, tenemos: $-7 < +4$

2.º Dividiendo por -2 , tenemos: $+7 > -4$

147. TEOREMA VI. — Se pueden **RESTAR** ordenadamente dos desigualdades que tienen **SENTIDO CONTRARIO**, que se obtiene otra desigualdad de igual sentido que el minuendo.

Significa, por ej., que si

$$a > b \quad \text{y} \quad c < d, \quad \text{tenemos:} \quad a - c > b - d$$

En efecto, cambiando de signo a los dos miembros de la segunda desigualdad dada, en virtud del (N.º 145), tenemos:

$$-c > -d$$

Sumando ordenadamente la primera de las desigualdades dadas con esta última (N.º 143), resulta:

$$a - c > b - d$$

EJEMPLOS: 1.º Siendo $+5 > +4$, y $+3 < +9$, tenemos:

$$+5 - 3 > +4 - 9, \quad \text{o sea,} \quad +2 > -5$$

2.º Siendo $-3 < -1$, y $+2 > -5$, tenemos:

$$-3 - 2 < -1 + 5, \quad \text{o sea,} \quad -5 < +4$$

148. TEOREMA VII. — Se pueden **MULTIPLICAR** ordenadamente dos desigualdades que tienen el **MISMO SENTIDO** y tales que el **PRIMER MIEMBRO** de una sea del **MISMO SIGNO** que el **SEGUNDO MIEMBRO** de la otra, que se obtiene otra desigualdad: del **MISMO SENTIDO** si el signo común es **POSITIVO**, o de **SENTIDO CONTRARIO** si dicho signo común es **NEGATIVO**.

Significa que dadas las desigualdades:

$$a > b \quad \text{y} \quad c > d$$

1.º Si a y d son *positivos*, tenemos:

$$ac > bd$$

2.º Si a y d son *negativos*, tenemos:

$$ac < bd$$

En efecto, en el primer caso, si a y d son ambos *positivos*, multiplicando por a los dos miembros de la desigualdad

$c > d$, y por d los dos miembros de la desigualdad $a > b$, en virtud del (N.º 144), tenemos:

$$ac > ad \quad \text{y} \quad ad > bd$$

que, en virtud de la propiedad transitiva de las desigualdades (N.º 13), nos dan esta otra:

$$ac > bd$$

Si a y d son ambos *negativos*, las mismas multiplicaciones invierten los sentidos de las desigualdades (N.º 145), y tenemos:

$$ac < ad \quad \text{y} \quad ad < bd, \text{ de donde, } ac < bd$$

EJEMPLOS: 1.º Siendo $+5 > -2$ y $+8 > +3$, tenemos:

$$(+5)(+8) > (-2)(+3), \text{ o sea, } +40 > -6$$

2.º Siendo $-7 > -9$ y $+2 > -2$, tenemos:

$$(-7)(+2) < (-9)(-2), \text{ o sea, } -14 < +18$$

149. TEOREMA VIII. — Se pueden ELEVARE AL CUADRADO los dos miembros de una desigualdad, que se obtiene otra desigualdad: del MISMO SENTIDO si el signo común de los dos miembros de la desigualdad dada es POSITIVO, o de SENTIDO CONTRARIO si dicho signo común es NEGATIVO.

Significa que, verificándose la desigualdad: $a > b$

1.º Si a y b son números *positivos*, tenemos: $a^2 > b^2$

2.º Si a y b son ambos *negativos*, tenemos: $a^2 < b^2$

En efecto, elevar al cuadrado los dos miembros de la desigualdad dada, equivale a multiplicar ordenadamente las dos desigualdades siguientes:

$$a > b \quad \text{y} \quad a > b$$

Aplicando a este producto el teorema anterior (N.º 148), resulta demostrado, pues, este teorema.

EJEMPLOS: 1.º Siendo $+8 > +5$, elevando ambos miembros al cuadrado, tenemos: $+64 > +25$.

2.º Siendo $-3 < -2$, elevando ambos miembros al cuadrado, tenemos: $+9 > +4$.

150. TEOREMA IX. — Se pueden sustituir los dos miembros de una desigualdad por sus respectivos **RECÍPROCOS**, que se obtiene otra desigualdad: de **SENTIDO CONTRARIO** si los dos miembros de la desigualdad dada son del **MISMO SIGNO**, o de **IGUAL SENTIDO** si dichos dos miembros son de **SIGNOS CONTRARIOS**.

Significa que, verificándose la desigualdad: $a > b$

1.° Si a y b son del mismo signo, tenemos: $1:a < 1:b$.

2.° Si a y b son de signos contrarios, $1:a > 1:b$.

En efecto, si a y b son del mismo signo, el producto ab es positivo, y, dividiendo la desigualdad $a > b$ por ab , en virtud del (N.° 146), tenemos:

$$a:(ab) > b:(ab)$$

y simplificando,

$$1:b > 1:a, \text{ o sea, } 1:a < 1:b$$

En el segundo caso, si a y b son de signos contrarios, el producto ab es negativo, y procediendo con la desigualdad $a > b$ como en el caso anterior, tenemos:

$$a:(ab) < b:(ab)$$

de donde,

$$1:b < 1:a, \text{ o sea, } 1:a > 1:b$$

EJEMPLOS: 1.° Siendo $-3 > -5$, tenemos: $-1/3 < -1/5$

2.° Siendo, $+3 > -7$, tenemos: $+1/3 > -1/7$

3.° Siendo, $-4 < +1$, tenemos: $-1/4 < +1$

151. TEOREMA X. — Se pueden **DIVIDIR** ordenadamente dos desigualdades que tienen **SENTIDO CONTRARIO** siendo los dos miembros de la desigualdad divisora del mismo signo y no nulos, que se obtiene otra desigualdad: del **MISMO SENTIDO** que la desigualdad dividiendo si el signo común del **PRIMER MIEMBRO** de esta última y del segundo miembro de la desigualdad divisora es **POSITIVO**, o de **SENTIDO CONTRARIO** si dicho signo común es **NEGATIVO**.

Significa, por ej., que verificándose las desigualdades:

$$a > b \quad \text{y} \quad c < d$$

y siendo c y d del mismo signo y diferentes de cero:

1.º Si a y d son números positivos, tenemos:

$$a:c > b:d$$

2.º Si a y d son ambos negativos, tenemos:

$$a:c < b:d$$

En efecto, siendo por hipótesis c y d del mismo signo, la desigualdad $c < d$ nos da, en virtud del (N.º 150):

$$1:c > 1:d$$

Multiplicando ordenadamente esta última desigualdad por la dada, $a > b$, para lo cual aplicamos el (N.º 148), obtenemos los resultados enunciados.

EJEMPLOS: 1.º Siendo $+6 > -8$ y $+2 < +4$, tenemos:

$$(+6):(+2) > (-8):(+4), \text{ o sea, } +3 > -2$$

2.º Siendo $-6 > -12$ y $-\frac{3}{4} < -\frac{1}{2}$, tenemos:

$$(-6):(-\frac{3}{4}) < (-12):(-\frac{1}{2}), \text{ o sea, } +8 < +24$$

152. NOTA. — En casos de multiplicación o de división de desigualdades diferentes a las tratadas en los teoremas que anteceden, no es posible afirmar nada, *a priori*.

Desigualdades de primer grado

153. Inecuaciones. — Así como las igualdades se distinguen en identidades y ecuaciones, las desigualdades también se distinguen en aquellas que se satisfacen para cualquier valor atribuido a sus letras, y las que se satisfacen únicamente para ciertos valores de las letras, llamadas incógnitas. Distinguiremos estas últimas desigualdades con la denominación de *desigualdades condicionales* o *inecuaciones*. Podemos dar, pues, la siguiente

DEFINICIÓN. — Se llama **INECUACIÓN** a una desigualdad que únicamente se verifica para ciertos valores convenientemente elegidos de sus letras, llamadas “incógnitas”.

154. *Resolver* una inecuación, significa operar convenientemente con ella, hasta hallar cuáles son los valores que debemos atribuir a las incógnitas, para que la inecuación se transforme en una desigualdad en el mismo sentido, valores que llamamos *soluciones* de la inecuación.

Así, por ejemplo, es una inecuación:

$$x + 2 > 3$$

porque ella se verifica únicamente cuando atribuimos a la incógnita x valores mayores que 1. Las soluciones de la inecuación anterior son, por consiguiente, los valores de x que satisfacen la condición $x > 1$; nótese que existe, pues, en general, un número *ilimitado* de esos valores.

Podemos decir que las soluciones de una inecuación son cantidades *variables*, pero cuya variación está limitada por un *confín*, ya sea superior o inferior. En el ejemplo anterior, tendríamos el confín inferior $x = 1$.

155. Equivalencia de inecuaciones. — Como definimos la equivalencia de desigualdades (N.º 139), podemos decir, también, que dos inecuaciones se llaman *equivalentes*, cuando admiten las mismas soluciones; es decir, cuando toda solución de una de ellas es también solución de la otra, y recíprocamente.

Para las inecuaciones, podemos establecer principios generales análogos a los establecidos para la resolución de ecuaciones (N.ºs 120 a 134).

TEOREMA I. — **Se puede SUMAR o RESTAR a los dos miembros de una inecuación una misma cantidad, que se obtiene una inecuación equivalente.**

Significa que, son equivalentes las inecuaciones:

$$A > B \quad \text{y} \quad A + M > B + M$$

en las que A y B son expresiones que contienen las incógnitas.

En efecto, según el Teorema del (N.º 142), podemos sumar o restar un mismo número a los dos miembros de una des-

igualdad entre números; en consecuencia, si para ciertos valores de las incógnitas, tenemos:

$$\text{valor de } A > \text{valor de } B$$

resulta, evidentemente,

$$\text{valor de } A + \text{valor de } M > \text{valor de } B + \text{valor de } M$$

y recíprocamente.

EJEMPLO. — Dada la inecuación: $2x - 3 > x$, son equivalentes a ella, las dos inecuaciones

$$2x - 3 + 5 > x + 5 ; \quad 2x - 3 - x^2 > x - x^2$$

156. Procediendo en forma análoga, pero aplicando el Teorema y Corolario de los (N.^{os} 144 y 146), se llega al siguiente

TEOREMA II. — Se pueden **MULTIPLICAR** o **DIVIDIR** los dos miembros de una inecuación por un mismo número **POSITIVO** que se obtiene una inecuación equivalente; si se multiplica o divide por un número **NEGATIVO**, será necesario **CAMBIAR EL SENTIDO** de la inecuación para que resulte equivalente.

157. NOTA. — El teorema anterior ha sido enunciado para el caso que M sea un número, es decir, que tenga un signo *invariable*, ya sea positivo o negativo. Se comprende fácilmente que el enunciado sería válido, también, para el caso que M fuera una cantidad dependiente de la incógnita, pero de *signo invariable*. Así, por ej., podemos multiplicar los dos miembros de una inecuación por una suma de cuadrados ($x^2 + 5$); o por un cuadrado perfecto ($x^2 - 2x + 1$), etc., porque son estas cantidades positivas para cualquier valor real de x .

EJEMPLOS: Dada la inecuación $3x < 2x + 5$, son equivalentes a ella las tres inecuaciones siguientes:

$$(3x) 4 < (2x + 5) 4, \text{ o sea, } 12x < 8x + 20$$

$$(3x) : (-4) > (2x + 5) : (-4), \text{ o sea, } -\frac{3}{4}x > -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

$$(3x)(x^2) < (2x + 5)x^2, \text{ o sea } 3x^3 < 2x^3 + 5x^2$$

158. Resolución de inecuaciones. — Los teoremas que anteceden nos permiten operar con las inecuaciones, como lo hicimos con las ecuaciones (N.^o 123 y siguientes), es decir:

1.^o *Podemos dar a una inecuación la forma $A > 0$.*

En caso que A nos resulte un polinomio entero con relación a las incógnitas, el grado de ese polinomio es lo que se llama *grado de la inecuación*.

En este curso, sólo trataremos de las inecuaciones de primer grado.

2.^o *Podemos trasponer un término de un miembro a otro de una inecuación.*

3.^o *En una inecuación entera, de coeficientes fraccionarios, podemos eliminar los denominadores, multiplicando los dos miembros por el denominador común de los coeficientes. Téngase presente que en caso de ser negativo dicho multiplicador, será necesario cambiar el sentido de la inecuación.*

De lo que antecede vemos, pues, que una inecuación de primer grado con una incógnita, puede llevarse a la forma tipo:

$$ax + b > 0$$

en la que x es la incógnita, a y b son cantidades conocidas.

Si trasponemos los términos conocidos al segundo miembro, la forma tipo anterior puede presentarse también así:

$$Ax > B$$

siendo A y B cantidades conocidas.

1.^o Si A es *positivo*, dividiendo por A ambos miembros se obtiene la inecuación equivalente

$$x > \frac{B}{A}$$

que es también la solución de la inecuación dada.

2.° Si A es *negativo*, al dividir por A es necesario cambiar de sentido a la inecuación, obteniendo entonces esta otra equivalente:

$$x < \frac{B}{A}$$

que es también solución de la inecuación dada.

En resumen, tenemos:

La inecuación $Ax > B$ tiene un número ilimitado de soluciones, que son todos los valores de x mayores que B/A , si $A > 0$, o todos los menores que B/A , si $A < 0$.

EJEMPLO. — Resolver la inecuación

$$\frac{2x-8}{4} > \frac{6x-1}{2} + 6$$

Eliminación de denominadores:

$$2x - 8 > 12x - 2 + 24$$

Trasposición de términos:

$$2x - 12x > -2 + 24 + 8$$

Reducción de términos semejantes:

$$-10x > 30$$

Dividiendo por el número negativo -10 , cambiaremos entonces de sentido a la inecuación, y obtenemos:

$$x < -\frac{30}{10} \quad \text{o bien,} \quad x < -3$$

159. Gráficas de inecuaciones. — Cuando una misma variable debe satisfacer simultáneamente varias condiciones, para deducir fácilmente los resultados, resulta cómodo marcar sobre una recta las distintas condiciones. Los trozos de recta en los cuales se verifican todas las condiciones simultáneamente, serán aquellos en los cuales deberán tomarse los valores de la variable.

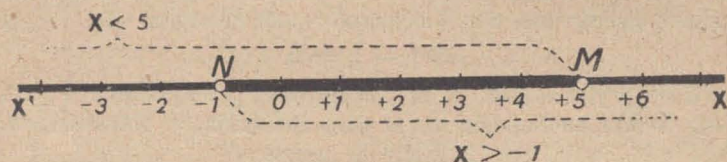
Así, por ejemplo, busquemos para qué valores de x se satisfacen simultáneamente las inecuaciones:

$$2x - 5 < x, \quad \frac{1}{3}x < \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$$

Resolviendo la primera, obtenemos: $x < 5$

“ “ segunda, “ “ $x > -1$

Representemos sobre un eje orientado $x'x$ (fig. 4), los números reales: $\dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots +5, \dots$



(fig. 4)

Los valores de x que satisfacen la primera inecuación, es decir, $x < 5$, se encontrarán a la izquierda del punto M , es decir, sobre la semirrecta Mx' .

Los valores de x que satisfacen la segunda inecuación, es decir, $x > -1$, se encontrarán a la derecha del punto N , es decir, sobre la semirrecta Nx .

En consecuencia, los valores de x que satisfacen a ambas condiciones simultáneamente, que podríamos llamar las soluciones comunes de las inecuaciones dadas, serían los valores comprendidos entre -1 y $+5$, es decir, correspondientes a los puntos del segmento de recta MN , excluyendo los extremos. Podemos decir, también, que estos valores de x deben satisfacer la condición:

$$-1 < x < +5$$

160. Si bien, en general, una inecuación tiene un número ilimitado de soluciones, puede suceder que las condiciones particulares impuestas a la variable, limiten su número.

Así, por ejemplo, si en el caso tratado en el párrafo anterior, se impone además la condición que los valores de x deban ser enteros, las únicas soluciones son: $0, 1, 2, 3$ y 4 .

CAPÍTULO V

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

161. Generalidades. — Consideremos una ecuación de primer grado con dos incógnitas; por ejemplo,

$$3x - y = 5$$

Si despejamos una de las incógnitas, por ejemplo, y , resultará ésta en función de la otra incógnita, y obtendremos:

$$y = 3x - 5$$

Demos ahora valores arbitrarios a x , y calculemos los valores correspondientes de y :

para $x = 0$	resulta $y = -5$
" $x = 2$	" $y = 1$
" $x = 3$	" $y = 4$
" $x = 5$	" $y = 10$

.....

Estos pares de valores de x y de y , que verifican la ecuación dada, son, pues, soluciones de la misma. Vemos, pues, que:

Una ecuación aislada con dos incógnitas tiene infinidad de soluciones.

Tomemos otra ecuación, por ej., $5x + 2y = 23$.

Considerada aisladamente, también tiene infinidad de soluciones; procediendo con ella como con la primera ecuación, tendremos:

para $x = 0$	resulta $y = \frac{23}{2}$
" $x = 2$	" $y = \frac{13}{2}$
" $x = 3$	" $y = 4$
" $x = 5$	" $y = -1$

.....

Si comparamos estos pares de valores de x y de y con los que obtuvimos de la primera ecuación, vemos que existe *un par* de valores, $x=3$, $y=4$, que satisface a ambas ecuaciones.

Decimos que aquellas dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$$

forman un *sistema*, siendo el grupo de valores $x=3$, $y=4$, la *solución del sistema*.

162. En *general*, aun considerando más de dos ecuaciones, podemos dar la siguiente

DEFINICIÓN. — Se llama **SISTEMA DE ECUACIONES** a un grupo de ecuaciones que debe satisfacerse para un mismo grupo de valores de las incógnitas.

Cada grupo de valores que satisface todas las ecuaciones se llama **una solución** del sistema.

Resolver un sistema significa determinar las soluciones.

Sistemas equivalentes

163. Lo mismo que al tratar la equivalencia de ecuaciones con una incógnita (N.º 119), daremos la siguiente

DEFINICIÓN. — Dos sistemas de ecuaciones se llaman **EQUIVALENTES** cuando tienen las mismas soluciones; es decir, cuando todo grupo de soluciones de uno de los sistemas verifica al otro, y recíprocamente.

Como veremos más adelante, la resolución de un sistema de ecuaciones se reduce, finalmente, a la resolución de una ecuación con una incógnita, obtenida mediante transformaciones convenientes de las ecuaciones del sistema. Las transformaciones deben ser tales, que no alteren las soluciones del sistema, es decir, que se obtengan sistemas equivalentes; para ello emplearemos las transformaciones tratadas en el

Capítulo anterior que, al obtener con ellas ecuaciones equivalentes, es decir, no alterando las soluciones de las ecuaciones dadas, no alterarán tampoco las soluciones del sistema.

Podemos enunciar, pues, el siguiente

TEOREMA. — **Si una o más ecuaciones de un sistema se sustituyen por ecuaciones equivalentes, se obtiene un sistema equivalente.**

Es evidente, también, que

Dos sistemas equivalentes a un tercero, son equivalentes entre sí.

164. Un sistema de ecuaciones puede constar de cualquier número de ellas, de diferentes grados, y puede contener varias incógnitas.

Un sistema se llama de **primer grado** si todas las ecuaciones que lo forman son de primer grado.

En este curso sólo corresponde tratar los sistemas de primer grado. Primeramente trataremos de los sistemas de *dos ecuaciones con dos incógnitas*; al final del Capítulo trataremos de los sistemas con *más de dos incógnitas*.

Métodos de resolución por sustitución, por reducción, por igualación y por la regla de Cramer

165. Mediante las transformaciones indicadas en el Capítulo anterior, es decir: eliminando denominadores, efectuando operaciones indicadas, trasponiendo los términos que contienen la incógnita al primer miembro y los términos conocidos al segundo, y reduciendo los términos semejantes, llevamos el sistema a la forma tipo:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Partiremos de esta forma en los ejemplos que veremos a continuación.

166. Método de sustitución. — Sean, por ejemplo, las ecuaciones ya citadas en el (N.º 161):

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 5 \end{array} \right. \quad [1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 23 \end{array} \right. \quad [2]$$

Despejando y en la [1], resulta la ecuación equivalente.

$$y = 3x - 5 \quad [1']$$

Pero como este valor debe satisfacer también la [2], sustituyéndolo en ella tendremos:

$$5x + 2(3x - 5) = 23 \quad [2']$$

El sistema [1], [2], se transforma, pues, en el sistema equivalente [1'], [2']; pero la ecuación [2'] es de primer grado y con una incógnita, de manera que, resolviéndola como se explicó en el Capítulo anterior, obtenemos, sucesivamente:

$$5x + 6x - 10 = 23$$

$$11x = 33, \text{ de donde, } x = 3$$

Es decir, que ya hemos hallado el valor de una de las incógnitas.

Sustituyendo este valor $x = 3$ en la ecuación [1'] tendremos el valor correspondiente de la otra incógnita que es:

$$y = 3 \times 3 - 5 = 9 - 5 = 4$$

La única solución del sistema es, pues,

$$\boxed{x = 3, \quad y = 4}$$

Como ejercicio, *verifique* el estudiante esta solución, sustituyendo los valores hallados en las ecuaciones primitivas, cada una de ellas originará una identidad.

Resumimos el método seguido en la siguiente

REGLA. — Para resolver por el **MÉTODO DE SUSTITUCIÓN** un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, x e y :

1.º Se considera como conocida, en una de las ecuaciones una de las incógnitas; sea, por ejemplo, x , y se despeja la otra incógnita y , cuyo valor dependerá de x .

2.º La expresión que se obtiene para y se sustituye en la otra ecuación, transformándola así en una ecuación que sólo contiene la incógnita x ; resuelta ésta, nos da el valor de la incógnita que habíamos supuesto conocida.

3.º Se sustituye el valor de x en la expresión de y , obteniendo así una ecuación que sólo contiene la incógnita y , de la que se despeja ésta.

El método se llama de *sustitución*, en virtud de las *sustituciones* que se realizan durante su aplicación.

EJEMPLO. — Sea el sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2y = 5 & [1] \\ 4x + 3y = \frac{1}{2} & [2] \end{cases}$$

Despejando x de la [1] tenemos:

$$x = 6y + 15 \quad [3]$$

Sustituyendo este valor en la [2] obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned} 4(6y + 15) + 3y &= \frac{1}{2} \\ 48y + 120 + 3y &= 1 \end{aligned}$$

$$54y = -119$$

$$y = -\frac{119}{54}$$

Sustituyendo este último valor en la expresión [3], tenemos:

$$x = 6\left(-\frac{119}{54}\right) + 15 = \frac{16}{9}$$

La solución del sistema es, pues:

$$y = -\frac{119}{54}, \quad x = \frac{16}{9}$$

Verificación: para la ecuación [1] tenemos:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{16}{9}\right) - 2\left(-\frac{119}{54}\right) = \frac{16}{27} + \frac{119}{27} = \frac{135}{27} = 5$$

Para la ecuación [2] tenemos:

$$4\left(\frac{16}{9}\right) + 3\left(-\frac{119}{54}\right) = \frac{64}{9} - \frac{119}{18} = \frac{128}{18} - \frac{119}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

167. Método de igualación. — Sea, por ej., el sistema ya tratado en el párrafo anterior:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 & [1] \\ 5x + 2y = 23 & [2] \end{cases}$$

Suponiendo conocido el valor de x en ambas ecuaciones y despejando el valor de y , tenemos:

De la ecuación [1]: $y = 3x - 5$

De la ecuación [2]: $y = -\frac{5}{2}x + \frac{23}{2}$

Igualando estas dos expresiones de y , obtenemos una ecuación de primer grado que sólo contiene una incógnita:

$$3x - 5 = -\frac{5}{2}x + \frac{23}{2}$$

y transformándola:

$$6x - 10 = -5x + 23 \therefore 6x + 5x = 23 + 10$$

$$11x = 33, \text{ de donde, } \boxed{x = 3}$$

Para calcular x , suponemos conocido el valor de y en ambas ecuaciones y despejamos el valor de x , procediendo luego como antes.

De la [1] tenemos: $x = \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}$

De la [2] tenemos $x = -\frac{2}{5}y + \frac{23}{5}$

Igualando estas dos expresiones de x , resulta:

$$\frac{1}{3}y + \frac{5}{3} = -\frac{2}{5}y + \frac{23}{5}$$

$$5y + 25 = -6y + 69 \therefore 5y + 6y = 69 - 25$$

$$11y = 44, \text{ de donde, } \boxed{y = 4}$$

Como en el método anterior, conviene verificar las raíces halladas.

Resumimos el método seguido en la siguiente

REGLA. — Para resolver por el **MÉTODO DE IGUALACIÓN** un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

1.º Se despeja una misma incógnita en cada una de las ecuaciones dadas, suponiendo conocido el valor de la otra.

2.º Se igualan las expresiones de la incógnita despejada, obteniendo así una ecuación de primer grado con una sola incógnita, de la que se despeja ésta.

3.º Se repite el procedimiento para el cálculo del valor de la otra incógnita, pero invirtiendo en el proceso los papeles de las incógnitas.

168. El método de igualación, que también se llama de *comparación*, generalmente no tiene ventaja sobre el primero, y, por consiguiente, poco se usa.

NOTA PRÁCTICA. — Puede emplearse con ventaja el método de igualación, combinándolo con el de sustitución. Para ello se empieza por calcular una de las incógnitas por el método de igualación; su valor así calculado se sustituye en una de las ecuaciones dadas, obteniendo así una ecuación que sólo contiene la otra incógnita, de la que se despeja esta incógnita.

EJEMPLO. — En el ejemplo tratado en el (N.º 167) o sea, en la resolución del sistema

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$$

se calculó primeramente la incógnita $x=3$ por el método de igualación. Si ahora sustituimos este valor en una cualquiera de las ecuaciones dadas, por ejemplo en la primera, tenemos:

$$3 \times 3 - y = 5 \therefore y = 9 - 5, \text{ o sea, } y = 4$$

169. Método de reducción. — Tratemos nuevamente el sistema del párrafo anterior:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 & [1] \\ 5x + 2y = 23 & [2] \end{cases}$$

Transformemos las ecuaciones de manera que resulten iguales los valores absolutos de los coeficientes de una misma incógnita, por ejemplo, los de y .

Para ello, se multiplican los dos miembros de cada ecuación por el valor absoluto del coeficiente de y en la otra.

En el sistema propuesto, bastará multiplicar por 2 la ecuación [1], obteniendo el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 6x - 2y = 10 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$$

Si *sumamos* miembro a miembro las dos últimas ecuaciones (N.º 121), se *eliminan* así los términos opuestos ($-2y$), ($+2y$), resultando la ecuación en x :

$$6x + 5x = 10 + 23$$

ya obtenida en el método anterior (N.º 167). Resolviendo esta ecuación, hallamos:

$$\boxed{x = 3}$$

Para calcular la otra incógnita, es decir, y , igualemos los valores absolutos de los coeficientes de x ; para ello se multiplica por 5 la ecuación [1], y por 3 la ecuación [2], obteniendo:

$$\begin{cases} 15x - 5y = 25 \\ 15x + 6y = 69 \end{cases}$$

Si *restamos* ordenadamente estas dos ecuaciones, se eliminan así los términos opuestos $(+15x)$ y $(-15x)$, obteniendo la ecuación en y :

$$-11y = -44, \text{ de donde, } \boxed{y = 4}$$

En este caso se ha *restado*, porque los coeficientes de la incógnita que eliminamos son del *mismo signo*.

Como en unos casos hay que *sumar* y en otros *restar*, el método empleado se llama, también, de *sumas y restas*.

Resumimos el método en la siguiente

REGLA. — Para resolver por el **MÉTODO DE REDUCCIÓN** un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

1.º Se multiplican los dos miembros de las ecuaciones por números convenientes para igualar en valor absoluto los coeficientes de una misma incógnita.

2.º Se suman o restan miembro a miembro las ecuaciones para eliminar dicha incógnita, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita, de la que se despeja ésta.

3.º Se repite el procedimiento para el cálculo del valor de la otra incógnita, pero invirtiendo en el proceso los papeles de las incógnitas.

170. NOTAS PRÁCTICAS. — 1.ª Como lo indicamos en el método anterior (N.º 169), puede resultar ventajoso el empleo del método de reducción combinado con el de sustitución; a continuación trataremos un ejemplo.

EJEMPLO. — Sea el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 21 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Para igualar los coeficientes de x multiplicamos por 3 la primera ecuación, y por 4 la segunda. Indiquemos primeramente las operaciones y luego efectuémoslas:

$$\begin{array}{rcl} 3) & 4x + 5y = 21 & \\ 4) & 3x + 2y = 7 & \\ & \hline & 12x + 15y = 63 & \\ & 12x + 8y = 28 & \\ & \hline & 7y = 35 & \end{array}$$

Restando:

$$\text{de donde, } y = 35/7, \quad \text{o sea, } y = 5$$

Sustituyendo este valor $y = 5$ en la segunda de las ecuaciones dadas, resulta:

$$3x + 2 \times 5 = 7$$

$$\text{de donde, } 3x = 7 - 10; \quad 3x = -3 \therefore x = -1$$

La solución del sistema es:

$$\boxed{x = -1}, \quad \boxed{y = 5}$$

2.^a No siempre es necesario multiplicar cada ecuación por el coeficiente que tiene en la otra, la incógnita que se desea eliminar; lo veremos en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO. — Sea el sistema

$$\begin{cases} 10x - 3y = -5 \\ 15x - 8y = 10 \end{cases}$$

Para eliminar la incógnita x , observemos que sus coeficientes, 10 y 15, tienen como *mínimo común múltiplo* el número 30. En consecuencia, multiplicando la primera ecuación por $30:10=3$, la segunda por $30:15=2$, y procediendo luego como indicamos en la Nota anterior, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} 3) & 10x - 3y = -5 & \\ 2) & 15x - 8y = 10 & \\ & \hline & 30x - 9y = -15 & \\ & 30x - 16y = 20 & \\ & \hline & & \end{array}$$

Restando:

$$7y = -35 \therefore y = -5$$

Sustituyendo este valor $y = -5$ en la primera de las ecuaciones dadas, resulta:

$$10x - 3(-5) = -5$$

de donde: $10x = -5 - 15$; $10x = -20 \therefore x = -2$

La solución del sistema es:

$$\boxed{x = -2}, \boxed{y = -5}$$

171. Fórmulas de resolución. — Como en la práctica se presenta frecuentemente la resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, resulta conveniente, pues, conocer las fórmulas (A₂ N.º 277), que nos permiten calcular rápidamente los valores de las incógnitas, mediante sustitución en ellas de las letras por los valores particulares (generalmente numéricos), de los coeficientes y términos conocidos de las ecuaciones dadas, reducidas a la forma tipo indicada en el (N.º 165).

Para hallar dichas fórmulas resolveremos por uno cualquiera de los métodos, por ej., por el de sustitución, el sistema general:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad [1]$$

Suponiendo $a \neq 0$, despejamos x de la primera ecuación, y tenemos:

$$x = \frac{c - by}{a}$$

Sustituyendo este valor en la segunda, resulta:

$$\frac{a'(c - by)}{a} + b'y = c'$$

Resolviendo esta ecuación que sólo contiene la incógnita y , tenemos:

$$ca' - ba'y + ab'y = ac'$$

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'$$

de donde, $y = (ac' - ca') : (ab' - ba')$.

Sustituyendo este valor de y en una cualquiera de las ecuaciones [1], y despejando x , se encuentra:

$$x = (c b' - b c') : (a b' - b a')$$

Las fórmulas de resolución del sistema general [1] son, pues:

$$x = \frac{c b' - b c'}{a b' - b a'} \quad y = \frac{a c' - c a'}{a b' - b a'}$$

EJEMPLO. — Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 22 \\ 6x + 5y = 10 \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas de resolución, en las que

$a = 2$; $b = -3$; $c = 22$; $a' = 6$; $b' = 5$; $c' = 10$
tenemos:

$$x = \frac{22 \times 5 - (-3) \times 10}{2 \times 5 - (-3) \times 6} = \frac{140}{28} = 5$$

$$y = \frac{2 \times 10 - 22 \times 6}{2 \times 5 - (-3) \times 6} = \frac{-112}{28} = -4$$

La solución del sistema dado es, pues:

$$\boxed{x = 5} \quad \text{e} \quad \boxed{y = -4}$$

172. Regla de Cramer. — Un binomio como $a b' - b a'$ suele representarse con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Dicho binomio se llama *determinante* de los cuatro números a , b , a' , b' .

