ENRIQUES Y AMALDI-LA MENZA

GEOMETRÍA

TOMO III

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

Pensar 1946
C. Auxiliar. $ 6

FEDERICO ENRIQUES Y HUGO AMALDI

Elementos de Geometría

OBRA ADAPTADA A LOS PROGRAMAS DE
ENSEÑANZA SECUNDARIA

por el profesor

FRANCISCO LA MENZA

con la colaboración de la doctora

MARÍA FASSINA

TERCER TOMO

BUENOS AIRES
ANGEL ESTRADA Y C[IA.] - EDITORES
466 - CALLE BOLÍVAR - 466

INTRODUCCIÓN AL TERCER VOLUMEN

Este tercer volumen de nuestra Geometría Elemental responde al programa del 3er. curso de los Colegios nacionales argentinos. Las "razones y proporciones" que forman su argumento principal han sido presentadas anticipadamente en distintas ocasiones, según la indicación de los programas, pero ahora se desarrolla la teoría completa; por eso no nos limitamos al conocimiento del caso conmensurable, tratamos también el caso inconmensurable. En este libro la teoría está expuesta de manera suficientemente completa pero reduciendo al mínimo los desarrollos relativos al caso inconmensurable.

En la forma que lo hacemos, nuestra teoría resulta independiente de todo desarrollo algebraico respecto a los números irracionales; más bien ella ofrece al profesor que lo desee, la vía más natural para satisfacer este punto del programa de álgebra, como podrá verlo en el apéndice de este tomo. En efecto, el estudio geométrico de los irracionales, que tiene, por otra parte, la más larga tradición histórica, es preferible a las teorías puristas y abstractas, de las cuales los jóvenes alumnos no logran comprender el valor.

F. E. y H. A.

LIBRO III

CAPITULO VI

RAZONES Y PROPORCIONES

§ 1. MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

Caracteres de las magnitudes. — Magnitudes homogéneas. — Comparación de magnitudes. — Suma. — Diferencia. — Múltiplos y submúltiplos. — Postulados de Arquímedes y de la divisibilidad. — Propiedades de los múltiplos y submúltiplos de una magnitud. — Ejercicios.

1. Para los *segmentos*, los *ángulos*, los *arcos* y *sectores circulares de igual radio* vale la relación fundamental de *igualdad* y *desigualdad*, de manera que dos figuras de una cualquiera de estas clases se pueden siempre *comparar* entre sí. Además, para cada una de esas clases de figuras hemos definido la *suma* y la *diferencia*; y en los Cap. prec. hemos reconocido que, respecto a la igualdad (y desigualdad) y a la suma (y diferencia), las diversas especies de figuras enumeradas gozan de un conjunto de propiedades comunes (véase el próximo n. 3), las cuales tienen por sí mismas un inmediato carácter de evidencia, puesto que responden al concepto intuitivo de *magnitud (geométrica)*. Por eso los *segmentos*, los *ángulos*, los *arcos* y los *sectores de igual radio* constituyen otras tantas *clases de magnitudes* (geométricas). También los polígonos constituyen una *clase de magnitudes*, si se

asume como relación fundamental no ya la igualdad (superposición), sino la *equivalencia* o *igualdad de superficie* (cfr. Cap. V libro II).

En otras palabras: cuando se quiere considerar un polígono como magnitud, se debe pensar sustituíble indiferentemente por cualquier otro polígono equivalente a él.

Vemos, pues, que el concepto de magnitud es muy amplio; así las *longitudes* de los segmentos, las *amplitudes* de los ángulos, las *superficies* de los polígonos etc., son magnitudes. Ahora bien, como a cada segmento corresponde una determinada longitud, a cada ángulo una determinada amplitud, etc., cada una de ellas recibe el nombre de *cantidad;* así un segmento tiene una cantidad de longitud, un polígono una cantidad de superficie, etc.

En el texto usamos, sin embargo, las palabras *magnitud* o *cantidad* indistintamente porque creemos que no darán lugar a equívoco.

2. Las magnitudes de una misma clase se llaman *homogéneas* entre sí: la igualdad o desigualdad no es posible más que entre magnitudes homogéneas; por eso, hablando de magnitudes que se comparan, a menudo se sobreentiende la palabra "homogéneas".

En adelante las magnitudes cuya especie no esté indicada las designaremos genéricamente con las letras mayúsculas del alfabeto latino; continuaremos, en cambio, empleando las letras minúsculas *negritas* (**a** , **b**...) cuando nos referiramos, en particular, a los segmentos.

La igualdad entre magnitudes se indicará con el signo = (igual).

