TEXTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES

AJUSTADOS A LOS PROGRAMAS EN VIGOR

ARITMETICA

2do AÑO DE ESTUDIOS SECUNDARIOS

POR

JOSE N. BOLLO

FELIPE ANGUITA

LORENZO DAGNINO PASTORE

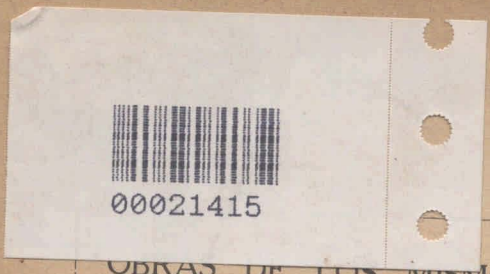
TOMO II

TERCERA EDICION

F. CRESPILLO, EDITOR

BOLIVAR, 369

BUENOS AIRES


00021415

OBRAS DE LOS MISMOS AUTORES

ARITMETICA 3ª edic.	1ra. Parte, (1er. Año)
ARITMETICA 2ª edic.	2da. Parte, (2do. Año)
ALGEBRA 2ª edic.	1ra. Parte, (3er. Año)
ALGEBRA 2ª edic.	2da. Parte, (4to. Año)
GEOMETRIA PLANA 2ª edic.	1ra. Parte, (1er. Año)
GEOMETRIA PLANA	2da. Parte, (2do. Año)
GEOMETRIA PLANA	3ra. Parte, (3er. Año)
GEOMETRIA DEL ESPACIO.	4ta. Parte, (4to. Año)

TEXTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES

AJUSTADOS A LOS PROGRAMAS EN VIGOR

ARITMETICA

2do AÑO DE ESTUDIOS SECUNDARIOS

POR

JOSÉ N. BOLLO

Profesor diplomado de Matemáticas y Física — Vicerrector y Profesor del Colegio Nacional "Mariano Moreno"— Catedrático y Consejero del Instituto Nacional del Profesorado Secundario.

FELIPE ANGUITA

Profesor diplomado de Matemáticas y Cosmografía - Catedrático de los Colegios Nacionales "Mariano Moreno", "Bartolomé Mitre", de la Escuela de Mecánica de la Armada y de las Escuelas de Educación Industrial.

LORENZO DAGNINO PASTORE

Profesor diplomado de Matemáticas y Cosmografía — Ingeniero Civil — Catedrático y Consejero del Instituto Nacional del Profesorado Secundario, del Colegio Nacional "Mariano Moreno" y Liceo Nacional de Señoritas.

TOMO II

TERCERA EDICION

HOMAS PARDO
LIBRERÍA
MAIPÚ 620
BUENOS AIRES

F. CRESPILLO, EDITOR
BOLÍVAR, 369
BUENOS AIRES

BIBLIOTECA NACIONAL DE MAESTROS

Modelo depositado de acuerdo
con la ley de propiedad literaria.

ADVERTENCIA

Con este tomo queda terminada la serie de Aritmética y Algebra de nuestra colección de textos de Matemáticas y que presentamos a la benevolencia de los señores Profesores y estudiantes.

En mucho estimaremos las comunicaciones que nuestros colegas nos hagan sobre las deficiencias que notasen en esta obra, a fin de subsanarlas en su oportunidad.

LOS AUTORES.

Abril de 1928.

ARITMÉTICA

2º AÑO

CAPITULO I

PROGRAMA I — **Números racionales.** — Necesidad de la creación de nuevos números para hacer posible la división de números enteros en los casos en que el dividendo no es múltiplo del divisor: Números fracionarios puros; su definición como pares ordenados de números enteros tales que el primero no sea múltiplo del segundo. Numerador y denominador. Notación. Números racionales (enteros y fraccionarios puros). Convención referente a la representación de los números enteros por pares ordenados de números enteros: Todo número entero se representa por cualquier par ordenado de números enteros tales que el cociente del numerador por el denominador sea, precisamente, el número entero considerado. Los pares del denominador cero no representan ningún número racional, ni entero ni fraccionario puro. Interpretaciones concretas de los números racionales de términos positivos.

Igualdad de números racionales. Definición. Caracteres formales: Idéntico, recíproco y transitivo. Dos números racionales iguales a un tercero, son iguales entre sí. Un número racional no altera si el numerador y el denominador se multiplican o dividen exactamente por un mismo número. Posibilidad de expresar todo número racional por una fracción de denominador positivo. Signo de un número racional. Reducción de fracciones a común denominador. Ejercicios.

Desigualdad de números racionales. Definiciones de mayor y menor. De dos fracicones de igual denominador es mayor la que tiene mayor numerador. De dos fracciones de igual numerador es mayor la que tiene menor denominador. Ordenación de los números racionales de denominador 1, 2, 3, 4, ...n, en sucesiones crecientes.-

Números racionales

1. Necesidad de la creación de nuevos números para hacer posible la división de números enteros en los casos en que el dividendo no es múltiplo del divisor.

En el estudio que hemos hecho en el primer año acerca de los números enteros, vimos que, dados los números

— 6 y + 3, por ejemplo, su cociente era otro número entero, — 2, tal, que multiplicado por el divisor + 3, diese un producto igual al dividendo — 6. Es decir:

$$(-6):(+3)=-2, \text{ porque: } (-2).(+3)=-6$$

En general, dados dos números enteros a y b, se tiene:

$$a:b=c, \text{ siempre que: } c.b=a$$

De manera que, en el campo de los números enteros, un número a es divisible por otro b, cuando a es múltiplo de b.

Tengamos ahora la división

$$(+10):(-4)$$

Comprobamos que no hay ningún número entero que multiplicado por — 4 dé un producto igual a + 10. Para hacer posibles esas divisiones de números enteros en las que el dividendo no es múltiplo del divisor, los matemáticos han inventado unos nuevos números, mediante los cuales esas divisiones aparentemente imposibles, se hacen posibles. Estos nuevos números son los *números fraccionarios puros*, que definiremos así:

2. Número fraccionario puro. — Un *número fraccionario puro* o *fracción* es un par ordenado de números enteros, tales, que el primero no es múltiplo del segundo, siendo éste distinto de cero.

El *numerador* es el primer número, y el segundo *denominador;* los dos, conjuntamente, se llaman *términos.*

3. Notación. — El número fraccionario puro constituído por el par de números enteros — 4 y + 5, se representa de estas dos maneras:

$$(-4\ ;+5),\ \text{o bien:}\ \frac{-4}{+5}$$

En lo sucesivo, representaremos a los números enteros $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$ por las letras $a, b, c, d, e, \ldots$, sin hacerlos preceder del signo $\pm$, quedando éste sobreentendido (*). Así, será:

$$a = \pm 2\ ;\ b = \pm 5, \text{ etc.}$$

En general, el número fraccionario puro formado por los números enteros a y b, se escribe:

$$(a\ ;b)\ \text{o bien:}\ \frac{a}{b}$$

Siendo $b \neq 0$.

4. **Serie de los números fraccionarios puros.** — Si a cada número de la serie de los números enteros:

$$\ldots -5, -4, -3, -2, -1,\ 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$$

los dividimos, sucesivamente por 2, 3, 4, ... etc., y tachamos las divisiones en que el dividendo es múltiplo del divisor, obtenemos la *serie de los números fraccionarios puros*:

(*) El matemático Francisco Viète (1540-1603), fué el primero en representar con letras a los números positivos. Después de la introducción de los números negativos, una letra representa a un número positivo, negativo o nulo.
El primero que designó expresamente con una misma letra un número positivo o negativo fué J. HUDDE, en su obra "De reductione aequationum", reimpresa en 1657.

$$\ldots\ \frac{5}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{2}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{4}{2}, +\frac{5}{2} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{0}{3}, +\frac{1}{3}, +\frac{2}{3}, +\frac{3}{3}, +\frac{4}{3}, +\frac{5}{3} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ \frac{5}{4}, -\frac{4}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{4}, +\frac{1}{4}, +\frac{2}{4}, +\frac{3}{4}, +\frac{4}{4}, +\frac{5}{4} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ \frac{5}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{0}{5}, +\frac{1}{5}, +\frac{2}{5}, +\frac{3}{5}, +\frac{4}{5}, +\frac{5}{5} \ldots\ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

Los números tachados son los números enteros.

5. Números racionales. — Los *números racionales* son el conjunto de los números enteros y los números fraccionarios puros; están constituídos por un par de números enteros, dados en un cierto orden, y distintos de cero.

6. Notación. — El número racional compuesto por los números enteros a y b, se representa así:

$$(a\,;\,b) \text{ o bien: } \frac{a}{b}$$

siendo: $a \neq 0$; $b \neq 0$.

Es también muy usual representar los números racionales con letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

7. Serie de los números racionales. — Si a cada número de la serie de los números enteros:

$\ldots\ldots -5, -4, -3, -2, -1, \quad 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots\ldots$

los dividimos, sucesivamente, por los números 1, 2, 3,... n, obtenemos la serie de los números racionales:

$$\ldots\ldots -\frac{5}{1}, -\frac{4}{1}, -\frac{3}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, +\frac{1}{1}, +\frac{2}{1}, +\frac{3}{1}, +\frac{4}{1}, +\frac{5}{1}, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots -\frac{5}{2}, -\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{0}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{2}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{4}{2}, +\frac{5}{2}, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots -\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{0}{3}, +\frac{1}{3}, +\frac{2}{3}, +\frac{3}{3}, +\frac{4}{3}, +\frac{5}{3}, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots -\frac{5}{4}, -\frac{4}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{0}{4}, +\frac{1}{4}, +\frac{2}{4}, +\frac{3}{4}, +\frac{4}{4}, +\frac{4}{5}, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots -\frac{5}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{0}{5}, +\frac{1}{5}, +\frac{2}{5}, +\frac{3}{5}, +\frac{4}{5}, +\frac{5}{5}, \ldots\ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\ldots\ldots -\frac{5}{n}, -\frac{4}{n}, -\frac{3}{n}, -\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{0}{n}, +\frac{1}{n}, +\frac{2}{n}, +\frac{3}{n}, +\frac{4}{n}, +\frac{5}{n}, \ldots\ldots$$

8. Resumen de dos números conocidos hasta ahora.

números naturales
números negativos } *números enteros* } *números racionales*
números fraccionarios puros

9. CONVENCIÓN. — *Todo número entero se representa por cualquier par ordenado de números enteros, tales, que el cociente del numerador por el denominador es el número entero considerado.*

Es decir, el número entero — 3 se puede representar por un par ordenado de números enteros, por ejemplo + 12 y — 4, pues:

$$\frac{+12}{-4} = -3$$

De la misma manera, el número entero + 2 se puede representar por el par + 14 y + 7, pues:

$$\frac{+14}{+7} = +2$$

Nótese que un mismo número entero, + 4 por ejemplo, se puede representar de infinitas maneras, según sea el par de números enteros que consideremos. Así, se tiene:

$$\frac{-12}{-3} = +4$$

$$\frac{+8}{+2} = +4$$

$$\frac{-20}{-5} = +4$$

.....

También un número entero se puede representar por el par compuesto por él mismo y el número uno. Ejemplos:

$$3 = \frac{3}{1} \; ; \; -5 = \frac{-5}{1} \; ; \; a = \frac{a}{1}$$

10. Corolario. — *Los pares de denominador cero no representan ningún número racional, ni entero ni fraccionario puro.*

En efecto, el denominador, que es un divisor, si es cero, no representa ningún número, pues ya sabemos que para que haya cociente el divisor debe ser distinto de cero.

11. Interpretaciones concretas de los números racionales de términos positivos.

Se el número racional $\frac{3}{5}$, y consideremos un segmento AB (Fig. 1), un rectángulo $ABCD$ y un círculo O. Si

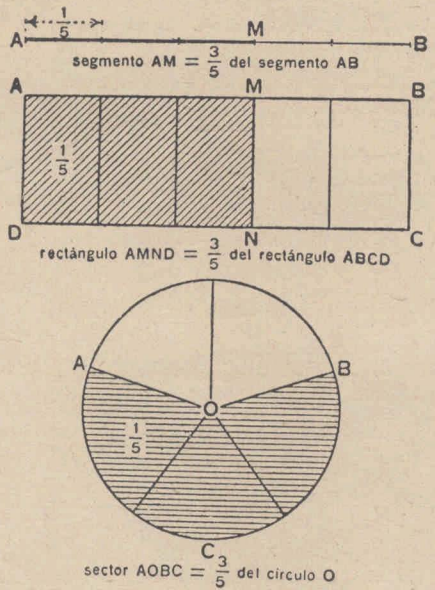


Fig. 1.

dividimos en 5 partes iguales el segmento, el rectángulo y el círculo, y tomamos 3 de esas partes, el segmento AM, o el rectángulo $AMND$, o el sector $AOBC$, representa los $\frac{3}{5}$ del segmento, rectángulo o círculo, respectivamente.

12. Lectura de un número racional. — CONVENCIÓN. — *Para leer un número racional se lee su numerador y a continuación su denominador.*

Si el denominador es 2, se lee medios; si 3, tercios; si 4, cuartos...; si 9, novenos; si 10, décimos; si 100, centésimos, etc. Si fuese mayor que 10, y siempre que no sea 100, 1000, ..., se lee con la terminación avos.

Ejemplos:

$\frac{3}{2}$ se lee tres medios;

$\frac{2}{5}$ » » dos quintos

$\frac{1}{9}$ » » un noveno:

$\frac{4}{10}$ » » cuatro décimos;

$\frac{5}{100}$ » » cinco centésimos;

$\frac{7}{14}$ » » catorceavos;

$\frac{2}{11}$ » » dos onceavos.

Igualdad de los números racionales

13. Definición. — *Dos números racionales son iguales,* cuando el producto del numerador del primero por el denominador del segundo es igual al producto del numerador del segundo por el denominador del primero.

Es decir:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}, \text{ porque: } 3 \times 10 = 6 \times 5$$

En general:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ siempre que: } a\ d = c\ .\ b$$

Caracteres formales de la igualdad de números racionales

14. Carácter idéntico. — TEOREMA. — *Todo número racional es igual a sí mismo.*

H) $\frac{a}{b}$ *número racional dado.* *T)* $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

Por el carácter idéntico de la igualdad de números enteros, se tiene:

$$ab = ab$$

y por la definición (13):

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

15. Carácter recíproco. — TEOREMA. — *Si un número racional es igual a otro, éste es igual al primero.*

H) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *T)* $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

Si es: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, por (13) deberá ser: $a\ .\ d = c\ .\ b$

y por el carácter recíproco de la igualdad de números enteros:

$$c.b = a.d$$

y por (13): $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

16. Carácter transitivo. — TEOREMA. — *Si un número racional es igual a otro y éste es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.*

$$H\begin{cases}\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}\\[2ex]\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}\end{cases}\qquad T)\quad \frac{a}{m}=\frac{c}{p}$$

Si es: $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}$ $\therefore$ $an = bm$ (1)

y $\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}$ $\therefore$ $bp = cn$ (2)

Por la propiedad uniforme del producto de números enteros, de (1) y (2) se obtiene:

$$(an)\ (bp) = (bm)\ (cn)$$

y por las propiedades asociativa y conmutativa del producto:

$$ap(nb) = cm\ (nb)$$

dividiendo ambos miembros por nb, resulta:

$$ap = cm$$

y por definición (13):

$$\frac{a}{m}=\frac{c}{p}$$

17. COROLARIO. — *Dos números racionales iguales a un tercero son iguales entre sí.*

Es decir, si $\dfrac{a}{m}=\dfrac{c}{p}$ y $\dfrac{b}{n}=\dfrac{c}{p}$ } también: $\dfrac{a}{m}=\dfrac{b}{n}$

18. TEOREMA. — *Un número racional no altera si el numerador y el denominador se multiplican o dividen exactamente por un mismo número distinto de cero.*

$$H)\begin{cases} \dfrac{a}{b};\ m \neq 0 \\ a = m \\ b = m \end{cases} \qquad T\begin{cases} 1^{o}\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{am}{bm} \\ 2^{o}\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{\dfrac{a}{m}}{\dfrac{b}{m}} \end{cases}$$

1°.) Por el carácter idéntico de la igualdad de números enteros, se tiene:

$$ab = ab$$

multiplicando ambos miembros por m:

$$(ab)\,m = (ab)\,m$$

o bien, por la propiedad asociativa del producto:

$$a\,(bm) = (am)\,b$$

de donde, por definición:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}}$$

2°) Se tiene:

$$ab = ab$$

dividiendo ambos miembros por m:

$$\frac{ab}{m} = \frac{ab}{m}$$

y por un teorema anterior:

$$a \cdot \frac{b}{m} = \frac{a}{m} \cdot b.$$

y por definición:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$$

quedando demostrado el teorema.

19. Posibilidad de expresar todo número racional por una fracción de denominador positivo. — COROLARIO I. — *Todo número racional de denominador negativo puede expresarse por medio de otro número de denominador positivo.*

En efecto, basta multiplicar ambos términos por -1.

Ejemplo: $\dfrac{+4}{-3} = \dfrac{(+4)(-1)}{(-3)(-1)} = \dfrac{-4}{+3}$

20. Reducción de una fracción a otra que tenga un denominador dado. — COROLARIO II. — *Una fracción puede reducirse a otra de denominador dado, con tal que éste sea múltiplo del primer denominador.*

Ejemplo: Reducir $\dfrac{3}{4}$ a otra fracción de denominador 20.

Se tiene: $20 : 4 = 5$

y por el teorema (18): $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \dfrac{15}{20}$

Cuando el nuevo denominador no es múltiplo del primer denominador, por el momento no es posible la reducción, pero más adelante, en el Capítulo V, veremos cómo se procede.

21. Signo de un número racional. — El signo de un número racional es el signo que resulta aplicando la *Regla de los signos* a ambos términos.

Es decir: $\frac{+6}{-5} = -\frac{6}{5}$

$\frac{-4}{-7} = +\frac{4}{7}$

22. Simplificación de fracciones. — *Simplificar* una fracción es hallar otra igual, pero de términos menores.

Sea simplificar la fracción $\frac{12}{18}$

Observando que ambos términos son divisibles por 6, por el teorema (18) se tiene:

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$$

de donde se deduce la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para simplificar una fracción, se dividen ambos términos exactamente por un mismo número.*

23. OBSERVACIÓN. — En vez de dividir ambos términos por un divisor común cualquiera, se dividen por su máximo común divisor.

Sea simplificar $\frac{48}{60}$

Se tiene: *m. c. d.* de 48 y 60 = 12

luego: $\frac{48}{60} = \frac{48 : 12}{60 : 12} = \frac{4}{5}$

Una fracción es *irreducible*, cuando sus términos son primos entre sí.

Así, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{a}{b}$, son fracciones irreducibles.

24. Reducción de fracciones a común denominador. —*Reducir fracciones a común denominador*, es hallar otras respectivamente iguales y que tengan el mismo denominador

Sea reducir a común denominador las fracciones:

$$\frac{2}{3} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{5}{2}$$

Multiplicando ambos términos de cada fracción, (18), por el producto de lo demás denominadores, resulta:

$$\frac{2}{3} = \frac{2(4 \,.\, 2)}{3(4 \,.\, 2)} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3(3 \,.\, 2)}{4(3 \,.\, 2)} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \frac{18}{24}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5(3 \,.\, 4)}{2(3 \,.\, 4)} = \frac{5 \times 12}{2 \times 12} = \frac{60}{24}$$

Como se ve, hemos tenido tres fracciones ordenadamente iguales a las dadas, pero cuyo denominador es común, luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para reducir fracciones a común denominador, se multiplican los términos de cada fracción por el producto de los demás denominadores.*

25. Reducción de fracciones al mínimo común denominador. — *Reducir fracciones al mínimo común denominador,* es hallar otras respectivamente iguales, pero cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Sea reducir al mínimo común denominador las fracciones:

$$\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{4}$$

Se tiene:

m. c. m. de 3, 2 y 4 = 12 = denominador común.
Dividamos el *m. c.* denominador por cada denominador:

$$12 : 3 = 4$$
$$12 : 2 = 6$$
$$12 : 4 = 3$$

Por el teorema (18) se tiene:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

De donde se deduce la siguiente:

Regla práctica. — *Para reducir fracciones al mínimo común denominador, se halla el* **m. c. m.** *de los denominadores, quien será el mínimo común denominador, y*

luego se multiplica cada numerador por el cociente del **m. c. m.** *hallado y el denominador respectivo.*

26. Ejercicios de ejemplo. 1º) *Reducir al m. c. denominador:*

$$\frac{4}{9} \; ; \; \frac{5}{18} \; ; \; \frac{7}{12}$$

Aplicando la Regla Práctica anterior, se tiene:

m. c. m. $(9 \; ; 18 \; ; 12) = 36 =$ *denominador común.*

$$36 : 9 = 4 \quad ; \quad \frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 4}{36} = \frac{16}{36}$$

$$36 : 18 = 2 \quad ; \quad \frac{5}{18} = \frac{5 \cdot 2}{36} = \frac{10}{36}$$

$$36 : 12 = 3 \quad ; \quad \frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{36} = \frac{21}{36}$$

2º) *Reducir el mínimo común denominador:*

$$\frac{3}{16} \; ; \; \frac{3}{4} \; ; \; \frac{7}{32}$$

Se tiene:

m. c. m. $(16 \; ; 4 \; ; 32) = 32 =$ *denominador común.*

$$32 : 16 = 2 \quad ; \quad \frac{3}{16} = \frac{3 \cdot 2}{32} = \frac{6}{32}$$

$$32 : 4 = 8 \quad ; \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 8}{32} = \frac{24}{32}$$

$$32 : 32 = 1 \quad ; \quad \frac{7}{32} = \frac{7 \cdot 1}{42} = \frac{7}{32}$$

Desigualdad de números racionales

27. Número racional mayor o menor que otro. — *Un número racional es mayor que otro,* cuando el producto del numerador del primero por el denominador del segundo es *mayor* que el producto del numerador del segundo por el denominador del primero

Ejemplo: $\frac{5}{7} > \frac{1}{2}$, porque $5 \times 2 > 1 \times 7$

En general:

$$\frac{a}{b} > \frac{m}{n}, \text{ siempre que: } an > mb$$

Un número racional es menor que otro, cuando, el producto del numerador del primero por el denominador del segundo es *menor* que el producto del numerador del segundo por el denominador del primero.

Ejemplo: $\frac{3}{4} < \frac{6}{5}$, porque $3 \times 5 < 6 \times 4$

En general:

$$\frac{a}{b} < \frac{m}{n}, \text{ siempre que: } an < mb$$

28. — Corolario I. — *De dos fracciones de igual denominador, es mayor la del mayor numerador.*

En efecto, dadas las fracciones $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{5}$, es:

$$\frac{4}{5} > \frac{2}{5}$$

pues $4 \times 5 > 2 \times 5.$

En general: $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$, siempre que: $a > b$

Análogamente:

$\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$, siempre que: $a < b$

29. Corolario II. — *De dos fracciones de igual numerador, es mayor la que tiene menor denominador.*

En efecto, dadas las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{7}$, es:

$$\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$$

pues $2 \times 7 > 2 \times 3.$

En general: $\frac{m}{a} > \frac{m}{b}$, siempre que: $a < b$

30. Ordenación de los números racionales de denominador 1, 2, 3, 4, ... n, en sucesiones crecientes. — Al ver en el párrafo (7) la serie de los números racionales, hemos dejado *ordenados* los números racionales, en series crecientes de denominador 1, 2, 3, 4,... *n*.

EJERCICIOS

1. Reducir $\frac{3}{4}$ á centésimos. R. $\frac{75}{100}$

2. „ $\frac{2}{3}$ „ novenos. „ $\frac{6}{9}$

3. „ $\frac{5}{12}$ „ 72-avos. „ $\frac{30}{72}$

4. „ $\frac{1}{2}$ „ 18 avos. „ $\frac{9}{18}$

5. „ $\frac{7}{16}$ „ 128-avos. „ $\frac{56}{128}$

Simplificar las siguientes fracciones:

6. $\frac{45}{75}$ R. $\frac{3}{5}$

7. $\frac{84}{120}$ „ $\frac{7}{10}$

8. $\frac{132}{24}$ „ $\frac{11}{2}$

9 $\frac{54}{72}$ „ $\frac{3}{4}$

10. $\frac{216}{120}$ „ $\frac{9}{5}$

11. $\frac{96}{168}$ R, $\frac{4}{7}$

12. $\frac{256}{144}$ „ $\frac{16}{9}$

13 $\frac{170}{272}$ „ $\frac{5}{8}$

14. $\frac{540}{792}$ „ $\frac{15}{22}$

15. $\frac{216}{333}$ „ $\frac{24}{37}$

Reducir a común denominador las siguientes fracciones:

16. $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{2}$ R. $\frac{20}{30}$; $\frac{24}{30}$; $\frac{45}{30}$

17. $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{8}$ „ $\frac{24}{48}$; $\frac{80}{48}$; $\frac{18}{48}$

18. $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{11}$; $\frac{7}{3}$ „ $\frac{165}{231}$; $\frac{126}{231}$; $\frac{539}{231}$

19. $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{9}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{3}$ „ $\frac{405}{540}$; $\frac{300}{540}$; $\frac{108}{540}$; $\frac{360}{540}$

20. $\frac{6}{11}$; $\frac{8}{3}$; $\frac{9}{13}$; $\frac{4}{5}$ „ $\frac{1170}{2145}$; $\frac{5720}{2145}$; $\frac{1485}{2145}$; $\frac{1716}{2145}$

Reducir al mínimo común denominador las fracciones:

21. $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$ R. $\frac{9}{24}$; $\frac{20}{24}$; $\frac{16}{24}$

22. $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{10}$ „ $\frac{8}{10}$; $\frac{15}{10}$; $\frac{5}{10}$

23. $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{4}{20}$ „ $\frac{30}{80}$; $\frac{25}{80}$; $\frac{16}{80}$

24. $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{3}{8}$ „ $\frac{36}{72}$; $\frac{48}{72}$; $\frac{32}{72}$; $\frac{27}{72}$

25. $\frac{4}{30}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{5}{18}$; $\frac{7}{24}$ „ $\frac{48}{360}$; $\frac{18}{360}$; $\frac{100}{360}$; $\frac{105}{360}$

26. ¿Cuál es mayor, $\frac{2}{3}$ ó $\frac{5}{6}$? R. $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$

27. „ „ „ $\frac{7}{9}$ „ $\frac{9}{12}$? „ $\frac{7}{9} > \frac{9}{12}$

28. ¿Cuál es menor, $\frac{18}{20}$ ó $\frac{12}{16}$, R. $\frac{12}{16} < \frac{18}{20}$

29. „ „ „ $\frac{6}{11}$ „ $\frac{5}{9}$, „ $\frac{6}{11} < \frac{5}{9}$

30. Si $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$, ¿cómo son a y b? R. $a > b$

31. „ $\frac{4}{m} < \frac{a}{m}$, „ „ 4 y a? „ $4 < a$

32. „ $\frac{3+a}{4} > \frac{5}{4}$, ¿cuánto vale a? „ $a \geqq 3$

33. „ $\frac{2}{a} < \frac{2}{7}$, ¿cómo son a y 7? „ $a > 7$

34. „ $\frac{c}{m} > \frac{c}{n}$, „ „ m y n? „ $m < n$

35. „ $\frac{1}{7-a} < \frac{1}{2}$, ¿cuánto vale a? „ $a \leqq 4$

CAPITULO II

PROGRAMA II. — **Suma de números racionales.** — Definiciones de suma de números racionales de igual y de distinto denominador. Verificación, con ejemplos numéricos, de la propiedad uniforme. Postulado: Si se suman dos o más igualdades de números racionales, miembro a miembro, se obtiene otra igualdad. Propiedades conmutativa y asociativa. Leyes de monotonía.