Obsérvese que en el símbolo referido están dispuestas las cuatro letras a , b , a' , b' , en forma rectangular;

podemos decir, pues, que indica debe efectuarse el producto en diagonal $a b'$ y de él restarse el otro producto en diagonal $b a'$.

En el párrafo anterior vimos que un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, reducido a la forma tipo:

$$\begin{cases} a x + b y = c \\ a' x + b' y = c' \end{cases} \quad [1]$$

se puede resolver empleando las fórmulas

$$x = \frac{c b' - b c'}{a b' - b a'}, \quad y = \frac{a c' - c a'}{a b' - b a'}$$

El denominador común de estas dos fracciones, o sea el binomio $a b' - b a'$, se llama el *determinante del sistema* [1].

De acuerdo con la notación indicada al principio de este párrafo, las fórmulas de resolución del sistema [1] pueden escribirse, pues, simbólicamente, así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

Estas fórmulas, debidas a *Cramer* (*), nos permiten enunciar la siguiente

REGLA. — La solución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, reducido a la forma tipo, se puede obtener escribiendo dos fracciones cuyo denominador común es el determinante del sistema, y cuyos numeradores son los determinantes que resultan de reemplazar en el anterior, la columna de los coeficientes de la incógnita que se expresa, por la de los términos independientes.

(*) GABRIEL CRAMER (1704-1752) fué profesor de Matemáticas en Ginebra, su ciudad natal. Su obra más importante, que aún se consulta hoy, es el "Tratado sobre curvas algebraicas".

Contribuyó al estudio de las ecuaciones, e hizo revivir el de los determinantes, comenzado por Leibnitz; escribió sobre la causa física de la forma esferoidal de los planetas y el movimiento de sus ápsides; amplió los estudios de Newton relativos a las curvas cúbicas, etc.

EJEMPLO. — Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 8y = 5 \\ 2x + y = 16 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 16 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5 \times 1 - (-8)16}{3 \times 1 - (-8)2} = \frac{5 + 128}{3 + 16} = \frac{133}{19} = 7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 16 \end{vmatrix}}{19} = \frac{3 \times 16 - 5 \times 2}{19} = \frac{48 - 10}{19} = \frac{38}{19} = 2$$

Verificación:

1.^a ecuación: $3 \times 7 - 8 \times 2 = 21 - 16 = 5$

2.^a " $2 \times 7 + 2 = 14 + 2 = 16.$

Discusión de los resultados

173. Sistema determinado. — Nos proponemos repetir, para un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, la discusión que efectuamos en el (N.º 137) para una sola ecuación con una incógnita, discusión que tiene por objeto prever todos los casos que pueden presentarse en la resolución de dicho sistema.

Sea, pues, el sistema general:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad [1]$$

Suponiendo $a \neq 0$, en el (N.º 171) vimos que despejando x de la primera ecuación, sustituyendo su valor en la segunda y simplificando, llegamos a la ecuación:

$$(ab' - ba')y = ac' - ca' \quad [2]$$

Si $ab' - ba' \neq 0$, la ecuación [2] se satisface para un solo valor de y (N.º 137, 1.º), que sustituido en una cualquiera de las ecuaciones del sistema [1], nos da también un solo valor para x .

El sistema [1] tiene, pues, *una sola solución*, expresada por las fórmulas que hallamos en el (N.º 171):

$$x = \frac{c b' - b c'}{a b' - b a'} \quad \text{e} \quad y = \frac{a c' - c a'}{a b' - b a'}$$

y decimos que el sistema es **determinado**.

Casos de imposibilidad e indeterminación

174. Si $a b' - b a' = 0$, y $a c' - c a' \neq 0$, la ecuación [2] no se satisface para ningún valor de y (N.º 137, 2.º); el sistema [1] no tiene, pues, **ninguna solución**, y decimos que es **imposible**, o que las ecuaciones que lo forman son *incompatibles*.

NOTA. — Obsérvese que, en este caso, también se cumple la condición, $c b' - b c' \neq 0$; ésta se obtiene dividiendo ordenadamente las dos expresiones $a b' = b a'$ y $a c' \neq c a'$, deducidas de las condiciones dadas.

EJEMPLO. — Consideramos el sistema:
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 1 \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$a b' - b a' = 3(-4) - (-2)6 = -12 + 12 = 0$$

Además, tenemos:

$$a c' - c a' = 3 \times 1 - 1 \times 6 = 3 - 6 = -3 \neq 0;$$

en consecuencia, el sistema dado es *imposible*.

La imposibilidad anterior podía haberse previsto observando los coeficientes y términos conocidos de las ecuaciones dadas; en efecto, 6 y -4 son equimúltiplos de 3 y -2, pero 1 no lo es de 1, porque

$$6 = 3 \times 2; \quad -4 = -2 \times 2; \quad 1 \neq 1 \times 2$$

175. Si $a b' - b a' = 0$, y $a c' - c a' = 0$, la ecuación [2] del párrafo anterior se satisface para cualquier valor que se atribuya a la letra y (N.º 137, 3.º); el sistema [1] tiene, pues, **infinitas soluciones**, y decimos que es **indeterminado**.

En este caso decimos, también, que existe **indeterminación de orden 1**, porque si bien podemos dar a *una* de las incógnitas valores arbitrarios, los valores de la otra dependen de los valores atribuidos a la primera.

EJEMPLO. — Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$ab' - ba' = 3(-4) - (-2)6 = -12 + 12 = 0$$

y, además,

$$ac' - ca' = 3 \times 2 - 1 \times 6 = 6 - 6 = 0;$$

en consecuencia, el sistema dado es *indeterminado*.

Esta consecuencia podía haberse deducido inmediatamente, en este caso, observando que las dos ecuaciones se reducen a una, puesto que los coeficientes y el término conocido de la segunda, resultan de multiplicar por 2, los de la primera, y sabemos que una ecuación aislada con dos incógnitas tiene infinidad de soluciones (N.º 161).

NOTA. — Obsérvese en este caso que, siendo $ab' - ba' = 0$, y $ac' - ca' = 0$, resulta: $a:a' = b:b' = c:c'$, de donde se tiene, también: $cb' - bc' = 0$.

176. Cuando los coeficientes a , b , a' , b' , y los términos conocidos c , c' , dependen de ciertas cantidades literales llamadas *parámetros*, a las que se les puede dar diferentes valores, puede suceder que los valores particulares atribuidos a dichos parámetros anulen uno o varios de aquellos coeficientes.

Supongamos que se tenga: $a = b = a' = b' = 0$; en ese caso, el sistema [1] ya no contiene las incógnitas, y se reduce a

$$0 = c, \quad 0 = c'$$

1.^{er} caso: si c o c' son *diferentes de cero*, una, por lo menos, de estas últimas igualdades resulta imposible, y el sistema [1] **no tiene solución**; decimos que es **imposible**.

2.^o caso: si $c = c' = 0$, las ecuaciones [1] se transforman en identidades para cualesquiera que sean los valores que se atribuyan a x e y . El sistema [1] tiene, pues, **infinitas soluciones**, y decimos que es **indeterminado**.

En este caso decimos, también, que existe **indeterminación completa** o *de orden 2*, puesto que podemos dar simultáneamente a las dos incógnitas valores arbitrarios.

177. Resumimos los resultados de la discusión en el siguiente cuadro:

DISCUSION DEL SISTEMA $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$		
Hipótesis	Solución	El sistema es:
$ab' - ba' \neq 0$	única	determinado
$ab' - ba' = 0 \begin{cases} a \neq 0 & \begin{cases} ac' - ca' \neq 0 \\ ac' - ca' = 0 \end{cases} \\ a = b = a' = b' = 0 & \begin{cases} c \neq c' \\ c = c' = 0 \end{cases} \end{cases}$	ninguna	imposible
	infinitas	indeterminado, de orden 1.
	ninguna	imposible
	infinitas	indeterminado, de orden 2.

Sistemas sencillos con más de dos incógnitas

178. **Sistemas de igual número de ecuaciones que de incógnitas.** — Cuando se presenta para su resolución un sistema de más de dos ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas, pueden aplicarse, también, los métodos que hemos empleado en este Capítulo para los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

En esencia, el procedimiento consiste en *transformar el sistema dado en otro equivalente con una ecuación y una incógnita menos, y así sucesivamente, hasta lograr obtener una sola ecuación con una sola incógnita.*

Como para el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, un sistema con igual número de ecuaciones que de incógnitas resulta, generalmente, **determinado**.

Así, por ej., el método de *sustitución* se aplicaría mediante la siguiente

REGLA. — Para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con **IGUAL NÚMERO DE ECUACIONES QUE INCÓGNITAS**:

1.° Se despeja de una de las ecuaciones, una de las incógnitas, considerando como conocidas las otras.

2.° Se sustituye la expresión de dicha incógnita en las ecuaciones restantes, formando así un nuevo sistema que contiene una ecuación y una incógnita menos que el anterior.

3.° Se procede con este nuevo sistema como con el propuesto, y se continúa hasta llegar a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que se resuelve por cualquier método.

4.° Sustituyendo los valores de las dos incógnitas halladas en la ecuación precedente, que contiene una tercera incógnita, se tendrá el valor de ésta, y así sucesivamente se calculan las restantes incógnitas, sustituyendo en las ecuaciones que le preceden, los valores de las incógnitas ya calculadas.

EJEMPLO. — Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 1 & [1] \\ 3x + 2y - 2z = 13 & [2] \\ 5x - 4y - 2z = 11 & [3] \end{cases}$$

Despejando z de la primera ecuación, resulta:

$$z = 2x - 3y - 1 \quad [1']$$

Reemplazando esta expresión de z en las [2] y [3], tenemos:

$$3x + 2y - 2(2x - 3y - 1) = 13$$

$$5x - 4y - 2(2x - 3y - 1) = 11$$

Transformándolas, resulta:
$$\begin{cases} -x + 8y = 11 & [2'] \\ x + 2y = 9 & [3'] \end{cases}$$

El sistema de estas dos ecuaciones [2'], [3'], con dos incógnitas x e y , podría resolverse por el método de sustitución; pero en el caso particular que se presenta, resulta más breve aplicar el método de reducción. Sumando las dos ecuaciones [2'] y [3'], tenemos:

$$10y = 20, \quad \text{de donde, } y = 2$$

Sustituyendo este valor $y = 2$ en la ecuación [2'] o en la [3'], y despejando x , obtenemos el valor de esta incógnita: $x = 5$.

Sustituyendo los valores $x = 5$, $y = 2$ en la ecuación [1'] tenemos:

$$z = 2 \times 5 - 3 \times 2 - 1, \quad \text{de donde, } z = 3$$

La solución del sistema es:

$$\boxed{x = 5 ; y = 2 ; z = 3}$$

179. NOTA. — Si el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, obtenido al aplicar la regla anterior, resultara *imposible* o *indeterminado*, análogamente sucedería con el sistema dado.

Se podría desarrollar una discusión general análoga a la realizada en el (N.º 173) y siguientes, pero ello nos conduciría fuera de los límites fijados para este curso elemental.

180. Sistemas de diferente número de ecuaciones que de incógnitas.

1.º *Sistemas con más incógnitas que ecuaciones.* — Estos sistemas son generalmente **indeterminados**; tienen, por tanto, *infinitas soluciones*. En efecto, si tuviéramos un sistema de m ecuaciones con $m + n$ incógnitas, daríamos valores arbitrarios a n de las incógnitas, y tendríamos así un sistema de m ecuaciones con m incógnitas, que resolveríamos como indicamos en el (N.º 178).

EJEMPLO. — Sea el sistema de 2 ecuaciones con $2 + 1 = 3$ incógnitas:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ x - 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Demos valores arbitrarios a una de las incógnitas, por ej., a z :

Así, para $z = 2$, tenemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x e y :

$$\begin{cases} 3x + y + 2 = 5 \\ x - 2y + 3 \times 2 = 6 \end{cases} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este último sistema, tenemos: $x = \frac{6}{7}$; $y = \frac{3}{7}$.

Una solución del sistema dado es, pues:

$$\boxed{x = \frac{6}{7}; \quad y = \frac{3}{7}; \quad z = 2}$$

Si damos a z otro valor cualquiera, por ej., $z = -\frac{1}{2}$, encontramos, análogamente, otra solución del sistema dado:

$$\boxed{x = \frac{37}{14}; \quad y = -\frac{17}{7}; \quad z = -\frac{1}{2}}$$

Análogamente calcularíamos todas las soluciones que quisiéramos del sistema dado.

NOTA. — El sistema podría resultar determinado, si los coeficientes y término conocido de una de las ecuaciones fuesen equimúltiplos de los de otra, porque, en ese caso, dos o más ecuaciones serían idénticas, reduciéndose entonces el número de ellas. (Véase el ejemplo del N.º 175).

2.º *Sistemas con más ecuaciones que incógnitas.* — Si tuviéramos un sistema de $m + n$ ecuaciones con m incógnitas, resolveríamos el sistema formado por m cualesquiera de las ecuaciones dadas.

Si las soluciones halladas de este sistema parcial verifican las n ecuaciones restantes del sistema dado, éste es **determinado**; de lo contrario, es **imposible** (o *absurdo*).

EJEMPLO I. — Sea el sistema de 4 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 5 \\ 3x + y = 0 \\ -4x + y = 7 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Resolviendo el sistema formado por las} \\ \text{dos primeras ecuaciones, encontramos:} \\ \\ \text{Sustituyendo estos valores en las otras} \\ \text{dos ecuaciones, vemos que las verifican:} \end{array}$$

$$3(-1) + 3 = -3 + 3 = 0; \quad -4(-1) + 3 = 4 + 3 = 7$$

El sistema es, pues, *determinado*, siendo su solución:

$$x = -1, \quad y = 3$$

EJEMPLO II. — Si la última ecuación del sistema del ejemplo anterior fuese, por ej.:

$$4x + 5y = 2$$

al sustituir $x = -1$ e $y = 3$, tendríamos:

$$4(-1) + 5 \times 3 = -4 + 15 = 11$$

resultado éste absurdo, por ser diferente del término conocido de la ecuación, que es 2; en consecuencia, este sistema sería *imposible*, y decimos que las ecuaciones que lo forman son *incompatibles*.

CAPÍTULO VI

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO

181. Definiciones. — En el (N.º 115) vimos cómo se podía resolver un problema mediante la resolución de una ecuación. Hasta ahora, hemos resuelto ecuaciones con el objeto de ejercitarnos; pero, en la práctica, utilizamos las ecuaciones como un medio para la resolución de un problema.

En todo problema existen cantidades cuyos valores están dados en forma explícita, o bien, que pueden obtenerse por medida directa; éstas son las *cantidades conocidas* o *datos* del problema. Existen otras cantidades, llamadas *incógnitas*, cuyos valores no están dados, sino que es necesario determinar basándose en las relaciones que las ligan con las cantidades conocidas.

La *resolución* de un problema tiene por objeto determinar los valores de las incógnitas mediante los valores de las cantidades conocidas.

Los valores de las incógnitas se llaman *soluciones* del problema.

Antes de dar normas generales para la resolución de problemas, estimamos conveniente tratar algunos ejemplos.

182. PROBLEMA I. — *En un salón de clase había 40 alumnos, entre niñas y varones. Habiéndose retirado 12 niñas y 8 varones, quedaron en el salón igual número de alumnos de ambos sexos. ¿Cuántas niñas y cuántos varones había en el salón inicialmente?*

Indiquemos con x el número de niñas que había en el salón; el de varones será $(40 - x)$.

Habiéndose retirado 12 niñas y 8 varones, quedaron en el salón $(x - 12)$ niñas, y $[(40 - x) - 8]$ varones.

Como el número de niñas que quedaron en el salón debe ser igual al número de varones que también quedaron, estas dos últimas diferencias deberán ser iguales, vale decir, que tendremos la siguiente

Ecuación: $x - 12 = (40 - x) - 8$

Reducción: $x - 12 = 32 - x$, de donde $2x = 44$.

Solución de la ecuación: $x = \frac{44}{2} = 22$.

Solución del problema: el número de niñas es 22, y el número de varones es $40 - 22 = 18$.

Verificación. retirándose 12 niñas y 8 varones, quedaron en el salón $22 - 12 = 10$ niñas, y $18 - 8 = 10$ varones, números éstos que por ser iguales, justifican la solución.

183. PROBLEMA II.—*En una fábrica, un obrero, trabajando a mano, construye 10 cajas por hora; otro, trabajando con máquinas, construye 36 cajas por hora, pero no empieza su trabajo sino 2 horas después del primero. ¿Al cabo de cuánto tiempo el segundo obrero habrá fabricado 3 veces más cajas que el primero?*

Tomemos como origen del tiempo el instante en que el segundo obrero empieza su trabajo; por unidad de tiempo la hora, y como incógnita, que representaremos con x , el tiempo empleado contado positivamente después del origen. Al cabo de este tiempo, el primer obrero habrá trabajado $(x + 2)$ horas, y fabricado $10(x + 2)$ cajas.

El segundo obrero habrá trabajado x horas y fabricado $36x$ cajas.

Pero, según la condición del enunciado, esta última cantidad debé ser tres veces mayor que la primera, vale decir, que tendremos la siguiente

Ecuación: $36x = 10(x + 2) \times 3$.

Reducción: $36x = 30x + 60$, de donde $6x = 60$.

Solución de la ecuación: $x = \frac{60}{6} = 10$.

Solución del problema: 10 horas.

Verificación: Al cabo de 10 horas, el segundo obrero habrá

fabricado $36 \times 10 = 360$ cajas, y el primero, que habrá trabajado $(10 + 2) = 12$ horas, habrá fabricado $10 \times 12 = 120$ cajas, número, el primero, triplo de este último.

184. Normas generales para la resolución de problemas.

— Por los ejemplos tratados, vemos que el método que conviene seguir en la resolución de problemas, es el siguiente:

- 1.º Elección de las incógnitas.
- 2.º Planteo del problema.
- 3.º Resolución de las ecuaciones.
- 4.º Discusión de los resultados.

Elección de las incógnitas

185. El mismo enunciado del problema indica, generalmente, cuál es la incógnita, o incógnitas.

A veces, el enunciado no indica claramente cuáles deben ser las incógnitas; de su elección depende que la resolución del problema sea más o menos sencilla. Es natural que no existen reglas fijas al respecto; solamente la práctica adquirida mediante la resolución de variados problemas, podrá ayudarnos a resolver las dificultades.

EJEMPLO I. — En el problema tratado en el (N.º 115), cuyo enunciado es: “Cuál es el número cuyo triplo, disminuído en 8 unidades resulta igual a aquel número?”, es evidente que la incógnita es ese número.

EJEMPLO II. — El problema II (N.º 183) podría enunciarse así:

Un obrero fabrica 10 cajas por hora trabajando a mano; otro obrero, que trabaja a máquina, fabrica 36 cajas por hora, pero empieza su trabajo 2 horas después del primero. ¿Podrá acontecer que el número de cajas fabricadas por el segundo sea triplo del construído por el primero?

Ahora no se indica cuál debe ser la incógnita; podríamos tomar diversas cantidades: ya sea la que tomamos, es decir, el número de horas a contar del momento que inicia el trabajo el segundo obrero; o bien, el número de horas a contar del momento que inicia el trabajo el primer obrero. Llamando x a este último número, la ecuación del problema sería:

$$(10x) \times 3 = 36(x - 2) \quad \text{de donde } x = 12$$

Como el segundo obrero inicia el trabajo 2 horas después del primero, empleará $(12 - 2) = 10$ horas para fabricar el número de cajas que establece el enunciado del problema (resultado igual al obtenido en el N.º 183).

186. Al mismo tiempo que se determinan cuáles deben ser las incógnitas, es indispensable, para interpretar rápidamente y con precisión las soluciones halladas, indicar las unidades con las cuales medimos todas las magnitudes que intervienen en el problema; por último, cuando es del caso, se establece para cada incógnita un origen y un sentido positivo.

Como *norma general*, podemos decir que la elección de la incógnita (o incógnitas) debe ser tal, que facilite el *planteo* del problema, operación esta última, que indicaremos a continuación.

P l a n t e o

187. DEFINICIÓN. — **EL PLANTEO** de un problema es la expresión, en forma de igualdades entre los datos y las incógnitas, de las relaciones que resultan del enunciado.

Para esta operación, tampoco puede darse una regla general. En casos sencillos, se puede llegar al planteo de la siguiente manera:

Se opera como si, siendo conocidas las soluciones del problema, se quisiera verificar mediante una o más igualdades, que dichas soluciones satisfacen a todas las condiciones del enunciado, así como a las leyes matemáticas, mecánicas, físicas, etc., a las cuales pueden estar sujetas. Las igualdades que así se obtengan, son las ecuaciones del problema.

La incógnita o incógnitas se representan, generalmente, con las últimas letras del alfabeto (x , y , z , t , . . .).

188. Resoluciones de las ecuaciones. — Si las ecuaciones que resultan del planteo son de primer grado, podemos resolverlas con los conocimientos adquiridos en el Capítulo precedente.

Un problema se llama de **primer grado** si su resolución sólo exige resolver ecuaciones de primer grado. Si la ecuación resultante es de segundo grado, el problema se llama de **segundo grado**; análogamente para grados superiores. En el próximo curso trataremos de las ecuaciones y problemas de segundo grado.

Discusión de los resultados

189. Problemas con una incógnita. — Resuelta la ecuación de un problema, es necesario verificarla. Pero, en ciertos casos, no todos los valores que verifican la ecuación son también soluciones del problema; esto sucede, porque no todas las condiciones que encierra implícitamente el enunciado pueden tenerse en cuenta en el planteo.

Es necesario, entonces, investigar si el valor hallado para la incógnita satisface también a todas las otras condiciones que abarcan el enunciado del problema; esta *interpretación de resultados* es lo que se llama la **discusión de los resultados**.

Supongamos, por ejemplo, que por la naturaleza del problema, la solución deba ser un número entero, y se halla, en cambio, como solución de la ecuación, un número fraccionario. ¿Podremos decir que ésta es la solución del problema? Ciertamente que no.

Si la solución de un problema debe ser un número positivo, y encontramos como solución de la ecuación un número negativo, no podrá aceptarse ese valor como solución del problema.

En los casos indicados y otros análogos, se dice que *el problema es imposible, o que no tiene solución, aunque la tenga la ecuación*.

Ilustremos este punto mediante algunos ejemplos.

Así, por ej., si la incógnita es el número de herramientas que se encuentran en un taller, el resultado, para que sea aceptable, debe ser un número entero y positivo; la fuerza de un motor no puede resultar expresada sino por un número positivo; si se calcula la edad de un padre cuando se conocen las de sus hijos, la primera tiene que resultar mayor que la de los segundos, etc.

190. Problemas imposibles. — Cierta problema puede resultar *imposible* de resolver, ya sea porque la ecuación del mismo carece de soluciones, o bien, porque las soluciones de la ecuación no lo son al mismo tiempo del problema.

Así, por ejemplo, en el Problema I del (N.º 182), si modificamos el enunciado en el sentido de suponer que sean 41 alumnos en lugar de 40 los que había inicialmente en el salón de clase, la ecuación del problema sería:

$$x - 12 = (41 - x) - 8$$

que resuelta nos da: $x = \frac{45}{2}$ (número fraccionario).

Como la naturaleza del problema no admite solución fraccionaria, decimos que el problema es *imposible*.

191. PROBLEMA. — *Encontrar un número cuya tercera parte disminuía en su cuarta parte y aumentada en 6, sea igual a su doceava parte, aumentada en 5.*

Llamemos x a la incógnita; según el enunciado, la ecuación del problema será:

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + 6 = \frac{x}{12} + 5$$

Eliminando denominadores, $4x - 3x + 72 = x + 60$
de donde

$$4x - 3x - x = 60 - 72$$

$$0.x = -12$$

Esta última ecuación *no tiene solución* (N.º 137, 2.º); por consiguiente, *el problema es imposible*.

NOTA. — Esta imposibilidad podría notarse desde la ecuación primitiva del problema; en efecto, la diferencia de las dos fracciones que figuran en el primer miembro es igual a la fracción que figura en el segundo miembro, y a esas dos expresiones iguales se les ha sumado números diferentes, 6 y 5, respectivamente, lo que no puede dar resultados iguales.

192. Solución indeterminada. — Se presenta cuando cualquier valor de la incógnita es solución del problema. Trataremos un ejemplo,

PROBLEMA. — *Dos personas tienen, respectivamente, 23 y 27 años; otras tres tienen, respectivamente, 18, 25 y 32 años. ¿Dentro de cuántos años el triple de la suma de las edades de las dos primeras personas será doble de la suma de las edades de las otras tres?*

Llamemos x al número de años, a partir del momento actual, que faltan para que se cumpla el acontecimiento señalado en el problema.

Dentro de x años la suma de las edades de las dos primeras personas será: $(23 + x) + (27 + x)$; la suma correspondiente a las otras tres será: $(18 + x) + (25 + x) + (32 + x)$.

De acuerdo con el enunciado del problema, la ecuación correspondiente será:

$$3(23 + x + 27 + x) = 2(18 + x + 25 + x + 32 + x)$$

que reducida nos da: $0 \cdot x = 0$.

Siendo esta ecuación indeterminada (N.º 137, 3.º), o sea, que cualquier valor de x la satisface, significa, pues, que el acontecimiento buscado tiene lugar en *cualquier momento*.

193. Solución negativa. — En ciertos problemas, cuando la incógnita es una cantidad susceptible de contarse en dos sentidos opuestos, como ser: un tiempo, una distancia, un dinero cuando representa las ganancias o pérdidas en un negocio, etc., la solución negativa puede tener *interpretación*. Tenemos un caso en el siguiente

PROBLEMA. — *Un padre tiene 41 años y su hijo 13. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será 5 veces la del hijo?*

Llamando x al número de años que faltan para que se cumpla el acontecimiento señalado, la ecuación del problema es:

$$41 + x = 5(13 + x)$$

que resuelta nos da: $x = -6$.

Tal como se encuentra redactado el enunciado, la solución negativa nos indicaría que el problema es imposible. Pero, representando la incógnita un tiempo, que hemos considerado positivo cuando es hacia el porvenir, contado a partir de un origen, y negativo cuando es hacia el pasado, el signo negativo

nos indica que el acontecimiento buscado es *anterior* al origen de los tiempos (momento actual); vale decir, que *hace* 6 años la edad del padre era 5 veces la del hijo.

Correspondería, pues, modificar la parte final del enunciado, diciendo: ¿En qué época la edad del padre fué 5 veces la del hijo?

Vemos, que en ciertos problemas cuya solución puede tomarse en dos sentidos opuestos, la solución negativa nos indica, en algunos casos, la modificación que debemos introducir en el enunciado, para que el problema tenga solución.

194. En otros casos, la solución negativa puede indicar que el problema es imposible (N.º 189).

Un ejemplo lo tenemos en el Problema II del (N.º 183), si modificamos la parte final del enunciado, en la siguiente forma: ¿Dentro de cuántas horas el segundo obrero habrá fabricado 5 veces más cajas que el primero? La ecuación del problema sería, entonces:

$$36x = 10(x + 2) \times 5$$

cuya solución es $x = -\frac{50}{7}$ (negativa).

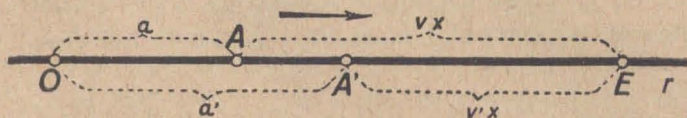
De acuerdo con nuestra convención sobre la manera de contar los tiempos, el signo negativo nos indicaría que el instante encontrado *precede* al origen en $\frac{50}{7}$ de hora.

Es natural que este resultado no responde a la cuestión, porque en ese instante el segundo obrero no empezó a trabajar aún. Vemos, pues, que en este caso, el problema es *imposible*.

195. Problema de los móviles. — *Dos móviles, situados en los puntos A y A', se trasladan sobre una recta con movimiento uniforme, y con velocidades de v y v' metros por segundo, respectivamente. Sabiendo que en cierto instante sus distancias a un punto O de la recta son a y a', respectivamente, determinar el momento y lugar en que se encontrarán.*

Tomemos sobre la recta r (fig. 5), un sentido positivo, por ejemplo, de izquierda a derecha, y el punto O como origen de las distancias. Ubiquemos los puntos A y A' sobre esa recta, a las distancias a y a' del origen, respectivamente,

Tomemos también como origen de los tiempos el momento en que los móviles pasan por A y A' , respectivamente, y llamemos x al número de segundos transcurridos desde ese momento hasta el de encuentro en E .



(fig. 5)

Si la velocidad del móvil A es de v metros por segundo, en x segundos habrá recorrido vx metros, representados en la figura por el segmento de recta AE ; la distancia OE valdrá, entonces: $a + vx$.

El móvil A' habrá recorrido en el mismo tiempo $v'x$ metros, representados por el segmento $A'E$; la distancia OE podrá entonces representarse también así: $a' + v'x$.

Igualando estas dos distancias tendremos la ecuación

$$a + vx = a' + v'x$$

que permite calcular x .

196. DISCUSIÓN. — Primer caso. — Si las velocidades son diferentes, $v - v' \neq 0$, entonces la ecuación anterior da un valor único para x :

$$x = \frac{a' - a}{v - v'} \quad [a]$$

Si x resulta *positiva*, quiere decir que el encuentro tiene lugar en un momento *posterior* al origen de los tiempos. El punto E se encontrará a la derecha de A y A' , y la distancia $A'E$ se obtendrá multiplicando el tiempo x por la velocidad v , y obtenemos:

$$AE = \frac{(a' - a)v}{v - v'} \quad [\beta]$$

Si x resulta *negativa*, quiere decir que el encuentro se efectuó en un momento *anterior* al origen de los tiempos.

El punto E se encontrará ubicado a la izquierda de los puntos A y A' .

Este último resultado tiene su interpretación física; en efecto, si la fracción que da x es negativa, sus dos términos deben ser de signos contrarios. Suponiendo $a' > a$ (caso de la figura), el numerador de la fracción resulta positivo, y el denominador debe ser entonces negativo, vale decir, que $v < v'$, o sea, que la velocidad de A debe ser menor que la de A' . Pero pasando los móviles al mismo tiempo por A y A' , es evidente que ya no se encontrarán, sino que se irán alejando cada vez más. Pero antes de llegar a esos puntos, la distancia entre ambos era menor, y ha habido un momento en que la distancia era nula, es decir, que se encontraron.

La solución negativa nos indica también, en este caso, que debe modificarse la parte final del enunciado del problema, y decir: *¿en qué momento y lugar se encontraron los móviles?*

Como ejercicio, discuta el estudiante el caso que $a' < a$ y $v > v'$; el punto de encuentro corresponderá también a la izquierda de A y A' .

Si x resulta nula, $a = a'$, quiere decir que los móviles coinciden en el origen de los tiempos. (Los puntos A , A' y E de la figura, son uno solo).

Segundo caso. — Si las velocidades son iguales, $v = v'$, entonces la ecuación que permite calcular x se transforma en

$$0.x = a' - a$$

ecuación imposible (N.º 137, 2.º); los móviles no se encontrarán nunca. Esto es evidente a priori, puesto que, marchando los dos móviles con la misma velocidad, permanecen a una distancia invariable uno del otro.

