TEXTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES
AJUSTADOS A LOS PROGRAMAS EN VIGOR

ALGEBRA

3er. AÑO DE ESTUDIOS SECUNDARIOS

POR

FELIPE ANGUITA
JOSE N. BOLLO
LORENZO DAGNINO PASTORE

TOMO III

(QUINTA EDICIÓN)

F. CRESPILLO, EDITOR
BOLIVAR 369
BUENOS AIRES

TEXTOS DE MATEMATICAS ELEMENTALES
AJUSTADOS A LOS PROGRAMAS EN VIGENCIA

ALGEBRA

3$^{er.}$ AÑO DE ESTUDIOS SECUNDARIOS

POR

FELIPE ANGUITA

Profesor Diplomado de Matemáticas y Cosmografía, Catedrático de los Colegios Nacionales "Mariano Moreno", "Bartolomé Mitre" y de la Escuela de Mecánica de la Armada.

JOSÉ N. BOLLO

Profesor Diplomado de Matemáticas y Física. — Rector y Profesor del Colegio Nacional "Mariano Moreno".

LORENZO DAGNINO PASTORE

Profesor Diplomado de Matemáticas y Cosmografía. — Ingeniero Civil. — Catedrático del Instituto Nacional del Profesorado Secundario y de los Colegios Nacionales "Mariano Moreno" y del Liceo de Señoritas. Profesor titular y Consejero de la Facultad de Ciencias Económicas. Profesor sustituto de la Facultad de Ciencias Exactas.

TOMO III

5a. EDICIÓN

F. CRESPILLO, EDITOR
BOLIVAR 369
BUENOS AIRES

OBRAS DE LOS MISMOS AUTORES

ARITMETICA	1ª Parte	(1er. Año)
ARITMETICA	2ª Parte	(2º Año)
ALGEBRA	1ª Parte	(3er. Año)
ALGEBRA	2ª Parte	(4º Año)
GEOMETRIA PLANA	1ª Parte	(1er. Año)
GEOMETRIA PLANA	2ª Parte	(2º Año)
GEOMETRIA PLANA	3ª Parte	(3er. Año)
GEOMETRIA DEL ESPACIO .	4ª Parte	(4º Año)

TRIGONOMETRIA RECTILINEA Y ESFERICA . . . . . (5º Año), por Felipe Anguita.

ALGEBRA

1a. PARTE

F. CRESPILLO EDITOR BUENOS AIRES

IMPRENTA LÓPEZ — PERÚ 666 — BUENOS AIRES

PROLOGO DE LA CUARTA EDICION

Agotada con singular éxito, lo que agradecemos, la tercera edición de nuestra Algebra 1ª parte, lanzamos la cuarta edición notablemente mejorada y aumentada en ejercicios y problemas, y con tal ordenación, variación y cantidad, que el resolverlos todos en clase constituye la mejor prueba del aprovechamiento del curso.

Hemos suprimido, a fin de economizar espacio, los resúmenes que habíamos colocado al principio de algunos capítulos, referentes a las propiedades de las operaciones con los números racionales, propiedades que puede consultarse con más provecho en nuestra Aritmética 2ª parte.

Como dijimos en la primera edición, "no pretendemos ser originales desarrollando temas conocidos, ni ser innovadores en métodos, demostraciones o criterios suficientemente divulgados. Desarrollamos un programa categórico y claro; nada más".

Los Autores.

CURSO DE ALGEBRA ELEMENTAL

3er AÑO

CAPITULO I

PROGRAMA I. — *Expresiones algebraicas.* Monomios y polinomios. Polinomios ordenados. Polinomios homogéneos. Valor numérico de las expresiones para valores enteros o fraccionarios, positivos o negativos, de las letras.

Expresiones algebraicas

1. Definición. — Se llama *expresión algebraica*, a todo conjunto de números entre los cuales se indiquen operaciones aritméticas.

Ejemplos : $a + b$; $\dfrac{5a^3 - b^2 + 4}{2 - a}$; $x^2 - \sqrt{c} - \log. b$

Una expresión algebraica es *entera*, cuando no tiene denominador literal, y *fraccionaria* en caso contrario.

Ejemplos

$3a^2 - m$; $\dfrac{2ab^3 + b}{5}$; $-\dfrac{1}{2}x$, son expresiones enteras.

$\dfrac{2}{a}$; $\dfrac{a + b - c}{m}$; $a^2 - 2a + \dfrac{c}{a}$, " " fraccionarias

2. Monomio.—Se llama *monomio* a todo conjunto de números entre los cuales se indiquen la multiplicación, división, potenciación, radicación o logaritmación.

Ejemplos: $\frac{3}{4}a^2b$; $\frac{5a}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{a}$; $a. \log. b$.

Un monomio también se llama *término*.

3. Coeficiente. — Se llama *coeficiente* de un monomio al factor numérico que entra en su composición.

Ejemplos: $\frac{1}{2}ab^3$, el coeficiente es $\frac{1}{2}$

$3a^2\sqrt{c}$, el coeficiente es 3

Cuando un monomio no tiene visible el coeficiente, queda entendido que es *uno*.

Ejemplo: $a^2b^3 = 1a^2b^3$, el coeficiente es 1.

4. Grado de un monomio. — El *grado de un monomio* es el número de factores literales que lo componen.

Ejemplos: $-2a^3b = -2aaab$, de 4º grado.

$\frac{1}{3}ax$, „ 2º „

$a^2b = aab$, „ 3er. „

$4a$, „ 1er. „

5. Monomios semejantes. — Varios monomios son *semejantes*, cuando la parte literal es la misma y cada letra tiene los mismos exponentes.

Ejemplos: ab^2; $-3ab^2$; $\frac{1}{2}ab^2$; $-\frac{3}{5}ab^2$.

$-3a\sqrt{c}$; $\frac{1}{3}a\sqrt{c}$; $-\frac{4}{3}a\sqrt{c}$;

6. Polinomio. — Un *polinomio* es un conjunto de monomios entre los cuales se indican operaciones de sumar o restar.

Ejemplo: $-a + \frac{1}{2}a^2b - \frac{a^3b^2}{5} + b^3$

El polinomio que tiene *tres* términos se llama *trinomio.*

Ejemplo: $a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c^2$

El polinomio que tiene dos términos se llama *binomio.*

Ejemplos: $a + b$; $5 - \frac{a}{2}$

7. Grado de un polinomio. — El *grado de un polinomio* es el mayor grado de sus diversos términos.

Ejemplo: $\underbrace{3ab}_{2^\circ} - \underbrace{4a^3b}_{4^\circ} + \underbrace{2a}_{1^\circ}$ es de 4º grado.

8. Polinomio homogéneo. — Si los términos de un polinomio son de igual grado, el polinomio es *homogéneo.*

$\frac{1}{4}a^3b + a^2b^2 - b^4$ es homogéneo de 4º grado.

9. Polinomio ordenado. — Un polinomio está *ordenado*, cuando sus términos están colocados según las potencias *crecientes* o *decrecientes* de una misma letra, llamada *ordenatriz.*

El polinomio

$$4a^5 - \frac{1}{3}a^4b + 5a^3b^2 + 2a^2b^3 - \frac{2}{5}ab^4 + b^5$$

está ordenado según las potencias decrecientes de a, y según las potencias crecientes de b.

Un polinomio es *completo,* cuando los exponentes de la letra ordenatriz son los números de la serie natural: *0, 1, 2, 3,* .....

Ejemplo: $5a^4 - a^3 + 3a^2 - 4a + 2$

Un polinomio es *incompleto,* cuando no es completo.

Ejemplo: $2a^5 - 4a^3 - 3a^2 + 7$

Cualquier polinomio incompleto, puede hacerse completo agregando los términos que faltan, pero con coeficiente cero. El polinomio último se puede completar así:

$$2a^5 + 0a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 0a + 7$$

10. Valor numérico. — Se llama *valor numérico* de una expresión algebraica, al número que se obtiene al dar valores particulares a cada una de las letras que la componen, y efectuar luego las operaciones indicadas.

Se halla el valor numérico de

$$\frac{a^2 + b^3 - ab^2\sqrt[3]{a} + ac^3}{ab - 3c}$$

siendo: $a = 8 \quad ; \quad b = -\frac{1}{2} \quad ; \quad c = -2.$

Reemplazando los valores, resulta:

$$\text{V. N.} = \frac{8^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 8.\left(-\frac{1}{2}\right)^2\sqrt[3]{8} + 8.(-2)^3}{8.\left(-\frac{1}{2}\right) - 3\,(-2)}$$

efectuando las potencias:

$$= \frac{64 - \frac{1}{8} - 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 + 8(-8)}{8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3(-2)}$$

efectuando los productos:

$$= \frac{64 - \frac{1}{8} - \frac{16}{4} - 64}{-\frac{8}{2} + 6} = \frac{64 - \frac{1}{8} - \frac{16}{4} - 64}{-\frac{8}{2} + 6} = + \frac{33}{16}$$

que es el valor numérico buscado.

EJERCICIOS

Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones siendo: $a = 3$; $b = 2$; $c = 1$.

1.	$3a + 2b - 5c$	R: 8.
2.	$5ab - 6c + 4$	„ 28.
3.	$3(a^2 - b^2) + 2ab^2$	„ 39.
4.	$2ab^3 - 3a^2b + abc^3$	„ -24.
5.	$a^3b^2 - 2a^2b^3 + 3a^2c$	„ -9.

ídem, ídem, siendo: $a = -2$; $b = -3$; $c = 4$.

6.	$a^2 - ab^3 + abc$	„ -26
7.	$3ab - 2ac + 3bc$	„ -2
8.	$\dfrac{4a + b - c}{2a - 3b - 2c}$	„ 5.
9.	$\dfrac{3a^2 - 2b^2 - 5c}{3ab + c^2}$	„ $-\dfrac{13}{17}$
10.	$\dfrac{(a^3 - b)c - 5b^2}{a + b - 2c}$	„ 5.

ídem, ídem, siendo: $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{2}{3}$; $c = -3$.

11.	$\dfrac{2a - 3b - 2c}{4a + b - c}$	„ $\dfrac{9}{5}$
12.	$\dfrac{2a^2 - b^2 + c}{3ab + c^2}$	„ $-\dfrac{53}{144}$
13.	$\dfrac{2a^2b^3 - 3ab^2 + abc}{6a^2b^2 - 4}$	„ $-\dfrac{49}{90}$

ídem, ídem, cuando sea: $x = -1$, $x = -2$.

14.	$5x^2 - 3x + 4$	„ 12 y 30.
15.	$3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x - 6$	„ -8 y 34.

CAPITULO II

PROGRAMA II. — *Suma algebraica.* Suma de monomios. Reducción de términos semejantes. Suma de polinomios. Ejercicios.

Suma algebraica

CASOS DE SUMA ALGEBRAICA	*I.-Suma de monomios*	a) *semejantes.*
		b) *no semejantes.*
	II.-Suma de monomios y polinomios.	
	III.-Suma de polinomios.	

11. Convención. — Hemos visto antes (*), que los signos $+$ y $-$ tienen dos significados, como signos de *operación* y de *dirección*.

Para lo sucesivo convendremos:

La suma de varios números racionales la indicaremos escribiendo los sumandos separados por sus respectivos signos.

Así: $\left(+\frac{1}{2}\right)+(-3)+\left(-\frac{3}{5}\right)+(+2)=\frac{1}{2}-3-\frac{3}{5}+2$

12. I.—Suma de monomios.

a) MONOMIOS SEMEJANTES. — Sea sumar:

$$(+2ab)+\left(-\frac{1}{2}ab\right)+(-3ab)$$

(*) Véase el Capítulo XIX de nuestra *Aritmética*, para 1er. Año.

Por la convención anterior, se tiene:

$$(+2ab)+\left(-\frac{1}{2}ab\right)+(-3ab)=2ab-\frac{1}{2}ab-3ab$$

sacando el factor común ab: $=\left(2-\frac{1}{2}-3\right)ab$

y efectuando las operaciones: $=-\frac{3}{2}ab.$

de donde se deduce la siguiente

Regla práctica. — *Para sumar monomios semejantes, se suman algebraicamente sus coeficientes y el resultado es el coeficiente de la parte literal común.*

La suma de monomios semejantes se llama también *reducción de términos semejantes.*

b) Monomios no semejantes. — Sea sumar:

$$\left(+\frac{1}{2}a\right)+\left(-\frac{1}{3}b\right)+(+3c)$$

Por la convención (11):

$$\left(+\frac{1}{2}a\right)+\left(-\frac{1}{3}b\right)+(+3c)=\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b+3c$$

Al no haber términos semejantes que reducir, está hallada la suma, luego:

Regla práctica. — *Para sumar monomios no semejantes, se forma con ellos un polinomio, dejando la suma indicada.*

13. II.—Suma de monomio y polinomio.—Sea sumar:

$$\left(-\frac{2}{3}b\right)+(3a+b-4c)$$

Por la propiedad asociativa de la suma, se tiene:

$$\left(-\frac{2}{3}b\right)+(3a+b-4c)=-\frac{2}{3}b+3a+b-4c$$

por la propiedad conmutativa:

$$=3a+b-\frac{2}{3}b-4c$$

por la propiedad asociativa:

$$=3a+\left(b-\frac{2}{3}b\right)-4c$$

y por el caso anterior·

$$=3a+\frac{1}{3}b-4c$$

de donde se deduce la siguiente

Regla práctica. — *Para sumar un monomio y un polinomio, se forma con ambos un solo polinomio, y luego se reducen los términos semejantes que hubiera.*

14. III.—Suma de polinomios.—Sea sumar:

$$\left(3a-\frac{1}{2}b\right)+\left(\frac{3}{4}b+2c\right)+\left(2a-4b-\frac{1}{3}c\right)$$

Por la propiedad asociativa de la suma:

$$\left(3a-\frac{1}{2}b\right)+\left(\frac{3}{4}b+2c\right)+\left(2a-4b-\frac{1}{3}c\right)=$$

$$=3a-\frac{1}{2}b+\frac{3}{4}b+2c+2a-4b-\frac{1}{3}c$$

por la propiedad conmutativa:

$$= 3a + 2a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b - 4b + 2c - \frac{1}{3}c$$

por la propiedad asociativa:

$$= (3a + 2a) + \left(-\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b - 4b\right) + \left(2c - \frac{1}{3}c\right)$$

reduciendo los términos semejantes, (12, *a*):

$$= 5a - \frac{15}{4}b + \frac{5}{3}c$$

de donde se deduce la siguiente

Regla práctica.—*Para sumar polinomios se forma con sus diversos términos un solo polinomio, y luego se reducen los términos semejantes que hubiera.*

15. Disposición práctica. — Cuando se tienen varios términos semejantes, para reducirlos, se disponen en columna los diversos términos semejantes, efectuando la reducción columna por columna.

Sea reducir los términos semejantes que haya en el polinomio:

$$4a - \frac{1}{2}b + 2c - 3a + 2b - 3c + \frac{1}{2}a - 4b$$

Colocando los términos semejantes en columna y sumándolos, resulta:

$$\begin{array}{rrrr} & +4a & -\frac{1}{2}b & +2c \\ + & -3a & +2b & -3c \\ & +\frac{1}{2}a & -4b & \\ \hline & +\frac{3}{2}a & -\frac{5}{2}b & -c \end{array}$$

Al sumar las columnas, se leen sólo los coeficientes.

EJERCICIOS

Sumar los siguientes monomios:

16. $3a;\ -5b;\ -6a;\ 2b;\ -7a;\ 5b$ R: $-10a+2b.$

17. $3ab;\ -2a;\ 5ab;\ \frac{3}{2}a;\ -5$ „ $8ab-\frac{1}{2}a-5$

18. $-\frac{3}{5}ab;\ -\frac{1}{10}ab;\ \cancel{0{,}5ab};\ \frac{6}{5}ab$ „ $ab.$

19. $\frac{3}{5}a;\ -\frac{2}{3}b;\ 6a;\ 3b;\ -7a$ „ $-\frac{2}{5}a+\frac{7}{3}b$

20. $\frac{4}{5}x;\ -\frac{2}{3}y;\ 4x;\ -2y;\ -\frac{4}{3}x;\ 3y$

R: $\frac{62}{3}x+\frac{1}{3}y$

Sumar los siguientes polinomios:

21. $a+b+2ab;\ a+b-2ab;\ a-b$ „ $3a+b.$

22. $3a-2b;\ 6b-8c;\ 3c-4a;\ 5a-3b+6c$

R: $4a+b+c$

23. $2a^2-3b;\ 5a-\frac{1}{2}b+3,\ 5a^2+\frac{3}{4}b-\frac{3}{4}$

R: $7a^2-\frac{11}{4}b+5a+\frac{9}{4}$

24. $5a-\frac{1}{2}b-3c;\ -8a+3b+\frac{1}{2}c;\ 7a-\frac{3}{4}b+\frac{5}{6}c$

R: $4a+\frac{7}{4}b-\frac{5}{3}c$

25. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y+\frac{2}{3}z,\ \frac{3}{4}x-\frac{1}{3}y+\frac{5}{8}z$

R: $\frac{5}{4}x-\frac{1}{12}y+\frac{31}{24}z$

CAPITULO III

PROGRAMA III. — *Resta algebraica.* Resta de monomios y polinomios. Ejercicios.

Resta algebraica

CASOS DE RESTA ALGEBRAICA	I.—*Resta de monomios*	a) *semejantes.*
		b) *no semejantes.*
	II.—*Resta de monomio y polinomio.*	
	III.—*Resta de polinomio y monomio.*	
	IV.—*Resta de polinomios.*	

16. I.—Resta de monomios.

a) MONOMIOS SEMEJANTES. — Sea efectuar:

$$(-5ab)-(-3ab)$$

Sabemos, (2), que los monomios son números, así como que para restar al minuendo se le suma el sustraendo cambiando de signo (*), luego:

$$(-5ab)-(-3ab)=(-5ab)+(+3ab)$$

y por (12): $= -5ab + 3ab$

o bien: $= -2ab$

b) MONOMIOS NO SEMEJANTES. — Sea efectuar:

$$(+3a)-(-6b)$$

(*) Véase nuestra *Aritmética* para 1er. año, pág. 178.

Procediendo como se ha dicho más arriba:

$$(+3a)-(-6b)=(+3a)+(+6b)$$

y por (12): $$=3a+6b$$

17 II.—Resta de monomio y polinomio.—Sea:

$$(+3c)-\left(+2a-3b+\frac{5}{2}c\right)$$

Procediendo de la manera ya dicha:

$$(+3c)-\left(+2a-3b+\frac{5}{2}c\right)=(+3c)+\left(-2a+3b-\frac{5}{2}c\right)$$

y por (13): $$=3c-2a+3b-\frac{5}{2}c$$

$$=-2a+3b-\frac{5}{2}c+3c$$

$$=-2a+3b+\left(-\frac{5}{2}c+3c\right)$$

y por último: $$=-2a+3b+\frac{1}{2}c$$

18. III.—Resta de polinomio y monomio.—Sea:

$$\left(+2a-\frac{1}{2}b+c\right)-(-2b)$$

Siendo los monomios y polinomios números, se tiene:

$$\left(+2a-\frac{1}{2}b+c\right)-(-2b)=\left(+2a-\frac{1}{2}b+c\right)+(+2b)$$

y por (13): $$=2a-\frac{1}{2}b+c+2b$$

$$=2a-\frac{1}{2}b+2b+c$$

$$= 2a + \left(-\frac{1}{2}b + 2b\right) + c$$

$$= 2a + \frac{3}{2}b + c$$

19. IV.—Resta de polinomios.—Efectuar:

$$(2a - 3b + c) - (2a - 4b + 5c)$$

Sumando el sustraendo cambiado de signo al minuendo:

$$(2a - 3b + c) - (2a - 4b + 5c) =$$

$$= (2a - 3b + c) + (-2a + 4b - 5c)$$

$$= 2a - 3b + c - 2a + 4b - 5c$$

y por (14): $= b - 4c$

De los ejercicios anteriores se deduce la siguiente:

Regla general.—*Para restar dos expresiones algebraicas, se suma al minuendo el sustraendo cambiado de signo y luego se reducen los términos semejantes que resulten.*

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes restas de monomios:

26. $(-3a)-(-2a)$ — R: $-a$
27. $(+2ab)-(-3ab)$ — „ $5ab$
28. $\left(-\frac{6}{5}m\right)-\left(+\frac{7}{8}m\right)$ — „ $-\frac{41}{24}m$
29. $\left(+\frac{3}{2}x\right)-\left(+\frac{1}{2}y\right)$ — „ $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y$
30. $(+5ab^2)-\left(+\frac{2}{3}ab^2\right)$ — „ $\frac{13}{3}ab^2$

Efectuar las siguientes restas de monomios y polinomios:

31. $(3a-2b+5)-(-7b)$ — R: $3a+5b+5$
32. $\left(\frac{1}{2}a-x+c\right)-(+3a)$ — „ $-\frac{5}{2}a-x+c$
33. $\left(5ab-\frac{3}{4}b^2\right)-\left(+\frac{2}{3}b^2\right)$ — „ $5ab-\frac{17}{12}b^2$
34. $(-2a)-(-5a-b+c)$ — „ $3a+b-c$
35. $\left(+\frac{3}{5}b^2\right)-\left(-4a+\frac{3}{10}b^2\right)$ — „ $4a+\frac{3}{10}b^2$
36. $\left(-\frac{3}{4}c\right)-\left(5x-\frac{5}{6}c\right)$ — „ $\frac{1}{12}c-5x$

Efectuar las siguientes restas de polinomios:

37. $(5a-3b+2c)-(2a-7b-5c)$ — R: $3a+4b+7c$
38. $\left(3x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}z\right)-\left(5x-\frac{3}{4}y-\frac{1}{6}z\right)$

R: $-2x+\frac{1}{4}y-\frac{7}{12}z$

39. $\left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c\right)-\left(-\frac{2}{3}c+2b-1\right)$

R: $-\frac{3}{2}b+\frac{1}{3}c+1$

40. $\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c\right)-\left(-\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b+\frac{5}{8}c\right)$

R: $a-b-\frac{1}{8}c$

CAPITULO IV

PROGRAMA IV. — *Multiplicación Algebraica.* Multiplicación de monomios, de monomios por polinomios y de polinomios entre sí. Ejercicios.

Multiplicación algebraica

CASOS DE MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA	I.—*Multiplicar monomios.*
	II.— „ *monomio y polinomio.*
	III.— „ *polinomios.*

20. I.—Multiplicación de monomios.—Sea efectuar:

$$(-4a^2b).(+3ab^2c)$$

Por la regla de los signos de la multiplicación, se tiene:

$$(-4a^2b).(+3ab^2c) = -(4a^2b)(3ab^2c)$$

por la propiedad asociativa del producto:

$$= -(4a^2b.3ab^2c)$$

por la propiedad conmutativa:

$$= -(4.3a^2abb^2c)$$

por definición de producto, y por un teorema anterior:

$$= -12a^3b^3c$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para multiplicar varios monomios entre sí, se procede como sigue:*

1º — Se determina el signo por medio de la regla de los signos;

2º — Se multiplican los coeficientes y el resultado es el coeficiente del producto:

3º — A continuación se escriben las letras comunes a dos o más monomios con un exponente igual a la suma de los exponentes que tengan en dichos momentos;

4º — A continuación se escriben las letras que aparezcan en un solo monomio, con el mismo exponente.

21. II. Multiplicación de monomio y polinomio.— Sea efectuar:

$$\left(-3a^2+\frac{2}{5}ab+\frac{2}{3}b^2\right)\left(-\frac{3}{2}ab\right)$$

Por la propiedad distributiva de la multiplicación:

$$\left(-3a^2+\frac{2}{5}ab+\frac{2}{3}b^2\right)\left(-\frac{3}{2}ab\right)=$$

$$=(-3a^2)\left(-\frac{3}{2}ab\right)+\left(+\frac{2}{5}ab\right)\left(-\frac{3}{2}ab\right)+\left(+\frac{2}{3}b^2\right)\left(-\frac{3}{2}ab\right)$$

y por el caso anterior:

$$=+\frac{9}{2}a^3b-\frac{3}{5}a^2b^2-ab^3$$

luego:

Regla práctica. — *Para multiplicar un polinomio por un monomio, o vice-versa, se multiplica cada término del polinomio por el monomio dado, y luego se suman algebraicamente los productos parciales.*

22. III. Multiplicación de polinomios. — Sea efectuar:

$$\left(\frac{3}{4}a^2 - 2ab + \frac{2}{3}b^2\right)\left(4a - \frac{1}{2}b\right)$$

Por la propiedad distributiva de la multiplicación:

$$\left(\frac{3}{4}a^2 - 2ab + \frac{2}{3}b^2\right)\left(4a - \frac{1}{2}b\right) = \frac{3}{4}a^2 . 4a + (-2ab)4a$$

$$+\frac{2}{3}b^2 . 4a + \frac{3}{4}a^2 . \left(-\frac{1}{2}b\right) + (-2ab)\left(-\frac{1}{2}b\right) + \frac{2}{3}b^2\left(-\frac{1}{2}b\right)$$

y por (20):

$$= 3a^3 - 8a^2b + \frac{8}{3}ab^2 - \frac{3}{8}a^2b + ab^2 - \frac{1}{3}b^3$$

y reduciendo los términos semejantes, resulta:

$$= 3a^3 - \frac{67}{8}a^2b + \frac{11}{3}ab^2 - \frac{1}{3}b^3$$

luego:

Regla práctica. — *El producto de dos polinomios se obtiene multiplicando cada término del multiplicador por todo el multiplicando. Luego se reducen los términos semejantes que resulten.*

23. Disposición práctica. — Prácticamente, para multiplicar dos polinomios, se escribe el de menor número de términos debajo del otro, y luego los términos semejantes que vayan resultando de los productos parciales se disponen en columna, facilitando así su reducción.

De esta manera, el producto:

$$\left(\frac{1}{2}a^3 - 4a^2b - \frac{1}{3}ab^2 + \frac{2}{3}b^3\right)\left(2a^2 + \frac{3}{2}ab + 4b^2\right)$$

se efectúa así:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}a^3 - 4a^2b - \frac{1}{3}ab^2 + \frac{2}{3}b^3 \\
2a^2 + \frac{3}{2}ab + 4b^2 \\
\hline
a^5 - 8a^4b - \frac{2}{3}a^3b^2 + \frac{4}{3}a^2b^3 \\
\quad + \frac{3}{4}a^4b - 6a^3b^2 - \frac{1}{2}a^2b^3 + ab^4 \\
\qquad\qquad + 2a^3b^2 - 16a^2b^3 - \frac{4}{3}ab^4 + \frac{8}{3}b^5 \\
\hline
a^5 - \frac{29}{4}a^4b - \frac{14}{3}a^3b^2 - \frac{91}{6}a^2b^3 - \frac{1}{3}ab^4 + \frac{8}{3}b^5
\end{array}$$

24. Máximo y mínimo número de términos del producto. — Sea el producto:

$$(2a - 3b + 4c)(3m - n)$$

Se tiene:

$$\begin{array}{l}
2a - 3b + 4c \\
3m - n \\
\hline
6am - 9bm + 12cm - 2an + 3bn - 4cn
\end{array}$$

Al no haber términos semejantes, el número de términos del producto es igual al número de términos del multiplicando por el número de términos del multiplicador, luego:

El máximo número de términos de un producto de dos polinomios, es igual al número de términos del multiplicando por el número de términos del multiplicador.

Sea el producto: $(a^3 + a^2x + ax^2 + x^3)(a - x)$

Se tiene:

$$\begin{array}{l}
a^3 + a^2x + ax^2 + x^3 \\
a - x \\
\hline
a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 \\
\quad - a^3x - a^2x^2 - ax^3 - x^4 \\
\hline
a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - x^4
\end{array}$$

De manera que, multiplicando dos polinomios ordenados respecto a una misma letra, resultando términos semejantes, el primero y último términos del producto nunca lo serán, puesto que el grado de uno es la suma de las mayores potencias de una letra y el del otro es la suma de las mayores potencias de otra letra, pudiendo los términos intermedios anularse como en el ejemplo dado, luego:

El mínimo número de términos del producto de dos polinomios, es dos.

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes multiplicaciones de monomios:

41. $4a.(-3b).\frac{1}{2}a$ — R: $-6a^2b$

42. $4a.(-\frac{5}{2}ab).\left(-\frac{1}{5}ab^2\right)$ — ,, $2a^3b^7$

43. $2a^2cd.(-4ab).(-3ab^2c^3).5bcm$ — ,, $120a^4b^4c^5dm$

44. $3a^2y.(-2ax).(-8ab).(-5b^2c)$ — ,, $-240a^4b^2cxy$

45. $\frac{2}{3}ab^2c.\frac{3}{4}abc^2.4a^2bc$ — ,, $2a^4b^4c^4$

46. $0{,}4x.0{,}5x^2.x^3.(-2x)\frac{5}{2}x^2$ — ,, $-x^9$

47. $\left(-\frac{7}{8}a^2b^3\right).\left(-\frac{4}{7}ab^2\right).4c$ — ,, $2a^3b^5c$

48. $\left(\frac{3}{2}x\right).\left(-\frac{2}{5}xy\right).\frac{10}{3}y^2$ — ,, $2x^3y^3$

Efectuar las siguientes multiplicaciones de monomios y polinomios:

49. $(6a-2b+3c).7a$ — R: $42a^2-14ab+21ac$

50. $(-5a^2+3ab-8b^2).(-3ab)$ — ,, $15a^3b-9a^2b^2+24ab^3$

51. $(5x^2-15xy+5y^2).\frac{2}{5}.x^2y$ — ,, $2x^4y-6x^3y^2+2x^2y^3$

52. $\left(\frac{3}{4}a^2b-\frac{1}{2}ab^2+6\right).4ab$ — ,, $3a^3b^2-2a^2b^3+24ab$

53. $\left(6x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3-4x^4\right).\frac{3}{2}x$ — ,, $9x^2-\frac{1}{2}x^3+x^4-6x^5$

54. $\left(\frac{4}{9}x-\frac{3}{4}y+\frac{2}{3}xy\right).\frac{3}{4}xy$ — ,, $\frac{1}{3}x^2y-\frac{9}{16}xy^2+\frac{1}{2}x^2y^2$

55. $\left(2a-\frac{1}{3}b+\frac{4}{6}c-\frac{2}{3}ab\right).\left(-\frac{3}{4}abc\right)$

R: $-\frac{3}{2}a^2bc+\frac{1}{4}ab^2c-\frac{1}{2}abc^2+\frac{1}{2}a^2b^2c$

56. $\left(\frac{4}{9}a^2b-\frac{12}{18}ab^3+4\right).\frac{6}{4}ab$ — R: $\frac{2}{3}a^3b^2-a^2b^4+6ab$

Efectuar las siguientes multiplicaciones de polinomios:

57. $(3a - 4b)(a - b)$ R: $3a^2 - 7ab + 4b^2$

58. $(x + 8)(x + 10)$ „ $x^2 + 18x + 80$

59. $(a^2 + a^4 + a^6)(a^2 - 1)$ „ $a^8 - a^2$

60. $(2a - 4)\left(a + \frac{1}{2}\right)$ „ $2a^2 - 3a - 2$

61. $(2a^2 - ax + x^2)(5a + 2x)$ „ $10a^3 - a^2x + 3ax^2 + 2x^3$

62. $(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$ „ $a^4 + b^4 + a^2b^2$

63. $(x^3 - 6ax^2 + 12a^2x - 8a^3)(x^2 + 4ax - 4a^2)$

R: $x^5 - 2ax^4 - 16a^2x^3 + 64a^3x^2 - 80a^4x + 32a^5$

64. $(2a^3 + 3a^2 + 2a - 1 + a^4)(a^2 + 1 - 2a)$

R: $a^6 - 2a^3 + 1$

65. $(3x^2 - 5xy - y^2)(4x^2 - 3xy + 6y^2)$

R: $12x^4 - 29x^3y + 29x^2y^2 - 27xy^3 - 6y^4$

66. $\left(3a^2b - \frac{1}{2}ab^2 + \frac{5}{3}b^3\right)\left(\frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}ab\right)$

R: $2a^4b - \frac{31}{12}a^3b^2 + \frac{107}{72}a^2b^3 - \frac{5}{4}ab^4$

67. $\left(a^3 - 2a^2x + ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\left(3a^2 + \frac{3}{4}ax + \frac{1}{3}x^2\right)$

R: $3a^5 - \frac{21}{4}a^4x + \frac{11}{6}a^3x^2 - \frac{11}{12}a^2x^3 + \frac{1}{12}ax^4 - \frac{1}{9}x^5$

68. $\left(2a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{4}{3}b^2\right)\left(\frac{3}{2}a^2 - 4ab + \frac{2}{3}b^2\right)$

R: $3a^4 - \frac{29}{4}a^3b - \frac{8}{3}a^2b^2 + \frac{17}{3}ab^3 \frac{9}{8}b^4$

CAPITULO V

PROGRAMA V. — *División algebraica.* División de monomios y polinomios por monomios. División de polinomios. Definición. Regla práctica. Ejercicios.

División algebraica

CASOS DE DIVISIÓN ALGEBRAICA

- I. - *División de monomios*
  - a) *Que todas las letras del divisor estén en el dividendo;*
  - b) *Que haya letras en el divisor que no figuren en el dividendo.*
- II. - *División de polinomio y monomio;*
- III. - „ „ *monomio y polinomio;*
- IV. - „ „ *polinomios.*

25. I.—División de monomios.—

a) QUE TODAS LAS LETRAS DEL DIVISOR ESTÉN EN EL DIVIDENDO. — Sea efectuar:

$$(-6a^3b^2c^3) : (+3a^2b^2).$$

Por la regla de los signos de la división, se tiene:

$$(-6a^3b^2c^3) : (+3a^2b^2) = -\frac{6a^3b^2c^3}{3a^2b^2}$$

y por definición de producto de números racionales:

$$= -\frac{6}{3} \cdot \frac{a^3}{a^2} \cdot \frac{b^2}{b^2} \cdot c^3$$

y por un teorema anterior:

$$= -2\,a^{3-2}b^{2-2}c^3$$

$$= -2\,ab^0c^3$$

pero, por definición, $b^0 = 1$, luego:

$$= -2\,ac^3$$

b) QUE HAYA LETRAS EN EL DIVISOR QUE NO FIGUREN EN EL DIVIDENDO. — Sea efectuar:

$$(-3a^2b) : \left(-\frac{3}{2}\,ab^3c^2\right)$$

Por la regla de los signos de la división, se tiene:

$$(-3a^2b) : \left(-\frac{3}{2}\,ab^3c^2\right) = +\frac{3a^2b}{\frac{3}{2}\,ab^3c^2}$$

y por definición de productos de números racionales:

$$= +\frac{3}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a^2}{a} \cdot \frac{b}{b^3} \cdot \frac{1}{c^2}$$

efectuando las divisiones indicadas:

$$= +2\,.\,ab^{-2}\,.\,\frac{1}{c^2}$$

pero, por definición, $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$, luego:

$$= +2a\,\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{c^2}$$

o bien: $$= +\frac{2a}{b^2c^2}$$

De los ejemplos anteriores se deduce la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para dividir dos monomios, se procede así:*

1º Se determina el signo del cociente por medio de la regla de los signos;

2º Se dividen los coeficientes y el resultado es el coeficiente del cociente;

3º Las letras comunes se escriben con un exponente igual a la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor de cada letra;

4º A continuación se escriben las letras que haya en el dividendo y que no figuren en el divisor;

5º Las letras que figuren en el divisor y no en el dividendo, se escriben como divisor de lo obtenido según los pasos precedentes.