Definición de número mixto. Reducción de un número mixto a fracción impropia y viceversa. Suma de números mixtos.

Suma de números racionales

31. Suma de números racionales de igual denominador. — Se llama *suma de varios números racionales de igual denominador*, a otro número racional, cuyo numerador es la suma de los numeradores, y el denominador es el mismo

Ejemplo: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{1+2+5}{3}=\frac{8}{3}$

En general: $$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}$$

32. Suma de números racionales de distinto denominador. — Se llama *suma de varios números racionales de distinto denominador*, al número racional que es suma de varios números racionales de igual denominador y ordenadamente iguales a los dados..

Es decir, que si se tiene la suma:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}$$

y es:

$$\frac{a}{m} = \frac{a'}{d}$$

$$\frac{b}{n} = \frac{b'}{d}$$

$$\frac{c}{p} = \frac{c'}{d}$$

se tiene: $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{a'}{d} + \frac{b'}{d} + \frac{c'}{d}$

y por el caso anterior:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{a' + b' + c'}{d}$$

Ejemplo, sea efectuar: $\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{5}{12} + \frac{7}{18}$

Reduciendo las fracciones dadas a común denominador por el procedimiento del mínimo común denominador (25), por ejemplo, se tiene:

$$m.\,c.\,m.\,(4\ ;\ 9\ ;\ 12\ ;\ 18) = 36$$

$36 : 4 = 9\ ;$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{1 \times 9}{36} = \frac{9}{36}$

$36 : 9 = 4\ ;$ $\quad \frac{2}{9} = \frac{2 \times 4}{36} = \frac{8}{36}$

$36 : 12 = 3\ ;$ $\quad \frac{5}{12} = \frac{5 \times 3}{36} = \frac{15}{36}$

$36 : 18 = 2\ ;$ $\quad \frac{7}{18} = \frac{7 \times 2}{36} = \frac{14}{36}$

y por la definición dada:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{9}{36}+\frac{8}{36}+\frac{15}{36}+\frac{14}{36}$$

o bien:

$$=\frac{9+8+15+14}{36}$$

$$=\frac{46}{36}$$

y simplificando:

$$=\frac{23}{18}$$

que es la suma buscada.

Sumar varios números racionales, es hallar su suma. Los números dados se llaman *sumandos;* el signo de operación es el conocido.

Propiedades de la suma

33. Propiedad uniforme (*) — TEOREMA. — *Sumando miembro a miembro dos o más igualdades entre números racionales se obtiene otra igualdad.*

Consideremos los diversos números racionales dados ya reducidos ordenadamente a común denominador, lo que siempre es posible.

$$H\begin{cases}\dfrac{a}{m}=\dfrac{a'}{m'}\\[2ex]\dfrac{b}{m}=\dfrac{b'}{m'}\end{cases}\qquad T\left\{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a'}{m'}+\frac{b'}{m'}\right.$$

(*) El Programa pide sólo la **verificación** de la propiedad uniforme, pero como eso es posible en cualquier momento, creemos de interés dar la **demostración** de la misma propiedad.

Siendo

$$\frac{a}{m} = \frac{a'}{m'} \quad \text{por (13)} \quad \therefore \; a \,.\, m' = a' \,.\, m \qquad (1)$$

$$\frac{b}{m} = \frac{b'}{m'} \quad \text{,,} \quad \text{.,} \quad \therefore \; b \,.\, m' = b' \,.\, m \qquad (2)$$

Sumando ordenadamente (1) y (2)

$$a.m' + b.m' = a'.m + b'.m$$

factoreando:

$$(a + b)m' = (a' + b')m$$

y por definición de números racionales iguales, (13):

$$\frac{a+b}{m} = \frac{a'+b'}{m'}$$

y por definición de suma, (31):

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a'}{m'} + \frac{b'}{m'}$$

34. — Propiedad conmutativa. — TEOREMA. — *El orden de los sumandos no altera la suma.*

Consideremos los diversos números ya reducidos a común denominador ,lo que siempre es posible.

$$H\left\{\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} \qquad T\left\{\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{c}{m} + \frac{b}{m}.\right.\right.$$

Por definición de suma, (31), se tiene:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a+b+c}{m}$$

y por la propiedad conmutativa de la suma de números enteros, en el segundo miembro se tiene:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a+c+b}{m}$$

y por definición, (31):

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{c}{m}+\frac{b}{m}$$

35. Propiedad asociativa. — TEOREMA. — *En toda suma de números racionales, puede reemplazarse dos o más de ellos por suma efectuada.*

Consideremos reducidos los números dados a común denominador.

$$H\left\{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right. \qquad T\left\{\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a}{m}+\left(\frac{a}{m}+\frac{c}{m}\right)\right.$$

Por definición, (31), se sabe que:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}$$

y por la propiedad asociativa de la suma de números enteros, en el segundo miembro se tiene:

$$=\frac{a+(b+c)}{m}$$

y por definición, (31):

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a}{m}+\left(\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)$$

36. Propiedad monótoma. — TEOREMA I.—*Si a ambos miembros de una desigualdad entre números racionales, le sumamos un mismo número racional, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la dada.*

Consideremos ya reducidos los números dados a común denominador.

$$H\left\{\frac{a}{m}>\frac{b}{m}\,;\,\frac{c}{m}\right. \qquad T\left\{\frac{a}{m}+\frac{c}{m}>\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right.$$

Siendo $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$, se tendrá:

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{m}+\frac{n}{m}$$

escribamos: $$\frac{c}{m}=\frac{c}{m}$$

Sumando ordenadamente estas dos igualdades (33):

$$\frac{a}{m}+\frac{c}{m}=\left(\frac{b}{m}+\frac{n}{m}\right)+\frac{c}{m}$$

o bien: $$\frac{a}{m}+\frac{c}{m}=\left(\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)+\frac{n}{m}$$

de donde: $$\frac{a}{m}+\frac{c}{m}>\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$$

37. TEOREMA II. — *Sumando miembro a miembro varias desigualdades del mismo sentido entre números racionales, resulta otra desigualdad del mismo sentido que la dada.*

Consideremos ya reducidos los números a común denominador.

$$H\begin{cases}\frac{a}{m}>\frac{b}{m}\\ \frac{c}{m}>\frac{d}{m}\end{cases} \qquad T\left\{\frac{a}{m}+\frac{c}{m}>\frac{b}{m}+\frac{d}{m}\right.$$

Siendo $\begin{cases} \frac{a}{m} > \frac{b}{m} & \text{deberá ser: } \frac{a}{m} = \frac{b}{m} + \frac{p}{m} \\ \frac{c}{m} > \frac{d}{m} & \text{deberá ser: } \frac{c}{m} = \frac{d}{m} + \frac{q}{m} \end{cases}$

Sumando ordenadamente:

$$\frac{a}{m} + \frac{c}{m} = \left(\frac{b}{m} + \frac{p}{m}\right) + \left(\frac{d}{m} + \frac{q}{m}\right)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{m} = \left(\frac{b}{m} + \frac{p}{m}\right) + \left(\frac{p}{m} + \frac{q}{m}\right)$$

de donde: $$\frac{a}{m} + \frac{c}{m} > \frac{b}{m} + \frac{d}{m}$$

38. Número mixto. — Se llama *número mixto,* a la suma de un número entero y otro fraccionario.

Ejemplos: $5 + \frac{1}{2}$; $a + \frac{b}{c}$

Corrientemente, el signo + se suprime en los números mixtos, así:

$$5 + \frac{1}{2} \text{ se escribe } 5\,\frac{1}{2}$$

lo que se lee *cinco enteros un medio,* o bien *cinco un medio.*

39. Reducción de un número mixto a fracción. — *Reducir un número mixto a fracción,* equivale a efectuar la suma indicada del entero y la fracción.

Sea reducir a fracción el mismo $a + \frac{b}{c}$.

Reduciendo el entero a fracción, (9), se tiene:

$$a + \frac{b}{c} = \frac{a}{1} + \frac{b}{c}$$

y efectuando la suma, (32):

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c}$$

$$= \frac{ac+b}{c}$$

de donde se deduce la siguiente:

Regla Práctica. — *Para reducir un número mixto a fracción, se multiplica el entero por el denominador, sumando al resultado el numerador, y la suma es el numerador, dejando como denominador el mismo.*

Ejemplo: Reducir $4\ \frac{3}{5}$ a fracción.

Por la regla anterior se tiene:

$$4\frac{3}{5} = \frac{4 \times 5 + 3}{5} = \frac{23}{5}$$

40. Corolario I. — Hemos visto que:

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$\frac{ac + b}{c} = a + \frac{b}{c}$$

lo que nos dice que:

Una fracción equivale a un número mixto cuya parte entera es el cociente por defecto del numerador por el

denominador, y cuya parte fraccionaria tiene por numerador el resto, y por denominador el de la fracción.

Ejemplo: Reducir $\frac{32}{9}$ a número mixto.

Se tiene:
$$\begin{array}{r|l} 32 & 9 \\ \hline 5 & 3 \end{array}$$

luego:
$$\frac{32}{9} = 3\frac{5}{9}$$

41. Observaciones. — I. *Si el numerador es menor que el denominador, el cociente es cero y la reducción no tiene objeto.*

Ejemplo: Reducir $\frac{3}{4}$ a número mixto.

Se tiene:
$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline 3 & 0 \end{array}$$, luego: $\frac{3}{4} = 0\,\frac{3}{4}$

II. — *Si el numerador es múltiplo del denominador, el cociente es un número entero y la reducción es inútil.*

Ejemplo: Reducir $\frac{12}{3}$ a número mixto.

Se tiene:
$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$, luego: $\frac{12}{3} = 4\frac{0}{3} = 4$

42. Corolario II. — *Toda fracción que no represente a un número entero, está comprendida entre dos números enteros consecutivos.*

En efecto, sabemos por el curso del año anterior (*) que:

$$c.d < D < (c+1)\,d$$

(*) Véase nuestra Aritmética para 1er. año, pág. 74.

en donde D es el dividendo; d el divisor; c el cociente, y $c+1$ el cociente por exceso.

Análogamente: $bc < a < (c+1)b$

y dividiendo todo por b, queda:

$$c < \frac{a}{b} < c+1$$

43. Fracciones propia e impropia. — Se llama *fracción propia*, a aquella en que el numerador es *menor* que el denominador.

Ejemplos: $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{7}{20}$

Una fracción propia siempre es menor que uno, (41).

Se llama *fracción impropia* a aquella en que el numerador es *mayor* que el denominador.

Ejemplos: $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{12}{10}$

Una fracción impropia siempre es mayor que uno, (40)

44. Suma de números mixtos. — Sea la suma:

$$4\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{6}$$

Por definición, (38) ,se tiene:

$$4\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{6}=4+\frac{2}{3}+2+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{6}$$

y por la propiedad conmutativa, (34):

$$=4+2+3+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

y por la propiedad asociativa, (35):

$$=(4+2+3)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$

y efectuando:

$$=9+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$

$$=9+\left(\frac{4+3+1}{6}\right)$$

$$=9+\frac{8}{6}$$

simplificando, (22): $=9+\frac{4}{3}$

reduciendo el mixto a fracción, (39):

$$=9+1\frac{1}{3}$$

$$=10\frac{1}{3}$$

que es la suma buscada.

De todo esto se deduce la siguiente:

Regla Práctica. — *Para sumar números mixtos se suman los enteros y luego las fracciones.*

También se podrían reducir los mixtos a fracción, y luego sumar éstas, pero es de recomendar el procedimiento empleado, pues se opera con números menores.

Ejemplo: Efectuar la suma: $3\frac{4}{5}+2\frac{1}{2}$

Se tiene: $3\frac{4}{5}+2\frac{1}{2}=\frac{3\,.\,5+4}{5}+\frac{2\,.\,2+1}{2}$

$$= \frac{19}{5} + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{38}{10} + \frac{25}{10}$$

$$= \frac{63}{10}$$

$$= 6\,\frac{3}{10}$$

que es la suma buscada.

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes sumas:

36. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{8}{5}$ R. $2\,\frac{2}{5}$

37. $\frac{2a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{4}{b}$ „ $\frac{3a + 4}{6}$

38. $\frac{5}{6} + \frac{3}{15} + \frac{7}{18}$ „ $1\,\frac{19}{45}$

39. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{2}{3}$ „ $2\,\frac{3}{4}$

40. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ „ $1\,\frac{17}{60}$

41. $\frac{5}{12} + \frac{3}{14} + \frac{7}{18}$ „ $1\,\frac{5}{252}$

42. $\frac{3}{18} + \frac{6}{24} + \frac{9}{36} + \frac{8}{48}$ „ $\frac{5}{6}$

Reducir a fracción los siguientes números mixtos:

43.	$3\frac{4}{5}$	R. $\frac{19}{5}$
44.	$6\frac{4}{7}$	,, $\frac{46}{7}$
45.	$8\frac{3}{4}$	,, $\frac{35}{4}$
46.	$12\frac{6}{18}$	,, $\frac{37}{3}$
47.	$2a\frac{a}{7}$	,, $\frac{15a}{7}$

Reducir a números mixtos las siguientes fracciones:

48.	$\frac{8}{3}$	R. $2\frac{2}{3}$
49.	$\frac{28}{5}$	,, $5\frac{3}{5}$
50.	$\frac{125}{18}$	,, $6\frac{17}{18}$
51.	$\frac{1224}{17}$	,, 72
52.	$\frac{9867}{138}$	,, $71\frac{1}{2}$

Sumar los números mixtos:

53.	$3\frac{4}{5} + 1\frac{2}{3} + 4\frac{3}{10}$	R. $9\frac{23}{30}$
54.	$5\frac{2}{7} + 2\frac{3}{14} + 8\frac{5}{21}$	,, $15\frac{31}{42}$
55.	$4 + 3\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1\frac{1}{3}$	,, $9\frac{7}{12}$
56.	$2 + \frac{5}{18} + 4\frac{3}{16} + 5\frac{7}{20}$	,, $11\frac{587}{720}$
57.	$a\frac{2a}{b} + 2a\frac{3a}{2b} + 3a\frac{4a}{3b}$	,, $6a\frac{29a}{6b}$

CAPITULO III

PROGRAMA III. — **Resta de números racionales.** — Definición. Reglas prácticas para los distintos casos. Propiedad uniforme.

Resta de números racionales

45. Diferencia entre números racionales de igual denominador. — Se llama *diferencia de dos números racionales de igual denominador,* llamados *minuendo* y *sustraendo,* a otro número racional del mismo denominador cuyo numerador es la diferencia de los numeradores.

Ejemplo: $\frac{8}{5} - \frac{2}{5} = \frac{8-2}{5} = \frac{6}{5}$

En general: $\boxed{\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}}$

46. Diferencia entre números racionales de distinto denominador. — Se llama *diferencia de dos números racionales de distinto denominador,* al número racional que es la diferencia de dos números racionales de igual denominador y ordenadamente iguales a los dados.

Es decir, que si se tiene la diferencia:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$$

y es: $\frac{a}{m} = \frac{a'}{d}$ y $\frac{b}{n} = \frac{b'}{d}$

es: $\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{a'}{d} - \frac{b'}{d}$

y por el caso anterior:

$$\frac{a}{m} - \frac{a}{n} = \frac{a' - b'}{d}$$

Ejemplo: Sea la resta:

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{10}$$

Reduciendo las fracciones dadas al mínimo común denominador:

$$m.c.m \text{ de } 8 \text{ y } 10 = 40$$

$$40 : 8 = 5 \quad ; \qquad \frac{5}{8} = \frac{5 \times 5}{8 \times 5} = \frac{25}{40}$$

$$40 : 10 = 4 \quad ; \qquad \frac{3}{10} = \frac{3 \times 4}{10 \times 4} = \frac{12}{40}$$

y por la definición dada:

$$\frac{5}{8} - \frac{3}{10} = \frac{25}{40} - \frac{12}{40}$$

o bien:

$$= \frac{25 - 12}{40} = \frac{13}{40}$$

que es la diferencia buscada.

Restar dos números racionales, es hallar su diferencia; el signo de operación es el conocido.

47. Casos de resta de números racionales. — Se presentan estos casos:

I *restar números racionales de igual denominador;*
II „ „ „ *distinto* „
III „ *un entero y una fracción;*
IV „ *números mixtos.*

48. I. Restar números racionales de igual denominador. — Sea la resta:

$$\frac{7}{3} - \frac{2}{3}$$

Por la definición (45), se tiene:

$$\frac{7}{3} - \frac{2}{3} = \frac{7-2}{3} = \frac{3}{3}$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para restar números racionales de igual denominador, se restan los numeradores, dejando el mismo denominador.*

49. II. Restar números racionales de distinto denominador. — Sea la resta:

$$\frac{5}{4} - \frac{8}{10}$$

Reduciendo al mínimo común denominador:

$$m.c.m. \text{ de } 4 \text{ y } 10 = 20$$

$$20 : 4 = 5 \quad ; \quad \frac{5}{4} = \frac{5 \times 5}{4 \times 5} = \frac{25}{20}$$

$$20 : 10 = 8 \quad ; \quad \frac{8}{10} = \frac{8 \times 2}{10 \times 2} = \frac{16}{20}$$

Por la definición (46), se tiene:

$$\frac{5}{4} - \frac{8}{10} = \frac{25}{20} - \frac{16}{20}$$

y por el caso anterior: $= \frac{25-16}{20} = \frac{9}{20}$

luego:

Regla Práctica. — *Para restar números racionales de distinto denominador, se reducen al mínimo común denominador, y luego se procede como en el caso anterior.*

50. III. **Restar un entero y una fracción.**—1º) Sea:

$$6 - \frac{3}{4}$$

Reduciendo el número entero a racional, (9):

$$6 - \frac{3}{4} = \frac{6}{1} - \frac{3}{4}$$

reduciendo a común denominador:

$$= \frac{24}{4} - \frac{3}{4}$$

y por (48):

$$= \frac{24 - 3}{4} = \frac{21}{4}$$

2º) Sea: $\frac{5}{8} - 3$

Reduciendo el entero a racional, (9):

$$\frac{5}{8} - 3 = \frac{5}{8} - \frac{3}{1}$$

reduciendo a común denominador:

$$= \frac{5}{8} - \frac{24}{8}$$

y por (48):

$$= \frac{5 - 24}{8} = \frac{-19}{8} = -\frac{19}{8}$$

luego:

Regla Práctica. — *Para restar un entero y una fracción, se reduce el entero a fracción, y luego se procede como en el caso anterior.*

51. IV. **Restar números mixtos.** — Sea la resta:

$$4\frac{2}{5} - 7\frac{1}{2}$$

Reduciendo los números mixtos a fracción, (39):

$$4\frac{2}{5} - 7\frac{1}{2} = \frac{22}{5} - \frac{15}{2}$$

por (49): $$= \frac{44}{10} - \frac{75}{10}$$

$$= \frac{44-75}{10} = \frac{-31}{10} = -\frac{31}{10}$$

luego:

Regla práctica. — *Para restar números mixtos, se reducen a fracción, y luego se restan éstas.*

52. Propiedad uniforme. — Teorema. — *Restando miembro a miembro dos igualdades entre números racionales, se obtiene otra igualdad.*

Supongamos reducidos a común denominador los números dados.

$$H\begin{cases} \frac{a}{m} = \frac{a}{m} \\ \frac{b}{m} = \frac{b'}{m} \end{cases} \qquad T\left\{ \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a'}{m} - \frac{b'}{m} \right.$$

Siendo: $\frac{a}{m} = \frac{a'}{m}$ $\therefore$ por (13): $am = a'm$.

$$\frac{b}{m} = \frac{b'}{m} \therefore \text{ por (13): } \quad bm = b'm$$

Restando ordenadamente:

$$am - bm = a'm - b'm$$

factoreando: $(a - b)m = (a' - b')m$

y por (13): $$\frac{a - b}{m} = \frac{a' - b'}{m}$$

y por (45): $$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a'}{m} - \frac{b'}{m}$$

EJERCICIOS

58.	$\frac{8}{c} - \frac{5}{c}$	R. $\frac{3}{c}$
59.	$\frac{12}{5} - \frac{7}{5}$	,, 1
60.	$\frac{3}{8} - \frac{4}{6}$	,, $-\frac{7}{24}$
61.	$\frac{14}{15} - \frac{9}{12}$	,, $\frac{11}{60}$
62.	$\frac{17}{36} - \frac{10}{24}$	,, $\frac{1}{18}$
63.	$3 - \frac{2}{5}$	,, $\frac{13}{5}$
64.	$\frac{4}{2} - 2$	,, 0
65.	$13 - \frac{4}{7}$	,, $12\frac{3}{7}$
66.	$\frac{7}{15} - 8$	,, $-\frac{113}{15}$
67.	$5\frac{3}{4} - 2\frac{4}{5}$	,, $2\frac{19}{20}$
68.	$3\frac{1}{2} - 1\frac{5}{6}$	,, $1\frac{2}{3}$
69.	$5 - 3\frac{1}{2}$	,, $1\frac{1}{2}$
70.	$4\frac{5}{7} - \frac{4}{21}$	,, $4\frac{11}{21}$

CAPITULO IV

PROGRAMA IV. — Multiplicación de números racionales. — Definición. Propiedades uniforme, conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la suma y a la resta. Leyes de monotonía. Si los miembros de una desigualdad se multiplican por los de una igualdad entre números negativos se obtiene una desigualdad de sentido contrario al de la dada. Números racionales inversos. El producto de dos números racionales inversos es igual a uno.

Multiplicación de números racionales

53. Producto de varios números racionales. — Se llama *producto de varios números racionales,* llamados *factores,* a otro número racional, cuyo numerador es el producto de los numeradores, y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Ejemplo: $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 5 \times 1}{4 \times 7 \times 2} = \frac{15}{56}$

En general: $$\frac{a}{m} \times \frac{b}{n} \times \frac{c}{p} = \frac{a \,.\, b \,.\, c}{m \,.\, n \,.\, p}$$

Multiplicar varios números racionales es hallar su producto; el signo de operación es el conocido.

Propiedades de la multiplicación

54. Propiedad uniforme. — TEOREMA. — *Multiplicando miembro a miembro varias igualdades entre números racionales, se obtiene otra igualdad,*

$$H\begin{cases}\dfrac{a}{b}=\dfrac{a'}{b'}\\[2ex]\dfrac{c}{d}=\dfrac{c'}{d'}\end{cases}\qquad T\left\{\frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'}\right.$$

Se sabe que: $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ $\therefore$ por (13): $ab'=a'b$

$\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$ $\therefore$ „ „ $cd'=c'd$

Multiplicando ordenadamente:

$$ab'.cd'=a'b.c'd$$

y por las propiedades conmutativa y asociativa del producto de números enteros:

$$ac.b'd'=a'c'.bd$$

y por definición de números racionales iguales, (13):

$$\frac{ac}{bd}=\frac{b'd'}{a'c'}$$

55. Propiedad conmutativa. — TEOREMA. — *El producto de varios factores es independiente de su orden.*

$$H\left\{\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}\cdot\frac{c}{p}\qquad T\left\{\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}\cdot\frac{c}{p}=\frac{a}{m}\cdot\frac{c}{p}\cdot\frac{b}{n}\right.\right.$$

Por definición, (53), se tiene:

$$\frac{a}{m}\cdot\frac{b}{n}\cdot\frac{c}{p}=\frac{abc}{mnp}\qquad(1)$$

y también: $\frac{a}{m}\cdot\frac{c}{p}\cdot\frac{b}{n}=\frac{acb}{mpn}$

y por la propiedad conmutativa del producto de números enteros, en el segundo miembro se tiene:

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{c}{p} \cdot \frac{b}{n} = \frac{abc}{mnp} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2), por el carácter transitivo de la igualdad, se deduce:

$$\boxed{\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} = \frac{a}{m} \cdot \frac{c}{p} \cdot \frac{b}{n}}$$

56. Propiedad asociativa. — TEOREMA. — *En un producto se pueden reemplazar varios factores por su producto efectuado.*

$$H\left\{\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} \qquad T\left\{\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} = \frac{a}{m} \cdot \frac{bc}{np}\right.\right.$$

Por definición, (53), se tiene:

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} = \frac{abc}{mnp} \qquad (1)$$

y también:

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{bc}{np} = \frac{a(bc)}{m(np)}$$

y por la propiedad asociativa del producto de números enteros:

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{bc}{np} = \frac{abc}{mnp} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2), se deduce:

$$\boxed{\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{c}{p} = \frac{a}{m} \cdot \frac{bc}{np}}$$

57. Propiedad distributiva. — TEOREMA. — *El producto de una suma algebraica de números racionales por otro, es igual a la suma algebraica de los productos de éste por cada uno de los términos de aquélla.*

Supongamos, para mayor facilidad, que los términos de la suma algebraica sean de igual denominador.

$$H\left\{\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}\right)\frac{m}{n}\right.$$

$$T\left\{\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}\right)\frac{m}{n}=\frac{am}{dn}+\frac{bm}{dn}-\frac{cm}{dn}\right.$$

Por definición de suma, (31), se tiene:

$$\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}\right)\frac{m}{n}=\left(\frac{a+b-c}{d}\right)\frac{m}{n}$$

y por (53): $$=\frac{(a+b-c)\,m}{dn}$$

y por la propiedad distributiva del producto de números enteros:

$$=\frac{am+bm-cm}{dn}$$

o bien, (31):

$$\boxed{\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{d}-\frac{c}{d}\right)\frac{m}{n}=\frac{am}{dn}+\frac{bm}{dn}-\frac{cm}{dn}}$$

58. Propiedad monótona. — TEOREMA I. — *Si ambos miembros de una desigualdad entre números racionales, se multiplican por otro positivo, se obtienen una desigualdad del mismo sentido que la dada.*

$$H\left\{\frac{a}{b}>\frac{a'}{b'}\;;\;\frac{m}{n}\right.$$

$$T\left\{\frac{am}{bn}>\frac{a'm}{b'n}\right.$$

Como es: $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$ deberá ser: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} + \frac{c}{d}$ (1)

y multiplicando ambos miembros de (1) por $\frac{m}{n}$, (54):

$$\frac{am}{bn} = \left(\frac{a'}{b'} + \frac{c}{d}\right)\frac{m}{n}$$

y por (57): $$\frac{am}{bn} = \frac{a'm}{b'n} + \frac{cm}{dm}$$

de donde: $$\frac{am}{bn} > \frac{a'm}{b'n}$$

59. Teorema II. — *El producto de varias desigualdades de un mismo sentido, entre números racionales, es otra desigualdad del mismo sentido.*

$$H\begin{cases} \frac{a}{m} > \frac{a'}{m'} & (1) \\ \frac{b}{n} > \frac{b'}{n'} & (2) \end{cases} \qquad T\left\{\frac{ab}{mn} > \frac{a'b'}{m'n'}\right.$$

Por el teorema anterior, multiplicando ambos miembros de la (1) por $\frac{b}{n}$ se tiene:

$$\frac{ab}{mn} > \frac{a'b}{m'n} \qquad (3)$$

y multiplicando ambos miembros de la (2) por $\frac{a'}{m'}$ resulta:

$$\frac{a'b}{m'n} > \frac{a'b'}{m'n'} \qquad (4)$$

Comparando (3) y (4), por el carácter transitivo de la igualdad:

$$\frac{ab}{mn} > \frac{a'b'}{m'n'}$$

60. Números racionales inversos. — Un número racional es *inverso* de otro, siendo uno de ellos distinto de cero, cuando su numerador y denominador son el denominador y numerador del otro.