Tercer caso. — Si $v = v'$ y $a = a'$, la ecuación que permite calcular x se transforma en

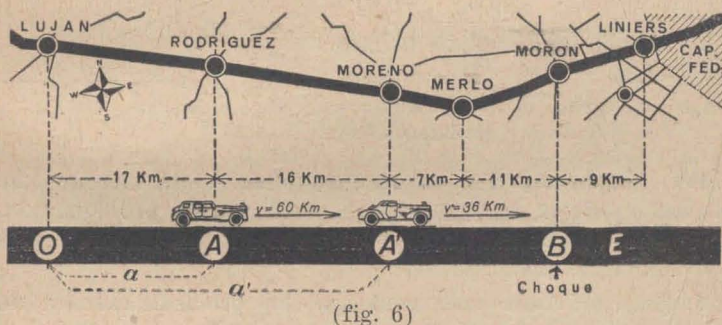
$$0.x = 0$$

ecuación indeterminada (N.º 137, 3.º), o sea, que cualquier valor de x la satisface. Los puntos A y A' coinciden siempre, o, con otros términos, los móviles marchan juntos.

NOTA. — Las fórmulas $[a]$ y $[\beta]$ de este problema, siendo literales, son *fórmulas generales*, vale decir, que expresan todas las soluciones de los problemas de tipo igual al tratado; en cada caso particular, no habrá más que sustituir en ellas los valores numéricos del problema dado.

Resolveremos algunos problemas, como ejemplos de aplicación de las fórmulas halladas.

PROBLEMA I. — Dos autos se dirigen hacia la Capital Federal por la carretera que la une con Luján. En cierto momento, uno de los autos, el que marcha con una velocidad media de 60 Km. por hora, pasa por Rodríguez, que dista 17 Km. de Luján. El otro auto, que marcha con 36 Km. por hora de velocidad media, pasa en el mismo momento por Moreno, que dista 33 Km. de Luján. ¿A qué distancia de Rodríguez alcanzará el primer auto al segundo?



Con las notaciones de la (fig. 5) y que ahora repetimos en la (fig. 6), suponiendo rectificad la carretera en la parte inferior de la misma figura, tenemos:

$$a = 17 \text{ Km.} ; a' = 33 \text{ Km.} ; v = 60 \text{ Km. h.} ; v' = 36 \text{ Km. h.}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula $[\beta]$, tenemos:

$$AE = \frac{(a' - a)v}{v - v'} = \frac{(33 - 17) \cdot 60}{60 - 36} = \frac{16 \times 60}{24} = 40 \text{ Km.}$$

El primer auto alcanzará al segundo a 40 Km. de distancia de Rodríguez; es decir, con los datos kilométricos de la figura, a 6 Km. de Morón, hacia la Capital Federal.

PROBLEMA II. — *Por la carretera referida en el problema anterior, en cierto momento un auto pasa por Rodríguez y otro por Moreno; después de 27 minutos dichos autos chocan en Morón. Calcular las velocidades medias de marcha de cada auto, empleando las distancias kilométricas que se indican en la (fig. 6).*

Con las notaciones de la (fig. 6), tenemos:

$a=17$ Km. ; $a'=33$ Km. ; $AB=$ Dist. Rodríguez-Morón= 34 Km.

Siendo la distancia Moreno-Morón de 18 Km. y el tiempo empleado por el segundo auto en recorrer esa distancia, de 27 minutos, su velocidad es:

$$v' = e : t = 18 : 27 = \frac{2}{3} \text{ Km. por minuto} = 40 \text{ Km. por hora}$$

La incógnita es ahora, v . Para calcularla, sustituimos los valores anteriores en la fórmula $[\beta]$, obteniendo:

$$AE = \frac{(a' - a)v}{v - v'}, \text{ de donde, } 34 = \frac{(33 - 17)v}{v - 40}$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos:

$$34v - 1360 = 16v \therefore 18v = 1360 \therefore v = \frac{1360}{18} = 75.555 \text{ Km. h.}$$

Las velocidades de ambos autos son, respectivamente: 40 Km. y $75 \frac{1}{2}$ Km. por hora (aproximadamente).

197. Problemas con varias incógnitas. — El método conveniente para la resolución y discusión de un problema con varias incógnitas, es análogo al empleado en los problemas con sólo una incógnita.

Téngase presente que, para que un problema admita un número limitado de soluciones, será necesario, en general, que origine tantas ecuaciones como incógnitas (N.º 178); en ese caso, el problema se llama determinado. A continuación trataremos un ejemplo.

PROBLEMA. — *En una asamblea, se aprobó un proyecto por una mayoría que fué igual a la cuarta parte del número de votos de la minoría; pero, si con el mismo número de votos, los de la minoría hubieran contado con 12 votos más, el proyecto se habría aprobado con una mayoría de dos votos. ¿Cuántos votaron de cada parte?*

Sea x el número de votos dados por la mayoría, e y los dados por la minoría.

De acuerdo con el resultado de la votación realizada, tenemos esta primera ecuación:

$$x - y = \frac{1}{4} y$$

De acuerdo con la segunda condición del problema, el número de votos de la minoría hubiera sido $(y + 12)$; y los de la mayoría, $(x - 12)$; tenemos, pues, una segunda ecuación:

$$(x - 12) - (y + 12) = 2$$

Dando la forma tipo al sistema de estas dos ecuaciones, resulta:

$$\begin{cases} x - \frac{5}{4}y = 0 \\ x - y = 26 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, encontramos:

$$x = 130 \quad ; \quad y = 104$$

En consecuencia, el problema es determinado, siendo la respuesta: *votaron 130 en favor del proyecto y 104 en contra.*

198. Cuando un problema origina **menos ecuaciones que incógnitas** es, en general, *indeterminado*, y tiene, por tante, *infinitas* soluciones (N.º 180, 1.º). Como ejemplos, a continuación resolveremos dos problemas.

PROBLEMA I. — *Hallar dos números tales, que sumando al primero el doble del segundo se obtenga 3.*

Llamando x e y a los números que buscamos, tendremos la única ecuación:

$$x + 2y = 3$$

que sabemos tiene *infinitas soluciones* (N.º 161). Así, despejando x , tenemos:

$$x = 3 - 2y$$

Si ahora damos a y valores arbitrarios, por ejemplo: 0, 1, -1, $\frac{1}{2}$, . . . obtenemos para x , respectivamente: 3, 1, 5, 2, . . .

PROBLEMA II. — *Se compraron 43 animales, entre pollos, gallinas y pavos; se pagó \$ 1 por cada pollo, \$ 1,20 por cada gallina, y \$ 1,50 por cada pavo. Si se pagó \$ 50 por todos los animales, ¿cuántos se compraron de cada clase?*

Sean x , y , z , el número de pollos, gallinas y pavos que se compraron, respectivamente.

Las ecuaciones del problema son:

$$x + y + z = 43$$

$$x \times 1 + y \times 1,2 + z \times 1,5 = 50$$

Siendo *dos* las ecuaciones y *tres* las incógnitas, el sistema tiene *infinitas soluciones*. Para resolverlo, consideramos como conocida una de las incógnitas, por ej., z , y tendremos el sistema en x e y :

$$\begin{cases} x + y = 43 - z \\ x + 1,2y = 50 - 1,5z \end{cases}$$

Despejando x e y por cualquiera de los métodos, se obtiene:

$$x = 8 + \frac{3}{2}z; \quad y = 35 - \frac{5}{2}z$$

Dando a z valores arbitrarios en estas expresiones de x e y , tendríamos infinitas soluciones del sistema de ecuaciones; pero, por la naturaleza de la cuestión, no todas serían soluciones del problema. En efecto, los valores de las incógnitas tienen que ser números *enteros y positivos*.

Por la forma de expresión de x e y , fácilmente vemos que para las tres incógnitas resultarán valores *enteros*, si damos a z valores *pares*.

La segunda condición, de tener que ser las incógnitas números *positivos*, se expresa así:

$$z > 0; \quad 8 + \frac{3}{2}z > 0; \quad 35 - \frac{5}{2}z > 0$$

Los valores de z que satisfacen simultáneamente a estas tres condiciones, se determinan fácilmente empleando la gráfica de inecuaciones (N.º 159).

Podemos resumir, pues, aquellas tres condiciones en esta otra:

$$0 < z < 14$$

Pero como z debe ser un número *par y positivo*, los únicos valores que satisfacen a la última desigualdad, son:

$$z = 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

El problema tiene, pues, *seis soluciones*.

Así, por ej., para $z=2$, las expresiones que hallamos de x e y nos dan:

$$x = 8 + \frac{3}{2} \times 2 = 8 + 3 = 11; \quad y = 35 - \frac{5}{2} \times 2 = 35 - 5 = 30$$

Como primera solución del problema diremos, pues, que *se comparan*: 11 pollos, 30 gallinas y 2 pavos.

Para $z=4$, tenemos otra solución:

$$14 \text{ pollos}; \quad 25 \text{ gallinas}; \quad 4 \text{ pavos}$$

199. Cuando un problema origina **más ecuaciones que incógnitas** es, en general, *imposible* o *absurdo* (N.º 180, 2.º).

EJEMPLO. — Dos números son tales que su suma vale 5, su diferencia 3, y uno de los números es la mitad del otro. Hallar esos números.

Llamando x e y a las incógnitas, se origina el siguiente sistema:

$$x + y = 5 ; \quad x - y = 3 ; \quad x = \frac{1}{2} y$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones encontramos que los números que las verifican son: $x=4$, $y=1$.

Ahora, si sustituímos estos dos valores $x=4$, $y=1$ en la tercera ecuación, constatamos que *no la verifican*, puesto que nos da $4 \neq \frac{1}{2}$

Decimos, pues, que el problema *no tiene solución*, puesto que los valores de x e y que verifican las dos primeras ecuaciones, no verifican la última.

200. Algunos de los problemas que se resuelven mediante una ecuación con una incógnita, pueden también resolverse más fácilmente empleando dos ecuaciones con dos incógnitas. Un ejemplo lo tenemos en el Problema I del (N.º 182), que decía: *En un salón de clase había 40 alumnos entre niñas y varones. Habiéndose retirado 12 niñas y 8 varones, quedaron en el salón igual número de alumnos de ambos sexos. ¿Cuántas niñas y cuántos varones había en el salón, inicialmente?*

Llamando x al número de niños e y al de varones, las condiciones del problema originan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x - 12 = y - 8 \end{cases}$$

que resolviéndolo, encontramos:

$$x = 22 \quad e \quad y = 18$$

soluciones estas iguales a las obtenidas en el (N.º 182).

Cálculo de dos números conociendo su razón y la suma o diferencia de los mismos

201. PROBLEMA. — Llamemos a la razón conocida entre dos números x , y ; b su suma o diferencia, también conocida; calcular los números x e y .

De acuerdo con las condiciones del problema, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x:y = a \\ x \pm y = b \end{cases} \quad [a]$$

equivalentes al sistema:
$$\begin{cases} x - a y = 0 \\ x \pm y = b \end{cases}$$

Resolviéndolo por cualquiera de los métodos, por ej., por la regla de Cramer (N.º 172), resulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -a \\ b & \pm 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & \pm 1 \end{vmatrix}} ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & \pm 1 \end{vmatrix}}$$

de donde

$$\boxed{x = \frac{ab}{a \pm 1}} ; \quad \boxed{y = \frac{b}{a \pm 1}} \quad [\beta]$$

Así, por ej., si $a=3$ es la razón y $b=8$ la suma conocida, corresponde tomar el signo $+$ de las fórmulas $[\beta]$, y tendremos:

$$x = \frac{3 \times 8}{3 + 1} = 6 ; \quad y = \frac{8}{3 + 1} = 2$$

Verificación:

$$x:y = 6:2 = 3 = a ; \quad x + y = 6 + 2 = 8 = b$$

En cambio, si $a=3$ es la razón y $b=8$ es la diferencia, corresponde tomar el signo $-$ de las fórmulas $[\beta]$, y tendremos:

$$x = \frac{3 \times 8}{3 - 1} = 12 ; \quad y = \frac{8}{3 - 1} = 4$$

Verificación:

$$x:y = 12:4 = 3 = a ; \quad x - y = 12 - 4 = 8 = b$$

NOTA. — Para $a = 1$, y tratándose del caso de la diferencia de los números dados, el denominador de las fórmulas $[\beta]$, o sea, $(a-1)$, nos da:

$$a - 1 = 0$$

Pero, para $a=1$, los numeradores de aquellas fórmulas también se anulan. En efecto, siendo $a=x:y=1$, tenemos: $x=y$; entonces resulta también, $x-y=0$, o sea, $b=0$, valor este que anula los numeradores de las fracciones de las fórmulas [3].

El sistema [α] tiene, pues, *infinitas soluciones* (N.º 175), y decimos que el problema es *indeterminado*.

Fácilmente verificamos el problema, en este caso, porque cualquiera que sea el par de números iguales, su cociente es siempre igual a 1, y su diferencia es igual a 0.

Repartición proporcional

202. Repartición simple directa. — Recordemos del curso anterior (A₂ N.º 106), que si las razones $A:a, B:b, C:c, \dots$ son iguales, la expresión

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \dots$$

se llama una **serie de razones iguales**.

Decimos también, que los numeradores de estas razones son **directamente proporcionales** a los denominadores respectivos, o bien que los denominadores son directamente proporcionales a los numeradores.

Así, por ej., si tenemos $3:6=1:2=5:10$, decimos, más brevemente, que 3, 1, 5 son *proporcionales* a 6, 2, 10.

DEFINICIÓN. — Repartir una magnitud S en partes **DIRECTAMENTE PROPORCIONALES** a los números $a, b, c, \dots$ significa descomponerla en tantas partes $x, y, z, \dots$ como números se dan, y tales que dichas partes sean directamente proporcionales a los números dados.

Vale decir que se cumplirán las relaciones

$$\begin{cases} S = x + y + z + \dots \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \dots \end{cases} \quad [1]$$

que constituyen un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas,

Así, por ej., si son *tres* las partes en que queremos descomponer un número S , tendremos el sistema formado por las *tres* ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} S = x + y + z \\ x : a = y : b \\ x : a = z : c \end{cases}$$

EJEMPLO. — Repartir el número 120 en partes directamente proporcionales a los números 3 y 5.

El sistema [1] es, para este caso:

$$\begin{cases} 120 = x + y \\ x : 3 = y : 5 \end{cases} \quad \text{o sea,} \quad \begin{cases} x + y = 120 \\ x : y = 3/5 \end{cases}$$

Conocemos, pues, la suma de dos números y su razón. Aplicando las fórmulas [3] que hallamos en el Problema del (N.º 201), en las que hacemos $a = 3/5$, $b = 120$, tenemos:

$$x = \frac{(3/5) \times 120}{3/5 + 1} = 45 ; \quad y = \frac{120}{3/5 + 1} = 75$$

Verificación: $45 + 75 = 120$; $45 : 3 = 75 : 5$

203. Resolución general del problema. — Para el caso de tener que repartir una magnitud en partes proporcionales a *varios* números, en lugar de resolver en cada caso el sistema [1], resulta más práctico emplear una regla general que deduciremos de dicho sistema.

Para ello, recordemos del curso anterior (A_2 N.º 107) que, *en toda serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como uno cualquiera de los antecedentes es a su consecuente*. Tendremos, pues, aplicando esta propiedad a la serie de razones que figura en el sistema [1]:

$$\frac{x + y + z + \dots}{a + b + c + \dots} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \dots$$

Igualando el primer miembro, sucesivamente, con cada uno

de los siguientes, sustituyendo $x + y + z + \dots = S$, y despejando x , y , z , $\dots$ obtenemos, respectivamente:

$$\boxed{x = \frac{S}{a+b+c+\dots} \times a} ; \quad \boxed{y = \frac{S}{a+b+c+\dots} \times b} ; \dots$$

Estas expresiones nos justifican, pues, la siguiente

REGLA. — Para **REPARTIR** una magnitud en **PARTES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES** a varios números dados, se divide aquella magnitud por la suma de los números dados, y se multiplica el cociente obtenido por cada uno de los números dados.

EJEMPLO. — *Dividir el número 240 en partes directamente proporcionales a los números 3, 4, 5.*

Apliquemos la regla anterior: para ello, calculemos primeramente la suma de los números dados: $3 + 4 + 5 = 12$.

El cociente de 240 por la suma 12 es 20.

Las partes pedidas serán, pues:

$$20 \times 3 = 60 ; \quad 20 \times 4 = 80 ; \quad 20 \times 5 = 100 .$$

Como verificación, la suma de estas tres partes debe ser igual al número dado: $60 + 80 + 100 = 240$.

PROBLEMA. — *Tres empleados deben repartirse una gratificación de \$ 1260 proporcionalmente a los años de servicios. El 1.º tiene 15 años de servicios, el 2.º tiene 12, el 3.º tiene 8. ¿Cuánto corresponde a cada uno?*

Se divide 1260 en proporción directa a 15, 12 y 8. Para ello tenemos: $15 + 12 + 8 = 35$.

El cociente de 1260 por esta suma es, $1260 : 35 = 36$.

A cada empleado le corresponderá, pues:

$$1.º, \quad 36 \times 15 = 540 ; \quad 2.º, \quad 36 \times 12 = 432 ; \quad 3.º, \quad 36 \times 8 = 288$$

Al primero le corresponden \$ 540, al segundo \$ 432 y al tercero \$ 288. Como verificación, tenemos: $540 + 432 + 288 = 1260$.

NOTA. — Si los números a , b , c , $\dots$ son fracciones, se pueden reducir a común denominador, y, por consiguiente, repartir la magnitud S en partes *proporcionales a los numeradores resultantes*.

En efecto, si en la serie del sistema [1] fueran los denominadores de las razones, fracciones de igual denominador, podrían suprimirse estos últimos denominadores, que las razones seguirían siendo iguales entre sí, puesto que cada razón de la serie habría sido multiplicada por el denominador común suprimido.

204. Repartición simple inversa. — Con las convenciones del (N.º 202), daremos la siguiente

DEFINICIÓN. — **REPARTIR** una magnitud S en partes **INVERSAMENTE PROPORCIONALES** a los números $a, b, c, \dots$ significa descomponerla en tantas partes $x, y, z, \dots$ como números se dan, y tales que dichas partes sean directamente proporcionales a los **INVERSOS** (o recíprocos) de los números dados.

Vale decir que se cumplirán las relaciones

$$S = x + y + z + \dots$$

$$\frac{x}{1:a} = \frac{y}{1:b} = \frac{z}{1:c} = \dots$$

Se comprende fácilmente que la **regla** para la resolución de problemas es análoga a la del anterior (N.º 203), reemplazando, en este caso, los números dados por sus inversos.

EJEMPLO. — *Dividir el número 36 en partes inversamente proporcionales a los números 4, 3, 6.*

Los inversos son: $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$.

Su suma es: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$.

El cociente de 36 por $\frac{3}{4}$ es $36 \times \frac{4}{3} = 48$.

Las partes pedidas serán, pues:

$$48 \times \frac{1}{4} = 12 ; 48 \times \frac{1}{3} = 16 ; 48 \times \frac{1}{6} = 8.$$

205. Repartición compuesta directa. — Supongamos que nos proponen el siguiente

PROBLEMA. — *José y Alberto ganan en un negocio \$ 3400. José concurrió, para la realización del negocio, con un capital de \$ 1200 durante 9 meses, y Alberto con \$ 3000 durante 7 meses. ¿Qué parte de la ganancia le corresponde a cada uno?*

Se comprende fácilmente que, colocar en un negocio un capital de \$ 1200 durante 9 meses, equivale a colocar un capital 9 veces mayor durante un tiempo 9 veces menor. Por consiguiente, la ganancia que corresponde a \$ 1200 por 9 meses, es igual a la de \$ $(1200 \times 9 = 10800)$ por *un solo mes*; análogamente la ganancia de \$ 3000 por 7 meses es igual a la de \$ $(3000 \times 7 = 21000)$ por *un solo mes*.

El problema se reduce, por consiguiente, a la repartición de \$ 3400 en partes proporcionales a los números 10800 y 21000.

Llamando x e y a las partes que corresponden a José y Alberto, respectivamente, y aplicando las fórmulas y notaciones del (N.º 203), tenemos:

$$S = \$ 3400 ; a = 10800 ; b = 21000 .$$

$$x = \frac{3400}{10800 + 21000} \times 10800 = \$ 1154,72$$

$$y = \frac{3400}{10800 + 21000} \times 21000 = \$ 2245,28$$

$$\text{Ganancia total } \$ 3400,00$$

206. En el problema anterior, hemos repartido la ganancia en partes directamente proporcionales a los capitales y a los períodos de tiempo durante los cuales habían estado colocados.

Estas reparticiones se llaman *reparticiones compuestas*, y se calculan con la siguiente

REGLA. — Para **REPARTIR** una magnitud en partes **DIRECTAMENTE PROPORCIONALES** a los números a, b, c , y a los números a', b', c' , se reparte aquella magnitud en partes directamente proporcionales a los productos $(a \times a')$, $(b \times b')$, $(c \times c')$.

EJEMPLO. — Tres fleteros transportan los materiales necesarios para una obra, y se les retribuye en razón directa del número de vehículos que emplea cada uno de ellos y de la distancia del transporte. El 1.^o empleó 12 camiones en 2 Km. de distancia; el 2.^o empleó 10 en 3 Km. y el 3.^o empleó 9 en 4 Km. ¿Cuánto le corresponde percibir a cada fletero, si la suma a repartir es de \$ 600.

Con las notaciones anteriores tenemos, $S = \$ 600$. Los productos son: $12 \times 2 = 24$; $10 \times 3 = 30$; $9 \times 4 = 36$; la suma de estos números es: $24 + 30 + 36 = 90$. Llamando x , y , z , a las cantidades que corresponde percibir cada fletero, tendremos:

$$x = (600:90) \times 24 = \$ 160 ;$$

$$y = (600:90) \times 30 = \$ 200 ; \quad z = (600:90) \times 36 = \$ 240 .$$

207. Repartición compuesta inversa. — Supongamos que nos proponen el siguiente

PROBLEMA. — El dueño de un negocio resolvió distribuir un aguinaldo de \$ 720 entre tres de sus empleados, en razón inversa de los sueldos, que son \$ 100, \$ 200, \$ 240 y también en razón inversa de las edades respectivas, que son 25, 30 y 32 años. ¿Cuánto corresponderá a cada uno en el reparto?

Con el mismo criterio empleado en la repartición simple inversa, se comprende que este problema se resuelve con la regla del problema anterior, reemplazando, en este caso, los números por sus recíprocos.

Tendremos que repartir, por consiguiente, la cantidad de \$ 720 en partes directamente proporcionales a los productos:

$$(1/100 \times 1/25), \quad (1/200 \times 1/30), \quad (1/240 \times 1/32)$$

Aplicando ahora la regla del (N.^o 203), encontramos las partes que buscábamos, que son, respectivamente: \$ 413,27 ; 172,20 ; 134,53 (con \$ 0,01 de aproximación). Como ejercicio, calcule el estudiante estos tres valores.

208. Repartición compuesta directa e inversa. — Supongamos que nos proponen el siguiente

PROBLEMA. — Tres chacareros, A , B y C , resuelven construir un pozo para utilizar en común, siendo el presupuesto de la obra \$ 740. Las casas de cada chacra distan del pozo, 200 m., 300 m. y 500 m., y el número de habitantes de las mismas es 12, 8 y 6 respectivamente. ¿Cómo corresponde repartir el costo de la obra?

Se admite que, al *aumentar* la distancia del pozo a las casas, *disminuyen* proporcionalmente los beneficios que presta el pozo; y que, al *aumentar* el número de habitantes de cada chacra, *aumentan* en proporción directa los beneficios del mismo. En consecuencia, corresponde repartir el costo de la obra en *razón directa* de los números de habitantes y en *razón inversa* de las distancias del pozo a cada casa.

Para esta repartición empleamos también la regla del (N.º 203), pero reemplazando los números que corresponden a las distancias, por sus recíprocos.

Tendremos que repartir, pues, la cantidad de \$ 740 en partes directamente proporcionales a los productos

$(12 \times \frac{1}{200} = \frac{12}{200})$, $(8 \times \frac{1}{300} = \frac{8}{300})$, $(6 \times \frac{1}{500} = \frac{6}{500})$; o bien, por razón análoga a la indicada en el (N.º 204), podríamos repartir proporcionalmente a los números $\frac{12}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{6}{5}$. Reduciendo estas fracciones al mínimo común denominador y suprimiendo este último (Nota del N.º 203), la repartición podrá simplificarse haciéndola proporcionalmente a los numeradores respectivos que resultan, que son los números 90, 40, 18.

Aplicando la regla del (N.º 203), encontramos las partes que buscábamos: al chacarero A le corresponde pagar \$ 450; al B corresponde \$ 200 y al C \$ 90. Dejamos, como ejercicio, que el estudiante calcule estos tres valores.

209. APLICACIONES. — Regla de compañía o de sociedad. — En la explotación de un negocio de cierta importancia, es corriente que se convenga entre varias personas reunir sus capitales para formar una *sociedad* o *compañía comercial*. La suma de capitales aportados por todos los socios se llama *capital social*, y el de cada socio se llama *imposición*. La ganancia o pérdida lograda por la sociedad, se llama *dividendo general*, y lo que le corresponde a cada socio, se llama *dividendo parcial*.

El procedimiento empleado para determinar cada dividendo parcial, se llama regla de sociedad o de compañía.

Si los socios han aportado sus capitales durante un mismo tiempo, es lógico que el dividendo general se distribuya entre los socios, proporcionalmente a la imposición de cada uno de ellos; en este caso, la regla de sociedad se llama *simple*, y se resuelve con la regla del (N.º 203).

Si las imposiciones no hubieran quedado colocadas durante el mismo *tiempo*, se admite que cada dividendo parcial sea proporcional al capital y al tiempo; en este caso, la regla de sociedad se llama *compuesta*, y se resuelve con la regla del (N.º 206).

La regla de sociedad, ya sea simple o compuesta, es siempre *directa*.

210. Ejemplo de regla de sociedad simple. — Resolveremos el siguiente

PROBLEMA. — *Tres socios realizan un negocio con una ganancia de \$ 4000, y desean repartirse equitativamente esa suma en relación al capital aportado por cada uno de ellos a la sociedad. Calcular lo que le corresponde a cada uno, sabiendo que los capitales respectivos fueron de \$ 20 000, \$ 25 000, \$ 35 000.*

Aplicaremos, pues, la regla del (N.º 203); para ello, llamando x , y , z , lo que corresponde a cada socio, repartiremos los \$ 4 000 proporcionalmente a los números 20 000, 25 000 y 35 000; tendremos:

$$x = \frac{4\,000}{20\,000 + 25\,000 + 35\,000} \times 20\,000 =$$

$$= \frac{\text{Dividendo general}}{\text{Capital social}} \times (1.ª \text{ imposición}) = \$ 1\,000$$

$$y = (4\,000 : 80\,000) \times 25\,000 = \$ 1\,250$$

$$z = (4\,000 : 80\,000) \times 35\,000 = \$ 1\,750$$

Verificación:

$$\$ 1\,000 + \$ 1\,250 + \$ 1\,750 = \$ 4\,000$$

Las fórmulas halladas en el problema, nos justifican, pues, la siguiente

REGLA. — Para hallar cada dividendo parcial, se multiplica por cada imposición, el cociente del dividendo general por el capital social.

211. Ejemplo de regla de sociedad compuesta. — Resolvemos el siguiente

PROBLEMA. — *Dos socios ganaron \$ 3 000; el 1.º había colocado \$ 6 000 durante 15 meses y el otro \$ 11 000 durante 10 meses. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?*

Aplicando la regla del (N.º 206), y llamando x e y a lo que corresponde al 1.º y al 2.º socio, respectivamente, tenemos:

$$x = \frac{3\,000}{6\,000 \times 15 + 11\,000 \times 10} \times (6\,000 \times 15) = \$ 1\,350$$

$$y = \frac{3\,000}{6\,000 \times 15 + 11\,000 \times 10} \times (11\,000 \times 10) = \$ 1\,650$$

Podemos enunciar, pues, la siguiente

REGLA. — Para hallar cada dividendo parcial, se empieza multiplicando cada capital por el respectivo tiempo; luego, considerando los productos como capitales, se opera como en la regla de sociedad simple.

212. Cuestiones de prorratio. — La repartición de contribuciones, socorros mutuos, etc., forman un conjunto de cuestiones que se llaman de **prorratio**. Estos problemas se resuelven como los de regla de sociedad.

EJEMPLO. — *El costo de una obra pública es de \$ 24 000, y se resolvió repartirlo proporcionalmente entre las cuatro clases de contribuyentes de cierta población; de éstos, 20 pagaban \$ 80 de contribución; 25 pagaban \$ 110; 36 pagaban \$ 90, y 32 pagaban \$ 84. ¿A cuánto asciende la contribución de cada uno para la obra?*

En este caso aplicamos la regla del (N.º 211); para ello repartiremos los \$ 24 000 en partes proporcionales a los productos: $(20 \times 80 = 1\,600)$; $(25 \times 110 = 2\,750)$; $(36 \times 90 = 3\,240)$; $(32 \times 84 = 2\,688)$.

Siendo la suma de estos productos,

$$1\,600 + 2\,750 + 3\,240 + 2\,688 = 10\,278,$$

a cada clase le corresponderá pagar:

$$1.ª \text{ clase, } (24\,000 : 10\,278) \times 1\,600 = \$ 3\,736,14$$

$$2.ª \text{ clase, } (24\,000 : 10\,278) \times 2\,750 = \$ 6\,421,48$$

$$3.ª \text{ clase, } (24\,000 : 10\,278) \times 3\,240 = \$ 7\,565,67$$

$$4.ª \text{ clase, } (24\,000 : 10\,278) \times 2\,688 = \$ 6\,276,71$$

Por consiguiente, a cada uno de los contribuyentes le corresponde pagar: los de 1.^a clase, $3\,736,14 : 20 = \$ 186,81$; los de la 2.^a, $6\,421,48 : 25 = \$ 256,86$; los de la 3.^a, $7\,565,67 : 36 = \$ 210,16$; los de la 4.^a, $6\,276,71 : 32 = \$ 196,15$. (Resultados aproximados a menos de \$ 0,01).

Problemas sobre mezclas

213. Definiciones. — Se llama *media aritmética entre dos* cantidades o números, a su semisuma.

La *media aritmética entre varias* cantidades es el cociente de la suma de ellas dividida por el número de las mismas.

Así, la media aritmética de los números 13 , 15 , 20 , 24 es:

$$\frac{13 + 15 + 20 + 24}{4} = 18$$

Se llama *mezcla* de dos o más sustancias, su reunión en proporciones cualesquiera y conservando cada una su propia naturaleza.

Se llama *aleación*, la mezcla que se obtiene de la fusión de dos o más metales. El oro, la plata y el platino se emplean, en los usos corrientes, aleados con el estaño, cobre, etc.

Recordemos del curso anterior (A₂ N.º 69), que en las aleaciones de metales finos, se llama *ley* o *título* de las mismas, al número que se obtiene dividiendo el peso del metal fino por el peso bruto de la aleación.

La ley de una aleación se expresa generalmente en milésimas. Así, las monedas de oro y plata de la República Argentina son de una aleación de 900 gramos de oro o plata con 100 g. de cobre; por consiguiente, su título es $900 : (900 + 100) = 0,900$.

Se llama *precio* de una sustancia, la razón entre su valor, o costo total, y la cantidad de la misma.

214. Pueden presentarse dos clases de problemas de mezclas:

1.° PROBLEMA DIRECTO. — *Hallar el precio de una mezcla, conociendo las cantidades mezcladas y sus precios respectivos.*

2.° PROBLEMA INVERSO. — *Hallar las cantidades que deben mezclarse de dos o más sustancias cuyos precios conocemos, para que la mezcla resulte a un precio dado.*

215. Problema directo. — Cuando se mezclan sustancias de distintos precios, interesa conocer el precio que resulta para la *unidad* de la mezcla, al que se llama *precio medio*.