26. II.—División de polinomio y monomio. — Sea efectuar:

$$\left(\frac{3}{4}a^3b^2 - \frac{1}{8}a^2 + 6\,abc^2\right) : \frac{1}{2}ab$$

Por la propiedad distributiva del cociente, se tiene:

$$\left(\frac{3}{4}a^3b^2 - \frac{1}{8}a^2 + 6abc^2\right) : \frac{1}{2}ab^2 =$$

$$= \frac{3}{4}a^3b^2 : \frac{1}{2}ab^2 + \left(-\frac{1}{8}a^2\right) : \frac{1}{2}ab^2 + 6abc^2 : \frac{1}{2}ab^3$$

y por el caso anterior:

$$= \frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{4}\frac{a}{b^2} + 12\,\frac{c^2}{b}$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *El cociente de un polinomio y un monomio se obtiene dividiendo cada término del polinomio por el monomio, y sumando luego los cocientes obtenidos.*

27. III.—División de monomio y polinomio.—Como implica este caso dividir por un polinomio, está comprendido en el caso siguiente.

28. IV.—División de polinomios.—DEFINICIÓN. — La *división* de dos polinomios tiene por objeto hallar dos expresiones algebraicas, llamadas *cociente* y *resto,* tales, que el dividendo sea igual al producto del divisor por el cociente, más el resto, y que éste sea de menor grado que el divisor.

Siendo: D, el dividendo; d, el divisor; c, el cociente y R, el resto, se debe tener:

$$D = d \, . \, c + R$$

y además:

$$\textit{grado de } R < \textit{grado de } d$$

29. Procedimiento para hallar el cociente de dos polinomios. — TEOREMA. — *El cociente de dos polinomios se obtiene así:*

1º Se ordenan los dos polinomios según las potencias decrecientes de una misma letra, siendo el grado del dividendo mayor o igual que el grado del divisor;

2º Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, resultando el primer término del cociente;

3º Se multiplica el divisor por el cociente hallado, y se resta el producto del dividendo;

4º Con el primer resto obtenido se procede lo mismo que con el dividendo, resultando así el segundo término del cociente, y siguiendo así hasta que el grado del resto sea menor que el grado del divisor.

Hipótesis

$$
\begin{array}{lcr|l}
D & \equiv & 6x^3 - 11x^2 - 8x + 3 & 3x^2 + 2x - 1 \equiv d \\
-d\,.\,c_1 & \equiv & -6x^3 - 4x^2 + 2x & 2x - 5 \quad \equiv c \\
\hline
R_1 & \equiv & -15x^2 - 6x + 3 & c_1 \quad c_2 \\
-d\,.\,c_2 & \equiv & +15x^2 + 10x - 5 & \\
\hline
R & \equiv & 4x - 2 &
\end{array}
$$

$$
\text{Tesis} \left\{ \begin{array}{ll} 1^{\circ} & D = d(c_1 + c_2) + R \\ 2^{\circ} & \text{gr.}\, R < \text{gr.}\, d\,. \end{array} \right.
$$

DEMOSTRACIÓN. — 1º) Se tiene:

$$D - d\,.\,c_1 = R_1 \quad \therefore \quad D = d\,.\,c_1 + R_1 \quad (1)$$

$$R_1 - d\,.\,c_2 = R \quad \therefore \quad R_1 = d\,.\,c_2 + R \quad (2)$$ acá es R

Sumando ordenadamente (1) y (2):

$$D + R_1 = d\,.\,c_1 + d\,.\,c_2 + R_1 + R$$

factoreando d:

$$D + R_1 = d(c_1 + c_2) + R_1 + R$$

restando R_1 a ambos miembros:

$$D + R_1 - R_1 = d(c_1 + c_2) + R_1 - R_1 + R$$

y reduciendo los términos semejantes, queda:

$$\boxed{D = d(c_1 + c_2) + R}$$

y demostrada la primera parte de la tesis.

2º) Como los polinomios dados son decrecientes por hipótesis, de acuerdo con la formación de los términos del cociente y de cada resto, el grado del primer resto es menor que el del dividendo; el del segundo resto es menor que el del primero, etc. Así, los grados de los sucesivos restos van disminuyendo, mientras que el grado del divisor queda constante, llegando un momento en que uno de los restos sea de igual grado que el del divisor, pero continuando la división, el resto siguiente será de menor grado, luego:

$$\boxed{\text{gr.}\, R < \text{gr.}\, d}$$

30. Corolario. — Del teorema anterior se deduce que el *grado del cociente es igual a la diferencia de los grados del dividendo y divisor.*

31. Ejemplos. — Efectuar la división

$$(3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 1) : (x^2 - 3x + 2)$$

Se tiene:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -4x^3 & +2x^2 & -4x & -1 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & +9x^3 & -6x^2 & & & 3x^2 + 5x + 11 \\ \cline{1-5}
 & +5x^3 & -4x^2 & -4x & -1 & \\
 & -5x^3 & +15x & -10x & & \\ \cline{2-5}
 & & +11x^2 & -14x & -1 & \\
 & & -11x^2 & +33x & -22 & \\ \cline{3-5}
 & & & 19x & -23 & \text{división inexacta.}
\end{array}$$

II. — Efectuar la división:

$$\left(2a^3 + \frac{35}{3}a^2b - \frac{16}{9}ab^2 + \frac{4}{3}b^3\right) : \left(\frac{2}{3}a + 4b\right)$$

Se tiene:

$$\begin{array}{l|l}
2a^3 + \frac{35}{3}a^2b - \frac{16}{9}ab^2 + \frac{4}{3}b^3 & \frac{2}{3}a + 4b \\
\cline{2-2}
-\ 2a^3 - 12\,a^2b & 3a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2 \\
\cline{1-1}
\quad -\frac{1}{3}a^2b - \frac{16}{9}ab^2 + \frac{4}{3}b^3 & \\
\quad +\frac{1}{3}a^2b + 2\,ab^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad +\frac{2}{9}ab^2 + \frac{4}{3}b^3 & \\
\qquad\quad -\frac{2}{9}ab^2 - \frac{4}{3}b^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 0 & \text{división exacta.}
\end{array}$$

32. Práctica de la división. — Una vez ordenados en forma decreciente el dividendo y divisor y obtenido el primer término del cociente, el producto del divisor y ese primer término se escribe debajo del dividendo con signo contrario diciendo:

$+$ por $+$ da $+$, para restar: $-$
$-$ „ $-$ „ $+$, „ „ $-$
$+$ „ $-$ „ $-$, „ „ $+$
$-$ „ $+$ „ $-$, „ „ $+$

Luego se reducen los términos semejantes del dividendo y ese producto.

33. División de polinomios incompletos. — Al tener que dividir dos polinomios incompletos se dejan en blanco los lugares de los términos que falten, o bien se agregan con coeficiente cero.

Sea dividir $20a^5 - 6a^3 - 12a^2 + 6$ por $4a^2 - 2$.

Dejando en blanco los lugares correspondientes a los términos que faltan, se tiene así la operación siguiente:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
20a^5 & & -6a^3 & -12a^2 & +6 & 4a^2 \quad -2 \\
\cline{6-6}
-20a^5 & & +10a^3 & & & 5a^3 \quad +a-3 \\
\cline{1-5}
 & & +4a^3 & -12a^2 & +6 & \\
 & & -4a^3 & & +2a & \\
\cline{3-5}
 & & & -12a^2 & +2a+6 & \\
 & & & +12a^2 & -6 & \\
\cline{4-5}
 & & & & 2a &
\end{array}
$$

La misma operación se puede hacer *completando* los polinomios dados, agregando los términos que faltan con coeficiente cero, resultando:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
20a^5 & +0a^4 & -6a^3 & -12a^2 & +0a & +6 & & 4a^2+0a-2 \\
\cline{8-8}
-20a^5 & -0a^4 & +10a^3 & & & & & 5a^3+0a^2+a-3 \\
\cline{1-3}
 & 0a^4 & +4a^3 & -12a^2 & & & & \\
 & -0a^4 & -0a^3 & +0a^2 & & & & \\
\cline{2-4}
 & & +4a^3 & -12a^2 & +0a & & & \\
 & & -4a^3 & -0a & +2a & & & \\
\cline{3-5}
 & & & --12a^2 & +2a & +6 & & \\
 & & & +12a^2 & +0a & -6 & & \\
\cline{4-6}
 & & & & 2a & & &
\end{array}
$$

Otro ejemplo: Dividir:

$$\frac{19}{3}m + 2m^3 - 1 + 12m^4 + 9m^2 \text{ por } -\frac{1}{2} + 6m^2 + 3m.$$

Ordenando los polinomios dados, se tiene la operación:

$$\begin{array}{l|l}
12m^4 + 2m^3 + 9m^2 + \frac{19}{3}m - 1 & 6m^2 + 3m - \frac{1}{2} \\ \cline{2-2}
-12m^4 - 6m^3 + m^2 & 2m^2 - \frac{2}{3}m + 2 \\ \cline{1-1}
\quad -4m^3 + 10m^2 + \frac{19}{3}m & \\
\quad +4m^3 + 2m^2 - \frac{1}{3}m & \\ \cline{1-1}
\qquad +12m^2 + 6m - 1 & \\
\qquad -12m^2 - 6m + 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes divisiones de monomios:

69. $(-18a^5b^3) : (-6a^2b)$ R: $3a^3b^2$
70. $12a^2b^3c^3 : 4ab^2c^2$ „ $3abc$
71. $-20a^4b^4 : 5ab$ „ $-4a^3b^3$
72. $(-18x^3y^2z^5) : (-8x^3yz^4)$ „ $\frac{9}{4}yz$
73. $12a^3b^3 : 8a^2b^2c^2$ „ $\frac{3ab}{2c^2}$
74. $5x^4y^2z^4 : 7x^2z^3$ „ $\frac{5x^2y^2}{7z}$
75. $(-\frac{1}{3}a^4b^2c) : (-\frac{1}{2}abc)$ „ $\frac{2}{3}a^3b$
76. $5x^2y^2 : \frac{1}{3}x^2y$ „ $15y$
77. $-2a^3b^2c : \frac{1}{2}ab^5c^2$ „ $\frac{4a^2}{b^3c}$

78. $24ab^3c^5 : 18a^5b^2c$ R: $-\dfrac{4bc^4}{3a^4}$

Efectuar las siguientes divisiones de polinomios y monomios:

79. $(8a^4b - 32a^3b^2 + 4a^2b^3) : 4a^2b$

R: $2a^2 - 8ab + b^2$

80. $(25a^7b^2 - 35a^6b^4 + 40a^5b^6) : (-5a^4b^2)$

R: $-5a^3 + 7a^2b^2 - 8ab^4$

81. $(6a^2 - 2ab + 4b^2) : \dfrac{1}{2}a^2$

R: $3 - \dfrac{b}{a} + \dfrac{2b^2}{a^2}$

82. $(2a^4b - 6a^3b^2 + 2a^2b^3) : \dfrac{2}{5}a^2b$

R: $5a^2 - 15ab + 5b^2$

83. $\left(9a^2 - \dfrac{1}{2}a^3 + a^4 - 6a^5\right) : \dfrac{3}{2}x$

" $6a - \dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{2}{3}a^3 - 4a^4$

84. $\left(\dfrac{1}{3}a^2b - \dfrac{9}{16}ab^2 + \dfrac{1}{2}a^2b^2\right) : \dfrac{3}{4}ab$

" $\dfrac{4}{9}a - \dfrac{3}{4}b + \dfrac{2}{3}ab$

85. $(0{,}5\,m^2n^2 - 0{,}32\,m^5n^2 + 0{,}4\,m^4n^3) : 0{,}4\,mn^2$

" $1{,}25\,m - 0{,}8\,m^4 + m^3n$

86. $\left(6a^7 - \dfrac{9}{0}a^5 + \dfrac{3}{4}a^2 - a\right) : \dfrac{3}{2}a$

" $4a^6 - \dfrac{3}{5}a^4 - \dfrac{2}{3}a^2 + \dfrac{1}{2}a$

Efectuar las siguientes divisiones de polinomios:

87. $(3a^2 - 7ab + 4b^2) : (a - b)$

R: $3a - 4b$

88. $(a^3 + a^2x - ax^2 - x^3) : (a - x)$

" $a^2 + 2ax + x^2$

89. $(6a^4 - 22a^3b + 23a^2b^2 - 5ab^3) : (3a^2 - 5ab)$

R: $2a^2 - 4ab + b^2$

90. $(12x^4 - 14x^3 - 5x^2 + 12x - 1) : (4x^2 + 2x - 1)$

„ $3x^2 - 5x + 2$; resto: $3x + 1$

91. $(16x^4 + 64x^3 + 103x^2 + 84x + 21) : (4x^2 + 9x + 3)$

„ $4x^2 + 7x + 7$

92. $(4x^3 + 4x^2 - 29x + 21) : (2x - 3)$

„ $2x^2 + 5x - 7$

93. $(x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x + 1) : (x^2 + 5x - 3)$

„ $x^2 - 10x + 62$; resto: $-345x + 187$.

94. $(-7 + 26x - 21x^2 + 2x^3 + x^4) : (-7 + 5x + x^2)$

„ $1 - 3x + x^2$

95. $(14a^5 - 27a^4b + 21a^3b^2 - 3a^2b^3 - 2ab^4) : (2a^2 - 3ab + 2b^2)$

„ $7a^3 - 3a^2b - ab^2$

96. $\left(x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{2}x\right) : \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)$

„ $x^2 - \frac{3}{4}x + 1$

97. $(a^6 - 2a^3 + 1) : (a^2 - 2a + 1)$

„ $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$

98. $(a^5 + b^5) : (a + b)$

„ $a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4$

99. $(a^4 - 3) : (a^2 - 2a - 1)$

„ $a^2 + 2a + 5$; resto: $12a + 2$.

100. $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1)$

„ $x^2 - x + 1$

CAPITULO VI

PROGRAMA VI. — *Casos particulares de división.* División de un polinomio entero en x por un binomio de la forma $x + a$. Regla de Ruffini. Teorema del resto. Condición necesaria y suficiente para que un polinomio entero en x sea divisible por $x + a$. Divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de las bases.

Casos particulares de división de polinomios

34. Polinomio entero en x. — Un polinomio es *entero en x* al no ser x denominador de ninguno de sus términos, y los exponentes de sus potencias son números positivos.

Ejemplo: $\quad 5x - 6x + 7x - 4x + 2$

es un polinomio entero en x.

De la misma manera diríamos cuándo un polinomio es *entero en a*, o en b, etc.

35. Notación. — Para expresar que un polinomio es entero en x, se emplean las notaciones

$$P\ (x), \text{ o bien: } f\ (x),$$

que se leen: $\quad P$ *de* x, o f *de* x.

36. División de un polinomio entero en x por un binomio de la forma $x + a$, siendo a un número cualquiera positivo o negativo.

Sea efectuar la división del polinomio entero en x:

$$A_0x^5 + A_1x^4 + A_2x^3 + A_3x^2 + A_4x + A_5$$

por el binomio $x + a$.

Se tiene:

$$\begin{array}{l|l} A_0x^5+A_1x^4+A_2x^3+A_3x^2+A_4x+A_5 & x+a \\ \cline{2-2} -A_0x^5-A_0ax^4 & A_0x^4+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4 \\ \hline \quad (A_1-A_0a)x^4+A_2x^3 & \\ \quad\quad -c_1x^4 \quad -c_1ax^3 & \\ \hline \quad\quad\quad (A_2-c_1a)x^3+A_3x^2 & \\ \quad\quad\quad\quad -c_2x^3 \quad -c_2ax^2 & \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad (A_3-c_2a)x^2+A_4x & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad -c_3x^2 \quad -c_3ax & \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad (A_4-c_3a)x+A_5 & \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad -c_4x \quad -c_4a & \\ \hline \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad A_5-c_4a & \end{array}$$

En el cociente se tiene:

$$c = A_0$$

$$c_1 = A_1 - A_0a = A_1 - ca = A_1 + c(-a)$$

$$c_2 = A_2 - c_1a = A_2 + c_1(-a)$$

$$c_3 = A_3 - c_2a = A_3 + c_2(-a)$$

$$c_4 = A_4 - c_3a = A_4 + c_3(-a)$$

Observando que cada coeficiente del cociente es igual al anterior multiplicado por a cambiando de signo y sumado algebraicamente al coeficiente del respectivo término del dividendo, podemos enunciar la siguiente

37. Regla de Ruffini (*). — Esta regla permite formar el coeficiente y el resto de la división de un polinomio entero en x por binomio de la forma $x + a$. Se enuncia así:

El coeficiente del primer término del cociente es el mismo del primer término del dividendo; el coeficiente del segundo término del cociente se forma multiplicando el anterior por **a** *cambiado de signo, más el coeficiente del segundo término del dividendo, continuando del mismo modo con todos los demás.*

El resto es igual al producto del último coeficiente del cociente por **a** *cambiado de signo, más el término independiente del dividendo.*

El grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.

38. Ejemplos. — I. *Hallar el cociente y el resto de la división del polinomio*

$$4x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 20x^2 - 12x + 5 \text{ por } x + 2.$$

Aplicando la regla de Ruffini, después de haber escrito el primer coeficiente 4 del cociente, se dirá:

4	multiplicado	por	— 2	da	— 8	y + 3	= — 5
— 5	„	„	— 2	„	+ 10	„ + 4	= + 14
+ 14	„	„	— 2	„	— 28	„ + 20	= — 8
— 8	„	„	— 2	„	+ 16	„ — 12	= + 4
+ 4	„	„	— 2	„	— 8	„ + 5	= — 3

El cociente es $4x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 8x + 4$ y el resto es -3.

(*) Debida al célebre matemático italiano Pablo Ruffini (1765-1822).

II. *Hallar el cociente y el resto de la división del polinomio* $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 10x - 24$ *por* $x - 3$.

Aplicando la Regla de Ruffini, diremos:

1 multiplicado por $+3$ da $+3$ y $-2 = +1$
$+1$ „ „ $+3$ „ $+3$ y $+3 = +6$
$+6$ „ „ $+3$ „ $+18$ y $-10 = +8$
$+8$ „ „ $+3$ „ $+24$ y $-24 = 0$

El cociente es $x^3 + x^2 + 6x + 8$, y el resto es cero.

III. *Hallar el cociente y el resto de la división de*

$$2x^5 - x^3 - 4 \text{ por } x + 1.$$

Como el polinomio dividendo no es completo, previamente lo completaremos y se tendrá:

$$2x^5 + 0x^4 - x^3 + 0x^2 + 0x - 4.$$

Por la regla de Ruffini, se tiene:

$+2$ multiplicado por -1 da -2 y $0 = -2$
-2 „ „ -1 „ $+2$ „ $-1 = +1$
$+2$ „ „ -1 „ -1 „ $0 = -1$
-1 „ „ -1 „ $+1$ „ $0 = +1$
$+1$ „ „ -1 „ -1 „ $-4 = -5$

El cociente es $2x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$, y el resto es -5.

39. Teorema del resto. — *El resto de la división de un polinomio entero en* x *por el binomio de la forma* x + a, *se obtiene reemplazando* x *por* a *cambiando de signo, en el polinomio.*

$$\text{H}\begin{cases} D(x), \text{ polinomio entero en } x; \\ x + a \text{ binomio divisor;} \\ c(x) \text{ cociente;} \\ R \text{ resto.} \end{cases} \qquad \text{T) } R = D(-a)$$

Por definición, (28), debe ser:

$$D(x) = (x + a) \, . \, c(x) + R$$

Suponiendo que sea $x = -a$:

$$D(-a) = (-a + a) \, . \, c(-a) + R$$

o bien: $$D(-a) = 0 \, . \, c(-a) + R$$

y finalmente: $$D(-a) = R$$

es decir, que: $$\boxed{R = D(-a)}$$

y demostrado el teorema.

40. Ejemplos. — I. *Hallar directamente el resto de la división del polinomio* $2x^3 - 4x^2 - 3x + 6$ *por el binomio* $x - 2$.

Por el teorema del resto, se tiene:

$$\begin{aligned} R &= 2.2^3 - 4.2^2 - 3.2 + 6 \\ &= 2.8 - 4.4 - 6 + 6 \\ &= 16 - 16 - 6 + 6 = 0 \end{aligned}$$

El resto es cero; la división es exacta.

II. *Hallar directamente el resto de la división de* $2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - x - 4$ *por el binomio* $x + 3$.

Se tiene, por el teorema último:

$$\begin{aligned} R &= 2(-3)^4 + 4(-3)^3 - 2(-3)^2 - (-3) - 4 \\ &= 2.81 - 4.27 - 2.9 + 3 - 4 \\ &= 162 - 108 - 18 + 3 - 4 = 35. \end{aligned}$$

El resto es 35.

41. Condición necesaria y suficiente. — Se llama *condición necesaria* de una propiedad, a toda consecuencia deducida de ella, y *condición suficiente* de la misma propiedad, a toda hipótesis que contenga a dicha propiedad.

Una propiedad es una *condición necesaria y suficiente* de otra propiedad, cuando las dos propiedades se contienen mútuamente.

Así, demostrar un teorema y su recíproco es establecer que una misma condición es, al mismo tiempo, necesaria y suficiente.

42. Condición necesaria y suficiente para que un polinomio entero en x sea divisible por x + a.

TEOREMA.—*La condición necesaria y suficiente para que un polinomio entero en* x *sea divisible por un binomio de la forma* x + a, *es que se anule dicho polinomio al dar a* x *el valor de* a *cambiado de signo.*

$$\text{H}\begin{cases} D(x) \text{ polinomio dado;} \\ x + a \text{ divisor dado.} \end{cases} \quad \text{T}\begin{cases} D(x) \text{ es divisible por } x + a \\ \text{siempre que } D(-a) = 0. \end{cases}$$

LA CONDICIÓN ES NECESARIA.—En efecto, la división de $D(x)$ por $x + a$, será exacta, cuando sea $R = 0$, pero por el teorema del resto, es:

$$R = D(-a)$$

luego se deduce que:

$$D(-a) = 0$$

es decir, para que $D(x)$ sea divisible por $x + a$ es necesario que sea

$$\boxed{D(-a) = 0}$$

La condición es suficiente. — En efecto, basta, para que la división sea exacta, que

$$\boxed{R = D(a) = 0}$$

43. Divisibilidad de la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de las bases. — Se nos presentan sólo estos casos:

1º $(x^m + a^m) : (x + a)$
2º $(x^m + a^m) : (x - a)$
3º $(x^m - a^m) : (x + a)$
4º $(x^m - a^m) : (x - a)$

44. 1er Caso. — $(x^m + a^m) : (x + a)$

Calculemos el valor del resto:

$$R = D(-a) = (-a)^m + a^m$$

Si m es par, resulta:

$$R = D(-a) = + a^m + a^m = 2\,a^m \neq 0.$$

Si m es impar:

$$R = D(-a) = - a^m + a^m = 0$$

luego: *La suma de dos potencias de igual grado es divisible por la suma de las bases cuando el exponente* m *es impar.*

45. 2º Caso.—$(x^m + a^m) : (x - a)$

Calculemos el valor del resto:

$$R = D(+ a) = (+ a)^m + a^m.$$

Si m es par:

$$R = + a^m + a^m = 2 a^m \neq 0$$

Si m es impar:

$$R = + a^m + a^m = 2 a^m \neq 0$$

luego: *La suma de dos potencias de igual grado nunca es divisible por la diferencia de las bases.*

46. 3er Caso.—$(x^m - a^m) : (x + a)$

Calculemos el valor del resto:

$$R = D(- a) = (- a)^m - a^m$$

Si m es par:

$$R = + a^m - a^m = 0$$

Si m es impar:

$$R = - a^m - a^m = - 2 a^m \neq 0$$

luego: *La diferencia de dos potencias de igual grado es divisible por la suma de sus bases, sólo cuando el exponente* m *es par.*

47. 4º Caso.—$(x^m - a^m) : (x - a)$

Calculemos el valor del resto:

$$R = D(+a) = (+a)^m - a^m$$

Si m es par:

$$R = +a^m - a^m = 0$$

Si m es impar:

$$R = +a^m - a^m = 0$$

luego: *La diferencia de dos potencias de igual grado, siempre es divisible por la diferencia de sus bases.*

48. Resumen:

1er caso	:	$(x^m + a^m)$	:	$(x + a)$	—	*impar*
2º „	:	$(x^m + a^m)$	:	$(x - a)$	—	*nunca*
3er „	:	$(x^m - a^m)$	:	$(x + a)$	—	*par*
4º „	:	$(x^m - a^m)$	:	$(x - a)$	—	*siempre*

Como no cuesta trabajo recordar el orden de colocación de los signos en los cuatro casos, sabiendo de memoria las palabras *impar-nunca-par-siempre,* podremos decir de inmediato cuándo es o no divisible la suma o diferencia de potencias de igual grado por la suma o diferencia de sus bases.

EJERCICIOS

Aplicando la *Regla de Ruffini,* determinar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

101. $(2x^2 - 5x + 1) : (x - 3)$ R: $c = 2x + 1;\ R = 4$

102. $(3x^3 - 2x^2 + 5x - 10) : (x + 2)$
R: $c = 3x^2 - 8x + 21;\ R = -52$

103. $(2x^4 - 15x^3 + 31x^2 - 22x + 30) : (x - 3)$
R: $c = 2x^3 - 9x^2 + 4x - 10;\ R = 0$

104. $(6x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x - 15) : (x + 2)$

R: $c = 6x^3 - 16x^2 + 37x - 84$; $R = 153$

105. $(5x^5 - 27x^4 + 14x^3 - 23x^2 + 16x - 5) : (x - 5)$

R: $c = 5x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$; $R = 0$

106. $(2a^4 + a^3 - a^2 + 18a + 16) : (a + 2)$

R: $c = 2a^3 - 3a^2 + 5a + 8$; $R = 0$

107. $\left(4a^3 + \frac{5}{4} a^2 + \frac{1}{8} a + \frac{1}{4}\right) : \left(a + \frac{1}{2}\right)$

R: $c = 4a^2 - \frac{3}{4} a + \frac{1}{2}$; $R = 0$

108. $\left(3m^4 + \frac{3}{2} m^3 + \frac{17}{3} m^2 + \frac{5}{2} m - 1\right) : \left(m + \frac{2}{3}\right)$

R: $c = 3m^3 - \frac{1}{2} m^2 + 6m - \frac{3}{2}$; $R = 0$

Aplicando el *Teorema del Resto*, calcular el resto de las siguientes divisiones:

109. $(x^3 - 5x^2 + 2x - 9) : (x - 2)$ R: -17

110. $\left(2x^3 + 6x^2 - 5x + \frac{3}{4}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$ „ 0

111. $(x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 17x - 20) : (x - 1)$ „ -20

112. $(2x^3 + 6x^2 - 8x + 12) : (x + 4)$ „ 12

113. $(3a^4 - 5a^3 + 7a^2 - 10a - 4) : (a - 2)$ „ 12

114. $(6x^3 - 4x^2 + 10x - 20) : (x + 2)$ „ -104

115. $\left(a^4 + \frac{1}{2} a^3 - \frac{1}{2} a^2 + 9a + 8\right) : (a + 2)$ „ 0

116. $\left(8a^3 + \frac{5}{2} a^2 + \frac{1}{4} a + \frac{1}{2}\right) : \left(a + \frac{1}{2}\right)$ „ 0

Escribir, sin operar, los cocientes de las divisiones siguientes:

117. $a^5 + x^5 : a + x$ R: $a^4 - a^3x + a^2x^2 - ax^3 + x^4$

118. $a^4 - b^4 : a - b$ „ $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

119. $a^5 - x^5 : a - x$ „ $a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4$

120. $a^6 - 1 : a + 1$ „ $a^5 - a^4 + a^3 - a^2 + a - 1$

121. $a^4 - b^4 : a + b$ „ $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

CAPITULO VII

PROGRAMA VII. — *Potenciación*. Potencia enésima de un monomio. Cuadrado y cubo de binomios. Cuadrado de un polinomio.

Potenciación

49. Potencia enésima de un monomio.—Sea calcular:

$$\left(-\frac{3}{2}a^2b^4c^3\right)^3$$

Como sabemos que un monomio es un producto, (2), por la propiedad distributiva de la potenciación, se tiene:

$$\left(-\frac{3}{2}a^2b^4c^3\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^3(a^2)^3(b^4)^3(c^3)^3 \qquad (1)$$

Efectuemos aparte los cálculos indicados.

Por la regla de los signos de las potencias y recordando que la potencia de un cociente es el cociente de las potencias del dividendo y divisor, resulta:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{3^3}{2^3}=-\frac{27}{8}$$

Como para elevar una potencia a potencia se multiplica los exponentes, tenemos:

$$(a^2)^3=a^{2\times3}=a^6$$

$$(b^4)^3=b^{4\times3}=b^{12}$$

$$(c^3)^3=c^{3\times3}=c^9$$

y reemplazando estos valores en (1):

$$\left(-\frac{3}{2}a^2b^4c^3\right)^3 = -\frac{27}{8}a^6b^{12}c^9$$

En general, se tendrá, procediendo idénticamente, que:

$$(-5ab^2c^3)^n = (-5)^n a^n b^{2n} c^{3n}$$

de donde se deduce la siguiente

REGLA PRÁCTICA.—*Para elevar un monomio a la potencia enésima se procede así.*

1º Se determina el signo por la regla de los signos;

2º Se eleva el coeficiente a la potencia dada;

3º Se multiplica el exponente de cada factor literal por el exponente dado.

La potencia es también un monomio, cuyos signo y coeficiente son los determinados, y la parte literal la misma, pero con los exponentes obtenidos.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(-3a^2bc^3d^4)^2 &= (-3)^2 a^{2.2} b^{1.2} c^{3.2} d^{4.2} \\ &= +9\,a^4b^2c^6d^8\end{aligned}$$

50. Cuadrado de un binomio.—TEOREMA. — *El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más o menos el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término.*

$$H\begin{cases} 1º\ (a+b)^2 \\ 2º\ (a-b)^2 \end{cases} \qquad T\begin{cases} 1º\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 2º\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

1º) Por definición de potencia:

$$(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b)$$

y efectuado el producto:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

luego:

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad (1)$$

2º) Por definición de potencia:

$$(a - b)^2 = (a - b)\ (a - b)$$

y efectuando el producto:

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

luego:

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) se pueden escribir así:

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Ejemplos:

1º) $(3a + 2b)^2 = (3a)^2 + 2.3a.2b + (2b)^2$
$= 9a^2 + 12ab + 4b^2$

2º) $\left(\frac{1}{2}a^2 + 4b^3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}a^2\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot 4b^3 + (4b^3)^2$

$= \frac{1}{4}a^4 + 4a^2b^3 + 16b^6$

3º) $(5ab - 3)^2 = (5ab)^2 - 2.5ab.3 + 3^2$

$= 25a^2b^2 - 30ab + 9$

4º) $\left(\frac{2}{3}a^3 - \frac{1}{2}bc^2\right)^2 = \left(\frac{2}{3}a^3\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}a^3 \cdot \frac{1}{2}bc^2 + \left(\frac{1}{2}bc^2\right)^2$

$= \frac{4}{9}a^6 - \frac{2}{3}a^3bc^2 + \frac{1}{4}b^2c^4$

53. Cubo de un binomio.—TEOREMA. — *El cubo de un binomio es igual al cubo del primer término, más o menos el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el segundo al cuadrado, más o menos el cubo del segundo número.*

$H \begin{cases} 1º\ (a+b)^3 \\ 2º\ (a-b)^3 \end{cases} \qquad T \begin{cases} 1º\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ 2º\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$

1º) Por definición de potencia:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2\,(a+b)$$

o bien: $\qquad = (a^2 + 2ab + b^2)\,(a+b)$

y efectuado el producto:

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

luego, reemplazando:

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \qquad (1)$$

2º) Por definición de potencia:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2\,(a-b)$$

o bien:

$$= (a^2 - 2ab + b)^2)\,(a-b)$$

y efectuando el producto:

$$\begin{array}{l} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \quad\; - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array}$$

luego: $\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$ (2)

Las expresiones (1) y (2) se pueden escribir así:

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$$

Ejemplos:

1.º) $(2a + 4b^3) = (2a)^3 + 3\,.\,(2a)^2\,.\,4b + 3\,.\,2a\,.\,(4b)^2 + (4b)^3$

$$= 8a^3 + 48a^2b + 96ab^2 + 64b^3$$

2.º) $\left(\frac{1}{2}\,a^2b + \frac{2}{3}\,c^3\right)^3 =$

$$= \left(\frac{1}{2}\,a^2b\right)^3 + 3\,\cdot\left(\frac{1}{2}a^2b\right)^2.\,\frac{2}{3}c^3 + 3.\frac{1}{2}\,a^2b\left(\frac{2}{3}\,c^3\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\,c^3\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\,a^6b^3 + \frac{1}{2}\,a^4b^2c^3 + \frac{2}{3}\,a^2bc^6 + \frac{8}{27}\,c^9$$

3.º) $\left(2 - \frac{1}{2}\,a\right)^3 = 2^3 - 3\,.\,2^2\,.\,\frac{1}{2}a + 3\,.\,2\,.\left(\frac{1}{2}\,a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,a\right)^3$

$$= 8 - 6a + \frac{3}{2}\,a^2 - \frac{1}{8}\,a^3$$

4.º) $(5x - 2y)^3 = (5x)^3 - 3\,.\,(5x)^2.2y + 3\,.\,5x\,.\,(2y)^2 - (2y)^3$

$$= 125x^3 - 150x^2y + 60\,xy^2 - 8y^3$$

52. Cuadrado de un polinomio.—TEOREMA. — *El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de uno de sus términos, más el duplo del primer término por cada uno de los que le siguen; más el duplo del segundo término por cada uno de los que le siguen; más el duplo del tercer término por cada uno de los que le siguen, etc.*

H) $(a+b+c+d)^2$

T) $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+$
$+2bc+2bd+2cd.$

Por definición de potencia, se tiene:

$$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c+d)\ (a+b+c+d) \qquad (1$$

y efectuando el producto:

$$\begin{array}{llllllllll}
a & +b & +c & +d & & & & & & \\
a & +b & +c & +d & & & & & & \\
\hline
a^2 & +ab & +ac & +ad & & & & & & \\
 & +ab & & & +b^2 & +bc & +bd & & & \\
 & & +ac & & & +bc & & +c^2 & +cd & \\
 & & & +ad & & & +bd & & +cd & +d^2 \\
\hline
a^2 & +2ab & +2ac & +2ad & +b^2 & +2bc & +2bd & +c^2 & +2cd & +d^2
\end{array}$$

sustituyendo este valor en (1), queda:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$$

y por la propiedad conmutativa de la suma.

$$\boxed{(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}$$

Ejemplos:

1º) $(a-3+c)^2 = a^2+3^2+c^2+2a(-3)+2ac+2(-3)c$
$= a^2+9+c^2-6a+2ac-6c$

2º) $\left(3a - \frac{1}{2}b + 2c - \frac{3}{2}d\right)^2 =$

$= (3a)^2 + \left(-\frac{1}{2}b\right)^2 + \left(2c\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}d\right)^2 + 2.3a\left(-\frac{1}{2}b\right) +$

$+ 2 \,.\, 3a \,.\, 2c + 2 \,.\, 3a\left(-\frac{3}{2}d\right) + 2\left(-\frac{1}{2}b\right) 2c +$

$+ 2\left(-\frac{1}{2}b\right) . \left(-\frac{3}{2}d\right) + 2 \,.\, 2c\left(-\frac{3}{2}d\right)$

y efectuando los productos:

$= 9a^2 \frac{1}{4} b^2 + 4c^2 + \frac{9}{4} d^2 - 3ab + 12ac - 9ad - 2bc + \frac{3}{2} bd - 6cd$

EJERCICIOS

Calcular las siguientes potencias de monomios:

122. $(3ab^3)^2$ R: $9a^2b^6$
123. $(-2a^2bc^3)^3$ „ $-8a^6b^3c^9$
124. $(-2a^2b^3x)^4$ „ $16a^8b^{12}x^4$
125. $\left(-\frac{1}{2}x^3y^2\right)^3$ „ $-\frac{1}{8}x^9y^6$
126. $\left(\frac{3}{2}mn^2x^3\right)^2$ „ $\frac{9}{4}m^2n^4x^6$
127. $(-0,5\,a^5b^4c^3)^3$ „ $-0,125\,a^{15}b^{12}c^9$

Desarrollar los siguientes cuadrados de binomios:

128. $(3a + 2b)^2$ R: $9a^2 + 12ab + 4b^2$
129. $(5a^2 - 3b)^2$ „ $25a^4 - 30a^2b + 9b^2$
130. $(a^2x + b^2y)^2$ „ $a^4x^2 + 2a^2b^2xy + b^4y^2$
131. $\left(\frac{1}{2}a - 4a^2\right)^2$ „ $\frac{1}{4}a^2 - 4a^3 + 16a^4$
132. $\left(3ab^2 - \frac{2}{3}a\right)^2$ „ $9a^2b^4 - 4a^2b^2 + \frac{4}{9}a^2$
133. $\left(\frac{1}{3}a + 3\right)^2$ „ $\frac{1}{9}a^2 + 2a + 9a^2$
134. $\left(2a - \frac{1}{2}a^2\right)^2$ „ $4a^2 - 2a^3 + \frac{1}{4}a^4$

135. $(-5a^2 - 3a)^2$ „ $25a^4 + 30a^3 + 9a^2$

Desarrollar los siguientes cubos de binomios:

136. $(a + 2bc)^3$ R: $a^3 + 6a^2bc + 12ab^2c^2 + 8b^3c^3$

137. $(2a - 3ab)^3$ „ $8a^3 - 36a^3b + 54a^3b^2 - 27a^3b^3$

138. $(7ab + 2ac)^3$ „ $343a^3b^3 + 294a^3b^2c + 84a^3bc^2 + 8a^3c^3$

139. $(1 - b)^3$ „ $1 - 3b + 3b^2 - b^3$

140. $\left(\frac{1}{2}x^2y + 2xy^2\right)^3$ „ $\frac{1}{8}x^6y^3 + \frac{3}{2}x^5y^4 + 6x^4y^5 + 8x^3y^6$

141. $\left(2a - \frac{3}{4}a^2\right)^3$ „ $8a^3 - 9a^4 + \frac{27}{8}a^5 - \frac{27}{64}a^6$

Desarrollar los siguientes cuadrados de polinomios:

142. $(a - 2b + 3c)^2$

R: $a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 4ab + 6ac - 12bc$

143. $(2a - 5b - 2c)^2$

„ $4a^2 + 25b^2 + 4c^2 - 20ab - 8ac + 20bc$

144. $(a^2 - 2ab + b^2)^2$

„ $a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - 4a^3b + 2a^2b^2 - 4ab^3$

145. $(2x^2 - 3xy - y^2)^2$

„ $4x^4 - 12x^3y + 5x^2y^2 + 6xy^3 + y^4$

146. $\left(\frac{1}{2}a^2 - 2ab + \frac{3}{4}b^2\right)^2$

$\frac{1}{4}a^4 + \frac{19}{4}a^2b^2 + \frac{9}{16}b^4 - 2a^3b - 3ab^3$

CAPITULO VIII.