Ejemplos: $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$ son inversos

$\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ „ „

61. Teorema. — *El producto de dos números racionales inversos, es igual a uno.*

$H\left\{\frac{a}{b}\ ;\ \frac{b}{a}\right.$ $\qquad$ $T\left\{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1\right.$

Por definición, (53): $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\,.\,b}{b\,.\,a}$

y simplificando en el segundo miembro, queda:

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1}$$

EJERCICIOS

Efectuar los siguientes productos:

71. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{5}{9}$,, $\frac{40}{189}$

72. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$,, $\frac{3}{14}$

73. $\frac{5}{18} \times \frac{6}{25} \times \frac{3}{7} \times \frac{28}{9}$,, $\frac{4}{45}$

74. $\frac{a}{b} \cdot \frac{3b}{2a} \cdot \frac{4ab}{6a}$,, b

75. $4 \times \frac{5}{12}$,, $\frac{5}{3}$

76. $\frac{4}{16} \times 12$,, 3

77. $27 \times 2\frac{1}{3}$,, 63

78. $5\frac{3}{10} \times 15$,, $79\frac{1}{2}$

79. $\frac{27}{7} \times 5\frac{4}{9}$,, 21

80. $4\frac{3}{8} \times \frac{56}{70}$,, $3\frac{1}{2}$

81. $2\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{3}$,, $13\frac{1}{3}$

82. $2\frac{3}{5} \times 4\frac{3}{13}$,, 11

83. $5\frac{2}{15} \times \frac{15}{11} \times 3\frac{4}{7} \times \frac{1}{5}$,, 5

CAPITULO V

PROGRAMA V. — **División de números racionales.** — Definición. Regla práctica. Verificación de la posibilidad de la división en el campo racional, de números enteros tales que el dividendo no sea múltiplo del divisor.

Propiedades uniforme y distributiva con respecto a la suma y a la resta.

Ejercicio de las cuatro operaciones fundamentales combinadas, con números racionales.

División de números racionales

62. Cociente de dos números racionales. — Se llama *cociente* de dos números racionales, llamados *dividendo* y *divisor* (*divisor* $\neq 0$) a otro número racional, tal, que multiplicando por el divisor dé un producto igual al dividendo:

Ejemplo: $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15}$, porque: $\frac{8}{15} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$

En general:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n}, \text{ siempre que: } \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

siendo $\frac{c}{d} \neq 0$.

63. Corolario. — Según la definición:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n}, \ (1), \text{ siempre que: } \frac{m}{n} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

Reemplazando el valor (2) en (1), resulta:

$$\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{c}{d}\right) : \frac{c}{d} = \frac{m}{n} \quad (3)$$

y reemplazando (1) en (2):

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \qquad (4)$$

Las expresiones (3) y (4) nos dicen:

Si un número racional se multiplica (divide) por otro, y el resultado se divide (multiplica) por ese otro, se obtiene el número racional dado.

Dividir dos números racionales es hallar su cociente; el signo de operación es el conocido.

64. Regla práctica para hallar el cociente. — TEOREMA. — *El cociente de dos números racionales se obtiene multiplicando el dividendo por el inverso del divisor.*

$$H\left\{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \qquad T\left\{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}\right.\right.$$

En efecto, por definición de producto:

$$\frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd}$$

y simplificando, resulta: $= \frac{a}{b}$

Como el producto de $\frac{ad}{bc}$ por el divisor $\frac{c}{d}$ es igual al dividendo $\frac{a}{b}$, el número $\frac{ad}{bc}$ es el cociente, y demostrado el teorema.

65. Casos particulares.

1º DIVISIÓN DE UN ENTERO POR UNA FRACCIÓN. — Sea

$$a : \frac{b}{c}$$

Se tiene: $$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c}$$

y por la regla anterior $$= \frac{a}{1} \times \frac{b}{c}$$

y por (53): $$\boxed{a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}}$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para dividir un entero por una fracción, se multiplica el entero por el denominador, resultando el numerador del cociente, y se pone como denominador el numerador de la fracción.*

Ejemplo: $$5 : \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$$

66. 2º DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN ENTERO. — Sea:

$$\frac{a}{b} : c$$

Se tiene: $$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1}$$

y por (62): $$= \frac{a}{b} \times \frac{c}{1}$$

y por (53): $$\boxed{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}}$$

luego:

Regla práctica. — *Para dividir una fracción por un entero, se multiplica el entero por el denominador, resultando el denominador del cociente, y se pone como numerador el mismo de la fracción.*

Ejemplo: $\frac{5}{7} : 2 = \frac{5}{7 \times 2} = \frac{5}{14}$

67. Pisibilidad de dividir siempre dos números enteros en el campo de los números racionales. — En el campo de los números enteros es:

$$a : b = c, \quad \text{siempre que sea:} \quad a = \dot{b}$$

Con la introducción de los números fraccionarios en el cálculo, es posible efectuar cualquier división, aun cuando el dividendo no sea múltiplo del divisor

Ejemplo: Sea dividir 32 y 5.

Se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 5 \\ 2 & 6 \end{array} \quad \therefore \quad 32 : 5 = 6 + \frac{2}{5} = 6\,\frac{2}{5}$$

En efecto:

$$6\,\frac{2}{5} \times 5 = \frac{6 \times 5 + 2}{5} \times 5$$

$$= \frac{32}{5} \times 5 = 32$$

68. Reducción de una fracción a otra que tenga un denominador dado. — En (20) vimos cómo se reducía una fracción a otra con un denominador dado, pero con la condición de que el denominador dado fuese múltiplo del de la fracción.

Veremos ahora el caso general.

Sea reducir $\frac{3}{4}$ a quintos.

La nueva fracción será $\frac{n}{5}$ y tal, que:

$$\frac{n}{5} = \frac{3}{4}$$

Por definición de fracciones iguales, se tendrá:

$$n\ 4 = 3 \times 5$$

y dividiendo ambos miembros por 4:

$$n = \frac{3 \times 5}{4}$$

luego la fracción buscada es:

$$\frac{\frac{15}{4}}{5}$$

de donde se deduce:

REGLA PRÁCTICA. — *Para reducir una fracción a otra con un denominador dado, se pone como numerador la fracción cuyo numerador es el producto del numerador de la fracción y el nuevo denominador, y cuyo denominador es el de la fracción dada.*

Ejemplos:

1º Reducir $\frac{2}{3}$ a décimos.

Se tiene:

$$\frac{2}{3} = \frac{\frac{20}{3}}{10}$$

2º Reducir $\frac{1}{2}$ a tercios.

Se tiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{3}$$

3º Reducir $\frac{12}{7}$ a treinta avos.

Se tiene:

$$\frac{12}{7} = \frac{\frac{360}{7}}{30}$$

69. Observación. — Cuando se dividen dos números, si uno es múltiplo del otro, el cociente indica, *concretamente, cuántas veces el dividendo contiene al divisor*, así, si tenemos

$$12 : 4 = 3$$

podemos interpretar esa división diciendo *que el número 12 contiene 3 veces al número 4*, pero si se tratara de la división de dos números fraccionarios, por ejemplo:

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

es absurdo y sin sentido decir que $\frac{1}{2}$ contiene $\frac{3}{10}$ de vez al número $\frac{5}{3}$, pues no es concebible tres décimos de vez.

Y sin embargo, la palabra *cociente*, etimológicamente, significa: *¿cuántas veces?*

Para obviar esta falta de concordancia entre la palabra y su significado, al tratarse de números racionales sería preferible emplear la palabra *razón* en lugar de *cociente*.

Propiedades de la división

70. Propiedad uniforme. — Teorema. — *Dividiendo miembro a miembro dos igualdades entre números racionales, resulta otra igualdad.*

$$H\begin{cases}\dfrac{a}{m}=\dfrac{a'}{m'}\\[2ex]\dfrac{c}{n}=\dfrac{c'}{n'}\end{cases}\qquad T\left\{\frac{a}{m}:\frac{c}{n}=\frac{a'}{m'}:\frac{c'}{n'}\right.$$

Se tiene: $\dfrac{a}{m}=\dfrac{a'}{m'}$ $\therefore$ por (13): $am'=a'm$ (1)

$\dfrac{c}{n}=\dfrac{c'}{n'}$ $\therefore$,, ,, $cn'=c'n$ (2)

Dividiendo ordenadamente (1) y (2), por la propiedad uniforme de la división de números enteros:

$$\frac{am'}{cn'}=\frac{a'm}{c'n}$$

de donde, (13): $am'.c'n=a'm.cn'$

o bien: $an'.m'c'=a'n'.mc$

lo que significa que: $\dfrac{an}{mc}=\dfrac{a'n'}{m'c'}$ (3)

Pero: $\dfrac{an}{mc}=\dfrac{a}{m}\cdot\dfrac{n}{c}=\dfrac{a}{m}:\dfrac{c}{n}$

y $\dfrac{a'n'}{m'c'}=\dfrac{a'}{m'}\cdot\dfrac{n'}{c'}=\dfrac{a'}{m'}:\dfrac{c'}{n'}$

luego, reemplazando estos valores en (3):

$$\frac{a}{m}:\frac{c}{n}=\frac{a'}{m'}:\frac{c'}{n'}$$

71. Propiedad distributiva. — TEOREMA. — *El cociente de una suma algebraica de números racionales por*

otro, es igual a la suma algebraica de los cocientes de cada sumando y el número dado.

$$H\left\{\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{c}{p}\right):\frac{r}{s}\right.$$

$$T\left\{\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{c}{p}\right):\frac{r}{s}=\frac{a}{m}:\frac{r}{s}+\frac{b}{n}:\frac{r}{s}-\frac{c}{p}:\frac{r}{s}\right.$$

Por la regla práctica (64):

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{c}{p}\right):\frac{r}{s}=\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{p}\right)\times\frac{s}{r}$$

y por (57): $\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{c}{p}\right):\frac{r}{s}=\frac{as}{mr}+\frac{bs}{nr}-\frac{cs}{pr}$ (1)

Por la regla (64), se tiene:

$$\frac{a}{m}:\frac{r}{s}+\frac{b}{n}:\frac{r}{s}-\frac{c}{p}:\frac{r}{s}=\frac{a}{m}\cdot\frac{s}{r}+\frac{b}{n}\cdot\frac{s}{r}-\frac{c}{p}\cdot\frac{s}{s}$$

$$=\frac{as}{mr}+\frac{bs}{nr}-\frac{cs}{pr} \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2), resulta:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{c}{p}\right):\frac{r}{s}=\frac{a}{m}:\frac{r}{s}+\frac{b}{n}:\frac{r}{s}-\frac{c}{p}:\frac{r}{s}$$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes divisiones:

84. $\frac{3}{4} : \frac{6}{5}$ R. $\frac{5}{8}$

85. $\frac{9}{35} : \frac{3}{14}$ „ $\frac{6}{5}$

86. $\frac{12}{45} : \frac{8}{36}$ „ $\frac{6}{5}$

87. $\frac{126}{72} : \frac{280}{60}$ „ $\frac{3}{8}$

88. $5\ \frac{3}{8} : 2\ \frac{5}{6}$ „ $1\ \frac{61}{68}$

89. $4\ \frac{7}{12} : 3\ \frac{3}{27}$ „ $1\ \frac{53}{112}$

90. $4\ \frac{2}{3} : \frac{12}{15}$ „ $5\ \frac{5}{6}$

91 $9 : \frac{27}{8}$ „ $\frac{8}{3}$

92. $\frac{3}{8} : 6$ „ $\frac{1}{16}$

93. $6 : \frac{12}{5}$ „ $\frac{5}{2}$

94. $2\ \frac{3}{5} : 4$ „ $\frac{13}{20}$

95. $\frac{21}{8} : 5\ \frac{4}{7}$ „ $\frac{49}{104}$

96. Reducir $\frac{1}{2}$ a séptimos „ $\frac{\frac{7}{2}}{7}$

97. „ $\frac{3}{4}$ „ tercios R $\frac{\frac{9}{4}}{3}$

98 Reducir $\frac{4}{9}$ a medios „ $\frac{\frac{8}{9}}{2}$

99. „ $\frac{5}{3}$ „ octavos „ $\frac{\frac{40}{3}}{8}$

Ejercicios de las cuatro operaciones fundamentales combinadas, con números racionales.

100 $\left(\frac{6}{20}+\frac{12}{38}-\frac{4}{19}\right)\times\frac{12}{9}$ R. $\frac{154}{285}$

101. $\left(12\frac{3}{5}-\frac{2}{3}+2\frac{15}{25}\right):2\frac{1}{4}$ „ $\frac{274}{45}$

102. $\left(\frac{2}{3}+1\right):\frac{5}{8}$ „ $\frac{8}{3}$

103. $\frac{3}{4}+\left(1+\frac{2}{3}\right)\times\frac{8}{5}$ „ $\frac{41}{12}$

104. $\left(1+\frac{1}{6}\right)\times\left(2+\frac{2}{3}\right)$ „ $\frac{28}{9}$

105. $\left[\left(3+\frac{3}{8}\right)-\left(2-\frac{5}{6}\right)\right]\left(8+\frac{7}{10}\right)$ „ $19\frac{51}{240}$

106. $\left[2\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+3\right)-\left(3\frac{1}{5}-\frac{9}{12}\right)\right]:\frac{12}{15}$ „ $4\frac{11}{48}$

CAPITULO VI

PROGRAMA VI. — **Potenciación y radicación de números racionales.** — Potencias de números racionales con exponente natural. Regla práctica para elevar una fracción a una potencia. Toda potencia de una fracción irreducible es otra fracción irreducible.

Potencias con exponente negativo. Definición. Verificación de que en las potencias con exponente negativo se conservan las propiedades de las potencias con exponente natural. Extensión de la regla para dividir potencias de igual base al caso en que el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor.

Raíz enésima de un número racional. Definición. Raíz cuadrada. Si la raíz cuadrada de un número natural no es otro número natural tanpoco es un número fraccionario.

Raíz cuadrada aproximada de un número con menor error que un enésimo. Regla práctica para obtenerla. Ejercicios.

Potenciación de números racionales

72. Potencias de números racionales con exponente natural. — DEFINICIONES. — I. La *potencia çero* de un número racional es igual a *uno*:

$$\left(\pm\frac{5}{7}\right)^0 = 1 \quad ; \qquad \boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1}$$

II. La *potencia uno* de un número racional es el mismo número racional:

$$\left(+\frac{1}{2}\right)^1 = + \quad ; \qquad \left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}}$$

III. La *potencia emésima* de un número racional es el producto de m factores iguales al número dado:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

En general:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \overbrace{\quad\quad}^{m} \frac{a}{b}$$

73 Potencia de una fracción. — Sea:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3$$

Por definición, se tiene:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7}$$

y efectuando el producto, (52):

$$= \frac{5 \times 5 \times 5}{7 \times 7 \times 7}$$

o bien:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3}$$

y en general:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para elevar una fracción a una potencia mayor que uno, se elevan sus dos términos a la potencia dada.*

Ejemplo:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$$

74. TEOREMA. — *Toda potencia de una fracción irreducible es otra fracción irreducible.*

$$H \begin{cases} \frac{a}{b} = \textit{fracción irreducible;} \end{cases}$$

$$T \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} = \textit{fracción irreducible;} \end{cases}$$

Se tiene: $\frac{a^m}{b^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}^{m}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots b}_{m}}$

Los factores del numerador son a y 1, luego es divisible por a y por 1; los factores del denominados son b y 1, luego es divisible por b y por 1, es decir:

el numerador es divisible por a y 1;

el denominador es divisible por b y 1.

Pero, por hipótesis, a y b son primos entre s (22), luego el único divisor común al numerador y al denominador es 1, pero el numerador es:

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots\ldots a}^{m} = a^m$$

y el denominador:

$$\overbrace{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots b}^{m} = b^m$$

luego a^m y b^m son primos entre sí, es decir:

$$\frac{a^m}{b^m} = \textit{fracción irreducible:}$$

75. Propiedades de la potenciación. — POSTULADO. — *Las potencias de números racionales gozan de las mismas propiedades que las potencias de los números enteros.*

Podríamos demostrar las propiedades de la potenciación de números racionales de manera análoga a la empleada para los números enteros, pero eso alargaría en mucho nuestro estudio, por lo que preferimos darlo por demostrado.

Potencias con exponente negativo

76. Definición. — La potencia de un número con *exponente entero y negativo*, es igual al número uno dividido por la misma potencia, pero de exponente negativo.

Ejemplos: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$$

En general: $\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$

77. Propiedades de las potencias de exponente negativo. — POSTULADO. — *Las potencias de exponente negativo de números racionales gozan de las mismas propiedades que las potencias de los números enteros.*

Idénticas consideraciones a las expuestas en (75) nos inducen a enunciar ese postulado.

78. Ejemplos de verificación.

POTENCIA DE UN PRODUCTO. — Sea $\left(\frac{1}{2} \times 5\right)^{-2}$

Se tiene: $\left(\frac{1}{2} \times 5\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 5^{-2}$

En efecto; por (76):

$$\left(\frac{1}{2} \times 5\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{25}{4}} = \frac{4}{25} \qquad (1)$$

Además:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\times 5^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}\times\frac{1}{5^{2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}\times\frac{1}{25}=\frac{4}{1}\times\frac{1}{25}=\frac{4}{25}\quad(2)$$

Como los resultados (1) y (2) son iguales, resulta:

$$\left(\frac{1}{2}\times 5\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\times 5^{-2}$$

POTENCIA DE UN COCIENTE. — Sea $\left(\frac{4}{\frac{2}{3}}\right)^{-3}$

Se tiene: $$\left(\frac{4}{\frac{2}{3}}\right)^{-3}=\frac{4^{-3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}$$

En efecto; por (76):

$$\left(\frac{4}{\frac{2}{3}}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{4}{\frac{2}{3}}\right)^{3}}=\frac{1}{\frac{4^{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}}=\frac{1}{\frac{64}{\frac{8}{27}}}=\frac{8}{74\times 27}\qquad(1)$$

Además:

$$\frac{4^{-3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}=\frac{\frac{1}{4^{3}}}{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}}}=\frac{\frac{1}{64}}{\frac{1}{\frac{8}{27}}}=\frac{\frac{1}{64}}{\frac{27}{8}}=\frac{8}{64\times 27}\qquad(2)$$

Los resultados (1) y (2) son iguales, luego:

$$\left(\frac{4}{\frac{2}{3}}\right)^{-3}=\frac{4^{-3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}$$

PRODUCTO DE POTENCIAS DE UN NÚMERO. — Sea

$$(-2)^{-3} \cdot (-2)^{-1}$$

Se tiene: $(-2)^{-3} \cdot (-2)^{-1} = (-2)^{-3-1} = (-2)^{-4}$

En efecto; por (76):

$$(-2)^{-3} \times (-2)^{-1} = \frac{1}{(-2)^3} \times \frac{1}{-2} = \frac{1}{-8} \times \frac{1}{-2} = \frac{1}{+16} \quad (1)$$

Además: $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{+16}$ (2)

Siendo iguales los resultados (1) y (2), es:

$$(-2)^{-3} \cdot (-2)^{-1} = (-2)^{-3-1}$$

COCIENTE DE POTENCIAS DE UN NÚMERO. — Sea: $\frac{5^{-6}}{5^{-4}}$

Se tiene: $\frac{5^{-6}}{5^{-4}} = 5^{-6-(-4)} = 5^{-6+4} = 5^{-2}$

En efecto; por (76):

$$\frac{5^{-6}}{5^{-4}} = \frac{\frac{1}{5^6}}{\frac{1}{5^4}} = \frac{5^4}{5^6} = \frac{5^4}{5^4 \cdot 5^2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \quad (1)$$

Además: $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ (2)

Luego de (1) y (2):

$$\frac{5^{-6}}{5^{-4}} = 5^{-6-(-4)}$$

POTENCIA DE POTENCIA. — Sea $(4^2)^{-3}$

Se tiene: $(4^2)^{-3} = 4^{2(-3)} = 4^{-6}$

En efecto; por (76):

$$(4^2)^{-3} = 16^{-3} = \frac{1}{16^3} = \frac{1}{4096} \qquad (1)$$

Además: $$4^{-6} = \frac{1}{4^6} = \frac{1}{4096} \qquad (2)$$

De (1) y (2): $(4^2)^{-3} = 4^{2\,-(3)}$

79. Extensión de la regla para dividir potencias. — TEOREMA. — *El cociente de dos potencias de un número es otra potencia del mismo número cuyo exponente es igual al exponente del dividendo menos el exponente del divisor.*

$$H\left\{\frac{a^m}{a^n}\right. \qquad T\left\{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right.$$

Hemos visto ya, (*), que el teorema es cierto cuando sea m mayor o igual que n. Falta demostrar ahora que también lo es cuando sea m menor que n.

Siendo: $m < n \quad \therefore \quad n = m + d$

y entonces se tiene: $$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+d}} \qquad (1)$$

pero se sabe que: $a^{m+d} = a^m \cdot a^d$

y sustituyendo en (1):

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^d}$$

y simplificando, resulta:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^d} = a^{-d}$$

Por otra parte, siendo

$$n = m + d \quad \therefore \quad d = n - m$$

(*) Véase nuestra Aritmética para 1er. año, pág. 88.

y multiplicando ambos miembros por -1:

$$-d = -(n-m)$$

o sea: $$-d = m-n$$

y sustituyendo en (2), queda:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Ejemplo: $$\frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

Radicación de números racionales

80. Raíz enésima de un número racional. — Se llama *raíz enésima de un número racional,* llamado *radicando,* a otro número racional, tal, que elevado a la potencia enésima dé un número igual al dado.

Es decir:

$$(1) \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}, \text{ siempre que: } \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{a}{b} \quad (2)$$

La *radicación* tiene por objeto hallar la raíz enésima de un número; el signo de operación es el conocido.

81. Corolarios. — I. Reemplazando (1) en (2), se obtiene:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b} \quad (3)$$

y reemplazando (2) en (1):

$$\sqrt[n]{\left(\frac{p}{q}\right)^n} = \frac{r}{q} \qquad (3)$$

Las expresiones (3) y (4) nos dicen que: *Un número no altera si se lo eleva a una potencia y al resultado se le extrae la raíz del mismo grado, o viceversa.*

II. Se tiene: $\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n} = \frac{a}{b}$

y como $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible, su igual $\frac{p^n}{q^n}$ también es irreducible, (7), luego deberá tenerse:

$$a = p^n$$
$$b = q^n$$

lo que nos dice que: *Para que un número racional tenga raíz enésima exacta, basta que sus términos sean potencias enésimas perfectas.*

82. Raíz cuadrada. — La *raíz cuadrada* de un número racional es otro número racional, tal, que elevado al cuadrado dé un número igual al dado.

Es decir: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, porque $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

83. Regla práctica para hallar la raíz cuadrada. — Por definición, se tiene:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}, \text{ siempre que: } \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

es decir:
$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{a}{b}$$

y siendo $\frac{a}{b}$ una fracción irreducible, por el corolario (81, II), es: $a = p^2 \quad \therefore \quad p = \sqrt{a}$

$$b = q^2 \quad \therefore \quad q = \sqrt{b}$$

es decir, que: $$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

luego:

Regla prática. — *Para hallar la raíz cuadrada de una fracción cuyos términos son cuadrados perfectos, se halla la raíz del numerador y del denominador.*

Ejemplo: Calcular $\sqrt{\frac{9}{16}}$

Se tiene: $$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

84. Teorema. — *Si la raíz de un número natural no es otro número natural, tampoco es un número fraccionario.*

$$H \begin{cases} a, \text{ número nat. dado.} \\ \sqrt{a} \neq \text{núm. natural.} \end{cases} \qquad T \{ \sqrt{a} \neq \text{núm. fraccionario.}$$

Sea el número fraccionario irreductible $\frac{m}{n}$ la raíz cuadrada de a:

$$\sqrt{a} = \frac{m}{n}$$

Entonces, por definición, (80), deberá ser:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = a$$

pero siendo $\frac{m}{n}$ irreducible, su cuadrado, por (74), será *otra fracción irreductible,* lo que va contra la hipótesis, pues se nos da un número natural, luego:

$$\sqrt{a} \neq \frac{m}{n}$$

es decir: $\sqrt{a} \neq$ *número fraccionario.*

85. Raíz cuadrada aproximada de un número con menor error de un enésimo. — Sea a un número natural o fraccionario cuya raíz cuadrada no es un número natural ni fraccionario.

Siempre es posible hallar dos fracciones

$$\frac{m}{n} \quad \text{y} \quad \frac{m+1}{n}$$

tales, que a esté comprendido entre los cuadrados de ambas, es decir:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \leq a < \left(\frac{m+1}{n}\right)^2$$

La fracción $\frac{m}{n}$ se llama *raíz cuadrada por defecto* de a, y $\frac{m+1}{n}$ *raíz cuadrada por exceso* de a.

Ambos son *raíces cuadradas aproximadas de* **a** *con un error menor que* $\frac{1}{n}$.

La raíz cuadrada de a con un error menor que un enésimo, se indica así:

$$\sqrt{a} \quad ; \quad \varepsilon < \frac{1}{n}$$

ε es una letra griega llamada *épsilon*.

86. Regla práctica para hallar la raíz cuadrada aproximada con menor error de un enésimo. — Sea hallar:

$$\sqrt{7} \quad ; \quad \varepsilon < \frac{1}{3}$$

Se debe tener: $\left(\frac{m}{3}\right)^2 < 7 < \left(\frac{m+1}{3}\right)^2$

$$\frac{m^2}{3^2} < 7 < \frac{(m+1)^2}{3^2}$$

Consideremos: $\frac{m^2}{3^2} < 7$

multiplicando ambos miembros por 3^2:

$$m^2 < 3^2 \times 7$$

extrayendo la raíz cuadrada:

$$m < \sqrt{3^2 \times 7}$$

dividiendo por 3: $\frac{m}{3} < \frac{\sqrt{3^2 \times 7}}{3}$

Efectuando los cálculos:

$$\frac{\sqrt{3^2 \times 7}}{3} = \frac{\sqrt{63}}{3} = \frac{7}{3}$$

que es la raíz cuadrada aproximada de 7 con un error menor que $\frac{1}{3}$ luego:

REGLA PRÁCTICA — *Para hallar la raíz cuadrada de un número natural con un error menor que un enésimo, se multiplica el número por* n^2, *y luego se halla la raíz entera del producto, y el resultado se divide por* n.