3. Como premisa a las consideraciones que desarrollaremos sobre la comparación de magnitudes homogéneas en general, es útil resumir aquí las propiedades relativas a la igualdad (y desigualdad) y a las sumas (y diferencias) que, como hemos dicho en el n. 1, constituyen los atributos característicos de las magnitudes en general:

1) *Dadas dos magnitudes* [1] *homogéneas* A *y* B, *se tiene necesariamente:*

$$\text{o} \quad A > B \quad \text{o} \quad A = B \quad \text{o} \quad A < B$$

2) *La igualdad goza de las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva;* es decir,

$$A = A$$

$$\text{de } A = B \text{ resulta } B = A$$

$$\text{de } A = B \text{ y } B = C \text{ resulta } A = C.$$

3) *De* $A > B$ *se deduce* $B < A$ *y recíprocamente; y de* $A > B$ *y* $B > C$ *resulta* $A > C$.

4) $A + C > A$; *y recíprocamente, si* $A > B$, *existe una magnitud* C, *que se indica con* $A - B$ (diferencia entre A y B) tal que

$$A = B + C.$$

5) *De* $A = A'$ *y* $B = B'$ *se obtiene*

$$A + B = A' + B';$$

y si, además, $A > B$, *se tiene también* $A' > B'$, y

$$A - B = A' - B';$$

es decir, sumas o diferencias de magnitudes iguales son iguales.

---

[1] En rigor debiera decirse: dadas dos cantidades A y B de magnitudes homogéneas, etc.

6) *La suma goza de las propiedades conmutativa y asociativa*, es decir:

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C.$$

7) *Dadas dos magnitudes homogéneas, existe siempre un múltiplo de una de ellas que supera a la otra* (postulado de ARQUÍMEDES).

8) *Dada una magnitud* A *existe y es única, para cualquier entero* n, *el submúltiplo* $\frac{1}{n}$ A de A *según* n (divisibilidad de las magnitudes).

Hemos tenido ocasión de observar esta propiedad intuitiva y de postularla para los segmentos (I_1 n. 45).

Ella se reconoce igualmente cierta para los ángulos y los arcos o sectores circulares (la aguja del reloj con sus minutos, divisiones angulares iguales entre sí, acaba por describir sobre el cuadrante tantos giros cuantos se quieran).

La proposición se extiende también a las superficies poligonales, pues éstas son siempre transformables en rectángulos de base dada (V_2 n. 40) (1).

Propiedad de los múltiplos y submúltiplos.

4. Con el objeto de abreviar nuestras consideraciones conviene establecer para las magnitudes en general, algunas consecuencias evidentes de las defs. de *múltiplo* y *submúltiplo* que, fueron enunciadas en parte, al tratar de los segmentos.

De cualquier modo que se elijan los números enteros *m* y *n*, se tiene por definición:

$$m\,(n\,A) = m\,n\,A = n\,(m\,A);$$
$$m\,A + n\,A = (m + n)\,A, \quad \text{y}$$

(1) En lo sucesivo, con los subíndices 1, 2, indicaremos los capítulos del 1.er y 2.º libro, respectivamente; así V_2 indica el cap. V del 2.º libro, etc.

$$\frac{1}{n}\left(n\,A\right) = n\left(\frac{1}{n}\,A\right) = A;$$

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}\,A\right) = \frac{1}{m\,n}\,A = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\,A\right).$$

Si se considera la magnitud

$$B = m\left(\frac{1}{n}\,A\right),$$

es decir el $m^{mo.}$ múltiplo del $n^{mo.}$ submúltiplo de A, de la igualdad precedente se deducen sucesivamente (dividiendo por m, multiplicando luego por $m\,n$ y dividiendo después por n) las igualdades siguientes:

$$\frac{1}{m}\,B = \frac{1}{n}\,A;\; n\,B = m\,A;\; B = \frac{1}{n}\left(m\,A\right)$$

Se tiene, entonces, para cada par de enteros m *y* n *y para cualquier magnitud A,*

$$m\left(\frac{1}{n}\,A\right) = \frac{1}{n}\left(m\,A\right).$$

La una o la otra, indiferentemente, de estas dos magnitudes iguales se designa con

$$\frac{m}{n}\,A$$

que se lee:

«m enésimos de A», de la cual se dice que se obtiene «multiplicando A por $\frac{m}{n}$» o «tomando los $\frac{m}{n}$ de A».

Suele llamarse también *fracción* de A según el número $\frac{m}{n}$.