PROGRAMA VIII. — *Factoreo de expreciones algebraicas* Factor común Descomposición en grupos de igual número de términos y con un factor común. Trinomio cuadrado perfecto. Trinomio de segundo grado. Cuatrinomio cubo perfecto. Diferencia de cuadrados. Suma o diferencia de potencias de igual grado. Combinación de los casos anteriores.

Factoreo de expresiones algebraicas

53. Definición.—*Factorear* una expresión algebraica, es transformarla en un producto de varios factores.

Estudiaremos varios casos de factoreo, según sea la forma de las expresiones algebraicas dadas.

54. 1er. Caso.—Factor común.

Ejemplo tipo: $am + bm - cm = ?$

Sabemos, por la propiedad distributiva de la multiplicación, que:

$$(a + b - c)\, m = am + bm - cm$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$\boxed{am + bm - cm = (a + b - c)\, m}$$

Reemplazar el primer miembro de la expresión anterior por el segundo, es sacar el *factor común m*.

Como cada término del paréntesis es el cociente de cada término del polinomio y el factor común, se tiene:

Regla práctica. — *Si todos los términos de un polinomio tienen un factor común, se saca ese factor fuera de un* *paréntesis en el que se escribe el cociente que se obtiene al dividir el polinomio dado por el factor.*

Ejemplo: Factorear el polinomio

$$6a^5b - 12a^3b^3 + 3a^2b^4$$

Observando el polinomio dado, deducimos que el factor común es $3a^2b$, luego, por la regla anterior se tiene:

$$6a^5b - 12a^3b^3 + 3a^2b^4 = 3a^2b\left(\frac{6a^5b}{3a^2b} - \frac{12a^3b^3}{3a^2b} + \frac{3a^2b^4}{3a^2b}\right)$$

y efectuando: $\qquad = 3a^2b(2a^3 - 4ab^2 + b^3)$

55. 2º Caso — Descomposición en grupos de igual número de términos y con un factor común.

EJEMPLOS TIPOS:

$$\begin{cases} \text{I} - am + bm + an + bn = ? \\ \text{II} - am - bm + an - bn = ? \\ \text{III} \cdot am + bm - an - bn = ? \\ \text{IV} - am - bm - an + bn = ? \end{cases}$$

SUB-CASO I. $\qquad am + bm + an + bn = ?$

Por la propiedad asociativa de la suma, podemos agrupar los términos con factor común:

$$am + bm + an + bn = (am + bm) + (an + bn)$$

Sacando el factor común de cada paréntesis:

$$am + bm + an + bn = (a + b)m + (a + b)n$$

y sacando el factor común $a + b$ del segundo miembro, se obtiene, finalmente:

$$\boxed{am + bm + an + bn = (a + b)(m + n)}$$

SUB-CASO II. $am - bm + an - bn = ?$

Por la propiedad asociativa de la suma, podemos agrupar los términos con factor común:

$$am - bm + an - bn = (am - bm) + (an - bn)$$

Sacando factor común de cada paréntesis:

$$am - bn + an - bn = (a - b)m + (a - b)n$$

y sacando el factor común $a - b$ del segundo miembro, queda:

$$\boxed{am - bm + an - bn = (a - b)(m + n)}$$

SUB-CASO III. $am + bm - an - bn = ?$

Por la propiedad asociativa de la suma, se tiene:

$$am + bm - an - bn = (am + bm) - an - bn$$

Introduciendo $-an - bn$ en un paréntesis precedido del signo menos, se obtiene:

$$am + bm - an - bn = (am + bm) - (an + bn)$$

sacando el factor común de cada paréntesis:

$$= (a + b)m - (a + b)n$$

y sacando $a + b$ factor común:

$$\boxed{am + bm - an - bn = (a + b)(m - n)}$$

SUB-CASO IV. $am - bm - an + bn = ?$

Por la propiedad asociativa de la suma:

$$am - bm - an + bn = (am - bm) - an + bn$$

OBRAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA PUBLICADA POR LA CASA

ANGUITA F. — Elementos de Algebra, 1 tomo enc.	$ 2.50
— Elementos de trigonometría rectilínea y esférica, 1 tomo encuadernado	„ 3.50
BOLLO J. N. — Felipe Anguita y Lorenzo Dagnino Pastore. Aritmética 1er. año, 1 tomo encuadernado	„ 3.50
— Aritmética, 2º año, 1 tomo enc.	„ 3.50
— Algebra, 3er. año, 1 tomo enc.	„ 3.50
— Algebra, 4º año, 1 tomo enc.	„ 3.50
— Geometría, 1er. año, 1 tomo enc.	„ 3.—
— Geometría, 2º año, 1 tomo enc.	„ 2.50
— Geometría, 3er. año, 1 tomo enc.	„ 2.50
— Geometría del Espacio (4º año), 1 tomo enc.	„ 3.50
COBOS DARACT. — Historia Argentina, 1er. tomo, 1 t. enc.	„ 4.—
— Historia Argentina, 2º tomo, 1 t. enc.	„ 4.—
COTTINI E. H. — Tratado de Construcciones	„ 7.—
CHAROLA FLORENCIO. — Lecciones de Física Elemental	„ 4.—
DAUS F. A. — Nociones de Geografía General, Astronómica y Física, Asia y Africa, 1 tomo enc.	„ 4.—
DAGNINO PASTORE LORENZO. — El Universo, La Tierra y El Hombre, 1 tomo enc.	„ 6.50
— Estadística, 1 tomo enc.	„ 3.50
DIAZ DE GUIJARRO E. — Curso teórico práctico de Prosodia y Ortografía, 1 tomo enc.	„ 3.—
— Texto de lectura del curso teórico práctico de Prosodia y Ortografía, 1 tomo enc.	„ 1.50
DARQUIER H. y HASENBALG A. — Las trece bolillas de química, 1 tomo rústica	„ 1.50
GOURVILLE H. D. — The modern Handbook of English, 1ª parte, 1 tomo enc.	„ 3.—
— The modern Handbook of English, 2º, 1 tomo enc.	„ 3.—
— The modern Handbook of English, 3º, 1 tomo enc.	„ 3.—
— Manuel Moderne du Français Parlé (Premier livre), 1 tomo enç	„ 3.—
JARA JUAN G. — Manual de lógica aplicada, 1 tomo enc.	„ 4.—
MARTONNE EMM. DE. — Compendio de Geografía Física (traducción del Sr. F. A. Daus), 1 tomo enc.	„ 5.—
PARENTE RICCIOTTI. — Gramática de la lengua italiana, 1er. y 2º curso (4º y 5º años), 1 tomo enc.	„ 5.50
PASSARELLI V. — Lecciones de historia Americana, 1 t. encuadernado	„ 2.50
PERALTA J. M. — Historia de las Civilizaciones Antiguas, 1 tomo enc.	„ 4.—
PIZZURNO CARLOS H. — Lecciones de Historia Argentina. (Epoca Colonial, 1492-1810), 1 tomo enc.	„ 4.—
POIRIER LALANNE. — Curso de Francés, 1er año, 1 t. enc.	„ 2.—
PORCEL CARLOS A. — Tratado de Contabilidad y Teneduría de libros, 1 tomo enc.	„ 5.—
RESUMEN de la Edad Media, Moderna y Contemporánea, 1 tomo para 2º año, enc.	„ 2.—
RESUMEN de Historia Americana y Argentina, 3er. año, 1 tomo rústica	„ 1.50
RESUMEN de Historia Americana y Argentina, 4º año, 1 t. rústica	„ 1.50
TORRES IBAÑEZ M. C. — Curso completo de pedagogía, 1 tomo enc.	„ 4.—
TRUCCO SIXTO E. — Elementos de Cosmografía, 1 t. enc.	„ 3.50

introduciendo $-an + bn$ en un paréntesis precedido del signo menos:

$$am - bm - an + bn = (am - bm) - (an - bn)$$

factoreando: $\qquad = (a - b)m - (a - b)n$

sacando $a - b$ factor común:

$$\boxed{am - bm - an + bn = (a - b)(m - n)}$$

De los cuatro sub-casos estudiados se deduce la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Cuando el polinomio se puede descomponer en grupos de igual número de términos y con un factor común cada grupo, se factorea ese factor común en cada grupo, y luego, si fuera posible, se continúa sacando factor común de acuerdo con lo estudiado en el primer caso.*

56. 3er. Caso. — Trinomio cuadrado perfecto.

EJEMPLOS TIPOS: $\left\{ \begin{array}{l} \text{I} \quad a^2 + 2ab + b^2 = ? \\ \text{II} \quad a^2 - 2ab + b^2 = ? \end{array} \right.$

SUB-CASO I. $\qquad a^2 + 2ab + b^2 = ?$

Hemos visto, (50), que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

y por definición de potencia:

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b)} \quad (1)$$

Sub-caso II. $a^2 - 2ab + b^2 = ?$

Sabemos, (50), que:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

y por definición de potencia·

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b)} \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) se pueden escribir así:

$$\boxed{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)(a \pm b)}$$

luego.

Regla práctica — *Cuando un polinomio es un trinomio cuadrado perfecto, el polinomio es igual al cuadrado de la suma o de la diferencia de las bases de los cuadrados, según que el signo del segundo término sea positivo o negativo*

57. Condiciones necesarias para que un trinomio sea cuadrado perfecto. — Para determinar las condiciones que debe reunir un trinomio para ser cuadrado perfecto, analicemos la expresión:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Se observa, una vez ordenado el polinomio, que:

1º a^2 es el cuadrado de a, o sea $(a)^2$, y tiene el signo $+$;

2º b^2 „ „ „ „ b, „ „ $(b)^2$, „ „ „ „ $+$;

3º $2ab$ es el duplo de la base a por la base b, y tiene el signo $+$ o $-$, luego:

Las condiciones necesarias para que un trinomio sea cuadrado perfecto, una vez ordenado, son:

1ª, el primero y tercer término deben ser cuadrados perfectos con signos positivos;

2ª, el segundo término debe ser el duplo del producto de las bases de aquellos cuadrados perfectos, pudiendo ser positivo o negativo.

Ejemplos:

1º *Averiguar si* $x^2 + \frac{2}{3} x + \frac{1}{9}$ *es un cuadrado perfecto.*

Análisis:
$x^2 = (x)^2$; x^2 es positivo y cuadrado de x:
$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\frac{1}{9}$ „ „ „ „ „ $\frac{1}{3}$;
$\frac{2}{3} x = 2 \cdot (x) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$; $\frac{2}{3} x$ es el duplo del producto de x y de $\frac{1}{3}$, y positivo.

Como en el análisis hecho se cumplen las condiciones necesarias, se tiene:

$$x^2 + \frac{2}{3} x + \frac{1}{9} = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$$

2º *Averiguar si $x^2 - px + \frac{p^2}{4}$ es un cuadrado perfecto.*

Análisis:
$x^2 = (x)^2$; x^2 es positivo y cuadrado de x;
$\frac{p^2}{4} = \left(\frac{p}{2}\right)^2$; $\frac{p^2}{4}$ „ „ „ „ „ $\frac{p}{2}$;
$px = 2 \cdot (x)\frac{p}{2}$; $-px$ es el duplo del producto de x y $\frac{p}{2}$, y negativo.

Como se cumplen las condiciones exigidas, se tiene:

$$x^2 - px + \frac{p}{x} = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

3º *Averiguar si $a^2 - 2a^3 + 1$ es un cuadrado perfecto.*

Análisis:
$a^2 = (a)^2$; a^2 es positivo y cuadrado de a;
$1 = (1)^2$; 1 „ „ „ „ „ 1;
$2a^3 \neq 1 . (a)(1)$; $-2a^3$ no es el duplo del producto de a y 1.

Como no se cumplen las condiciones diremos:

$a^2 - 2a^3 + 1$ no es cuadrado perfecto.

4º *Averiguar si $a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4$ es un cuadrado perfecto.*

Análisis:
$a^4 = (a^2)^2$; a^4 es positivo y cuadrado de a^2;
$4b^4 = (2b^2)^2$; $4b^4$ „ „ „ „ „ $2b^2$;
$4a^2b^2 = 2(a^2)(2b^2)$; $4a^2b^2$ es el duplo del producto de a^2 y $2b^2$, y positivo.

Como se cumplen las condiciones, se tiene:

$$a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2$$

58. 4º Caso. — Trinomio de segundo grado.

EJEMPLO TIPO: $x^2 + px + q = ?$

Efectuemos el producto de los binomios $x + m$ y $x + n$:

$$\begin{array}{r} x + m \\ \times \quad x + n \\ \hline x^2 + xm \qquad\qquad \\ + xn \quad + mn \\ \hline x^2 + x(m + n) + mn \end{array} \qquad (1)$$

Si comparamos el producto (1) con el polinomio dado:

$$x^2 + px + q$$

se observa que, para que sean iguales, deberá tenerse:

$$p = m + n$$
$$q = mn$$

y en tal caso se tendrá:

$$x^2 + px + q = x^2 + x(m + n) + mn$$

o bien:

$$\boxed{x^2 + px + q = (x + m)(x + n)}$$

Como este ejemplo es general, deducimos la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Cuando un polinomio es un trinomio de la forma $x^2 + px + q$, el polinomio es igual al producto de dos binomios de la forma $x + m$ y $x + n$, tales que sean:* $m + n = p$ y $m \cdot n = q$.

Ejemplos:

1º *Descomponer en factores el trinomio de segundo grado:*

$$x^2 + 6x + 8$$

Hemos de hallar dos números que sumados den 6 y que multiplicados den 8, y procediendo por tanteo, se obtiene:

$$2 + 4 = 6 \quad ; \quad 2 \times 4 = 8$$

luego: $m = 2$ y $n = 4$

es decir, que:

$$x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$$

2º *Descomponer en factores el trinomio de segundo grado:*

$$a^2 + 2a - 24.$$

Haciendo varios ensayos, se obtiene:

$$6 - 4 = 2 \quad ; \quad 6(-4) = -24$$

luego: $m = 6$; $n = -4$

es decir, que:

$$a^2 + 2a - 24 = (a + 6)(a - 4)$$

3º *Descomponer en factores el trinomio de segundo grado:*

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Procediendo como antes, se obtiene:

$$-1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \quad ; \quad (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{2}$$

luego: $m = -1$; $n = -\frac{1}{2}$

es decir que:

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

59. 5º Caso. — Cuatrinomio cubo perfecto.

Ejemplos tipos: $\begin{cases} \text{I} - a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = ? \\ \text{II} - a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = ? \end{cases}$

Sub-caso I. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = ?$

Hemos visto, (51), que:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

y por definición de potencia:

$$\boxed{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)(a+b)(a+b)} \quad (1)$$

Sub-caso II. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = ?$

Sabemos, (51), que:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$$

y por definición de potencia:

$$\boxed{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)(a-b)(a-b)} \quad (2)$$

Las expresiones (1) y (2) se pueden escribir así:

$$\boxed{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b)}$$

de donde deducimos la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Cuando un polinomio es un cuatrinomio cubo perfecto, el polinomio es igual al cubo de la suma o diferencia de las bases de los cubos, según que el segundo y cuarto término sean positivos o negativos, suponiendo ordenado el polinomio.*

60. Condiciones necesarias para que un cuatrinomio sea cubo perfecto. — Para determinar las condiciones que debe reunir un cuatrinomio para que sea cubo perfecto, analicemos la expresión:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

Una vez ordenado el polinomio, se observa que:

1º a^3 es el cubo de a, o sea $(a)^3$, y tiene el signo $+$;

2º b^3 „ „ „ „ b, „ „ $(b)^3$, „ „ „ „ $+$ o $-$;

3º $3a^2b$ es el triplo del producto del cuadrado de a y b, y tiene el signo $+$ o $-$;

4º $3ab^2$ es el triplo del producto de a y el cuadrado de b, y tiene el signo $+$, luego:

Las condiciones necesarias para que un cuatrinomio sea cubo perfecto, una vez ordenado, son:

1ª, el primero y cuarto términos deben ser cubos perfectos y de iguales o distintos signos;

2ª, el segundo término debe ser el triplo del producto del cuadrado de la primera base por la segunda, pudiendo ser positivo o negativo;

3ª, el tercer término debe ser el triplo del producto de la primera base por el cuadrado de la segunda;

4ª, los signos deberán ser o todos iguales, o alternadamente positivos y negativos.

Ejemplo: Averiguar si $8 - 12a + 3a^2 - a^2$ es un cuatrinomio cubo perfecto.

Análisis:

$8 = 2^3$; 8 es positivo y cubo de 2;

$-a^3 = (-a)^3$; $-a^3$ es negativo y cubo de $-a$;

$-12a = 3.2^2(-a)$; $-12a$ es el triplo de 2^2 por $-a$;

$3a^2 = 3.2(-a^2)$; $3a^2$ es el triplo de 2 por $(-a)$.

Del análisis hecho se deduce que:

$$8 - 12a + 3a^2 - a^3 = (2 - a)^3$$

61. 6º Caso. — Diferencia de cuadrados.

Ejemplo tipo: $a^2 - b^2 = ?$

Sabemos, por lo estudiado en primer año, que:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

y por el carácter recíproco de la igualdad:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

luego:

Regla práctica. — *La diferencia de dos cuadrados es igual al producto de la suma por la diferencia de sus bases.*

Ejemplos:

1º *Descomponer en factores* $25 - x^2$

Se tiene: $25 - x^2 = 5^2 - x^2$

o bien: $= (5 + x)(5 - x)$

2º *Descomponer en factores* $\frac{1}{4} a^2 - 9 m^4$

Se tiene: $\frac{1}{4} a^2 - 9m^4 = \left(\frac{1}{2} a\right)^2 - (3m^2)^2$

o bien $= \left(\frac{1}{2} a + 3m^2\right)\left(\frac{1}{2} a - 3m^2\right)$

3º *Descomponer en factores* $\frac{4}{9} a^4b^2 - \frac{16}{25} a^6$.

Se tiene: $\frac{4}{9} a^4b^2 - \frac{16}{25}a^6 = \left(\frac{2}{3} a^2b\right)^2 - \left(\frac{4}{5} a^3\right)^2$

o bien: $= \left(\frac{2}{3} a b + \frac{4}{5} a^3\right)\left(\frac{2}{3} a^2b - \frac{4}{5} a^3\right)$

62. 7º Caso. — Suma o diferencia de potencias de igual grado.

EJEMPLOS TIPOS: $\begin{cases} \text{I - } x^m + a^m = ? \\ \text{II - } x^m - a^m = ? \end{cases}$

SUB-CASO I. $x^m + a^m = ?$

El exponente m puede ser par o impar.

Hemos visto, (44), que cuando m es impar, el binomio $x^m + a_m$ es divisible por la suma $x + a$ de sus bases teniéndose, por la *Regla de Ruffini*, (37):

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{-3} - \ldots\ldots + a^{m-1}$$

y por definición de cociente:

(*m* impar)

$$\boxed{x^m + a^m = (x + a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots\ldots + a^{m-1})} \quad (1)$$

En (44) vimos que $x^m + a^m$ es divisible por $x + a$ sólo cuando m fuese impar y en (45) se vió que $x^m + a^m$ nunca era divisible por $x - a$, luego la descomposición en factores de la expresión (1) es la única posible, y siempre que m sea impar.

SUB-CASO II. $x^m - a^m = ?$

El exponente m puede ser par o impar

Si m es par, en (46) hemos estudiado que el binomio $x^m - a^m$ es divisible por la suma $x + a$ de sus bases teniéndose, por la *Regla de Ruffini* (37):

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots\ldots - a^{m-1}$$

y por definición de cociente:

(m par)

$$\boxed{x^m - a^m = (x + a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots\ldots - a^{m-1})} \quad (2)$$

Por otra parte, por lo estudiado en (47), el binomio $x^m - a^m$ siempre es divisible por la diferencia $x - a$ de sus bases, ya sea m par o impar, luego, por la *Regla de Ruffini*, se tiene:

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + \ldots\ldots + a^{m-1}$$

y por definición de cociente:

(m par o impar)

$$\boxed{x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + x^{m-2}a + x^{m-3}a^2 + \ldots\ldots + a^{m-1})} \quad (3)$$

De los dos subcasos estudiados deducimos la siguiente:

Regla práctica. — *Para descomponer en producto a la suma o diferencia de potencias de igual grado, basta aplicar las condiciones de divisibilidad por la suma o diferencia de sus bases y la Regla de Ruffini.*

Ejemplos:

1º *Descomponer en factores* $x^3 + a^3$.

El binomio dado es divisible por $x + a$:

$$\frac{x^3 + a^3}{x + a} = x^2 - xa + a^2$$

luego: $$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - xa + a^2)$$

2º *Descomponer en factores* $a^4 - b^4$.

El binomio dado es divisible por $a + b$:

$$\frac{a^4 - b^4}{a + b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$$

luego: $$a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

3º *Descomponer en factores* $a^3 - m^3$.

El binomio dado es divisible por $a - m$:

$$\frac{a^3 - m^3}{a - m} = a^2 + am + m^2$$

luego: $$a^3 - m^3 = (a - m)(a^2 + am + m^2)$$

63. Combinación de los casos de factoreo. — Ejercicios:

1º *Descomponer en factores la expresión* $5a^2 - 45m^2$.

Sacando el factor común 5, (54):

$$5a^2 - 45m^2 = 5(a^2 - 9m^2)$$

descomponiendo la diferencia de cuadrados, (61):

$$5a^2 - 45m^2 = 5(a + 3m)(a - 3m)$$

2º *Descomponer en factores la expresión* $a^2 - ab - b - 1$.

Por las propiedades conmutativa y asociativa de la suma, podemos escribir:

$$a^2 - ab - b - 1 = (a^2 - 1) - (ab + b)$$

descomponiendo la diferencia de cuadrados, (61), y sacando el factor común b, en el segundo paréntesis:

$$= (a + 1)(a - 1) - (a + 1)b$$

sacando el factor común $a + 1$, queda:

$$= (a + 1)[(a - 1) - b]$$

y finalmente:

$$a^2 - ab - b - 1 = (a + 1)(a - b - 1)$$

3º *Descomponer en factores la expresión*:

$$a^2x - abx + a^2y - aby$$

Sacando el factor común a:

$$a^2x - abx + a^2y - aby = a(ax - bx + ay - by)$$

Descomponiendo en grupos de igual número de términos y con un factor común cada grupo, (55):

$$= a[(ax - bx) + (ay - by)]$$

$$= a[(a - b)x + (a - b)y]$$

factoreando $a - b$: $$= a[(a - b)(x + b)]$$

y finalmente:

$$a^2x - abx + a^2y - aby = a(a - b)(x + y)$$

4º *Descomponer en factores la expresión* $a^3 - 2a^2 - 3a$.

Sacando el factor común a:

$$a^3 - 2a^2 - 3a = a(a^2 - 2a - 3)$$

El paréntesis es un trinomio de la forma $x^2 + px + q$, (58), en donde se tiene que:

$$m = -3 \quad ; \quad n = 1$$

luego:

$$a^3 - a^2 - 3a = a(a-3).(a+1)$$

5º *Descomponer en factores la expresión*:

$$a^3 + a^2 - 4a - 4$$

Descomponiendo en grupos de igual número de términos la expresión dada, y factoreando en cada grupo, se tiene:

$$a^3 + a^2 - 4a - 4 = (a^3 + a^2) - (4a + 4)$$
$$= a^2(a+1) - 4(a+1)$$

sacando el factor común $a + 1$:

$$= (a^2 + 1)(a^2 - 4)$$

descomponiendo la diferencia de cuadrados:

$$a^3 + a^2 - 4a - 4 = (a+1)(a+2)(a-2)$$

6º *Descomponer en factores la expresión*:

$$(x-y)(x^2 - z^2) - (x-z)(x^2 - y^2)$$

Descomponiendo las diferencias de cuadrados:

$$(x-y)(x^2 - z^2) - (x-z)(x^2 - y^2) =$$
$$= (x-y)(x+z)(x-z) - (x-z)(x+y)(x-y)$$

sacando el factor común $(x-y)(x-z)$:

$$= (x-y)(x-z)[(x+z) - (x+y)]$$

o bien:
$$= (x-y)(x-z)(x+z-x-y)$$

y por último:

$$(x-y)(x^2 - z^2) - (x-z)(x^2 - y^2) = (x-y)(x-z)(z-y)$$

7º *Descomponer en factores la expresión:* $3a^5 - 48ab^8$
Sacando el factor común $3a$:

$$3a^5 - 48ab^8 = 3a(a^4 - 16b^8)$$

descomponiendo la diferencia de cuadrados del paréntesis:

$$= 3a(a^2 + 4b^4)(a^2 - 4b^4)$$

volviendo a descomponer la diferencia de cuadrados:

$$3a^5 - 48ab^8 = 3a(a^2 + 4b^4)(a + 2b^2)(a - 2b^2)$$

8º *Descomponer en factores la expresión:*

$$4a^3b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

Como la expresión dada es una diferencia de cuadrados, se tiene:

$$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = [2ab + (a^2 + b^2 - c^2)][2ab - (a^2 + b^2 - c^2)]$$

suprimiendo paréntesis:

$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

o bien $= [(2ab + a^2 + b^2) - c^2][-(-2ab + a^2 + b^2) + c^2]$

en los paréntesis tenemos los cuadrados de un binomio, luego:

$$= [(a+b)^2 - c^2][-(a-b)^2 + c^2]$$

$$= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$$

y, por último, descomponiendo las diferencias de cuadrados, queda:

$$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) = (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

EJERCICIOS

Factorear las siguientes expresiones algebraicas:

147. $2a^2 - 6ab + 4ac$ — R: $2a(a - 3b + 2c)$
148. $6a^3b^2 - 9a^2b^4 + 15ab^2$ — „ $3ab^2(2a^2 - 3ab^2 + 5)$
149. $25a^2 + 30a^4 - 35a^6$ — „ $5a^2(5 + 6a^2 - 7a^4)$
150. $6a^2x^3 - 3ax^4 + 21a^4x^5$ — „ $3ax^3(2a - x + 7a^3x^2)$
151. $30a^3x^3 - 12a^3x^5 + 42a^2x^4 - 12a^3x^4$
R: $6a^2x^3(5a - 2ax^2 + 7x - 2ax)$

152. $\frac{4}{5}a^3 - \frac{2}{10}a + \frac{3}{10}a^4$

R: $\frac{1}{5}a(4a^2 - 1 + \frac{3}{2}a^3)$

---

153. $x^2 + ax + bx + ab$ — R: $(x + a)(x + b)$
154. $ap + ax - 2bx - 2bp$ — „ $(a - 2b)(p + x)$
155. $ab - 5x - ax + 5b$ — „ $(a + 5)(b - x)$
156. $ab - bm - ax + mx$ — „ $(a - m)(b - x)$
157. $6a^2 - 9ab + 8a - 12b$ — „ $(2a - 3b)(3a + 4)$

al $\to$ 158. $12a - 4a^2 + 15a^2b - 20a^3b$ — „ $(3a - 4a^2)(4 + 5ab)$

$+ \to 16a^2$

---

159. $a^2 + 2ax + x^2$ — R: $(a + x)^2$
160. $9 - 6a + a^2$ — „ $(3 - a)^2$
161. $4a^2 - 12ab + 9b^2$ — „ $(2a - 3b)^2$
162. $9b^2 + 12a^2b + 4a^4$ — „ $(3b + 2a^2)^2$
163. $9x^2 - 3xy + \frac{1}{4}y^2$ — „ $(3x - \frac{1}{2}y)^2$
164. $\frac{1}{9}a^2 + 2a^3 + 9a^4$ — „ $\left(\frac{1}{3}a + 3a^2\right)^2$

---

165. $x^2 + 8x + 15$ — R: $(x + 5)(x + 3)$
166. $x^2 + 7x + 12$ — „ $(x + 4)(x + 3)$
167. $a^2 - 2a - 48$ — „ $(a + 6)(a - 8)$
168. $x^2 + x - 6$ — „ $(x - 2)(x + 3)$
169. $b^2 - 9b + 20$ — „ $(b - 4)(b - 5)$
170. $c^2 - 8c + 15$ — „ $(c - 5)(c - 3)$

171. $8a^3 + 12a^2b + 18ab^2 + 27b^3$ R: $(2a + 3b)^3$

172. $125 - 75a^2 + 15a^4 - a^6$ „ $(5 - a^2)^3$

173. $64m^3 + 48m^2x^2 + 12mx^4 + x^6$ „ $(4m + x^2)^3$

174. $a^8 - 3a^4b + 3a^2b^6 - b^9$ „ $(a^2 - 9b^3)^3$

175. $1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$ „ $(1 + 2a)^3$

176. $27a^3 - 54a^2x + 36ax^2 - 8x^3$ „ $(3a - 2x)^3$

---

177. $4a^2 - 9b^2$ R: $(2a + 3b)(2a - 3b)$

178. $a^2 - 4x^2$ „ $(a + 2x)(a - 2x)$

179. $a^2x^2 - b^6x^6$ „ $(ax + b^3x^3)(ax - b^3x^3)$

180. $a^2 - \frac{1}{4}$ „ $\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right)$

181. $\frac{1}{4}a^2 - b^2$ „ $\left(\frac{1}{2}a + b\right)\left(\frac{1}{2}a - b\right)$

182. $81c^8 - 25m^2$ „ $(9c^4 + 5m)(9c^4 - 5m)$

---

183. $a^3 + b^3$ R: $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

184. $x^3 - m^3$ „ $(x - m)(x^2 + xm + m^2)$

185. $a^5 + b^5$ „ $(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

186. $b^4 - x^4$ „ $(b + x)(b^3 - b^2x + bx^2 - x^3)$

187. $a^6 - c^6$ „ $(a - c)(a^5 + a^4c + a^3c^2 + a^2c^3 + ac^4 + c^5)$

188. $x^4 - a^4$ „ $(x - a)(x^3 - x^2a + xa^2 - a^3)$

---

189. $x^3y - xy^3$ R: $xy(x + y)(x - y)$

190. $a^4 - 1$ „ $(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$

191. $2a^4 - 4a^3 + 4a - 2$ „ $2(a + 1)(a - 1)^3$

192. $36a^2b^5c^3 - 24a^3b^4c^2d + 4a^4b^3cd^2$

„ $4a^2b^3c(3bc - ad)^2$

193. $am^2 - an^2 + bm^2 - bn^2$ „ $(m + n)(m - n)(a + b)$

194. $3a^2 - 3a - 18$ „ $3(a + 2)(a - 3)$

195. $3a^4x - 3a^2x^3 + 3a^3x^2 - 3ax^3$

„ $3ax(a + x)^2(a - x)$

196. $(x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2) - (x - 1)$

„ $(x - 1)^2(x - 3)$

CAPITULO IX

PROGRAMA IX. — *Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas* — Funciones enteras primas: definición y ejemplos. El M. C. D. de varias expresiones algebraicas enteras como producto de sus factores primos comunes tomados con su menor exponente. El M. C. M. de varias expresiones algebraicas enteras como producto de sus factores primos comunes y no comunes tomados con su mayor exponente. Ejercicios.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas.

64. Funciones enteras primas. — Se llama *función entera prima* a la expresión algebraica que no contiene letras como denominador ni afectadas por exponentes negativos, y no se puede descomponer en factores.

Ejemplos:

$$\frac{2}{3}a \;;\; 3a - 2 + m; \;\; \frac{1}{2}x - \sqrt{a} + b^2$$

Una expresión algebraica es *compuesta*, cuando se puede descomponer en factores, como $a^2 - b^2$.

65. Máximo común divisor. — Se llama *máximo común divisor* de varias expresiones algebraicas, al producto que se obtiene multiplicando sus factores primos comunes tomados con su menor exponente.

Esta definición es, ni más ni menos, que la regla práctica que hemos deducido en el primer año (*) referente a

(*) Véase nuestra *Aritmética* para 1er. Año, página 164.

los números. Al fin y al cabo, las expresiones algebraicas son, en definitiva, números también.