Ejemplo: Hallar $\sqrt{18}$; $\varepsilon < \frac{1}{10}$

Aplicando la Regla anterior:

$$18 \times 10^2 = 1800$$

$$\sqrt{1800} = 42$$

la raíz buscada es: $\frac{42}{10} = \frac{21}{5}$

EJERCICIOS

Calcular las siguientes potencias:

107. $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ R. $\frac{27}{8}$

108. $\left(\frac{2}{5}\right)^4$ " $\frac{16}{625}$

109. $\left(\frac{5}{6}\right)^5$ " $\frac{3125}{7776}$

110. $\left(\frac{9}{4}\right)^6$ " $\frac{531441}{4096}$

111. 3^{-4} " $\frac{1}{81}$

112. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ R. 8

113. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$ " $\frac{49}{16}$

114. $\frac{2^5}{2^6}$ " $\frac{1}{2}$

115. $\frac{4^2}{4^5}$ " $\frac{1}{64}$

116. $\frac{m^7}{m^9}$ " $\frac{1}{m^2}$

Calcular las siguientes raíces:

117. $\sqrt{\frac{36}{49}}$ R. $\frac{6}{7}$

118. $\sqrt{\frac{1}{16}}$ " $\frac{1}{4}$

119. $\sqrt{\frac{49}{225}}$ " $\frac{7}{15}$

120. $\sqrt{\frac{324}{441}}$ " $\frac{6}{7}$

Calcular las siguientes raíces cuadradas aproximadas:

121. $\sqrt{2}$; $\varepsilon < \frac{1}{10}$ R. $\frac{14}{10}$

122. $\sqrt{3}$; $\varepsilon < \frac{1}{8}$ " $\frac{13}{8}$

123. $\sqrt{15}$; $\varepsilon < \frac{1}{5}$ " $\frac{19}{5}$

124. $\sqrt{47}$; $\varepsilon < \frac{1}{7}$ " $\frac{37}{7}$

CAPITULO VII

PROGRAMA VII. — **Fracciones decimales.** — Definición. Relaciones entre las unidades decimales de los diversos órdenes. Descomposición de fracciones decimales propias e impropias en unidades de diversos órdenes. Escritura de las fracciones decimales en forma entera. División de un número entero por la unidad seguida de ceros. Multiplicación y división de un número decimal por la unidad seguida de ceros. Un número decimal no altera si se agregan ceros a la derecha de su última cifra decimal.

Fracciones decimales

87. Fracción decimal. — Se llama *fracción decimal* a aquella cuyo denominador es una potencia de 10.

Ejemplos: $\frac{5}{10}$; $\frac{8}{100}$; $\frac{43}{1000}$

88. Lectura de una fracción decimal. — CONVENCIÓN. — *Para leer una fracción decimal se enuncia el numerador y luego el denominador con la terminación ésimos.*

Así: $\frac{7}{10}$ *se lee: siete décimos;*

$\frac{3}{100}$ „ „ *tres centésimos;*

$\frac{9}{1000}$ „ „ *nueve milésimos; etc.*

89. Relaciones entre las unidades decimales de los diversos órdenes. — Las fracciones decimales:

$$\frac{1}{10} \text{ , } \frac{1}{100} \text{ , } \frac{1}{1000} \text{ , } \frac{1}{10000} \text{ , etc.}$$

que se leen: *un décimo, un centésimo, un milésimo, un diezmilésimo, etc.*, son, respectivamente, las *unidades de primero, segundo, tercero, cuarto,... orden decimal.*

Por una convención anterior, (9), y el teorema (18) sabemos que:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{10}{10} = \frac{100}{100} = \frac{1000}{1000} \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000} = \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{100} = \frac{10}{1000} = \frac{100}{1000} = \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en donde se comprueba que:

UNA UNIDAD *equivale a diez décimos; o cien centésimos; o mil milésimos,...*

UN DÉCIMO *equivale a diez centésimos; o cien milésimos; o mil diezmilésimos....*

UN CENTÉSIMO *equivale a diez milésimos; o cien diezmilésimos; o mil cienmilésimos,...*

lo que se resume diciendo que *cada orden decimal representa unidades diez veces mayor que el que le sigue*, quedando ordenadas así las diversas unidades:

$$\ldots\ldots 1000\ ;\ 100\ ;\ 10\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{10}\ ;\ \frac{1}{100}\ ;\ \frac{1}{1000}\ ;\ \ldots\ldots$$

90. Descomposición de fracciones decimales propias e impropias en unidades de diversos órdenes.

1º FRACCIÓN DECIMAL PROPIA.

Sea descomponer la fracción $\frac{243}{1000}$

Sabemos que: $\frac{243}{1000} = \frac{200+40+3}{1000}$

y por (31) $= \frac{200}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{3}{1000}$

y simplificando: $= \frac{2}{10} + \frac{4}{100} + \frac{3}{1000}$

de donde se deduce la siguiente:

Regla práctica. — *Toda fracción decimal propia, cuyo numerador tiene tantas cifras como ceros el denominador, es igual a la suma de varias fracciones decimales cuyos numeradores son las cifras del numerador, de izquierda a derecha, y los denominadores respectivos: 10, 100, 1000,...*

Ejemplo: $\frac{1073}{10000} = \frac{1}{10} + \frac{0}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{3}{10000}$

Observación. — *Si el numerador tiene menos cifras que ceros el denominador se añaden ceros a la izquierda cuantos sea menester.*

Ejemplo:

$$\frac{18}{10000} = \frac{0018}{10000} = \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{8}{10000}$$

2º Fracción decimal impropia.

Sea descomponer: $\frac{2118}{100}$

Sabemos que: $\frac{2118}{100} = \frac{2100+18}{100}$

y por (31): $= \frac{2100}{100} + \frac{18}{100}$

simplificando, y por el caso anterior:

$$= 21 + \frac{1}{10} + \frac{8}{100}$$

de donde se deduce la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Toda fracción decimal impropia es igual a la suma de un número entero y varios decimales. El entero es lo que queda al separar en el numerador tantas cifras como ceros haya en el denominador; la parte decimal se obtiene aplicando la regla anterior.*

Ejemplo: $\frac{4832}{1000} = 4 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000}$

91. Escritura de las fracciones decimales en forma entera. — CONVENCIÓN. — *Una fracción decimal se escribe en forma entera así:*

Se escribe el numerador, separando a la derecha con una coma tantas cifras decimales como ceros haya en el denominador. Si no hay cifras bastantes, se agregan los ceros necesarios a la izquierda para que quede uno, y sólo uno, a la izquierda de la coma.

Ejemplos: $\frac{368}{100} = 3{,}68$

$$\frac{40}{10} = 4{,}0$$

$$\frac{1000}{1000} = 1{,}000$$

$$\frac{3}{100} = 0{,}03$$

Las fracciones decimales escritas en la forma entera se llaman *números decimales,* compuestos de dos partes: la *parte entera* la que está a la izquierda de la coma; la *parte decimal* la que está a la derecha.

92. División de un número entero por 10, 100, 1000.

1º) Sea $2161 : 100$

Se tiene: $2161 : 100 = \frac{2161}{100}$

y por la convención anterior:

$= 21{,}61$

2º) Sea $32 : 1000$

Se tiene: $32 : 1000 = \frac{32}{1000}$

y por la convención anterior:

$= 0{,}032$

luego:

Regla práctica. — *Para dividir un número entero por la unidad seguida de ceros, se separa con una coma a la izquierda del número tantas cifras como ceros acompañen a la unidad.*

Si hubiere más ceros que cifras en el número, se agregan a la izquierda los ceros necesarios para que quede un solo cero a la izquierda de la coma.

Ejemplos:

$3163 : 1000 = 3{,}163$

$18432 : 100 = 184{,}32$

$7 : 100 = 0{,}07$

$2 : 10000 = 0{,}0002$

93. Multiplicación de un número decimal por 10, 100, 1000... — Sea

$4{,}35 \times 1000$

Se tiene: $4{,}35 \times 1000 = \frac{435}{100} \times 1000$

y por (53): $= \frac{435 \times 1000}{100}$

$= 4350$

luego:

Regla práctica. — *Para multiplicar un número decimal por 10, 100, 1000,..., se corre la coma a la derecha del número tantos lugares como ceros haya en el multiplicador.*

Si no hubiera bastantes cifras, se agregan los ceros necesarios.

Ejemplos: $0{,}038 \times 100 = 3{,}8$

$3{,}4 \times 1000 = 3400$

94 División de un número decimal por 10, 100, 1000,... .— Sea

$2{,}345 : 100$

Se tiene: $2{,}345 : 100 = \frac{2345}{1000} : 100$

y por (66): $= \frac{2345}{1000} \times \frac{1}{100}$

$= \frac{2345}{100000}$

luego: $= 0{,}02345$

Regla práctica. — *Para dividir un número decimal por 10, 100, 1000,..., basta correr la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros haya en el divisor.*

Si no hubiera bastantes cifras, se agregan los ceros necesarios.

Ejemplos: $42{,}7 : 1000 = 0{,}0427$
$0{,}05 : 10 = 0{,}005$

95. Teorema. — *Un número decimal no altera si se agregan ceros a la derecha de su última cifra decimal.*

H) 5,18 *núm. dec. dado;*

T) $5{,}18 = 5{,}180 = 5{,}1800 = \ldots$

Se sabe (91) que: $5{,}18 = \frac{518}{100}$

y por (18), en el segundo miembro se tiene:

$$5{,}18 = \frac{5180}{1000} = \frac{51800}{10000} = \ldots.$$

y por la convención (91):

$$5{,}18 = 5{,}180 = 5{,}1800 = \ldots..$$

96. Igualdad y desigualdad de números decimales.— De las definiciones de números iguales (13), y desiguales (27), se deduce que:

1º *Dos números decimales son iguales, cuando tienen las mismas cifras y están colocadas en los mismos lugares respecto a la coma.*

2º *Un número decimal es mayor que otro cuando tiene mayor parte entera, y si éstas son iguales, cuando la primera cifra decimal es mayor, y si son iguales, cuando la segunda cifra decimal es mayor, etc.*

Ejemplos:

$5{,}18 > 3{,}74$; $4{,}56 > 4{,}532$; $0{,}374 > 0{,}349$

EJERCICIOS

Descomponer las fracciones siguientes en unidades de diversos órdenes:

125 $\frac{34}{1000}$ R. $\frac{0}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000}$

126. $\frac{457}{100}$,, $4 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100}$

127. $\frac{504}{10000}$,, $\frac{0}{10} + \frac{5}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{4}{10000}$

128. $\frac{4738}{1000}$,, $4 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000}$

Escribir bajo la forma entera las siguientes fracciones decimales:

129. $\frac{4}{100}$ R: 0,04

130. $\frac{32}{10}$,, 3,2

131. $\frac{7}{1000}$,, 0,007

132. $\frac{123}{100}$,, 1,23

133. $\frac{25}{1000}$,, 0,025

CAPITULO VIII

PROGRAMA VIII. — Suma de números decimales. — Deducción de la regla práctica para sumar decimales basada en la suma de fracciones ordinarias.

Suma de números decimales

97. Sea la suma: $3{,}4 + 0{,}035 + 2{,}38$

Sabemos que: $3{,}4 = \frac{34}{10}$

$$0{,}035 = \frac{35}{1000}$$

$$2{,}38 = \frac{238}{100}$$

luego: $3{,}4 + 0{,}035 + 2{,}38 = \frac{34}{10} + \frac{35}{1000} + \frac{238}{100}$

reduciendo a común denominador:

$$= \frac{3400}{1000} + \frac{35}{1000} + \frac{2380}{1000}$$

o bien (31): $$= \frac{3400 + 35 + 2380}{1000}$$

y sumando los números enteros:

$$= \frac{5815}{1000}$$

y por (91): $3{,}4 + 0{,}035 + 2{,}38 = 5{,}815$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para sumar números decimales, se suman las unidades de cada orden, comenzando por las unidades inferiores, procediendo lo mismo que con los*

números naturales. En la suma se separan tantos decimales como tenga el sumando de mayor número de cifras decimales.

La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 3{,}4 \\ 0{,}035 \\ 2.38 \\ \hline 5.815 \end{array}$$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes sumas:

134.	$5{,}8523 + 0{,}0015 + 0{,}8 + 175{,}904$	R: 182,5578
135.	$18{,}10253 + 7{,}905 + 58{,}672 + 0{,}04$	„ 84,71953
136.	$0.2143 + 0{,}105 + 2{,}3042 + 1{,}1417$	„ 3,7652
137.	$783{,}5 + 21{,}473 + 0{,}2101 + 0{,}7816$	„ 805,9647
138.	$21{,}781 + 138{,}72 + 41{,}8738 + 0{,}72 + 1{,}413$	„ 204,5078
139.	$0{,}3274 + 104{,}15 + 21{,}417 + 100{,}042$	„ 225,9364

CAPITULO IX

PROGRAMA IX. — **Resta de números decimales.** — Deducción de la regla práctica basada en la resta de fracciones ordinarias.

Resta de números decimales

98. Sea la resta: $7{,}43 - 3{,}145$

Se tiene: $7{,}43 - 3{,}145 = 7{,}430 - 3{,}145$

y por (91): $$= \frac{7430}{1000} - \frac{3145}{1000}$$

y por (45:) $$= \frac{7430 - 3145}{1000}$$

$$= \frac{4285}{1000} = 4{,}285$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para restar dos números decimales se coloca el sustraendo debajo del minuendo de manera que se correspondan las comas. Si tienen distinto número de cifras decimales, se agregan los ceros necesarios, luego se restan como si fuesen enteros, colocando en la diferencia una coma debajo de las del minuendo y sustraendo.*

Ejemplos:	7,473	0,0500	12,503
	— 4,586	— 0,0247	— 9,600
	2,887	0,0253	2,903

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes restas:

140.	15,7092 — 8,875	R: 6,8342
141.	0,0903 — 0,0082	„ 0,0821
142.	10,975 — 5,0092	„ 5,9658
143.	407,385 — 235,0004	„ 172,3846

CAPITULO X

PROGRAMA X. — Multiplicación de números decimales. — Multiplicación de un decimal por un entero y multiplicación de dos decimales entre sí. Deducción de las reglas prácticas respectivas basadas en la multiplicación de fracciones ordinarias.

Multiplicación de números decimales

99. Multiplicación de un decimal por un entero. — Sea la multiplicación: $2{,}407 \times 5$

Se tiene: $$2{,}407 \times 5 = \frac{2407}{1000} \times \frac{5}{1}$$

o bien: $$= \frac{2407 \times 5}{1000}$$

$$= \frac{12035}{1000} = 12{,}035$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para multiplicar un decimal por un entero se multiplican como si fuesen enteros, separando en el producto con una coma tantas cifras decimales como cifras tenga el factor decimal.*

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 5{,}486 \\ \times 32 \\ \hline 10972 \\ 16458 \\ \hline 175{,}552 \end{array}$$

100. Multiplicación de dos decimales. — Sea la multiplicación: $4{,}56 \times 7{,}2$

Se tiene: $$4{,}56 \times 7{,}2 = \frac{456}{100} \times \frac{72}{10}$$

y por (53): $$= \frac{456 \times 72}{100 \times 10}$$

$$= \frac{32832}{1000} = 32{,}832$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para multiplicar dos decimales se multiplican como si fuesen enteros, separando en el producto con una coma tantas cifras decimales como cifras decimales tengan ambos factores.*

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 12{,}3 \\ \times\ 6{,}7 \\ \hline 861 \\ 738 \\ \hline 82{,}41 \end{array}$$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

144	48,36	× 47	R:	2.272,92
145.	4,75	× 234	„	111,15
146	90,3	× 407	„	36.752,1
147.	82,568	× 238	„	19.651,184
148.	485	× 2,75	„	1.333,75
149	72,839	× 12,502	„	910,633178
150	4,1418	× 4,92	„	20,377656
151.	53,06	× 8,7	„	461,622

CAPITULO XI

PROGRAMA XI. — **División de números decimales.** — Cociente de dos números enteros con menor error que un décimo, un centésimo, un milésimo, etc. Definición y ejemplos.
División de un decimal por un entero o decimal por un número decimal. Reducción a los casos anteriores mediante la multiplicación del dividendo y divisor por la unidad de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor.

División de números decimales

101. Cociente de dos números enteros con menor error que un décimo, un céntesimo, un milésimo, etc. — Si se tiene la división 3 : 7, ya sabemos que ningún número entero es su cociente, pero se puede hallar una fracción decimal que difiera con $\frac{3}{7}$ en menos, o en más, de 0,1; 0,01; 0,001,...

Así, pues, diremos que *el cociente de dos números enteros, con menor error de un décimo,* o de un centésimo, etc., es la fracción decimal que difiere con la dada en menos o en más de 0,1, o en 0,01, etc.

Para expresar el cociente con menor error que 0,1, se emplea la notación: $\varepsilon < 0{,}1$.

Sea calcular 3 : 7 ; $\varepsilon < 0{,}1$, y supongamos que sea ese cociente la fracción $\frac{a}{10}$.

Se tiene entonces: $\frac{a}{10} < \frac{3}{7} < \frac{a+1}{10}$ (1)

y multiplicando por 10:

$$a < \frac{30}{7} < a + 1$$

pero $30 : 7 = 4 + \frac{2}{7}$, luego:

$$a < 4 + \frac{2}{7} < a + 1$$

de donde se deduce que: $a < 4 + \frac{2}{7}$ (2)

y $a + 1 > 4 + \frac{2}{7} \quad \therefore \quad a > 3 + \frac{2}{7}$ (3)

De (2) y (3) se deduce que:

$$a = 4$$

y reemplazando este valor en (1):

$$\frac{4}{10} < \frac{3}{7} < \frac{5}{10}$$

o bien: $0{,}4 < \frac{3}{7} < 0{,}5$

es decir, que 0.4 es el cociente por defecto de 3 : 7 con error menor que 0,1, y 0,5 el cociente por exceso de 3 : 7 con error menor que 0,1.

De idéntica manera se procedería para hallar el cociente con menor error que 0.01, 0,001, etc., luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para hallar el cociente entero de dos números con error menor que un décimo, o un centésimo, o un milésimo, etc., se multiplica el dividendo por 10, o 100, o 1000, etc., se halla el cociente entero de la nueva división y luego se divide el cociente, por 10, o 100, o 1000, etc.*

Ejemplos: 1°) Calcular $5 : 9$; $\varepsilon < 0{,}1$

Se tiene: $5 : 9 = \left(\frac{5 \times 10}{9}\right) : 10 = 0{,}5$

$\varepsilon < 0{,}1.$

2°) Calcular $12 : 11$; $\varepsilon < 0{,}01.$

Se tiene: $12 : 11 = \left(\frac{12 \times 100}{11}\right) : 100 = 1{,}09$

$\varepsilon < 0{,}01.$

3°) Calcular $57 : 9$; $\varepsilon < 0{,}001.$

Se tiene: $57 : 9 = \left(\frac{57 \times 1.000}{9}\right) : 1.000 = 6{,}333$

$\varepsilon < 0{,}001$

102. División de un decimal por un entero. — Sea:

$$4{,}21 : 12$$

Se tiene: $$4{,}21 : 12 = \frac{421}{100} : 12$$

y por (66): $$= \frac{421}{100} \times \frac{1}{12}$$

$$= \frac{421}{1.200}$$

Calculando el resultado con un error menor de 0.01, por ejemplo, resulta:

$$4{,}21 : 12 = 0{,}35 \quad ; \quad \varepsilon < 0{,}01$$

luego:

Regla práctica. — *Para dividir un decimal por un entero se suprime la coma y se agregan al entero tantos ceros como decimales haya, y luego se halla el cociente con la aproximación que se desee.*

103. División de un decimal por otro. — Sea:

$$4{,}36 : 8{,}5$$

Se tiene: $4{,}36 : 8{,}5 = \frac{4{,}36}{8{,}5}$

y multiplicando por 10 ambos términos:

$$= \frac{43{,}6}{85} = 0{,}51$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para dividir un decimal por otro se multiplica el dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor, quedando reducido al caso anterior.*

EJERCICIOS

Calcular las siguientes divisiones:

152.	$4 : 9 \quad ; \varepsilon < 0{,}1$	R.: 0,4
153.	$5 : 12 \quad ; \varepsilon < 0{,}01$	„ 0,41
154.	$25 : 16 \quad ; \varepsilon < 0{,}001$	„ 1,562
155.	$90 : 17 \quad ; \varepsilon < 0{,}1$	„ 5,2
156.	$15 : 7 \quad ; \varepsilon < 0{,}01$	„ 2,14
157.	$32 : 57 \quad ; \varepsilon < 0{,}001$	„ 0,561
158.	$3 : 8 \quad ; \varepsilon < 0{,}0001$	„ 0,3750

Efectuar las siguientes divisiones:

159.	101,6688 : 2,35	R.: 43,08
160.	187,12264 : 123,107	„ 1,52
161.	0.08 : 0,008	„ 10
162.	0,0003 : 3,75	„ 0,00008
163.	0,0144 : 0,024	„ 0,6
164.	0,00375 : 1,25	„ 0,003
165.	0,004 : 400	„ 0,00001

CAPITULO XII

PROGRAMA XII. — **Conversión de fracciones ordinarias en decimales y viceversa.** — Condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria sea reducible a decimal. Una expresión numérica con infinitas cifras decimales no representa una fracción decimal pero, por convención, se llamará fracción decimal inexacta. Fracciones decimales inexactas periódicas puras y mixtas. Reducción de una fracción ordinaria a decimal.

Reducción de una fracción decimal exacta a ordinaria. Reducción de una fracción decimal periódica pura a ordinaria. Reducción de una fracción decimal periódica mixta a ordinaria.

Significado de las fracciones decimales periódicas puras o mixtas cuyo período es nueve.

Conversión de fracciones ordinarias en decimales y viceversa

104. TEOREMA. — *La condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria irreducible sea igual a una decimal, es que el denominador no contenga más factores primos que el 2 y el 5.*

La condición es necesaria.

$$H\left\{\frac{a}{b}=\text{frac. irreducible};\ \frac{a}{b}=\frac{N}{10^k};\ N \text{ y } k \text{ núm. nat.}\right.$$

$T)\quad b=2^m.5^n$

Siendo: $$\frac{a}{b}=\frac{N}{10^k}$$

por (13): $\quad a.\ 10^k=b.\ N=\dot{b}$

y como, por hipótesis, a y b son primos entre sí, se tendrá:

$$10^k=\dot{b}$$

o sea: $\quad 2^k.5^k=\dot{b}$

es decir: $\quad 2^m.5^n=b$

La condición es suficiente.

$$H\begin{cases}\frac{a}{b} = \textit{fracción irreducible} \\ b = 2^m \cdot 5^n\end{cases}$$

$$T\left\{\frac{a}{b} = \frac{N}{10^k}\right.$$

De la hipótesis se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n}$$

Si es $m > n$, debe ser: $m = n + d$, y multiplicando ambos términos por 5^d:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 5^d}{2^m \cdot 5^{n+d}} = \frac{a \cdot 5^d}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^d}{(2 \cdot 5)^m}$$

y en general: $$\frac{a}{b} = \frac{N}{10^k}$$

105. Aplicaciones.

1°) $$\frac{3}{50} = \frac{3}{2 \cdot 5^2} = \frac{2 \cdot 3}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{6}{100} = 0{,}06$$

2°) $$\frac{7}{125} = \frac{7}{5^3} = \frac{2^3 \cdot 7}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{56}{1000} = 0{,}056$$

3°) $$\frac{9}{4} = \frac{9}{2^2} = \frac{9 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{225}{100} = 2{,}25$$

Cuando el denominador de una fracción irreducible no contiene otros factores que 2 y 5, efectuando directamente su cociente se obtiene el número decimal equivalente.

Así procederemos, directamente, con los ejemplos últimos:

$$\begin{array}{r|l} 300 & 50 \\ 00 & 0.06 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 700 & 125 \\ 750 & 0,056 \\ 00 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ 10 & 2,25 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{3}{50} = 0,06 \qquad \frac{7}{125} = 0,056 \qquad \frac{9}{4} = 2,25$$

106. Concepto de límite. — Hemos visto (104), que para que una fracción irreducible se pueda convertir en decimal es necesario y suficiente que el denominadôr no contenga más factores que 2 y 5, de manera que si esta condición no se cumple, la división del numerador y el denominador no podrá dar nunca un resto cero, pudiéndose obtener el cociente con la aproximación que se desee.

Tengamos la fracción $\frac{45}{17}$; como el denominador no contiene ni el 2 ni el 5, podemos afirmar que el cociente 45 : 17 no es exacto por más cifras decimales que se obtengan.

Obtengamos los cocientes aproximados de 45 : 17 por defecto y por exceso en menos de 1, 0,1, 0,01, 0,001,... etc., resultando las sucesiones:

$$2 < 2,6 < 2,64 < 2,647 = 2,6470 < \ldots$$

$$3 > 2,7 > 2,65 > 2,648 > 2,6471 > \ldots$$

pudiéndose escribir: $2,647 < \frac{45}{17} < 2,648$

siendo el cociente aproximado en menos de:

$$2,648 - 2,647 = 0,001 = \frac{1}{10^3}$$

de manera, pues, que $\frac{45}{17}$ difiere de 2,647 *en menos de* $\frac{1}{10^3}$, y de 2,648 *en más* de $\frac{1}{10^3}$

En general, se tendrá una aproximación de $\frac{1}{10^n}$, pudiendo ser n tan grande como se quiera. Entonces se dice que $\frac{45}{17}$ es el límite de 2,647 ... o de 2,648 ... cuando n crece indefinidamente.

Si la fracción es $\frac{a}{b}$ y los cocientes aproximados son:

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ \ldots\ c_n\ \ldots$$

se dice que $\frac{a}{b}$ *es el límite de la sucesión*

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots\ c_n\ \ldots$$

cuando dado un número ε *, por pequeño que sea, se le puede asignar un número natural* n, *tal, que la diferencia:*

$$\frac{a}{b} - c_n < \varepsilon$$

o bien: $$c_n - \frac{a}{b} < \varepsilon$$

para cualquier valor mayor que n.

En símbolos, se expresa así:

$$c_n \to \frac{a}{b}\ ,\ \text{o bien:}\quad \lim.\ c_n = \frac{a}{b}$$

Ejemplo: El límite de la sucesión:

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{3}{4}\ ,\ \frac{4}{5}\ ,\ \ldots\ldots\ \frac{n}{n+1}$$

es *1*, pues:

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

puede ser tan pequeño como se quiera, con tal de tomar *n* bastante grande.

107. Expresión numérica con infinitas cifras decimales. — CONVENCIÓN. — *Una expresión numérica con infinitas cifras decimales no representa una fracción decimal, pero convendremos en llamarla fracción decimal inexacta.*

Sea la fracción $\frac{17}{12}$. Como en el denominador figura un factor primo 3, distinto de 2 y de 5, el cociente obtenido no es nunca exacto. Efectuando la división se observa que a partir del resto 2, siempre resulta un resto 8, por

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

lo que la división no tiene fin. El cociente 1,4166..., de infinitas cifras decimales, no es una fracción decimal, pero por la convención establecida al principio, se le llama fracción decimal inexacta.

17	12
50	1,4166....
20	
80	
80	
8	

108. Fracciones decimales inexactas periódicas puras y mixtas. — Se llama *fracción decimal periódica* a un símbolo escrito como una fracción decimal ordinaria, pero tal, que a partir de una de sus cifras, se repiten periódica e indefinidamente las mismas cifras en el mismo orden.

Ejemplos: 7,323232... ; 1,41666...

El grupo de cifras que se repite se llama *período*.

Una fracción decimal periódica es *pura*, cuando el período empieza inmediatamente después de la coma.

Ejemplos: 2,333... ; 0,4242... ; 3,850850...