Así, por ejemplo, tenemos el siguiente

PROBLEMA I. — *Un comerciante mezcla tres clases de vinos: 16 litros de \$ 0,45 el litro, 5 litros de \$ 0,60, y 7 litros de \$ 0,50. ¿Cuál es el precio de un litro de mezcla?*

Llamemos x al precio de un litro de mezcla. El costo total de las tres clases de vinos mezclados es:

$$16 \times 0,45 + 5 \times 0,60 + 7 \times 0,50 = 7,20 + 3,00 + 3,50$$

Pero el número de litros mezclados es: $(16 + 5 + 7)$ y su costo total será también: $(16 + 5 + 7)x$.

Igualando estas dos expresiones del costo total, resulta la ecuación

$$(16 + 5 + 7)x = 7,20 + 3,00 + 3,50$$

de donde,

$$x = \frac{7,20 + 3,00 + 3,50}{16 + 5 + 7} = \frac{13,70}{28} = \$ 0,489 \dots$$

Vemos que el precio medio resulta ser la *media aritmética* de los costos de los componentes. Podemos, enunciar, pues, la siguiente

REGLA. — Para calcular el **PRECIO MEDIO** de una mezcla, se calcula el costo total y se divide por el número de unidades de la mezcla.

Llamando: $c, c', c'', \dots$ los números que expresan las cantidades mezcladas; p, p', p'' los números que expresan los precios de esas sustancias, y P el precio medio de la mezcla, tendremos la siguiente fórmula general:

$$P = \frac{c p + c' p' + c'' p'' + \dots}{c + c' + c'' + \dots} \quad [1]$$

NOTA. — La fórmula anterior se emplea también en los problemas de aleaciones, representando entonces las letras $P, p, p', \dots$ los títulos de las mismas.

216. PROBLEMA II. — *Se funden juntos, un lingote de oro que pesa 850 gramos cuya ley es 0,920, y otro que pesa 750 gramos, de ley 0,840. ¿Cuál es la ley de la nueva aleación?*

El peso de oro puro del primer lingote, expresado en gramos, es:

$$c \times p = 850 \times 0,920 = 782$$

Para el segundo lingote, tenemos:

$$c' \times p' = 750 \times 0,840 = 630$$

El peso total de la aleación es:

$$c + c' = 850 + 750 = 1600$$

Aplicando la fórmula [1] del párrafo anterior, tenemos, pues, la ley que buscamos:

$$P = \frac{c p + c' p'}{c + c'} = \frac{782 + 630}{1600} = 0,8825$$

217. PROBLEMA III. — *Una persona posee 320 litros de vino que cuesta \$ 0,60 el litro. ¿Cuánta agua debe agregar para obtener una mezcla de \$ 0,48 el litro?*

Con las notaciones anteriores, suponiendo que sea nulo el costo del agua, tendremos:

$$P = 0,48, \quad c = 320, \quad p = 0,60, \quad c' = x, \quad p' = 0.$$

Aplicando la fórmula [1] del (N.º 215), resulta:

$$0,48 = \frac{320 \times 0,60}{320 + x}$$

Despejando x de esta ecuación, encontramos: $x = 80$.

La solución del problema es, pues, que deben agregarse 80 litros de agua.

218. Problema inverso. — En este problema, se trata de determinar las cantidades x e y , de dos sustancias de precios respectivos p y p' que deben mezclarse para obtener una cantidad C , de precio medio P , comprendido entre p y p' .

La cantidad total de mezcla es: $x + y = C$

El costo total de la mezcla es: $p x + p' y = P \times C$

Se nos presenta, pues, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviéndolo por cualquiera de los métodos (N.ºs 166 a 172), encontramos:

$$\boxed{x = \frac{(P - p') C}{p - p'}} \quad \text{e} \quad \boxed{y = \frac{(p - P) C}{p - p'}}$$

Los dos valores de x e y resultan positivos, porque hemos supuesto $p > P > p'$, o bien, $p < P < p'$.

EJEMPLO I. — ¿Cuántos litros de vino de \$ 0,44 el litro, con vino de \$ 0,39 deben mezclarse, para formar 500 litros de mezcla de \$ 0,41 el litro?

Para aplicar las fórmulas anteriores, tendremos:

$$p = 0,44 \quad , \quad p' = 0,39 \quad , \quad P = 0,41 \quad , \quad C = 500$$

$$\text{de donde,} \quad x = \frac{(0,41 - 0,39) 500}{0,44 - 0,39} = \frac{10}{0,05} = 200$$

El valor de y se obtiene más rápidamente, así:

$$y = 500 - x = 500 - 200 = 300$$

Respuesta: deben mezclarse 200 litros de vino de \$ 0,44 el litro, con 300 litros de vino de \$ 0,39 el litro.

EJEMPLO II. — ¿Qué cantidad de oro de ley 0,750 debemos alea-
 con oro de ley 0,920 para que resulten 2 Kg. de una aleación cuya ley
 sea de 0,840?

En este ejemplo también pueden usarse las fórmulas anteriores, pero
 cambiando los precios p , p' y P por las leyes 0,750, 0,920 y 0,840,
 respectivamente.

Así, representando con x la cantidad de oro, expresada en kilo-
 gramos, de ley 0,750, tendremos:

$$x = \frac{(0,840 - 0,920) 2}{0,750 - 0,920} = 0,941...$$

La cantidad de oro de ley 0,920, expresada en Kg., será:

$$y = 2 - 0,941... = 1,058...$$

EJEMPLO III. — El rey Hieron, tirano de Siracusa, encargó a un
 artífice una corona de oro puro, de 10 libras de peso. Sospechando que
 el artífice hubiese mezclado plata con el oro, encargó a Arquímedes (céle-
 bre matemático del siglo III antes de J. C.), que hiciera el análisis sin
 deteriorar la corona. Este pudo descubrir el fraude, observando que el
 peso específico (*) de la corona era 16, mientras sabía que el peso espe-
 cífico del oro es 19 y el de la plata es 10 (aproximadamente). ¿Qué can-
 tidad de oro y plata contenía la corona?

Aplicando la fórmula anterior, en la que x es la cantidad de oro puro,
 $p = 19$, $p' = 10$, $P = 16$, $C = 10$, tendremos:

$$x = \frac{(16 - 10) 10}{19 - 10} = \frac{20}{3} = 6 \frac{2}{3}$$

Por consiguiente, en las 10 libras que pesaba la corona había $6 \frac{2}{3}$
 libras de oro, y $3 \frac{1}{3}$ libras de plata, aproximadamente.

* * *

(*) Recuérdese del curso anterior (A. N.º 66) que el peso específico de un
 cuerpo, es el número que expresa el peso de la unidad de volumen del cuerpo,
 estando expresados el peso y el volumen en unidades correspondientes. Para la
 resolución de ejercicios que requieran conocer el peso específico de sustancias
 usuales, véase nuestra "Tabla de logaritmos y Constantes usuales", donde se
 encontrarán los pesos específicos de 68 sustancias.

CAPÍTULO VII (*)

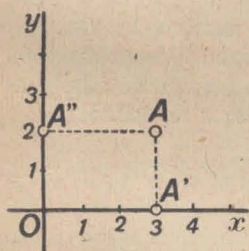
REPRESENTACION GRAFICA

Sistema cartesiano. - Coordenadas

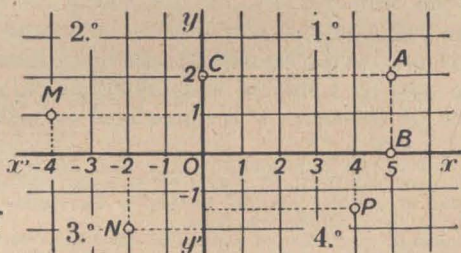
219. Coordenadas cartesianas en el plano. — Para fijar la posición de un punto en una recta, vimos que es necesario dar *un número*: la abscisa del punto respecto del sistema prefijado (N.º 9).

Veremos ahora que en un plano, la posición de un punto se fija mediante *dos números*.

Dibujemos en el plano (fig. 7) dos rectas perpendiculares entre sí: Ox y Oy ; sobre cada una de ellas tomemos un



(fig. 7)



(fig. 8)

sistema de abscisas de origen común O . Se acostumbra dibujar horizontalmente el eje Ox , orientándolo positivamente hacia la derecha; el eje Oy se dibuja verticalmente, orientándolo positivamente hacia arriba.

(*) Como en el estudio de la "Variación del binomio de primer grado" que figura en este Capítulo se emplea la teoría de la "Semejanza de triángulos" que corresponde al curso de Geometría del mismo año, convendrá, pues, anteponer el estudio de este último tema al del presente Capítulo.

Si desde un punto A del plano se trazan las paralelas AA'' y AA' a cada eje, se obtendrán los puntos A'' y A' , que tienen abscisas determinadas. Así, en la (fig. 7), la abscisa de A' es 3, y la de A'' es 2. Podemos decir, pues:

A todo punto del plano corresponden dos números.

Recíprocamente, dados dos números reales, y estableciendo cuál de ellos deba considerarse primero, podemos tomar éste como abscisa de un punto A' del eje Ox , y el otro como abscisa de un punto A'' del eje Oy . Considerando estos dos puntos como proyecciones de un cierto punto del plano, el punto A resulta así determinado por la intersección de las paralelas trazadas por A' y A'' a los ejes. Por consiguiente, podemos decir:

A dos números reales, dados en cierto orden, corresponde un solo punto del plano.

En este caso, existe también correspondencia *biunívoca* entre dos puntos del plano y pares de números reales, considerados estos números en un orden determinado. Para cada par de números resulta así coordinado un punto, y para cada punto un par de números. Por este motivo, los dos números que corresponden a un punto se llaman sus **coordenadas**, y se agrega, también, *cartesianas*, debido al nombre del matemático *Descartes* (*), quien ideó ese sistema de coordenadas.

(*) RENATO DESCARTES (1596-1650), matemático y filósofo francés, llamado también *CARTESIO*, fué el primero que empleó en forma sistemática los números negativos y concibió la idea de representarlos, conjuntamente con los positivos, sobre un eje orientado.

Cuando joven, y aún con poca salud, tomó parte en varias campañas, y se dice que durante un crudo invierno en un campamento de Austria, concibió la idea de la representación gráfica de los números reales.



Si bien el aspecto de sus obras difiere mucho de las modernas, sin embargo se halla en ellas lo esencial de las representaciones gráficas. Estableció que una letra podría representar un número tanto positivo como negativo, y, en consecuencia, convenció a los matemáticos que los enteros negativos son en realidad números, y que tienen su razón de ser en las operaciones algebraicas. Introdujo también la notación moderna de exponente, si bien no usó los exponentes negativos ni los fraccionarios. A Descartes debemos también el empleo de las

últimas letras del alfabeto para representar las incógnitas, y de las primeras para las cantidades conocidas.

En 1637 publicó su famoso *Discurso del Método*, notable contribución a la evolución de las ciencias, y en 1644 publicó sus *Principios filosóficos*, obra consagrada, en su mayor parte, a la ciencia física.

Para diferenciar los números leídos sobre cada eje, se reserva la denominación de **abscisas** para las lecturas sobre el eje Ox , y la de **ordenadas** para las sobre el eje Oy . La abscisa y ordenada de un punto son, pues, sus coordenadas.

Los ejes respecto a los cuales se refieren los puntos, se llaman *ejes coordenados cartesianos*, o, más brevemente, un **sistema cartesiano**.

Al eje horizontal Ox se le llama *eje de las abscisas*, o, más brevemente, *eje de las equis*. Al eje vertical Oy se le llama *eje de las ordenadas*, o bien, *eje de las íes*.

Para indicar que un punto A tiene por abscisa y ordenada los números a y b , respectivamente, se escribe: $A(a, b)$.

Así, para los puntos de la (fig. 8), tendremos:

$A(5, 2)$; $B(5, 0)$; $C(0, 2)$; $M(-4, 1)$;
 $N(-2, -2)$; $P(4, -1.5)$; $O(0, 0)$

220. Signos de las coordenadas. — Los dos ejes coordenados dividen el plano (fig. 8), en cuatro ángulos: xOy , yOx' , $x'Oy'$, $y'Ox$, que se llaman, respectivamente: 1.º, 2.º, 3.º, 4.º cuadrantes.

Fácilmente puede constatarse que: todo punto del primer cuadrante tiene sus coordenadas positivas; los del segundo cuadrante tienen la abscisa negativa y la ordenada positiva; ..., etc.

Según que un punto M se encuentre en uno o en otro de los cuadrantes referidos, tendremos, pues:

Si M se halla en el 1.º cuadrante:	$x > 0$, $y > 0$;
" M " " " " 2.º "	$x < 0$, $y > 0$;
" M " " " " 3.º "	$x < 0$, $y < 0$;
" M " " " " 4.º "	$x > 0$, $y < 0$.

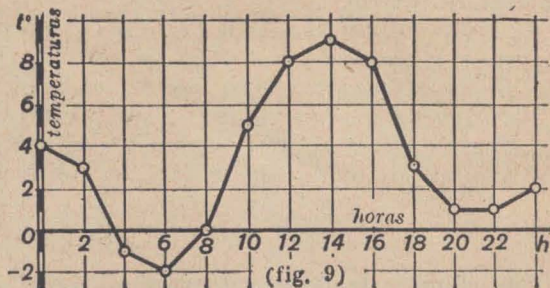
Es evidente también, que todos los puntos del eje de las x tienen ordenada nula; los del eje de las y tienen abscisa nula.

221. Diagramas. — Las coordenadas cartesianas tienen una gran aplicación en los *diagramas*, que se emplean actualmente en gran escala para representar gráficamente fenómenos físicos, químicos, estadísticos, sociales, económicos, biológicos, etc.

Un diagrama se puede construir siempre que, en un fenómeno, los valores que adquiera una magnitud dependan de los valores que adquiera otra magnitud.

EJEMPLO. — Supongamos que cierto día anotamos la temperatura ambiente, tomada cada dos horas. Podemos disponer las anotaciones como indica el siguiente cuadro:

<i>h</i>	<i>t</i>
0	4
2	3
4	-1
6	-2
8	0
10	5
12	8
14	9
16	8
18	3
20	1
22	1
24	2



Fijamos luego un sistema de ejes coordenados (fig. 9), y convenimos en tomar sobre el eje de las abscisas, las horas sucesivas de las observaciones; por tanto, podremos llamarle *eje de las horas* o *de los tiempos*. En el eje de las ordenadas tomamos las sucesivas temperaturas; por tanto, le llamaremos *eje de las temperaturas*.

Para cada par de números, hora de la lectura y temperatura observada, corresponderá un punto que tendrá esos dos números como coordenadas. Del conjunto de las observaciones resultará, a su vez, un conjunto de puntos, que nos dará una idea de cómo varió la temperatura durante ese día.

Resulta aun más evidente la variación señalada, si unimos cada punto con el sucesivo mediante un segmento de recta; de este modo, si la línea quebrada sube, o baja, nos indica que la temperatura aumenta o disminuye respectivamente. Un dibujo como el anterior se llama un *diagrama*.

Es evidente que, si en lugar de relevar la temperatura cada dos horas lo hiciéramos cada hora, o cada minuto, obtendríamos así un conjunto de puntos más próximos unos de otros; la línea quebrada que así se obtendría, se parecería más a una línea curva. Si pudiéramos relevar las temperaturas en forma continua, tendríamos así una sucesión de puntos que, formando una línea (en general curva), nos daría una idea exacta de la variación del fenómeno.

Gráficas análogas se emplean en las clínicas para contralorear la fiebre de un enfermo.

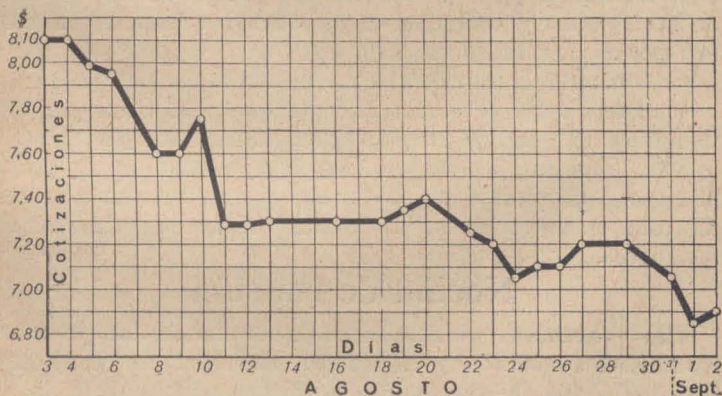
Los diagramas de temperaturas atmosféricas pueden obtenerse automáticamente mediante aparatos llamados *termógrafos*; no los describimos, porque suponemos serán ya conocidos por los estudiantes, disponiendo de ellos la generalidad de gabinetes de Física de nuestros Colegios Nacionales.

Como ejercicio, empléese la gráfica anterior para hallar la temperatura correspondiente a la hora 13; determínese también en qué instantes la temperatura es de 8°.

OTROS EJEMPLOS. — De cualquier fenómeno físico o social pueden construirse diagramas. Así, por ejemplo, podemos dibujar diagramas que representen la variación del grado de solubilidad de una sal según la temperatura del disolvente; la presión de una masa de gas, a temperatura constante, según el volumen que ocupa; la presión atmosférica según la hora de la observación, ...; etc.

Tomando datos de estadísticas, podemos representar la variación de la población de un país, la del precio de cierto artículo, la de títulos bancarios, etc.

Por los ejemplos citados, podrá apreciarse la importancia que tienen las gráficas, no solamente para el matemático, sino también en la vida práctica del profesional, comerciante, estadista, etc.



(fig. 10)

El diagrama de la (fig. 10) representa la variación de las cotizaciones oficiales del trigo, puesto sobre vagón en la dársena del

puerto de Buenos Aires, durante 30 días (del 3 de agosto al 2 de septiembre de 1938).

Como ejercicio, empléese dicha gráfica para determinar la cotización que correspondería al día 21; determínese también en qué días la cotización fué de \$ 7,20.

La operación de leer o determinar valores intermedios a los marcados expresamente en la gráfica, se llama *interpolación*.

222. Observaciones prácticas. — En el trazado de diagramas conviene tener presentes algunas normas prácticas generales:

a) Se empleará papel cuadriculado, o, mejor aún, milimetrado (como hacemos en la lámina que se encuentra al final de este libro).

b) La escala para ordenadas puede ser diferente de la de abscisas; conviene elegir las de manera que pueda utilizarse todo el espacio disponible en el intervalo que deba considerarse cada una de las coordenadas.

c) El origen de coordenadas puede estar fuera del dibujo, puesto que puede empezarse la numeración con el menor de los valores conocidos de cada coordenada.

d) Indíquese qué valores son los representados en el eje de las abscisas y cuáles en el eje de las ordenadas, así como las escalas adoptadas en cada eje.

e) Obtenida la representación de todos los puntos que corresponden a las observaciones realizadas, se traza por ellos una línea que no presente irregularidades, vale decir, que se aparte lo menos posible de ellos, compensando en lo posible el número de puntos dejados a uno y otro lado de la misma. El dibujo de la línea se facilita utilizando una plantilla de curvas.

Noción de función

223. Variables. — En las distintas ciencias se presentan cantidades *constantes* y cantidades *variables*. Son constantes, por ej.: el tiempo que emplea la Tierra o un planeta en dar una vuelta alrededor de su eje, o en la rotación alrededor del Sol; la velocidad de la luz en un medio homogéneo; la relación entre la longitud de la circunferencia y del diámetro, etc. En cambio, son variables, por ej.: la presión atmos-

férica; la temperatura en un determinado lugar; la longitud de una barra metálica; el valor numérico de una expresión algebraica para valores arbitrarios, también numéricos, dados a las letras que contiene (N.º 18); etc.

Consideremos uno cualquiera de los ejemplos anteriores de cantidades variables: el de la barra metálica. A la temperatura ambiente, por ej., a 15°, tendrá cierta longitud, por ej., 5000 mm. Si la calentamos, elevando su temperatura a 90°, su longitud aumentará, y será 5004 mm.; para otro valor de la temperatura, por ej. para 170°, su longitud también será otra, de 5009 mm. Análogamente si la enfriamos, para 2° le corresponderá una longitud de 4992 mm.

Vemos que, para cada valor de la temperatura corresponde un determinado valor para la longitud de la barra metálica. Ambas cantidades son, pues, *variables*, pero tienen una diferencia fundamental: la temperatura puede variar arbitrariamente, mientras que la longitud de la barra no; esta última longitud *depende* de la temperatura que tenga la barra. A la primera le llamamos **variable independiente**, y a la segunda (cuyo valor depende de la primera), le llamamos **variable dependiente**.

224. Funciones. — Considerando el ejemplo anterior, en el lenguaje corriente decimos que la longitud de la barra metálica *depende* de la temperatura; en el lenguaje matemático diremos que la longitud de la barra es *función* de la temperatura. En consecuencia, podemos dar la siguiente

DEFINICIÓN. — **Cuando una cantidad variable depende del valor atribuido a otra, se dice que es FUNCION de esa otra.**

Podemos decir, pues, que las palabras “función” y “variable dependiente” son sinónimas.

EJEMPLOS PRÁCTICOS. — Análogamente decimos que la temperatura ambiente es función de la hora; la presión atmosférica es función de la altura del punto de observación; el peso de sal disuelta en un líquido, es función de la temperatura; la distancia recorrida por un cuerpo al caer, es función del tiempo transcurrido desde que inició su caída; el costo de una tela es función del número de metros; la población de un país es función del año que ha sido relevada; etc.

NOTA. — Una función puede depender de más de una variable. Así, por ejemplo, el área de un rectángulo, que se expresa multiplicando sus dos dimensiones (A_2 N.º 56), es una función de las medidas de la base y de la altura; la altura de la columna de mercurio de un barómetro es función de la presión atmosférica y de la temperatura. En este curso nos ocuparemos solamente de las funciones de una sola variable independiente.

225. Funciones empíricas y funciones analíticas. — Entre las funciones indicadas en los ejemplos anteriores, figuran algunas cuyos valores están dados por tablas de estadísticas o resultados experimentales; a éstas se les llama **funciones empíricas**.

Así, son funciones empíricas las tratadas en los ejemplos de diagramas del (N.º 221).

En cambio, se llaman **funciones analíticas** de una variable independiente, aquellas cuyos valores se obtienen mediante cálculos con los valores dados a dicha variable independiente.

Así, por ej., son funciones analíticas de x , las siguientes:

$$3x ; \quad 2 - x ; \quad x^2$$

Para el cálculo de valores de estas funciones emplearemos, pues, el procedimiento ya indicado en el (N.º 18) para el valor numérico de una expresión algebraica. A continuación presentamos, en forma ordenada, respecto de x , un conjunto de esos valores:

<i>Variable independiente</i>	<i>Valor de la función:</i>		
x	$3x$	$2 - x$	x^2
—2	—6	4	4
—1	—3	3	1
0	0	2	0
1	3	1	1
2	6	0	4
3	9	—1	9
...	...	...	...

226. Notaciones. — Las variables se representan, generalmente, con las últimas letras del alfabeto: $x, y, z, \dots$; por el contrario, las cantidades constantes, por las primeras letras: $a, b, c, \dots$. La variable *independiente* se representa generalmente con la letra x ; la variable *dependiente* (o función), con la letra y .

Así, para los ejemplos de funciones analíticas tratadas en el párrafo anterior, escribiremos:

$$y = 3x; \quad y = 2 - x; \quad y = x^2$$

En ciertos casos se emplea para las variables la letra inicial de la palabra que representan. Así, por ej., la longitud de una circunferencia es función de su diámetro, y se expresa mediante la fórmula $c = 3,14 \times d$, la letra c (variable dependiente), representa la circunferencia, y la letra d (variable independiente), representa el diámetro.

Así como en el (N.º 124) indicamos con $A(x)$ una expresión algebraica dependiente de la letra x , aquí también empleamos el símbolo análogo $f(x)$, que se lee: *función de x* , o más brevemente, *f de x* ; escribiremos, pues:

$$y = f(x)$$

suponiendo que mientras x varía en cierto intervalo ($a b$), la función y adquiere, para cada valor de x , un valor determinado (o, en todo caso, un número limitado de valores de y). El intervalo ($a b$) se llama *campo* en que está definida la función.

Para indicar funciones diferentes, se afecta la letra f con un subíndice. Así, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ indican tres funciones diferentes de x que se leen: *f sub 1 de x* ; *f sub 2 de x* ; etc. También puede reemplazarse la letra f por otras análogas; así, se emplearán los símbolos $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, etc.

Para indicar el valor numérico que corresponde a una función para determinado valor numérico de la variable independiente, se reemplaza, en el símbolo que representa la función, la letra que designa la variable independiente por dicho valor. Así, por ej., $f(2)$, $f(\frac{3}{4})$, $f(-1)$, indican los valores numéricos de la función $f(x)$ para $x=2$, $x=\frac{3}{4}$, $x=-1$, respectivamente.

EJEMPLO. — Si con el símbolo $f(x)$ indicamos la función $y = x^2 - 4x + 3$, tendremos:

$$f(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = -1$$

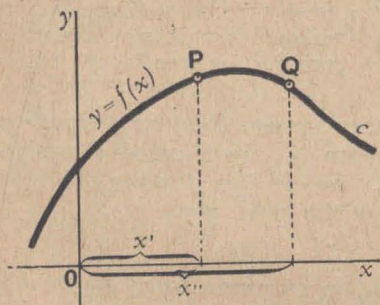
$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{4}\right) + 3 = \frac{9}{16}$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 3 = 8$$

227. Representación gráfica de una función. — En el párrafo anterior vimos que una función de la variable x se puede representar con la notación $y = f(x)$.

Si damos a x valores arbitrarios, por ejemplo, $x = x'$,

podemos calcular los valores correspondientes de la función $y' = f(x')$, como ya lo hicimos en los ejemplos del (N.º 225). Este par de números x' e y' podemos considerarlos como coordenadas de un cierto punto en un sistema de ejes coordenados cartesianos Ox y Oy (fig. 11), tomando x' como abscisa e y' como ordenada (N.º 219); obtendremos así un punto $P(x', y')$.



(fig. 11)

Para otro valor de x , por ejemplo, $x = x''$, calculamos $y'' = f(x'')$, y, en consecuencia, obtenemos otro punto $Q(x'', y'')$.

Si los valores sucesivos que damos a x difieren muy poco entre sí, obtendremos un conjunto de puntos como los P , Q , ... etc., también muy próximos unos de otros. Se forma así una línea c (generalmente curva), que se llama la **curva representativa de la variación de la función**. Recíprocamente, decimos que la relación

$$y = f(x)$$

es la *ecuación* de la línea c .

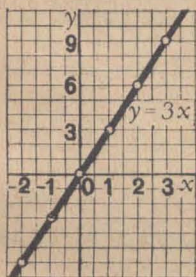
Se comprende que, para enterarnos completamente de la variación de la función dada, sería necesario dar a x , sucesivamente, y en orden creciente, *todos* los valores posibles

desde un valor negativo muy pequeño (tan pequeño como queramos), hasta un valor positivo muy grande (tan grande como queramos); esto se expresa, en forma abreviada, diciendo que *hacemos crecer x desde $-\infty$ hasta $+\infty$* . (Los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ se leen: *menos infinito* y *más infinito*). Decimos también, que hacemos crecer x en el campo $(-\infty + \infty)$, que es el más amplio que podamos imaginar.

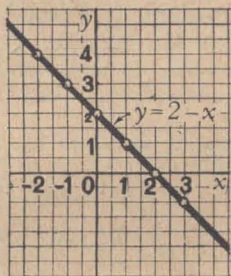
EJEMPLOS. — Las (figs. 12, 13 y 14) son las curvas representativas de las funciones

$$y = 3x, \quad y = 2 - x, \quad y = x^2$$

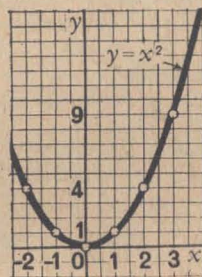
limitadas en el campo $(-3 \ 4)$. Se destacan en ellas los puntos que corresponden a los valores calculados en el cuadro del (N.º 225).



(fig. 12)



(fig. 13)



(fig. 14)

Obsérvese que, para la primera y tercera gráfica, se ha tomado la escala de las ordenadas diferente de la de las abscisas, a los efectos de poder dibujar las curvas dentro de los límites disponibles de la dimensión vertical del papel (N.º 222, b).

228. Crecimiento o decrecimiento de una función. — Consideremos, por ej., la función:

$$y = 3x$$

En el (N.º 225) vimos que para los valores de la variable independiente:

$$x = \dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

tenemos los correspondientes valores de la función:

$$y = \dots -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots$$

Observemos en el ejemplo que, cuando la variable independiente *aumenta*, la función también *aumenta* (o *crece*); análogamente cuando x *disminuye*, y *disminuye*. Como en este caso ambas variables crecen o decrecen simultáneamente, decimos que *varían en el mismo sentido*.

DEFINICIÓN. — Una **FUNCIÓN** se llama **CRECIENTE** cuando *varía en el mismo sentido* de la variable independiente.

EJEMPLOS. — En el curso anterior (A_2 N.º 113), vimos que dos cantidades directamente proporcionales *varían en el mismo sentido*.

Así, por ej., la *cantidad de una mercadería* y el *costo* respectivo; la *cantidad de trabajo* ejecutado en determinado tiempo y el *número de obreros* empleados; la *longitud de camino* recorrido por un móvil y el *tiempo* empleado en recorrerlo; etc.

Diremos, pues, que el costo de una mercadería es una función *creciente* de la cantidad adquirida de ella; etc.

229. Si consideramos el segundo ejemplo del (N.º 225), o sea la función:

$$y = 2 - x$$

vemos que para valores *crecientes* de la variable x , o sea para

$$x = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

obtenemos valores *decrecientes* de la función y :

$$y = \dots 4, 3, 2, 1, 0, -1, \dots$$

En este caso decimos que ambas variables *varían en sentido contrario*.

DEFINICIÓN. — Una **FUNCIÓN** se llama **DECRECIENTE** cuando *varía en sentido contrario* de la variable independiente.

EJEMPLOS. — En el curso anterior (A_2 N.º 116), también vimos que dos cantidades inversamente proporcionales *varían en sentido contrario*. Así, por ej., el *número de obreros* empleados en ejecutar determinado trabajo y el *tiempo* empleado; la *cantidad de mercadería* que se puede comprar con cierta suma de dinero y el *precio unitario* de la misma; etc.

Diremos, pues, que el número de obreros empleados es una función *decreciente* del tiempo; etc.

230. NOTA. — De acuerdo con las definiciones que anteceden (N.ºs 228 y 229), para investigar si una función es creciente o decreciente, bastará, pues, dar a la variable dos valores cualesquiera y observar cuál es el mayor de los valores correspondientes de la función:

a) La función será *creciente*, cuando al mayor valor de la variable corresponde *siempre* el *mayor* valor de la función.

b) La función será *decreciente*, cuando al mayor valor de la variable corresponde *siempre* el *menor* valor de la función.

Variación del binomio de primer grado

231. El binomio de primer grado $ax + b$, siendo x la variable independiente, a y b constantes, se llama *función lineal*. El estudio de la variación de esta función se basa en las propiedades siguientes:

TEOREMA I. — La función $y = ax + b$ es **CRECIENTE** cuando el coeficiente a es **POSITIVO**, y es **DECRECIENTE** cuando a es **NEGATIVO**.

1.º caso: Sea $a > 0$.

Demos a la variable x dos valores *cualquiera*, por ej., x' y x'' ; la función tomará los valores correspondientes:

$$y' = ax' + b, \quad y'' = ax'' + b$$

Si suponemos $x' > x''$

al multiplicar los dos miembros de esta desigualdad por el número positivo a , tendremos otra desigualdad de *igual sentido* (N.º 144).

$$ax' > ax''$$

y, sumando b a los dos miembros (N.º 142), resulta:

$$ax' + b > ax'' + b$$

o sea:

$$y' > y''$$

La función lineal es, pues, en este caso, *creciente*, porque a mayor valor de la variable corresponde mayor valor de la función (N.º 230, a).