Ejemplo. — *Hallar el m. c. d. de las siguientes expresiones algebraicas:*

$$2ab + 4b \quad ; \quad 2a^2 - 8 \quad ; \quad 6a^2 + 24a + 24$$ 1ª

Descomponiendo las expresiones dadas en sus factores primos, según hemos visto en el capítulo anterior, resulta:

$$\boxed{2ab} + 4b = 2b(a + 2)$$

$$2a^2 - 8 = 2(a + 2)(a - 2)$$

$$6a^2 + 24a + 24 = 2 \cdot 3(a + 2)^2$$ $a^2 + 2a + b^2$

y por la definición, resulta:

$$m. c. d. = 2(a + 2) = 2a + 4$$

Otro ejemplo. — *Hallar el m. c. d. de las siguientes expresiones algebraicas:*

$$4a^4b - 4a^3b - 8a^2b\,;$$

$$2a^4b^2 - 6a^2b^2 - 4ab^2\,;$$

$$8a^6b - 8a^5b - 8a^4b + 8a^3b\,;$$

$$6a^3b - 6ab\,;$$

Aplicando los diversos casos de factoreo estudiados en el capítulo anterior, se obtiene:

$$4a^4b - 4a^3b - 8a^2b = \boxed{4a^2b}(a + 1)(a - 2)$$

$$2a^4b^2 - 6a^2b^2 - 4ab^2 = 2ab^2(a + 1)^2(a - 2)$$

$$8a^6b - 8a^5b - 8a^4b + 8a^3b = 8a^3b(a + 1)(a - 1)^2.$$

$$6a^3b - 6ab = 6ab\,(a + 1)(a - 1)$$

y por definición:

$$m.\,c.\,d. = 2ab(a+1) = 2a^2b + 2ab\,.$$

66. Mínimo común múltiplo. — Se llama *mínimo común múltiplo* de varias expresiones algebraicas, al producto que se obtiene multiplicando sus factores primos comunes y no comunes tomados con su mayor exponente. Esta definición es la regla práctica que habíamos deducido en primer año para hallar el *m. c. m.* de varios números. Su aplicación a las expresiones algebraicas es válida, dado que éstas son números también (*).

Ejemplo. — *Hallar el m. c. m. de las siguientes expresiones algebraicas:*

$$2ab + 4b \quad ; \quad 2a^2 - 8 \quad ; \quad 6a^2 + 24a + 24$$

Descomponiendo estas expresiones en sus factores primos, resulta:

$$2ab + 4b = 2b(a+2)$$
$$2a^2 - 8 = 2(a+2)(a-2)$$
$$6a^2 + 24a + 24 = 2.3(a-2)$$

y por la definición, se obtiene:

$$m.\,c.\,m. = 2b\,.\,3(a+2)^2(a-2)$$

y efectuando los productos indicados:

$$m.\,c.\,m. = 6a^3b + 12a^2b - 24ab - 48b$$

Otro ejemplo: *Hallar el m. c. m. de las siguientes expresiones:*

$$3a^4 + 3a^2b^2 \;;\; 2a^2b - 2ab^2 \;;\; a^3b^2 - a^2b^3 + 2a^2b^2 - 2ab^3$$

(*) Ver nuestra *Aritmética* para 1er. Año, página 165

Descomponiendo estas expresiones en sus factores primos:

$$3a^4 - 3a^2b^2 = 3a^2(a+b)(a-b)$$

$$2a^2b - 2ab^2 = 2ab(a-b)$$

$$a^3b^2 - a^2b^3 + 2a^2b^2 - 2ab^3 = ab^2(a-b)(a+2)$$

y por definición:

$$m.\ c.\ m. = 2.3a^2b^2(a+b)(a-b)(a+2)$$

y efectuando los productos indicados, resulta:

$$m.\ c.\ m. = 6a^5b^2 - 6a^3b^4 + 12a^4b^2 - 12a^2b^4$$

Observación. — Al determinar el *m. c. d.* y el *m. c. m.* de varias expresiones algebraicas, es preferible dejar indicados los productos respectivos en lugar de efectuarlos.

EJERCICIOS

Hallar el *m. c. d.* y el *m. c. m.* de las siguientes expresiones:

197. $7ab^2$; $14ac$; $21a^2b$ — R: $7a$; $42a^2b^2c$

198. $12ab$; $60b^2$; $15ab^3$ — „ $3b$; $60ab^3$

199. $8b^3$; $21ab$; $24b^5$ — „ $3b$; $168ab^5$

200. $30c^2m^3$; $6b^2c$; $15bx$ — „ 3 ; $90b^2c^2m^3x$

201. $x^2 + ab + bx + ax$; $3x^2 - 3a^2$ ..
R: $x + a$; $3(x + a)(x - a)(x + b)$

202. $a^2 - 4$; $a^3 - 3a + 2$; $a^2 - 4a + 4$
R: $a - 2$; $(a - 2)^2(a + 2)(a - 1)$

203. $5ab - 10a$; $a^2b - 2a^2 + 2ab - 4a$
R: $a(b - 2)$; $5a(b - 2)(a + 2)$

204. $2x^2 + 6x$; $4x^4 + 24x^3 + 36x^2$; $4x^2 + 8x - 12$
R: $2(x + 3)$; $4x^2(x + 3)^2(x - 1)$

205. $3a^3 + 9a^2 + 9a$; $6a^3 - 12a^2$; $12a^3 - 12a^2 - 24a$
R: $3a$; $12a^2(a + 1)(a + 2)(a - 2)$

206. $15ax^2y - 6bx^2y$; $5axy^2 - 2bxy^3$; $30ax^2y - 12bx^2y +$
$+ 30axy^2 - 12bxy^2$
R: $xy(5a - 2b)$; $6x^2y^2(5a - 2b)(x + y)$

CAPITULO X

PROGRAMA X. — *Expresiones algebraicas fraccionarias.* Simplificación, Ejercicios. Reducción a común denominador. Mínimo común denominador. Ejercicios.

Expresiones algebraicas fraccionarias

67. Expresión algebraica fraccionaria. — Se llama *expresión algebraica fraccionaria*, o *fracción algebraica*, a la expresión cuyo denominador es *literal* en todo o en parte.

Ejemplos: $\dfrac{d}{c}$; $\dfrac{a - m}{x}$; $\dfrac{4 - 2a^3 + m}{a^2 - 2}$

68. Simplificación. — *Simplificar* una expresión algebraica fraccionaria, es hallar otra que le sea igual, pero cuyos términos sean menores.

En el curso del segundo año hemos visto cómo se simplifica una expresión fraccionaria, por lo que diremos:

Para simplificar una expresión cuyo numerador y denominador son expresiones algebraicas enteras, se descomponen éstas en sus factores primos, y se simplifican los factores comunes del numerador y denominador.

Ejemplos. — **1º** *Simplificar la expresión:*

$$\frac{a^3 - a^2 + a - 1}{a^2 - 3a + 2}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$a^3 - a^2 + a - 1 = a^2(a-1) + (a-1)$$
$$= (a^2+1)(a-1)$$
$$a^2 - 3a + 2 = (a-2)(a-1)$$

CÁLCULOS DEFINITIVOS

$$\frac{a^3 - a^2 + a - 1}{a^2 - 3a + 2} = \frac{(a^2+1)(a-1)}{(a-2)(a-1)}$$

Simplificando el factor común $a - 1$ a los dos términos resulta:

$$\frac{a^3 - a^2 + a - 1}{a^2 - 3a + 2} = \frac{a^2+1}{a-2}$$

2º *Simplificar la expresión:*

$$\frac{x^3-1}{x^4-1}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^4 - 1 = x^4 - 1^4$$
$$= (x^2+1)(x^2-1)$$
$$= (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

CÁLCULOS DEFINITIVOS

$$\frac{x^3-1}{x^4-1} = \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x+1)(x-1)}$$

simplificando por $x-1$:

$$\frac{x^3-1}{x^4-1}=\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+1)}$$

efectuando el producto indicado

$$\frac{x^3-1}{x^4-1}=\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$$

3° *Simplificar la expresión:*

$$\frac{9ab-12b^2}{6a^2-8ab}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$9ab-12b^2=3b(3a-4b)$$

$$6a^2-8ab=2a(3a-4b)$$

CÁLCULOS DEFINITIVOS

$$\frac{9ab-12b^2}{6a^2-8ab}=\frac{3b(3a-4b)}{2a(3a-4b)}$$

simplificando el paréntesis común, queda:

$$\frac{9ab-12b^2}{6a^2-8ab}=\frac{3b}{2a}$$

69. Reducción a común denominador. — *Reducir varias fracciones a común denominador,* es hallar otras fracciones iguales a las dadas, pero cuyo denominador sea el mismo para todas.

Sea reducir a común denominador las fracciones:

$$\frac{a}{m};\ \frac{b}{n};\ \frac{c}{p}$$

Sabemos, por lo estudiado en segundo año, que si se multiplican ambos términos de una fracción por un mismo número, distinto de cero, se obtiene una fracción igual a la dada. Multiplicando ambos términos de la primera fracción por np; ambos términos de la segunda por mp, y ambos términos de la tercera por mn, se obtiene:

$$\frac{a}{m} = \frac{a \,.\, np}{m \,.\, np} = \frac{anp}{mnp}$$

$$\frac{b}{n} = \frac{b \,.\, mp}{n \,.\, mp} = \frac{bmp}{mnp}$$

$$\frac{c}{p} = \frac{c \,.\, mn}{p \,.\, mn} = \frac{cmn}{mnp}$$

Constatamos que las fracciones obtenidas son iguales a las dadas y que el denominador es común para todas, luego:

Para reducir fracciones algebraicas a común denominador, se multiplican todos los denominadores y el producto será el denominador común, obteniéndose los respectivos numeradores multiplicando el numerador de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás fracciones.

Ejemplo: *Reducir a común denominador las fracciones*

$$\frac{a-1}{2a}, \quad \frac{a+1}{a}, \quad \frac{2a}{3}$$

Aplicando la regla práctica anterior, resulta:

$$\frac{a-1}{2a} = \frac{(a-1)a \,.\, 3}{2a \,.\, a \,.\, 3} = \frac{3a^2 - 3a}{6a^2}$$

$$\frac{a+1}{a} = \frac{(a+1)2a \,.\, 3}{2a \,.\, a \,.\, 3} = \frac{6a^2 + 6a}{6a^2}$$

$$\frac{2a}{3} = \frac{2a \,.\, 2a \,.\, a}{2a \,.\, a \,.\, 3} = \frac{4a^3}{6a^2}$$

Otro ejemplo: *Reducir a común denominador las fracciones*

$$\frac{1}{x};\ \frac{2}{x+1};\ \frac{2}{x-1}$$

Se tiene:

$$\frac{1}{x}=\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-1}{x(x^2-1)}$$

$$\frac{2}{x+1}=\frac{2\,.\,x(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{2x(x-1)}{x(x^2-1)}$$

$$\frac{2}{x-1}=\frac{2\,.\,x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{2x(x+1)}{x(x^2-1)}$$

Dejamos indicados los productos porque así son expresiones más cómodas para ulteriores cálculos.

70. Reducir al mínimo común denominador.

Reducir varias fracciones algebraicas *al mínimo común denominador,* es hallar otras fracciones iguales a las dadas, pero cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los denominadores dados.

Sea reducir al mínimo común denominador las fracciones:

$$\frac{a}{m};\ \frac{b}{n};\ \frac{c}{p}$$

Supongamos que sea:

$$m.\ c.\ m.\ (m,\ n,\ p)=M$$

Multiplicando ambos términos de la primera fracción por $M:m$; ambos términos de la segunda por $M:n$, y ambos términos de la tercera por $M:p$, resulta:

$$\frac{a}{m}=\frac{a(M:m)}{m(M:m)}=\frac{a(M:m)}{M}$$

$$\frac{b}{n}=\frac{b(M:n)}{n(M:n)}=\frac{b(M:n)}{M}$$

$$\frac{c}{p}=\frac{c(M:p)}{p(M:p)}=\frac{c(M:p)}{M}$$

luego:

Para reducir fracciones algebraicas al mínimo común denominador, se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores, quien será el denominador común. Los numeradores respectivos se obtienen multiplicando cada numerador por el cociente del mínimo común múltiplo hallado y el denominador respectivo.

Ejemplo: *Reducir al mínimo común denominador las fracciones:*

$$\frac{a+1}{2a^3-4a^2}\ ;\ \frac{a-1}{2a^3+4a^2}\ ;\ \frac{1}{a^2-4}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

1º Determinación del m. c. m. de los denominadores:

$$2a^3-4a^2=2a^2(a-2)$$

$$2a^3+4a^2=2a^2(a+2)$$

$$a^2-4\ =(a+2)(a-2)$$

$$m.\,c.\,m.=2a^2(a+2)(a-2)$$

$$=2a^2(a^2-4)$$

2º Primer cociente:

$$\frac{m.\,c.\,m.}{2a^3-4a^2}=\frac{2a^2(a+2)(a-2)}{2a^2(a-2)}=a+2$$

3° Segundo cociente:

$$\frac{m.\ c.\ m.}{2a^3+4a^2} = \frac{2a^2(a+2)(a-2)}{2a^2(a+2)} = a - 2$$

4° Tercer cociente:

$$\frac{m.\ c.\ m.}{a^2-4} = \frac{2a^2(a+2)(a-2)}{(a+2)(a-2)} = 2a^2$$

CÁLCULOS DEFINITIVOS

$$\frac{a+1}{2a^3-4a^2} = \frac{(a+1)(a+2)}{2a^2(a^2-4)}$$

$$\frac{a-1}{2a^3+4a^2} = \frac{(a-1)(a-2)}{2a^2(a^2-4)}$$

$$\frac{1}{a^2-4} = \frac{2a^2}{2a^2(a^2-4)}$$

EJERCICIOS

Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

207. $\dfrac{35a^2b^3c^3}{7a^3b^4c^8}$ R. $\dfrac{5}{abc^5}$

208. $\dfrac{ax^3 - a^4}{2am + 3an}$ " $\dfrac{x^3 - a^3}{2m + 3n}$

209. $\dfrac{12a^2 - 2ab}{16a^2}$ " $\dfrac{6a - b}{8a}$

210. $\dfrac{a^2 - 2a + 1}{a - 1}$ " $a - 1$

211. $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$ " $\dfrac{x - y}{x + y}$

212. $\dfrac{ac + bc + ad + bd}{a^2 + ab}$ " $\dfrac{c + d}{a}$

213. $\dfrac{a^3 + b^3}{(a - b)^2 + ab}$ " $a + b$

Reducir a común denominador:

214. $\frac{2a}{3}$; $\frac{a}{2}$; $\frac{3}{2a}$ R: $\frac{8a^2}{12a}$; $\frac{6a^2}{12a}$; $\frac{18}{12a}$

215. $\frac{a}{3}$; $\frac{3a}{2}$; $\frac{a}{5}$,, $\frac{10a}{30}$; $\frac{45a}{30}$; $\frac{6a}{30}$

216. $\frac{a+b}{3}$; $\frac{2}{a+b}$,, $\frac{(a+b)^2}{3(a+b)}$; $\frac{6}{3(a+b)}$

217. $\frac{x+y}{x-y}$; $\frac{x-y}{x+y}$,, $\frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$; $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$

Reducir al mínimo común denominador:

218. $\frac{2}{3a}$; $\frac{5}{6a^2}$; $\frac{1}{a}$ R: $\frac{4a}{6a^2}$; $\frac{5}{6a^2}$; $\frac{6}{6a^2}$

219. $\frac{2a}{3x}$; $\frac{3a}{4x}$; $\frac{5a}{6x}$,, $\frac{8a}{12x}$; $\frac{9a}{12x}$; $\frac{10a}{12x}$

220. $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{x+1}$; $\frac{2}{x-1}$

R: $\frac{x^2-1}{x(x^2-1)}$; $\frac{2x(x-1)}{x(x^2-1)}$; $\frac{2x(x+1)}{x(x^2-1)}$

221. $\frac{a^2}{a+b}$; $\frac{ab}{a-b}$; $\frac{3a-2\,ab}{a^2-b^2}$

R: $\frac{a^2(a-b)}{a^2-b^2}$; $\frac{ab(a+b)}{a^2-b^2}$; $\frac{3a-2ab}{a^2-b^2}$

222. $\frac{1}{x-a}$; $\frac{a+x}{x^2+ax+a^2}$; $\frac{ax}{x^3-a^3}$

R: $\frac{x^2+ax+a^2}{x^3-a^3}$; $\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$; $\frac{ax}{x^3-a^3}$

CAPITULO XI

PROGRAMA XI. — *Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.* Suma, resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas fraccionarias. Ejercicios.

Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

Suma de fracciones algebraicas

71. Definiciones. — I. Se llama *suma de varias fracciones algebraicas de igual denominador,* a otra fracción cuyo numerador es la suma de los numeradores y cuyo denominador es el mismo.

Es decir: $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}$

Ejemplo:

$$\frac{a^2+4}{a+b}+\frac{b^2-4}{a+b}-\frac{2b^2}{a+b}=\frac{a^2+4+b^2-4-2b^2}{a+b}$$
$$=\frac{a^2-b^2}{a+b}$$
$$=a-b$$

II. Se llama *suma de varias fracciones algebraicas de distinto denominador,* a la suma de otras tantas fracciones de igual denominador, respectivamente iguales a las dados.

Es decir: $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=\frac{a'}{d}+\frac{b'}{d}+\frac{c'}{d}$

Siempre que sea:

$$\frac{a'}{d}=\frac{a}{m}\,;\;\frac{b'}{d}=\frac{b}{n}\,;\;\frac{c'}{d}=\frac{c}{p}$$

72. Procedimientos para sumar expresiones algebraicas fraccionarias.

I. MÉTODO DEL COMÚN DENOMINADOR. — Sea:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}$$

Según (69), reduzcamos a común denominador:

$$\frac{a}{m}=\frac{anp}{mnp}$$

$$\frac{b}{n}=\frac{bmp}{mnp}$$

$$\frac{c}{p}=\frac{cmn}{mnp}$$

y por la propiedad uniforme de la suma:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=\frac{anp}{mnp}+\frac{bmp}{mnp}+\frac{cmn}{mnp}$$

y por la definición (71, I):

$$\boxed{\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=\frac{anp+bmp+cmn}{mnp}}$$

de donde se deduce la siguiente

REGLA PRÁCTICA. — *Para sumar varias fracciones de distinto denominador, se halla el producto de los diversos denominadores, quien será el denominador de la suma. El* *numerador es igual a la suma de los productos que se obtienen al multiplicar cada numerador por los denominadores de las demás fracciones.*

Ejemplo: Efectuar la suma:

$$\frac{3a}{a+1}+\frac{a}{a-1}-\frac{4}{a}$$

Aplicando la regla práctica anterior, se obtiene:

$$\frac{3a}{a+1}+\frac{a}{a-1}-\frac{4}{a}=\frac{3a^2(a-1)+a^2(a+1)-4(a^2-1)}{(a^2-1)a}$$

efectuando los productos del numerador:

$$=\frac{(3a^3-3a^2)+(a^3+a^2)-(4a^2-4)}{(a^2-1)a}$$

suprimiendo los paréntesis.

$$=\frac{3a^3-3a^2+a^3+a^2-4a^2+4}{(a^2-1)a}$$

reduciendo los términos semejantes, resulta:

$$=\frac{4a^3-6a^2+4}{(a^2-1)a}$$

que es la suma buscada.

73. II. Método del mínimo común denominador. — Sea:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}$$

Según (70). reduzcamos al mínimo denominador:

$$\frac{a}{m}=\frac{a\,(M:m)}{M}$$

$$\frac{b}{n}=\frac{b\,(M:n)}{M}$$

$$\frac{c}{p}=\frac{c\,(M:p)}{M}$$

siendo $M = m.\ c.\ m.\ (m, n, p)$

luego:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=\frac{a\,(M:m)}{M}+\frac{b\,(M:n)}{M}+\frac{c\,(M:p)}{M}$$

y por definición de suma, (71, I)

$$\boxed{\frac{a}{m}+\frac{b}{n}+\frac{c}{p}=\frac{a\,(M:m)+b\,(M:n)+c\,(M:p)}{M}}$$

de donde se deduce la siguiente

REGLA PRÁCTICA. — *Para sumar varias fracciones algebraicas de distinto denominador, se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores, quien será el denominador de la suma. El numerador es igual a la suma de los productos que se obtienen al multiplicar cada numerador por el cociente del mínimo común múltiplo hallado y el denominador respectivo.*

Ejemplo: Efectuar la suma:

$$\frac{2a}{a+1}+\frac{3a}{a-1}-\frac{4a}{a^2-1}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$m.\ c.\ m.\ (a+1\ ;\ a-1\ ;\ a^2-1)=a^2-1$$

$$\frac{M}{m}=\frac{a^2-1}{a+1}=a-1$$

$$\frac{M}{n}=\frac{a^2-1}{a-1}=a+1$$

$$\frac{M}{p}=\frac{a^2-1}{a^2-1}=1$$

CÁLCULOS DEFINITIVOS

Aplicando la regla práctica última:

$$\frac{2a}{a+1}+\frac{3a}{a-1}-\frac{4a}{a^2-1}=\frac{2a(a-1)+3a(a+1)-4a\,.\,1}{a^2-1}$$

efectuando los productos del numerador:

$$=\frac{(2a^2-2a)+(3a^2+3a)-4a}{a^2-1}$$

suprimiendo los paréntesis:

$$=\frac{2a^2-2a+3a^2+3a-4a}{a^2-1}$$

reduciendo los términos semejantes, resulta:

$$=\frac{5a^2-3a}{a^2-1}$$

que es la suma buscada.

Resta de fracciones algebraicas

74. Definición. — Se llama *diferencia* entre dos fracciones algebraicas, llamadas *minuendo* y *sustraendo*, a otra fracción algebraica, tal, que sumada al sustraendo dé una suma igual al minuendo.

Es decir:

$$\frac{a}{m}-\frac{a}{n}=\frac{c}{p},\ \text{siempre que}\ \frac{c}{p}+\frac{a}{n}=\frac{a}{m}$$

75. Procedimientos para hallar la diferencia de dos fracciones algebraicas.

Las fracciones dadas pueden tener el mismo o distinto denominador.

1º RESTAR FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR. — Sea hallar la diferencia:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m}$$

Por lo estudiado en segundo año, sabemos que:

$$-\frac{b}{m} = \frac{-b}{m} = \frac{b}{-m}$$

luego:
$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{-b}{m}$$

y por definición, (71, I), de suma de fracciones:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a + (-b)}{m}$$

y por la convención (11):

$$\boxed{\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m}}$$

de donde se deduce la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para restar dos fracciones algebraicas de igual denominador, se restan los numeradores, obteniéndose así el numerador de la diferencia, dejando como denominador el mismo.*

Ejemplo: Efectuar la resta:

$$\frac{5a}{2b} - \frac{3a}{2b}$$

Aplicando la regla práctica anterior, se obtiene:

$$\frac{5a}{2b} - \frac{3a}{2b} = \frac{5a - 3a}{2b}$$

$$= \frac{2a}{2b}$$

y simplificando:
$$= \frac{a}{b}$$

76. 2º RESTAR FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR Sea hallar la diferencia:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n}$$

Por lo mismo que en el caso anterior, se tiene:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{a}{m} + \frac{-b}{n}$$

Efectuando la suma del segundo miembro por cualquiera de los dos procedimientos estudiados, por ejemplo, el primero, (72):

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an + (-bm)}{mn}$$

o bien:

$$\boxed{\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an - bm}{mn}}$$

luego:

REGLA PRÁCTICA. — *Para restar dos fracciones algebraicas de distinto denominador, se reducen a común denominador, o al mínimo común denominador, y luego se procede como en el caso anterior.*

Ejemplo: Efectuar la resta:

$$\frac{a+2}{6} - \frac{a-1}{4}$$

Reduciendo al mínimo común denominador:

$$\frac{a+2}{6} - \frac{a-1}{4} = \frac{2(a+2)}{12} - \frac{3(a-1)}{12}$$

aplicando la regla práctica anterior:

$$= \frac{2(a+2) - 3(a-1)}{12}$$

efectuando los productos:

$$= \frac{2a + 4 - 3a + 3}{12}$$

reduciendo los términos semejantes, resulta:

$$= \frac{-a + 7}{12}$$

que es la diferencia buscada.

Otro ejemplo: Efectuar la resta:

$$\frac{a-1}{2a^3 - 6a^2} - \frac{a}{a^2 - 9}$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$\left.\begin{array}{r} 2a^3 + 6a^2 = 2a^2(a+3) \\ a^2 - 9 = (a+3)(a-3) \end{array}\right\} m.\,c.\,m. = 2a^2(a+3)(a-3)$$

$$\frac{m.\,c.\,m.}{2a^3 + 6a^2} = \frac{2a^2(a+3)(a-3)}{2a^2(a+3)} = a - 3$$

$$\frac{m.\,c.\,m.}{a^2 - 9} = \frac{2a^2(a+3)(a-3)}{(a+3)(a-3)} = 2a^2$$

CÁLCULOS DEFINITIVOS

Aplicando la regla práctica:

$$\frac{a-1}{2a^3 + 6a^2} - \frac{a}{a-9} = \frac{(a-3)(a-1) - 2a^2 . a}{2a^2(a+3)(a-3)}$$

efectuando los productos del numerador:

$$= \frac{a^2 - 4a + 3 - 2a^3}{2a^2(a+3)(a-3)}$$

y ordenando el numerador resulta:

$$= \frac{-2a^3 + a^2 - 4a + 3}{2a^2(a+3)(a-3)}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

77. Definición. — El *producto* de varias fracciones algebraicas, llamadas *factores,* es otra fracción algebraica, cuyo numerador es el producto de los diversos numeradores, y cuyo denominador es el producto de los diversos denominadores.

Es decir: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot c \cdot m}{b \cdot d \cdot n}$

Ejemplo: Efectuar el producto:

$$\frac{3a^4}{4b^6} \times \frac{ab^3}{6} \times \frac{8b^2}{a^2}$$

Por la definición, se tiene:

$$\frac{3a^4}{4b^6} \times \frac{ab^3}{6} \times \frac{8b^3}{a^2} = \frac{3a^4 \cdot ab^3 \cdot 8b^2}{4b^6 \cdot 6 \cdot a^2}$$

al efectuar todas las simplificaciones posibles, queda:

$$= \frac{a^2 \cdot a}{b}$$

o bien: $$= \frac{a^3}{b}$$

que es el producto buscado.

Otro ejemplo: Efectuar el producto:

$$\frac{a+b}{a^2-b^2} \times \frac{a^2-2ab+a^2}{am+bm}$$

Por la definición se tiene:

$$\frac{a+b}{a^2-b^2} \times \frac{a^2-2ab+b^2}{am+bm} = \frac{(a+b)(a^2-2ab+b^2)}{(a^2-b^2)(am+bm)} \quad (1)$$

Descomponiendo los paréntesis en sus factores primos:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(b - a)$$

$$am + bm = (a + b)m$$

y reemplazando estos valores en (1):

$$\frac{a+b}{a^2-b^2} \times \frac{a^2-2ab+b^2}{am+bm} = \frac{(a+b)(a-b)^2}{(a+b)(a-b)(a+b)m}$$

simplificando queda: $\qquad = \dfrac{a-b}{(a+b)m}$

que es el producto buscado.

División de fracciones algebraicas

78. Definición. — Se llama *cociente* de dos fracciones algebraicas, llamadas *dividendo* y *divisor*, a otra fracción algebraica, tal, que multiplicada por el divisor dé un producto igual al dividendo.

Es decir:

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p}, \text{ siempre que: } \frac{c}{p} \cdot \frac{b}{n} = \frac{a}{m}$$

79. Regla práctica para hallar el cociente. — *Para hallar el cociente de dos fracciones algebraicas se multiplica el dividendo por el divisor invertido.*

Esta regla se deduce de la simple consideración de que las fracciones algebraicas son números racionales, y que de esa manera hallábamos el cociente en segundo año al estudiar los números racionales.

Ejemplos:

1º *Efectuar la división:* $\frac{9ab}{4cd} : \frac{6a}{2c}$

Aplicando la regla práctica anterior:

$$\frac{9ab}{4cd} : \frac{6a}{2c} = \frac{9ab}{4cd} \times \frac{2c}{6a}$$

o bien: $$= \frac{9ab \,.\, 2c}{4cd \,.\, 6a}$$

y simplificando, queda: $$= \frac{3b}{4d}$$

2º *Efectuar la división:*

$$\frac{3a+3b}{4c} : \frac{2a+2b}{6c^2}$$

Se tiene:

$$\frac{3a+3b}{4c} : \frac{2a+2b}{6c^2} = \frac{3a+3b}{4c} \times \frac{6c^2}{2a+2b}$$

$$= \frac{(3a+3b)6c^2}{4c(2a+2b)}$$

factoreando: $$= \frac{3(a+b)6c^2}{4c(a+b)2}$$

y simplificando: $$= \frac{9c}{4}$$

EJERCICIOS:

Efectuar las siguientes sumas:

223. $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5}$ R: $\frac{47x}{60}$

224. $\frac{2a-b}{5} + \frac{a+b}{4}$,, $\frac{13a+b}{20}$

225. $\frac{4x-3}{5} + \frac{7x+1}{3} + \frac{3x}{2}$,, $\frac{139x-8}{30}$

226. $\frac{a}{a+1} + \frac{a}{1-a} + \frac{3a}{a^2-1}$,, $\frac{a}{a^2-1}$

227. $\frac{a}{a-b} + \frac{a-b}{b-a}$,, $\frac{b}{a-b}$

Efectuar las siguientes restas:

228. $\frac{3a}{2b} - \frac{4a}{5b}$,, $\frac{7a}{10b}$

229. $\frac{5a}{3} - \frac{2a}{6}$,, $\frac{4a}{3}$

230. $\frac{4m-1}{2m} - \frac{6x-2}{3x}$,, $\frac{4m-3x}{6mx}$

231. $\frac{ax-a}{x+1} - \frac{ax+a}{x-1}$,, $\frac{4ax}{1-x^2}$

232. $\frac{2a^2-2a+1}{a^2-a} - \frac{a}{a-1}$,, $\frac{a-1}{a}$

Efectuar las siguientes operaciones:

233. $\frac{a^3}{a-1} - \frac{a^2}{a+1} - \frac{a}{a-1} + \frac{1}{a+1}$,, a^2+1

234. $\frac{a^3}{a^2-1} - \frac{a}{a-1} - \frac{a}{a+1}$,, $\frac{a^3+2a}{a^2-1}$

235. $\frac{m^3}{m^2-1} + \frac{m}{m+1} - \frac{m}{1-m}$,, $\frac{3m^3}{m^2-1}$

Efectuar las siguientes multiplicaciones:

236. $\frac{6a}{5} \cdot \frac{10}{a^2} \cdot \frac{3}{20}$ R: $\frac{9}{5a}$

237. $\frac{6a^2}{2b} \cdot \frac{2ab^3}{3c} \cdot \frac{2ac}{a^5b^2}$ " $\frac{4}{a}$

238. $\frac{3a^2bc}{5abc^2} \cdot \frac{10ab^2c}{3abc}$ " $\frac{2ab}{c}$

239. $\frac{x^2+2x}{(x-1)^2} \cdot \frac{x^2-1}{x-2} \cdot \frac{x^2-4x+4}{x+2}$ " $\frac{x(x+1)(x-2)}{x-1}$

240. $\frac{ax+x^2}{2b-cx} \cdot \frac{2bx-cx^2}{(a+x)^2}$ " $\frac{x^2}{a+x}$

Efectuar las siguientes divisiones:

241. $\frac{3a^2b}{5x^3y} : \frac{9xb^3}{10x^4y^2}$ $\frac{30a^2bx^4y^2}{45x^4b^3y}$ " $\frac{2a^2y}{3b^2}$

242. $(x^2+2x+1) : \frac{x+1}{x-1}$ " x^2-1

243. $\frac{9a^3-3a^4}{24} : \frac{3a}{8}$ " $\frac{3a^2-a^3}{3}$

$\frac{2a^2y}{3}$

244. $\frac{ab-bx}{a+m} : \frac{ac-cx}{a+m}$ " $\frac{b}{c}$

245. $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right) : \left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)$ " $\frac{a-b}{a+b}$

$\frac{56a^7}{72}$

CAPITULO XII

PROGRAMA XII. — *Ecuaciones de primer grado con una incógnita.* — Igualdades: Identidades y ecuaciones. Ecuaciones enteras, fraccionarias e irracionales. Ejemplos. Ecuaciones equivalentes. Si a ambos miembros de una ecuación se les suma un mismo número o una misma expresión entera, se obtiene una ecuación equivalente: Trasposición de términos. Si a ambos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un mismo número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente: Pasaje de factores o divisores numéricos de un miembro a otro. Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita. Resolución de las mismas. Ecuaciones fraccionarias: Supresión de denominadores. Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión entera, se obtiene una ecuación con las mismas raíces que la dada, pero que puede admitir, además, nuevas raíces. Ecuaciones fraccionarias de primer grado. Resolución de las mismas.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

80. Igualdades. — Se llama *igualdad*, a la expresión que resulta al unir con el signo igual a dos expresiones de igual valor, aunque de distinta forma.

Ejemplos:
$$5-7=-\frac{15}{5}+1$$
$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

Primer miembro es la parte que está a la izquierda del signo $=$, y *segundo miembro* la parte que está a la derecha.

Las *igualdades* comprenden a las *identidades* y a las *ecuaciones*.

81. Identidades. — Se llama *identidad* a toda igualdad que se verifica para *todos los valores* de las letras que en ella figuran.

Para indicar una identidad, en lugar del signo $=$, se emplea el signo $\equiv$ llamado de identidad.

Ejemplos: $(a - b)m \equiv am - bm$

$$a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$$

82. Ecuaciones. — Se llamà *ecuación* a toda igualdad que sólo se verifica para *algunos valores* de las letras que en ella figuran.

Estas letras se llaman *incógnitas,* y sus valores especiales son las *raíces de la ecuación.*

Ejemplos: $4x + 2 = 6x - 4$; *la raíz es* 3.

$x^2 + 2x = 8$; *las raíces son* 2 *y* — 4.

83. Clasificación de las ecuaciones. — Las ecuaciones pueden ser *enteras, fraccionarios* o *irracionales.*

84. Ecuación entera. — Una ecuación es *entera,* cuando ninguna de las incógnitas figura como denominador.

Ejemplos:

$$\frac{x}{2} + 3x = 5x$$

$$y^2 - 16 = 0$$

85. Ecuación fraccionaria. — Una ecuación es *fraccionaria,* cuando una o varias incógnitas figuran como denominadores.

Ejemplo: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5x + xy}{6}$

86. Ecuación irracional. — Una ecuación es *irracional,* cuando algunas de sus incógnitas están afectadas por el signo radical.

Ejemplo: $\sqrt{x} + y = 2y - 3$

87. Ecuaciones equivalentes. — Dos ecuaciones son *equivalentes,* cuando toda raíz de la primera es raíz de la segunda ecuación, y toda raíz de la segunda es raíz de la primer ecuación.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{ll} x+2=5 & ; \; x=3 \\ 2x-8=1-x & ; \; x=3 \end{array}\right\} \textit{ ecuaciones equivalentes}$$

88. Corolario. — *Si una ecuación es equivalente a otra, y ésta es equivalente a una tercera, la primera es equivalente a la tercera.*

89. Notación. — El primer miembro de una ecuación de incógnita x lo representamos por $A(x)$, y el segundo miembro por $B(x)$, así

$$A(x) = B(x)$$

es una ecuación que se lee A de x igual a B de x.

Para expresar que a es una raíz de la ecuación anterior, escribiremos:

$$A(a) = B(a)$$

lo que se lee: A de a igual B de a.

Observación. — En una ecuación uno de los dos miembros, por lo menos, debe contener a la incógnita, que representamos por $A(x)$ o $B(x)$, respectivamente, aún en el caso en que uno de ellos no contuviese a x.

Propiedades de las ecuaciones

90. TEOREMA I. — *Si a ambos miembros de una ecuación se les suma un mismo número, se obtiene una ecuación equivalente.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} A(x) = B(x), \textit{ ecuación; } n \textit{ número dado.} \\ A(x) + n = B(x) + n \textit{ ecuación obtenida.} \end{array} \right.$$

$$T \left\{ \begin{array}{l} A(x) + n = B(x) + n \\ A(x) = B(x) \end{array} \right\} \textit{ ecuaciones equivalentes.}$$

Las ecuaciones dadas serán equivalentes cuando toda raíz de la primera sea raíz de la segunda y recíprocamente.

1º) Sea $x = a$ una raíz de la primera ecuación; entonces, por definición de raíz, (82), se obtiene la identidad:

$$A(a) = B(a)$$

escribamos: $$n = n$$

sumando: $$A(a) + n = B(a) + n$$

expresión que por (89), nos dice que $x = a$ es raíz de la segunda ecuación.