Se reconoce en seguida que de:

$$B = \frac{m}{n} A,$$

se deduce

$$A = \frac{n}{m} B.$$

5. En lo sucesivo serán frecuentemente útiles los dos lemas siguientes sobre la multiplicación de magnitudes por números *(enteros* o *fraccionarios).*

a) *Dadas dos magnitudes homogéneas A y B y tomado un número cualquiera $\frac{m}{n}$, según sea:*

$$A > B \quad \text{o} \quad A = B \quad \text{o} \quad A < B$$

es también, respectivamente,

$$\frac{m}{n} A > \frac{m}{n} B; \text{ o } \frac{m}{n} A = \frac{m}{n} B; \text{ o } \frac{m}{n} A < \frac{m}{n} B,$$

y recíprocamente.

La primera parte se reconoce inmediatamente cierta en caso de que se multipliquen A y B por un mismo número *entero* m. En efecto, de $A = B$ resulta $mA = mB$, porque sumas de magnitudes iguales son iguales (n. 3); y si A y B son desiguales y se tiene p. ej. $A > B$, es decir, $A = B + C$, se obtiene:

$$mA = mB + mC > mB.$$

La proposición se extiende en seguida al caso en que se multipliquen las dos magnitudes por el recíproco $\frac{1}{n}$ de un número entero (o sea que ellas se dividan por n). En efecto, si es $A = B$ se tiene también $\frac{1}{n} A = \frac{1}{n} B$ por la unicidad del submúltiplo; si, al contrario, es, p. ej. $A > B$, no puede ser $\frac{1}{n} A \leqq \frac{1}{n} B$, porque en tal caso, multiplicando por el entero n, se obtendría $A \leqq B$, contra la hipótesis.

Finalmente basta reunir los dos casos particulares considerados (multiplicación y división por un entero) para demostrar el lema directo también en el caso general, en el cual se multiplican las dos magnitudes por una fracción cualquiera $\frac{m}{n}$.

La proposición recíproca es inmediata. Según sea:

$$\frac{m}{n} A > \frac{m}{n} B \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} A = \frac{m}{n} B \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} A < \frac{m}{n} B$$

multiplicando por $\frac{n}{m}$, respectivamente, se tiene:

$$A > B \quad \text{o} \quad A = B \quad \text{o} \quad A < B.$$

b) *Dados dos números* $\frac{m}{n}$ *y* $\frac{p}{q}$ *y considerada una magnitud cualquiera* A, *según sea:*

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} > \frac{p}{q}$$

se tiene, respectivamente,

$$\frac{m}{n} A > \frac{p}{q} A \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} A = \frac{p}{q} A \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} A < \frac{p}{q} A,$$

y recíprocamente.

Para demostrar la proposición directa notemos que según sea:

$$\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} < \frac{p}{q}.$$

Se sabe por Aritmética que (multiplicando por q n) respectivamente

$$m\,q > p\,n\,,\ m\,q = p\,n\,,\ m\,q < p\,n$$

y entonces, por la def. misma del múltiplo,

$$m\,q\,A > p\,n\,A\,,\ m\,q\,A = p\,n\,A\,,\ m\,q\,A < p\,n\,A;$$

y de aquí, dividiendo por q n (lema a), se deduce respectivamente

$$\frac{m}{n}\,A > \frac{p}{q}\,A \quad \text{o} \quad \frac{m}{n}\,A = \frac{p}{q}\,A \quad \text{o} \quad \frac{m}{n}\,A < \frac{p}{q}\,A,$$

La proposición recíproca se demuestra razonando por absurdo y por exclusión (*segunda ley de las inversas* II_1 n. 19).

6. Notemos que el lema *a)* permite enunciar la proposición de Arquímedes (n. 3) bajo la forma: *Dadas dos magnitudes homogéneas A y B, se puede siempre encontrar un submúltiplo de B menor que A.*

Tomado, en efecto, un entero n bastante grande para que sea:

$$B < n\,A$$

se tendrá, dividiendo por n (n. prec. a),

$$\frac{1}{n}\,B < A.$$

EJERCICIOS

1) En el n. 3 hemos enumerado las propiedades características de las magnitudes geométricas. El concepto de magnitud es, en cambio, más general; algunos autores adoptan la siguiente def: *Las propiedades de los cuerpos o de entes abstractos para las cuales tienen sentido la* **igualdad** *y la* **suma,** *se llaman,* **magnitudes.** En este sentido demuestre el lector que:
a) el peso de los cuerpos es una magnitud;
b) los números forman un sistema de magnitudes;
c) las fuerzas y las velocidades son magnitudes.

En cambio, pruébese que:

2) La forma, el color, las temperaturas termométricas, las cotas de nivel de los puntos de un terreno con respecto a un plano de comparación, no son magnitudes.

3) Las magnitudes consideradas, es decir, las geométricas, tienen la propiedad de poderse poner en correspondencia *bi-unívoca* con la escala de los números reales o con los puntos de una recta, por esto se llaman *magnitudes escalares*.