Una fracción decimal periódica es *mixta*, cuando el período no empieza inmediatamente después de la coma.

Ejemplos:

0,5222... ; 6,38777... ; 5,104363636...

La parte que precede al período se llama *parte no periódica* o *irregular*, así en

6,38777...

la parte irregular es 38, y 7 el período.

109. Notación. — En las fracciones puras o mixtas para simplificar la escritura e indicar el período, escribiremos uno solo con un arco encima.

Ejemplos:

$$0{,}5222\ldots = 0{,}5\widehat{2} \quad ; \quad 5{,}1043636\ldots = 5{,}104\widehat{36}$$

110. Reducción de una fracción ordinaria a decimal. — Según se ha visto antes (1; 2 y 4) una fracción es una división indicada, y por lo estudiado en (104, 105 y 107), una fracción se reduce a decimal efectuando dicha división, luego:

Regla práctica. — *Para reducir una fracción ordinaria a decimal se divide el numerador por el denominador, obteniéndose el cociente con la aproximación que se desee. El cociente podrá ser exacto, o periódico puro o mixto.*

Ejemplos:

9	4	40	11	7	6
10	2,25	70	0,3636...	10	1,166...
20		40		40	
0		70		40	
		4		4	

$$\frac{9}{4} = 2{,}25 \qquad \frac{4}{11} = 0{,}\widehat{36} \qquad \frac{7}{6} = 1{,}1\widehat{6}$$

Cuando la división es exacta, la fracción decimal obtenida se llama *fracción decimal exacta.*

111. Reducción de una fracción decimal exacta a ordinaria. — Sea la fracción: 0,35

Se tiene: $$0{,}35 = \frac{35}{100}$$

y simplificando $= \frac{7}{20}$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para reducir una fracción decimal exacta a ordinaria, se pone como numerador la parte decimal, y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya. Luego se simplifica si es posible.*

Ejemplo: $0{,}08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$

Si la fracción decimal tiene parte entera, ésta y la parte decimal sin la coma se coloca como numerador.

Ejemplo: $7{,}8 = \frac{78}{10} = \frac{39}{5}$

112. Reducción de una fracción decimal periódica pura a ordinaria. — Sea la fracción 0,247 cuya parte entera es nula.

Supongamos que sea $\frac{m}{n}$ la fracción generatriz de 0,247. Al dividir m por n y obtener las cifras 247 en el cociente, hubo que agregar, o bajar, a la derecha de m, tres ceros, o lo que es lo mismo, multiplicar m por 10^3, resultando un resto m:

$m0$	n
$r0$	0,247
$r'0$	
$m.$	

y por definición de cociente entero:

$$m.\ 1000 = n.\ 247 + m$$

restando m a ambos miembros:

$$m.\ 1000 - m = n.\ 0{,}247$$

sacando m factor común:

$$m\ (1000 - 1) = n.\ 247$$

$$m.\ 999 = n.\ 247$$

y por definición de fracciones iguales, (13):

$$\frac{m}{n} = \frac{247}{999} = 0{,}\widehat{247}$$

luego:

Regla práctica. — *La fracción generatriz de una decimal periódica pura cuya parte entera es nula, tiene por numerador el período y por denominador el número formado por tantos 9 como cifras tenga el período.*

Ejemplos: $0{,}333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$0{,}\widehat{07} = \frac{7}{99}$$

$$0{,}\widehat{162} = \frac{162}{999} = \frac{6}{37}$$

Si el número decimal tiene parte entera, se suma ésta a la fracción hallada.

Ejemplo: $4{,}\widehat{12} = 4\,\frac{12}{99} = 4\,\frac{4}{33} = \frac{136}{33}$

113. Reducción de una fracción decimal periódica mixta a ordinaria. — Sea la fracción 0,32 cuya parte entera es nula. Se sabe que:

$$0{,}3\widehat{2} = \frac{0{,}3\widehat{2} \times 10}{10} = \frac{3{,}\widehat{2}}{10}$$

pero en el numerador podemos aplicar el caso anterior, pues tenemos una periódica pura, luego:

$$0{,}3\widehat{2} = \frac{3\frac{2}{9}}{10} = \frac{\frac{3\times 9+2}{9}}{10}$$

$$= \frac{3\times 9+2}{90} = \frac{3(10-1)+2}{90}$$

$$= \frac{30-3+2}{90} = \frac{32-3}{90}$$

luego:

Regla práctica. — *La generatriz de una fracción decimal periódica mixta cuya parte entera es nula, tiene por numerador la parte no periódica seguida de un período, menos la parte no periódica, y como denominador el número formado por tantos 9 como cifras tiene el período, y tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.*

Ejemplos: $0{,}7\widehat{42} = \frac{742-7}{990} = \frac{735}{990} = \frac{147}{198}$

$$0{,}04851\widehat{} = \frac{4851-48}{99000} = \frac{4803}{99000} = \frac{1601}{33000}$$

Si el número decimal tiene parte entera, se suma ésta a la fracción hallada.

Ejemplo: $2{,}5\widehat{3} = 2\,\frac{53-5}{90} = 2\,\frac{8}{15} = \frac{38}{15}$

114. Significado de las fracciones decimales periódicas puras o mixtas cuyo período es 9. — Las reglas para hallar las generatrices de las fracciones periódicas puras o mixtas *no son válidas* cuando el período está formado por *nueves*:

Ejemplos: $0{,}999\ldots = \frac{9}{9} = 1$

$$0{,}43999\ldots = \frac{439-43}{900} = \frac{396}{900} = \frac{44}{100} = 0{,}44$$

luego: *Las fracciones decimales periódicas cuyo período está formado por nueves exclusivamente, no tienen generatrices.*

Nótese que cuando la fracción es periódica pura, su valor es 1; y cuando es periódica mixta su valor se obtiene aumentando una unidad a la última cifra de la parte no periódica.

115. Hemos visto que: $0{,}999\ldots = 1$

y que: $0{,}4399\ldots = 0{,}44$

resultados que están de acuerdo con la noción de límite que hemos dado en (106), pues el límite de la sucesión:

$$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999;\ 0{,}9999;\ldots$$

es 1, y el límite de la sucesión

$$0{,}4;\ 0{,}43;\ 0{,}439;\ 0{,}4399;\ 0{,}43999;\ldots$$

es 0,44.

De aquí deducimos que todo número entero n puede escribirse de dos maneras:

$$n \text{ y } (n-1),9;\quad (n-1),99 \text{ y } (n-1),999; \text{ etc.}$$

Así el número 7 se puede escribir:

$$7;\ 6{,}9;\ 6{,}99;\ 6{,}999;\ldots$$

y también un número decimal exacto puede escribirse bajo la forma de una fracción periódica mixta, así 0,35 se puede escribir:

$$0{,}35;\ 0{,}349;\ 0{,}3499;\ 0{,}34999;\ldots$$

EJERCICIOS

Reducir a decimal las siguientes fracciones:

166.	$\frac{5}{8}$	R.	0,625
167.	$\frac{72}{25}$	„	2,88
168.	$\frac{16}{15}$	„	$1,0\widehat{6}$
169.	$\frac{11}{14}$	„	$0,\widehat{7857142}$
170.	$\frac{9}{7}$	„	$1,\widehat{285714}$
171.	$\frac{15}{11}$	„	$1,\widehat{36}$
172.	$\frac{19}{75}$	„	$0,25\widehat{3}$
173.	$\frac{107}{33}$	„	$3,\widehat{24}$

Hallar las generatrices de las siguientes fracciones:

174.	0,82	R.	$\frac{41}{50}$
175.	7,585	„	$\frac{1517}{200}$
176.	$0,\widehat{25}$	„	$\frac{25}{99}$
177.	$0,\widehat{927}$	„	$\frac{103}{111}$
178.	$0,\widehat{72}$	„	$\frac{8}{11}$
179.	$3,\widehat{026}$	„	$\frac{3023}{999}$

180. $34,\widehat{274}$ R. $\frac{34.240}{999}$

181. $0,\widehat{48}$ » $\frac{16}{33}$

182. $0,01\widehat{236}$ » $\frac{17}{1375}$

183. $2,14583\widehat{}$ » $\frac{103}{48}$

184. $1,\widehat{46}$ » $\frac{22}{15}$

185. $1,\widehat{362}$ » $\frac{1349}{990}$

186. $2,\widehat{53}$ » $\frac{38}{15}$

187. $0,\widehat{48932}$ » $\frac{12221}{24975}$

188. $2,54\widehat{9}$ » 2,55

189. $0,1\widehat{9}$ » 0,2

190. Demostrar que el producto de las generatrices de dos fracciones periódicas puras es generatriz de otra periódica pura.

CAPITULO XIII

PROGRAMA XIII. — **Idea de número irracional.** — Raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto, aproximada con menor error que un décimo, un centésimo, un milésimo, etc.: Definición y regla práctica para obtenerla. Ejercicios. Necesidad de la creación de nuevos números para hacer posible la extracción de raíces exactas de los números positivos que no son potencias perfectas del grado que indica el índice. Números irracionales. Su representación por expresiones decimales inexactas no periódicas. Ejemplos: raíz cuadrada de 2, 3, 5, etc., e y π.

El número irracional

116. Raíz cuadrada aproximada de un número que no es cuadrado perfecto con menor error que un 0,1, 0,01, 0,001, etc. — Hemos visto antes, (86), *que para hallar la raíz cuadrada de un número con menor error que un cnésimo, se multiplica el número por n^2, luego se halla la raíz cuadrada entera del producto, y el resultado se divide por n.*

En el caso en que sea la aproximación de 0,1, 0,01, 0,001,..., la regla es la misma.

Ejemplos:

1°) Calcular $\sqrt{5}$; $\varepsilon < 0{,}1$

Se tiene:

$$\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5.100}}{10} = \frac{\sqrt{500}}{10} = 2.2 \quad ; \quad \varepsilon < 0{,}1$$

2°) Calcular $\sqrt{32}$; $\varepsilon < 0{,}01$

Se tiene:

$$\sqrt{32} = \frac{\sqrt{32 \times 10000}}{100} = \frac{\sqrt{320000}}{100} = 5{,}65 \; ; \; \varepsilon < 0{,}01$$

117. Necesidad de la creación de los números irracionales. — Sabemos que:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque:} \quad 3^2 = 9$$

pero si tuviéramos $\sqrt{8}$, después de varios ensayos veríamos que no hay ningún número, (84), que, elevado al cuadrado, dé 8, y en general, en el campo de los números racionales, *las raíces de los números que no son potencias perfectas del grado que indica el índice, no son posibles.* Para que estas raíces siempre sean posibles, los matemáticos han inventado los *números irracionales.*

118. Noción de número irracional. — Consideremos el número racional 11. A todos los números racionales los podemos dividir, con respecto al 11, de esta manera:

Clasificación de los números racionales con relación al 11:

1º) *Conjunto de todos los números menores que el 11;*
2º) *Conjunto de todos los números mayores que 11;*
3º) *El mismo número 11.*

Como todo número racional es menor, igual o mayor que el número considerado, 11, podemos decir, de acuerdo con la clasificación anterior, que el número 11 es el *elemento de separación* entre los números menores y mayores que 11, pues 11 es *mayor* que todos los de primera clase, y *menor* que todos los de la segunda.

En base a esas consideraciones, aceptaremos:

I. *Todo número racional pertenece a una u otra clase;*

II. *Todo número de la primera clase es menor que todo número de la segunda, y recíprocamente;*

III. *No hay en la primer clase ningún número que sea mayor que todos los otros de la misma clase, ni hay en la segunda clase ningún número que sea menor que todos los otros de la misma clase.*

Bien; siempre que podamos dividir al conjunto de los números racionales en dos clases, tales, que se verifiquen las tres condiciones anteriores, habremos definido un *número irracional.*

Sea el número 2 y dividamos los números racionales en dos clases, poniendo en una todos los números cuyo cuadrado es menor que 2, y en la segunda todos los números cuyo cuadrado es mayor que 2. Por el teorema (84), *la clasificación no tiene elemento racional de separación.* Calculando las raíces cuadradas de 2, por defecto y por exceso, con aproximaciones de 0,1, 0,01, 0,001,... se tendrán estas dos series de números:

I) 1 ; 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142;...
II) 2 ; 1,5 ; 1,42 ; 1,415 ; 1,4143;...

El cuadrado de cualquier número de la serie I es menor que 2, y el cuadrado de cualquier número de la serie II es mayor que 2, pero la diferencia entre dos término correspondientes de ambas series puede ser tan pequeña como se quiera, de manera que ambas tienen como elemento de separación al número $\sqrt{2}$, que es un *número irracional.*

119. Representación de los números irracionales. — Un número irracional se representa con un número decimal de la aproximación que se desee, poniendo a continuación puntos suspensivos.

Ejemplos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots \quad ; \quad \sqrt{3} = 1{,}732\ldots$$
$$\sqrt{5} = 2{,}236\ldots . \quad , \quad \pi = 3{,}1415926\ldots$$
$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

El número π es la razón de la circunsferencia al diámetro; el número e es la base de los logaritmos neperianos.

120. Números reales. — Los *números reales* son el conjunto de los números racionales y los números irracionales.

Recordando los números conocidos hasta ahora, tenemos este cuadro:

Números naturales } *Números*
Números negativos } *enteros* } *Núm. racionales* } *Números*
Números fracc. puros } *Núm. irracionales* } *reales.*

EJERCICIOS

Calcular las siguientes raíces:

191.	$\sqrt{30}$; $\varepsilon < 0{,}1$	R.	5,4
192.	$\sqrt{50}$; $\varepsilon < 0{,}01$	„	7,07
133.	$\sqrt{361}$; $\varepsilon < 0{,}1$	„	19,0
194.	$\sqrt{1000}$; $\varepsilon < 0{,}001$	„	31,622
195.	$\sqrt{5967}$; $\varepsilon < 0{,}001$	„	77,246
196.	$\sqrt{11}$; $\varepsilon < 0{,}0001$	„	3,3166

CAPITULO XIV

PROGRAMA XIV. — **Magnitudes.** — Cantidades: definición y ejemplos. Cantidades homogéneas. La magnitud como cualidad abstracta con respecto a la cual las cantidades homogéneas se pueden considerar como iguales o desiguales. Ejemplos: longitud, superficie, volumen.

Cantidades comparables. Comparación de dos cantidades homogéneas: caso en que la primera contiene a la segunda un número entero de veces; caso en que la primera no contiene a la segunda un número entero de veces pero sí a una parte alícuota de esta última; caso en que la primera no contiene a la segunda, ni a ninguna parte alícuota de ella, un número entero de veces. Producto y cociente de una cantidad por un número. Dadas dos cantidades existe siempre un número (entero, fraccionario o irracional), y sólo uno, tal que la primera es igual al producto de dicho número por la otra y, recíprocamente, dada una cantidad y un número, existe siempre otra cantidad, homogénea con la dada, cuyo producto por dicho número es igual a la primera. Ejemplos.

Razón de dos cantidades. Medida de una cantidad. Ejemplos. Valor de una cantidad con respecto a una unidad. Números concretos. La razón de dos cantidades es igual a la de sus medidas respecto de una misma unidad: (simplificación). El producto de la razón de una cantidad a otra por la razón de esta última a una tercera es igual a otra a la razón de la primera a la tercera.

Medidas de tiempo: sistema cronométrico. Cálculos de reducción.

Magnitudes

121. Concepto de igualdad. — Dos o más *entes,* (*) son *iguales,* cuando se pueden reemplazar unos a otros. Pero al reemplazarse, se tiene en cuenta sólo una cualidad común, haciendo abstracción de todas las demás. Si no se señala claramente cuál es la cualidad común, decir que dos entes son iguales es una expresión vacía.

Decir que dos monedas son iguales, no significa nada si no especificamos *cuál* es la cualidad común, pues pueden serlo en cuanto al *color,* si reflejan los mismos rayos luminosos; en cuanto al *tamaño,* si pueden coincidir; en cuanto al *peso,* si se equilibran en los platillos de una

(*) Un ente es todo lo que es o existe.

balanza; en cuanto al *valor*, si tienen el mismo poder adquisitivo, etc.

La *igualdad de todas las cualidades* no existe nada más que en un ente y sí mismo, tomando el nombre de *identidad* esa igualdad absoluta.

Recíprocamente, si dos entes son iguales, tienen una *cualidad común*, así hemos dicho si dos conjuntos son coordinables tienen una cualidad común, que es el mismo *número natural;* el concepto de *argentino* encierra la característica, o *cualidad común*, de todas las personas nacidas en la *Argentina*, así como al conjunto de los conceptos de *argentino, chileno, mexicano*, etc., comprende la cualidad común de *americano*.

Este concepto de la igualdad *por abstracción* cumple estos tres caracteres lógicos:

1º *Carácter idéntico*: $A = A$;

2º *Carácter recíproco*: Si $A = B$, también $B = A$:

3º *Carácter transitivo*: Si $A = B$ y $B = C$, *es* $A = C$.

Inversamente, cuando en un sistema de entes se verifican los tres caracteres lógicos *idéntico, recíproco* y *transitivo*, esos entes son iguales en algún sentido, es decir, tienen una *cualidad común*.

122. Cantidades. — Se llama *cantidad* a todo *ente* de un *sistema de entes*, entre los cuales puede definirse la *igualdad* y la *suma*.

Si puede definirse la *igualdad*, quiere decir que se cumplen en el sistema de entes los tres caracteres *idéntico, recíproco* y *transitivo* que la caracterizan; y si puede definirse la *suma*, quiere decir que se cumplen las propiedades de la suma: *uniforme, conmutativa, asociativa* y *monótona, existiendo, además*, un *ente*, llama-

do *nulo*, tal, que sumado con otro da por suma a este otro.

Ejemplos: Los números naturales, los segmentos, los arcos de circunsferencia, los ángulos, los polígonos, etc., son cantidades, pues entre ellos puede definirse la igualdad y la suma.

123. Cantidades homogéneas. — Si en un conjunto de entes puede definirse la igualdad y la suma, los elementos de ese conjunto son *cantidades homogéneas.*

Ejemplos: 1º) En el conjunto de los números racionales, cada número es una *cantidad*, y varios números son *cantidades homogéneas;*

2º) En el conjunto de los ángulos, cada ángulo es una *cantidad*, y varios ángulos son *cantidades homogéneas.*

Se llaman *cantidades heterogéneas*, a las que pertenecen a conjuntos entre los cuales no se puede definir la igualdad y la suma.

Así, los *números* y los *ángulos* son *cantidades heterogéneas*, pues no se puede considerar ni la igualdad ni la suma entre ambas clases de entes.

124. Magnitudes. — Se llama *magnitud*, a la cualidad común de las cosas que las hace susceptibles de ser iguales o desiguales a otras.

Ejemplos: La *longitud* es la cualidad común de los segmentos iguales.

La *superficie* es la cualidad común de las figuras equivalentes.

El *volumen* es la cualidad común de los cuerpos equivalentes.

La *forma* es la cualidad común de las figuras semejantes.

La *longitud, superficie, volumen, forma* etc., son *magnitudes.*

125. Postulado de la divisibilidad. — *Dada una cantidad A y un número n, existe siempre otra cantidad U, tal, que sea:*

$$A = n.\,U$$

siendo: $$n.\,U = U + U + \overset{n}{\overbrace{\cdots\cdots}} + U.$$

En virtud de este postulado, una cantidad cualquiera se puede dividir *material* o *idealmente,* en cualquier número de partes iguales.

126. Postulado de Arquímedes. — *Si A es una cantidad no nula, y B es una cantidad cualquiera, existe siempre un número natural n, tal, que:*

$$n.\,A > B$$

siendo: $$n.\,A = A + A + \overset{n}{\overbrace{\cdots\cdots}} + A.$$

127. Postulado de ordenación. — *Si tres cantidades A, B y C son tales que es:*

$$A < B \quad \text{y} \quad B < C$$

se admite que:

$$A < B < C$$

y si es: $A < B$, *también* $B > A$.

128. Cantidades comparables. — Se llaman *cantidades comparables* a las magnitudes que cumplen las condiciones de los Postulados de la *divisibilidad,* de *Arquímedes* y de *ordenación.*

Ejemplos: Son cantidades comparables: los números racionales, los segmentos de recta, los ángulos, los arcos de una circunferencia, etc.

Comparación de dos cantidades homogéneas

129. Dadas dos cantidades homogéneas A y B, puede suceder:

1º) *La primera contiene a la segunda un número exacto de veces:*

$$A = B + B + \overset{n}{\smile} + B \quad ; \quad n = \textit{núm. nat.}$$

2º) *La primera no contiene a la segunda un número exacto de veces, pero sí a una parte alícuota de esta última:*

$$A = b + b + \overset{m}{\smile} + b$$

siendo: $B = b + b + \overset{n}{\smile} + b \quad ; \quad \frac{m}{n} = \textit{núm. racional.}$

3º) *La primera no contiene a la segunda, ni a ninguna parte alícuota de ella, un número exacto de veces.*

En este caso la cantidad A no es igual ni a un número exacto n de sumandos B, ni a un número m de sumandos $\frac{B}{n}$

130. Producto de una cantidad por un número. —

I. *El producto* de una cantidad por un *número natural* es igual a la suma de tantas cantidades iguales a la dada como unidades tiene el número:

$$A.m = A + A + \overset{m}{\smile} + A$$

II. El *producto* de una cantidad por un número racional positivo es igual a la suma de tantos súman-

dos como indique el numerador de la cantidad dividida (*) en tantas partes como indique el denominador.

$$A \cdot \frac{m}{n} = \frac{A}{n} + \frac{A}{n} + \overbrace{\cdots\cdots}^{m} \frac{A}{n}$$

III. El *producto* de una cantidad por un número irracional es igual al producto de la misma cantidad por el número decimal que se aproxime al número irracional dado con menor error que un décimo, un centésimo, etc.

El producto de una cantidad A por el número irracional $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ es:

$$A.\ 1{,}4142\ldots = A \cdot 1{,}4 = A \cdot \frac{14}{10} \quad ; \varepsilon < 0{,}1$$

$$= A \cdot 1{,}41 = A \cdot \frac{141}{100} \quad ; \varepsilon < 0{,}01$$

$$= A \cdot 1{,}414 = A \cdot \frac{1414}{1000} \quad ; \varepsilon < 0{,}001$$

131. Cociente de una cantidad por un número. — El *cociente* de una cantidad por un número (natural, racional o irracional) es otra cantidad, tal, que multiplicada por el número dado dé un producto igual a la cantidad dada.

$$\frac{A}{n} \text{ siempre que: } B.n = A$$

$n =$ *número natural, racional o irracional.*

132. Postulado. — *Dadas dos cantidades homogéneas, existe siempre un número (entero, fraccionario*

(*) El concepto de división de una cantidad es el dado por el postulado de la divisibilidad (125).

irracional), y sólo uno, tal, que la primera es igual al producto de dicho número por la otra.

Es decir, que dadas dos cantidades A y B, homogéneas, existe un número n, tal, que:

$$B = B.n \quad ; \quad n = n^{o} \text{ ent., fracc. o irrac.}$$

Recíprocamente: *Dada una cantidad y número, existe siempre otra cantidad, homogénea con la dada, que multiplicada por el número de un producto igual a la cantidad dada.*

Dados una cantidad A y un número n, existe una cantidad B, tal, que:

$$B.n = A$$

133. Razón de dos cantidades. — Se llama *razón* de dos cantidades homogéneas, a su cociente.

La primer cantidad se llama *antecedente*, la segunda *consecuente*.

Ya hemos visto (132) que el cociente (o *razón*) de dos cantidades es un número.

La razón de las cantidades A y B es:

$$\frac{A}{B} = n, \text{ siempre que: } B.n = A.$$

A es el *antecedente*; B el *consecuente*; n la *razón*.

134. Medida de una cantidad. — Si el consecuente de una razón se considera como *unidad de medida*, la razón se llama *medida de la cantidad*:

$$\frac{A}{U} = n = \text{medida de } A.$$

135. Valor de una cantidad con respecto a una unidad. — El *valor de una cantidad con respecto a una*

unidad es el producto de la unidad de medida por la medida de la cantidad.

Si la medida de la cantidad A es el número a, y U es la unidad de medida, el valor de la cantidad A, respecto a U, es:

$$valor\ de\ A = U.a$$

136. Números concretos. — Se llaman *números concretos* a los números que designan la magnitud de las cantidades que miden:

Ejemplos: 15°; 3 m; 2 $, etc., números concretos.

Son *números abstractos* en caso contrario.

Ejemplos: 15; 3; 2, etc.

137. TEREMA. — *La razón de dos cantidades es igual a la de sus medidas respecto de una misma unidad.*

$$H\begin{cases}\dfrac{A}{B}\\ a = \text{medida de } A \text{ respecto a } U;\\ b = \text{medida de } B \text{ respecto a } U;\end{cases} \quad T\left\{\frac{A}{B} = \frac{a}{b}\right.$$

Por hipótesis: $\dfrac{A}{U} = a \ \therefore\ A = a.U$

$$\frac{B}{U} = b \ \therefore\ B = b.U$$

luego: $$\frac{A}{B} = \frac{a.B}{b.U} = \frac{a}{b}\cdot\frac{U}{U}$$

Pero el cociente de una cantidad U y sí misma es el número 1, pues 1 por U da U de producto, luego:

$$\frac{U}{U} = 1$$

y sustituyendo en (1):

$$\frac{A}{B} = \frac{a.U}{b.U} = \frac{a}{b}$$

Nótese que se ha operado una verdadera *simplicación* de la unidad U de medida.

138. TEOREMA. — *El producto de la razón de una cantidad a otra por la razón de esta última a una tercera, es igual a la razón de la primera a la tercera.*

$$H\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A}{B}\\[2mm]\dfrac{B}{C}\end{array}\right. \qquad T\left\{\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{B}{C}=\dfrac{A}{C}\right.$$

Sean a, b y c las medidas de A, B y C respecto a una unidad común U. Entonces, por el teorema anterior:

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{B}{C}=\frac{b}{c}$$

y multiplicando ordenadamente:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{c} \qquad (1)$$

Además:

$$\frac{A}{C}=\frac{a}{c} \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce, al ser iguales los segundos miembros, que:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}=\frac{A}{C}$$

Nótese que, para obtener el segundo miembro del primero la cantidad B se ha *simplificado*.

139. Medidas de tiempo: sistema cronométrico. — La unidad de tiempo es el *día solar medio* o simplemente día. (*)

(*) Cuando se estudie Cosmografía se verá qué es el día solar medio y la duración del año trópico.

El día se divide en 24 *horas;* una hora en 60 *minutos,* y un minuto en 60 *segundos*. Los segundos se aprecian en *décimos.*

Veamos dos ejemplos de cálculos de reducción.