2º) Si $x = b$ es una raíz de la segunda ecuación, por definición de raíz se tendrá la identidad:

$$A(b) + n = B(b) + n$$

escribamos: $$n = n$$

restando: $$A(b) + n - n = B(b) + n - n$$

o bien: $$A(b) = B(b)$$

expresión que nos dice, por (89), que $x = b$ es una raíz de la primera ecuación, luego las ecuaciones:

$$A(x) = B(x)$$

y
$$A(x) + n = B(x) + n$$

son equivalentes.

91. Teorema II. — *Si a ambos miembros de una ecuación se les suma una misma expresión entera, se obtiene una ecuación equivalente.*

$$H \left\{ \begin{array}{l} A(x) = B(x) \text{ ecuación dada; } N(x) \text{ expresión entera dada.} \\ A(x) + N(x) = B(x) + N(x) \text{ exuación obtenida.} \end{array} \right.$$

$$T. \left\{ \begin{array}{ll} A(x) + N(x) = B(x) + N(x) & (1) \\ A(x) = B(x) & (2) \end{array} \right\} \text{ecuaciones equivalentes.}$$

1º) *Toda raíz de* (1) *es raíz de* (2).

Si $x = a$ es una raíz de (1), por definición de raíz se tendrá:

$$A(a) = B(a) \qquad (3)$$

Reemplazando en $N(x)$ el valor a, resulta $N(a)$, o bien:

$$N(a) = N(a) \qquad (4)$$

Sumando ordenadamente (3) y (4), se obtiene:

$$A(a) + N(a) = B(a) + N(a)$$

expresión que nos dice, (89), que $x = a$ es raíz de la ecuación (2).

2º) *Toda raíz de* (2) *es raíz de* (1).

Si $x = b$ es una raíz de (2), por definición de raíz se tendrá:

$$A(b) + N(b) = B(b) + N(b) \qquad (5)$$

Reemplazando en $N(x)$ el valor b, resulta $N(b)$, o bien:

$$N(b) = N(b) \qquad (6)$$

Restando ordenadamente (5) y (6), se obtiene:

$$A(b) + N(b) - N(b) = B(b) + N(b) - N(b)$$

o bien:
$$A(b) = B(b)$$

expresión que nos dice que $x = b$ es raíz de la ecuación (1).

92. Trasposición de términos. — COROLARIO. — *Todo término de una ecuación puede pasar de un miembro a otro con tal de que cambie su signo.*

En efecto, equivale a sumar o restar a ambos miembros de la ecuación el término dado.

Ejemplo: Sea la ecuación

$$3x - \frac{1}{2} = 2x + \frac{7}{2} \qquad ; \qquad x = 4$$

El término $2x$, afectado por el signo $+$, lo podemos trasponer al primer miembro, afectándolo con el signo $-$, resultando:

$$3x - \frac{1}{2} - 2x = \frac{7}{2} \qquad ; \qquad x = 4$$

ecuación que es equivalente a la dada.

El término $-\frac{1}{2}$ afectado por el signo $-$, lo podemos trasportar al segundo miembro, afectándolo con el signo $+$, resultando:

$$3x = 2x + \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \qquad ; \qquad x = 4$$

que es una ecuación equivalente a la dada.

93. TEOREMA III. — *Si ambos miembros de una ecuación se multiplican por un mismo número, distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.*

$$H \begin{cases} A(x) = B(x) \text{ ecuación dada;} & n \neq 0; \\ A(x).n = B(x).n \text{ ecuación obtenida.} \end{cases}$$

$$T \left. \begin{cases} A(x) = B(x) & (1) \\ A(x).n = B(x).n & (2) \end{cases} \right\} \text{ecuaciones equivalentes.}$$

1º *Toda raíz de* (1) *es raíz de* (2).

Si $x = a$ es una raíz de (1), por definición de raíz se tendrá:

$$A(a) = B(a)$$

escribamos: $$n = n$$

multiplicando: $$A(a).n = B(a).n$$

expresión que nos dice que $x = a$ es raíz de la ecuación (2).

2º *Toda raíz de* (2) *es raíz de* (1).

Si $x = b$ es una raíz de (2), se tendrá:

$$A(b).n = B(b).n$$

escribamos: $$n = n$$

dividiendo: $$\frac{A(b).n}{n} = \frac{B(b).n}{n}$$

y simplificando, queda:

$$A(b) = B(b)$$

expresión que nos dice que $x = b$ es una raíz de (1).

94. TEOREMA IV. — *Si ambos miembros de una ecuación se dividen por un mismo número, distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.*

$$H \left\{ \begin{array}{ll} A(x) = B(x) & \textit{ecuación dada} \quad ; \quad n \neq 0 \\ \dfrac{A(x)}{n} = \dfrac{B(x)}{n} & \textit{ecuación obtenida.} \end{array} \right.$$

$$T \left\{ \begin{array}{ll} A(x) = B(x) & (1) \\ \dfrac{A(x)}{n} = \dfrac{B(x)}{n} & (2) \end{array} \right\} \textit{ecuaciones equivalentes.}$$

1º) *Toda raíz de* (1) *es raíz de* (2).

Si $x = a$ es una raíz de (1), se tendrá:

$$A(a) = B(a)$$

escribamos: $$n = n$$

dividiendo: $$\frac{A(a)}{n} = \frac{B(b)}{n}$$

expresión que nos dice que $x = a$ es raíz de la ecuación (2).

2º) *Toda raíz de* (2) *es raíz de* (1).

Si $x = b$ es una raíz de (2), se tendrá:

$$\frac{A(b)}{n} = \frac{B(b)}{n}$$

escribamos: $$n = n$$

multiplicando: $$\frac{A(b)}{n} \cdot n = \frac{B(b)}{n}$$

y simplificando: $$A(b) = B(b)$$

expresión que nos dice, que $x = b$ es raíz de (1).

95. Pasaje de factores o divisores numéricos de un miembro a otro. — COROLARIO. — *Todo número que está en un miembro como factor o como divisor, puede pasar al otro miembro como divisor o como factor, respectivamente.*

En efecto, equivale a multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por el número dado.

Ejemplo: Sea la ecuación:

$$\frac{5x+6}{2} = (3x-12)3 \quad ; \quad x=6$$

El número 2, que está como divisor, lo podemos pasar al segundo miembro como factor, resultando:

$$5x+6=(3x-12)3\,.\,2 \quad ; \quad x=6$$

que es una ecuación equivalente a la dada.

Análogamente, el número 3, que está como factor lo podemos pasar como divisor del primer miembro:

$$\frac{\frac{5x+6}{2}}{3} = 3x-12 \quad ; \quad x=6$$

que es una ecuación equivalente a la dada.

96. Grado de una ecuación. — Una ecuación es de *primer grado* cuando, después de suprimidos los denominadores y reducidos los términos semejantes, el exponente de la incógnita es 1.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l} 5x-7=4x \\ ax+b=0 \end{array}\right\} \text{ ecuaciones de 1}^{\text{er}}\text{ grado.}$$

Una ecuación es de *segundo grado* cuando, después de suprimidos los denominadores y reducidos los términos semejantes, el exponente de la incógnita es 2.

Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{l} 5x^2 - 2x = 4 \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array}\right\} \text{ ecuaciones de 2º grado}$$

Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita

97. Resolución de una ecuación. — *Resolver una ecuación*, es hallar el valor de la incógnita.

Sea resolver la ecuación:

$$\frac{2x}{3} - x + 7 = \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 1 \qquad (1)$$

Hallemos el mínimo común múltiplo de los denominadores:

$$m.\ c.\ m.\ 3 \text{ y } 2 = 6$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por 6, resulta:

$$\frac{2x}{3}.6 - x.6 + 7\ 6 = \frac{x}{2}.6 - \frac{x}{3}.6 + 1\ 6$$

y simplificando:

$$4x - 6x + 42 = 3x - 2x + 6$$

ecuación que es equivalente a la dada en virtud del teorema (93).

Transpongamos todos los términos que contienen incógnitas al primer miembro y los términos numéricos al segundo, quienes según el corolario (92), deberán cambiar de signo al pasar de un miembro a otro:

$$4x - 6x - 3x + 2x = 6 - 42 \qquad (2)$$

ecuación que es equivalente a la dada.

Réduciendo los términos semejantes de la ecuación (2) resulta:

$$-3x = -36$$

Multiplicando ambos miembros por — 1, por el teorema (93), se obtiene la ecuación:

$$3x = 36$$

que es equivalente a las anteriores.

Pasando el coeficiente 3 al segundo miembro como divisor, (95), resulta:

$$x = \frac{36}{3}$$

y efectuando:

$$\boxed{x = 12}$$

que es la raíz de la ecuación dada.

De todo lo que antecede se deduce la siguiente:

Regla práctica. — *Para resolver una ecuación entera de primer grado con una incógnita, se procede así:*

1º, se halla el m. c. m. de los denominadores;

2º, se multiplican todos los términos de la ecuación por el m. c. m. hallado y se simplifica;

3º, se efectúan las sumas algebraicas indicadas;

4º, el coeficiente de la incógnita se pasa como divisor del otro miembro.

El valor de la incógnita de la última ecuación es la raíz de la ecuación dada.

Si después de efectuar las sumas algebraicas ambos miembros aparecen afectados por el signo menos, a los dos se les cambia el signo.

1° Ejemplos: *Resolver la ecuación*:

$$x + \frac{4x}{5} - \frac{6}{15} = \frac{2x}{3} + 3$$

Se tiene, aplicando la regla práctica anterior:

$$m.\ c.\ m.\ (5,\ 15\ y\ 3) = 15$$

multiplicando ambos miembros por 15:

$$x\ .\ 15 + \frac{4x}{5}\ .\ 15 - \frac{6}{15}\ .\ 15 = \frac{2x}{3}\ .\ 15 + 3\ .\ 15$$

simplificando: $15x + 12x - 6 = 10x + 45$

trasponiendo las incógnitas al primer miembro y los datos al segundo:

$$15x + 12x - 10x = 45 + 6$$

efectuando las sumas indicadas:

$$17x = 51$$

pasando el coeficiente 17 como divisor del segundo miembro:

$$x = \frac{51}{17}$$

de donde: $\boxed{x = 3}$

Comprobación. — Para comprobar que el valor de la incógnita está bien hallado, se reemplaza en la ecuación dada x por su valor hallado y se efectúan las operaciones indicadas. Si se obtiene una igualdad, la raíz de la ecuación es el valor hallado.

En el ejemplo último se tiene:

$$3+\frac{4\,.\,3}{5}-\frac{6}{15}=\frac{2\,.\,3}{3}+3$$

$$3+\frac{12}{5}-\frac{2}{5}=2+3$$

$$\frac{3\,.\,5}{5}+\frac{12}{5}-\frac{2}{5}=5$$

$$\frac{15+12-2}{5}=5$$

$$\frac{25}{5}=5$$

$$5=5$$

como $5=5$ es una igualdad, el valor 3 es la raíz de la ecuación dada.

2º *Resolver la ecuación:*

$$\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}=\frac{x+14}{2}-6$$

Se tiene: $m.\ c.\ m.\ (3,\ 4 \text{ y } 2)=12$

multiplicando ambos miembros por 12:

$$\frac{12\,(5x-2)}{3}-\frac{12\,(x-8)}{4}=\frac{12\,(x+14)}{2}-12\,.\,6$$

simplificando:

$$4(5x-2)-3(x-8)=6(x+14)-12\,.\,6$$

efectuando los productos indicados:

$$20x-8-3x+24=6x+84-72$$

trasponiendo:

$$20x - 3x - 6x = 84 - 72 + 8 - 24$$

efectuando: $11x = -4$

de donde: $\boxed{x = -\dfrac{4}{11}}$

que es la raíz buscada.

Ecuaciones fraccionarias

98. Teorema. — *Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por una expresión entera, se obtiene una ecuación con las mismas raíces que la dada, pero que puede admitir, además, nuevas raíces.*

$H \left\{ \begin{array}{l} A(x) = B(x) \text{ (1), } \textit{ecuación dada; } N(x) \textit{ expresión entera;} \\ A(x) \,.\, N(x) = B(x) \,.\, N(x) \quad \text{(2), } \textit{ecuación obtenida.} \end{array} \right.$

$T \left\{ \begin{array}{l} 1^{o} \textit{ Toda raíz de (1) es raíz de (2);} \\ 2^{o} \textit{ Toda raíz de (2) no siempre es raíz de (1).} \end{array} \right.$

1º) *Toda raíz de (1) es raíz de (2).*

Si $x = a$ es raíz de (1), se tendrá:

$$A(a) = B(a) \qquad (3)$$

Reemplazando en $N(x)$ el valor $x = a$, resulta $N(a)$, o bien:

$$N(a) = N(a) \qquad (4)$$

Multiplicando ordenadamente la (3) y la (4), resulta:

$$A(a) \,.\, N(a) = B(a) \,.\, N(a)$$

expresión que nos dice que $x = a$ es raíz de la ecuación (2).

2º) *Toda raíz de* (2) *no siempre es raíz de* (1).

La ecuación (2): $A(x) \,.\, N(x) = B(x) \,.\, N(x)$
puede escribirse así, (92):

$$A(x) \,.\, N(x) - B(x) \,.\, N(x) = 0$$

y sacando el factor común $N(x)$, resulta:

$$[A(x) - B(x)]\; N(x) = 0$$

ecuación que se verifica para los valores de x para los cuales sea:

$$A(x) - B(x) = 0 \text{ , es decir: } A(x) = B(x)$$

y también:

$$N(x) = 0$$

pues para que el producto sea cero, uno o los dos factores deberán ser cero.

Luego la ecuación (2) admite, además de las raíces de la (1), las raíces de $N(x) = 0$, que no siempre son raíces de (1). Estos valores constituyen *soluciones extrañas* de la ecuación dada.

Ejemplo: Sea la ecuación: $x^2 = 9$
cuyas raíces son $+3$ y -3.

Multiplicando ambos miembros por $x - 2$, obtenemos:

$$x^2(x - 2) = 9(x - 2)$$

ecuación que admite las mismas raíces $+3$ y -3 de la ecuación dada, pero que admite, además, una *raíz extraña* $+2$.

Observación. — Según los casos, al multiplicar ambos miembros de una ecuación por una expresión entera, *ganaremos* o *perderemos* raíces.

99. Supresión de denominadores. — El teorema anterior nos permite suprimir los denominadores de una ecuación fraccionaria, pues basta multiplicar por el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Sea suprimir los denominadores de la ecuación:

$$\frac{x-2}{x+2}=\frac{3}{5}$$

Se tiene: $m.\ c.\ m.\ \big((x+2)\ y\ 5\big)=5(x+2)$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por $5(x+2)$:

$$\frac{x-2}{x+2}\cdot 5\,(x+2)=\frac{3}{5}\cdot 5(x+2).$$

y simplificando: $5(x-2)=3(x+2)$

ecuación que, por el teorema anterior, tiene las mismas raíces, por lo menos, que la ecuación dada.

Resolución de las ecuaciones fraccionarias de primer grado

100. Sea resolver la ecuación:

$$\frac{4x+3}{x^2+6x+9}-\frac{6}{x+3}=\frac{1}{x+3}$$

Se tiene: $x^2+6x+9=(x+3)^2$

luego la ecuación es:

$$\frac{4x+3}{(x+3)^2}-\frac{6}{x+3}=\frac{1}{x+3}$$

$m.\ c.\ m.$ de los denom. $=(x+3)^2$

Multiplicando ambos miembros por $(x+3)^2$, (98):

$$\frac{4x+3}{(x+3)^2}\cdot(x+3)^2 - \frac{6}{x+3}\cdot(x+3)^2 = \frac{1}{x+3}\,(x+3)^2$$

y simplificando: $\quad 4x+3-6(x+3)=x+3$

o bien: $\quad 4x+3-6x-18=x+3$

rasponiendo: $\quad 4x-6x-x=3+18-3$

reduciendo los términos semejantes:

$$-3x=18$$

de donde se deduce:

$$x=\frac{18}{-3}$$

o bien:

$$\boxed{x=-6}$$

que es la raíz de la ecuación dada.

Comprobación. — Reemplazando el valor $x=-6$ en la ecuación dada, resulta:

$$\frac{4(-6)+3}{(-6)^2+6(-6)+9)}-\frac{6}{-6+3}=\frac{1}{-6+3}$$

efectuando los productos indicados

$$\frac{-24+3}{36-36+9}-\frac{6}{-6+3}=\frac{1}{-6+3}$$

efectuando las sumas algebraicas:

$$\frac{-21}{9}-\frac{6}{-3}=\frac{1}{-3}$$

simplificando: $-\frac{7}{3}+2=-\frac{1}{3}$. efectuando:

multiplicando ambos miembros por 3: trasponiendo:

$$-7+6=-1$$

o bien:

$$-1=-1$$

Como $-1=-1$ es una igualdad, el valor -6 es la raíz de la ecuación dada.

De donde se deduce la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para resolver una ecuación fraccionaria de primer grado, se procede así:*

1º, Se halla el m. c. m. de los denominadores;

2º, Se multiplican ambos miembros de la ecuación por el m. c. m. hallado;

3º, Se hacen todas las simplificaciones posibles;

4º, Se resuelve la ecuación entera obtenida;

5º, Se verifican las raíces obtenidas, desechándose las que no verifiquen a la ecuación dada.

Ejemplo: Resolver la ecuación:

$$\frac{x-4}{8}+\frac{8x-35}{7x-40}=\frac{3x+4}{24}$$

Aplicando la regla práctica anterior, se tiene:

$$m.\ c.\ m.\ [8,(7x-40),24]=(7x-40)24$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación $(7x-40)24$:

$$\frac{x-4}{8}.(7x-40)24+\frac{8x-35}{7x-40}.(7x-40)24=\frac{3x+4}{24}.(7x-40)24$$

simplificando, queda:

$$(x-4)(7x-40)3+(8x-35)24=(3x+4)(7x-40)$$

efectuando los productos indicados:

$$21x^2-204x+480+192x-840=21x^2-92x-160$$

trasponiendo las incógnitas al primer miembro y los datos al segundo:

$$21x^2-204x+192x-21x^2+92x=-160-480+840$$

reduciendo los términos semejantes:

$$80x=200$$

de donde: $x=\frac{200}{80}$

o bien, simplificando: $\boxed{x=\frac{5}{2}}$

que es la raíz de la ecuación dada.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones enteras:

246. $5x+50=4x+56$ R: $x=6$
247. $16x-11=7x-70$ „ $x=9$
248. $13x-2(3x-5)=59$ „ $x=7$
249. $(x+5)^2-140=(x-9)^2$ „ $x=7$
250. $7(x-8)=9(x+1)-34$ „ $x=-17$
251. $\frac{x}{4}+4=9$ „ $x=20$
252. $\frac{x}{2}-3=0$ „ $x=6$

253. $15x + \frac{2x}{3} + 47 = 0$ R: $x = -3$

254. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11$ „ $x = 6$

255. $\frac{3x}{4} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$ „ $x = 36$

256. $\frac{12 - 3x}{4} - \frac{3x - 11}{3} = 1$ „ $x = \frac{68}{21}$

257. $\frac{x - 7}{5} - \frac{x - 2}{15} = \frac{x - 8}{6} - \frac{x - 29}{3}$ „ $x = 32$

258. $\frac{3x}{8} - \frac{0{,}25x}{0{,}4} + 3{,}642 - \frac{x}{0{,}8} + 0{,}01 = 0$

„ $x = 2{,}43466$

259. $x + \frac{3x - 9}{5} = 4 - \frac{5x - 12}{3}$ „ $x = 3$

Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:

260. $\frac{20}{x} + 8 = 13$ „ $x = 4$

261. $\frac{56}{x} + 7 = 0$ „ $x = -8$

262. $7 - \frac{40}{x} = 15$ „ $x = -5$

263. $\frac{5x - 5}{x + 1} = 3$ „ $x = 4$

264. $\frac{1}{7x} + \frac{3}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{28}{23}$ „ $x = 2$

265. $\frac{8}{x} + \frac{2}{5} = \frac{9}{x} - 10$ „ $x = 2$

266. $\frac{3}{x - 4} + \frac{5}{2(x - 4)} = \frac{9}{8 - 2x} + \frac{1}{2}$ „ $x = 24$

267. $\frac{3x - 7}{4x + 2} = \frac{3x - 14}{4x - 13}$ „ $x = 7$

268. $\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 - x}$ „ $x = -0{,}5$

269. $$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+x}.$$ R: $x=\frac{2}{3}$

270. $$\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{3}{x^2+2x+1}$$ „ $x=0{,}5$

271. $$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}$$ „ $x=3$

Resolver las siguientes ecuaciones literales:

272. $$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$$ „ $x=\frac{abc}{a+b}$

273. $$\frac{a+x}{a}-b=x+1$$ „ $x=\frac{ab}{1-a}$

274. $$a(x+b)=b(a-x)-(a+b)x$$ „ $x=0$

275. $$\frac{ax-b}{a-b}=\frac{ax}{a+b}$$ „ $x=\frac{a+b}{2a}$

276. $$\frac{a}{x}+2=\frac{b}{x}$$ „ $x=\frac{b-a}{2}$

277. $$\frac{a}{b-x}=\frac{b}{a-x}$$ „ $x=a+b$

278. $$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab}$$ „ $x=\frac{2ab}{a+b}$

279. $$\frac{x-1}{x+a-b}=\frac{1-x}{x-a+b}+2$$ „ $x=(a-b)^2$

CAPITULO XIII

PROGRAMA XIII.— *Problemas de primer grado con una incógnita.* — Planteo, resolución de la ecuación obtenida e interpretación o discusión del resultado. Ejercicios. División de un segmento en otros dos aditivos o sustantivos, que estén en una razón dada. Discusión del resultado.

Problemas de primer grado con una incógnita

101. Nociones previas.—Se llama *proposición,* a todo juicio que contiene la afirmación de un hecho, de un principio, de una convención, de una verdad o de una cuestión a resolver.

Se llama *problema* a la proposición en la cual se trata de determinar uno o varios entes que guardan con otros relaciones determinadas, que la proposición misma señala.

La frase que expresa un problema se llama *enunciado;* los entes conocidos que figuran en el enunciado se llaman *datos,* y aquellos otros que hay que determinar se llaman *incógnitas.*

Todo ente o grupo de entes que satisfacen a todas las condiciones que el enunciado del problema impone a las incógnitas, se llama *solución* del problema.

Cuando un problema tiene un número finito de soluciones, se le llama *determinado;* en caso contrario es *indeterminado.*

Un problema es *imposible,* cuando no tiene ninguna *solución.*

Se llama *resolución* de un problema, al conjunto de operaciones y procedimientos que permite, partiendo de los datos, obtener las incógnitas.

La resolución de un problema comprende tres partes:

1ª, *Planteo,* que consiste en expresar por medio de ecuaciones todas las relaciones que el enunciado indica entre los datos y las incógnitas;

2ª, *Resolución* de las ecuaciones obtenidas;

3ª, *Discusión* o *interpretación* concreta de los resultados numéricos obtenidos.

Un problema es de *primer grado con una incógnita,* si así lo es la ecuación que lo resuelve.

102. Algebra. — El *Algebra* es la ciencia que tiene por objeto el estudio y resolución de las ecuaciones.

103. Regla general para el planteo de los problemas. *Se representan las incógnitas por las últimas letras del abecedario:* x, y, z. t, ... *y se efectúan, con la ayuda de estas incógnitas, todas las operaciones que habría que hacer para verificar si cumplen las condiciones del enunciado. Esta verificación nos conduce a una o varias ecuaciones, las que resueltas nos dan las soluciones del problema.*

104. Problemas. — **1º** *El duplo de un número disminuído en 5 es igual al mismo número aumentado en 7. Hallar el número.*

Planteo. — Sea x el número buscado; entonces el duplo es $2x$. El duplo disminuído en 5 es $2x - 5$, y el número aumentado en 7 es $x + 7$, y como estos resultados deben ser iguales, se obtiene la ecuación:

$$2x - 5 = x + 7.$$

$2x = x + 7 + 5$

$2x - x =$

Resolución. — Resolvamos la ecuación obtenida aplicando la regla (97):

$$2x - 5 = x + 7 \qquad (1)$$

$$2x - x = 7 + 5$$

o bien: $$\boxed{x = 12}$$

El número buscado es 12.

Discusión. — El número buscado es 12, pues su duplo es 24 y restándole 7 da 19, o sea el número 12 más 7.

2º *Un padre tiene 35 años y su hijo tiene 3. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será cinco veces la del hijo?*

Planteo. — Años que transcurrirán: x;
El padre tendrá después de x años: $35 + x$;
El hijo tendrá después de x años: $3 + x$;
Pero entonces la edad del padre será cinco veces la del hijo, luego: $(3 + x)5 = 35 + x$.

Resolución. — Resolvamos la ecuación obtenida:

$$(3 + x)5 = 35 + x$$

$$15 + 5x = 35 + x$$

$$5x - x = 35 - 15$$

$$4x = 20$$

$$x = \frac{20}{4}$$

$$\boxed{x = 5}$$

Deben transcurrir 5 años.

Discusión. — Deben transcurrir 5 años, pues entonces el padre tendrá 40 años, y el hijo 8, siendo 40 el quíntuplo de 8.

3º *Se ha cortado de una barra de hierro trozos iguales a* $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ *y* $\frac{1}{6}$ *de su longitud, y aún quedan 24 cm. Calcular la longitud de la barra.*

Planteo. — Longitud de la barra: x cm.;

Primer trozo cortado: $\frac{x}{3}$

Segundo trozo cortado: $\frac{x}{4}$

Tercer trozo cortado: $\frac{x}{6}$

La suma de las longitudes de los trozos cortados más los 24 cm. que quedaron, debe ser igual a la longitud de la barra, luego:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 24 = x$$

Resolución. — Resolviendo la ecuación obtenida:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 24 = x$$

$m.\ c.\ m.\ (3,\ 4$ y $6) = 12.$

$$4x + 3x + 2x + 288 = 12x$$

$$9x - 12x = -288$$

$$-3x = -288$$

$$= x \frac{-288}{-3}$$

$$\boxed{x = 96 \text{ cm.}}$$

La barra mide 96 centímetros.

Discusión. — La barra mide 96 cm., pues su tercio, cuarto y sexto son, respectivamente, 23 cm, 24 cm. y 16 cm.. y sumando estas cantidades y los 24 cm. que quedaron, resulta 96 cm.

4º *Un zorro perseguido por un lebrel lleva 50 saltos de ventaja. El zorro da 4 saltos mientras que el lebrel da 3, pero 2 saltos del lebrel valen como 3 del zorro. ¿Cuántos saltos dará el lebrel para alcanzar al zorro?*

Planteo. — La distancia que debe recorrer el lebrel es la misma que la que recorre el zorro. Como las unidades de medida, los saltos del lebrel y los del zorro, son distintas, previamente las reducciones a la misma unidad, los saltos del lebrel, por ejemplo.

Sea x el número de saltos del lebrel.

Como 3 saltos del zorro equivalen a 2 saltos del lebrel, un salto del zorro equivale a $\frac{2}{3}$ de salto del lebrel, y los 50 saltos que lleva de ventaja equivalen a $50 \times \frac{2}{3} = \frac{100}{3}$ de saltos del lebrel.

Si mientras el lebrel da 3 saltos el zorro da 4, por cada salto del lebrel el zorro da $\frac{4}{3}$ de salto, luego $\frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ de salto del lebrel es lo que avanza el zorro.

El lebrel tiene que dar x saltos mientras que el zorro avanza $\frac{8x}{9}$, pero el número de saltos del lebrel es igual a la ventaja que lleva el zorro más lo que avanza éste, luego: $x = \frac{100}{3} + \frac{8x}{9}$.

RESOLUCIÓN. — Resolviendo la ecuación obtenida:

$$x = \frac{100}{3} + \frac{8x}{9}$$

$$9x = 300 + 8x$$

$$9x - 8x = 300$$

$$\boxed{x = 300}$$

El lebrel debe dar 300 saltos.

DISCUSIÓN. — Como el zorro lleva 50 saltos de ventaja y un salto del zorro equivale a $\frac{2}{3}$ del salto del lebrel, los 50 saltos equivalen a $\frac{100}{3} = 33{,}33\ldots$ saltos del lebrel; al dar el lebrel 3 saltos por cada 4 del zorro, por cada salto del lebrel el zorro da $\frac{4}{3}$, de modo que por cada salto del lebrel el zorro avanza $\frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ de salto, y como el lebrel da 300 saltos, avanzará $\frac{8}{9} \times 300 = 266{,}66$ saltos, que con los $33{,}33\ldots$ que lleva de ventaja son los 300.

105. Problema. — *Dividir un segmento en otros dos, aditivos o sustractivos, que estén entre sí en una razón dada.*

PLANTEO. — Sea $AB = a$, (fig. 1), el segmento, y $\frac{m}{n}$ la razón dada.

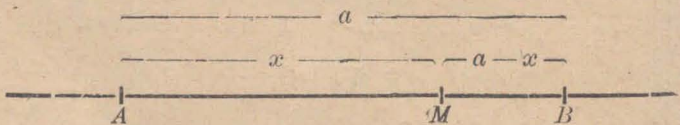


Fig. 1.

Sean los segmentos buscados AM y MB:

$$AM = x \quad ; \quad MB = a - x$$

Entonces, se tendrá: $\dfrac{x}{a - x} = \dfrac{m}{n}$

Resolución. — Resolviendo la ecuación obtenida:

$$\frac{x}{a - x} = \frac{m}{n}$$

$$nx = m(a - x)$$

$$nx = ma - mx$$

$$nx + mx = ma$$

$$(m + n)x = ma$$

$$\boxed{x = \frac{ma}{m + n}} \qquad (1)$$

Queda así obtenido uno de los dos segmentos. Para obtener el otro basta restar el segmento dado y el obtenido:

Discusión. — La razón dada $\dfrac{m}{n}$ puede ser:

1º, positiva, o mayor que cero; 2º, negativa, o menor que cero; 3º, igual a cero.

1º $\dfrac{m}{n} > 0$. Dividamos ambos términos del segundo miembro de (1) por m:

$$x = \frac{\dfrac{ma}{m}}{\dfrac{m}{m} + \dfrac{n}{m}}$$

o bien:

$$x = \frac{a}{1 + \frac{n}{m}} \qquad (2)$$

Como $\frac{m}{n}$ es positiva, su inversa $\frac{n}{m}$ también es positiva, luego la suma $1 + \frac{n}{m}$ es positiva y por consiguiente $\frac{a}{1 + \frac{n}{m}}$ también lo es, luego x es positivo, encontrándose, por lo tanto, en la semirrecta de origen A que contiene al punto B.

Se tiene: $1 + \frac{n}{m} > 1$, luego: $x = \frac{a}{1 + \frac{n}{m}} < a$

es decir: el punto M pertenece al segmento a.

2º $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} < \mathbf{0}$. Siendo $\frac{m}{n}$ negativa, su inversa también es negativa, luego la expresión (2) se convierte en:

$$x = \frac{a}{1 - \frac{n}{m}} \qquad (3)$$

El valor absoluto de $-\frac{n}{m}$ podrá ser mayor, igual o menor que 1.

Si es $\left| -\frac{n}{m} \right| > 1$, la diferencia $1 - \frac{n}{m}$ es negativa, luego $\frac{a}{1 - \frac{n}{m}}$ también lo es, es decir, que x es negativo, estando, por lo tanto, en la semirrecta de origen A que no contiene al punto B.

Si es $\left| - \frac{n}{m} \right| = 1$, la diferencia $1 - \frac{n}{m}$ es cero, y como, no se puede dividir por cero, la expresión:

$$x = \frac{a}{1 - \frac{n}{m}} = \frac{a}{0}$$

carece de sentido.

Si es $\left| - \frac{n}{m} \right| < 1$, la diferencia $1 - \frac{n}{m}$. es positiva, luego $\frac{a}{1 - \frac{n}{m}}$ es positiva, es decir, que x también es positiva, perteneciendo a la semirrecta de origen A que contiene al punto B.

Se tiene: $1 - \frac{n}{m} < 1$, luego: $x = \frac{a}{1 - \frac{n}{m}} > a$

es decir: el punto M se encuentra a la derecha de A y es $AM > a$.

3° $\frac{n}{m}$ **0**. Para que el cociente sea cero, deberá ser $m = 0$, luego la (1) se convierte en:

$$x = \frac{ma}{m + n} = \frac{0}{n} = 0$$

lo que nos dice que la distancia AM es cero, es decir, que el punto M es el mismo punto A.

106. Resumen. — Resumiremos la discusión anterior en el siguiente cuadro sinóptico.

$x = \dfrac{a}{1 + \frac{n}{m}}$

- $\dfrac{m}{n} > 0$
  - Entonces $\frac{n}{m} > 0$, luego $1 + \frac{n}{m} > 0$, de donde $x > 0$, Como $1 + \frac{n}{m} > 1$, es $\dfrac{a}{1 + \frac{n}{m}} < a$, luego el segmento x se encuentra a la derecha de A y es menor que a.
- $\dfrac{m}{n} < 0$
  - Entonces $\frac{n}{m} < 0$, luego $x = \dfrac{a}{1 - \frac{n}{m}}$
  - Si $\left| -\frac{n}{m} \right| > 1$, es $1 - \frac{n}{m} < 0$, luego $x < 0$; el segmento x se encuentra a la izquierda de A.
  - Si $\left| -\frac{n}{m} \right| = 1$, es $1 - \frac{n}{m} = 0$, y como no se puede dividir por cero, no existe el segmento x.
  - Si $\left| -\frac{n}{m} \right| < 1$, es $1 - \frac{n}{m} > 0$, luego x es positivo.
- $\dfrac{m}{n} = 0$
  - Entonces es $m = 0$, luego $x = 0$.

PROBLEMAS

280. Hallar tres números consecutivos cuya suma sea 45.
R: 14, 15 y 16.

281. Hallar un número que, sumado con su mitad, dé 21.
R: 14.

282. Buscar un número cuyo duplo aumentado en 12, dé 8.
R: — 2.

283. Hallar un número que disminuído en sus dos tercios, la diferencia sea igual al quinto del mismo número aumentado en 2.
R: 15.

284. En una reunión de 11 personas se hace una colecta, dando cada hombre 5 pesos y cada señora 2, reuniéndose 30 pesos. ¿Cuántos hombres y señoras hay en la reunión?

$$R:\ 2\frac{2}{3}\ \text{y}\ 8\frac{1}{3}.$$

(El problema es imposible, la solución dada es solución de la ecuación que resultó del planteo, pero no del problema).

285. Hallar un número que sea igual a su mitad, más su tercio, más su sexto, más 1. R: No hay solución.

286. Hallar un número que sea igual a su mitad, más su tercio, más su sexto. R: Todos los números son solución.

287. Una persona gana 3000 pesos al año. En comer gasta la mitad, la tercera parte en casa y vestir y la sexta parte en diversiones. ¿Cuánto ahorra? R: = 0.

288. Dos cargas de ladrillos pesan juntas 4.000 kg. Si se toman 500 kg. de la menor y se agregan a la mayor, ésta pesará 7 veces más que aquélla. ¿Cuál es el peso de cada carga?
R: 1000 y 3000 kg.

289. Un niño tiene 10 docenas de bolitas en dos cajas; una de ellas contiene 40 bolitas más que la otra. ¿Cuántas bolitas contiene cada caja? R: 40 y 80.

290. ¿Cuál es el capital que sumado a su 6 por ciento da 371 $?
R: 350 $.

291. El cociente de dos números es 4 y el resto de su división es 2. Calcular esos números, sabiendo que su diferencia es 38.

R: 50 y 12.

292. Un ciclista sale a las 6 de la mañana con intención de volver al mediodía. Irá a 15 km. por hora, descansará una hora y regresará en tren, cuya velocidad es de 50 km. por hora. ¿A qué distancia máxima podrá alejarse?