EJEMPLOS. — Es creciente la función $y = 3x$ tratada en el N.º 228), porque el coeficiente de x es $3 > 0$; también lo son las siguientes: $y = \frac{1}{2}x$; $y = x$; $y = 5x - 2$, porque los coeficientes de x , o sea $\frac{1}{2}$, 1 , 5 , son positivos.

2.º caso: Sea $a < 0$.

Como en el caso anterior, suponiendo $x' > x''$ al multiplicar los dos miembros de esta desigualdad por el número negativo a , tendremos otra desigualdad de *sentido contrario* (N.º 144).

$$ax' < ax''$$

de donde

$$ax' + b < ax'' + b, \quad \text{o sea,} \quad y' < y''$$

La función lineal es, pues, en este caso, *decreciente*, porque a mayor valor de la variable, corresponde menor valor de la función (N.º 230, b).

EJEMPLOS. — Es decreciente la función $y = 2 - x$, tratada en el (N.º 229), o sea la función $y = -x + 2$, porque el coeficiente de x es $-1 < 0$; también lo son las siguientes: $y = -\frac{3}{4}x$; $y = -x$; $y = -4x + 2$; porque los coeficientes de x , o sea $-\frac{3}{4}$, -1 , -4 , son negativos.

232. TEOREMA II. — Para valores de la variable infinitamente grandes, la función $ax + b$ es también infinitamente grande y de signo igual al del término en x .

Sea, por ej., la función: $y = 2x - 6$

1.º Si damos a x valores muy grandes y positivos, decimos que y también resulta muy grande y positiva, y tan grande como queramos.

Supongamos, por ej., que deseamos sea y mayor que un millón; es decir, que tendremos la desigualdad:

$$2x - 6 > 1\,000\,000$$

Resolviéndola (N.º 154), encontramos:

$$x > 500\,003$$

Significa, pues, que basta dar a x un valor mayor que 500 003 para que y sea mayor que 1 000 000.

Análogamente, podemos dar a x valores suficientemente grandes, para que y sea mayor que 1 000 000 000, etc.

2.° Si damos a x valores muy grandes pero negativos, decimos que y también resulta muy grande en valor absoluto pero negativa (es decir, de signo igual al que toma el término ax para valores negativos de x).

Supongamos, por ej., que deseamos sea y mayor en valor absoluto que un millón, pero negativa; es decir, que y tendrá que ser menor, en valor relativo, que $-1\,000\,000$. Tendremos, pues, la desigualdad:

$$2x - 6 < -1\,000\,000$$

de donde

$$x < -499\,997$$

Significa, pues, que basta sea x en valor absoluto, mayor que 499 997 pero negativo, para que y sea mayor en valor absoluto que 1 000 000.

233. En el ejemplo anterior hemos considerado el caso que el coeficiente de x es positivo. Si ese coeficiente es negativo, fácilmente puede constatar el estudiante, siguiendo método análogo, que las conclusiones resultarán invertidas; es decir: para valores de x muy grandes y positivos, y resulta muy grande en valor absoluto pero negativa; para valores de x muy grandes en valor absoluto pero negativos, y resulta muy grande y positiva.

234. NOTA. — En el (N.° 227) vimos que con el símbolo $+\infty$ indicamos una cantidad positiva muy grande (tan grande como queramos), y con el símbolo $-\infty$ indicamos una cantidad también muy grande en valor absoluto (tanto como lo queramos), pero negativa.

Podemos resumir, pues, el teorema anterior en el siguiente esquema:

Dada la función $y = ax + b$

Si $a > 0$ $\left\{ \begin{array}{ll} \text{cuando } x = +\infty, & \text{tenemos } y = +\infty \\ \text{'' } x = -\infty, & \text{'' } y = -\infty \end{array} \right.$

Si $a < 0$ $\left\{ \begin{array}{ll} \text{cuando } x = +\infty, & \text{resulta } y = -\infty \\ \text{'' } x = -\infty, & \text{'' } y = +\infty \end{array} \right.$

235. Variación de la función $y = ax + b$.

Los dos teoremas que preceden nos permiten estudiar fácilmente la variación de la función lineal

$$y = ax + b$$

Notemos también que la función se *anula*, es decir, que $y = 0$, para el valor de x que satisface la relación

$$0 = ax + b, \text{ o sea, } x = -\frac{b}{a}$$

Así, la función $y = 2x - 6$ se anula, para $x = -(-6):2$, o sea, $x = 3$.

1.º caso: Sea $a > 0$.

Si hacemos *crecer* x desde un valor muy grande en valor absoluto pero negativo hasta un valor muy grande y positivo (lo que se expresa diciendo que x crece desde $-\infty$ a $+\infty$), de acuerdo con los teoremas I y II que preceden (N.ºs 231 y 232), la función y también *crece* desde $-\infty$ a $+\infty$.

La función resulta, pues, primeramente *negativa*, se *anula* para $x = -b/a$, y luego es *positiva*.

2.º caso: Sea $a < 0$.

En este caso, de acuerdo con los teoremas I y II (N.ºs 231 y 232), cuando x *crece* desde $-\infty$ a $+\infty$, la función y *decrece* desde $+\infty$ a $-\infty$.

La función resulta, pues, primeramente *positiva*, se *anula* para $x = -b/a$, y luego es *negativa*.

236. Cuadro de las variaciones. — Como lo hicimos en los ejemplos del (N.º 225), y para mejor enterarnos de la variación de una función, conviene, en general, presentar dicho estudio en un cuadro.

En la página que sigue, presentamos los dos cuadros que corresponden a la función lineal, en los dos casos de a positivo o negativo.

Obsérvese que se han escrito los valores de la variable x de arriba para abajo en orden de magnitud creciente. En la

segunda columna se encuentran los valores correspondientes de la función y . Basta leer, pues, de arriba para abajo la columna de los valores de la función, para enterarnos fácilmente de su variación.

$a > 0$		$a < 0$	
x	y	x	y
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
crece	crece negativa	crece	decrece positiva
$-b/a$	0	$-b/a$	0
crece	crece positiva	crece	decrece negativa
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

También pueden presentarse dichos valores en *filas horizontales*, como indicamos a continuación para un ejemplo numérico:

$$y = 3x - 6$$

x	$-\infty$	...	crece	...	2	...	crece	...	$+\infty$
y	$-\infty$	...	crece	...	0	...	crece	...	$+\infty$

Para enterarnos mejor aún que con los cuadros, del sentido de la variación de una función, se emplea el método gráfico, como ya lo hicimos al tratar "Diagramas" en el (N.º 221).

237. Representación gráfica de la función lineal.

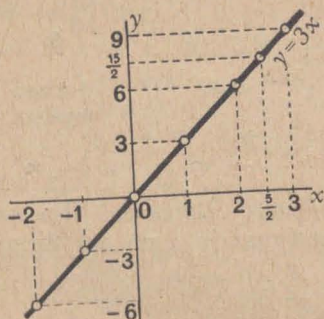
Caso particular de la función $y = ax$. — Consideremos primeramente un ejemplo numérico; sea la función

$$y = 3x$$

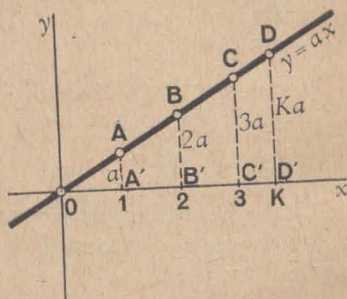
que ya ha sido tratada en el (N.º 225). En el primer ejemplo del (N.º 225) hallamos algunos puntos de la gráfica de dicha función (fig. 12), los que reproducimos nuevamente en la (fig. 15).

Puede verificarse que todos estos puntos se encuentran *alineados*, es decir, situados sobre una misma línea recta que pasa por el origen de coordenadas, aun aquellos puntos que se obtienen dando a x valores no enteros. Así, por ej., para $x = \frac{5}{2}$ se encuentra $y = \frac{15}{2}$; verifíquese que el punto $(\frac{5}{2}, \frac{15}{2})$ también se encuentra alineado con los anteriores.

Esta verificación experimental nos induce a presumir que el diagrama de la función $3x$ sea, efectivamente, *la recta* sobre la que se encuentran aquellos puntos.



(fig. 15)



(fig. 16)

Análogamente podríamos efectuar esa verificación para las funciones

$$x, \frac{1}{2}x, -x, -3x, \text{ etc.}$$

es decir, para funciones lineales del tipo ax .

Demostraremos ahora que, efectivamente, la función

$$y = ax$$

[1]

representa una línea recta que pasa por el origen de coordenadas.

Para ello, damos a x valores arbitrarios en la ecuación [1], por ej., $1, 2, 3, \dots, K, \dots$, obteniendo los valores correspondientes de la función, que son: $a, 2a, 3a, \dots, Ka, \dots$. Tomamos luego esos pares de valores en un sistema de ejes coordenadas cartesianos xOy (fig. 16), obteniendo los

puntos $A, B, C, \dots D, \dots$. Demostraremos ahora que todos estos puntos están alineados con el origen O , es decir, que los ángulos $\angle xOA, \angle xOB, \angle xOC, \dots \angle xOD, \dots$, son iguales.

En efecto, por ser las ordenadas $AA', BB', CC', \dots$, etc., perpendiculares al eje Ox , los triángulos $AA'O, BB'O, CC'O, \dots$, etc., son rectángulos. Además, los catetos de esos triángulos son *proporcionales*, puesto que, siendo

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{a}{1} = a; \quad \frac{BB'}{OB'} = \frac{2a}{2} = a; \quad \dots \quad \frac{DD'}{OD'} = \frac{Ka}{K} = a; \quad \dots$$

resulta:

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'} = \dots = \frac{DD'}{OD'} = \dots$$

Los triángulos $AA'O, BB'O, CC'O, \dots$ son, pues, semejantes (véase nuestra Geometría para el 3.º año, N.º 37, 3.º), y los ángulos homólogos $\angle xOA, \angle xOB, \angle xOC, \dots \angle xOD, \dots$ son iguales.

La recta OD es, pues, la gráfica de la función [1].

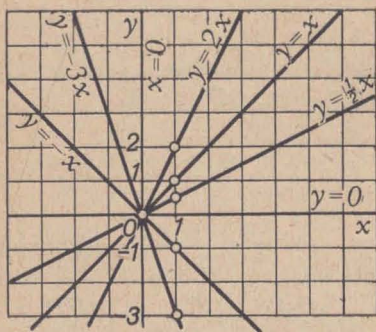
238. En la (fig. 17) se han trazado las rectas representativas de las funciones:

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = x, \quad y = 2x, \quad y = -3x, \quad y = -x$$

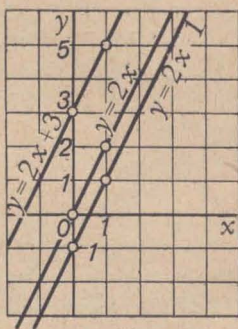
Obsérvese que cuando el coeficiente a es *positivo*, la recta es interior del 1.º y 3.º cuadrantes (N.º 220); en cambio, cuando a es *negativo* la recta es interior del 2.º y del 4.º cuadrantes.

Lo antedicho se justifica fácilmente por el esquema del (N.º 234), pues, según él, podemos decir que siendo $a > 0$, la función lineal tiene un punto de coordenadas $(+\infty, +\infty)$, es decir, del 1.º cuadrante, y tiene también un punto de coordenadas $(-\infty, -\infty)$, es decir, del 3.º cuadrante; análogamente siendo $a < 0$, los puntos de coordenadas $(+\infty, -\infty)$ y $(-\infty, +\infty)$ pertenecen al 4.º y al 2.º cuadrantes, respectivamente,

239. Por el trazado de las rectas de la (fig. 17), el alumno podrá constatar que, para los diversos valores de a , la recta resulta tanto más inclinada sobre el eje de las x cuanto mayor sea el valor absoluto de a . Por esta razón el coeficiente a , que fija el ángulo de la recta con el eje de las x , se le llama **coeficiente angular** de la recta.



(fig. 17)



(fig. 18)

Como casos particulares, resulta fácil verificar que las ecuaciones

$$y = x, \quad y = -x$$

representan las bisectrices de los ángulos de los ejes coordenados.

240. Caso general de la función $y = ax + b$. — Consideremos primeramente un ejemplo numérico; sea la función

$$y = 2x + 3$$

El valor que adquiere para cualquier valor de x es igual al correspondiente de la función $2x$ aumentado en 3 unidades. Para obtener la gráfica de la función $2x + 3$ bastará, pues, desplazar 3 unidades paralelamente al eje de las y , en sentido positivo, todos los puntos de la recta $y = 2x$. Este desplazamiento justifica que la gráfica de la función

$y = 2x + 3$ es una *recta paralela* a la $y = 2x$ (fig. 18).

Si se considera, por ej., la función

$$y = 2x - 1$$

con un razonamiento análogo al anterior, vemos que su gráfica es una recta paralela a la $y = 2x$, obtenida desplazando en *una* unidad los puntos de esta última, paralelamente al eje de las y , pero en sentido negativo.

241. Como el razonamiento realizado para los casos numéricos que preceden, se podría repetir para el caso general de la función lineal con coeficientes literales, podemos decir, pues, que:

La curva representativa de la variación (o gráfica) del binomio de primer grado $y = ax + b$ es una **RECTA**; que, en el caso de ser $b = 0$, pasa por el origen de coordenadas.

NOTA. — El (N.º 240) nos justifica que, *dos rectas que tengan iguales coeficientes angulares, son paralelas*.

EJEMPLOS. — Las ecuaciones:

$$y = -2x, \quad y = -2x + 5, \quad y = -2x - 4$$

representan, todas, rectas paralelas; la primera pasa por el origen de coordenadas.

La segunda corta al eje positivo de las y , a 5 unidades de distancia del origen de coordenadas; la tercera corta al eje negativo de las y , a 4 unidades de distancia del origen. Estas ordenadas, $+5$ y -4 , se llaman *ordenadas en el origen*.

242. Trazado práctico de la recta. — Del primer curso de Geometría sabemos que una recta queda determinada por dos cualesquiera de sus puntos (G_1 N.º 12). En consecuencia, para el trazado de la gráfica de una función lineal, basta obtener *dos* de sus puntos y luego trazar la recta que pasa por ellos.

Así, por ejemplo, sea la función

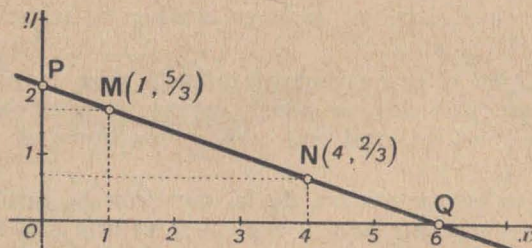
$$y = -\frac{1}{3}x + 2$$

Dando a x un valor arbitrario, por ej., $x = 1$, obtenemos

$y = \frac{5}{3}$; éstas son las coordenadas del punto M indicado en la (fig. 19).

Otro punto lo tendremos haciendo, por ejemplo, $x=4$, y resulta $y = \frac{2}{3}$, que determina el punto N .

La recta trazada por los puntos M y N es la gráfica de la función dada.



(fig. 19)

243. Generalmente resulta más cómodo determinar los puntos donde la recta corta a los ejes coordenados.

Así, para hallar el punto P donde la recta corta al eje de las y , como todo punto de este eje tiene abscisa nula, hacemos en la ecuación de la recta dada $x=0$, obteniendo: $y=2$ (*ordenada en el origen*), que es la ordenada del punto P . Para hallar el punto Q donde la recta corta al eje de las x , hacemos en la ecuación de la recta dada $y=0$; despejando el valor de x , obtenemos: $x=6$, que es la abscisa del punto Q . La recta pedida es, pues, la que pasa por los puntos P y Q .

Formas de la ecuación general de primer grado con dos incógnitas

244. La ecuación $Ax + By + C = 0$ [1]
que es de primer grado respecto de las variables x e y ,
puede siempre tomar la forma de la función lineal

$$y = ax + b \quad [2]$$

cuando B sea diferente de cero. En efecto, dentro de esta

hipótesis, podemos dividir los dos miembros de la [1] por B , y despejando y obtenemos la ecuación equivalente:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad [3]$$

que es, precisamente de la forma de la [2] si hacemos $-A/B = a$, $-C/B = b$.

Todas las soluciones de la [3], es decir, todos los pares de números x e y que la satisfacen, son coordenadas de puntos de la recta; como, además, por hipótesis $B \neq 0$, las soluciones de la [3] son soluciones de la [1] y recíprocamente, se deduce, pues, que la [1] y la [3] representan la misma recta.

245. En caso de ser $B=0$, la [1] se transforma en

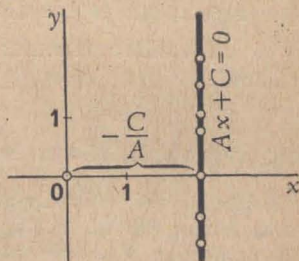
$$Ax + C = 0$$

Como además $A \neq 0$, de lo contrario no existiría ecuación entre las variables x e y , se deduce la ecuación equivalente:

$$x = -\frac{C}{A}$$

la que significa que todos los puntos de la gráfica tienen la misma abscisa $-C/A$, y por consiguiente, pertenecen a una misma recta paralela al eje de las y (fig. 20).

Vemos, pues, que aun en el caso de ser $B=0$, la [1] representa una recta.

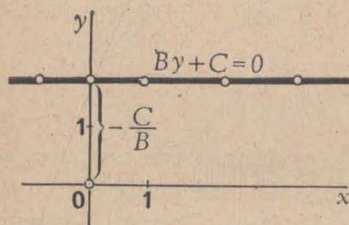


(fig. 20)

246. Análogamente, en caso de ser $A = 0$, la [1] se transforma en

$$B y + C = 0$$

de donde se deduce la ecuación equivalente:



(fig. 21)

$$y = -\frac{C}{B}$$

que representa una **recta paralela al eje de las x** (fig. 21) que corta al eje de las y a la distancia $-C/B$ del origen de coordenadas.

247. En caso de ser $C = 0$, resulta la ecuación equivalente:

$$y = -\frac{A}{B} x$$

que ya demostramos representa una **recta que pasa por el origen de coordenadas** (N.º 237).

Si además tenemos $A = 0$, resulta la ecuación equivalente:

$$y = 0$$

que representa el eje de las x .

Si en cambio tenemos $B = 0$, resulta la ecuación equivalente:

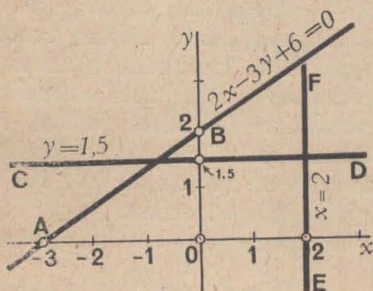
$$x = 0$$

que representa el eje de las y .

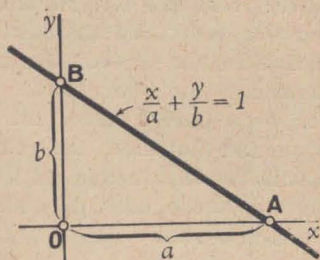
EJEMPLOS. — 1.º La gráfica de la función $2x - 3y + 6 = 0$ es la recta AB de la (fig. 22). Para representarla, determinamos los puntos A y B de intersección con los ejes coordenados, procediendo como indicamos en el (N.º 243). Así, para $x = 0$, tenemos $-3y + 6 = 0$, de donde $y = 2$ (ordenada del punto B); para $y = 0$, tenemos $2x + 6 = 0$, de donde $x = -3$ (abscisa del punto A).

2.º La gráfica de la función $y=1,5$ es la recta CD paralela al eje de las x , a la distancia 1,5 de dicho eje.

3.º La gráfica de la función $x=2$ es la recta EF paralela al eje de las y , a la distancia 2 de dicho eje.



(fig. 22)



(fig. 23)

248. Una forma particular interesante de la ecuación de la recta, es la siguiente

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

que representa la [1] del (N.º 244) para $A=1/a$; $B=1/b$; $C=-1$.

Procediendo como indicamos en el (N.º 243) se encuentra que la gráfica de esta recta AB (fig. 23), corta al eje de las x a la distancia $OA=a$ del origen de coordenadas, y al eje de las y a la distancia $OB=b$, consideradas esas distancias con los signos respectivos.

Inversamente, deseando formular la ecuación de una recta $A'B$ (fig. 22), que corte, por ej., al eje de las x y al de las y a las distancias respectivas de -3 y de $+2$ del origen de coordenadas, escribiremos:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1, \text{ o sea, } 2x - 3y + 6 = 0$$

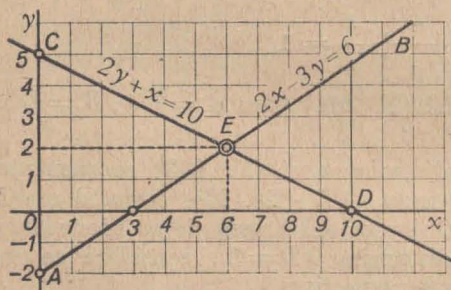
Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

249. Sistema determinado. — Como los valores numéricos de las coordenadas de cualquier punto de una recta, sustituidos en la ecuación respectiva la transforman en una identidad, son, por tanto, *soluciones* de aquella ecuación. Por otra parte, como una recta tiene infinitos puntos, la propiedad anterior nos confirma, pues, que una ecuación aislada con dos incógnitas tiene *infinitas soluciones* (N.º 161): son las coordenadas de cualquiera de sus puntos.

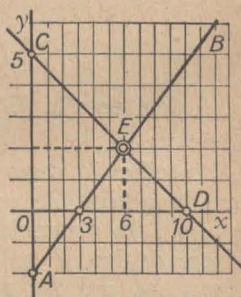
Sea ahora un sistema de *dos* ecuaciones con *dos* incógnitas; por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 & [1] \\ x + 2y = 10 & [2] \end{cases}$$

Hallando las gráficas de ambas ecuaciones, en la forma como indicamos en el (N.º 243), tenemos las rectas AB y CD (fig. 24).



(fig. 24)



(fig. 25)

Como las soluciones de la ecuación [1] son las coordenadas de puntos de la recta AB , y las soluciones de la [2] son las coordenadas de puntos de la recta CD , la solución común de las dos ecuaciones la formarán las coordenadas del punto común de las dos rectas, es decir, las coordenadas del punto de intersección E . Leyendo en el papel cuadriculado esas coordenadas, encontramos: $x=6$, e $y=2$.

La solución del sistema dado es, pues: $x=6$; $y=2$.
En general, podemos dar la siguiente

REGLA. — Para **RESOLVER GRÁFICAMENTE** un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se construye la gráfica de cada ecuación empleando un mismo sistema de ejes cartesianos, y las coordenadas del punto de intersección de ambas líneas dan la solución del sistema.

NOTA. — En la (fig. 25) volvemos a resolver el sistema ya tratado en la (fig. 24) pero modificando las escalas de las coordenadas (N.º 222, b); las gráficas seguirán siendo rectas, y la solución del sistema no varía.

EJEMPLO. — En la (fig. 26) de la lámina que se encuentra al final de este libro, empleamos el papel milimetrado (N.º 222, a) para la resolución del sistema:

$$\begin{cases} 4x + 9y = 36 \\ x - 4y = -4 \end{cases}$$

La primera ecuación resulta representada por la recta AB y la segunda por la CD . Las coordenadas del punto de encuentro E pueden leerse con 0,1 de aproximación: $x=4,3$ e $y=2,1$, siendo estos números la solución del sistema dado. Si resolviéramos analíticamente el sistema, encontraríamos: $x=4,32$ e $y=2,08$; en consecuencia, la solución que nos proporciona el método gráfico es, en este caso, y en virtud de las escalas empleadas, aproximada a menos de 0,1.

250. Discusión. — Para que el sistema admita solución es decir, sea *determinado* (N.º 173), es necesario y suficiente que las rectas representativas de las ecuaciones que lo forman se corten en un solo punto, o, en otros términos, que no sean paralelas ni coincidentes.

Per el sistema general puede escribirse de cualquiera de las dos maneras siguientes:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad \text{o bien,} \quad \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \\ y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'} \end{cases} \quad [1]$$

Esta última forma pone en evidencia los coeficientes angulares de ambas rectas, que son: $-a/b$ y $-a'/b'$.

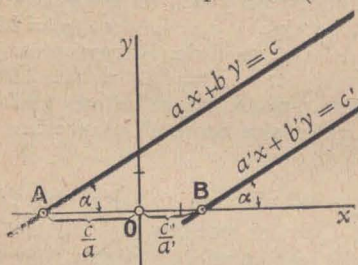
Pero para que las rectas [1] no sean paralelas ni coincidentes, sus *coeficientes angulares deben ser diferentes*, es decir que tendremos:

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}, \text{ de donde, } ab' - ba' \neq 0$$

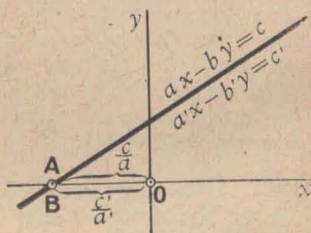
Vemos, pues, que esta última condición hallada por vía geométrica, concuerda con la que establecimos por vía analítica en el Capítulo anterior (N.º 173), para el mismo caso.

Interpretación gráfica de los casos de imposibilidad e indeterminación.

251. Caso de imposibilidad. — Si las rectas representativas de las ecuaciones que forman el sistema [1] son *paralelas* (fig. 27), no tienen *ningún punto común*; por consiguiente, el sistema *no admite solución*, o bien decimos que es un *sistema incompatible* (N.º 174).



(fig. 27)



(fig. 28)

Pero, también sabemos que cuando dos rectas [1] son paralelas, sus coeficientes angulares son iguales (Nota del N.º 241); es decir que con las notaciones del párrafo anterior, tendremos:

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}, \text{ de donde, } ab' - ba' = 0$$

Además, no siendo coincidentes dichas rectas, las abscisas de los puntos A y B de intersección con el eje de las x

serán diferentes; calculando dichas abscisas (N.º 243), hallamos: c/a y c'/a' . De la expresión de desigualdad de estos valores, resulta:

$$ac' - ca' \neq 0$$

Vemos, pues, que estas dos últimas condiciones halladas por vía geométrica, concuerdan con las que establecimos por vía analítica en el Capítulo anterior (N.º 174), para el mismo caso.

252. Caso de indeterminación. — Si las rectas representativas de las ecuaciones que forman el sistema [1] son *coincidentes* (fig. 28), tienen *infinitos puntos comunes*; por lo tanto, el sistema *admite infinitas soluciones*, o bien decimos que es un *sistema indeterminado* (N.º 175).

Pero, siendo coincidentes las rectas, serán iguales sus coeficientes angulares $-a/b$ y $-a'/b'$, así como también las abscisas de los puntos A y B de intersección con el eje de las x , que son: c/a y c'/a' . De las expresiones de igualdad de esos valores, resulta, respectivamente:

$$ab' - ba' = 0, \quad ac' - ca' = 0$$

Vemos, pues, que estas dos últimas condiciones halladas por vía geométrica concuerdan con las que hallamos por vía analítica en el Capítulo anterior (N.º 175), para el mismo caso.

253. NOTA. — Se excluye de esta discusión geométrica el caso de ser $a=b=a'=b'=0$, porque, en ese caso, las ecuaciones [1] ya no representan rectas (por carecer de las variables x e y).

Resolución gráfica de problemas que conducen a sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

254. Ecuación del movimiento uniforme. — En el curso anterior (A₂ N.º 241), vimos que, el movimiento de un punto se dice *uniforme*, cuando recorre espacios iguales en tiempos iguales; y que se llama *velocidad* de ese movimiento, al espacio recorrido por el móvil en la unidad de tiempo.

Así, por ej., al decir que un móvil tiene una velocidad de 60 Km. por hora, significa que en cada hora recorre 60 Km. Por consiguiente, a las 2 horas de iniciado el movimiento, habrá recorrido 120 Km.; a las 3 horas 180 Km., etc.

Vemos, pues, que *el espacio recorrido por un móvil es una función del tiempo*.

Supongamos que un móvil M recorra una recta con velocidad v (expresada, por ejemplo, en kilómetros por hora), habiendo partido de cierto punto A ; que sobre esa recta se fije un sistema de abscisas ($N.^\circ 9$), optando como sentido positivo el del movimiento del punto M .

Indiquemos con a la abscisa (expresada en Km.) del punto A , posición que ocupa el móvil al iniciar su movimiento, y a partir de ese momento contemos los tiempos, tomando como unidad la hora.

Después de una hora, la distancia de M al origen de las abscisas es $a + v$; después de 2 horas es $a + v \times 2$; después de 3 horas es $a + v \times 3$, y así sucesivamente; después de t horas será $a + vt$.

Si llamamos e la abscisa al cabo de un tiempo t , tendremos la siguiente relación entre e y t :

$$\boxed{e = a + vt} \quad [1]$$

Esta relación se llama *la ecuación del movimiento uniforme*, que permite determinar en todo momento la posición del móvil en función del tiempo.

Si el origen de los espacios coincide con el momento que empezamos a contar los tiempos, tendremos: $a = 0$; en este caso la ecuación [1] del movimiento uniforme es más simple:

$$\boxed{e = vt} \quad [2]$$

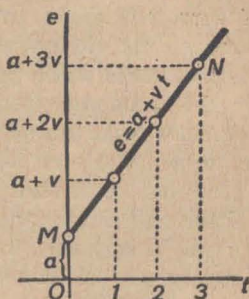
EJEMPLO. — Un auto parte de Gl. Brandzen, que dista 60 Km. de la Capital Federal, dirigiéndose hacia La Plata con una velocidad de 40 Km. por hora. ¿A qué distancia de la Capital se encontrará después de 3 horas de marcha?

Tomemos como eje de las abscisas la carretera Buenos Aires-La Plata supuesta rectificada, y consideremos el origen ubicado en la Capital Federal. Tendremos: $a = 60$, $v = 40$, $t = 3$.

Empleando la fórmula [1], tendremos la distancia pedida expresada en kilómetros: $e = 60 + 40 \times 3 = 180$.

255. Gráfica del movimiento uniforme. — Como la función [1] es del tipo $y = ax + b$, ya estudiada en el (N.º 240), representa, pues, una recta.

Tomando un sistema cartesiano de ejes coordenados, contaremos los tiempos en el eje de las abscisas, tomando como unidad la hora; contaremos los espacios en el eje de las ordenadas, tomando como unidad el kilómetro.



(fig. 29,

La relación [1] resultará entonces representada en la (fig. 29) mediante la recta MN . Esta gráfica presenta varias ventajas:

1.º Permite hallar fácilmente el valor de e para cada instante. En efecto, basta medir en la gráfica la ordenada e que corresponde al instante dado t .

2.º Pone de manifiesto la *rapidez* del movimiento. En efecto, si la velocidad v es pequeña, el coeficiente angular de la recta es pequeño y la recta resulta entonces poco inclinada sobre Ot ; de lo contrario, si la velocidad v es grande, el ángulo que forma la recta con el eje Ot también es grande.

256. Problemas de los móviles. — Una de las aplicaciones más interesantes de las gráficas de movimientos uniformes, se presenta en la resolución de problemas de los móviles.

En el (N.º 196) ya tratamos analíticamente uno de estos problemas, que ahora volveremos a resolver, pero gráficamente.