I. *Reducir 3 d. 5 h. 15 m. 8 s. a segundos.*

Reducción de días a horas:

$$3\ d = 3 \times 24\ h = 72\ h$$
$$72\ h + 5\ h = 77\ h$$

Reducción de las horas a minutos:

$$77\ h = 77 \times 60\ m = 4620\ m$$
$$4620\ m + 15\ m = 4635\ m$$

Reducción de los minutos a segundos:

$$4635\ m = 4635 \times 60\ s = 278100\ s$$
$$278100\ s + 8\ s = 278108\ s$$

Los 3 *d.* 5 *h.* 15 *m.* 8 *s.* equivalen a 278108 *s.*

II. *Reducir 37526 s. a minutos, horas y días.*

Reducción de los segundos a minutos:

$$37526\ s = 37526\ s : 60 = 625\ m \text{ y } 26\ s.$$

Reducción de los minutos a horas:

$$625\ m = 625\ m : 60\ m = 10\ h \text{ y } 25\ m$$

Los 27526 *s* equivalen a 10 *h.* 25 *m.* 26 *s.*

EJERCICIOS

197. Reducir 3 *d.* 3 *h.* 3 *m.* 3 *s.* a segundos
R. 270.183 *s.*

198. „ 5 *d.* 7 *h.* 5 *m.* a minutos
R. 7.625 *m.*

199. „ 458.516 *s.* a días, horas, minutos y segundos
R. 5 *d.* 7 *h.* 21 *m.* 56 *s.*

200. „ 348.052 *m.* a días, horas, y minutos
R. 241 *d.* 16 *h.* 52 *m.*

CAPITULO XV

PROGRAMA XV. — **Sistema métrico decimal.** — Historia. Ventajas del sistema métrico decimal sobre los demás sistemas (compárese con el sistema cronométrico).
Medidas de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso. Correspondencia entre las unidades de volumen y de peso. Peso específico. Ejercicios y problemas.

Sistema Métrico Decimal

140. Sistemas de medidas. — Un *sistema de medidas* es el conjunto de unidades destinadas a medir las diversas magnitudes.

El sistema es *arbitrario* cuando las diversas unidades no guardan relaciones entre sí, y *racional* cuando las unidades guardan relaciones geométricas o físicas.

141. Sistema Métrico Decimal. — Se llama *sistema métrico decimal* al conjunto de pesas y medidas que tienen por base el *metro*, y que sirven para medir las magnitudes usuales. El sistema métrico se llama *decimal* porque sus diversas unidades siguen los principios de la numeración decimal.

142.—Reseña histórica. — A fines del siglo XVIII las unidades empleadas para medir las diversas magnitudes eran variables de país a país, y en un mismo país había tantos sistemas como provincias o regiones tuviera. Todo eso dificultaba las relaciones comerciales, tanto las internacionales como las internas de cada país.

La Revolución Francesa de 1789 hizo que, en sus ansias de renovación y de perfeccionamiento, creara un estado de ánimo en donde toda idea nueva y práctica se acogiese con entusiasmo. Así fué que en la Asamblea Constituyente, el 10 de Mayo de 1790, decretara la suspensión del sistema de medidas en uso y, a propuesta de *Talleyrand*, se confiara a la Academia de Ciencias estableciera un nuevo sistema invariable para un sistema universal de pesas y medidas. A tal fin, una comisión compuesta por *Borda*, *Lagrange*, *Monge* y *Condorcet*, propuso, en su informe del 19 de Marzo de 1791, se midiera un arco de meridiano, resolviendo así el problema de la forma de la Tierra.

Los geómetras *Delambre* y *Mechaín* fueron encargados de medir el arco comprendido entre *Dunkerque* y *Barcelona*, trabajo que terminaron *Arago* y *Biot*, prolongando la medición hasta las *Islas Baleares*.

La *diezmillonésima* parte del cuarto de meridiano se adoptó como *unidad* de longitud y fundamental del nuevo sistema.

El 18 de Germinal del año III (7 de Abril de 1795), se dictó una ley dando el nombre de *metro* a la nueva medida y mandando construir un modelo de platino, que fué depositado en el *Archivo* de París el 4 de Messidor del año VII (22 de Junio de 1799). Todo el sistema fué adoptado el 3 de Noviembre de 1801, siendo prohibido el uso del sistema antiguo a partir del 1º de Enero de 1840.

En los trabajos de la Comisión nombrada por la Convención intervinieron.

Laplace, Lavoisier, Bellet, Berthollet, Brisson, Coulomb, Darcet, Hauy, D'Herbelot, Lefevre-Gineau, Lalande, Meunier, Pessis, Pommard, Prony, Tranchot, Vandermonde, Lenoir y *Fortín*, franceses; *Alvarez, Bueno, Cicar, González, Pedraya, Planes* y *Rodríguez*, españoles; *Aenede* y *Van Swinden*, diputados bávaros; *Balbo, Vasalli Eaindi, Franchini* y *Fabbroni*, italianos; *Trallés*, diputado suizo; *Bugge*, danés, y el capitán inglés *Kater*.

Casi todos los países del mundo han adoptado el *Sistema Métrico Decimal* y hecho copias de los prototipos de las unidades de *longitud y peso*.

En la República Argentina existe una copia del *metro* y del *kilogramo* en el Ministerio de Agricultura, que son los prototipos legales del país.

143. Unidades fundamentales. — Las *unidades fundamentales* del sistema métrico decimal son el *metro* para las *longitudes*, y el *kilógramo* para los *pesos*.

Las unidades *derivadas* son: el *metro cuadrado* para las *superficies;* el *metro cúbico* para los *volúmenes;* el *litro* para las *capacidades*, y el *peso* para los *valores monetarios*.

144. El metro. — La comisión nombrada en 1790 por la Academia de Ciencias de París, para buscar una unidad *natural* e *invariable*, estableció que la *unidad de longitud* sería el *metro* (del griego, *metrón* = *me-*

dida), e igual a la *diezmillosésima* parte del cuarto del meridiano terrestre, calculado del polo al ecueador.

Después de diversas mediciones se dedujo que el cuarto del meridiano medía 5.130.740 *toesas* (*), y la diezmillonésima parte: 0,513074 *toesas* = 1 *metro*.

Mediciones hechas posteriormente, han demostrado que la Tierra no es un cuerpo regular y que todos sus meridianos son distintos, resultando, después de medir más exactamente y corregir algunos errores, que la diezmillonésima parte del cuarto del meridiano terrestre es algo mayor que el metro actual en *dos décimos* de milímetro. Para evitar inconvenientes se define el metro diciendo:

El metro legal es la longitud a 0° de temperatura de una barra de platino iridiado, depositada en París.

145. Ventajas del sistema métrico decimal. — Sobre los demás sistemas, el sistema métrico decimal tiene las siguientes ventajas:

1ª) Es *fijo*, pues las unidades están representadas por *patrones* invariables;

2ª) Es *uniforme*, pues es el usado en todos los países civilizados del mundo;

3ª) Es *simple*, pues las múltiples y submúltiplos de las diversas unidades aumentan y disminuyen de 10 en 10, siendo fácil la conversión, así como su lectura y escritura.

146. Unidades principales y secundarias. — Las unidades fundamentales y derivadas, (143) toman el

(*) La toesa, antigua unidad de longitud de Francia, mide 1,949 m.

nombre de *principales* para cada clase de magnitud, y *secundarias* los respectivos múltiplos y submúltiplos.

Los nombres de los múltiplos de las unidades principales se forman anteponiendo a la unidad principal los prefijos siguientes:

deca,	*que significa*		10;
hecto,	„	„	100;
kilo,	„	„	1000;
miria,	„	„	10000;
mego,	„	„	1000000

Los nombres de los submúltiplos se forman anteponiendo a la unidad principal los prefijos siguientes:

deci,	*que significa*		0,1
centi,	„	„	0,01
mili,	„	„	0,001
micro,	„	„	0,000001

147. Medidas de longitud. — Se llama *longitud* a lo que tienen de común los segmentos iguales.

La *unidad principal* es el *metro.* Las *unidades secundarias* son:

NOMBRE	NOMBRE	ABREVIATURA
Miriámetro	*diez mil metros*	*Mm*
Kilómetro	*mil metros*	*Km*
Hectómetro	*cien metros*	*Hm*
Decámetro	*diez metros*	*Dm*
METRO	UNIDAD PRINCIPAL	*m*
Decímetro	*décimo de metro*	*dm*
Centímetro	*centésimo de metro*	*cm*
Milímetro	*milésimo de metro*	*mm*

Las medidas *efectivas* son: *decímetro, doble decímetro, metro, doble metro, decámetro* y *doble decámetro.*

148. Numeración. — COROLARIO. — *Cada unidad de longitud es diez veces mayor que la inmediata inferior.*

De aquí se deduce que la lectura y escritura de un número concreto de metros es igual a la lectura y escritura de un número cualquiera.

149. Medidas de superficie. — Se llama *superficie* a lo que tienen de común las figuras equivalentes.

La *unidad principal* es el *metro cuadrado* o área de un cuadrado de un metro de lado.

Las *unidades secundarias* son:

NOMBRE	VALOR		ABREVIATURA
Miriámetro cuadrado	100000000	*metros cuadrados*	Mm^2
Kilómetro cuadrado	1000000		Km^2
Hectómetro cuadrado	10000		Hm^2
Decámetro cuadrado	100		Dm^2
METRO CUADRADO	UNIDAD PRINCIPAL		m^2
Decímetro cuadrado	0,01	*de metro cuadrado*	dm^2
Centímetro cuadrado	0,0001		cm^2
Milímetro cuadrado	0,000001		mm^2

Todas estas medidas son *teóricas;* ninguna es *efectiva.*

150. Numeración. — COROLARIO. — *Cada unidad de superficie es cien veces mayor que la inmediata inferior.*

En efecto, sea *ABCD* (Fig. 2) un cuadrado de un metro de lado. Si dividimos el lado *AB* en 10 partes igua-

les, cada una representará *1 dm.*, y trazando por cada punto paralelas a *AB*, tendremos 10 rectángulos de *1 m* de largo y *1 dm.* de ancho. Dividiendo ahora el lado *AB* en 10 partes iguales, cada una será *1 dm.* y si trazamos por los puntos de división paralelas a *AD*, resultará, en la faja *ABEF* 10 cuadrados de 1 dm. de lado, es decir: 10 dm^2. Como hay 10 fajas iguales, en todas habrá 100 dm^2, es decir, que un metro cuadrado es 100 veces mayor que la unidad inmediata inferior. De igual manera se probaría que cualquier otra unidad equivale a 100 unidades del orden inmediato inferior.

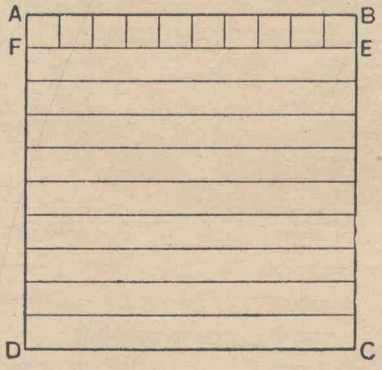


Fig 2

151. Medidas agrarias. — Sirven para avaluar la superficie de los campos, bosques, etc. La *unidad principal* es el *área* (a), que vale 100 m^2. Las *secundarias* son: la *hectárea* (Ha), que vale 10.000 m^2; la *centiárea* (ca), que vale 1 m^2.

152. Medidas de volumen. — Se llama *volumen* a lo que tienen de común los cuerpos equivalentes.

La *unidad principal* es el *metro cúbico*, o volumen de un cubo de un metro de arista.

Las *unidades secundarias* son:

NOMBRE	VALOR		ABREVIATURA
Miriámetro cúbico	1000000000000	*metros cúbicos*	Mm^3
Kilómetro cúbico	1000000000		Km^3
Hectómetro cúbico	1000000		Hm^3
Decámetro cúbico	1000		Dm^3
METRO CÚBICO	UNIDAD PRINCIPAL		m^3
Decímetro cúbico	0,001	*de metro cúbico*	dm^3
Centímetro cúbico	0,000001		cm^3
Milímetro cúbico	0,000000001		mm^3

Todas estas medidas son *teóricas*.

153. Numeración. — COROLARIO. — *Cada unidad de volumen es mil veces mayor que la inmediata inferior.*

Sea *AF*, (Fig. 3) un cubo de un metro de arista. Dividiendo la arista *AD* en 10 partes iguales y trazando por los puntos de división planos paralelos a la base, tendremos 10 capas iguales. Dividiendo la arista *DC* y la *CF* en 10 partes iguales cada una y trazando por los puntos de *CD* paralelas a *CF*, y por los puntos de división de *CF* paralelas a *CD*,

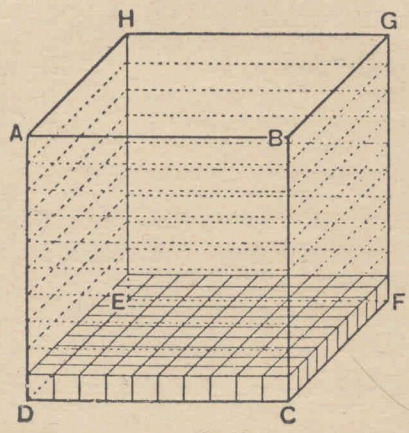


Fig. 3

obtendremos 100 cubos iguales de 1 dm^3, es decir, cada capa en que hemos dividido el cubo consta de 100 dm^3, y como hay 10 capas iguales, en todas habrá 1000 dm^3, luego el metro cúbico es 1000 veces mayor que 1 dm^3. De igual manera se probaría con cualquier otra unidad.

154. Medidas de capacidad. — Se llama *capacidad* a lo que tienen de común los cuerpos de igual volumen.

La *unidad principal* es el *litro*, que es el volumen de un decímetro cúbico.

Las *unidades secundarias* son:

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
Kilólitro	*mil litros*	*Kl*
Hectólitro	*cien litros*	*Hl*
Decálitro	*diez litros*	*Dl*
LITRO	UNIDAD PRINCIPAL	*l*
Decílitro	*décimo de litro*	*dl*
Centílitro	*centésimo de litro*	*cl*
Milímetro	*milésimo de litro*	*ml*

Para la medida de los líquidos se construyen estas unidades en cilindros de metal cuya altura es doble del diámetro; para los áridos se construyen en cilindros de madera cuya altura es igual al diámetro.

155. Medidas de peso. — Se llama *peso* a lo que tienen de común los cuerpos de igual masa. La *unidad principal* es el *gramo*, que es el peso en el vacío de un centímetro cúbico de agua pura a 4º de temperatura.

Las *unidades secundarias* son:

NOMBRE	VALOR	ABREVIATURA
Kilógramo	*mil gramos*	*Kg*
Hectógramo	*cien gramos*	*Hg*
Decágramo	*diez gramos*	*Dg*
GRAMO	UNIDAD PRINCIPAL	*g*
Decígramo	*décimo de gramo*	*dg*
Centígramo	*centésimo de gramo*	*cg*
Milígramo	*milésimo de gramo*	*mg*

Todas estas unidades son efectivas. Tomando como unidad práctica el *Kilógramo*, se tienen estos múltiplos: *Quintal métrico (Qm)*, que vale 100 *Kg*, y la *Tonelada métrica (Tm)*, que vale 1000 *Kg*.

156. Correspondencia entre las unidades de volumen, de capacidad y de peso. — Recordando las definiciones de las unidades de *volumen*, *capacidad* y de *peso*, y suponiendo que las medidas de volumen estén llenas de *agua pura*, se tienen estas correspondencias:

$$1\ m^3 = 1\ Kl \ldots\ldots\ 1\ Tm$$
$$1\ dm^3 = 1\ l \ldots\ldots\ 1\ Kg$$
$$1\ cm^3 = 1\ ml \ldots\ldots\ 1\ g$$

157. Peso específico. — El peso de un decímetro cúbico (metro cúbico, centímetro cúbico) en kilógramos (toneladas, gramos), de un cuerpo o sustancia, se llama *peso específico* o *densidad* de dicho cuerpo.

De manera que si D es el peso de un decímetro cúbico de una sustancia, el peso P de un volumen de V decímetros cúbicos es:

$$P = V.D \qquad (1)$$

es decir: *El peso P de un cuerpo es igual a su volumen V expresando en dm^3 (m^3, cm^3) por su densidad D expresada en Kg (Tm, g).*

De la expresión (1) se deduce que:

$$V = \frac{P}{D} \text{ , y que: } D = \frac{P}{V}$$

Ejemplos:

I) *Hallar el peso de 12 dm^3 (12 litros) de nafta, sabiendo que su peso específico es de 0,833.*

Se tiene: $P = V.D$

$$P = 12 \times 0{,}833 = 9{,}996 \text{ Kg.}$$

II) *Hallar el volumen de un bloc de granito que pesa 7856 Kg., sabiendo que el peso específico del granito es, término medio, 2,7.*

Se tiene: $$V = \frac{P}{D}$$

$$V = \frac{7856}{2{,}7} = 2909{,}629 \text{ dm}^3$$

$$= 2{,}909 \ m^3$$

III) *El peso de 5 dm^3 de una sustancia es de 8,75 Kg.; hallar el peso específico de esa sustancia.*

Se tiene: $$D = \frac{P}{V}$$

$$D = \frac{8{,}75}{5} = 1{,}75$$

EJERCICIOS

Calcular x en las expresiones:

201. 31 Hm + 12 Dm + 4,2 Km = x m
R: $x = 7420$

202. 3 Dm + 5 m + 37 dm + 42 mm = x cm
R: $x = 3874{,}2$

203. 57 mm + 38 cm + 14 dm + 0,35 Dm = x m
R: $x = 5{,}337$

204. 25 cm + 17 Hm + 56 Dm + 0,03 Km = x Mm
R: $x = 0{,}025625$

205. 25 cm + 17 Hm + 56 Dm + 0,03 Km = x Mm
R: $x = 600.700$

206. 5 Km^2 + 48 m^2 + 342 cm^2 = x Dm^2
R: $x = 50.000{,}480342$

207. 75 dm^2 + 48 mm^2 + 5 cm^2 + 3 Dm^2 = x m^2
R: $x = 300{,}750548$

208. 5 m^3 + 357 cm^3 + 4384 mm^3 = x dm^3
R: $x = 5.000{,}361384$

209. 583 mm^3 + 2 dm^3 + 0,002 m^3 = x cm^3
R: $x = 4.000{,}583$

210. 4 dm^3 + 72 cm^3 + 0,435 dm^3 = x mm^3
R: $x = 4.507.000$

211. 3 Kl + 5 Dl + 12 Hl = x l
R: $x = 4.250$

212. 4536 l + 45 Dl + 3482 cl = x Hl
R: $x = 90{,}7082$

213. 3,051 l + 438 cl + 745 ml = x dl
R: $x = 81{,}75$

214. 0,3 Tm. + 3,4 Qm + 4,7 Kg + 8456 Kg = x Tm
R: $x = 9{,}1007$

215. 2,5 Kg + 3 g + 5 Qm = x Kg
R: $x = 502{,}503$

216. 305 cg + 58 mg + 4 Hg = x g
R: $x = 403{,}108$

217. Hallar el peso de 35 cm^3 de hierro; D = 7,8
R: 273 g.

218. Calcular el volumen de 2 Kg de mercurio; D = 13,6
R: 147 cm^3

219. Hallar el peso de 12 litros de alcohol; D = 0,79
R: 9,48 Kg.

220. ¿Qué volumen ocupan 487 gr. de plata? D = 10,5
R: 46,38 cm^3

CAPITULO XVI

PROGRAMA XVI. — Razones y proporciones numéricas. — Definiciones. Proporción continua. Teorema fundamental de las proporciones. Recíproco. Caso particular en que la proporción es continua. Cálculo de un extremo o de un medio desconocido en una proporción ordinaria o contínua.

Las siete nuevas proporciones deducidas de una dada por inversión de las razones o por permutación de los extremos, de los medios y de las razones.

Nuevas proporciones deducidas de una dada por adición o sustracción de sus términos.

Serie de razones iguales: Propiedad fundamental.

Razones y proporciones

158. Razón. — Se llama *razón* de dos números, llamados *antecedente* y *consecuente*, al cociente exacto de dividir el uno por el otro.

Así, la razón de 15 y 5 es 3, pues $15 : 5 = 3$; 15 es el antecedente y 5 el consecuente.

159. Proporción. — Se llama *proporción* a la igualdad de dos razones. Los antecedentes y consecuentes de las dos razones son los antecedentes y consecuentes de la proporción.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \dfrac{20}{4} = 5 \\ \text{y } \dfrac{35}{7} = 5 \end{array}\right\} \text{ se obtiene la proporción: } \frac{20}{4} = \frac{35}{7}$$

En general, si dados los números a, b, c, y d es:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{b} = r \\ \dfrac{c}{d} = r \end{array}\right\} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad (1)$$

La proporción (1) se lee: a es a b como c es a d.

Los números a y c son los antecedentes; b y d son los consecuentes; los cuatro números son los *términos* de la proporción. El primero y último términos, *(a y d)*, se llaman *extremos;* el segundo y el tercero, *(b y c)*, se llaman *medios.* El último término, d, se llama *cuarto proporcional* entre los números a, b y c.

También suele escribirse la proporción (1) así:

$$a : b :: c : d$$

notación que está en desuso (*).

160. Proporción contínua. — Se llama *proporción contínua* a aquella en que los medios son iguales.

Ejemplos: $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$; $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

En una proporción contínua, el medio b se llama *medio proporcional* o *medio geométrico,* y el extremo c se llama *tercero proporcional* entre a y b.

161. Teorema Fundamental. — *En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

$H \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \end{cases}$ $\qquad T)\ a \cdot d = b \cdot c$

Se tiene: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

y multiplicando ambos miembros por bd:

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$$

(*) Las palabras **razón** y **proporción** son de **Euclides.** La notación a : b :: c : d se debe a **Oughtred,** de donde derivan los nombres de **medios** y **extremos.**

y simplificando: $ad = bc$

Ejemplo: En la proporción $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ se tiene:

$$8 \times 5 = 4 \times 10$$

162. TEOREMA RECIPROCO. — *Si el producto de dos números es igual al de otros dos, con los cuatro números se puede formar una proporción, siendo extremos los dos factores de un producto, y medios los dos factores del otro producto.*

H) $ad = bc$ $\qquad T \left\{ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right.$

Se tiene: $ad = bc$

y dividiendo ambos miembros por bd:

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$$

y simplificando: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ejemplo: Si $3 \times 6 = 2 \times 9$, se tiene la proporción:

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

162. COROLARIOS DEL TEOREMA FUNDAMENTAL. — I. *En una proporción contínua el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio proporcional.*

En la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

se tiene que: $ac = b^2$

Ejemplo: En la proporción $\frac{3}{9} = \frac{9}{27}$ se tiene:

$$3 \times 27 = 9^2$$

164. Cálculo de un término desconocido en una proporción. — Corolario II — *Un extremo de una proporción es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.*

En la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

se tiene: $ad = bc$

y dividiendo por d ambos miembros:

$$a = \frac{bc}{d}$$

Análogamente: $$d = \frac{bc}{a}$$

Ejemplo: Calcular x en la proporción $\frac{12}{5} = \frac{8}{x}$

Se tiene: $$x = \frac{5 \times 8}{12} = 3{,}33$$

165. Corolario III. — *Un medio de una proporción es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio.*

En la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

se tiene: $ad = bc$

y dividiendo por c ambos miembros:

$$b = \frac{ad}{c}$$

Análogamente: $$c = \frac{ad}{b}$$

Ejemplo: Calcular x en la proporción $\frac{6}{8} = \frac{x}{3}$

Se tiene: $x = \frac{6 \times 3}{8} = 2{,}25$

165. Corolario IV. — *En una proporción contínua el medio proporcional es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.*

En la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

se tiene: $b^2 = ac$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros:

$$b = \sqrt{ac}$$

Ejemplo: Calcular x en la proporción $\frac{8}{x} = \frac{x}{2}$

Se tiene: $x = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$

167. Corolario V. — *En una proporción se pueden cambiar los medios o los extremos entre sí.*

En la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se tiene: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, o bien: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

pues en ambos es: $ad = bc$

Cambiar los medios o los extremos de una proporción es *alternar* la proporción.

168. Corolario VI. — *En una proporción se puede cambiar cada antecedente con su propio consecuente.*

En la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Se tiene: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

pues se verifica la igualdad: $ad = bc$.

Cambiar antecedente con consecuente en una proporción es *invertir* la proporción.

169. Las siete proporciones deducidas de otra. — Sea la proporción:

1ª $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

2ª $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, *obtenida cambiando los medios en la 1ª;*

3ª $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, „ *invirtiendo la 1ª;*

4ª $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, „ *invirtiendo la 2ª;*

5ª $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$, „ *cambiando los medios en la 3ª;*

6ª $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$, „ *cambiando los medios en la 4ª;*

7ª $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, „ *invirtiendo la 6ª;*

8ª $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, „ *cambiando los medios en la 7ª;*

En cada una de esas ocho proporciones se verifica la propiedad fundamental:

$$ad = bc$$

Algunas propiedades de las proporciones

170. Teorema. — *En toda proporción la suma del antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente, como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

$$H\left\{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right. \qquad T\left\{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\right.$$

Se tiene: $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

y sumando 1 a ambos miembros:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

y efectuando la suma:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \qquad (1)$$

171. Teorema. — *En toda proporción la resta del antecedente y consecuente de la primera razón es a su consecuente, como la resta del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

$$H\left\{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right. \qquad T\left\{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\right.$$

Se tiene: $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

y restando 1 a ambos miembros:

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

y efectuando la resta:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \qquad (2)$$

172. Corolario. — De (1) y (2) se obtiene cambiando los medios:

$$\left.\begin{array}{l}\text{de (1):}\quad \dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{b}{d}\\ \text{de (2):}\quad \dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{b}{d}\end{array}\right\}\ \therefore\ \frac{a+c}{c+d}=\frac{c-b}{c-d}=\frac{b}{d}$$

expresión que puede traducirse al lenguaje vulgar.

173. Serie de razones iguales. — Si tres o más razones son tales que la primera es igual a la segunda, ésta igual a una tercera, etc., se dice que las razones dadas constituyen una *serie de razones iguales.*

Ejemplo: $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{m}{n}$$

174. Teorema fundamental. — *En una serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes, como un antecedente es a su propio consecuente.*

$$H\left\{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{m}{n}\right.$$

$$T\left\{\frac{a+c+e+m}{b+d+f+n}=\frac{m}{n}\right.$$

En las dos primeras razones: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

por el corolario (172) se tiene

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$$

o bien: $$\frac{a+c}{b+d}=\frac{e}{f}$$

y por el mismo corolario:

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{e}{f}$$

o bien:
$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{m}{n}$$

y por el mismo corolario:

$$\frac{a+c+e+m}{b+d+f+n}=\frac{m}{n} \qquad (1)$$

175. Proporción armónica. — (*) Cuatro números a, b, c y d forman una *proporción armónica*, cuando están ligados por la relación:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{d} \qquad (1)$$

176. Valor de b en una proporción armónica. — De (1) se tiene:

$$(a-b)d=(c-d)a$$

y efectuando:

$$ad-bd=ac-ad$$

sumando ad:

$$ad+ad-bd=ac$$

sumando bd:

$$2ad=ac+bd$$

restando ac:

$$2ad-ac=bd$$

factoreando a:

$$a(2d-c)=bd$$

dividiendo por d:

$$b=\frac{a(2d-c)}{d} \qquad (2)$$

177. Media armónica. — Si en la expresión (2) suponemos que $b=c=m$, resulta:

$$m=\frac{a(2d-m)}{d}$$

y multiplicando por d y efectuando:

$$md=2ad-am$$

sumando am:

$$md+am=2ad$$

factoreando m:

$$m(a+d)=2ad$$

(*) El nombre de proporción armónica deriva de sus aplicaciones en la teoría de los tonos musicales.

dividiendo por $a + d$:

$$m = \frac{2ad}{a+d}$$

El valor m es la *media armónica* entre a y d.