R: 57,692 km.

293. Una canilla llena un depósito en 3 horas y otra en 4 horas, y una tercera lo vacía en 2 horas. Calcular el tiempo que tardará en llenarse abriendo las tres canillas a un tiempo.

R: 12 horas.

294. Una aleación de oro y cobre pesa 128 gramos y su título es de 0,915. ¿Qué cantidad de cobre hay que agregar para que el título sea de 0,840?

R: 11,429 gr.

295. Un hombre llevaba al mercado un rebaño de ovejas; en el camino le robaron la tercera parte de él y 6 ovejas más; después le robaron la mitad de lo que le había quedado y 10 ovejas más; le quedaron 2 ovejas. ¿Cuántas tenía al principio?

R: 45 ovejas.

296. Mira ese estanque: de la sierra umbría
Tributo vanle a dar cuatro raudales.
Llenarle puede el uno en todo un día;
El otro necesita dos cabales;
El tercero hasta tres, y todavía
El último uno más, quedando iguales.
Si los cuatro a la vez libres corrieran,
¿Cuánto tiempo en llenarlo consumieran?

R: 11 horas, 31 minutos, 12 segundos.

297. Un tonel contiene 120 litros de vino y 180 litros de agua; otro tonel contiene 90 litros de vino y 30 de agua. ¿Qué cantidad hay que tomar de cada tonel para obtener una mezcla de 70 litros de vino y 70 litros de agua

R: 100 del 1º y 40 del 2º.

298. Hallar la base de un rectángulo cuya altura es 1,2 m., sabiendo que es equivalente a un triángulo cuya base mide 4,8 metros y su altura 2,1 m.

R: 4,2 m.

299. Hallar el perímetro de un triángulo equilátero que tiene 9 m. de radio.

R: 46,764 m.

300. Hallar el número de lados de un polígono regular cuyo ángulo interior vale ocho quintos de recto.

R: 10.

301. Un silo, de forma cilíndrica, tiene 5 m. de radio y debe contener la cosecha de 20 Ha. a razón de 200 Hl. por hectárea. Hallar la altura del silo.

R: 5,22 m.

CAPITULO XIV

PROGRAMA XIV. — *Sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas.* —Una ecuación de primer grado admite infinitas raíces. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Métodos de sustitución, igualación y reducción.

Resolución de un sistema de dos ecuaciones literales de primer grado con dos incógnitas: Fórmulas. Los determinantes de segundo orden como símbolos representativos de las diferencias de los productos cruzados de sus elementos. Expresión de las fórmulas anteriores por medio de determinantes. Resolución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por determinantes.

Sistemas de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas: su resolución por los métodos de sustitución, igualación y reducción.

Resolución de un sistema de tres ecuaciones literales de primer grado con tres incógnitas : Fórmulas. El determinante de tercer orden como símbolo representativo de la suma algebraica de los productos de sus elementos obtenidos de acuerdo con la regla de Sarrús. Expresión de las fórmulas anteriores por medio de determinantes. Resolución de sistemas de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por medio de determinantes.

Sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas

107. Una ecuación de primer grado con varias incógnitas admite infinitas raíces. — Sea la ecuación:

$$2x + y = 7$$

Resolvamos esta ecuación de primer grado con dos incógnitas con relación a y como si x fuese un número conocido, lo que se llama *calcular y en función de x*:

$$y = 7 - 2x$$

Dando a x valores arbitrarios, tendremos para y:

Si $x = -2$, se tiene: $y = 7 - 2(-2) = 11$

" $x = -1$, " " : $y = 7 - 2(-1) = 9$

" $x = 0$, " " : $y = 7 - 2 . 0 = 7$

Si $x = 1$, se tiene: $y = 7 - 2 \,.\, 1 = 5$
„ $x = 2$, „ „ : $y = 7 - 2 \,.\, 2 = 3$
„ $x = 3$, „ „ : $y = 7 - 2 \,.\, 3 = 1$

. . . .

. . . .

Constatamos, pues, *que una ecuación de primer grado con dos incógnitas, admite infinitas raíces.*

108. Ecuación indeterminada. — Una ecuación es *indeterminada,* cuando admite infinitas raíces.

En general, toda ecuación que contiene más de una incógnita es indeterminada.

Ejemplos: $x - y = 5$; $x + 3y = 2z - 3$

Una ecuación es *determinada,* cuando tiene una sola incógnita.

109. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. — Sean las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$x + 2y = 8 \qquad (1)$$

$$3x - y = 3 \qquad (2)$$

Resolviendo ambas ecuaciones con respecto a y, resulta:

$$y = \frac{8 - x}{2} \qquad (3)$$

$$y = 3x - 3 \qquad (4)$$

Dando a x valores arbitrarios, tendremos en la (3):

Si $x = 0$, se tiene: $y = \frac{8-0}{2} = 4$

„ $x = 1$, „ „ : $y = \frac{8-1}{2} = 3{,}5$

„ $x = 2$, „ „ : $y = \frac{8-2}{2} = 3$

„ $x = 3$, „ „ : $y = \frac{8-3}{2} = 2{,}5$

. . . .

. . . .

Análogamente, en la (4):

Si $x = 0$, se tiene: $y = 3 \times 0 - 3 = -3$

„ $x = 1$, „ „ : $y = 3 \times 1 - 3 = 0$

„ $x = 2$, „ „ : $y = 3 \times 2 - 3 = 3$

„ $x = 3$, „ „ : $y = 3 \times 3 - 3 = 6$

. . . .

. . . .

Observando ambos cuadros de valores, se comprueba que cada una de las ecuaciones dadas admite infinitos pares de valores para sus incógnitas, pero que, *conjuntamente, un solo par de valores*: $x = 2$; $y = 3$ verifica a una y a otra ecuación.

Las dos ecuaciones dadas constituyen un *sistema*.

110. Definición. — Se llama *sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas*, al par de ecuaciones con dos incógnitas que tienen las mismas raíces.

Un sistema es *determinado*, cuando tiene tantas ecuaciones como incógnitas.

Ejemplo: las dos ecuaciones del párrafo anterior.

El sistema es *indeterminado*, cuando tiene más incógnitas que ecuaciones.

Un sistema que no admite ninguna solución se llama *imposible*.

Las *raíces* de las incógnitas de un sistema se llaman *solución* del sistema.

Resolver un sistema es hallar todas sus soluciones, si las hay, y si no, demostrar que es imposible.

111. Sistemas equivalentes. — Dos sistemas, teniendo las mismas incógnitas, se llaman *equivalentes*, cuando tienen las mismas soluciones, es decir, cuando toda solución del primero es solución del segundo, y toda solución del segundo es solución del primero. Así, se tiene:

$$\text{Sistema } A \left\{ \begin{array}{l} x - y = -2 \\ 3x + y = 2 \end{array} \right\} \text{ solución: } x = 0 \quad ; \quad y = 2$$

$$\text{Sistema } B \left\{ \begin{array}{l} 4x + 3y = 6 \\ x + 5y = 10 \end{array} \right\} \text{ solución: } x = 0 \quad ; \quad y = 2$$

Los sistemas A y B son equivalentes.

112. Propiedades de los sistemas equivalentes. — COROLARIOS. — I. *Dos sistemas equivalentes a un tercero son equivalentes entre sí.*

$$\text{Es decir: Si } \left. \begin{array}{l} \text{Sist. } A \equiv \text{Sist. } B \\ \text{Sist. } B \quad \text{Sist. } C \end{array} \right\} \text{Sist. } A \equiv \text{Sist. } C$$

II. — *Si la ecuación de un sistema se sustituye por la ecuación de un sistema equivalente, se obtiene un sistema equivalente.*

Resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

113. Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, podríamos emplear el método seguido en (109), pero tal procedimiento es largo y pesado, por lo que emplearemos otros más breves y cómodos.

Existen tres métodos generales de resolución: *1º, método de sustitución; 2º, método de igualación; 3º, método de reducción.*

Otro método, el de *determinantes,* lo veremos en este mismo Capítulo, y en el Capítulo XVI estudiaremos un *método gráfico* de resolución.

114. Método de sustitución. — Sea el sistema:

$$A \begin{cases} 2x + y = 1 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo una de las ecuaciones, por ejemplo, la (1), respecto a una de las incógnitas, por ejemplo y, resulta:

$$y = 1 - 2x \qquad (3)$$

reemplazando este valor de y en la ecuación (2):

$$3x + 2(1 - 2x) = 4 \qquad (4)$$

Obteniéndose el sistema B:

$$B \begin{cases} y = 1 - 2x & (3) \\ 3x + 2(1 - 2x) = 4 & (4) \end{cases}$$

Los sistemas A y B son equivalentes, (112), pero la ecuación (4) de B es una ecuación de primer grado con una incógnita, que sabemos resolver:

$$3x + 2(1 - 2x) = 4$$

$$3x + 2 - 4x = 4$$

$$3x - 4x = 4 - 2$$

$$-\ x = 2$$

multiplicando ambos miembros por -1:

$$\boxed{x = -2} \qquad (5)$$

Sustituyendo este valor, (87), en la (4) de *B*, resulta el sistema *C*, (112):

$$C \left\{ \begin{array}{ll} y = 1 - 2x & (3) \\ x = -2 & (5) \end{array} \right.$$

Sustituyendo el valor (5) en la (3):

$$y = 1 - 2(-2)$$

o bien: $y = 1 + 4$

luego: $\boxed{y = 5} \qquad (6)$

resultando así el sistema *D*:

$$D \left\{ \begin{array}{ll} x = -2 & (5) \\ y = 5 & (6) \end{array} \right.$$

Por (112, I), los sistemas *A, B, C* y *D* son equivalentes, luego *A* es equivalente a *D*, es decir: la solución de *D* es solución de *A*, (111).

De todo lo anterior deducimos la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para resolver un sistema por el* **método de sustitución** *se procede así:*

1º, Se resuelve una de las dos ecuaciones respecto a una incógnita;

2º, Se reemplaza el valor obtenido en la otra ecuación;

3º, Se resuelve la ecuación así obtenida, resultando el valor de una de las incógnitas;

4º, Se sustituye este valor en la ecuación que resultó según el paso 1º, resultando el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 8y = 19 & (1) \\ x - y = 5 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo la (1) respecto a y:

$$y = \frac{5x - 19}{8} \qquad (3)$$

reemplazando este valor en (2):

$$x - \left(\frac{5x - 19}{8}\right) = 5$$

simplificando: $x - \frac{5x - 19}{8} = 5$

sacando el denominador 8:

$$8x - (5x - 19) = 40$$

$$8x - 5x + 19 = 40$$

trasponiendo: $8x - 5x = 40 - 19$

$$3x = 21$$

$$x = 7 \qquad (4)$$

Sustituyendo este valor en (3):

$$y=\frac{5\times 7-19}{8}=\frac{35-19}{8}=\frac{16}{8}=2$$

$$\boxed{y=2} \qquad (5)$$

Los valores (4) y (5) constituyen la solución del sistema dado.

115. Método de igualación. — Sea el sistema:

$$A\begin{cases} 3x-2y=1 & (1)\\ 2x+3y=18 & (2)\end{cases}$$

Resolviendo cada ecuación respecto a la misma incógnita:

$$B\begin{cases} x=\dfrac{1+2y}{3} & (3)\\[2ex] x=\dfrac{18-3y}{2} & (4)\end{cases}$$

Como los primeros miembros son iguales, resulta, por el carácter transitivo de la igualdad:

$$\frac{1+2y}{3}=\frac{18-3y}{2} \qquad (5)$$

resultando así el sistema C:

$$C\begin{cases} x=\dfrac{1+2y}{3} & (3)\\[2ex] \dfrac{1+2y}{3}=\dfrac{18-3y}{2} & (5)\end{cases}$$

Como la ecuación (5) es de primer grado con una incógnita, resolviéndola, resulta:

$$\frac{1+2y}{3}=\frac{18-3y}{2} \qquad (5)$$

suprimiendo denominadores:

$$2(1+2y)=3(18-3y)$$

efectuando:

$$2+4y=54-9y$$

trasponiendo:

$$4y+9y=54-2$$

$$13y=52$$

$$y=\frac{52}{13}$$

$$\boxed{y=4} \qquad (6)$$

Sustituyendo este valor en la (5) de C, por (112):

$$D\begin{cases} x=\dfrac{1+2y}{3} & (3) \\ y=4 & (6) \end{cases}$$

y sustituyendo el valor (6) en la (3):

$$x=\frac{1+2\times 4}{3}$$

$$\boxed{x=3} \qquad (7)$$

Resultando, finalmente, el sistema:

$$E\begin{cases} y=4 & (6) \\ x=3 & (7) \end{cases}$$

Por (112) los sistemas A, B, C, D y E son eqüivalentes, luego A es equivalente a E, es decir: la solución de E, es solución de A.

De todo esto deducimos la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para resolver un sistema por el* **método de igualación,** *se procede así:*

1º, Se resuelven ambas ecuaciones respecto a la misma incógnita;

2º, Se igualan los segundos miembros de las ecuaciones obtenidas;

3º, Se resuelve la ecuación que resulta, obteniéndose el valor de una de las incógnitas;

4º, Se sustituye este valor en cualquiera de las ecuaciones que resultan según el paso 1º. obteniéndose el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 14 & (1) \\ 3x - 4y = 12 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo ambas ecuaciones respecto a x:

$$x = 14 - 2y \qquad (3)$$

$$x = \frac{12 + 4y}{3} \qquad (4)$$

igualando los segundos miembros:

$$14 - 2y = \frac{12 + 4y}{3}$$

sacando el denominador:

$$42 - 6y = 12 + 4y$$

trasponiendo: $-6y - 4y = 12 - 42$

$$-10y = -30$$

$$y = \frac{-30}{-10}$$

$$\boxed{y = 3} \qquad (5)$$

Reemplazando este valor en (3):

$$x = 14 - 2 \times 3$$
$$x = 14 - 6$$
$$\boxed{x = 8} \qquad (6)$$

Los valores (5) y (6) son la solución del sistema dado.

116. Método de reducción. — Sea el sistema:

$$A \begin{cases} 2x + 8y = -2 & (1) \\ 3x - y = -16 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando la (1) por 3, [coeficiente de x en la (2)], y la (2) por 2, [coeficiente de x en la (1)], por el teorema (93), resulta:

$$B \begin{cases} 6x + 24y = -6 & (3) \\ 6x - 2y = -32 & (4) \end{cases}$$

El sistema B, por (93 y (111), es equivalente al sistema A. Como los coeficientes de una incógnita, x en este caso, son iguales, si restamos ordenadamente la (3) y la (4), por el teorema (91) la ecuación que resulte será equivalente a la (3), por ejemplo.

Restando miembro a miembro la (3) y la (4):

$$(6x + 24y) - (6x - 2y) = (-6) - (-32)$$

o bien, sacando paréntesis:

$$6x + 24y - 6x + 2y = -6 + 32$$

reduciendo los términos semejantes:

$$26y = 26$$
$$y = \frac{26}{26}$$
$$\boxed{y = 1} \qquad (5)$$

Operando de manera análoga con los coeficientes de y, resultará el valor de x.

En efecto, multiplicando la (2) por 8, resulta el sistema C equivalente a A:

$$C \begin{cases} 2x + 8y = -2 & (1) \\ 24x - 8y = -128 & (6) \end{cases}$$

Antes restamos las dos ecuaciones porque los coeficientes iguales de una incógnita eran de igual signo; ahora que son distintos los signos, sumaremos:

$$(2x + 8y) + (24x - 8y) = (-2) + (-128)$$

o bien $\quad 2x + 8y + 24x - 8y = -2 - 128$

$$26x = -130$$

$$x = -\frac{130}{26}$$

$$\boxed{x = -5} \qquad (7)$$

Tenemos, finalmente, el sistema D:

$$D \begin{cases} y = 1 & (5) \\ x = -5 & (7) \end{cases}$$

que es equivalente al sistema A, luego la solución de D es la solución de A.

De todo esto deducimos la siguiente:

Regla práctica. — *Para resolver un sistema por el* **método de reducción,** *se procede así:*

1º, Se multiplican ambos miembros de la primera por el coeficiente de x en la segunda, y ambos miembros de la segunda por el coeficiente de x en la primera;

2º, Si los coeficientes iguales obtenidos son de igual sig-

no, se restan ordenadamente las dos ecuaciones, y si son de distinto signo se suman;

3º, Se resuelve la ecuación obtenida, resultando así el valor de una incógnita;

4º, Procediendo de la misma manera se halla el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x - y = 1 & (1) \\ 3x + 2y = 20 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando ambos miembros de la (1) por 3 y de la (2) por 4, resulta:

$$\begin{cases} 12x - 3y = 3 \\ 12x + 8y = 80 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro:

$$-11y = -77$$

$$y = \frac{-77}{-11}$$

$$\boxed{y = 7} \qquad (3)$$

Multiplicando ambos miembros de la (1) por 2, y de la (2) por 1:

$$\begin{cases} 8x - 2y = 2 \\ 3x + 2y = 20 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro:

$$11x = 22$$

$$x = \frac{22}{11}$$

$$\boxed{x = 2} \qquad (4)$$

Los valores (3) y (4) son la solución del sistema dado.

117. Casos particulares. — I. COEFICIENTES IGUALES. Sea el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 16 & (1) \\ 4x - y = -5 & (2) \end{cases}$$

Restando ordenadamente:

$$3y = 21$$

$$y = \frac{21}{3}$$

$$\boxed{y = 7} \qquad (3)$$

Una vez obtenido el valor de una incógnita, el valor de la otra se halla, preferentemente, *sustituyendo* este valor en cualquiera de las ecuaciones dadas y resolviéndola.

Así sustituyendo el valor $y = 7$ en la (1):

$$4x + 2.7 = 16$$

y resolviendo: $$4x = 2$$

$$x = \frac{2}{4}$$

de donde: $$\boxed{x = \frac{1}{2}} \qquad (4)$$

Los valores (3) y (4) son la solución del sistema.

Luego: *Si los coeficientes de una misma incógnita son iguales, se procede inmediatamente a la suma o resta para la determinación de la otra incógnita.*

II. Coeficiente múltiplo. — Sea el sistema:

$$\begin{cases} 7x + 6y = 20 & (1) \\ 5x - 2y = 8 & (2) \end{cases}$$

En este sistema el coeficiente de y en (1) es múltiplo del coeficiente de y en (2), bastando multiplicar ambos miembros de la (2) por 3, que es el cociente de 6 y 2, resultando el sistema:

$$\begin{cases} 7x + 6y = 20 & (1) \\ 15x - 6y = 24 & (3) \end{cases}$$

sumando ordenadamente:

$$22x = 44$$

de donde:

$$x = \frac{44}{22}$$

$$\boxed{x = 2} \qquad (4)$$

Reemplazando este valor en (2):

$$5 . 2 - 2y = 8$$

resolviendo:

$$10 - 8 = 2y$$

$$2 = 2y$$

de donde.

$$\boxed{y = 1} \qquad (5)$$

Los valores (4) y (5) son la solución del sistema.

Luego. *Si uno de los coeficientes de una incógnita es multiplo del coeficiente de la misma incógnita en la otra ecuación, se multiplica la ecuación en donde el coeficiente es menor por el cociente de ambos coeficientes.*

III. COEFICIENTES NO PRIMOS. — Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -18 & (1) \\ 5x + 6y = 8 & (2) \end{cases}$$

Los coeficientes de y no son primos entre sí, teniéndose:

$$m.\ c.\ m.\ \text{de } 4 \text{ y } 6 = 12$$

Multiplicando la (1) por $12:4 = 3$, y la (2) por $12:6 = 2$

$$\begin{cases} 9x - 12y = -54 \\ 10x + 12y = 16 \end{cases}$$

y resolviendo, se obtiene:

$$\boxed{x = -2} \quad ; \quad \boxed{y = 3}$$

Luego: *Si los coeficientes de una misma incógnita no son primos entre sí, se multiplica cada ecuación por el cociente del m. c. m. de dichos coeficientes y el coeficiente que figura en la ecuación respectiva.*

118. Caso especial. — Si las incógnitas de un sistema están bajo las formas $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, en vez de suprimirlas como denominadores, es más cómodo considerarlas en esas formas como incógnitas.

Ejemplo: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 3 & (1) \\[2ex] \dfrac{9}{x} - \dfrac{8}{y} = 1 & (2) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el caso II del párrafo anterior, multipliquemos la (1) por 3:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{x} + \dfrac{12}{y} = 9 & (3) \\ \dfrac{9}{x} - \dfrac{8}{y} = -1 & (2) \end{cases}$$

restando ordenadamente:

$$\frac{20}{y} = 10$$

$$20 = 10y$$

de donde:
$$y = \frac{20}{10}$$

$$\boxed{y = 2} \qquad (4)$$

Reemplazando este valor en (1):

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{2} = 3$$

$$\frac{3}{x} + 2 = 3$$

$$\frac{3}{x} = 1$$

de donde:
$$\boxed{x = 3} \qquad (5)$$

Los valores (4) y (5) constituyen la solución del sistema dado.

Sistema de dos ecuaciones literales de primer grado con dos incógnitas.

119. Forma normal de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. — La *forma normal* o *típica*, a que puede reducirse todo sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

de donde a, b, c, a', b' y c' representan números conocidos. Los números a, b, a', b' se llaman *coeficientes;* c y c' son los términos *absolutos* o *independientes.*

Un sistema es *completo,* cuando los coeficientes son todos distintos de cero, por ejemplo:

$$\begin{cases} 4x + 9y = 3 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 3 \\ y = -1 \end{matrix}$$

Un sistema es *incompleto,* cuando alguno de los coeficientes es cero, tal el siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 0y = 15 \end{cases} \quad \text{o bien:} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x = 15 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 5 \\ y = 9 \end{matrix}$$

120. Determinante de los coeficientes. — Se llama *determinante* de cuatro números a, b, a', b', dados en el orden de la escritura, a la expresión:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

que representa la diferencia:

$$ab' - a'b$$

de los productos cruzados de sus elementos.

Ejemplos:

1°) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3$

$$2^{\circ})\ \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = (-3)(-6) - 4(-1) = +18 + 4 = 22$$

$$3^{\circ})\ \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (-8)2 - 0 \times 6 = -16 - 0 = -16$$

Resolución de un sistema de dos ecuaciones literales de primer grado con dos incógnitas

121. Fórmulas. — Consideremos el sistema normal:

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

y resolvámoslo por cualquiera de los métodos de resolución estudiados anteriormente; por ejemplo, el método de reducción.

Multiplicando la (1) por b' y la (2) por b:

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = cb' \\ a'bx + bb'y = c'b \end{cases}$$

restando miembro a miembro, resulta:

$$ab'x - a'bx = cb' - c'b$$

factoreando: $(ab' - a'b)x = cb' - c'b$

de donde: $$\boxed{x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}} \qquad (3)$$

Calculemos el valor de y por el mismo método. Multiplicando ambos miembros de la (1) por a', y ambos miembros de la (2) por a:

$$aa'x + ba'y = ca'$$

$$aa'x + b'ay = c'a$$

restando miembro a miembro, resulta:

$$ba'y - b'ay = c'a - c'a$$

factoreando: $(ba' - b'a)y = ca' - c'a$

de donde: $$y = \frac{ca' - c'a}{ba' - b'a} \qquad (4)$$

Como el denominador de este valor difiere sólo en los signos del denominador de (3), para que sean iguales, multipliquemos ambos miembros de la (4) por -1:

$$\boxed{y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}} \qquad (5)$$

Teniendo en cuenta la definición (120) sobre lo que se llama determinante de los coeficientes, las expresiones (4) y (5) se pueden expresar así:

$$\boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}} \quad \text{(I)} \qquad \boxed{y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}} \quad \text{(II)}$$

Los valores (3) y (5), o sus correspondientes (I) y (II), son las *Fórmulas* que permiten resolver con rapidez y facilidad un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

El determinante del denominador de ambas fórmulas:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

se llama *determinante del sistema.*

De las fórmulas (I) y (II) se deduce la siguiente regla, llamada:

REGLA DE CRÁMER. — *Para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por el* **método de los determinantes,** *se reducen ambas ecuaciones a la forma normal, si es que no lo son.*

El valor de cada incógnita está expresado por una fracción cuyo denominador es el determinante del sistema, y cuyo numerador es el determinante que se obtiene al reemplazar en el determinante del sistema los coeficientes de la incógnita que se considera, por los términos independientes.

122. Resolución de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por determinantes.

1º) Resolver, aplicando la *Regla de Crámer,* el sistema:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{4} = 5 \\ \dfrac{x}{3} + 2y = 17 \end{cases}$$

Sacando denominadores:

$$\begin{cases} 4x + \ \ y = 20 \\ \ \ x + 6y = 51 \end{cases}$$

Por la *Regla de Crámer*:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 51 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{20 \,.\, 6-1 \,.\, 51}{4 \,.\, 6-1 \,.\, 1}=\frac{120-51}{24-1}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 1 & 51 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{4 \,.\, 51-1 \,.\, 20}{4 \,.\, 6-1 \,.\, 1}=\frac{204-20}{24-1}=8$$

luego: $x=3 \quad ; \quad y=8$

es la solución del sistema dado.

2º) Resolver por determinantes el sistema:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

Por la *Regla de Crámer*:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{a(-1)-1 \,.\, b}{1(-1)-1 \,.\, 1}=\frac{-a-b}{-2}=\frac{a+b}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{1 \,.\, b-1 \,.\, a}{1(-1)-1 \,.\, 1}=\frac{b-a}{-2}=\frac{a-b}{2}$$

luego: $x=\dfrac{a+b}{2} \quad ; \quad y=\dfrac{a-b}{2}$

es la solución del sistema dado.

3º) Resolver por determinantes el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{6} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{8} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Suprimiendo denominadores:

$$3x + 2y = 42$$

$$8x - 3y = 12$$

Por la ***Regla de Crámer*:**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 42 & 2 \\ 12 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{42(-3) - 12 \,.\, 2}{3(-3) - 8 \,.\, 2} = \frac{-126 - 24}{-9 - 16} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 42 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{3 \,.\, 12 - 8 \,.\, 42}{3(-3) - 8 \,.\, 2} = \frac{36 - 336}{-9 - 16} = 12$$

luego: $x = 6 \quad ; \quad y = 12$

es la solución del sistema dado.

EJERCICIOS

Resolver los siguientes sistemas por el método de sustitución:

302.	$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$	R: $x = 2$ „ $y = 3$
303.	$\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 5x - 2y = 44 \end{cases}$	„ $x = 8$ „ $y = -2$
304.	$\begin{cases} 5x - 2y = -6 \\ 7x - 3y = -7 \end{cases}$	„ $x = -4$ „ $y = -7$
305.	$\begin{cases} 9x + 3y = 9 \\ 5x - 2y = 1{,}7 \end{cases}$	„ $x = 0{,}7$ „ $y = 0{,}9$
306.	$\begin{cases} 4x + 18 = 6y \\ 2y - 26 = 3x \end{cases}$	„ $x = -12$ „ $y = -5$
307.	$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 6x + 4y = 14 \end{cases}$	„ $x = 1$ „ $y = 2$

Resolver los siguientes sistemas por el método de igualación:

308.	$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$	„ $x = 5$ „ $y = -2$
309.	$\begin{cases} x + 7y = 26 \\ x - 9y = -6 \end{cases}$	„ $x = 12$ „ $y = 2$
310.	$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y = 12 \\ 0{,}5x + 0{,}4y = 23 \end{cases}$	„ $x = 30$ „ $y = 20$
311.	$\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 2x + y = -6 \end{cases}$	„ $x = -7$ „ $y = 8$
312.	$\begin{cases} 4{,}5x - 6y = -11{,}1 \\ 5{,}5x - 8y = -15{,}1 \end{cases}$	„ $x = 0{,}6$ „ $y = 2{,}3$
313.	$\begin{cases} 4x + 20y = 0 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$	„ $x = 5$ „ $y = -1$

Resolver los siguientes sistemas por el método de reducción:

314. $\begin{cases} 2x + 3y = 27 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$ R: $x = 3$ „ $y = 7$

315. $\begin{cases} 3x + 7y = 22{,}4 \\ x - 5y = 6 \end{cases}$ „ $x = 7$ „ $y = 0{,}2$

316. $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ „ $x = 4$ „ $y = 1$

317. $\begin{cases} 2x + 4y = 19 \\ 6x + 2y = 57 \end{cases}$ „ $x = 9{,}5$ „ $y = 0$

318. $\begin{cases} 4x + y = 14 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ „ $x = 2$ „ $y = 6$

319. $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2y + 12 = 2x \end{cases}$ „ $x = 2$ „ $y = -4$

Resolver los siguientes sistemas por el método de determinantes:

320. $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$ „ $x = 1$ „ $y = 2$

321. $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ „ $x = 3$ „ $y = 4$

322. $\begin{cases} 5A - 2B = 34 \\ 7A - 3B = 7 \end{cases}$ „ $A = 88$ „ $B = 203$

323. $\begin{cases} 2{,}5x + y = 16 \\ 1{,}5x + 0{,}5y = 9 \end{cases}$ „ $x = 4$ „ $y = 6$

324. $\begin{cases} \frac{2}{3} x - \frac{3}{4} y = \frac{7}{12} \\ \frac{1}{2} x + 3y = -\frac{3}{4} \end{cases}$ „ $x = \frac{1}{2}$ „ $y = -\frac{1}{3}$

325. $\begin{cases} 3x + 9y = 3 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$ „ $x = 4$ „ $y = -1$

Resolver los siguientes sistemas por cualquier método:

326. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 9x + 7y = -3 \end{cases}$ R: $x = 2$,, $y = -3$

327. $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$,, $x = 3$,, $y = -5$

328. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$,, $x = 4$,, $y = -1$

329. $\begin{cases} x - y = 1 \\ \dfrac{2x}{5} + \dfrac{4}{3y} = 5 \end{cases}$,, $x = 5$,, $y = 4$

330. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{5} = \dfrac{x - y}{3} \\ \dfrac{x}{2} = y + 2 \end{cases}$,, $x = 8$,, $y = 2$

331. $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$,, $x = a$,, $y = b$

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones fraccionarias:

332. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{14}{y} = 1 \end{cases}$,, $x = 9$,, $y = 18$

333. $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 1 \\ \dfrac{21}{x} - \dfrac{2}{y} = 2 \end{cases}$,, $x = 9$,, $y = 6$

334. $\begin{cases} \dfrac{7}{x} + \dfrac{5}{y} = 29 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = 0 \end{cases}$,, $x = \dfrac{1}{2}$,, $y = \dfrac{1}{3}$

Sistemas de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas.

123. Una ecuación de primer grado con tres incógnitas admite infinitas raíces. — Sea la ecuación:

$$x + 2y - z = 7$$

Resolvamos esta ecuación con relación a z, como si x o y fuesen números conocidos:

$$z = x + 2y - 7$$

Dando a x y a y valores arbitrarios, tendremos para z:

Si $x = 0$,	e $y = -3$,	se tiene:	$z = -13$
Si $x = 1$,	„ $y = -2$,	„ „	$z = -10$
Si $x = 2$,	„ $y = -1$,	„ „	$z = -7$
Si $x = 3$,	„ $y = 0$,	„ „	$z = -4$
Si $x = 4$,	„ $y = 1$,	„ „	$z = -1$
Si $x = 5$,	„ $y = 2$,	„ „	$z = 2$

. . . .

. . . .

En donde se comprueba *que una ecuación de primer grado con tres incógnitas admite infinitas raíces.*

124. Sistemas de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas. — Sean las ecuaciones:

$$x + 2y - z = 7 \qquad (1)$$

$$x - y + z = 3 \qquad (2)$$

$$x + y - 2z = 4 \qquad (3)$$

Resolviendo cada ecuación respecto a z, por ejemplo, y dando valores a x y a y, obtendremos infinitas ternas de números que verifican a cada una de las tres ecuaciones dadas. Después de muchos ensayos, observaremos *que sólo una terna de números, que son:*

$$x = 4 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad z = 1$$

verifica, simultáneamente, a nuestras tres ecuaciones. Entonces se dice que las tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, constituyen un *sistema.*

125. Definición. — Se llama *sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,* al conjunto de tres ecuaciones con tres incógnitas que tienen las mismas raíces.

Las mismas definiciones dadas en los números (110) y (111), son válidas para los sistemas que estamos estudiando.

Las propiedades del número (112) son aplicables a los sistemas en general.

126. Métodos de resolución. — Resolveremos estos sistemas por los métodos de *sustitución, igualación, reducción* y por *determinantes.*

127. Método de sustitución. — Sea resolver el sistema:

$$x + 2y - z = 10 \qquad (1)$$
$$2x + 5y + 2z = 24 \qquad (2)$$
$$3x - y - 2z = 2 \qquad (3)$$

Hallando el valor de x en la (1), por ejemplo, por lo estudiado en (114), resulta:

$$x = 10 - 2y + z$$

Reemplazando este valor en (2) y en (3):

$$2(10-2y+z)+5y+2z=24$$
$$3(10-2y+z)-y-2z=2$$

efectuando los productos:

$$20-4y+2z+5y+2z=24$$
$$30-6y+3z-y-2z=2$$

reduciendo los términos semejantes:

$$\begin{cases} y+4z=4 & (4) \\ -7y+z=-28 & (5) \end{cases}$$

El sistema de estas dos ecuaciones es, por (**112**), **equivalente** con el sistema dado.

Resolviendo el sistema (4) y (5) por el método de sustitución, (114), resulta:

$$\boxed{y=4} \quad ; \quad \boxed{z=0} \qquad (6)$$

Sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones del sistema dado, por ejemplo en (1), resulta:

$$x+2.4-0=10$$

de donde: $\boxed{x=2}$ (7)

Los valores (6) y (7) son la solución del sistema pro puesto.

De todo esto deducimos la siguiente:

Regla práctica. — *Para resolver un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por* **el método de sustitución,** *se procede así:*

1º, Se halla el valor de una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones dadas;

2º, Se reemplaza ese valor en las otras dos ecuaciones y se resuelve el sistema así formado;

3º, Los valores obtenidos se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación que resulta, obteniéndose así el valor de la otra incógnita.

128. Método de igualación.—Sea resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} x - y + 2z = 2 & (1) \\ x + y + z = 6 & (2) \\ x + 2y - z = 5 & (3) \end{array}\right.$$

Hallando el valor de x, por ejemplo, en cada una de las ecuaciones, resulta:

$$x = 2 + y - 2z \qquad (4)$$
$$x = 6 - y - z \qquad (5)$$
$$x = 5 - 2y + z \qquad (6)$$

Igualando los segundos miembros de (4) y (5), y (4) y (6), se obtiene:

$$2 + y - 2z = 6 - y - z$$
$$2 + y - 2z = 5 - 2y + z$$

escribiendo estas dos ecuaciones en la forma normal, (119), se obtiene, respectivamente:

$$2y - z = 4$$
$$3y - 3z = 3$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de igualación, (115), se obtiene:

$$\boxed{y = 3} \; ; \; \boxed{z = 2} \qquad (7)$$

Reemplazando estos valores en cualquiera de las ecuaciones de nuestro sistema, por ejemplo en (1), resulta:

$$x - 3 + 2 . 2 = 2$$

de donde: $$\boxed{x = 1} \qquad (8)$$

Los valores (7) y (8) son la solución del sistema dado.

De lo expuesto se deduce la siguiente:

Regla práctica.—*Para resolver un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por el* **método de igualación** *se procede así:*

1º, Se halla el valor de una incógnita en cada una de las ecuaciones del sistema;

2º, Se igualan el primero y el segundo, y el primero y el tercero de los dos valores obtenidos, y se resuelve el sistema formado;

3º, Los valores obtenidos se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación que resulta, obteniéndose así el valor de la otra incógnita.