PROBLEMA I. — *Dos autos se dirigen hacia la Capital Federal por la carretera que la une con Luján. En cierto momento, uno de los autos, el que marchaba con una velocidad media de 60 Km. por hora, pasa por Rodríguez, que dista 17 Km. de Luján. El segundo auto, que marcha con 36 Km. por hora de velocidad media, pasa en el mismo momento por Moreno, que dista 33 Km. de Luján. ¿A qué distancia de Rodríguez alcanzará el primer auto al segundo?*

Véase la (fig. 6) del (N.º 196). Supongamos rectificada la carretera entre Luján y la Capital Federal, y tomemos como origen de los espacios, Luján, orientando la carretera positivamente hacia la Capital. Contemos los tiempos a partir del momento que el primer auto pasa por Rodríguez. Tomemos como unidad de tiempo t , la hora, y como unidad de espacios e , el kilómetro.

Con las notaciones del (N.º 254), tendremos:

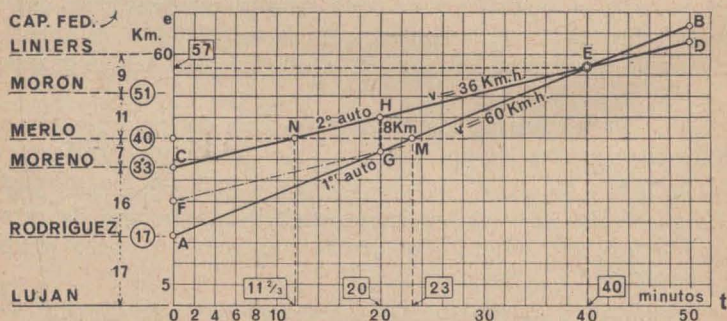
Para el primer auto: $a = 17$; $v = 60$.

Para el segundo auto: $a' = 17 + 16 = 33$; $v' = 36$.

Aplicando la ecuación general [1] del movimiento uniforme, o sea, $e = a + vt$ al movimiento de cada uno de los autos, tendremos las ecuaciones,

$$\begin{cases} e = 17 + 60t \\ e = 33 + 36t \end{cases} \quad [2]$$

Como los dos autos se encuentran a la *misma* hora, y en el *mismo* punto de la carretera, t y e tendrán en ese momento los mismos valores, los que serán, pues, la solución del sistema [2].



(fig. 30)

En la (fig. 30) resolvemos gráficamente el sistema [2], procediendo como indicamos en el (N.º 249).

Tomamos los tiempos t como *abscisas* sobre el eje horizontal Ot asignando a cada parte de la cuadrícula el valor de 2 minutos.

Tomamos las distancias e como *ordenadas* sobre el eje vertical Oe , medidas a partir de Luján como origen, y asignando a cada parte de la cuadrícula el valor de 5 kilómetros. En este eje ubicamos, también, las localidades que figuran en dicha carretera.

Las gráficas AB y CD que corresponden a cada una de las ecuaciones [2] se cortan en el punto E ; leyendo las coordenadas de este punto, hallamos $t=40$ y $e=57$.

Significa que el primer auto alcanzará al segundo, después de 40 minutos de haber salido de Rodríguez; y que el encuentro se verificará a 57 Km. de distancia de Luján, o sea a $(57-17)=40$ Km. de distancia de Rodríguez.

NOTA. — La misma gráfica nos permite contestar a otra serie de preguntas; por ej.:

1.º ¿Después de cuánto tiempo de haber salido de Rodríguez el primer auto, pasan ambos por Merlo, que dista 7 Km. de Moreno hacia la Capital Federal?

Siendo la distancia Luján-Merlo de $(17+16+7)=40$ Km. basta leer las abscisas de los puntos M y N donde las gráficas respectivas cortan a la paralela al eje de las abscisas trazada por el punto de ordenada 40; encontramos $t=23$ y $t'=11\frac{2}{3}$. Significa que el primer auto pasa por Merlo a los 23 minutos después de haber salido de Rodríguez, y el segundo auto a los 11 minutos y 40 segundos después de aquel mismo momento.

2.º ¿En qué momento la distancia entre ambos autos es de 8 Km.? Trazamos la paralela FG a una de las rectas, de modo que intercepte sobre el eje de las ordenadas el segmento $FC=8$; el segmento GH de ordenada también valdrá 8, y corresponde para $t=20$. Contestaremos, pues, que la distancia entre ambos autos es de 8 Km. después de haber transcurrido 20 minutos de la partida de ambos. Es natural que después de cruzarse los autos, existirá otra solución del problema.

257. PROBLEMA II. — *Un ómnibus hace el servicio de ida y vuelta entre la Capital Federal y Pergamino, que distan 225 Km., con una velocidad de 50 Km. por hora, pero deteniéndose en Pergamino durante media hora. Un auto que salió de Pergamino 2 horas después de haber salido el ómnibus de la Capital, marchó durante $2\frac{1}{2}$ horas con una velocidad de 40 Km. por hora, para luego detenerse durante una hora. ¿Con qué velocidad tendrá el auto que reiniciar*

el viaje para llegar a la Capital Federal en el mismo momento que el ómnibus?

En la (fig. 31) que se encuentra en la lámina de papel milimetrado al final de este libro, se resuelve gráficamente el problema.

Supondremos que cada centímetro del eje de las abscisas representa *una hora*, es decir, que cada milímetro representa *6 minutos*; cada centímetro del eje de las ordenadas supondremos representa *25 kilómetros*, es decir, que cada milímetro representa *250 metros*.

La línea quebrada $O A B C$ es la gráfica correspondiente al viaje del ómnibus; el segmento de recta $A B$ paralelo al eje de las abscisas, corresponde a la media hora que el ómnibus estuvo detenido en Pergamino.

La línea $D F G$ es la gráfica del viaje del auto hasta el momento de reiniciar su marcha, momento este que corresponde al punto G de la gráfica.

El segmento que une los puntos G y C es el trozo de gráfica correspondiente a la terminación del viaje del auto.

Para calcular la velocidad del auto en la etapa final, la ecuación [2] del (N.º 254) nos da: $e = vt$, de donde $v = e : t$.

Pero, para este trayecto medimos en la gráfica:

$$e = GH = 125 \text{ Km.}; \quad t = HC = OC - OH = 4 \text{ horas}$$

En consecuencia, tendremos la respuesta del problema:

$$v = 125 : 4 = 31 \frac{1}{4} \text{ Km. por hora}$$

Como las gráficas se cortan en el punto E , cuyas coordenadas leídas en las escalas prefijadas son: $t = 3,4 = 3^h 24^m$; $e = 169$, podemos decir, también, que los vehículos se cruzan inicialmente a las 3 horas y 24 minutos después de haber salido el ómnibus de la Capital y a 169 Km. de distancia de ésta.

258. Gráficas de ferrocarriles. — Las gráficas de movimientos tienen gran aplicación cuando se refieren al movimiento de ferrocarriles. Las oficinas de tráfico las emplean para estudiar los itinerarios, determinar las velocidades convenientes para los trenes a fin de combinar los cruces en las estaciones intermedias (cuando existe una sola vía y marchan en sentido contrario, o bien, cuando existiendo

doble vía, marchan en el mismo sentido), y otra serie de datos necesarios para regular la marcha de los trenes.

EJEMPLO. — Reproducimos un horario del Ferrocarril Sud, correspondiente a la línea Buenos Aires-Bahía Blanca. De él sacamos los datos necesarios para construir las gráficas de los trenes N.ºs 11 y 12 que corren los días lunes, miércoles y viernes (fig. 32).

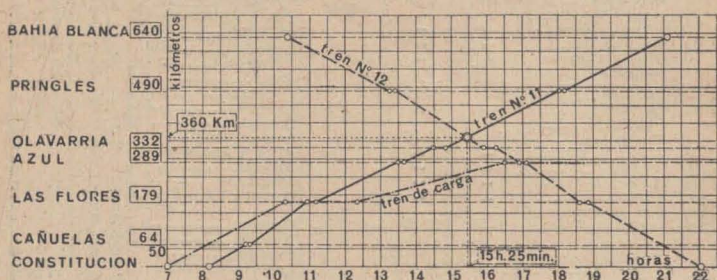
F. C. S. B. A. AIRES y BAHIA BLANCA (vía Pringles)

Km	SALIDAS	11	REGRESOS	12
..	Constitución <i>sal.</i>	8 10	Bahía Blanca <i>sal.</i>	8 20
17	Temperley <i>sal.</i>	8 32	Grünbein <i>leg.</i>	10 25
26	Monte Grande <i>sal.</i>	..	Pto. Belgrano <i>sal.</i>	..
38	Tristán Suárez <i>sal.</i>	..	Grünbein <i>leg.</i>	..
45	Máximo Paz <i>sal.</i>	..	Grünbein <i>sal.</i>	..
49	Vicente Casares <i>sal.</i>	..	Calderón <i>sal.</i>	..
64	Cañuelas <i>leg.</i>	9 12	Cortí <i>sal.</i>	..
..	Cañuelas <i>sal.</i>	9 17	Cochrane <i>sal.</i>	..
77	La Noria <i>sal.</i>	..	Cabildo <i>sal.</i>	9 34
90	Abbott <i>sal.</i>	..	Estomba <i>sal.</i>	..
107	Monte <i>sal.</i>	9 56	Saldungaray <i>sal.</i>	10 17
122	Zenón V. Dorna <i>sal.</i>	..	S. de la Ventana <i>sal.</i>	10 31
138	Gorchs <i>sal.</i>	..	Peralta <i>sal.</i>	10 57
146	Kilóm. 146 (Par.) <i>sal.</i>	..	Stegmann <i>sal.</i>	11 14
158	Vilela <i>sal.</i>	..	Pringles (S) <i>leg.</i>	11 31
169	Cor. Boerr <i>sal.</i>	..	Pringles (S) <i>sal.</i>	11 37
179	Las Flores (*) <i>leg.</i>	10 58	Reserva <i>sal.</i>	12 00
..	.. <i>sal.</i>	11 08	Krabbe <i>sal.</i>	12 14
200	Dr. D. Harosteguy <i>sal.</i>	..	Paragull <i>sal.</i>	12 35
214	Pardo <i>sal.</i>	..	Las Hermanas <i>sal.</i>	13 10
224	Miramonte <i>sal.</i>	..	Laprida <i>sal.</i>	13 29
233	Cachari <i>sal.</i>	..	Voluntad <i>sal.</i>	13 46
253	Parish <i>sal.</i>	..	Santa Elena <i>sal.</i>	14 03
267	Shaw <i>sal.</i>	..	Durañona <i>sal.</i>	14 28
277	Vicente Pereda <i>sal.</i>	..	Santa Luisa <i>sal.</i>	14 55
289	Azul (†) <i>leg.</i>	12 45	Olavarría (†) <i>leg.</i>	15 15
302	Nieves <i>sal.</i>	12 55	Hinojo <i>sal.</i>	15 33
318	Hinojo <i>sal.</i>	..	Nieves <i>sal.</i>	15 52
332	Olavarría (†) <i>leg.</i>	13 37	Azul (†) <i>leg.</i>	16 06
..	.. <i>sal.</i>	13 55	.. <i>sal.</i>	16 21
361	Santa Luisa <i>sal.</i>	..	Vicente Pereda <i>sal.</i>	16 36
377	Durañona <i>sal.</i>	..	Shaw <i>sal.</i>	16 49
391	Santa Elena <i>sal.</i>	..	Parish <i>sal.</i>	17 06
405	Voluntad <i>sal.</i>	..	Cachari <i>sal.</i>	17 33
420	Laprida <i>sal.</i>	15 29	Miramonte <i>sal.</i>	17 46
431	Las Hermanas <i>sal.</i>	..	Pardo <i>sal.</i>	17 59
443	Paragull <i>sal.</i>	..	Dr. D. Harosteguy <i>sal.</i>	18 15
461	Krabbe <i>sal.</i>	..	Las Flores (*) <i>leg.</i>	18 35
470	Reserva <i>sal.</i>	..	.. <i>sal.</i>	..
490	Pringles (S) <i>leg.</i>	16 28	Cor. Boerr <i>sal.</i>	18 50
..	.. <i>sal.</i>	16 34	Vilela <i>sal.</i>	..
507	Stegmann <i>sal.</i>	..	Kilóm. 146 (Par.) <i>sal.</i>	..
520	Peralta <i>sal.</i>	..	Gorchs <i>sal.</i>	..
537	S. de la Ventana <i>sal.</i>	..	Zenón V. Dorna <i>sal.</i>	..
545	Saldungaray <i>sal.</i>	..	Monte <i>sal.</i>	20 05
563	Estomba <i>sal.</i>	..	Abbott <i>sal.</i>	..
581	Cabildo <i>sal.</i>	19 57	La Noria <i>sal.</i>	..
593	Cochrane <i>sal.</i>	..	Cañuelas <i>leg.</i>	20 57
602	Cortí <i>sal.</i>	..	Cañuelas <i>sal.</i>	20 59
614	Calderón <i>sal.</i>	..	Vicente Casares <i>sal.</i>	..
628	Grünbein <i>leg.</i>	20 50	Máximo Paz <i>sal.</i>	..
..	Grünbein <i>sal.</i>	21 04	Tristán Suárez <i>sal.</i>	..
..	Pto. Belgrano <i>leg.</i>	21 29	Monte Grande <i>sal.</i>	..
..	Grünbein <i>sal.</i>	20 52	Temperley <i>sal.</i>	21 45
840	Bahía Blanca <i>leg.</i>	21 07	Constitución <i>leg.</i>	22 05

La gráfica del tren que va de Buenos Aires a Bahía Blanca (tren N.º 11), la construimos con trazo lleno; la del tren de regreso (N.º 12), con trazo cortado.

También hemos construido la gráfica de un tren de carga (dibujada con trazo de línea y punto), que sale de Constitución a las 7 h. y llega a Las Flores a las 10 h. y 20 min.; se detiene en esta estación durante 2 horas, para luego marchar hasta Azul, donde llega a las 16 h. 30 min. y se detiene en esa estación.

Puede notarse en la gráfica, que los trenes de pasajeros se cruzan a las 15 h. 25 min. y por el kilómetro 360, aproximadamente.



(fig. 32)

Nótese también la menor inclinación sobre el eje de las abscisas que tiene el último trozo de recta correspondiente a la marcha del tren de carga, debido a su menor velocidad respecto a los trenes de pasajeros (N.º 255, 2.º).

Como ejercicio, construya el estudiante, tomando los datos del itinerario, las gráficas que corresponden a los mismos trenes, pero que corren los días martes, jueves y viernes.

259. Problemas determinados, imposibles o indeterminados. — Como complemento de la interpretación gráfica de problemas en los casos de imposibilidad e indeterminación (N.ºs 251 y 252), trataremos los siguientes ejemplos prácticos.

PROBLEMA DETERMINADO. — Rectas que se cortan:

EJEMPLO. — Compramos 4 metros de tela y 8 metros de paño por la suma total de \$ 44. También compramos, por los mismos precios unitarios, 4 metros de tela y 3 metros de paño por la suma total de \$ 24. Se desea saber cuánto cuestan 1 m. de tela y 1 m. de paño, respectivamente.

Sea $x Oy$ un sistema de ejes coordenados (fig. 33); tomamos sobre el eje Ox todos los precios posibles para 1 m. de tela (precio unitario), y sobre Oy todos los precios posibles para 1 m. de paño.

La primera compra nos origina la igualdad $x \times 4 + y \times 8 = 44$ o sea la ecuación:

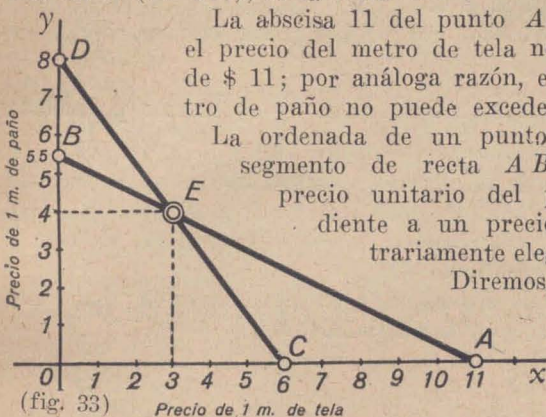
$$4x + 8y = 44 \quad [1]$$

La gráfica de esta ecuación, que se obtiene como indicamos en el (N.º 243), es la recta AB .

La abscisa 11 del punto A nos indica que el precio del metro de tela no puede exceder de \$ 11; por análoga razón, el precio del metro de paño no puede exceder de \$ 5,50.

La ordenada de un punto cualquiera del segmento de recta AB nos daría el precio unitario del paño correspondiente a un precio unitario arbitrariamente elegido para la tela.

Diremos, pues, que las coordenadas x e y de un punto de AB son tales, que 4 m.



de tela a \$ x el m., y 8 m. de paño a \$ y el m. cuestan en total \$ 44.

NOTA. — Limitamos dicha recta en los puntos A y B , es decir, que consideramos solamente el segmento AB , porque la naturaleza del problema no admite precios unitarios negativos.

La abscisa 11 del punto A nos indica que el precio del metro de tela no puede exceder de \$ 11; por análoga razón, el precio del metro de paño no puede exceder de \$ 5,50.

La ordenada de un punto cualquiera del segmento de recta AB nos daría el precio unitario del paño correspondiente a un precio unitario arbitrariamente elegido para la tela. Diremos, pues, que las coordenadas x e y de un punto de AB son tales, que 4 m. de tela a \$ x el m., y 8 m. de paño a \$ y el m. cuestan en total \$ 44.

La segunda compra nos origina la ecuación

$$4x + 3y = 24 \quad [2]$$

cuya gráfica es la recta CD , que, por razón análoga a la anteriormente indicada, limitamos en el segmento CD .

Las coordenadas del punto de intersección E de ambas rectas, nos da la solución del problema. Leyendo en la gráfica estas coordenadas, encontramos: $x = 3$, $y = 4$.

La respuesta del problema es, pues, que 1 m. de tela cuesta \$ 3, y 1 m. de paño \$ 4.

La solución es única, porque las rectas sólo se cortan en un punto.

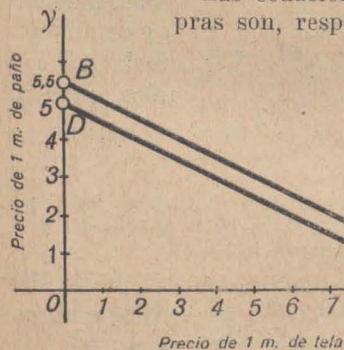
260. PROBLEMA IMPOSIBLE. — a) Rectas paralelas:

EJEMPLO. — Compramos 4 m. de tela y 8 m. de paño por la suma total de \$ 44. También compramos por los mismos precios unitarios, 1 m. de tela y 2 m. de paño por la suma total de \$ 10. Se desea saber cuánto cuestan 1 m. de tela y 1 m. de paño, respectivamente.

Las ecuaciones que representan las dos compras son, respectivamente:

$$4x + 8y = 44$$

$$x + 2y = 10.$$



(fig. 34)

Las gráficas de estas ecuaciones son las rectas AB y CD de la (fig. 34), que son paralelas. En efecto, despejando y en ambas tenemos

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}; \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Resultando iguales los coeficientes angulares de estas rectas, o sea, $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, se justifica, pues, el paralelismo de las rectas AB y CD .

El punto de intersección de las rectas AB y CD se encuentra, pues, en el infinito, y el problema es *imposible*.

Podíamos haber previsto este resultado, puesto que si simplificamos la primera ecuación $4x + 8y = 44$, dividiendo sus dos miembros por 4, resulta: $x + 2y = 11$.

Pero es imposible que se tenga al mismo tiempo: $x + 2y = 11$ y $x + 2y = 10$, puesto que siendo idénticos los primeros miembros, no lo son los segundos. Las dos ecuaciones son, por lo tanto, evidentemente *incompatibles*.

NOTA. — Podría también preverse esta incompatibilidad, observando que se cumplen las relaciones del (N.º 174), o sea:

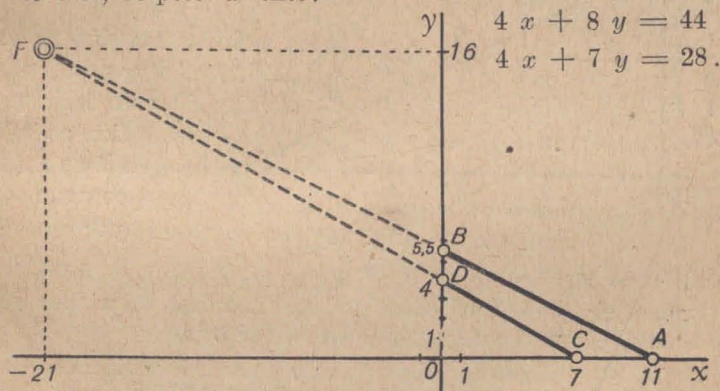
$$a b' - b a' = 4 \times 2 - 8 \times 1 = 8 - 8 = 0 ;$$

$$a c' - c a' = 4 \times 10 - 44 \times 1 = 40 - 44 = -4 \neq 0$$

b) Rectas que se cortan pero en un punto inaceptable:

EJEMPLO. — Compramos 4 m. de tela y 8 m. de paño por la suma total de \$ 44. También compramos, por los mismos precios unitarios, 4 m. de tela y 7 m. de paño por la suma total de \$ 28. Calcular el precio unitario de cada artículo.

Las ecuaciones que representan las dos compras son, en este caso, respectivamente:



(fig. 35)

cuyas gráficas son las rectas AB y CD de la (fig. 35).

Pero de estas rectas, sólo tenemos que considerar los segmentos AB y CD (Nota del N.º 259), los que *no se cortan*;

por consiguiente, el problema no tiene solución, y decimos que es *imposible*.

Si en lugar de los segmentos hubiéramos considerado las rectas completas AB y CD , se cortarían en un punto F , de coordenadas $x = -21$, $y = 16$. El primer valor, por ser negativo, nos indicaría que, en lugar de pagar el comprador un cierto precio unitario por la tela, tendría, por el contrario, que recibir del vendedor \$ 21 por metro; resultado este absurdo, por ser contrario al enunciado del problema.

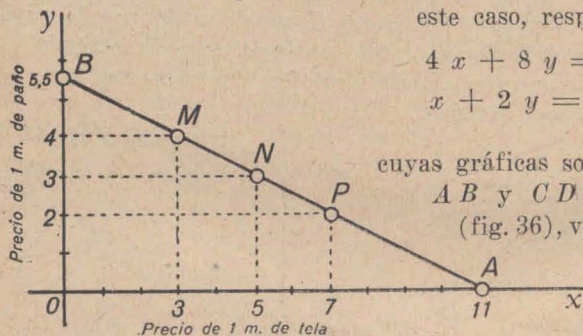
261. PROBLEMA INDETERMINADO. — Rectas coincidentes:

EJEMPLO. — Compramos 4 m. de tela y 8 m. de paño por la suma total de \$ 44. También compramos, por los mismos precios unitarios, 1 m. de tela y 2 m. de paño. Calcular el precio unitario de cada artículo.

Las ecuaciones representativas de las dos compras son, en este caso, respectivamente:

$$4x + 8y = 44$$

$$x + 2y = 11.$$



(fig. 36)

cuyas gráficas son dos rectas AB y CD coincidentes (fig. 36), vale decir que tienen infinitos puntos comunes; por ej.,

$M(x = 3, y = 4)$, $N(x = 5, y = 3)$, $P(x = 7, y = 2)$; los pares de valores así obtenidos son infinitas soluciones del problema, el que resulta, pues, *indeterminado*.

NOTA. — Podríamos haber previsto esta indeterminación, observando que se cumplen las relaciones del (N.º 175), o sea:

$$a b' - b a' = 4 \times 2 - 8 \times 1 = 8 - 8 = 0;$$

$$a c' - c a' = 4 \times 11 - 44 \times 1 = 44 - 44 = 0$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS para resolver

(La abreviatura *R.* indica el resultado del ejercicio o problema)

CAP. I. — NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

1. Disponer en orden creciente los números reales siguientes:
 $+ \frac{1}{2}$, $-0,2$, -5 , $+2$, $-\frac{3}{4}$, $+3,7$
2. Dados sobre un eje orientado Ox los puntos A , B y C , y siendo $OA = +3$, $AB = +7$, $BC = -9$, hallar OB , OC y CA .
R.: 10 ; 1 ; 2
3. Indicar un número decimal y otro fraccionario comprendido entre los números de cada uno de los pares de números siguientes:
 -3 , $-1,5$; $-\frac{1}{2}$, -1 ; $\frac{7}{8}$, $+3$
4. ¿Cuántos números racionales están comprendidos entre los dos números de cada par, y cuántos números enteros?
5. Indicar dos números opuestos comprendidos entre -2 y $+3,5$.
R.: $-1,5$; $+1,5$
6. Verificar que $(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4})$ y $(\frac{5}{8} : \frac{1}{2})$ son números opuestos.
7. ¿Qué relación debe existir entre los valores absolutos de a , b , c , para que la suma

$$a + (-b) + (-c)$$
 sea positiva, o negativa, o nula?
R.: 1.º $a > b + c$; 2.º $a < b + c$; ... etc.

CAP. II. — ELEMENTOS DE CÁLCULO ALGEBRAICO

Expresiones algebraicas.

1. De las expresiones que siguen, indicar cuáles son racionales y cuáles son irracionales respecto de la letra x :
 $2 + x$; $5 : x$; $\sqrt{x + 3}$; $5x^2 + 3x - 4$.
R.: Son todas racionales, excepto la tercera
2. De las expresiones del ejercicio que antecede, ¿cuáles son enteras respecto de x y cuáles son fraccionarias?
3. Verificar que: para $x = -3$, resulta $x^2 - 2x + 1 = 16$; para $x = \frac{1}{2}$, resulta $5 : x - 10 = 0$.
4. Calcular el valor numérico de las expresiones siguientes:
 $a^2 + 2ab + b^2$; $a^2 - 2ab + b^2$, para $a = -3$, $b = 2$.
R.: 1 ; 25

5. Valor numérico de la expresión

$$x^5 - 3x^4y + 8x^3y^2 - 6x^2y + y^5$$

para $x = 1$ e $y = -2$.

6. Valor numérico de la expresión

$$4a - 7b - 10ab - 5bc + ca + 3abc$$

para $a = \frac{1}{2}$, $b = 4$, $c = -2$.

R.: -19

7. ¿Cualesquiera sean los valores de las letras que contiene, qué valor adquiere la expresión:

$$\frac{2a + 3b}{a + b} (3a - b)(a - a) \quad ?$$

¿Qué relación deberá existir entre a y b , para que la expresión anterior resulte indeterminada?**Monomios y polinomios.**

1. Indicar el grado de cada uno de los monomios siguientes:

$$2ax; -3x^2; \frac{1}{2}xy^2; 4ax^2y^3$$

respecto de la letra x ; ídem, respecto del grupo de letras x, y .Indicar los coeficientes de cada monomio; ídem del último monomio respecto de las letras xy .

2. Indicar el grado de cada uno de los polinomios siguientes y ordenar el último según las potencias decrecientes de
- x
- :

$$2a^2 - ab^2 + b^3; 2x - xy + x^2 - 3y^2$$

Indicar el grado de homogeneidad del último polinomio.

3. Reducir los términos semejantes de los siguientes polinomios:

$$2a - 3a + a - 5a; ab + 5a - 3b + a - 4ab + 7b$$

Suma y resta de monomios y polinomios.

1. Sumar los siguientes monomios:

$$2abc, -a^2b, \frac{1}{2}ba^2, -5abc, abc$$

2. Sumar los siguientes polinomios y reducir térm. semej.:

$$5a + 3b - 1; b + 5 - a; 6b - a + 5 - 7a$$

R.: $-4a + 10b + 9$

3. Ídem para
- $(x^2 - 3ax)$
- ;
- $(2ax - 4x^2 + 5)$
- .

4. Al monomio
- $(-4mn)$
- restarle
- $(+5mn)$
- ; íd. restarle
- $(-mn)$
- .

R.: $-9mn$; $-3mn$

5. Al monomio $-2ax^2y$ restarle sucesivamente los monomios:

$$ax^2y, \quad 8ax^2, \quad -3axy^2, \quad -ax^2y^2$$

6. Al polinomio $(a^2 + 2ab + b^2)$ restarle $(a^2 - 2ab + b^2)$.

R.: $4ab$

- 7-9. Efectuar las sustracciones siguientes, y simplificar los resultados:

$$a - (a^2 + 2a + 1); \quad 2ax + 1 - (1 + 2ax - x^2);$$

$$a^3b - 4a^2 + ab - (0,2ab^2 - 0,5a^2 + a^3)$$

- 10-12. Efectuar las sumas y restas indicadas en las expresiones siguientes, y simplificar los resultados:

$$x^2 - (2x - 3) + (3x^2 - 4x + 2);$$

R.: $4x^2 - 6x + 5$

$$a^2 - [1 - a - (2 - a^2)] + (a^2 + 3a - 3);$$

$$2a^3 + \{ -3ab - [a^2 - (2b^3 - ab)] - [4a^2 - (4ab + 2b^2)] \}$$

R.: $2a^3 - 5a^2 + 2b^3 + 2b^2$

- 13-16. Suprimir los paréntesis y luego simplificar:

$$3x - \{ y - [x + (y - 3x)] \}$$

$$ax + bx - \{ ax - [bx - (2ax - b) + 2a] - b \}$$

R.: $2bx - 2ax + 2b + 2a$

$$x - [6x^2 - (2x - 1)] + [4x - (0,5x^2 - 3) + x^2]$$

$$\frac{1}{2}ab^2 - b^3 - \{ -2a^2b - [3ab^2 - \frac{3}{4}b^3 - (a^2b - b^3) - \frac{1}{2}b^3] \}$$

R.: $7ab^2/2 + a^2b - 5b^3/4$

17. Encerrar dentro de paréntesis, precediéndolo del signo $-$, los tres últimos términos de la expresión:

$$a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 - 5ab^3 + 2b^4$$

18. Dados los polinomios:

$$A = x^2 - 4xy + y^2; \quad B = -2xy + 3y^2$$

$$C = 4x^2 + y^2; \quad D = -x^2 + 3xy$$

$$\text{calcular: } A - (B + C) - D; \quad A - (B - C) + D; \quad A - [B + (C - D)]$$

y reducir los términos semejantes. R.: $-2x^2 - 5xy - 3y^2; \dots \text{etc.}$

CAP. III. — MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE MONOMIOS Y POLINOMIOS

Multiplicación.

- 1-3. Efectuar los productos:

$$8(-3a); \quad -5x(-\frac{3}{4}x); \quad 5a^3b^2x(-\frac{3}{8}abx^3)$$

4. Dados los monomios: $m x$; $- 2 m x^2$; $3 m^2 y^3$; $4 x y$
efectuar todos los posibles productos de dos en dos.

$$R.: -2m^2x^3 ; 3m^3xy^3 ; 4mx^2y ; \dots \text{etc.}$$

5. Elevar a la segunda, tercera y cuarta potencia los monomios:

$$- 3 a x^2 ; \frac{1}{2} a^2 b^3 ; - \frac{3}{4} m^3 n^2 ; 0,1 a^2 x^3 .$$

6. Efectuar: $\frac{5}{4} a^2 b (- 2 a b^2 x) (- \frac{3}{5} b^3 x^2) 8 a^2 x^4 .$

$$R.: 12a^5b^5x^7$$

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

$$7.8. \quad (x^2 - 5x + 4)3x ; - a(5 + 2a + a^2 - 7a^3)$$

$$9. \quad (ab - 3a^2b + 5ab^3 - 2a^3b)(- 2ab^2)$$

$$10. \quad (x^{m-1} + 2x^{m-2} - 5x^{m-3} + x^{m+1})x^{2m}$$

$$11. \quad [(a - b + c + 1) - (3a + b + c)] 2ab$$

$$R.: -4a^2b - 4ab^2 + 2ab$$

Efectuar operaciones y simplificar los resultados de las expresiones:

$$12. \quad x(2x - 1) + (x^2 - 5x + 4)x^3 - (x^2 - 0,1x) - x^5$$

$$13. \quad (-a^2b + a^3)(-2ab) + 3a^3(-a^2 + 5ab - b^2) - a^4(2a - b)$$

$$R.: -a^3b^2 + 14a^4b - 5a^5$$

14. ¿Qué forma toma la expresión $5A - aB$ para

$$A = - 2a^3 + a^2 - 1 , \quad B = 4a^2 - 3a + 2$$

15. Multiplicar el polinomio: $a^2xy - \frac{1}{4}ax^2y + x^3 - y^3$
separadamente por los monomios x^2y , $-\frac{1}{2}ay$, $-x^2$; sumar
los productos parciales obtenidos y reducir términos semejantes.