178. Proporción anarmónica. — Cuatro números a, b, c y d forman una *proporción anarmónica*, cuando están ligados por relación:

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{d}{a}$$

EJERCICIOS

Calcular el valor de x en las siguientes proporciones:

221. $\frac{12}{15} = \frac{28}{x}$ R. $x = 35$.

222. $\frac{6}{9} = \frac{x}{21}$ „ $x = 14$

223. $\frac{x}{85} = \frac{10}{17}$ „ $x = 50$

224. $\frac{24}{x} = \frac{15}{40}$ „ $x = 64$

225. $\frac{18}{94} = \frac{2}{x}$ „ $x = 10{,}44$

226. $\frac{x}{15} = \frac{10}{21}$ „ $x = 7{,}14$

227. $\frac{15}{5} = \frac{x}{75}$ „ $x = 225$

228. $\frac{21}{x} = \frac{100}{10}$ „ $x = 2{,}1$

229. $\frac{5}{x} = \frac{x}{180}$ „ $x = 30$

230. $\frac{4}{x} = \frac{x}{36}$ „ $x = 12$

231. $\frac{12}{x} = \frac{x}{27}$ „ $x = 18$

232. $\frac{27}{x} = \frac{x}{3}$ „ $x = 9$

233 $\frac{36}{x} = \frac{x}{16}$ „ $x = 24$

234. $\frac{3+x}{x} = \frac{14}{8}$ „ $x = 4$

235 $\frac{8-x}{x} = \frac{1}{3}$ „ $x = 6$

236. $\frac{12}{9} = \frac{x}{7-x}$ „ $x = 4$

237. $\frac{6}{14} = \frac{x}{x+4}$ „ $x = 3$

238. La suma de los cuatro antecedentes de una serie de razones iguales es 15 y la de los consecuentes es 45. Calcular los antecedentes sabiendo que los consecuentes son 9, 15, 18 y 3.

R: 3, 5, 6 y 1.

239. Hallar el valor de la media armónica entre 5 y 3.

R: 3,75

240. Idem, ídem, entre 10 y 12. „ 10,9

241. Idem, ídem, entre 3 y 9 „ 4,5

CAPITULO XVII

PROGRAMA XVII. — **Magnitudes proporcinales.** — Definición y ejemplos. Si dos magnitudes son proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número le corresponde el producto de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número. Si dos magnitudes son proporcionales, al cociente de una cantidad de una de ellas por un número le corresponde el cociente de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.

Magnitudes inversamente proporcionales. Definición y ejemplos. Si dos magnitudes son inversamente proporcionales al producto de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde el cociente de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número y recíprocamente.

Magnitud proporcional a varias otras. Definición y ejemplos.

Magnitudes proporcionales

179. Magnitudes directamente proporcionales. — Dos magnitudes son *directamente proporcionales,* cuando la razón de dos valores cualesquiera de una ellas es igual a la razón de los valores correspondientes de la otra.

Si las magnitudes son **A** y **B**, *y A* y *A'* son dos cantidades de **A**, y *B* y *B'* son dos cantidades correspondientes de **B**, se dice que **A** y **B** son directamente proporcionales, cuando:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

Ejemplos: Son magnitudes proporcionales: el *precio* de una mercadería que se vende al kilógramo y su *peso;* el *precio* de una mercadería que se vende al metro y su *longitud;* el *salario* de un obrero y la *duración* del trabajo; el *espacio* recorrido por un móvil con movimiento

uniforme y el *tiempo* empleado; el *área* de un triángulo y su *altura;* el *volumen* de un cilindro y su *altura;* la *longitud* de una circunsferencia y su *diámetro;* los *ángulos* y *arcos* de una circunsferencia; etc.

En algunos casos la proporcionalidad es una convención establecida por la observación; tal el *interés* de un capital y el *tiempo* que se lo tiene en un negocio.

180. Teorema. — *Si dos magnitudes son proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde el producto de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.*

H { **A** y **B** *magnitudes proporcionales;* / *A y A', B y B' cantidades correspondientes.*

T) *A.n y A' cantidades correspondientes de B.n y B'.*

Por hipótesis se tiene, al ser **A** y **B** proporcionales:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

y multiplicando ambas razones por n:

$$\frac{A}{A'} \cdot n = \frac{B}{B'} \cdot n$$

o bien:

$$\frac{A \cdot n}{A'} = \frac{B \cdot n}{B'}$$

y si $A.n$ y A' forman una proporción con $B.n$ y B', por definición de magnitudes proporcionales, deben ser $A.n$ y A' cantidades correspondientes de $B.n$ y B'.

181. Teorema. — *Si dos magnitudes son proporcionales, al cociente de una cantidad de una de ellas por un número le corresponde el cociente de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.*

$H\begin{cases} \textbf{A} \text{ y } \textbf{B} \textit{ magnitudes proporcionales;} \\ A \textit{ y } A', B \textit{ y } B' \textit{ cantidades correspondientes.} \end{cases}$

$T\left\{\dfrac{A}{n} \textit{ y } A' \textit{ cantidades correspondientes de } \dfrac{B}{n} \textit{ y } B'.\right.$

Por hipótesis se tiene, al ser **A** y **B** proporcionales:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

y multiplicando ambas razones por: $\frac{1}{n}$:

$$\frac{A}{A'} \cdot \frac{1}{n} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{1}{n}$$

o bien:

$$\frac{\frac{A}{n}}{A'} = \frac{\frac{B}{n}}{B'}$$

y si $\frac{A}{n}$ y A' forman una proporción con $\frac{B}{n}$ y B', por definición de magnitudes proporcionales, deben ser $\frac{A}{n}$ y A' cantidades correspondientes de $\frac{B}{n}$ y B'.

182. Magnitudes inversamente proporcionales. — Dos magnitudes son *inversamente proporcionales,* cuando la razón de dos valores cualesquiera de una de ellas es igual a la inversa de la razón de los valores correspondientes de la otra.

Si las magnitudes son **A** y **B**, y A y A' son dos cantidades de **A**, y B y B' son dos cantidades correspondientes de **B**, se dice que **A** y **B** son inversamente proporcionales, cuando:

$$\frac{A}{A'} = \frac{1}{\frac{B}{B'}}, \text{ o bien: } \frac{A}{A'} = \frac{B'}{B}$$

Ejemplos: Son magnitudes inversamente proporcionales: el *tiempo* necesario para hacer un trabajo y el *número* de obreros necesarios; los *volúmenes* ocupados por un gas y las *presiones* que soporta, etc.

183. TEOREMA. — *Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde el cociente de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número y recíprocamente.*

H { **A** y **B** *magnitudes inversamente proporcionales;*
A *y* A', B *y* B' *cantidades correspondientes.*

$T)$ $A\,n$ y A' *cantidades correspondientes de* $\frac{B}{n}$ y B'.

Por hipótesis, al ser **A** y **B** inversamente proporcionales, se tiene:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B'}{B}$$

y multiplicando ambas razones por n:

$$\frac{A}{A'} \cdot n = \frac{B'}{B} \cdot n$$

o bien:

$$\frac{A \cdot n}{A'} = \frac{B' \cdot n}{B}$$

y dividiendo ambos términos del segundo miembro por n:

$$\frac{A \cdot n}{A'} = \frac{B'}{\frac{B}{n}}$$

y si $A.n$ y A' forman una proporción con $\frac{B}{n}$ y B', por definición de magnitudes inversamente proporcionales, deben ser $A.n$ y A' cantidades correspondiente de $\frac{B}{n}$ y B'.

184. Corolario. — *Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, al cociente de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde el producto de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.*

Hemos demostrado que si es:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B'}{B}$$

también es:

$$\frac{A \cdot n}{A'} = \frac{B'}{\frac{B}{n}} \ldots$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$\frac{B'}{n} = \frac{A \cdot n}{A'}$$

lo que prueba el enunciado del corolario.

185. Magnitud proporcional a varias otras. — Una magnitud es *directa o inversamente proporcionar a varias otras*, cuando es directa o inversamente proporcional con cada una de estas otras.

Si las magnitudes son **A**, **B**, **C** y **D**, diremos que:

1º) **A** es proporc. a **B**, **C** y **D**, cuando sea:

- **A** proporc. a **B**
- **A** „ „ **C**
- **A** „ „ **D**

2º) **A** es invers. proporc. a **B**, **C** y **D**, cuando sea:

- **A** inv. proporc. a **B**
- **A** „ „ „ **C**
- **A** „ „ „ **D**

Ejemplo: El *interés* que produce un capital es directamente proporcional al valor del *capital* y al *tiempo* de imposición.

CAPITULO XVIII

PROGRAMA XVIII. — **Regla de tres simple y compuesta.** — Regla de tres simple su objeto. Resolución de problemas de regla de tres simple, con número enteros, fraccionarios o decimales, por el método de reducción a la unidad y por proporciones.

Regla de tres compuesta: su objeto. Regla de tres compuesta directa, inversa o mixta. Resolución de problemas con números enteros, fraccionarios o decimales, por el método de reducción a la unidad y por proporciones.

Regla de tres simple y compuesta

186. Reglas de tres. — Se llama *regla de tres* al procedimiento aritmético para resolver los problemas que dependen de una o varias proporciones.

Si el problema se resuelve con una proporción, la regla de tres es *simple*, y *compuesta* cuando depende de varias proporciones.

La regla de tres es *directa*, cuando las magnitudes que intervienen en el problema son *directamente proporcionales;* es *inversa*, cuando las magnitudes son *inversamente proporcionales.*

187. Regla de tres simple. — Si **A** y **B** son dos magnitudes directamente (inversamente) proporcionales y A y B son dos cantidades correspondientes y queremos encontrar el valor x de **B** que corresponde a la cantidad A' de **A**, tendremos:

A *proporc.* **B**: $\dfrac{A'}{A} = \dfrac{B}{x} \quad \therefore \quad x = B \cdot \dfrac{A'}{A}$

A *inv. prop.* **B**. $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{x}{B} \quad \therefore \quad x = B \cdot \dfrac{A}{A'}$

Luego: *La incógnita de una regla de tres simple directa (inversa) es igual al producto del valor conocido de la*

misma magnitud que ella por la razón del segundo (primer) valor de la otra magnitud al primero (segundo).

EJEMPLOS:

1º) *Si 12 m. de tela han costado 72 $, ¿cuánto costarán 8 m. de la misma tela?*

Solución

Las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales, luego:

$$\frac{12\,m}{8\,m} = \frac{72\,\$}{x\,\$} \quad \therefore \quad x\,\$ = 72\,\$ \,.\, \frac{8\,m}{12\,m} = 48\,\$$$

Los 8 m. de tela cuestan 48 $.

2º) *Si 9 obreros hacen una obra en 20 días, ¿cuántos días tardarán 12 obreros?*

Solución

Las magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales, luego:

$$\frac{9\,ob.}{12\,ob.} = \frac{x\,d}{20\,d} \quad \therefore \quad x\,d = 20\,d \,.\, \frac{9\,ob.}{12\,ob.} = 15\,d.$$

Los 12 obreros tardarán 15 días.

188. Regla de tres compuesta. — Si **M, A, B, C** y **D** son varias magnitudes, y suponemos que **M** es directamente (inversamente) proporcional a **A** y **B**, e inversamente (directamente) proporcional a **C** y **D**, y A y A', B y B', C y C', D y D' son las respectivas cantidades correspondientes y queremos calcular el valor x de **M** que corresponde a la cantidad M, tendremos, suponiendo constantes las demás cantidades:

M *proporc* **A** $\quad \dfrac{M}{x_1} = \dfrac{A'}{A} \;\therefore\; x_1 = \dfrac{A'}{A} \cdot M \qquad (1)$

M *proporc.* **B** $\quad \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{B}{B'} \;\therefore\; x_2 = \dfrac{B'}{B} \cdot x_1 \qquad (2)$

M inv. proporc. **C**: $\quad \dfrac{x_2}{x_3} = \dfrac{C'}{C} \;\therefore\; x_3 = \dfrac{C}{C'} \cdot x_2 \qquad (3)$

M inv. proporc. **D**: $\quad \dfrac{x_3}{x} = \dfrac{D'}{D} \;\therefore\; x = \dfrac{D}{D'} \cdot x_3 \qquad (4)$

Multiplicando ordenadamente las igualdades (1), (2), (3) y (4), por la propiedad uniforme del producto, resulta:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x = \frac{A'}{A} \cdot M \cdot \frac{B'}{B} \cdot x_1 \cdot \frac{C'}{C} \cdot x_2 \cdot \frac{D}{D'} \cdot x_3$$

y dividiendo ambos miembros por x_1, x_2 y x_3, queda:

$$x = M \cdot \frac{A'}{A} \cdot \frac{B'}{B} \cdot \frac{C}{C'} \cdot \frac{D}{D'}$$

Luego: *La incognita de una regla de tres compuesta se obtiene así:*

1º) *Si la regla es* **directa**, *se multiplica el valor conocido de la misma magnitud que x por las razones de los segundos valores de las otras magnitudes a los primeros;*

2º) *Si la regal es* **inversa**, *se multiplica el valor conocido de la misma magnitud x por las razones de los primeros valores de las otras magnitudes a los segundos;*

3º) *Si la regla es* **mixta**, *se multiplica el valor conocido de la misma magnitud que x por las razones de las magnitudes que son directa e inversamente proporcionales con la de la incógnita.*

Ejemplos:

1º) *Si una persona andando durante 3 días a razón de 5 horas diarias ha recorrido 40 Km, en 7 días a razón de 4 horas diarias, cuántos recorrerá?*

Solución

Las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales; la regla es directa:

3 d. 5 h. 40 Km
7 d. 4 h. x Km

luego: $x = 40\ Km \cdot \frac{4\,h}{5\,h} \cdot \frac{7\,d}{3\,d} = 74{,}666\ Km.$

En los 7 días recorrerá 74,666 Km.

2º) *Si 45 obreros necesitan 8 días para levantar una pared de 40 m. de largo, 3 m. de alto y 0,45 m. de espesor, ¿cuántos días necesitarán 20 obreros para levantar una pared de 54 m. de largo, 2,5 m. de alto y 0,30 de espesor?*

Solución

Entre las magnitudes que intervienen, unas son directa y otras inversamente proporcionales:

15 ob. 40 m. largo 3 m. alto 0,45 m. esp. 8 días
20 „ 54 „ „ 2,5 „ „ 0,30 „ „ x „

se tiene:

$$x = 8d \cdot \frac{0{,}30\,m}{0{,}45\,m} \cdot \frac{2{,}5\,m}{3\,m} \cdot \frac{54\,m}{40\,m} \cdot \frac{15\,ob.}{20\,ob.} = 4{,}5\ días$$

Los 20 obreros necesitarán 4 días y medio.

189. Método de reducción a la unidad. — Por medio de este método se halla el valor de la magnitud homogénea con x que corresponde al valor de la unidad de la otra magnitud, hallando el valor buscado multiplicando o dividiendo, según el caso.

Ejemplos: Sean los mismos problemas anteriores.

1º) *Si 12 m. de tela han costado 72 $, ¿cuánto costarán 8 m. de la misma tela?*

Solución

$$\begin{array}{lll} 12\ m & \textit{cuestan} & 72\ \$ \\ 1\ m & \textit{cuesta} & \frac{72}{12}\ \$ \\ y\ \ 8\ m & \textit{cuestan} & \frac{72}{12}\ \$ \times 8 = 48\ \$ \end{array}$$

2º) *Si 9 obreros hacen una obra en 20 días, ¿cuántos días tardarán 12 obreros?*

Solución

$$\begin{array}{lll} 9 & \textit{obreros hacen la obra en} & 20\ \textit{días} \\ 1 & \textit{,,\ \ ,,\ \ ,,\ \ ,,\ \ ,,} & 22\,d \times 9 \\ y\ \ 12 & \textit{,,\ \ ,,\ \ ,,\ \ ,,\ \ ,,} & \frac{20\,d \times 9}{12} = 15\ \textit{días} \end{array}$$

3º) *Si 15 obreros necesitan 8 días para levantar una pared de 40 m. de larmo, 3 m de alto y 0,45 m. de espesor, ¿cuántos días necesitarán 20 obreros para levantar una pared de 54 m de largo, 2,5 m. de alto y 0,30 m. de espesor?*

Solución

15 ob 40 m largo 3 m alto 0,45 esp. 8 *días*.

1 „ 40 „ „ 3 „ 0,45 „ $8d \times 15$

1 „ 1 „ „ 3 „ 0,45 „ $\frac{8d \times 15}{40}$

1 „ 1 „ „ 1 „ 0,45 „ $\frac{8d \times 15}{40 \times 3}$

1 „ 1 „ „ 1 „ 1 „ $\frac{8d \times 15}{40 \times 3 \times 0{,}45}$

1 „ 54 „ „ 1 „ 1 „ $\frac{8d \times 15 \times 54}{40 \times 3 \times 0{,}45}$

1 „ 54 „ „ 2,5 „ 1 „ $\frac{8d \times 15 \times 54 \times 2{,}5}{40 \times 3 \times 0{,}45}$

1 „ 54 „ „ 2,5 „ 0,30 „ $\frac{8d \times 15 \times 54 \times 2{,}5 \times 0{,}30}{40 \times 3 \times 0{,}45}$

20 „ 54 „ „ 2,5 „ 0,30 „ $\frac{8d \times 15 \times 54 \times 2{,}5 \times 0{,}30}{40 \times 3 \times 0{,}45 \times 20}$

y simplificando y efectuando las operaciones indicadas, resulta de cociente 4,5 días.

EJERCICIOS

242. 34 metros de barra de acero son necesarias para fabricar 100 piezas. ¿Cuántos metros se necesitan para fabricar 912 piezas?

R: 310 m.

243. Un taller con 16 máquinas produce un cierto número de piezas en 10 horas. ¿Cuántas máquinas se necesitarán para hacer la misma producción trabajando 8 horas diarias?

R: 20 máquinas

244. 12 m. de tela cuestan 42 $. ¿Cuántos metros se comprarán con 25 $?

R: 7,14 m.

245. Si una bomba que da 4 litros de agua por segundo llena un depósito en 20 minutos, ¿cuánto tiempo necesitará una bomba que da 12 litros por segundo?

R: $6\frac{2}{3}$ *minutos.*

246 Si un hombre hace un viaje en 15 días a razón de 10 horas diarias, ¿en cuánto tiempo lo hará viajando 8 horas al día?

R: $18\frac{3}{4}$ *días.*

247. Si 12 hombres cavan una zanja de 40 m. de largo en 24 días trabajando 10 horas al día. ¿Cuántos metros de zanja cavarán 16 hombres en 18 días trabajando 9 horas al día?

R: 36 m.

248. Un obrero que construye 40 bulones en un día de 10 horas de trabajo, gana 7.20 $ por día. ¿Cuánto ganará por día un obrero que construye 48 bulones por jornada de 8 horas?

R: 6,91 $.

249. Para hacer un trabajo de 500 m. 60 obreros trabajando 10 horas diarias, emplean 10 días. ¿Cuántos días emplearán 25 obreros trabajando 8 horas para hacer 150 m. del mismo trabajo?

R: 9 días.

CAPITULO XIX

PROGRAMA XIX. — Cuestiones de Aritmética Comercial. — Interés simple: deducción de las fórmulas y aplicación de las mismas.
Descuento comercial: fórmulas y aplicaciones.
Repartición proporcional. Regla de compañía.
Regla de aligación: Problemas directo e inverso.

Cuestiones de Aritmética Comercial
Regla de Interés

190. Definiciones. — Se llama *interés de un capital* a la ganancia que éste produce prestado bajo ciertas condiciones.

Se llama *capital regulador* al que se toma como base para fijar el interés; corrientemente el capital regulador consta de 100 unidades monetarias, 100 $ en nuestro país.

El *tanto por ciento* es el interés producido por 100 $ (capital regulador) en la *unidad de tiempo,* que generalmente es el *año comercial,* compuesto de 360 días. A veces se llama al tanto por ciento *tasa del interés* o *razón.* El tanto por ciento se representa así: %.

El interés es *simple,* cuando el producido por el capital no se suma al capital; es *compuesto,* cuando el producido por el capital se suma a éste, produciendo, a su vez, intereses en las sucesivas unidades de tiempo. El interés es *contínuo,* cuando la conversión del interés en capital se verifica en períodos de tiempo infinitamente pequeños.

Se llama *Regla de Interés* al procedimiento que permite resolver los problemas en que intervengan un *capital, tanto por ciento, interés y tiempo.*

191. Convenciones. — Suponiendo constante el tanto por ciento, en el *Comercio* y en la *Banca* se aceptan estas *convenciones,* fundamentos de la *Regla de Interés*:

I. *Los intereses producidos por dos capitales iguales son proporcionales a los tiempos;*

II. *Los intereses producidos en tiempos iguales por capitales distintos son proporcionales a los capitales.*

192. TEOREMA. — *Los intereses producidos por dos capitales distintos impuestos durante tiempos distintos, son proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos respectivos.*

$$H\begin{cases} C = capital;\ r = tanto\ por\ ciento;\ t = tiempo; \\ I = interés. \\ C' = capital;\ r' = tanto\ por\ ciento;\ t' = tiempo; \\ I' = interés. \end{cases}$$

$$T\left\{\frac{I}{I'} = \frac{C \cdot t}{C' \cdot t'}\right.$$

Si el capital S produce en el tiempo t el interés I, en el tiempo t' producirá un interés i, tal, que por la *convención I* anterior:

$$\frac{I}{i} = \frac{t}{t'} \qquad (1)$$

Y si en el mismo tiempo los capitales C y C' producen, respectivamente, los intereses i e I' por la *convención II* anterior:

$$\frac{i}{I'} = \frac{C}{C'} \qquad (2)$$

Multiplicando ordenadamente las igualdades (1) y (2):

$$\frac{I}{i} \cdot \frac{i}{I'} = \frac{t}{t'} \cdot \frac{C}{C'}$$

simplificando las cantidades iguales i, y efectuando:

$$\frac{I}{I'} = \frac{C \,.\, t}{C' \,.\, t'}$$

193. Deducción de Fórmulas. — Si en la expresión:

$$\frac{I}{I'} = \frac{C \,.\, t}{C' \,.\, t'}$$

suponemos que C' es un capital de 100 \$, y que I' es el interés r producido por 100 \$ durante un tiempo t' de *un año*, se obtiene:

$$\frac{I}{r} = \frac{C \,.\, t}{100 \,.\, 1}$$

deduciendo de esta proporción las siguientes fórmulas:

$$\boxed{I = \frac{C \,.\, r \,.\, t}{100}} \qquad \text{(I)}$$

luego: *El interés es igual al producto del capital, el tiempo y la razón, dividido por 100.*

$$\boxed{r = \frac{I \,.\, 100}{C \,.\, t}} \qquad \text{(II)}$$

luego: *La razón (o tanto por ciento) es igual al producto del interés por 100, dividido por el producto del capital por el tiempo.*

$$C \,.\, t = \frac{I \,.\, 100}{r} \quad \therefore \quad \boxed{C = \frac{I \,.\, 100}{r \,.\, t}} \qquad \text{(III)}$$

luego: *El capital es igual al producto del interés por 100, dividido por el producto de la razón por el tiempo.*

$$C \cdot t = \frac{I \cdot 100}{r} \quad \therefore \quad \boxed{t = \frac{I \cdot 100}{C \cdot r}} \qquad \text{(IV)}$$

luego: *El tiempo es igual al producto del interés por 100, dividido por el producto del capital por la razón.*

Si el año se expresa en 12 meses, 52 semanas, o 360 días, las fórmulas anteriores se convierten en éstas:

$$t = \textit{meses} \begin{cases} I = \dfrac{C \cdot t \cdot r}{1200} \; ; \; r = \dfrac{I \cdot 1200}{C \cdot t} \\ C = \dfrac{I \cdot 1200}{r \cdot t} \; ; \; t = \dfrac{I \cdot 1200}{C \cdot r} \end{cases}$$

$$t = \textit{semanas} \begin{cases} I = \dfrac{C \cdot t \cdot r}{5200} \; ; \; r = \dfrac{I \cdot 5200}{C \cdot t} \\ C = \dfrac{I \cdot 5200}{r \cdot t} \; ; \; t = \dfrac{I \cdot 5200}{C \cdot r} \end{cases}$$

$$t = \textit{días} \begin{cases} I = \dfrac{C \cdot t \cdot r}{36000} \; ; \; r = \dfrac{I.36000}{C \cdot t} \\ C = \dfrac{I.36000}{r \cdot t} \; ; \; t = \dfrac{I.36000}{C \cdot r} \end{cases}$$

194. Aplicaciones. — Problema I. — *¿Qué interés producen 640 $ al 5 % durante 3 años y medio?*

Solución

$$I = \frac{C \cdot t \cdot r}{100} = \frac{640 \times 3{,}5 \times 5}{100} = 112 \text{ \$}$$

Problema II. — *Si 1230 $ producen en 7 meses un interés de 43,05 $, ¿a qué tanto por ciento estuvo impuesto?*

Solución

$$r = \frac{I \,.\, 1200}{C \,.\, t} = \frac{43{,}05 \times 1200}{1230 \times 30} = 6\ \%$$

Problema III. — *Calcular el capital necesario para obtener, al 7 %, una renta de 200 $ cada 4 semanas.*

Solución

$$C = \frac{I \,.\, 5200}{r \,.\, t} = \frac{200 \times 5200}{7 \times 4} = 37142{,}85\ \$$$

Problema IV — *Un capital de 75000 $ produce, al 6,5 %, un interés de 140 $; calcular el tiempo de imposición.*

Solución

$$t = \frac{I.\,36000}{C \times r} = \frac{140 \times 36000}{75000 \times 6{,}5} = 11\ \textit{días}$$

Regla de descuento

195. Definiciones. — Se llama *descuento* a la cantidad que hay que restar de un documento de crédito (letra, cheque, pagaré, etc.) que se paga antes de su vencimiento.

El descuento puede ser *comercial* o *matemático.*

El *descuento comercial,* comunmente usado en el comercio, es el interés del *valor nominal,* o cantidad que figura en el documento, al tanto por ciento dado y por el tiempo que falte para su vencimiento.

El *descuento matemático* o *racional,* es la diferencia entre el *valor nominal* y el *valor efectivo,* que es la cantidad que realmente se paga.

Se justifica el descuento por el hecho de que el *tomador* de un documento, al entregar una cierta cantidad, pierde los intereses que le producirían hasta su vencimiento, obteniéndolos el *tenedor*. Ahora bien; el tomador no entrega todo el valor nominal, así que al hacer el descuento cobra intereses de una cantidad que no entregó, cosa que no sucede cuando se emplea el descuento matemático (*).

196. Deducción de las Fórmulas del Descuento Comercial. — Por definición, el descuento comercial es el interés de la cantidad que se paga antes de su vencimiento, de manera que en la *Fórmula del Interés*:

$$I = \frac{C.t.r.}{100}$$

se tiene que I es el descuento Dc, y C es valor nominal Vn del capital, resultando así esta *Fórmula del Descuento;*

$$\boxed{Dc = \frac{Vn.t.r}{100}} \qquad (I)$$

Reemplazando los valores I y C por Dc y Vn, respectivamente en las fórmulas (II) a (IV) de (193), resultan:

$$r = \frac{Dc.100}{Vn.t} \text{ (II)}\ ;\ Vn = \frac{Dc.100}{r.t} \text{ (III)}\ ;\ t = \frac{Dc.100}{Vn.r} \text{ (IV)}$$

Como el año tiene 12 meses, o 52 semanas, o 360 días, las fórmulas anteriores se pueden convertir en otras análogas a las del párrafo (193).