129. Método de reducción.—Sea resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 4z = -6 & (1) \\ 4x - 3y + 2z = 22 & (2) \\ 3x - 4y - 2z = -8 & (3) \end{cases}$$

Igualando los coeficientes de x, por ejemplo, en la (1) y (2), y teniendo en cuenta el caso II de (117), resulta:

$$4x + 10y - 8z = -12$$

$$4x - 3y + 2z = 22$$

restando ordenadamente:

$$13y - 10z = -34 \qquad (4)$$

Igualando los coeficientes de x en la (1) y (3), resulta:

$$6x + 15y - 12z = -18$$

$$6x - 8y - 4z = -16$$

restando ordenadamente:

$$23y - 8z = -2 \qquad (5)$$

Obteniéndose así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por (4) y (5):

$$\begin{cases} 13y - 10z = -34 & (4) \\ 23y - 8z = -2 & (5) \end{cases}$$

y resolviendo por el método de reducción, (116), se obtiene:

$$\boxed{y = 2} \; ; \; \boxed{z = 6} \qquad (6)$$

Reemplazando estos valores en cualquiera de las ecuaciones de nuestro sistema, por ejemplo en (1), resulta:

$$2x + 5 . 2 - 4 . 6 = -6$$

o bien: $$2x + 10 - 24 = -6$$

de donde: $$\boxed{x = 4} \qquad (7)$$

Los valores (6) y (7) son la solución del sistema que nos habíamos propuesto resolver.

De esto deducimos la siguiente:

REGLA PRÁCTICA.—*Para resolver un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por el* **método de reducción,** *se procede así:*

1º, Se igualan los coeficientes de una incógnita en la primera y segunda ecuación, y luego se suman o se restan ordenadamente;

2º, Se igualan los coeficientes de la misma incógnita en la primera y tercera ecuaciones, y se suman o se restan ordenadamente;

3º, Se resuelve el sistema formado con las dos ecuaciones obtenidas;

4º, Los valores hallados se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación que resulta, obteniéndose así el valor de la otra incógnita.

130. Nota. — Una vez resuelto un sistema por cualquiera de los métodos estudiados, es conveniente comprobar si los valores hallados verifican a cada una de las ecuaciones del sistema.

Sistema de tres ecuaciones literales de primer grado con tres incógnitas.

131. Forma normal. — La *forma normal* o *típica*, a que puede reducirse todo sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, es:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

en donde $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', d, d', d''$, son números conocidos. Los números $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, se llaman *coeficientes; d, d'* y *d''* son los términos *absolutos* o *independientes.*

Completo es el sistema cuyos coeficientes son distintos de cero; por ejemplo:

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x + y - 2z = 4 \\ 4x + 5y - 3z = 5 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Incompleto es el sistema en que algunos de sus coeficientes es cero; por ejemplo:

$$\begin{cases} 2y - 4z = -16 \\ 2x + y = 8 \\ x - y + z = 6 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

132. Determinante de los coeficientes. — Se llama *determinante* de los números $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, dados en el orden de la escritura, a la expresión:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

133. Regla de Sarrús. (1) — La *Regla de Sarrús* permite desarrollar rápidamente un determinante de *nueve* elementos, o de *tercer orden*. Se enuncia así:

El desarrollo de un determinante de tercer orden se obtiene del siguiente modo:

1º, Se escriben las dos primeras líneas debajo del determinante;

2º, Se multiplican los términos en diagonal de izquierda a derecha, afectando a los productos con el signo +;

(1) Los determinantes constituyen un estudio especial, llamado *Teoría de los determinantes*, que no nos corresponde, siendo otro su lugar.

3º, Se multiplican los términos en diagonal de derecha a izquierda, afectando a los productos con el signo —;

4º, Se halla la suma algebraica de los productos obtenidos.

El esquema siguiente muestra, gráficamente, como se procede:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ - \\ - \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3.5.1 + 4.3.1 + 1.2.2 - 1.5.1 - 3.3.2 - 4.2.1$$

$$= 15 + 12 + 4 - 5 - 18 - 8 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.2.2 + 4.1.2 + 1.3.0 - 1.2.2 - 0.1.0 - 4.3.2$$

$$= 8 - 4 - 24 = -20$$

Resolución de un sistema de tres ecuaciones literales de primer grado con tres incógnitas.

134. Fórmulas. — Consideremos el sistema normal

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & (1) \\ a'x + b'y + c'z = d' & (2) \\ a''x + b''y + c''z = d'' & (3) \end{cases}$$

y resolvámoslo por el método de reducción, por ejemplo.

Multiplicando la (1) por c' y la (2) por c:

$$ac'x + bc'y + cc'z = dc'$$
$$a'cx + b'cy + c'cz = d'c$$

restando miembro a miembro:

$$ac'x - a'cx + bc'y - b'cy = dc' - d'c$$

factoreando:

$$(ac' - a'c)x + (bc' - b'c)y = dc' - d'c \qquad (4)$$

Multiplicando la (1) por c'' y la (3) por c:

$$ac''x + bc''y + cc''z = dc''$$
$$a''cx + b''cy + c''cz = d''c$$

restando miembro a miembro:

$$ac''x - a''cx + bc''y - b''cy = dc'' - d''c$$

factoreando:

$$(ac'' - a''c)x + (bc'' - b''c)y = dc'' - d''c \qquad (5)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (4) (5), resulta:

$$x = \frac{db'c'' + d'b''c + d''bc' - cb'd'' - c'b''d - c''bd'}{ab'c'' + a'b''c + a''bc' - cb'a'' - c'b''a - c''ba'} \quad (6)$$

$$y = \frac{ad'c'' + a'd''c + a''dc' - cd'a'' - c'd''a - c''da'}{ab'c'' + a'b''c + a''bc' - cb'a'' - c'b''a - c''ba'} \quad (7)$$

Reemplazando estos valores en la (1), por ejemplo, y resolviendo, se obtiene el siguiente valor para z:

$$z = \frac{ab'd'' + a'b''d + a''bd' - db'a'' - d'b''a - d''ba'}{ab'c'' + a'b''c + a''bc' - cb'a'' - c'b''a - c''ba'} \quad (8)$$

Teniendo en cuenta la definición (132) sobre lo que se llama determinante de los coeficientes del sistema y su desarrollo por medio de la *Regla de Sarrús*, las expresiones (6), (7) y (8) se pueden escribir así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \quad (I) \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \quad (II) \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \quad (III)$$

Las expresiones (I), (II) y (III) son las *Fórmulas* que permiten resolver fácilmente un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, sin más que reemplazar cada letra por su valor correspondiente.

El determinante del denominador de las tres fórmulas:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

se llama *determinante del sistema.*

De las tres fórmulas últimas se deduce la siguiente:

REGLA DE CRÁMER. — *Para resolver un sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por el* **método de determinantes,** *se reducen a la forma normal, si es que no lo son.*

El valor de cada incógnita está expresado por una fracción cuyo denominador es el determinante del sistema, y cuyo numerador es el determinante que se obtiene al reemplazar en el determinante del sistema los coeficientes de la incógnita que se considera, por los términos independientes.

135. Resolución de sistemas de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas por medio de determinantes.

1º Sea resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 6 & (1) \\ x - y + z = 8 & (2) \\ 2x + y - 3z = 9 & (3) \end{cases}$$

Aplicando la *Regla de Crámer*, se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}} \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

y por la *Regla de Sarrús*:

$$x = \frac{6(-1)(-3)+8.1(-1)+9.1.1-(-1)(-1)9-1.1.6-(-3)1.8}{1(-1)(-3)+1.1(-1)+2.1.1-(-1)(-1)2-1.1.1-(-3)1.1}$$

$$x = \frac{18-8+9-9-6+24}{3-1+2-2-1+3} = \frac{28}{4} = 7$$

$$y = \frac{1.8(-3)+1.9(-1)+2.6.1-(-1)8.2-1.9.1-(-3)6.1}{4}$$

$$y = \frac{-24-9+12+16-9+18}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$z = \frac{1(-1)9+1.1.6+2.1.8-6(-1)2-8.1.1-9.1.1}{4}$$

$$z = \frac{-9+6+16+12-8-9}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

La solución del sistema es:

$$x = 7 \quad ; \quad y = 1 \quad ; \quad z = 2$$

Comprobación. — Reemplazando estos valores en las ecuaciones dadas:

$$7 + 1 - 2 = 6 \qquad (1)$$

$$7 - 1 + 2 = 8 \qquad (2)$$

$$14 + 1 - 6 = 9 \qquad (3)$$

Se obtienen identidades numéricas, lo què prueba que la solución hallada es verdadera.

2º Sea resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rr} 2x - y + 3z = 8 & (1) \\ 3x - \ y = 6 & (2) \\ y - \ z = 3 & (3) \end{array}\right.$$

Completando el sistema, resulta:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + 3z = 8 \\ 3x - y + 0z = 6 \\ 0x + y - \ z = 3 \end{array}\right.$$

Aplicando la *Regla de Crámer*:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}$$

y por la *Regla de Sarrús*:

$$x = \frac{8(-1)(-1)+6.1.3+3(-1)0-3(-1)3-0.1.8-(-1)(-1)6}{2(-1)(-1)+3.1.3+0(-1)0-3(-1)0-0.1.2-(-1)(-1)3}$$

$$x = \frac{8+18+0+9-0-6}{2+9+0+0-0-3} = \frac{29}{8}$$

$$y = \frac{2.6(-1)+3.3.3+0.8.0-3.6.0-0.3.2-(-1)8.3}{8}$$

$$y = \frac{-12+27+0-0-0+24}{8} = \frac{39}{8}$$

$$z = \frac{2(-1)3+3.1.8+0(-1)6-8(-1)0-6.1.2-3(-1)3}{8}$$

$$z = \frac{-6+24-0+0-12+9}{8} = \frac{15}{8}$$

La solución del sistema es:

$$x = \frac{29}{8} \quad ; \quad y = \frac{39}{8} \quad ; \quad z = \frac{15}{8}$$

EJERCICIOS

Resolver los siguientes sistemas por el método de sustitución:

335. $$\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 9\\ x + 2y + 3z &= 16\\ x + 3y + 4z &= 21 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \text{R: } x &= 4\\ \text{"}\quad y &= 3\\ \text{"}\quad z &= 2 \end{aligned}$$

336. $$\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 5\\ x - y + z &= 3\\ x + y - z &= 5 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \text{"}\quad x &= 4\\ \text{"}\quad y &= 1\\ \text{"}\quad z &= 0 \end{aligned}$$

337. $$\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 8{,}5\\ 3x + y - z &= -0{,}5\\ 2x + 4y + z &= 18 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \text{"}\quad x &= 0{,}5\\ \text{"}\quad y &= 3\\ \text{"}\quad z &= 5 \end{aligned}$$

338. $$\left\{\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 12\\ 3x + 2y + z &= 9\\ x + y + z &= 5 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \text{"}\quad x &= 3\\ \text{"}\quad y &= -2\\ \text{"}\quad z &= 4 \end{aligned}$$

Resolver los siguientes sistemas por el método de igualación:

339. $$\left\{\begin{aligned} x + y + 3z &= 8\\ x - y + 3z &= 5\\ x + 2y - z &= 7 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \text{R: } x &= 4\\ \text{"}\quad y &= 2\\ \text{"}\quad z &= 1 \end{aligned}$$

340. $$\left\{\begin{aligned} x - 3y + z &= -11\\ 3x + 4y - 5z &= 29\\ x + y - 3z &= 5 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \text{"}\quad x &= 5\\ \text{"}\quad y &= 6\\ \text{"}\quad z &= 2 \end{aligned}$$

341. $$\left\{\begin{aligned} 2x - y + z &= -0{,}1\\ x + 2y - z &= 1{,}5\\ 4x - 3y + 2z &= -1 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \text{"}\quad x &= 0{,}2\\ \text{"}\quad y &= 0{,}8\\ \text{"}\quad z &= 0{,}3 \end{aligned}$$

342. $$\left\{\begin{aligned} 2x + y + z &= 11\\ y + z &= 1\\ x \qquad + z &= 3 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \text{"}\quad x &= 5\\ \text{"}\quad y &= 3\\ \text{"}\quad z &= -2 \end{aligned}$$

Resolver los siguientes sistemas por el método de reducción:

343. $$\left\{\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2\\ 2x - 3y + z &= 1\\ 3x - y + 2z &= 9 \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \text{R: } x &= 3\\ \text{"}\quad y &= 2\\ \text{"}\quad y &= 1 \end{aligned}$$

Jefe Pinto

344. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 53 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$ „ $x = 3$ „ $y = 5$ „ $z = 8$

345. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 14 \\ 2x + 5y - 7z = -9 \\ 4x + 3y + 6z = 28 \end{cases}$ „ $x = 1$ „ $y = 2$ „ $z = 3$

346. $\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 12x + 3y + z = 2 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$ „ $x = 0$ „ $y = 2$ „ $z = -4$

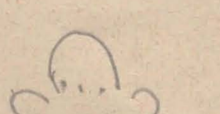
Resolver los siguientes sistemas por el método de determinantes:

347. $\begin{cases} x + y - 6z = 9 \\ x - y + 4z = 5 \\ -2x + 3y - z = 4 \end{cases}$ R: $x = 8$ „ $y = 7$ „ $z = 1$

348. $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 16 \\ 3x + 5y - 2z = 6 \\ 4x + 3y - 4z = -1 \end{cases}$, $x = 3$ „ $z = 1$ „ $z = 4$

349. $\begin{cases} 12x - 20y = 0 \\ x + z = -1 \\ x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$ „ $x = 10$ „ $y = 6$ „ $z = -7$

350. $\begin{cases} y - x = 10 \\ -x = y + 2z \\ 3x = 6z - y \end{cases}$ „ $x = -4$ „ $y = 6$ „ $z = -1$



CAPITULO XV

PROGRAMA XV. — *Problemas de primer grado con dos o más incógnitas.* — Problemas de interés, descuento, repartición proporcional, regla de compañía y mezclas, resueltos por ecuaciones. Descuento matemático. Problema de los móviles. Discusión.

Problemas de primer grado con dos o más incógnitas

136. Teniendo en cuenta la *Regla general para el planteo de los problemas,* enunciada en (103), resolveremos a continuación algunos problemas con dos o más incógnitas.

137. Problema I. — *El duplo de un número más el triplo de otro es igual a 31, y si del triplo del primero se resta el duplo del segundo, se obtiene 1*

Calcular los dos números.

Planteo. — Sea x el primer número, e y el segundo. El duplo del primero más el triplo del segundo es·

$$2x + 3y = 31$$

y el triplo del primero menos el duplo del segundo, es:

$$3x - 2y = 1$$

Resolución. — Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 31 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

que resuelto por el método de determinantes, da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 31 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-62-3}{-4-9} = \frac{-65}{-13} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 31 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{2-93}{-4-9} = \frac{-91}{-13} = 7$$

Los números buscados son 5 y 7.

Discusión. — Los números buscados son 5 y 7, pues el duplo del primero es 10 y el triplo del segundo es 21 y su suma es 31. Además el triplo del primero es 15 y el duplo del segundo es 14, y su diferencia es 1.

138. Problema II. — *En un triángulo los ángulos son A, B y C. La suma de A y B es 130°, y la de B y C es 110°. ¿Cuántos grados tiene cada ángulo?*

Planteo. — Los tres ángulos de un triángulo suman 180°, luego:

$$A + B + C = 180^\circ$$

La suma de A y B es: $A + B = 130^\circ$

y la suma de B y C es: $B + C = 110^\circ$

Resolución. — Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} A + B + C = 180^\circ \\ A + B = 130^\circ \\ \phantom{A+{}} B + C = 110^\circ \end{cases}$$

y resolviendo por el método de determinantes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 180 & 1 & 1 \\ 130 & 1 & 0 \\ 110 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{180+130+0-110-0-130}{1+1+0-0-0-1} = \frac{70}{1} = 70$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 180 & 1 \\ 1 & 130 & 0 \\ 0 & 110 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{130+110+0-0-0-180}{1} = \frac{60}{1} = 60$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 180 \\ 1 & 1 & 130 \\ 0 & 1 & 110 \end{vmatrix}}{1} = \frac{110+180+0-0-130-110}{1} = \frac{50}{1} = 50$$

Los ángulos son: $A = 70^\circ$; $B = 60^\circ$; $C = 50^\circ$.

Discusión. — En efecto:

$$A + B + C = 70^\circ + 60^\circ + 50^\circ = 180^\circ$$

$$A + B = 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ$$

$$B + C = 60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$$

139. Problema III, de interés. — *Dos capitales, cuya suma es 8.000 pesos, han estado impuestos al 4 % durante un año; produciendo el primero 40 pesos más de interés que el segundo. Hallar los dos capitales y los intereses.*

PLANTEO. — Sea:

$x =$ uno de los capitales;

$y =$ el otro capital;

$I(x) =$ el interés del capital x;

$I(y) =$ „ „ „ „ y.

Como la suma de los dos capitales es 8.000 pesos, se tiene:

$$x + y = 8.000 \qquad (1)$$

Por lo estudiado en segundo año, se sabe que:

$$I = \frac{c \, . \, r}{100}$$

o bien, en nuestros casos:

$$I(x) = \frac{x \, . \, 4}{100} \qquad (2)$$

$$I(y) = \frac{y \, . \, 4}{100} \qquad (3)$$

pero el enunciado dice que:

$$I(x) = I(y) + 40 \qquad (4)$$

luego, sustituyendo los valores (2) y (3) en (4):

$$\frac{x \, . \, 4}{100} = \frac{y \, . \, 4}{100} + 40$$

y simplificando:

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{25} + 40$$

y por último:

$$x = y + 1000 \qquad (5)$$

RESOLUCIÓN. — Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8000 & (1) \\ x = y + 1000 & (5) \end{cases}$$

que resolveremos por el método de sustitución. Reemplazando el valor (5) en (1):

$$y + 1000 + y = 8000$$

$$2y = 8000 - 1000$$

$$2y = 7000$$

$$y = \frac{7000}{2}$$

$$\boxed{y = 3500}$$

y sustituyendo este valor en (1):

$$x + 3500 = 8000$$

de donde:

$$\boxed{x = 4500}$$

En la (2), se tiene:

$$I(x) = \frac{4500 \times 4}{100}$$

o bien:

$$\boxed{I(x) = 180}$$

En la (4) se tiene:

$$180 = I(y) + 40$$

de donde:

$$\boxed{I(y) = 140}$$

Los capitales son 4500 y 3500 pesos, y los intereses respectivos 180 y 140 pesos.

Discusión. — En efecto:

$$4500 \ \$ + 3500 \ \$ = 8000 \ \$$$

y además:

$$4500 \ \$ = 3500 \ \$ + 1000 \ \$$$

140. Problema IV, de descuento. — *La suma de los valores nominales de dos letras es de 2440 pesos. La primera fué negociada al 4 % durante 2 meses, y la segunda al 6 % durante 6 meses. Cobramos por las dos letras 2390 pesos. Hallar el valor nominal de cada una.*

PLANTEO. — Sea:

$x =$ valor nominal de una letra;

$y =$ „ „ „ la otra letra;

$D(x) =$ descuento de la 1ª letra;

$D(y) =$ „ „ „ 2ª „

La suma de los valores nominales es:

$$x + y = 2440 \qquad (1)$$

Por lo estudiado en segundo año, se sabe que

$$D = \frac{Vn \cdot r \cdot t}{100}$$

y en nuestro caso:

$$D(x) = \frac{x \cdot 4 \cdot 2}{1200} = \frac{2x}{300} \qquad (2)$$

$$D(y) = \frac{y \cdot 6 \cdot 6}{1200} = \frac{9y}{300} \qquad (3)$$

La suma de los dos descuentos es:

$$2440 + 2390 = 50 \ \$$$

es decir: $D(x) + D(y) = 50$

y sustituyendo los valores (2) y (3):

$$\frac{2x}{300} + \frac{9y}{300} = 50$$

o bien. $2x + 9y = 15000 \qquad (4)$

RESOLUCIÓN. — Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2440 & (1) \\ 2x + 9y = 15000 & (4) \end{cases}$$

que resolveremos por el método de reducción. Multipli cando ambos miembros de la (1) por 2:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4880 & (1) \\ 2x + 9y = 15000 & (4) \end{cases}$$

Restando de la (4) la (1), ordenadamente:

$$7y = 10120$$

$$y = \frac{10120}{7} \quad \therefore \quad \boxed{y = 1445{,}71}$$

y sustituyendo este valor en (1):

$$x + 1445{,}71 = 2440 \quad \therefore \quad \boxed{x = 994{,}29}$$

Los valores nominales de las letras son 994,29 \$ y 1445,71 \$

DISCUSIÓN. — Se tiene:

$$994{,}29\ \$ + 1445{,}71\ \$ = 2440\ \$$$

y además:

$$\frac{994{,}29\ \$ \times 4 \times 2}{1200} + \frac{1445\ \$ \times 6 \times 6}{1200} = 50\ \$$$

141. Problema V, de repartición proporcional. — *En la puerta de una iglesia piden limosna habitualmente dos pobres: una mujer todos los días y, alternativamente, un cojo y un ciego. Una madre envía a su hijo con 5,20 pesos, diciéndole que si está la mujer y el cojo, dé a éste los $\frac{3}{4}$ del total y la cuarta parte restante a la mujer; pero* *si está el ciego, que socorra a éste con un* $\frac{1}{4}$ *y a la mujer con los* $\frac{3}{4}$. *Sucede que aquel día están los tres mendigos a la puerta de la iglesia. ¿Qué limosna debe recibir cada uno?*

PLANTEO. — Sean: $x =$ lo que recibe la mujer;

$y =$ „ „ „ el cojo;

$z =$ „ „ „ „ ciego.

Según el enunciado: $x + y + z = 5{,}2$ (1)

De acuerdo con la orden recibida, las partes de la mujer y del cojo está en la relación de 3 a 1, es decir:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{1}$$

o bien:
$$x = 3y$$

$$x - 3y = 0 \qquad (2)$$

y las partes del ciego y la mujer en la relación de 1 a 3:

$$\frac{z}{x} = \frac{1}{3}$$

o bien:
$$3z = x$$

$$x - 3z = 0 \qquad (3)$$

RESOLUCIÓN. — Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 5{,}2 & (1) \\ x - 3y = 0 & (2) \\ x - 3z = 0 & (3) \end{cases}$$

que resuelto por determinantes, da:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5,2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}}=\frac{46,8+0+0+0-0+0}{9+0+0+3-0+3}=\frac{46,8}{15}=3,12$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5,2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}}{15}=\frac{0+0-0-0+15,6}{15}=\frac{15,6}{15}=1,04$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 5,2\\ 1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}}{15}=\frac{0+0+0+15,6-0-0}{15}=\frac{15,6}{15}=1,04$$

A la mujer le corresponde 3,12 \$, al cojo 1,04 \$ y al ciego 1,04 \$.

DISCUSIÓN. — En efecto:

$$3,12\ \$+1,04\ \$+1,04\ \$=5,20\ \$$$

y además:

$$\frac{3,12\ \$}{1,04\ \$}=\frac{3}{1}\quad \text{y}\quad \frac{1,04\ \$}{3,12\ \$}=\frac{1}{3}$$

142. Problema VII, de compañía. — *Dos personas se asocian para explotar un negocio. Una pone 6400 \$, y la otra 5200 \$. Al terminar el negocio, resultó que el capital se había convertido en 15000 \$. ¿Cuál es la ganancia de cada socio?*

PLANTEO. — Sean: $x =$ ganancia del 1[er] socio;

$y =$ „ „ 2º „

El capital inicial fué de:

$$6400 + 5200 = 11600 \ \$$$

y la ganancia habida es:

$$15000 - 11600 = 3400 \ \$$$

luego: $$x + y = 3400 \qquad (1)$$

Pero las ganancias son proporcionales a los capitales respectivos, luego:

$$\frac{x}{6400} = \frac{y}{5200}$$

de donde: $$5200x = 6400y$$

y dividiendo ambos miembros por 400:

$$13x = 16y$$

o bien: $$13x - 16y = 0 \qquad (2)$$

RESOLUCIÓN. — Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3400 & (1) \\ 13x - 16y = 0 & (2) \end{cases}$$

que resolveremos por el método de determinantes:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3400 & 1 \\ 0 & -16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & -16 \end{vmatrix}} = \frac{-54400}{-16 - 13} = \frac{-54400}{-29} = 1875,86$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3400 \\ 13 & 0 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-44200}{-29} = 1524,14$$

Al primero le corresponde 1875,86 \$, y al segundo 1524,14 \$.

Discusión. — En efecto:

$$1875{,}86\ \$ + 1524{,}14\ \$ = 3400\ \$$$

además:

$$\frac{1875{,}86\ \$}{6400} = \frac{1524{,}14\ \$}{5200}$$

143. Problema VII, de mezclas. — *¿Cuántos litros de vino de 0,50 \$ el litro hay que mezclar con vino de 0,90 \$ el litro, para que 30 litros de la mezcla valgan 24 \$?*

Planteo. — Sean: $x =$ litros de 0,50 \$;

$y =$ „ „ 0,90 \$.

Se tiene: $$x + y = 30 \qquad (1)$$

El costo de los x litros es: $0{,}5x$;

„ „ „ „ y „ „ $0{,}9y$.

y como el costo de la mezcla es la suma de los costos de los componentes:

$$0{,}5x + 0{,}9y = 24 \qquad (2)$$

Resolución. — Se tiene el sistema:

$$x + y = 30 \qquad (1)$$

$$0{,}5x + 0{,}9y = 24 \qquad (2)$$

que resolveremos por determinantes:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}30 & 1\\ 24 & 0,9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0,5 & 0,9\end{vmatrix}}=\frac{27-24}{0,9-0,5}=\frac{3}{0,4}=7,5$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 30\\ 0,5 & 24\end{vmatrix}}{0,4}=\frac{24-15}{0,4}=\frac{9}{0,4}=22,5$$

Hay que mezclar 7,5 litros del de 0.50 $ el litro, y 22,5 litros del de 0,90 $ el litro.

DISCUSIÓN. — En efecto:

$$7,50+22,50=30$$

y además: $7,5\times 0,5+22,5\times 0,9=24$

144. Descuento matemático. — Se llama *descuento* a la cantidad que hay que restar de un documento de crédito (*letra, cheque, pagaré,* etc.) pagado antes de su vencimiento.

El descuento puede ser *comercial* o *matemático.*

El *descuento comercial*, comúnmente usado en el comercio, es el interés del *valor nominal*, o cantidad que figura en el documento, al tanto por ciento dado y por el tiempo que falte para su vencimiento.

El *descuento matemático* o *racional*, es la diferencia entre el valor nominal y el *valor efectivo*, que es la cantidad que realmente se paga.

Se justifica el descuento por el hecho de que el *tomador* de un documento, al entregar una cierta cantidad, pierde los intereses que le producirían hasta su vencimiento, obteniéndolos el *tenedor*. Ahora bien; el tomador no entrega todo el valor nominal, así que al hacer el descuento cobra intereses de una cantidad que no entregó, cosa que con el descuento matemático no sucede, pues se calcula el interés de la cantidad que se entregó, o valor efectivo.

145. Deducción de la fórmula. — Sean:

$Vn =$ valor nominal;

$Ve =$ „ efectivo;

$Dm =$ „ descuento matemático;

$r =$ razón o tanto por ciento;

$t =$ tiempo.

Por definición, (144) *el descuento matemático es la diferencia entre el valor nominal y el valor efectivo*, es decir:

$$Dm = Vn - Ve \qquad (1)$$

pero, por otra parte, el descuento matemático es el descuento hecho sobre el valor efectivo, luego:

$$Dm = \frac{Ve \,.\, r \,.\, t}{100} \qquad (2)$$

De la (1) se deduce que:

$$Ve = Vn - Dm$$

y reemplazando este valor en (2):

$$Dm = \frac{(Vn - Dm)\, r \,.\, t}{100}$$

y efectuando:

$$Dm = \frac{Vn\, r\, t - Dm\, r\, t}{100}$$

En esta ecuación deseamos hallar el valor de *Dm*, por lo que procedemos a dejar en un miembro todos los términos que lo contengan. Sacando el denominador:

$$100Dm = Vn\,r\,t - Dm\,r\,t$$

trasponiendo: $100Dm + Dm\,r\,t = Vn\,r\,t$

factoreando: $Dm(100 + r\,t) = Vn\,r\,t$

de donde: $$\boxed{Dm = \frac{Vn\,.\,r\,.\,t}{100 + r\,t}}$$

que es la fórmula del descuento matemático.

Observación. — Cuando el tiempo esté expresado en *meses* o en *días*, en lugar de 100 se empleará 1200 ó 36000.

Ejemplo: *Calcular el descuento matemático de un pagaré de 270 $, al 5 %, si se paga 2 meses antes de su vencimiento.*

Solución. — Aplicando la fórmula, se tiene·

$$Dm = \frac{270\,.\,5\,.\,2}{1200 + 5\,.\,2}$$

$$= \frac{2700}{1200} = 2{,}25\ \$$$

Hay que hacer un descuento de 2,25 $.

146. Problema VIII, de descuento matemático. — *Calcular el valor nominal y el descuento matemático de una letra descontada al 6 % 3 meses antes de su vencimiento, sabiendo que la diferencia entre el valor nominal y el descuento es de 240 $.*

PLANTEO. — Se sabe que: $Vn - Dm = 240$ (1)

y que, aplicando la fórmula deducida en el párrafo (145):

$$Dm = \frac{Vn \cdot 6 \cdot 3}{1200 + 6 \cdot 3}$$

o bien:

$$Dm = \frac{18 \cdot Vn}{1218}$$

$$Dm = \frac{3 \cdot Vn}{203} \qquad (2)$$

RESOLUCIÓN. — Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} Vn - Dm = 240 & (1) \\ Dm = \dfrac{3 \cdot Vn}{203} & (2) \end{cases}$$

que resolveremos por el método de sustitución.

Sustituyendo el valor (2) en (1):

$$Vn - \frac{3 \cdot Vn}{203} = 240$$

$$203Vn - 3Vn = 48720$$

$$200 \cdot Vn = 48720$$

$$Vn = \frac{48720}{200}$$

$$\boxed{Vn = 243{,}60}$$

Reemplazando este valor en (1):

$$243{,}6 - Dm = 240$$

de donde:

$$\boxed{Dm = 3{,}60}$$

El valor nominal es 243,60 \$, y el descuento matemá tico es 3,60 \$.

Discusion: — Se tiene que:

$$243{,}60\,\$ - 3{,}60\,\$ = 240\,\$$$

y además: $Dm = \dfrac{243{,}60\,\$\,.\,6\,.\,3}{1200 + 6\,.\,3} = 3{,}60\$$

147. Problema de los móviles. — *Tres puntos de una trayectoria rectilínea se suceden en el orden A, B, M. La distancia de A a B es de* **d** *metros. Dos móviles parten al mismo tiempo de A y de B, respectivamente, en el sentido A, B, M; el primero recorre* **v** *kilómetros por hora, y el segundo* **v'** *kilómetros por hora. ¿A qué distancia de A o de B se encontrarán y después de qué tiempo?*

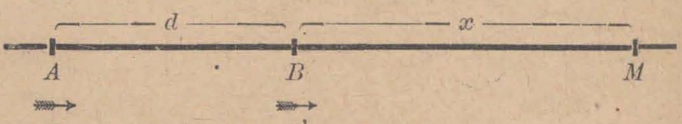


Fig. 2

Planteo. — Sean:

v la velocidad del móvil que parte del punto A;
v' ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, B;
d ,, distancia AB;
M el punto donde se encontrarán los móviles;
x la distancia de B a M;
t el tiempo que tardarán para encontrarse.

Los móviles van con movimiento uniforme, así que si uno recorre en una hora 50 km. por ejemplo, en dos horas recorrerá 100, en tres horas 150, etc., y en t horas a una velocidad v, recorrerá tv kilómetros.

El espacio que tiene que recorrer el primer móvil para ir de A hasta M es $d + x$, que según el razonamiento anterior es igual a la velocidad v por las horas t que empleará:

$$d + x = vt \qquad (1)$$

El espacio que tiene que recorrer el segundo móvil para ir de B a M es x, lo que es igual a su velocidad v' por las horas t:

$$x = v't \qquad (2)$$

Resolución. — Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} d + x = vt & (1) \\ \quad\ x = v't & (2) \end{cases}$$

que resolveremos por el método de sustitución.

Reemplazando el valor (2) en (1):

$$d + v't = vt$$

y resolviendo esta ecuación:

$$vt - v't = d$$

$$(v - v')t = d$$

de donde $$\boxed{t = \frac{d}{v - v'}} \qquad (3)$$

Reemplazando este valor en (2):

$$\boxed{x = \frac{v'd}{v - v'}} \qquad (4)$$

Los valores (3) y (4) son los que nos dan el tiempo que tardarán para encontrarse y la distancia que recorrerán.

Discusión. — Como el problema es general, los números v, v' y d son cualesquiera y positivos, pudiendo ser $v \gtreqless v'$. Veamos cada uno de los casos.
de donde:

1º) Supongamos que sea $\mathbf{v > v'}$.

Entonces el denominador $v - v'$ es positivo y el valor t de (3) resulta positivo, es decir, que se encontrarán *después* del momento de partida.

El valor x de (4) también resulta positivo, luego el punto M se encuentra a la derecha del punto B.

2º) Supongamos que sea $\mathbf{v = v'}$.

Entonces el denominador de (3) y de (4) es *cero*, y como no sabemos dividir por cero, t y x carecen de valor. En efecto: los móviles no se encuentran nunca.

3º) Supongamos que sea $\mathbf{v < v'}$.

En tal caso es $v - v' < 0$, es decir, el denominador es negativo, luego los valores t de (3) y x de (4) son negativos, lo que se interpreta diciendo que se han encontrado *antes* del momento de partida y a la izquierda de A.

PROBLEMAS

351. Hallar dos números cuya suma sea 23 y su diferencia sea 7.

R: 15 y 8.

352. Un número tiene dos cifras que sumadas dan 15. Si al número propuesto le agregamos 9 nos da el mismo, pero invertido. Calcular el número.

R: 78.

353. Dividir 180 en dos partes, tales, que la parte mayor menos la tercera parte de la menor, sea igual a la mitad del número dado.

R: 112,5 y 67,5.

354. En un gallinero hay cierto número de gallinas y conejos, siendo en total 70 cabezas y 188 patas. ¿Cuántos animales de cada clase hay?

R: 46 gallinas y 24 conejos.

355. La suma de cierto capital más sus intereses durante 5 meses al 6 % es 7524.50 $. Calcular el capital y el interés.

R: C = 7340.97 $; I = 183.53 $.

356. Un capital ha producido 180 $ de interés al 6 % durante cierto tiempo. Otro capital igual al primero, más 700 $, ha producido 220 $ al 5 % y durante el mismo tiempo que el anterior. Hallar los dos capitales y el tiempo que han estado impuestos.

R: 1500 y 2200 $; 2 años.

357. Dos capitales de 3000 $ y 4000 $, produjeron al mismo tanto por ciento y durante el mismo tiempo, 60 $ y 80 $, respectivamente. Calcular el % y el tiempo.

R: 8 % y 3 meses.

358. El valor efectivo de un pagaré descontado 3 años antes de su vencimiento al 9 % es de 1752 $. Calcular el valor nominal y el descuento.

R: 2400 $ y 648 $.

359. La suma de los valores nominales de dos letras es de 1200 $, y la suma de los valores efectivos es 1170,09 $.
Una fué negociada al 9 % durante 3 meses, y la otra al 8 % durante 2 meses. Hallar el valor nominal de cada letra.

R: 500 $ 700 $.

360. Se han comprado 50 m. de una clase de tela y 40 m. de otra clase, importando la factura 902,40 $, después de descontar el 4 %. En otra ocasión se compran 30 m. de la primera clase y 20 m. de la segunda, importando la factura 488,20 $, después de descontar el 6 %. Calcular el precio de cada clase de tela.

R: 10 $ y 11 $.