Efectuar las multiplicaciones siguientes:

$$16. \quad (x^2 + x - 1)(x^2 + 1) ; (a - 2)(a^3 - a^2 + a - 1)$$

$$R.: x^4 + x^3 + x - 1 ; a^4 - 3a^3 + 3a^2 - 3a + 2$$

$$17. \quad (3x^2 - 3xy + y^2)(2x^2 - 4xy + y^2)$$

$$18. \quad (2a - x)(2b - y) + (a + 2x)(b + 2y) - 5(ab + xy)$$

$$R.: 0$$

$$19. \quad (3a^2b - 5ab^2 + b^3)(a^3 - ab^2 - 0,5b^3)$$

$$20. \quad [x(x + a) - a(x - a)] [x(x - a) - a(a - x)]$$

$$R.: x^4 - a^4$$

$$21. \quad (a^4 - 2a^3b + 3a^2b^2 - 5ab^3 - b^4)(a^2 - 3ab + b^2)$$

$$22. \quad x(x + 1)(x + 2) + x(x - 1)(x - 2) + 4(x - 1)(x + 1)x$$

$$R.: 6x^3$$

23. $(a-x)(a+x)(a^2+x^2) - (b-x)(b+x)(b^2+x^2)$
 24. $[x^2 + (2a+3b)x + 6ab][x^2 - (2a+3b)x + 6ab]$
 R.: $x^4 - (4a^2+9b^2)x^2 + 36a^2b^2$
 25. $[(2-6x)y^3 + (6x-7x^2)y^2 + (3-2x)y](2xy^2-3x)$

Identidades.

1-3. Aplicando la regla del producto de una suma por una diferencia, calcular los siguientes productos:

$$(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}) ; (2x^3+b^2)(2x^3-b^2) ; (3ab-2cd)(3ab+2cd)$$

R.: $x^2-\frac{1}{4} ; 4x^6-b^4 ; \dots$ etc.

4-5. Idem para los siguientes productos:

$$(-\frac{1}{2}x^4+3a^2)(-\frac{1}{2}x^4-3a^2) ; (a+b+c+d)(a+b-c-d)$$

Desarrollar las siguientes potencias:

6-8. $(x+3y)^2 ; (a^2-3b)^2 ; (2m-0,1n)^2$
 R.: $x^2+6xy+9y^2 ; a^4-6a^2b+9b^2 ; \dots$ etc.

9-11. $(a^2b-0,5ab^2)^2 ; \left[\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right]^2 ; \left[\frac{1}{a}+0,1ax\right]^2$

12-14. $(2a+3b)^3 ; (5a-2ab)^3 ; (-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}y^2)^3$
 R.: $8a^3+24a^2b+54ab^2+27b^3 ; \dots$ etc.

15-17. $(4a^2b-5a^3b^2)^3 ; (x^n-2)^3 ; (-2x^n-3x)^3$

18-19. $(1+x+x^2)^2 ; (a^3-2a^2+2a-1)^2$
 R.: $1+2x+3x^2+2x^3+x^4$

20-22. $(a+2b-c)^2 ; (m-n+p-q)^2 ; (x^2-xy+y^2)^2$

Simplificar las siguientes expresiones:

23. $(a+2)^2 + (a+1)^2 - 2(a+3)^2$
 R.: $-6a-13$

24. $(a-1)^2 - 2(a+1)^2 + (x-1)(x+1)$

25. $(x-4y)^2 + (x-3y)^2 - (x-5y)^2 - x^2$
 R.: $-4xy$

26-27. $(x-2)^3 + (x+2)^3 - 2x^3 ; (2x-y)^3 + (x-2y)^3 - 9(x-y)^3$

28-29. $2a(a-3b)^2 - 4b(2a-b)^2 - 2(a-b)^3$
 R.: $-22a^2b+28ab^2-2b^3$

30. En el polinomio $2x^2 - 3x + 5$ reemplazar x por $(a^2 - ab)$ y ordenar el resultado según las potencias decrecientes de a .

Verificar las siguientes identidades:

$$31. (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$32. (x-1)(x+1) - 4(x-1) + 1 = (x-2)^2$$

$$33. (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a-b)a + 2(b-c)b + 2(c-a)c$$

$$34. (c-b)a^2 + (a-c)b^2 + (b-a)c^2 = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$35. (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

$$36. (mn-1)^2 + (m+n)^2 = (m^2+1)(n^2+1)$$

$$37. (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$38. a(a-2b)^3 - b(b-2a)^3 = (a-b)(a+b)^3$$

$$39. (x^2 + xy + y^2)^2 - (x^2 - xy + y^2)^2 = 4xy(x^2 + y^2)$$

$$40. (x^2 + ax + bx + ab)^2 = (x+a)^2(x+b)^2$$

41. Si designamos con $2p$ la suma $a+b+c$, verificar la identidad:

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2$$

42. Con la hipótesis del ejercicio anterior, verificar la identidad:
 $[(p-a) + (p-b)]^3 = (p-a)^3 + (p-b)^3 + 3(p-a)(p-b)c$

División.

Efectuar las siguientes divisiones:

$$1.3. 8a : (-2a) ; -6x^2 : (-3x) ; 9a^2b^5c^3 : 3ab^2c^3$$

$$R.: -4 ; 2x ; 3ab^3$$

$$4.6. \frac{3}{4}xy^3 : \frac{1}{2}xy^2 ; -\frac{3}{8}a^3b^4cx^2 : \frac{6}{4}ab^3x ; -m^3nx^2 : (-m^3x)$$

7.8. Efectuar las siguientes operaciones:

$$-3ab^2c^4(-a^4b^5c^2) : \frac{3}{5}a^2b^3c ; 9a^4y^3 : [\frac{1}{2}ay(-6ay^2)]$$

$$R.: 5a^3b^4c^5 ; -3a^2$$

Efectuar las siguientes divisiones:

$$9.10. (4a^2x^2 - 2x^3) : (-x) ; (a^4b + 4a^3b^2 - 5a^2b^3) : a^2b$$

$$11. (-0,15a^7b^6c^5 + 0,25a^4b^5c^3 - 0,1a^3b^4c^3d) : (-0,05a^3b^3c)$$

$$R.: 3a^4b^3c^4 - 5ab^2c^2 + 2bc^2d$$

$$12. (8x^3y^2z^2 - \frac{3}{4}x^2y^4z + \frac{1}{2}x^4y^3z^5 - x^3y^5z) : (-2xy^2z)$$

$$13.14. \quad (x^2 + 7x + 12) : (x + 3) ; \quad (x^3 - 7x - 6) : (x^2 + 3x + 2)$$

R.: $x + 4$; $x - 3$

$$15. \quad (x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6) : (x^2 - 1)$$

$$16. \quad (10a^4 - 9a^3b - 13a^2b^2 + 6ab^3) : (2a^2 - ab - 3b^2)$$

R.: $5a^2 - 2ab$

$$17. \quad (6x^4 - 5x^3y - 5x^2y^2 - xy^3 - y^4) : (3x^2 + 2xy - y^2)$$

$$18. \quad (ax^2 + b^2x - x^3 - b^2a) : [(x + b)(a - x)]$$

R.: $x - b$

$$19.20. \quad (m^3 - 125) : (m - 5) ; \quad (32a^5 + b^5) : (2a + b)$$

Hallar el cociente entero y el resto de las siguientes divisiones:

$$21. \quad (a^3 - 5a^2 + 8a + 1) : (a^2 - a + 2)$$

R.: $(a - 4)$ con resto, $2a + 9$

$$22. \quad (ax^4 - 3a^2x^3 - a^3x + 2a^4) : (x^2 - ax + a^2)$$

$$23. \quad (40x^5 - 17x^4 - 14x^3 - 45x^2 - 18x + 16) : (8x^2 + 3x - 2)$$

R.: $(5x^3 - 4x^2 + x - 7)$ con resto, $5x + 2$

$$24. \quad (x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{41}{8}x) : (\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{8}x + 2)$$

R.: $(2x - 1)$ con resto, $+ 2$

$$25.26. \quad x^5 : (x + 1) ; \quad (-a^4b^6) : (a^2b^3 + 8)$$

27. Efectuar las dos últimas divisiones, ordenando el divisor según las potencias crecientes de las letras, y continuar las divisiones hasta el quinto término.

R.: $x^5 - x^6 + x^7 - x^8 + x^9 - \dots$; etc.

28. Sin efectuar la división, determinar el resto de la división del polinomio $x^3 - 2x^2 + 4x - 6$ por cada uno de los binomios siguientes:

$$x - 3 ; \quad x + 2 ; \quad 3x - 4 ; \quad 2x - 5$$

$$29. \quad \text{Idem para la división de } x^4 - 5x^2 + 3 \text{ por } (x^2 - 4)$$

R.: Haciendo $x^2 = u$, ... se llega $R = -1$

Verificar que el resto de las siguientes divisiones es cero, y calcular el cociente por la regla de Ruffini:

$$30.31. \quad (x^3 - 4x^2 + 5x - 6) : (x - 3) ; \quad (x^2 + 4ax + 3a^2) : (x + a)$$

$$32. \quad (3x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 4x + 1) : (x + 1)$$

R.: $3x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 1$

$$33.34. \quad (x^4 + x^2 - \frac{5}{16}) : (x - \frac{1}{2}) ; \quad (\frac{1}{2}x^2 + 3x^2 - 8) : (x + 2)$$

$$35. [(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 6)] : (x - 3)$$

$$R.: (x^2 - 5x + 1)(x^2 - 6)(x + 1)$$

$$36. (6a^3 - 6a^2x + 3ax^2 - 3x^3)(9a^2 - 2ax - x^2) : (a - x)$$

37. Determinar m del polinomio $x^3 - x^2 + 2x + m$, para que sea divisible por $x - 2$.

$$R.: m = -8$$

38. Idem para que el polinomio $x^4 - 5x^2 + 2m - 2$ sea divisible por $x + 3$.

39. Demostrar que un polinomio entero en x es divisible por el binomio $x + 1$, si la suma de los coeficientes de las potencias pares de x es igual a la de los coeficientes de las potencias impares. (Se entiende que entre los términos de grado par se incluye el de grado cero, es decir, el que no contiene x).

40. Determinar la condición para que un polinomio entero en x sea divisible al mismo tiempo por $x - 1$ y por $x + 1$.

R.: La suma de todos los coeficientes debe ser nula, y sólo deberá contener potencias pares de x .

41. Demostrar que es divisible por $x + m + n$ la expresión:

$$(m + n)(x + m)(x + n) + mnx$$

42. Idem para $(m+n)^2 + (n+x)^2 + (m+x)^2 - (x^2 + m^2 + n^2)$

43. Demostrar que es divisible por $x + a - b$ el polinomio:

$$x^3 + 3abx + a^3 - b^3$$

Sin efectuar la división, indicar si son exactos los cocientes de las divisiones que siguen y hallarlos mediante la regla de Ruffini:

$$44.46. (x^3 - 8) : (x - 2); (a^5 - b^5) : (a - b); (m^4 - n^4) : (m + n)$$

$$47.48. (x^5 - y^5) : (x + y); (a^3 + b^3) : (a + b);$$

$$49. (4a^2 + 9b^2) : (2a + 3b)$$

$$50.51. (m^9 - n^9) : (m^3 - n^3); (x^6 - 64) : (x^2 - 4);$$

$$R.: \text{Hacer } m^3 = x; n^3 = a, \dots \text{ etc.}$$

$$52. (x^4 - 81a^4) : (x \pm 3a)$$

Descomposición de un polinomio en factores.

1. Sacar el factor a^3b de la expresión:

$$2a^3b^2x^5 - 6a^4b^4x^3 + 4a^3b^3c^2x$$

2. Sacar el máximo factor común de la expresión del ejercicio anterior,

$$R.: 2a^3b^2x(x^4 - 3ab^2x^2 + 2bc^2)$$

Sacando factores comunes parciales (N.º 91), o aplicando la diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ del (N.º 92), descomponer en productos los siguientes polinomios:

$$3.4. \quad ax - a - bx + b; \quad x + y - xy - y^2$$

$$\text{R.: } (x-1)(a-b); \quad (x+y)(1-y)$$

$$5.6. \quad ab - ax - bx + x^2; \quad ax^2 + a - bx^2 - b$$

$$7.8. \quad ax^2 - ax - a + x^2 - x - 1; \quad a^2 - b + a^2b - 1$$

$$\text{R.: } (x^2 - x - 1)(a+1); \quad (a+1)(a-1)(b+1)$$

$$9.10. \quad x^3 + x^2y - xy^2 - y^3; \quad a^2x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + b^2$$

$$11.13. \quad x^3 - x; \quad a^3b - ab^3; \quad x^{2m} - 16x^m y^2$$

$$\text{R.: } x(x+1)(x-1); \quad ab(a+b)(a-b); \quad \dots$$

Aplicando los (N.ºs 93 al 98) descomponer en productos los siguientes polinomios:

$$14.17. \quad x^3 - 1; \quad a^4 - 1; \quad m^5 + b^5; \quad x^5 - 81a^8x$$

$$\text{R.: } (x-1)(x^2+x+1); \quad (a+1)(a^3-a^2+a-1); \quad \dots \text{ etc.}$$

$$18.20. \quad x^3y - y^4; \quad x^4 - 2x^2 + 1; \quad a^4 \pm 8a^2b^2 + 16b^4$$

$$21.23. \quad a^2 - x^2 + 2a + 1; \quad a^2 + 2a - 3; \quad 4x^2 - 4x - 8$$

$$\text{R.: } (a+1+x)(a+1-x); \quad a^2 + 2a - 3 = (a^2 + 2a + 1) - 4 = \dots \text{ etc.}$$

$$24.25. \quad a^3 + 3a^2 + 3a + 1; \quad x^6 + a^3b^3 + 3x^2ab(x^2 + ab)$$

Expresiones algebraicas fraccionarias.

Simplificar las siguientes fracciones:

$$1.4. \quad \frac{5a^2b^3y}{-ax^2y^4}; \quad \frac{ax - bx}{abx}; \quad \frac{4xyz - 8z^2}{2xz}; \quad \frac{x^2 - xy}{3(x-y)}$$

$$\text{R.: } -5ab^3/x^2y^3; \quad (a-b)/ab; \quad (2xy-8z)/2x; \quad \dots \text{ etc.}$$

$$5.6. \quad \frac{-a^2bx^3y}{2x^2y - 3axy^2 + 7abxy}; \quad \frac{abc^2 - a^2bc + ab^2c}{a^2b^2c - 2a^2bc^2 - 7ab^2c^2}$$

$$7.10. \quad \frac{ax + bx}{ay + by}; \quad \frac{x^2 + 2x + 1}{1 - x^2}; \quad \frac{3(y^2 - x^2)}{(x-y)^2}; \quad \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}$$

$$11.13. \quad \frac{a^2x^3 + b^2y^3}{a^2x^2 - b^2y^2}; \quad \frac{x^2 - y^2 - z^2 + 2yz}{y^2 - x^2 - z^2 + 2xz}; \quad \frac{a^2 - 4}{a^2 - 5a + 6}$$

$$\text{R.: } (a^2x^2 - abxy + b^2y^2)/(ax - by); \quad (x - y + z)/(y - x + z); \quad \dots \text{ etc.}$$

Reducir a común denominador las siguientes fracciones:

$$14-16. \quad \frac{2x}{yz}, \frac{3y}{xz}, \frac{4z}{xy}, \quad \frac{a}{b}, \frac{x}{y}, \quad \frac{-2a^3}{3x^3y^2z}, \frac{3b^3}{2xy^2z^2}, \frac{c^3}{-6x^2yz^3}.$$

$$17-18. \quad 7, \frac{x^3}{y}, \frac{1}{y^2}, -x, \quad \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}, \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

R.: $7y^2/y^2$, x^3y/y^2 , $1/y^2$, $-xy^2/y^2$; ... etc.

$$19. \quad \frac{-a^2 + a^2b - ab^2 + b^2}{2a^3b^3c^3}, \quad \frac{-a^2 + ab - b^2}{2a^3b^3c^2}, \quad \frac{a-b}{ab}.$$

$$20. \quad \frac{a}{a+b}, \quad \frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}, \quad \frac{a^3+b^3}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}.$$

R.: $a(a+b)^2/(a+b)^3$, $(a^2-b^2)/(a+b)^3$, ... etc.

Efectuar las siguientes operaciones indicadas:

$$21-23. \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}, \quad \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}, \quad \frac{2a}{3b} + \frac{3b}{2a} - \frac{4a^3+9b^3}{6a^2b^2}.$$

$$24-25. \quad \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}, \quad \frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{x^2-6x+9} - \frac{1}{x^2+6x+9}$$

R.: $2(a^2+b^2)/(a^2-b^2)$, $(x^2+12x-9)/(x^2-9)^2$

$$26. \quad \frac{1}{a-1} - \frac{4}{1-a} - \frac{8}{1+a} + \frac{3(a-1)+10}{a^2-1}.$$

$$27-28. \quad \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}, \quad 1 - \frac{1}{x+1}.$$

R.: $(x^2-3x+3)/(x-1)^3$; $x/(x+1)$

$$29-30. \quad \frac{1}{x-1} - \frac{0.5}{x+1} - \frac{0.5x+1.5}{x^2-1}, \quad 2 + \frac{x^3-2y^3}{(y-x)^3} - \frac{2x^2-y^2}{y^2-x^2}.$$

$$31-33. \quad 1 + \frac{a-b}{a+b}, \quad a-b + \frac{b^2}{a+b}, \quad x^2 - xy + y^2 - \frac{y^3}{x+y}.$$

R.: $2a/(a+b)$; $a^2/(a+b)$; $x^2/(x+y)$

$$34-35. \quad \frac{-4abx^2}{a+b}, \frac{5a^6b^2x}{a-b}, \frac{7(x-y)}{a^3b^3x^5}, \quad \frac{4a(a^2-x^2)}{3b(c^2-x^2)}, \frac{b(c+x)}{a^3-ax}.$$

$$36-37. \quad \frac{-4a}{3(a-b)}, \frac{0.1b-2a}{2(a+b)}, \frac{ab}{a^2+b^2}, \quad \frac{-7a^2bx^2}{3yz} : \left(-\frac{0.3ab^2x}{xy} \right)$$

R.: $(4a^3b-0.2a^2b^2)/3(a^4-b^4)$; $-70ax^2/9b^2z$

$$38-39. \quad \frac{3ab^2x}{5yzu} : \frac{0.5ab^2x}{0.3yzu} \quad \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right).$$

$$40-41. \quad \frac{-4a^5bx}{(a+b)^2} : \frac{8a^5bx^2}{a+b} \quad \left(\frac{a^2}{cb} + \frac{b^2}{ac} - \frac{c^2}{ab}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{c}\right).$$

$$R.: -1/(a+b)2x \quad ; \quad (a^3 + b^3 - c^3)/(a^2c - ab^2)$$

$$42. \quad \left\{\left(a+1+\frac{1}{a}\right) : \left(a-1+\frac{1}{a}\right)\right\} \frac{a-1}{a+1}.$$

$$43. \quad \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) \left(x^2 - \frac{x^3}{x-1}\right) : (x^3 - 1) \quad R.: -1/(x-1)^2$$

$$44-46. \quad a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}, \quad \frac{\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{ax} + \frac{1}{a^2}}, \quad \frac{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} \cdot \frac{a^3 - b^3}{c^3 + d^3}}{\frac{a+b}{c-d} : \frac{a-b}{c+\frac{1}{c}}}$$

$$R.: (abc + a + c)/(bc + 1) \quad ; \quad (x^3 - ax^2 + a^2x - a^3)/(x + a) \quad ; \quad \dots \text{etc.}$$

Verificar las siguientes identidades:

$$47. \quad \frac{1}{a^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{a + 1}$$

$$48. \quad \frac{1}{a^4 - 1} = \frac{1}{4} \frac{1}{a - 1} - \frac{1}{4} \frac{1}{a + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + a^2}$$

$$49. \quad \frac{1}{1 - x^3} = \frac{x + 2}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{1}{3(1 - x)}$$

$$50. \quad \frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-x)(y-z)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = 0.$$

CAP. IV. — ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Resolver y verificar las siguientes ecuaciones numéricas enteras:

$$1.3. \quad 3x + 7x = 20 \quad ; \quad 2 - x = 3x + 6 \quad ; \quad 5(2 - 3x) = 0$$

$$R.: 2 \quad ; \quad -1 \quad ; \quad 2/3$$

4.5. $x^2 - 1 = (x + 1)^2$; $x + 2 = x + 3$ (no tiene solución). (*)

6.7. $7(2x - 5) = 3(11 - x)$; $4x + 3(x - 5) = 4 + 2(x + 3)$
R.: 4 ; 5

8.9. $3x - 2[x - 4 - (5x - 7) + 30] = 0$; $(x - 1)(x - 2) = (x + 1)^2$
R.: 6 ; 1/5

10.11. $x(x - 1)(x - 2) = (x - 1)^3$; $0,2(x - 5) = 3 - 0,1(x + 46)$

12. $x - (2 + x)(x - 1) = (2 - x)(5 + x) - 17$
R.: -3

13.14. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 11 - \frac{x}{5} - \frac{x}{12}$.

15.16. $2x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$. $18 - \frac{3x}{4} = 0,7x + 20,9$
R.: 5/3 ; -2

17.18. $2x - \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}x - 0,1(x - 3)$. $\frac{5x}{4} - \frac{7x - 37}{18} - \frac{1}{2} = 4$.

19. $\frac{3x + 1}{7} + \frac{x + 2}{28} - 2 = \frac{2x - 4}{12} - \frac{6 - x}{4}$.
R.: -1

20. $\frac{3(x + 1)}{16} + \frac{7x + 1}{20} = 2 - \frac{7x - 4}{15}$.

21. $\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) - 7\left(\frac{1}{42} - \frac{x}{30}\right) = \frac{39 + x}{6}$.
R.: 625/81

22. $\frac{3\left(x + \frac{1}{6}\right) - 4\left(x + \frac{1}{8}\right)}{0,6} = \frac{x - 13}{0,3} - 1,2$.

Resolver y verificar las siguientes ecuaciones literales:

23.25. $ax - 6 = 0$; $ax + x = a^2 - 1$; $2ax - 1 = x + 1$
R.: $6/a$; $(a - 1)$; $2/(2a - 1)$

26.27. $13x - a = 7x - b$; $(a + 1)x = b - x$

28.29. $5(4b - x) = 3(4a - 3x)$; $(x - a)(x - b) = x^2 - a^2$
R.: $3a - 5b$; a

(*) Como ésta, otras de las ecuaciones de las propuestas no tienen solución.

$$30. \quad 2b(a+x) + ax = 3a(b+x)$$

$$31. \quad (a+x)(b+x) - (a-x)(b-x) = 2(a-b)$$

R.: $(a-b)/(a+b)$

$$32. \quad (6x^2 - 4x + 1) = 3(8x^2 - 5x + 1)$$

$$33. \quad (2x-1)(x-4)(x+2)^2(3x+1)^3 = 0$$

R.: $\frac{1}{2}, 4, -2, -\frac{1}{3}$

34. Resolviendo la ecuación $x^2 - 1 = (x-1)(x+2)$ se obtiene $x=1$. ¿Puede aceptarse esa solución? ¿Por qué?

Resolver y verificar las siguientes ecuaciones fraccionarias:

$$35-36. \quad \frac{x}{2} + \frac{1}{a} - \frac{x}{b} = \frac{1}{2} - \frac{x}{a} + \frac{1}{b} \qquad \frac{a+x}{a} + \frac{b+x}{b} = 2$$

R.: $(ab+2a-2b)/(ab-2a+2b) \quad ; \quad \dots \text{ etc.}$

$$37. \quad \frac{x-ab}{c} + \frac{x-bc}{a} + \frac{x-ac}{b} = 2(a+b+c)$$

$$38. \quad \frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ac} - abc = 1 - (a+b+c)x$$

R.: $(1+abc)/2(a+b+c)$

$$39-41. \quad \frac{24}{x} = 8, \quad \frac{24}{x-3} = 6, \quad \frac{15}{6-x} + 3 = \frac{40}{6-x} - 3$$

$$42-43. \quad \frac{15-x}{x-18} = \frac{7-x}{x-8}, \quad \frac{5x-9}{4} + \frac{3-5x}{4} = \frac{10-x}{5x-8}$$

R.: $3 \quad ; \quad 4/13$

$$44. \quad \frac{8x-30}{2x-7} - \frac{10x-13}{2x-3} = \frac{4x-17}{x-4} - \frac{5x-4}{x-1}$$

$$45-47. \quad \frac{b}{a+x} = c, \quad \frac{a+x}{b-x} = \frac{c-x}{d+x}, \quad \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+b} = \frac{a+b}{x^2+c^2}$$

R.: $(b-ac)/c \quad ; \quad (bc-ad)/(a+b+c+d) \quad ; \quad \dots \text{ etc.}$

$$48-49. \quad \frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = \frac{2ab}{(x-a)(x-b)}, \quad \frac{x+1}{a-1} - \frac{x-1}{a+2} = \frac{2a+4}{a^2-1}$$

$$50. \quad \frac{x-a}{ab-b^2} - \frac{x-b}{a^2+ab} - \frac{2b}{a^2-b^2} = \frac{a+b-x}{a^3b-ab^3}$$

R.: $a+b$

$$51-52. \quad \frac{1+x}{2} - \frac{x^2-1}{ax} = 0$$

$$\frac{x}{x-a} + \frac{x}{x+a} = \frac{2x}{x+1}$$

$$53-54. \quad \frac{1}{2} \left(\frac{3a}{x} - \frac{a}{x} \right) = \frac{a}{x};$$

$$\frac{x^3+b^3}{x+b} - x(x-b) = b^2 - 1$$

R.: Las dos ecuaciones son imposibles.

55. Verificar que no existen valores de x que hagan tomar valores numéricos iguales a las expresiones $(x-1):(x-3)$ y $(x-3):(x-5)$.

Resolver y verificar las siguientes ecuaciones irracionales:

$$56-58. \quad \sqrt{12-x} = 3; \quad \sqrt{x} + 2 = 8 - 2\sqrt{x}; \quad 1 - \sqrt{x} = 2$$

R.: 3; 4; ecuación imposible

$$59-60. \quad \sqrt{x+2} + 3 = 2\sqrt{x+2}; \quad a\sqrt{x} + b = a'\sqrt{x} + b'$$

$$61-62. \quad \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} = 1; \quad x = 8 - \sqrt{x^2 + 2x + 10}$$

R.: -2; 3

$$63-64. \quad \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} = x + a; \quad \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x}$$

Aplicaciones de las ecuaciones (*)

1. La fórmula $c^2 = 8 h R - 4 h^2$ se refiere a un segmento de círculo, siendo c la cuerda, h la flecha y R el radio. Calcular R cuando la cuerda vale 30 cm. y la flecha 8 cm.

R.: 289/16

2. La fórmula $S = \frac{1}{2} (b + b') h$ se refiere al área de un trapecio. Hallar la expresión que dé el valor de la base b .

3. En el problema del descuento racional se tiene la siguiente fórmula:

$$A = N - \frac{A \times d \times R}{36000}$$

en la que N es el valor nominal, A el actual, d el tiempo expresado en días, y R el tanto por ciento de interés anual. Despejar el valor actual y calcular luego su valor para $N = \$ 980$, $d = 85$ días, y $R = 6 \%$.

R.: $A = 36\,000N/(dR + 36\,000)$; ... etc.

4. Si F es la temperatura Fahrenheit y C la correspondiente centígrada, se tiene la fórmula: $F = \frac{9}{5} C + 32$. Calcular C para $F = 74^\circ$.

5. Idem para $F = 10^\circ$.

$C = -12.22 \dots$

(*) En Geometría, Física, Cosmografía y otras Ciencias que se estudiarán en los cursos próximos, se presentan con frecuencia ecuaciones que contienen las letras iniciales de las magnitudes que representan. Es conveniente que el estudiante se habitúe a su resolución, despejando cualquiera de las letras que contienen.

6. Hallar el valor F de la temperatura Fahrenheit, mediante la fórmula $R = \frac{4}{9} (F - 32)$, cuando $R = 58^\circ$ (R es la temperatura Reamur).

7. En Física, en el estudio de las fuerzas paralelas, se llega a la fórmula:

$$\frac{x}{d-x} = \frac{F'}{F}$$

en la que F y F' son las intensidades de las fuerzas, d la distancia entre ambas, y x la distancia de la resultante a la fuerza F . Despejar x , y luego calcular su valor para $d = 30 \text{ cm.}$, $F = 2 \text{ Kg.}$ y $F' = 2,8 \text{ Kg.}$

8. Con el aparato de Mac-Leod, usado en Física para medir pequeñas presiones de gases, se emplea la siguiente fórmula:

$$N x = n(x + h)$$

en la que N y n representan volúmenes, h y x presiones. Despejar x .

$$x = nh / (N - n)$$

9. La fórmula del *psicrómetro* (aparato empleado para conocer el grado de humedad de la atmósfera), es la siguiente:

$$A(t - t') = \frac{F - f}{H}$$

Despejar f , que representa la presión del vapor en el aire ambiente.

10. En la determinación del coeficiente medio de dilatación absoluta del mercurio, se llega a la fórmula:

$$\frac{h D_0}{l + m t} = h_0 D_0$$

Despejar m , que representa el coeficiente buscado.

11. En el estudio de los espejos esféricos se llega a la fórmula:

$$\frac{p'}{p} = \frac{2f - p'}{p - 2f}$$

Despejar f , que representa la distancia focal.

; ... etc.

$$f = pp' / (p + p')$$

12. La ecuación conocida en Física con el nombre de Vander Waals, es:

$$\left[p + \frac{a}{v^2} \right] (v - b) = R T$$

en la que p y v representan presiones y volúmenes, respectivamente, de un fluido; a , b , R , son constantes positivas que dependen de la naturaleza de ese fluido, y T la temperatura absoluta. Despejar p .

13. En Cosmografía, se emplea la fórmula

$$\frac{d}{d'} = \frac{x-t}{t'-x}$$

para determinar el equinoccio de otoño, vale decir, el momento que el centro del Sol pasa por el Ecuador celeste, yendo del hemisferio austral al boreal; x , t , t' representan intervalos de tiempo, d y d' representan las distancias angulares del Sol al Ecuador. Despejar x .

$$x = (dt' + td')/(d + d')$$

Desigualdades de primer grado.

Resolver las siguientes inecuaciones:

1.3. $2x - 6 > 0$; $x + 2 < 3x - 6$; $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} < \frac{3}{2}(x - 1)$
 R.: $x > 3$; $x > 4$; $x < 9$

4.5. $2x + \frac{1}{2} < x - (1 - \frac{1}{2}x)$; $x^2 - 2x < x(1 + x) - 3$

6.7. $ax < bx + 1$; $(x + a)(x + b) < (x - a)(x - b)$
 R.: $x < 1/(a - b)$; $x < 0$

8-10. $\frac{5}{x} < \dots$; $\frac{1}{x+1} < 7$; $\frac{x-1}{x+1} > 3$.

11-13. $\frac{4x}{x+a} < 2$; $(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0$; $\frac{x-2}{x+1} < \frac{x+1}{x-1}$
 R.: $x < a$; $-2 < x < \frac{1}{2}$; $x > 1/5$

14. Demostrar que, para cualquiera que sean los valores de x , se cumple la desigualdad:

$$x^2 + a^2 \geq 2ax$$

15-16. Hallar las soluciones comunes de las siguientes inecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ 2x - 3 < x \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{2}(3x - 1) \\ 6x > x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} ax > 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

R.: $2 < x < 3$; $1/5 < x < 1$; ... etc.