(*) El descuento matemático se estudia en 3er. año. Véase nuestra Algebra, 1ª parte, pág. 194.

197. Aplicaciones. — PROBLEMA I. — *Calcular el descuento que debe hacerse a un pagaré de 350 $ que se descuenta al 6 %, 2 meses antes de su vencimiento.*

Solución

$$D_c = \frac{V_n \cdot t \cdot r}{1200} = \frac{350 \times 2 \times 6}{1200} = 3{,}50\ \$$$

PROBLEMA II. — *A un pagaré de 2700 $ se le ha hecho un descuento de 21 $ por haberse pagado 35 días antes de su vencimiento; calcular la tasa de descuento.*

Solución

$$r = \frac{D_c \cdot 36000}{V_n \cdot t} = \frac{21 \times 36000}{2700 \times 35} = 8\ \%$$

Repartición Proporcional

198. Números proporcionales. — Dos conjuntos de números que se corresponden uno a uno son *proporcionales,* cuando las razones de los números que se corresponden, son iguales.

Dados los conjuntos:

$$6\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ 15\ ;\ 1{,}8$$

$$2\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 5\ ;\ 0{,}6$$

se dice que los primeros son proporcionales a los segundos (o viceversa), pues:

$$\frac{6}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{5} = \frac{1{,}8}{0{,}6} = 3$$

En general, los números a, b, c son, respectivamente, proporcionales a los números a', b', c', siempre que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c'}{c} = \textit{constante.}$$

Dividir un número en partes proporcionales a otros dados, es descomponerlo en tantos sumandos como números nos den, y proporcionales a éstos.

Ejemplo: Descomponer el número 20 en partes proporcionales a 6 y 4, consiste en descomponer a 20 en dos partes, 12 y 8, tales que:

$$\frac{12}{6} = \frac{8}{4} = 2$$

199. Problema general. — *Dividir el número N en partes proporcionales a los números a, b y c.*

Si x, y, z, son las partes buscadas, se debe tener:

$$x + y + z = N$$

y además:
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

y por la propiedad fundamental de las series de razones iguales:

$$\frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

o bien:
$$\frac{N}{a+b+c} = \frac{N}{S} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

de donde se deduce, igualado el primer miembro con cada uno de los demás miembros:

$$\frac{N}{S}=\frac{x}{a} \quad \therefore \quad x=\frac{N}{S}\,.\,a$$

$$\frac{N}{S}=\frac{y}{b} \quad \therefore \quad y=\frac{N}{S}\,.\,b$$

$$\frac{N}{S}=\frac{z}{c} \quad \therefore \quad z=\frac{N}{S}\,.\,c$$

luego: *Para dividir un número en partes proporcionales a otros varios, se lo divide por la suma de éstos, y el cociente se multiplica por cada uno de ellos.*

200. Observación. — La precedente demostración es válida cuando *a*, *b* y *c*, son números fraccionarios. En tal caso, lo práctico es reducir las fracciones a común denominador y repartir proporcionalmente a los numeradores.

201. Aplicaciones. — Problema I — *Dividir el número 68 en partes proporcionales a los números 2, 3, 5 y 7.*

Solución

$$2+3+5+7=17$$

Por la regla anterior:

$$m=\frac{68}{17}\,.\,2=\ 8$$

$$n=\frac{68}{17}\,.\,3=12$$

$$p=\frac{68}{17}\,.\,5=30$$

$$q=\frac{68}{17}\,.\,7=28$$

PROBLEMA II. — *Dividir el número 175 en partes proporcionales a* $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$ y $\frac{3}{4}$.

Solución

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{3}{4}=\frac{6+20+9}{12}=\frac{35}{12}$$

Por la regla anterior:

$$x=\frac{175}{35}\cdot 6=30$$

$$y=\frac{175}{35}\cdot 20=100$$

$$z=\frac{175}{35}\cdot 9=45$$

Regla de Compañía

202. Definiciones. — Se llama *compañía*, o sociedad *comercial* o *mercantil*, al conjunto de varias personas que aportan sus capitales a fin de explotar un negocio con el objeto de obtener un *lucro* o *utilidad*. Cada uno de los componentes de la sociedad se llama *socio*, llamándose *imposición* el capital de cada socio.

Dividendo general es la utilidad total que corresponde al capital social; *dividendo parcial* es la utilidad que corresponde a cada imposición.

La *Regla de Compañía* tiene por objeto hallar la ganancia o pérdida que corresponde a cada socio. Es *simple* si los capitales han estado impuestos el mismo tiempo; es *compuesta*, si los capitales han estado impuestos tiempos diferentes.

203. CONVENCIONES. — I. *Las ganancias o pérdidas de dos capitales iguales impuestos durante tiempos distintos, son proporcionales a los tiempos.*

II. *Las ganancias o pérdidas de dos capitales distintos impuestos durante tiempos iguales, son proporcionales a los capitales.*

204. TEOREMA. — *Las ganancias o pérdidas producidas por dos capitales impuestos durante tiempos distintos, son proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos respectivos.*

$$T\begin{cases} C = \text{capital; } t = \text{tiempo; } g = \text{ganancia o pérdida} \\ C' = \text{capital; } t' = \text{tiempo; } g' = \text{ganancia o pérdida} \end{cases}$$

$$T)\ \frac{g}{g'} = \frac{C \cdot t}{C' \cdot t'}$$

Si el capital C produce en el tiempo t la ganancia g, en el tiempo t' producirá una ganancia G, tal, que por la *convención I* anterior:

$$\frac{g}{G} = \frac{t}{t'} \qquad (1)$$

y si en el mismo tiempo los capitales C y C' producen, respectivamente, las ganancias G y g', por la *convención II* anterior:

$$\frac{G}{g'} = \frac{C}{C'} \qquad (2)$$

Multiplicando ordenadamente las igualdades (1) y (2):

$$\frac{g}{G} \cdot \frac{G}{g'} = \frac{t}{t'} \cdot \frac{C}{C'}$$

o bien:

$$\frac{g}{g'} = \frac{C \cdot t}{C' \cdot t'}$$

205. Casos de la Regla de Compañía. — Se presentan sólo estos casos:

1º) *Capitales iguales y tiempos iguales;*

2º) *Capitales iguales y tiempos desiguales;*

3º) *Capitales desiguales y tiempos iguales;*

4) *Capitales y tiempos desiguales.*

1º) Capitales y tiempos iguales. — Como cada uno de los socios ha tenido impuesto el mismo capital durante el mismo tiempo, cada uno tendrá la misma ganancia o pérdida. Luego: *la ganancia o pérdida se divide por el número de socios.*

2º) Capitales iguales y tiempos desiguales. — En este caso por la *convención I, la ganancia o pérdida se reparte proporcionalmente a los tiempos.*

3º) Capitales desiguales y tiempos iguales. — De acuerdo a la *convención II, la ganancia o pérdida se reparte proporcionalmente a los capitales.*

4º) Capitales y tiempos desiguales. — Según el teorema anterior (204), *la ganancia o pérdida se reparte proporcionalmente a los productos de los capitales por los tiempos respectivos.*

206. Aplicaciones. — Problema I. — *Tres personas forman una sociedad. Cada una aporta el mismo capital; A tuvo su aporte durante 2 años; B durante 3 años y C durante 4 años. Si la ganancia fué de 36000 $, calcular cuánto corresponde a cada socio.*

Solución

Por el 2º caso se tiene:

$$2 + 3 + 4 = 9$$

$$A = \frac{36000}{9} \cdot 2 = 8000\,\$$$

$$B = \frac{36000}{9} \cdot 3 = 12000\,\$$$

$$C = \frac{36000}{9} \cdot 4 = 16000\,\$$$

PROBLEMA II. — *A, B y C jugaron un billete de lotería, que les costó 17 $, en esta forma: A jugó 4 $; B 7 $, y C, 6 $. Les tocó un premio de 8500 $; calcular cuánto corresponde a cada socio.*

Solución

Por el 3er. caso se tiene:

$$A = \frac{8500}{17} \cdot 4 = 2000\,\$$$

$$B = \frac{8500}{17} \cdot 7 = 3500\,\$$$

$$C = \frac{8500}{17} \cdot 6 = 3000\,\$$$

PROBLEMA III. — *Tres socios, A, B y C, constituyen una sociedad; A aportó 2400 $, durante 5 meses; B, 3500 $, durante 3 meses, y C, 3800 $, durante 4 meses. El negocio produjo una pérdida de 5955 $. Calcula la pérdida de cada socio.*

Solución

Por el 4º caso se tiene:

La pérdida de A es prop. a: $2400 \times 5 = 14000$

„ „ „ *B* „ „ „ $3500 \times 3 = 10500$

„ „ „ *C* „ „ „ $3800 \times 4 = 15200$

$$14000 + 10500 + 15200 = 39700$$

pérdida de A: $\frac{5955}{39700} \cdot 14000 = 2100\ \$$

pérdida de B: $\frac{5955}{39700} \cdot 10500 = 1575\ \$$

pérdida de C: $\frac{5955}{39700} \cdot 15200 = 2280\ \$$

207. Observación. — *El problema último, correspondiente al 4º caso de la Regla de Compañía, es completamente teórico.* En efecto, no se concibe, ni lo acepta el *Código de Comercio*, que una persona que entre a formar parte de una sociedad, participe de las ganancias o pérdidas que esa sociedad hubiera tenido *antes* de formar parte de ella. Tampoco es admisible que un socio que se retire de la sociedad espere a que los demás socios la liquiden, y tenga que participar en las pérdidas o ganancias que *después* de su salida se hubieren producido.

Regla de Aligación

208. Definiciones. — Se llama *Regla de Aligación* al procedimiento que permite resolver los problemas referentes a las mezclas.

Mezcla es la unión íntima de varias sustancias, conservando cada una de ellas su naturaleza.

Ejemplo: la reunión de maíz y trigo.

Aleación o *aligación* es la unión íntima de varios metales fundidos.

Ejemplo: el *bronce,* formado por *cobre* y *estaño* fundidos.

Precio de una sustancia es el valor, en pesos $\frac{m}{n}$, de la unidad de medida de esa sustancia. *Precio medio* es el precio de la unidad de la mezcla.

209. Casos de la Regla de Aligación. — Se presentan estos casos: 1º) *Dadas las cantidades a mezclar y sus precios, hallar el precio medio de la mezcla;* 2º) *Dado el precio medio y el de las cantidades, calcular éstas.*

1º) DADAS LAS CANTIDADES A MEZCLAR Y SUS PRECIOS, HALLAR EL PRECIO MEDIO DE LA MEZCLA. — Si las cantidades a mezclar son C. C' y C'' y sus precios respectivos p, p' y p'' y pm el precio medio, como el valor de cada sustancia es igual al producto de su medida por el valor de la unidad, se tiene:

$$(C + C' + C'')\ pm = C.p + C'.p' + C''.p''$$

de donde: $$pm = \frac{C.p + C'.p' + C''.p''}{C + C' + C''}$$

luego: *El precio medio es igual al cociente de dividir la suma de los productos de cada cantidad por su precio, por la suma de las cantidades.*

Ejemplo: PROBLEMA. — *Si se mezclan 8 litros de vino de 0,40 $ el litro, con 12 l. de vino de 0,70 $, con 6 l. 1,20 $, calcular el precio medio de la mezcla.*

Solución

Por la regla anterior se tiene:

$$pm = \frac{8 \times 0{,}4 + 12 \times 0{,}7 + 6 \times 1{,}2}{8 + 12 + 6} = 0{,}72 \text{ \$}$$

2º) Dado el precio medio y el de las cantidades, calcular éstas. — Sean pm el precio medio y p y p' los precio de las cantidades, y C y C' las cantidades incógnitas.

Supongamos que sea $p > p'$; entonces

$$p > pm > p'$$

Al vender una unidad de C al precio pm se pierde $p - pm$, y en las C unidades se pierde $(p - pm)\,C$; al vender una unidad de C' al precio pm se gana $pm - p'$, y en las C' *unidades se gana* $(pm - p')\,C'$, pero lo que se pierde es igual a lo que se gana, luego:

$$(p - pm)\,C = (pm - p')\,C'$$

o bien (162)

$$\frac{C}{C'} = \frac{pm - p'}{p - pm}$$

luego: *Las cantidades a mezclar son inversamente proporcionales a las diferencias entre sus precios y el precio medio.*

Nótese que el problema es indeterminado, pues lo único que se determina es la proporción en que deben mezclarse las cantidades.

Ejemplo: Problema II. — *Cuántos kilógramos de café de 2,80 \$ el kilógramo hay que mezclar con café* de 4 \$ el kilógramo, para que resulten 18 kg. a 3,50 \$ *el kg.*

Solución

Según la fórmula:

$$\frac{C}{C'} = \frac{pm - p'}{p - pm}$$

se tiene: $\frac{C}{C'} = \frac{3{,}50 - 2{,}80}{4 - 3{,}50} = \frac{0{,}7}{0{,}5} = \frac{7}{5}$

Prácticamente la operación y las restas se disponen así:

3,50	2,80	0,5
	4,00	0,7

Las cantidades deben estar en la razón 7 es a 5, pero como conocemos su suma, que es 18, todo se reduce a dividir 18 en partes proporcionales a 7 y a 5, es decir:

$\frac{18}{7+5} \cdot 7 = 10{,}5$ *kg. de café de* 4,00 *$;*

$\frac{18}{7+5} \cdot 5 = 7{,}5$ „ „ „ „ 2,80 *$.*

210. Si las sustancias que se van a mezclar son más de dos, el problema se reduce al anterior, comparando cada dos que comprendan al precio medio.

Ejemplo: Problema III. — *Se desea obtener 51 Hl. de trigo a un precio de 18 $ el Hl., mezclando trigo de 12 $ el Hl, de 20 $, de 15 $ y de 24 $ Calcular que cantidad de cada clase hay que mezclar.*

Solución

18	12	2
	20	6
18	15	6
	24	3

Repartiendo 51 Hl. proporcionalmente a los números 2, 6, 6 y 3:

$$2 + 6 + 6 + 3 = 17$$

$$\frac{51}{17} \cdot 2 = 6 \text{ } \textit{Hl. del de } 12 \text{ } \$ \textit{ el Hl,}$$

$$\frac{51}{17} \cdot 6 = 18 \text{ „ „ „ } 20 \text{ } \$ \text{ „ „}$$

$$\frac{51}{17} \cdot 6 = 18 \text{ „ „ „ } 15 \text{ } \$ \text{ „ „}$$

$$\frac{51}{17} \cdot 3 = 9 \text{ „ „ „ } 24 \text{ } \$ \text{ „ „}$$

211. Observaciones. — I. *Cuando son más de dos cantidades, el problema tiene tantas soluciones como maneras distintas haya para determinar las relaciones.*

II. *Si el precio medio es mayor (menor) que una componente, y menor (mayor) que las demás, el problema ofrece características especiales que no es del caso estudiar.*

III. *Los problemas referentes a aleaciones se resuelven aplicando las mismas reglas que hemos estudiado.*

EJERCICIOS

Regla de Interés

250. ¿Qué interés producen 738 $ al 4 % durante 60 días?

R: 4,92 $.

251. ¿Que interés producen 400 $ al 5 % durante 2 años, 6 meses y 13 días?

R: 50,72 $.

252. Calcular el capital que produce un interés de 96 $ en 2 años al 4 %.

R: 1200 $.

253. Idem, ídem 124,30 $ en 2 meses y 20 días al $3\frac{2}{3}$ %.

R: 15255 $.

254. ¿A qué tanto por ciento estuvo impuesto un capital de 2875 $ si en 4 años, 7 meses y 6 días produjo 529 $?

R: 4 %.

255. Calcular el tiempo de imposición de 5628,40 $ si al $3\frac{4}{5}$ % produjo 1211,90 $ de interés.

R: 5 años, 7 meses, 29 días.

Regla de Descuento

256. Tengo un pagaré por 484,50 $ con 40 días de plazo ¿Cuánto recibiré por él ahora si el tipo del descuento es 6 %?

R: 481,27 $.

257. El 31 de Diciembre deben pagarse 5000 $. El documento se descuenta el 17 de Octubre al 4 %; calcular el descuento.

R: 41,67 $.

258. ¿Cuál es el capital que descontado 4 meses antes del vencimiento al 6 % produjo un descuento de 68 $?

R: 3400 $.

259. Al 8 % se descontó un pagaré de 538 $, obteniendo 7,65 de descuento; calcular el tiempo.

R: 64 días.

Repartición proporcional

260 Dividir el número 20 en partes proporcionales a los números 21, 15 y 24.

R: 7; 5 y 8.

261 Dividir el número 42 en partes proporcionales a 5, 7 y 9.

R: 10; 14 y 18.

262. Repartir 2660 $ en partes proporcionales a 8, 12 y 20.

R: 520 $; 780 $; 1300 $.

263. Un comerciante, al quebrar, deja un capital de 3750 $ el cual ha de dividirse entre cuatro acreedores. Al 1º, debía 2310 $; al 2º, 3000 $; al 3º, 7500 $, y al 4º, 5730 $. Calcular lo que le toca a cada uno.

R: Al 1º, 467,23 $; al 2º, 606,80 $; al 3º, 1516,99 $; al 4º, 1158,98 $.

Regla de Compañía

264. Tres personas formaron una sociedad; la 1ª aportó 500 $; la 2ª, 600 $, y la 3ª, 700 $. La ganancia fué de 1620 $. Calcular la ganancia de cada socio.

R: Al 1º, 450 $; al 2º, 540 $; al 3º, 630 $.

265. A, B y C se asocian aportando 8000 $, 1100 $ y 1300 $, respectivamente, y perdieron 3520 $. ¿Cuánto perdió cada uno?

R: A, 2707,69 $; B, 372,31; C, 440 $.

266. Cuatro personas formaron una sociedad, aportando cada una 2800 $; la 1ª, estuvo en la sociedad 2 años; la 2ª, 10 meses; la 3ª, año y medio, y la 4ª, 20 meses. Si la utilidad fué de 9000 $, ¿cuánto toca a cada uno?

R: Al 1º, 3000 $; al 2º, 1250 $; al 3º, 2250 $; al 4º, 2500 $.

267 Si dos personas forman una sociedad aportando la 1ª 4800 $ durante 5 meses, y la 2ª 3500 $ durante 9 meses, y la utilidad es de 7104 $, ¿cuánto corresponderá a cada uno?

R: Al 1º, 3072 $; al 2º, 4032 $.

REGLA DE ALIGACIÓN

268. Si se mezclan 35 kg. de café de 2,50 $ el kg., con 20 kg. de 2,80 $, con 28 kg. de $ 3, ¿cuánto costarán 3 kg. y medio de la mezcla?

R: 9,59 $.

269. Se mezclan 17 litros de vino de 1,20 $, con 8 litros de 0,90 $, con 5 litros de agua. ¿Cuánto vale el litro de la mezcla?

R: 0,92 $.

270. Se mezclan café de 5,50 $ el kilógramo con café de 3,20 $, y se desea que la mezcla valga 3,40 $ el kilógramo. ¿Cuánto hay que mezclar de cada clase para obtener 92 kg. de la mezcla?

R: 8 kg. del 1º y 84 kg. del 2º.

271. ¿Cuántos hectólitros de trigo de 20 $, de 22 $, de 25 $ y de 30 $ hay que mezclar, para que 26 Hl. de la mezcla valgan 624 $?

R: 12 Hl. de 20 $; 2 Hl. de 22 $;
4 Hl. de 25 $; 8 Hl. de 30 $.

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

ÍNDICE

CAPITULO I — Pág

NUMEROS RACIONALES

Creación de los números racionales 9
Número fraccionario puro 10
Números racionales 12
Interpretaciones de los números racionales 15
Igualdad de los números racionales 16
Simplificación de fracciones 21
Reducción a común denominador 22
Desigualdad de números racionales 25
Ejercicios 27

CAPITULO II

SUMA DE NUMEROS RACIONALES

Definiciones 29
Propiedades de la suma 31
Número mixto 35
Reducción de un número mixto a fracción 35
Fracciones propias e impropias 37
Suma de números mixtos 38
Ejercicios 40

CAPITULO III

RESTA DE NUMEROS RACIONALES

Definiciones 42
Casos de resta de números racionales 43
Propiedad uniforme 46
Ejercicios 48

CAPITULO IV

Pág.

MULTIPLICACION DE NUMEROS RACIONALES

Definición 49
Propiedades de la multiplicación 49
Números racionales inversos 54
Ejercicios 55

CAPITULO V

DIVISION DE NUMEROS RACIONALES

Definición 56
Regla práctica para hallar el cociente 57
Casos particulares 57
Reducción de una fracción a otra que tenga un denominador dado 59
Propiedades de la división 61
Ejercicios 64

CAPITULO VI

POTENCIACION Y RADICACION DE NUMEROS RACIONALES

Potencias de exponente natural 66
Potencias de exponente negativo 69
Ejemplos de verificación 69
Extensión de la regla para dividir potencias 72
Radicación de números racionales 73
Raíz cuadrada 74
Raíz cuadrada con menor error de un enésimo 76
Ejercicios 78

CAPITULO VII

FRACCIONES DECIMALES

Definición 80
Relaciones entre las unidades decimales de los diversos órdenes 80

Pág.

Descomposición de fracciones decimales propias e impropias en unidades de diversos órdenes 81
División de un número entero por 10, 100, 1000 84
División de un número decimal por 10, 100, 1000..... 85
Igualdad y desigualdad de números decimales 86
Ejercicios 87

CAPITULO VIII

SUMA DE NUMEROS DECIMALES

Deducción de la regla práctica 88
Ejercicios 89

CAPITULO IX

RESTA DE NUMEROS DECIMALES

Deducción de la regla práctica 90
Ejercicios 90

CAPITULO X

MULTIPLICACION DE NUMEROS DECIMALES

Multiplicación de un decimal por un entero 91
Multiplicación de dos decimales 92
Ejercicios 92

CAPITULO XI

DIVISION DE NUMEROS DECIMALES

Cociente de dos números enteros con menor error que 0,1, 0,01, 0,001, ... 93
División de un decimal por un entero 95
División de un decimal por otro 95
Ejercicios 96

CAPITULO XII

Pág.

CONVERSION DE FRACCIONES ORDINARIAS EN DECIMALES Y VICEVERSA

Condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria sea reducible a decimal 97
Concepto de límite 99
Fracciones y decimales inexactas periódicas puras y mixtas 101
Reducción de una fracción ordinaria a decimal 102
Reducción de fracciones decimales a ordinarias 102
Ejercicios 107

CAPITULO XIII

EL NUMERO IRRACIONAL

Raíz cuadrada aproximada de un número que no es cuadrado perfecto con menor error que 0,1 0,01 0,001 109
Noción de número irracional 110
Números reales 112
Ejercicios 112

CAPITULO XIV

MAGNITUDES

Concepto de igualdad 113
Cantidades 114
Cantidades homogéneas 115
Magnitudes 115
Cantidades comparables 116
Comparación de dos cantidades homogéneas 117
Producto de una cantidad por un número 117
Cociente de una cantidad por un número 118
Razón de dos cantidades 119
Números concretos 120
Medidas de tiempo: sistema cronométrico 121
Ejercicios 122

CAPITULO XV

Pág.

SISTEMA METRICO DECIMAL

Sistemas de medidas 123
Reseña histórica 123
El metro 124
Ventajas del sistema métrico decimal 125
Medidas de longitud 126
„ „ superficie 127
„ „ agrarias 128
„ „ volumen 128
„ „ capacidad 130
„ „ peso 130
Peso específico 131
Ejercicios 133

CAPITULO XVI

RAZONES Y PROPORCIONES

Definiciones 134
Teorema fundamental 135
Teorema recíproco 136
Corolarios de Teorema fundamental 136
Las siete proporciones deducidas de otra 139
Algunas propiedades de las proporciones 139
Serie de razones iguales 141
Proporción armónica 142
Proporción anarmónica 143
Ejercicios 143

CAPITULO XVII

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitudes directamente proporcionales 145
Magnitudes inversamente proporcionales 147
Magnitud proporcional a varias otras 149

CAPITULO XVIII

Pág.

REGLA DE TRES SIMPLE Y COMPUESTA

Definiciones 151
Regla de tres simple 151
Regla de tres compuesta 152
Método de reducción a la unidad 155
Ejercicios 157

CAPITULO XIX

CUESTIONES DE ARITMETICA COMERCIAL

Regla de interés 158
Deducción de fórmulas 160
Aplicaciones 161
Regla de descuento 162
Deducción de fórmulas 163
Aplicaciones 164
Repartición proporcional 164
Números proporcionales 164
Problema general 165
Aplicaciones 166
Regla de compañía 167
Casos de la regla de compañía 169
Aplicaciones 169
Regla de aligación 171
Casos de la regla de aligación 172
Ejercicios 176

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

ARITMETICA

Obras de Enseñanza Secundaria Publicadas por la Casa

ANGUITA (F.). — **Elementos de Algebra Práctica** Un volumen de 160 páginas con numerosos ejercicios y problemas, encuadernado ..... $ 2.50

ANGUITA, BOLLO y DAGNINO PASTORE. — **Aritmética**, para 1er. año de los Colegios Nacionales, un tomo encuadernado ..... „ 3.50

BOLLO, ANGUITA y DAGNINO PASTORE. — **Geometría**, para 2º año de los Colegios Nacionales, un tomo encuadernado ..... „ 2.50

DIAZ DE GUIJARRO (E.). — **Curso Teórico-Práctico de Prosodia y Ortografía** ..... „ 3.—

— **Texto de lectura del Curso Teórico-Práctico de Prosodia y Ortografía** ..... „ 1.50

LEGRAND (A.) et ROUSTAN (VITAL). — **Méthode rationnelle et practique pour l'enseignement du française:**

1er. año, un tomo encuadernado ..... „ 2.—

2º año, un tomo encuadernado ..... „ 2.—

3er. año, un tomo encuadernado ..... „ 2.—

4º año (Literatura), un tomo enc. ..... „ 3.—

— **Précis de Phonetique et de pronunciation de la langue française**, 1 folleto ..... „ 1.—

— **Les sécretes de la conjugaison**, 1 tomo enc. ... „ 2.50

PARENTE RICCIOTTI. — **Gramática de la lengua italiana.** Curso completo ..... „ 5.50

PERALTA (J. M.). — **Historias de las civilizaciones antiguas (Oriente, Grecia y Roma)**, 1 tomo enc. „ 4.—

POIRIER - LALANNE (G.). — **Curso de francés, primer año**, un tomo encuadernado ..... „ 2.—

PIZZURNO C. H. — **Lecciones de Historia Argentina.** Epoca colonial (1492-1810), 1 tomo enc. ..... „ 4.—

Resumen de historia de la edad media, moderna y contemporánea. Contesta punto por punto a los programas del 2º año, 1 tomo enc. ..... „ 3.—

Resumen de historia americana y argentina. Contesta punto por punto a los programas del 3er. año de los colegios nacionales, 1 tomo rústica „ 1.50

Resumen de la historia americana y argentina, 4º año „ 1.50

Imprenta López — Perú 666 - Bs. As.