361. Repartir 250 $ entre dos personas de manera que las dos cantidades sean entre sí como 2 es 3.

R: 100 $ y 150 $.

362. Repartir 3500 $ entre dos personas de manera que los tres cuartos de la parte del 2º sea igual al duplo de la parte del 1º.

R: 954,54 $ y 2545,46 $.

363. Cuatro socios constituyen una sociedad. El 1º aportó 1500 pesos; el 2º, 1200 $; el 3º, 2300 $ y el 4º, 3000 $. El duplo de la suma de las ganancias de los dos primeros, menos 30 $, es igual a la suma de las ganancias de los otros dos. ¿Cuál fué la ganancia de cada socio?

R: 1º, 450 $; 2º, 360 $; 4º, 690 $; 4º, 900 $.

364. Las densidades de dos líquidos son 1,3 y 0,7. Mezclándolos, se obtienen 3 litros de densidad 0,9. ¿Cuánto se mezcló de cada uno?

R: 1 y 2 litros.

365. Una aleación de oro y plata pesa 255 gramos. Calcular la cantidad que contiene de cada metal, sabiendo que el valor de la cantidad de plata es igual al de la cantidad de oro, y que un gramo de oro vale tanto como 16 gramos de plata.

R: 15 g. de oro y 240 g. de plata.

366. Herón de Siracusa mandó hacer una corona de oro de 7465 gramos de oro para el dios Júpiter. Deseando saber si el orfebre había reemplazado oro por plata, encargó a Arquímedes que lo averiguara. Este sumergió la corona en agua, comprobando que perdía 467 gramos de su peso; el oro pierde en el agua 0,052 de su peso, y la plata 0,095. ¿Qué cantidad de plata había en la corona?

R: 5632 g. de oro y 1833 g. de plata.

367. Un pagaré de 3700 $ fué descontado al 8 % 3 meses antes de su vencimiento. Calcular el descuento matemático y el valor efectivo.

R: 72,55 $ y 3627,45 $.

368. A la misma hora parten de Buenos Aires hacia La Plata y de ésta hacia Buenos Aires, dos trenes, cuyas velocidades son 50 km. y 70 km., respectivamente. Suponiendo que las velocidades sean uniformes y sabiendo que la distancia es de 57 km., ¿a qué distancia de Buenos Aires se encontrarán los dos trenes y cuánto tiempo emplearán?

R: 23,750 km. y 28 m. 30 s.

369. De dos lugares A y B distantes 20 km. y en la misma dirección, parten dos automóviles cuyas velocidades son de 60 y 45 km. por hora, respectivamente. Suponiendo que parten en el sentido de A a B, ¿a qué distancia de B se encontrarán?

R: 60 km.

370. Si A da a B 5 $, tiene 6 $ menos que B; pero si A recibe 5 $ de B, tres veces el dinero que tiene A es 20 $ más que cuatro veces el dinero de B. ¿Cuánto tiene cada uno?

R: A, 31 $; B, 27 $.

371. Preguntados tres pescadores qué habían pescado, respondieron: Pescamos 19 peces, y uno de nosotros pescó 4 más que cada uno de sus dos compañeros. ¿Cuánto pescó cada uno?

R: 9, 5 y 5.

372. Hallar tres números, sabiendo que las sumas tomadas dos a dos son 8, 5 y 7.

R: 3, 5 y 2.

373. El perímetro de un triángulo mide 38 m.; calcular sus lados, sabiendo que dicho triángulo es semejante a otro cuyos lados miden respectivamente 5 m., 6 m. y 8 m.

R: 10 m., 12 m. y 16 m.

374. Repartir 1620 $ entre tres personas, de modo que las partes de la primera y segunda sean entre sí como 2 es a 3, y las partes de la segunda y tercera sean entre sí como 3 es a 4.

R: 1ª, 360 $; 2ª, 540 $; 3ª, 720 $.

375. Discutir el valor de x en la expresión: $x = \frac{a}{b - c}$ cuando sea b mayor, igual o menor que c.

376. El área de una corona circular está dado por la fórmula: $A = \pi\ (R^2 - r^2)$.
Discutir el valor de A para R mayor, igual o menor que r.

CAPITULO XVI

PROGRAMA XVI. — *Representación gráfica de funciones.* — Variables, Función y argumento. Variaciones de la función $y = \frac{a}{x}$

Coordenadas cartesianas ortogonales. Abscisa y ordenada. Signos. Dado un punto del plano, hallar sus coordenadas, y recíprocamente.

Representación gráfica de la función $y = \frac{a}{x}$. Representación gráfica de la función lineal: Verificación de que los puntos representativos de los pares de valores correspondientes pertenecen a una misma recta, y que, recíprocamente, todo punto de esa recta tiene por coordenadas un par de valores correspondientes de la función. Representación gráfica de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Otras aplicaciones de la representación gráfica: Resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Gráficos de temperaturas, de población, de ferrocarriles, de conversión de monedas, etc.

Representación gráfica de funciones

148. Variables. — Todo número que en un problema o en una investigación especial puede recibir distintos valores, se llama *variable.*

En la ecuación: $y = 3x - 1$

puede x tomar distintos valores, de los cuales se deducen los respectivos de y; x e y son variables.

En las fórmulas conocidas:

$$s = \frac{b \cdot h}{2} \ ; \ c = 2\pi R \ ; \ s = \pi R^2 : \text{etc.}$$

son variables los elementos b, h y R.

149. Constante. — El número que en un problema o investigación permanece invariable, se llama *constante.*

Así en la fórmula que da la longitud de una circunferencia:

$$C = 2\pi R$$

los números 2 y π, invariables en los cálculos, son las constantes, y R es variable.

Generalmente las constantes se representan por las primeras letras del abecedario, y las variables por las últimas.

150. Función y argumento. — Se llama *función* de un número, o cantidad, a la expresión algebraica cuyo valor depende del de ese número o cantidad. El número o cantidad de quien depende una *función,* se llama *argumento.*

Así, en la fórmula $C = 2\pi R$ de la circunferencia, .omo 2 y π son constantes, el valor de C depende del valor de R, diciéndose que la circunferencia C es *función* del radio R, siendo R el *argumento.*

En la fórmula del interés:

$$I = \frac{C \, . \, R \, . \, t}{100}$$

el interés I es *función* del capital C, de la razón R y del tiempo t, pues el valor de I, depende de los valores de C, R y t, y C, R y t son los *argumentos.*

En la fórmula del área de un triángulo:

$$S = \frac{b \, . \, h}{2}$$

el área S es *función* de la base b y de la altura h, mientras que b y h son los *argumentos.*

Es usual llamar al argumento *variable independiente,* y a la función *variable dependiente.*

En la expresión: $y = 2x - 3$

x es el *argumento* o *variable independiente; y* es la *función* o *variable dependiente.*

NOTACIÓN. — Para indicar que una expresión es función de x se emplea la notación $f(x)$ o $F(x)$, que se lee *función de x,* o *efe de x.*

A veces se emplea la notación $\varphi(x)$ o $\psi(x)$, que se leen *fí* de x o *psí* de x, respectivamente.

Se emplea esta notación para no tener que repetir una expresión complicada; así, si se tiene:

$$y = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \qquad (1)$$

es más cómodo escribir:

$$y = f(x) \qquad (2)$$

Si en la expresión (1), la variable x toma los valores -2, 0, 5, a, etc., su expresión simbólica (2) se escribe, respectivamente:

$$y = f(-2) \;;\; y = f(0) \;;\; y = f(5) \;;\; y = f(a) \;;\; \text{etc.}$$

151. Variaciones de la función $y = a \,.\, x$.

En esta ecuación a es una constante distinta de cero.

La ecuación dada se llama *ecuación de la proporcionalidad directa* porque de ella se deduce que:

$$\frac{y}{x} = a \text{ (constante)}$$

es decir: que la razón de un valor de y al correspondiente de x es constante y, por consiguiente, son directamente proporcionales.

Supongamos que en la función dada sea $a = 3$, entonces se tiene:

$$y = 3x$$

Dando valores a x obtendremos los valores correlativos para y:

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	*crece*
$y =$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	*crece*

Comprobamos en la tabla de valores hallada, que a medida que *crece* x, también *crece* y.

152. Variaciones de la función $y = \dfrac{a}{x}$

En esta función a es una constante y distinta de cero. La ecuación dada, o su equivalente $xy = a$, se llama *ecuación de la proporcionalidad inversa*, porque los valores de x y los de y forman razones inversamente proporcionales, es decir, que la razón de los elementos de x, es igual a la razón inversa de los respectivos valores de y.

Supongamos que sea $a = 4$, entonces se tiene:

$$y = \frac{4}{x}$$

Dando valores a x obtendremos los respectivos valores para y:

$x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	*crece*
$y =$	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	*no existe*	4	2	$\frac{4}{3}$	1	*decrece*

En esta tabla de valores se comprueba que, a medida que *crece* el valor de x, *decrece* el valor de y, y que para un valor *nulo* de x, no existe valor para y.

Coordenadas cartesianas ortogonales

153. Posición de un punto en un plano. — La posición de un punto en un mapa está determinada por la longitud y latitud, que son las distancias angulares del punto dado a dos círculos perpendiculares, que son el ecuador y un meridiano dado.

Como en un mapa, la posición de un punto en un plano está determinada por sus distancias a dos rectas de referencia, análogas al ecuador y al meridiano.

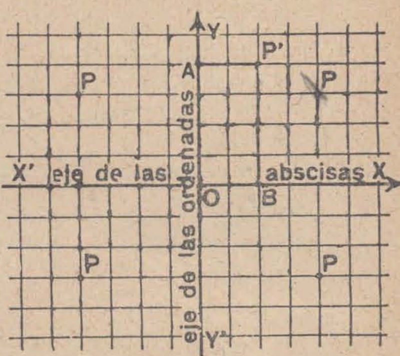


Fig. 3

Sean xx', e yy' figura 3, las dos rectas de referencia, perpendiculares, y supongamos que se trata de fijar la posición del punto P, conociendo:

distancia de P *a* $x'x = 3$ *unid.*
distancia de P *a* $y'y = 4$ *unid.*

Comprobamos en la figura que existen cuatro puntos que cumplen la misma condición, de manera que, en realidad, no tenemos determinada la posición de *un solo punto* P, sino de cuatro.

Supongamos que se conozcan las distancias *relativas*, y sean:

Distancia de P' a $x'x = +\ 4$ unid.
Distancia de P' a $y'y = +\ 2$ unid.

Teniendo en cuenta la convención estudiada en primer año referente a la representación gráfica de los números enteros (*), comprobamos que con esos datos se determina la posición de un punto P', único.

Las distancias $P'A$ y $P'B$ son la *abscisa* y *ordenada* del punto P'.

154. Ejes, origen, cuadrantes. — Se llaman *ejes*, a las rectas perpendiculares que se emplean como líneas de referencia para determinar la posición de un punto en un plano.

El eje $x'x$ se llama *eje de las x*, y el eje $y'y$ *eje de las y*, fig. 3.

El punto O, común a los dos ejes, se llama *origen*.

Cada una de las cuatro partes iguales en que las dos rectas perpendiculares dividen el plano, se llaman *cuadrantes*.

155. Abscisa y ordenada. — Se lla- *abscisa* de un punto perteneciente al eje de las x, a la medida de su distancia al origen.

Ejemplos, fig. 4:

abscisa de $A = OA = 3$

abscisa de $B = OB = -5$

El eje de las x también se llama *eje de las asbcisas*.

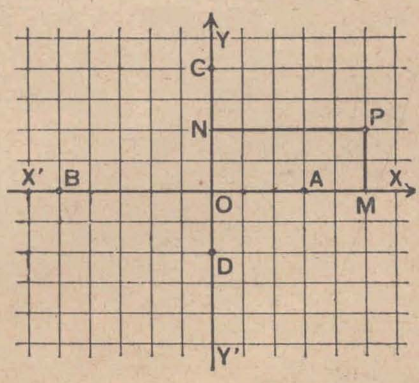


Fig. 4

Se llama *ordenada* de un punto perteneciente al eje de las y, a la medida de su distancia al origen.

(*) Ver nuestra **Aritmética** para 1er. año, pág. 169.

Ejemplos, fig. 4:

$$\textit{ordenada de } C = OC = 4$$

$$\textit{ordenada de } D = OD = -2$$

El eje de las y también se llama *eje de las ordenadas.*

Dado un punto de un plano, sus *abscisas* y *ordenadas* son, respectivamente, las de sus proyecciones sobre ambos ejes.

La abscisa y ordenada de un punto son las *coordenadas* del mismo.

Ejemplo, fig. 4:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{ordenada} \text{ de } P = PM = ON = 2 \\ \textit{abscisa de } \ P = PN = OM = 5 \end{array}\right\} \textit{coordenadas de } P.$$

Los ejes perpendiculares de las abscisas y ordenadas constituyen un *sistema de ejes de coordenadas rectangulares.*

NOTACIÓN. — La abscisa de un punto se denota con la letra x, y la ordenada con la letra y.

Para indicar que $x = 5$, e $y = 2$ son coordenadas del punto P, se escribe:

$$P\begin{pmatrix} x = 5 \\ y = 2 \end{pmatrix}, \text{ o bien: } P(5/2)$$

En general, las coordenadas de un punto M se indican así: $M(x/y)$.

156. Signos. — CONVENCIÓN. — *Las abscisas situadas a la derecha del origen son positivas, y las situadas a la izquierda, negativas.*

El sentido positivo en ambos ejes se marca con una flecha, como se observa en las figuras 3 y 4.

157. Dado un punto de un plano, hallar sus coordenadas, y recíprocamente.

Ejemplos, fig. 5:

1º) *Hallar las coordenadas del punto P.*

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \text{abscisa de } P = PA = 3 \\ \text{ordenada de } P = PB = 4 \end{array}\right\} \therefore P\begin{pmatrix} x=3 \\ y=4 \end{pmatrix}$$

2º) *Hallar las coordenadas del punto Q.*

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \text{abscisa de } Q = OC = -5 \\ \text{ordenada de } Q = OD = -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \therefore Q\left(-5/-\frac{3}{2}\right)$$

3º) *Hallar las coordenadas del punto R.*

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \text{abscisa de } R = O \\ \text{ordenada de } R = OR = 3 \end{array}\right\} \therefore R(O/3)$$

4º) *Determinar la situación del punto de coordenadas*

$x = 5$, $y = -4$.

Trazo $x = OE = 5$, e $y = OF = -4$, y el punto S, común a las perpendiculares en E y en F, es el punto buscado.

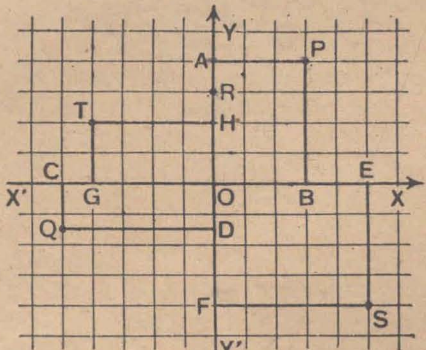


Fig. 5.

5º) *Determinar la posición del punto de coordenadas* $x = -4$, $y = 2$.

Trazo $x = OG = -4$, e $y = OH = 2$, y el punto T, común a las perpendiculares en G y en H, es el punto buscado.

Observación. — De los ejercicios anteriores se deduce que, dado un sistema de ejes de coordenadas, a todo punto del plano le corresponde dos números, y recíprocamente, a cada par de números, considerados como abscisa y como ordenada, le corresponde un punto del plano.

158. Representación gráfica de la función lineal.

La función lineal es de la forma $y = ax + b$.

Sea la función $y = 2x + 2$. (1)

Dando valores a x obtendremos los valores correlativos para y:

$x =$	-3	-2	-1	0	1
$y =$	-4	-2	0	2	4
Punto:	A	B	C	D	E

(2)

Hemos visto en el párrafo anterior que a cada par de números le corresponde un punto en un sistema de ejes de coordenadas. Representemos, fig. 6, cada uno de los puntos del cuadro (2).

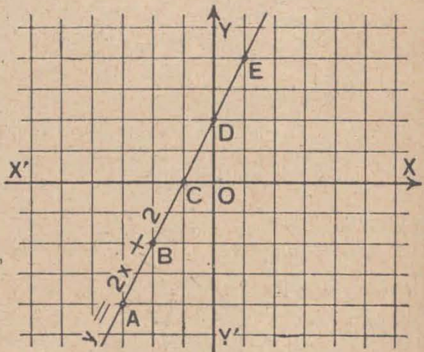


Fig. 6.

Uniendo los puntos A, B.... E, obtenidos, con un trazo continuo, resulta una recta, que es la *representación gráfica de la función lineal.*

Observación. — Fácilmente se comprueba que los puntos obtenidos A, B, C, D...., pertenecen a una misma recta.

Recíprocamente, las coordenadas de cualquier punto de la recta $A\,E$, del punto P por ejemplo, son una solución de la función (1). En efecto, si las coordenadas de P son $x = -5$, $y = -8$, se tiene, reemplazando en (1):

$$-8 = 2(-5) + 2$$
$$-8 = -10 + 2$$

En cursos superiores se demuestra esta propiedad que aquí constatamos.

159. Representación gráfica de la función

$$y = \frac{a}{x}.$$

Sea la función

$$y = \frac{4}{x} \quad (1)$$

Dando valores a x obtendremos los respectivos valores para y:

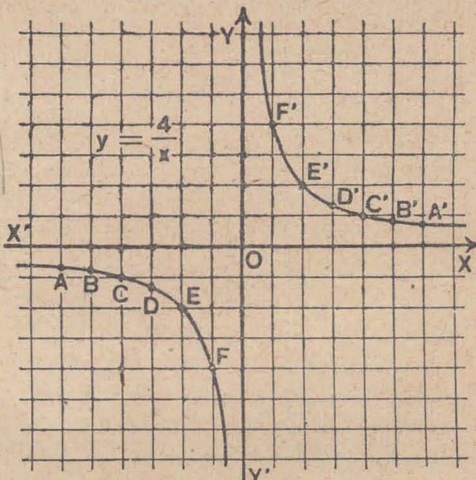


Fig. 7.

$x =$	−6	-5	−4	−3	−2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y =$	-0,66	−0,8	−1	−1,33	−2	-4	?	4	2	1,33	1	0,8	0,66
Punto:	A	B	C	D	E	F		F'	E'	D'	C'	B'	A'

Representando gráficamente cada par de números en un sistema de ejes de coordenadas, fig. 7, y uniendo todos los puntos por un trazo contínuo, resulta una curva llamada *hipérbola equilátera*, que es la representación gráfica de la función dada.

La figura obtenida, en cualquier caso, se llama *imagen* o *gráfico* de la función dada.

160. Representación gráfica de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

1º) Representar gráficamente la ecuación

$$3x + 4y = -4$$

Resolviendo respecto a y, resulta:

$$y = \frac{-3x-4}{4}$$

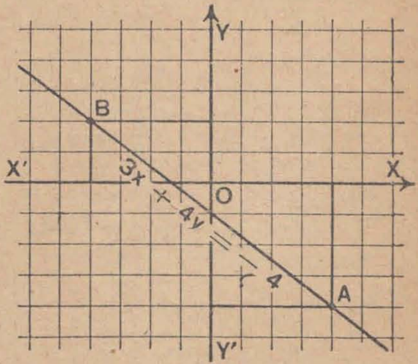


Fig. 8.

La imagen de esta función es, según sabemos, una recta, y como ésta queda determinada con dos puntos, sólo daremos a x dos valores distintos.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Si} & x = 4 \\ \text{resulta} & y = -4,\end{array}\right\} \therefore A\begin{pmatrix} x = 4 \\ y = -4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Si} & x = -4, \\ \text{resulta} & y = 2\end{array}\right\} \therefore B\begin{pmatrix} y = -4 \\ y = 2 \end{pmatrix}$$

Representando los puntos A y B, fig. 8, y uniéndolos con una regla, resulta la recta AB, que es la imagen de la función dada.

2º) Representar gráficamente la ecuación $2x = 4y$.

Resolviéndola respecto a y, resulta:

$$y = \frac{2x}{4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & x = 4, \\ \text{resulta} & y = 2 \end{array}\right\} \therefore \quad M(4/2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & x = -6, \\ \text{resulta} & y = -3 \end{array}\right\} \therefore \quad N(-6/-3)$$

y representando gráficamente los dos puntos, al unirlos resulta la recta MN. que es la imagen de la función dada, fig. 9.

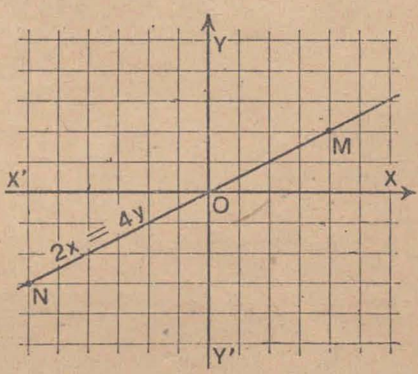


Fig. 9.

Observación. — Nótese que según el ejemplo primero, *cuando una ecuación tiene término independiente, la recta imagen de ella no pasa por el origen;* mientras que, según el ejemplo segundo, *no teniendo término independiente, la recta sí pasa por el origen.*

Aplicaciones de la representación gráfica

161. Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ 2x-y=4 & (2) \end{cases}$$

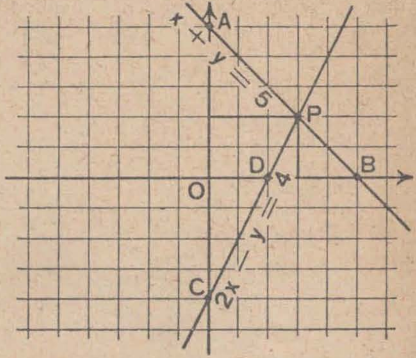


Fig. 10.

Según hemos visto en el párrafo anterior, cada una de las ecuaciones (1) y (2) representa, gráficamente, una recta.

Determinemos la recta de la ecuación (1), de la cual:

$$y=5-x$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & y=0 \\ \text{resulta} & x=5 \end{array}\right\} \therefore \quad A(0/5)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & x=0 \\ \text{resulta} & y=5 \end{array}\right\} \therefore \quad B(5/0)$$

Representando los puntos A y B, fig. 10, resulta la recta AB, que es la imagen de la ecuación (1).

Determinemos la recta de la ecuación (2), de la cual:

$$y=2x-4$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & y=0 \\ \text{resulta} & y=-4 \end{array}\right\} \therefore \quad C(0/-4)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & x=0 \\ \text{resulta} & x=2 \end{array}\right\} \therefore \quad D(2/0)$$

Representando los puntos C y D, fig. 10, resulta la recta CD, que es la imagen de la ecuación (2).

Cada recta tiene un número infinito de puntos, pero sólo el punto P es común a los dos. Las coordenadas del punto común, $x = 3$, $y = 2$, son la solución del sistema dado.

En efecto, por pertenecer P a la recta representativa de la ecuación (1), sus coordenadas son solución de (1); por pertenecer P a la recta representativa de la ecuación (2), sus coordenadas son solución de (2), y como el punto P es único, sus coordenadas son la solución del sistema propuesto.

De todo esto deducimos la siguiente:

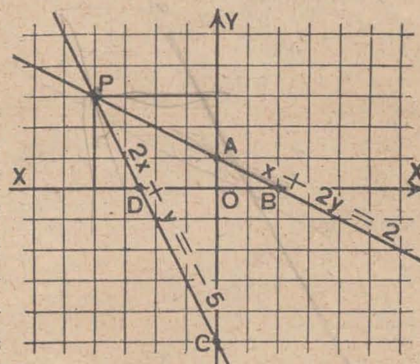


Fig. 11.

Regla práctica. — *Para resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se representan gráficamente cada una de las ecuaciones, y si las rectas obtenidas se cortan, las coordenadas del punto común constituyen la solución del sistema*

Ejemplo: Resolver el sistema: $\begin{cases} x + 2y = 2 & (1) \\ 2x + y = -5 & (2) \end{cases}$

En la (1):

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \text{Si } x = 0 \\ y = 1 \end{array}\right\} \therefore \quad A(0/1) \\ \\ \left.\begin{array}{r} \text{Si } y = 0 \\ x = 2 \end{array}\right\} \therefore \quad B(2/0) \end{array}\right\} \text{Recta } AB, \text{ fig. } 11.$$

En la (2):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } x=0 \\ \quad y=-5\end{array}\right\} \therefore C(0/-5)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } y=0 \\ \quad x=-\frac{5}{2}\end{array}\right\} \therefore D\left(-\frac{5}{2}/0\right)$$

Recta *CD*, fig. 11.

Las coordenadas del punto *P* común, son la solución del sistema, es decir:

$$\boxed{x=-4} \; ; \; \boxed{y=3}$$

162. Gráfico de temperaturas. — Durante los días que duró la enfermedad de una persona se anotaron, en el cuadro de la fig. 12, las temperaturas que tenía día a día. Se ha tomado como ordenada la temperatura, y como abscisa el período de tiempo de la medición; así, por ejemplo, el día 3 se observó que tenía 38°,7 de fiebre. La unión de todos los puntos marcados nos da el *gráfico de la temperatura* del enfermo.

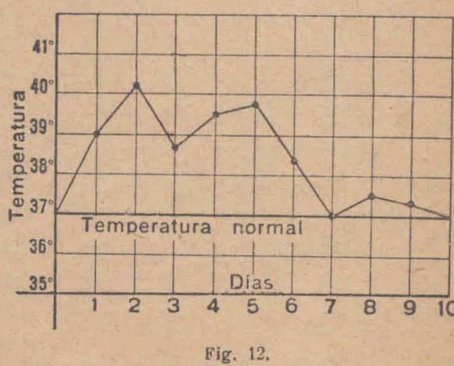


Fig. 12.

163. Gráfico de población. — En el gráfico de la figura 13 tenemos representado el *crecimiento de la población de la República* desde el año 1865 hasta 1925, de cinco en cinco años.

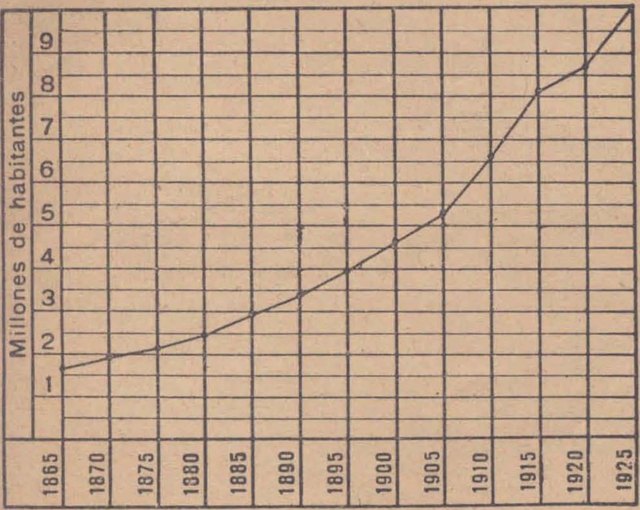


Fig. 13.

La cifra de la población de cada año figura en *El Comercio Exterior Argentino* (1).

Las abscisas son los quinquenios, y las ordenadas las cifras de la población.

---

(1) Publicación anual de la Dirección de Estadística del Ministerio de Agricultura.

Los mismos datos pueden verse en **Estadística**, pág. 11, por **L. Dagnino Pastore**.

164. Gráfico de Ferrocarriles. — Los *gráficos de ferrocarriles* consisten en unos cuadros en donde las abscisas marcan las horas, y las ordenadas las estaciones.

Se supone que entre dos estaciones el movimiento de los trenes es uniforme, representándose por un segmento de recta, y la mayor o menor inclinación de éste indica la mayor o menor velocidad del tren. El cruce de dos segmentos indica el cruce de los trenes correspondientes,

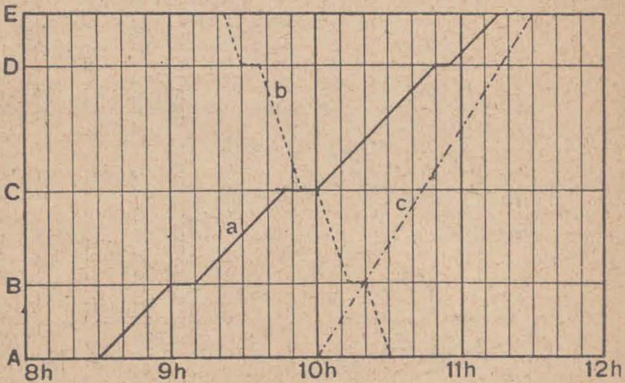


Fig. 14.

lo que debe suceder sólo en las rectas horizontales o estaciones.

La figura 14 representa un detalle de un gráfico. La línea **a** indica que un tren sale de la estación *A* a las 8 y media y llega a la estación *B* a las 9, en donde para 10 minutos. De *B* sale a las 9 y 10 y llega a la estación *C* a las 9 y 47. En *C* demora 13 minutos, en donde espera un cruce con un tren **b** que salió de *E* a las 9 y 23 El tren **a** llega a la estación *E* a las 11 y cuarto.

La recta **c** es el gráfico de un tren rápido que sale de A a las 10, se cruza en B con el tren **b** y llega a la estación E a las 11 y media.

Estos gráficos se utilizan sólo en las líneas en que por una sola vía van y vienen dos trenes.

165. Gráfico de conversión de monedas. — En una casa de cambio nos han dado 109 francos franceses por 10 pesos moneda nacional, resultando el franco a poco más de 9 centavos, según el tipo de cambio de los últimos tiempos.

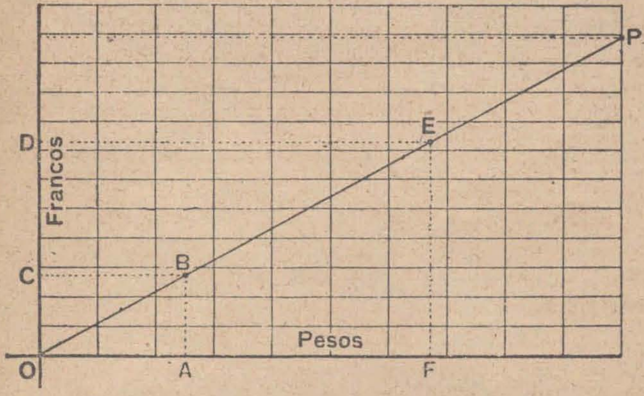


Fig. 15.

Con esos datos vamos a construir un gráfico que nos permita, a ese tipo de cambio, convertir pesos en francos y viceversa.

Tomemos en el sistema de la figura 15, como abscisas los $ m/n y como ordenadas los francos y determinemos el punto P de abscisa 10 ($ m/n) y de ordenada 109 (francos); la semirrecta OP nos permite la conversión que deseamos.

Ejemplos:

1º) ¿Cuántos francos equivalen a 2,50 $?

Tomo el punto A de abscisa 2,50 y trazo AB perpendicular al eje de las abscisas. Por el punto B trazo BC perpendicular al eje de las ordenadas, obteniendo el punto C de ordenada 27,25, que son los francos que equivalen a 2,50 $.

2º) He comprado varios libros por 73 fr.; calcular cuántos pesos importa la compra.

Tomo el punto D de ordenada 73 y trazo DE perpendicular al eje de las ordenadas. Por E trazo EF perpendicular al eje de las abscisas, obteniendo el punto F de abcisa 6,70, que son los pesos que equivalen a 73 francos.

INDICE

CAPITULO VI

CASOS PARTICULARES DE DIVISION

CAPITULO VII

POTENCIACION

CAPITULO VIII

FACTOREO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

CAPITULO IX

M. C. D. y M. C. M. DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

CAPITULO X

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

CAPITULO XI

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS

CAPITULO XII

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

CAPITULO XIII

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

CAPITULO XIV

SISTEMAS DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCOGNITAS

CAPITULO XV

PROBLEMAS DE PRIMER GRADO CON DOS O MAS INCOGNITAS

CAPITULO XVI

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

OBRAS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA PUBLICADA POR LA CASA

ANGUITA F. — Elementos de Algebra, 1 tomo enc. . . . . . . $ 2.50
— Elementos de trigonometría rectilínea y esférica, 1 tomo encuadernado . . . . . . „ 3.50

[illegible]LO J. N. — Felipe Anguita y Lorenzo Dagnino Pastore.
Aritmética 1er. año, 1 tomo encuadernado . . . . . „ 3.50
— Aritmética, 2º año, 1 tomo enc. . . . . . „ 3.50
— Algebra, 3er. año, 1 tomo enc. . . . . . „ 3.50
— Algebra, 4º año, 1 tomo enc. . . . . . „ 3.50
— Geometría, 1er. año, 1 tomo enc. . . . . . „ 3.—
— Geometría, 2º año, 1 tomo enc. . . . . . „ 2.50
— Geometría, 3er. año, 1 tomo enc. . . . . . „ 2.50
— Geometría del Espacio (4º año), 1 tomo enc. . . . . . „ 3.50

COBOS DARACT. — Historia Argentina, 1er. tomo, 1 t. enc. „ 4.—
— Historia Argentina, 2º tomo, 1 t. enc. . . . . . „ 4.—

COTTINI E. H. — Tratado de Construcciones . . . . . . „ 7.—

CHAROLA FLORENCIO. — Lecciones de Física Elemental „ 4.—

DAUS F. A. — Nociones de Geografía General, Astronómica y Física, Asia y Africa, 1 tomo enc. . . . . . „ 4.—

DAGNINO PASTORE LORENZO. — El Universo, La Tierra y El Hombre, 1 tomo enc. . . . . . „ 6.50
— Estadística, 1 tomo enc. . . . . . „ 3.50

DIAZ DE GUIJARRO E. — Curso teórico práctico de Prosodia y Ortografía, 1 tomo enc. . . . . . „ 3.—
— Texto de lectura del curso teórico práctico de Prosodia y Ortografía, 1 tomo enc. . . . . . „ 1.50

DARQUIER H. y HASENBALG A. — Las trece bolillas de química, 1 tomo rústica . . . . . . „ 1.50

GOURVILLE H. D. — The modern Handbook of English, 1ª parte, 1 tomo enc. . . . . . „ 3.—
— The modern Handbook of English, 2º, 1 tomo enc. „ 3.—
— The modern Handbook of English, 3º, 1 tomo enc. „ 3.—
— Manuel Moderne du Français Parlé (Premier livre), 1 tomo enc . . . . . . „ 3.—

JARA JUAN G. — Manual de lógica aplicada, 1 tomo enc. „ 4.—

MARTONNE EMM. DE. — Compendio de Geografía Física (traducción del Sr. F. A. Daus), 1 tomo enc. . . . „ 5.—

PARENTE RICCIOTTI. — Gramática de la lengua italiana, 1er. y 2º curso (4º y 5º años), 1 tomo enc. . . . „ 5.50

PASSARELLI V. — Lecciones de historia Americana, 1 t. encuadernado . . . . . . „ 2.50

PERALTA J. M. — Historia de las Civilizaciones Antiguas, 1 tomo enc. . . . . . „ 4.—

PIZZURNO CARLOS H. — Lecciones de Historia Argentina. (Epoca Colonial, 1492-1810), 1 tomo enc. . . . . „ 4.—

POIRIER LALANNE. — Curso de Francés, 1er año, 1 t. enc. „ 2.—

PORCEL CARLOS A. — Tratado de Contabilidad y Teneduría de libros, 1 tomo enc. . . . . . „ 5.—

RESUMEN de la Edad Media, Moderna y Contemporánea, 1 tomo para 2º año, enc. . . . . . „ 2.—

RESUMEN de Historia Americana y Argentina, 3er. año, 1 tomo rústica . . . . . . „ 1.50

RESUMEN de Historia Americana y Argentina, 4º año, 1 t. rústica . . . . . . „ 1.50

TORRES IBAÑEZ M. C. — Curso completo de pedagogía, 1 tomo enc. . . . . . „ 4.—

TRUCCO SIXTO E. — Elementos de Cosmografía, 1 t. enc. „ 3.50

CRESPILLO