CAP. V. — SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Sistemas con dos incógnitas.

Resolver y verificar los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 6y = 3 \\ 4x - 3y = 1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x = 3y \\ 4x - \frac{1}{2}y = 11 \end{cases}$

R.: ($x = \frac{1}{2}$; $y = 1/3$) ; ($x = 3$; $y = 2$)

$$5. \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 4 \\ \frac{1}{8}x + \frac{3}{4}y = 5 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} 0,3x + 0,2y = 1 \\ 0,1x - 0,2y = -0,3 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ ax - y = a \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x + y = a + b \\ (a + c)x = (c + y)b \end{cases}$$

$$R.: (x=1 ; y=0) ; (x=b ; y=a)$$

$$9. \quad \begin{cases} 5x - 33y = 0 \\ \frac{1}{3}(x + y) + \frac{1}{4}(x - y) = 59 \end{cases} \quad 10. \quad \begin{cases} m + n - 1 = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n + 1 \\ 2m - n + 2 = m + \frac{1}{2}n - 3 \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} 3(2x + 3y) = 2(2x - 3y) + 28 \\ 5x - 2y = 3(4x - y) + 9 \end{cases}$$

$$R.: x = -1 ; y = 2$$

$$12. \quad \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{1}{10} = 4(x - y) + \frac{y}{4} \\ \frac{y}{10} + \frac{2x}{3} = 5(x - y) - \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ \frac{x-y}{2ab} - \frac{x-y}{a^2+b^2} = 0 \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} \frac{x+y}{a^2-4} = \frac{2}{a-2} \\ 2x - 3y = 2a - 1 \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{7}{y} = 57 \\ \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = 22 \end{cases}$$

$$R.: x = (8a + 11)/5, y = (2a + 9)/5 ; \text{ hacer } 1/x = u, 1/y = v \therefore x = 1/10, y = 1$$

$$16. \quad \begin{cases} \frac{x-4}{a^2+2a+1} = \frac{2a}{a^2-1} - \frac{y+4}{a^2-2a+1} \\ x + y = 2a \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + ay = a \\ ax + \frac{y}{a} = 1 \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} x - 4y = 3 \\ \frac{1}{2}x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 10x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$R.: \text{Sistema imposible ; sistema indeterminado}$$

20. ¿Cuáles son los valores que debemos asignar a los coeficientes a y b del sistema

$$\begin{cases} 8x + ay = 3 \\ 2x + y = b \end{cases}$$

para que tenga una solución única? ¿Idem para que resulte imposible, o indeterminado?

Sistemas con más de dos incógnitas.

Resolver y verificar los siguientes sistemas:

$$1. \quad \begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = -3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = z - 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{R.: } (x = 1 ; y = -4 ; z = 5) ; \\ (x = 11/3 ; y = -2/3 ; z = 4/3)$$

$$3. \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ z + x = 6 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + y + 4z = 7 \\ 3x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} 3m - 8n + 4p = -1 \\ m + 6n - 5p = 23 \\ 7m - 10n + 10p = 0 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} 3x - 2y + z = 7,1 \\ 2x + 3y - 2z = -4,2 \\ x + 2z = 1,2 \end{cases}$$

$$\text{R.: } (m = 5 ; n = 1/2 ; p = -3) ; \\ (x = 1 ; y = -2 ; z = 0,1)$$

$$7. \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y + t = 0 \\ x - t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = -1 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ y - 2z = -1 \\ z - 3u = -2 \\ x + y + z + u = 4 \end{cases}$$

9. En las tres ecuaciones siguientes dar a m el valor 2, y decir si forman un sistema determinado o absurdo. En este último caso, calcular el valor que es necesario dar a m para obtener un sistema determinado.

$$\begin{cases} x + y + m = 3 \\ x - 2y = 3 \\ 4x - m = 1 \end{cases}$$
CAP. VI. — PROBLEMAS DE PRIMER GRADO**Problemas con una incógnita.**

1. Dividir el número 180 en dos partes tales, que el duplo de una de ellas sea igual a las dos terceras partes de la otra.

2. Una de las bases de un trapecio isósceles es dupla de la otra, los lados iguales miden 324 mm. cada uno y el perímetro mide 19,23 dm. ¿Cuánto mide cada base?

$$\text{R.: } x + 2x + 324 \times 2 = 1923 \therefore \text{Bases: } 425 \text{ mm. ; } 850 \text{ mm.}$$

3. Determinar dos números sabiendo que su suma es 624, y que uno de ellos supera en 63 el duplo del otro.

4. Si a un número se agrega 6, luego se divide esa suma por 6 y del cociente se resta 6, se obtiene 6 como resultado. ¿Cuál es el número?

$$\text{R.: } (x + 6)/6 - 6 = 6 \therefore x = 66$$

5. De la conocida expresión de la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo, o sea $[180^\circ (n-2)]$, deducir que si esa suma es igual a 180° , el polígono es entonces un triángulo.

6. Dividir el número 337 en dos partes tales que dividiendo la primera por la segunda se obtenga 6 como cociente y 15 como resto.

$$R.: 337 - x = x \times 6 + 15 \quad \therefore 1.^a = 291 \quad ; \quad 2.^a = 46$$

7. Si en un colegio se ubicaran 8 alumnos en cada banco, 4 de ellos quedarían sin asiento; si se ubicaran 9 en cada banco, quedarían dos asientos sin ocupar. ¿Cuántos son los alumnos y cuántos los bancos?

8. Una persona compró una tela por cierto precio y pagó igual suma por un marco para ella. Si el marco le hubiese costado \$ 8,25 menos y la tela \$ 3 más, el precio del marco hubiera sido la mitad del de la tela. ¿Cuánto costó esta última?

$$R.: x - 8,25 = (x + 3)/2 \quad \therefore x = \$ 19,50$$

9. Una persona dispone de \$ 50 000 para colocar a interés simple; una parte al 5 % y la otra al 6 %, y obtiene así una renta anual de \$ 2 700. Calcular cada una de aquellas dos partes.

10. Un obrero estipuló ejecutar cierto trabajo con la condición de recibir \$ 3 por cada día que trabajara y que se le descontaría \$ 1,80 por cada día que faltara al trabajo. Después de 80 días se terminó el trabajo, pero el obrero, poco laborioso, no percibió nada alguna. ¿Cuántos días faltó al trabajo?

$$R.: (80 - x)3 - 1,8x = 0 \quad \therefore x = 50 \text{ días}$$

11. Una persona compró una pieza de paño de 30 metros; pagó al contado y le hicieron un descuento del 6 %. Si el total neto pagado fué de \$ 423, ¿cuál era el precio unitario del paño?

12. Una fábrica tejió un total de 2616 Kg. de algodón, durante tres meses consecutivos. Calcular la producción mensual sabiendo que en cada uno de los meses siguientes al primero ella aumentó en los $\frac{2}{5}$ del mes precedente.

$$R.: x + 7x/5 + [7x/5 + 2(7x/5)/5] = 2616 \quad \therefore 600 \quad ; \quad 840 \quad ; \quad 1176 \text{ Kg.}$$

13. Un padre, al morir, deja a cada uno de sus hijos \$ 19 200. Uno de ellos renuncia a su parte, la que se divide entre los restantes hermanos, tocándole así a cada uno \$ 24 000. Calcular el número de hermanos y el monto de la herencia.

14. Una persona gasta en alimentarse la mitad de lo que gana y la tercera parte en otros gastos, ahorrando el resto. Calcular cuánto gana por día, sabiendo que en 45 días ahorró \$ 30.

$$R.: (x - x/2 - x/3)45 = 30 \quad \therefore x = \$ 4$$

15. ¿Cuántos kilogramos de harina se necesitan para preparar 100 Kg. de pan, si la harina, al transformarse en pasta, aumenta $\frac{1}{4}$ de su peso, y la pasta, al cocinar, pierde $\frac{1}{6}$ de su peso?

16. Un padre tiene 48 años y el hijo 9. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será cuádruple de la del hijo?

$$R.: 48 + x = (9 + x)4 \quad \therefore x = 4 \text{ años}$$

17. Con los datos del problema anterior, ¿cuándo la edad del padre fué 7 veces la del hijo?

18. Se dispone de un cierto número de monedas para formar con ellas un cuadrado; hecho un primer ensayo sobran 120, pero aumentando dos monedas por lado sobran entonces 52. ¿De cuántas monedas se dispone?

$$R.: x^2 + 120 = (x + 2)^2 + 52 \quad \therefore 376 \text{ monedas}$$

19. Un depósito se abastece por dos canillas; la primera llenaría el depósito en 10 horas, y la segunda en 14 horas. Pero un caño colocado en el fondo del depósito lo agotaría en 20 horas. ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito dejando abiertas las dos canillas y el caño?

20. Un chacarero posee, entre gallinas y conejos, 150 animales. ¿Cuántos tiene de cada especie, si el número total de patas es 404?

$$R.: 2x + 4(150 - x) = 404 \quad \therefore 98 \text{ gallinas, ... etc.}$$

21. Se compró una casa en \$ 10 000 y se vende por intermedio de un corredor, a quien se paga el 4 % del precio de venta. ¿Cuál debe ser este precio, para ganar el 20 % del dinero que costó la casa?

22. Una persona coloca \$ 4 200 al 5 %; después de 3 años y 4 meses, coloca una nueva suma de \$ 5 400 al 6 %. ¿Al cabo de cuánto tiempo después de la primera colocación, la suma de los intereses de ambos capitales reproducirá la suma de los capitales iniciales?

$$R.: 4200 \times 5x/1200 + 5400 \times 6(x - 40)/1200 = 4200 + 5400 \quad \therefore 240 \text{ meses}$$

23. Un padre tiene a años y el hijo b . ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será m veces la del hijo, y cuál es la condición para que la solución del problema sea positiva?

24. Fulano tiene 49 años y su mujer 30. Sabiendo que se casaron cuando la edad de él era doble de la de ella, indicar las edades respectivas al casarse.

$$R.: 49 - x = 2(30 - x) \quad \therefore$$

hace $x = 11$ años que se casaron; edad del hombre, 38 años, ... etc.

25. La base de un rectángulo es el doble de la altura. Si ambas dimensiones se aumentan en 2 cm., el área aumenta en 154 cm.². Calcular las dimensiones del rectángulo.

26. En un colegio que hay 24 profesores y 500 alumnos, se desea recolectar \$ 822 para fomento de la biblioteca. ¿Cuál debe ser la cuota de los profesores y de los alumnos, si se establece que la de los primeros sea doble que la de los alumnos?

$$R.: 500x + 24 \times 2x = 822 \quad \therefore \text{cuota por alumno} = \$ 1,50 ; \dots \text{ etc.}$$

27. Un estanciero compró un cierto número de animales por \$ 300; habiendo muerto 10 de ellos, vendió los que le quedaron en \$ 180. ¿Cuántos animales compró, si no perdió ni ganó en la venta?

28. Una persona propuso dar 8 pesos a quien duplicase el número de pesos que tenía. Un amigo accedió a ello tres veces consecutivas, y así, el primero quedó sin nada. ¿Cuántos pesos tenía?

$$R.: [(2x - 8)2 - 8]2 - 8 = 0 \therefore x = \$ 7$$

29. Deseando distribuir cierta suma de dinero entre varios pobres, se observa que faltan \$ 8 para dar a cada pobre \$ 5; y que dando a cada pobre \$ 4, sobran \$ 10. ¿Cuántos eran los pobres?

30. Dos móviles, distantes 182 Km., parten al mismo tiempo y dirigiéndose uno hacia el otro, con velocidades respectivas de 6 y de 8 Km. por hora. ¿Después de cuánto tiempo se encontrarán y a qué distancias de los puntos de partida?

$$R.: x/6 = (182 - x)/8 \therefore x = 78 \text{ Km. ; ... etc.}$$

31. Análogo problema al anterior, pero suponiendo que el segundo móvil parte 4 horas después del primero.

32. ¿A qué hora, después de mediodía, se encontrarán por primera vez las agujas de un reloj?

$$R.: x/5 = (60 + x)/60 \therefore x = 5 \text{ mint. } 27 \text{ sg. ; encuentro a la 1 h. } 5 \text{ mint. } 27 \text{ sg.}$$

Problemas con dos incógnitas.

1. Hallar dos números tales que su suma aumentada en 14 sea igual al duplo del número mayor, y que su diferencia sea igual al número menor disminuido en 4.

2. Hallar una fracción que adquiera el valor de $\frac{1}{2}$ cuando sus dos términos aumentan en 1, y que en cambio adquiera el valor $\frac{1}{3}$ cuando sus términos disminuyen en 1.

$$R.: (x + 1)/(y + 1) = \frac{1}{2} ; (x - 1)/(y - 1) = \frac{1}{3} ; \text{Frac.} = \frac{3}{7}$$

3. Una persona colocó a interés simple dos sumas de dinero: la primera al 5 % y la segunda al 6 %, recibiendo la renta anual de \$ 548. Si colocara la primera suma al 6 % y la segunda al 5 %, la renta anual aumentaría en \$ 26. ¿Cuáles son dichas sumas?

4. Un capital se distribuye entre cierto número de personas; si éstas aumentaran en 6, a cada una le tocaría \$ 3 menos; si en cambio aumentaran en 2, a cada una le tocaría \$ 2 más. Determinar el número de personas y la parte que le toca a cada una.

$$R.: (x + 6)(y - 3) = xy ; (x - 2)(y + 2) = xy ; \text{personas} = 10 ; \text{parte} = \$ 6$$

5. Distribuir \$ 240 entre dos personas de modo que la razón entre las respectivas cuotas sea igual a $\frac{3}{7}$.

6. A una fiesta concurren 12 hombres más que mujeres. Sabiendo que los hombres pagaron \$ 5 cada uno y las mujeres \$ 2, y que en total se recaudaron \$ 186, calcular el número de hombres y de mujeres que intervinieron en la fiesta.

R.: $x = y + 12$; $5x + 2y = 186$; 18 mujeres y 30 hombres

7. En un número de dos cifras, la suma de las mismas es 9, y escribiendo las cifras en orden inverso, se obtiene un número que excede al primero en 45. ¿Cuál es el número?

8. Hace 3 años, la edad de un padre era quintupla de la del hijo; dentro de 4 años la edad del padre será triple de la del hijo. ¿Cuáles son sus edades en el momento actual?

R.: $x - 3 = 5(y - 3)$; $x + 4 = 3(y + 4)$; el padre 38 años, ... etc.

9. Se pagó una cuenta de \$ 20 mediante 370 monedas; unas eran de 20 centavos y otras de 10 centavos. ¿Cuántas había de cada clase?

10. En una jaula se encuentran encerrados conejos y gallinas, en total 42 cabezas y 120 patas. Calcular cuántos animales hay de cada especie.

R.: $x + y = 42$; $4x + 2y = 120$; 18 conejos, ... etc.

11. La rueda delantera de un carro da 6 vueltas más que la rueda trasera en un trayecto de 120 metros; si la circunferencia de la rueda delantera se aumentase una cuarta parte más y la de la trasera una quinta más, en lugar de 6 revoluciones daría solamente 4 en el mismo trayecto. ¿Cuál es la circunferencia de cada rueda?

12. Observo en el reloj, que el horario se encuentra entre las 4 y las 5, y el minutero entre las 7 y las 8. Después de un rato, observo que las agujas ocupan una posición inversa, es decir, que el horario ocupa la posición que antes tenía el minutero, e inversamente. ¿Cuál era la hora de la primera observación?

R.: $x - 20 = y/12$; $y - 35 = x/12$ $\therefore y = 36$ mint. 55 sg. ;
Hora de la 1.^a observación: 4 h, 36 mint. 55 sg.

Problemas con más de dos incógnitas.

1. Interrogado un estudiante respecto de la edad que tenía, así como la del padre y la del abuelo, contestó: mi edad y la de mi padre suman 59 años; la de mi padre y la de mi abuelo suman 109 años; la diferencia de edades de estos últimos es 21 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

2. Se han gastado \$ 74 entre 44 personas, en cuyo número hay hombres, mujeres y niños; cada hombre gastó \$ 5, cada mujer \$ 4, y entre cada 3 niños gastaron \$ 1. Si el número de niños es duplo de la suma de hombres y mujeres aumentada en una unidad, ¿cuántos hombres, mujeres y niños había?

$$R.: x + y + z = 44 ; 5x + 4y + z/3 = 74 ; z = 2(x + y + 1)$$

3. Descomponer el número 90 en tres partes tales que: dividiendo la primera por la segunda, se obtenga 3 como cociente y 3 como resto; dividiendo la segunda por la tercera, se obtenga 2 como cociente y 6 como resto.

4. Tres personas tienen en conjunto \$ 500; si la primera diera \$ 20 a la segunda, y la segunda \$ 30 a la tercera, la primera tendría el doble de lo que tendría la segunda, y ésta el triple de lo que tendría la tercera. ¿Cuánto tiene cada persona?

$$R.: x + y + z = 500 ; x - 20 = 2(y + 20 - 30) ; y + 20 - 30 = 3(z + 30)$$

$$1.^a = \$ 320 , 2.^a = \$ 160 , \dots \text{etc.}$$

5. La suma de las tres cifras de un número es 9; la primera cifra de la izquierda es la octava parte del número formado por las otras dos cifras de la derecha, y la última cifra de la derecha es la octava parte del número formado por las otras dos cifras de la izquierda. Hallar el número.

6. Tres canillas A , B , C , pueden llenar un estanque. Estando abiertas al mismo tiempo las canillas A y B lo llenan en 10 minutos; B y C en 20 minutos, C y A en 12 minutos. ¿Cuánto tiempo empleará cada canilla en llenar el estanque, si sólo estuviera abierta una de ellas?

$$R.: 1/x + 1/y = 1/10 ; 1/y + 1/z = 1/20 ; 1/z + 1/x = 1/12 \therefore A \text{ en } 15 ; B \text{ en } 30 ; C \text{ en } 60 \text{ minutos.}$$

7. Los 600 mil habitantes de una ciudad están repartidos en cuatro zonas. En la 1.^a hay doble número de habitantes que en la 4.^a; en la 2.^a y 3.^a juntas hay tantos como en la 1.^a y 4.^a, y el número de habitantes de la 3.^a zona es los $\frac{5}{7}$ de la 2.^a. ¿Cuántos habitantes hay en cada zona?

Repartición proporcional.

1. Una herencia de \$ 24000 se dispuso repartirla entre tres familias en proporción al número de miembros que las componen. ¿Cuánto corresponderá a cada una, si la 1.^a consta de 5 personas, la 2.^a 7 y la 3.^a 8?

2. El directorio de una fábrica dispuso repartir \$ 8400 entre 3 antiguos empleados, proporcionalmente a las respectivas edades: el 1.^o tiene 56 años, el 2.^o 64 y el 3.^o 80. ¿Cuánto recibirá cada uno, y cuánto recibiría, si la repartición se hiciera en razón inversa de las edades?

$$R.: 1.^a \$ 2352 ; \$ 2688 ; \$ 3360 ; 2.^a \$ 3262,14 ; \$ 2854,37 ; \$ 2283,49$$

3. Cuatro vecinos arriendan un campo por \$ 1540. El primero manda a pastorear sus 40 animales durante 15 días, los 45 del segundo durante 20 días, los 55 del tercero durante 12 días, y los 60 del cuarto durante 10 días. ¿Cuánto tendrá que pagar cada vecino?

4. Se ha legado la suma de \$ 152 000 para repartirse entre 4 instituciones de beneficencia, en razón directa del número de personas socorridas y en razón inversa de las rentas de que disfrutan. ¿Cuánto corresponde a cada una, si los socorridos son, respectivamente: 90, 124, 196, 216, y las rentas: \$ 3000, \$ 6200, \$ 9800, \$ 36000?

R.: \$ 60 000 ; \$ 40 000 ; \$ 40 000 ; \$ 12 000

5. Dos viajeros, uno de los cuales tiene 5 panes y el otro 7, encuentran un tercero con quien distribuyen las provisiones. Al despedirse, este último entregó, como retribución, 12 monedas. ¿Cómo corresponderá repartir las monedas entre los dos primeros viajeros? *Respuesta:* Se repartirán proporcionalmente a los números 1 y 3. (*Este problema es del "Liber Abaci" de Leonardo de Pisa, año 1202*).

6. Cuatro socios aportaron capitales iguales en un negocio, que dejaron: el 1.^o 1 año y 4 meses, el 2.^o 1 año y 2 meses, el 3.^o 2 años y 3 meses, y el 4.^o 2 años y 5 meses. Si la ganancia total fué de \$ 2700, ¿cuánto le corresponderá a cada uno?

R.: \$ 502,33 ; \$ 439,53 ; \$ 847,67 ; \$ 910,47

7. Tres socios obtuvieron una ganancia de \$ 1400, los que habían aportado al negocio, el 1.^o \$ 4000 durante 10 meses, el 2.^o \$ 7000 durante 15 $\frac{1}{2}$ meses, y el 3.^o \$ 6000 durante 17 meses y 20 días. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

8. Para la construcción de un canal de irrigación, tres propietarios contribuyen en razón directa de las superficies de sus campos que son de 5,12 Há., 6,08 Há., 10,50 Há., y en razón inversa de las distancias al canal, que son respectivamente 3,25 Km., 1,23 Km., 0,78 Km. Calcular la contribución de cada propietario, si el costo total de la obra fué de \$ 10 539.

R.: 1.^o \$ 830,98 ; 2.^o \$ 2 607,37 ; 3.^o 7 100,65

Problemas sobre mezclas.

1. Se han mezclado 120 litros de vino de \$ 0.30 el litro, con 40 litros de vino de \$ 0.45 el litro y con 40 litros de agua. ¿Cuánto vale el litro de la mezcla?

2. Se funden juntos dos lingotes de plata y de cobre: el primero de título 0,905 y de 10 Kg. de peso; el segundo de título 0,895 y de 4 Kg. de peso. ¿Cuál es el título de la aleación que se obtiene?

R.: 0,902

3. Se funden juntos 20 gramos de oro de 18 kilates con 50 gramos de oro amonedado. Calcular el título de la aleación que resulta. (Recuérdese que el título del oro de 18 K. es la relación 18:24, y que el oro amonedado argentino tiene el título 0,500; véase A₂ N.º 69).

4. ¿En qué relación se deben mezclar cafés de \$ 2 y de \$ 2,60 el Kg. para obtener café de \$ 2,40 el Kg.?

R.: $\frac{1}{2}$ (es decir, una parte del primero y dos del segundo)

5. ¿Qué cantidades de plata de títulos respectivos 0,930 y 0,850 se deben fundir para obtener 680 gramos de plata de título 0,900?

6. Un artifice dispone de dos lingotes: el primero contiene 270 g. de oro puro y 30 g. de cobre; el segundo, 200 g. de oro puro y 50 g. de cobre. Calcular qué cantidad tendrá que tomar de cada lingote para componer 400 gramos de aleación de título 0,825.

R.: 100 g. de título 0,900 ; ... etc.

7. ¿Cuánto oro puro es necesario agregar a 272 gramos de una aleación de oro y cobre cuya ley es de 0,845 para elevar la ley de la aleación a 0,917?

8. Se dispone de tres aleaciones de plata y cobre de títulos respectivos: 0,700; 0,820; 0,900. Se desea obtener un lingote de título 0,850 que contenga 730 gramos del segundo y de 2130 g. de peso total. ¿Qué cantidades es necesario tomar de los otros dos lingotes?

R.: 240,5 g. de ley 0,700 ; 1159,5 g. de ley 0,900

CAP. VII. — REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Sistema cartesiano. — Funciones

1. En un mismo sistema de ejes coordenados, representar los puntos:

(4, 2) ; $(-\frac{3}{4}, -3)$; (-5, 5) ; (0, 4) ; $(\frac{3}{8}, -1)$; (0, -2)

2. Construir el diagrama del crecimiento de la población argentina, con los siguientes datos de los censos nacionales:

Cálculo de Azara (1797)....	310.628	Censo de 1869	1.737.076
" Brackenridge (1818)...	554.000	" " 1895	3.954.911
" de Parish (1837)....	650.000	" " 1914	7.885.237
" " Marin de Moussy. 1.180.000		Cálculo en 1934.....	12.026.172

3. Construir un diagrama que indique la hora de salida del Sol en la Capital respectiva durante el año corriente. (Tómense los datos de un almanaque para el día 1.º de cada mes),

4. En un mismo sistema de ejes coordenados, construir los diagramas correspondientes a la importación y a la exportación comercial de la República Argentina con los datos del siguiente cuadro:

CIFRAS GENERALES DEL INTERCAMBIO COMERCIAL DESDE 1927 A 1936, EN \$ m. n.				
Años	Total	Importación	Exportación	Saldo
1927	4.241.203.388	1.947.282.736	2.293.920.652	346.637.916
1928	4.298.216.773	1.901.608.474	2.396.608.299	494.999.825
1929	4.126.684.711	1.959.084.898	2.167.599.813	208.514.915
1930	3.075.652.099	1.679.960.782	1.395.691.317	284.269.465
1931	2.629.642.971	1.173.828.311	1.455.814.660	281.986.349
1932	2.124.047.034	836.264.536	1.287.782.498	451.517.962
1933	2.017.990.441	897.148.929	1.120.841.512	223.692.583
1934	2.548.366.422	1.119.932.444	1.438.433.978	328.501.534
1935	2.774.330.280	1.174.981.223	1.569.349.057	394.367.834
1936	2.772.423.390	1.116.710.994	1.655.712.396	539.001.402

5. Idem para el saldo del intercambio comercial; téngase presente que el correspondiente al año 1930 fué negativo, superando las importaciones a las exportaciones.

6-9. Calcular los valores numéricos de las funciones:

$$y = 2x + 3 ; y = -x ; y = \frac{1}{8}x^2 ; y = \frac{1}{x}$$

para valores enteros de x comprendidos en el intervalo $(-2, 5)$.

10-13. Empleando papel cuadrículado, dibujar las curvas representativas de la variación de las funciones del ejercicio anterior, limitadas en el campo referido en el mismo; hágase variar x de media en media unidad para los dos primeros y de un cuarto de unidad para los dos últimos.

14. Gráfica de la función $y = -\frac{1}{2} g t^2$, para $g = 9,8$.

15. La intensidad i del sonido, a igualdad de otras circunstancias, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d al cuerpo sonoro ($i = K/d^2$). Dibújese la gráfica de i al variar d , haciendo $K = 2$.

16-20. Indicar si son crecientes o decrecientes las funciones

$$y = x - 1 ; y = 2 - x ; y = 3/x ; y = x^3 ; y = \sqrt{x}$$

Variación del binomio de primer grado.

1-19. Representar gráficamente las siguientes funciones:

$$y = x ; y = 2x ; y = \frac{1}{2}x ; y = x + 1 ; y = 2x + 1$$

$$y = -x ; y = -x + 2 ; y = -x - 1 ; y = -3x$$

$$y = -3x - 4 ; y = -2x + \frac{1}{2} ; y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} ; y = -\frac{5}{8}x - \frac{1}{4}$$

$$y = 4 ; y = -3 ; x = 2 ; x = -\frac{1}{2} ; y = 0 ; x = 0$$

20-22. Gráficas de las siguientes rectas, determinando los puntos de intersección con los ejes coordenados:

$$2x - y + 5 = 0 ; 2y + 4x - 1 = 0 ; 3x + 6y + 2 = 0$$

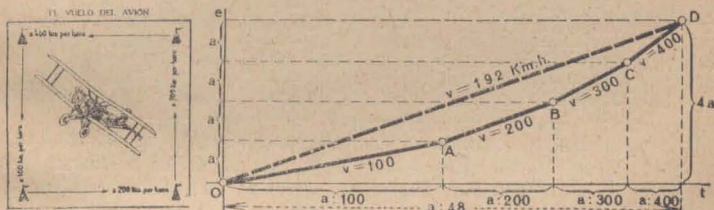
23. Determinar los coeficientes angulares de las rectas de los tres ejercicios que preceden.

24. Las diagonales de un cuadrado miden 5 y coinciden con los ejes coordenados; formular las ecuaciones de los cuatro lados del cuadrado.

$$R.: 2x + 2y = 5 ; \dots \text{etc.}$$

25. Sabiendo que 10 metros de paño cuestan \$ 60, construir una gráfica que nos permita obtener el costo de un número cualquiera de metros (entero o fraccionario), hasta 25 m. Leer en la gráfica cuántos metros de paño se pueden comprar con \$ 110.

26. Un avión vuela sobre un circuito cerrado, y cubre su primer lado a una velocidad de 100 Km. por hora, el segundo a 200, el tercero a 300 y el cuarto a 400 Km. por hora. ¿Cuál es el término medio de velocidad del avión en dicho vuelo? (*)



R.: En la figura adjunta se presenta el diagrama del movimiento en las cuatro etapas del circuito: OA, AB, BC, CD. El término medio de velocidad es el de un móvil que recorrería el circuito total en el mismo tiempo total, es decir, aquel cuya gráfica es la recta OD.

Llamando "a" al lado del cuadrado, el tiempo empleado en la 1.ª etapa es a:100, en la 2.ª, a:200, en la 3.ª, a:300 y en la 4.ª, a:400; el tiempo total será, pues:

$$t = a(1:100 + 1:200 + 1:300 + 1:400) = a:48$$

Como el espacio total recorrido es $e = 4a$, el término medio de velocidad del avión es:

$$v = e:t = 4a:(a:48) = 4 \times 48 = 192 \text{ Km. por hora}$$

(*) Reproducimos el enunciado y la primera figura de este problema, del diario "La Nación" de Buenos Aires, de fecha setiembre 4 de 1938.

Resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales y de problemas que conducen a ellas

1-2. Resolver gráficamente los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 2y + x = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ x + 4y = 24 \end{cases}$$

3-4. Resolver gráficamente los siguientes sistemas e interpretar los resultados:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$$

5. Un peatón parte a las 6 de la mañana con una velocidad media de 5 Km. por hora; a las 9, un ciclista parte del mismo lugar, en la misma dirección, con una velocidad media de 15 Km. por hora. ¿A qué hora y a qué distancia del punto de partida se encontrarán?

R.: 10 h. 30 mint. ; 22,5 Km.

6. Trazar el gráfico de la marcha de los dos trenes cuyo itinerario se indica a continuación, e indicar el punto y hora del cruce:

—	RETIRO... (Salida)	7h35	ROSARIO (Salida)	8h45
23 Km.	Victoria Lleg.	8h05	Santa Teresa Llegada	10h21
	Sal.	8h07	Salida	10h26
112 Km.	Vagues Lleg.	9h53	Pergamino Llegada	11h57
	Sal.	9h58	Salida	12h15
229 Km.	Pergamino Lleg.	12h41	Vagues Llegada	15h03
	Sal.	13h00	Salida	15h13
286 Km.	Sta. Teresa.... Lleg.	14h20	Victoria Llegada	17h12
	Sal.	14h24	Salida	17h18
352 Km.	ROSARIO Lleg.	16h05	RETIRO Llegada	17h50

7. Un regimiento inicia una marcha a las 7 de la mañana; recorre 5 Km. en 50 minutos y luego descansa 10 minutos, prosiguiendo la marcha con esas alternativas. Un correo ciclista se propone alcanzar el regimiento saliendo a las 9 $\frac{1}{2}$ h. con la velocidad de 20 Km. por hora, y sin detenerse. ¿A qué hora y dónde lo alcanzará?

R.: 10 h. 20 mint. ; 17,1 Km.

8. Una persona sale de paseo en auto, con una velocidad media de 30 Km. por hora. ¿A qué distancia del punto de partida debe detenerse para que, regresando a pie y haciendo 4 Km. por hora, se halle de vuelta 6 horas después de su partida?

* * *

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

Gráficas referidas en los N.os 249 y 257