Pero hay magnitudes (las fuerzas, las velocidades, los vectores, los números complejos, etc.) que no cumplen dicha condición, no son magnitudes escalares.

Estas no pueden compararse con criterio tan simple como las escalares. El ejemplo que damos aquí, para comparar dos fuerzas de distinta dirección, a pesar de ser muy natural, no cumple el postulado de ARQUÍMEDES.

Consideremos las fuerzas aplicadas en un mismo punto O del objeto P y que tienden a arrastrarlo en la dirección Ox. De dos fuerzas cualesquiera F_1 y F convendrá considerar como mayor aquella cuya proyección sobre Ox sea mayor en valor absoluto porque su eficacia es máxima cuando la fuerza es paralela al camino Ox ([1]). Así, es $F_1 < F$ si OF_1' proyección de F_1 sobre Ox es menor que OF' proyección de F. La fuerza F_2 perpendicular a Ox es menor que F por ue su proyección es nula, y como cualquier múltiplo $m\ F_2$, de F_2 por grande que sea, tiene también sobre Ox proyección nula resulta que *ningún múltiplo de la fuerza menor F_2 puede llegar a superar a la fuerza mayor F*. Por lo tanto el postulado de ARQUÍMEDES no se verifica.

4) Determinar el menor múltiplo de la *vara* (0,866 m) que supera a un segmento de 17 m.

5) Si A_1 es una fracción $\frac{m}{n}$ de una magnitud escalar A, y A_2 es otra fracción $\frac{m'}{n'}$ de la misma magnitud, demostrar que la fracción A_3 igual a $\frac{m + m'}{n + n'}$ de A_1 está comprendida entre las dos fracciones anteriores.

6) Calcular en grados, minutos y segundos exactos la diferencia entre un tercio de un ángulo recto y un séptimo de un ángulo llano.

([1]) Si tienen igual proyección, se podrá considerar mayor aquella que tiene mayor proyección sobre una dirección perpendicular al camino Ox.

§ 2. MAGNITUDES CONMENSURABLES Y MAGNITUDES INCONMENSURABLES

Razón entre dos magnitudes. — Magnitudes conmensurables. — Magnitudes inconmensurables. — Ejemplos. — Comparación de razones. — Ejercicios.

7. De la comparación de dos cantidades homogéneas A y B surge la idea de una relación o "razón" entre las dos magnitudes. Una relación tal resulta bien determinada cuando se reconoce, p. ej., que un segmento es igual al *doble* de otro segmento, o que un ángulo es igual a los *dos tercios* de otro ángulo, etc.

Hablando en general, ponemos la siguiente:

Def.: *Si dos magnitudes homogéneas A y B están dadas por la relación*

$$A = \frac{p}{q} B,$$

donde $\frac{p}{q}$ es un determinado número (entero o fraccionario), *se dice que* la razón de A a B es igual a $\frac{p}{q}$, y se escribe

$$A : B = \frac{p}{q}$$

(que se lee: "razón de A a B igual a $\frac{p}{q}$" o también "A está a B en la razón $\frac{p}{q}$"). Así, p. ej., si es $A = B$ o $A = 2B$ o $A = \frac{2}{3} B$, la razón $A : B$ es igual, respectivamente, a 1, 2 y $\frac{2}{3}$.

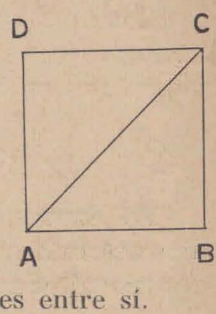
8. Si, dadas dos magnitudes homogéneas cualesquiera A y B, se pudiese encontrar siempre un submúltiplo $\frac{1}{q}B$ de la segunda que estuviese contenido exactamente un número entero p de veces en la primera, la relación entre las dos magnitudes resultaría, en cada caso, completamente caracterizada por el número $\frac{p}{q}$, que llamaríamos razón entre ambas magnitudes.

Pero *puede suceder* (y es éste el caso más frecuente) *que, dadas dos magnitudes homogéneas A y B,* no exista ningún submúltiplo, por pequeño que sea, de B, que esté contenido un número exacto de veces en A. Estas magnitudes se llaman *inconmensurables* entre sí; en cambio, se llaman *conmensurables* dos magnitudes, de las cuales una, como se ha supuesto en el n. prec., es igual a una fracción de la otra, es decir, a un múltiplo de un submúltiplo de ésta.

La existencia de magnitudes inconmensurables constituye un descubrimiento importante de la Escuela pitagórica (alrededor del 500 antes de C.) y es uno de los resultados fundamentales de toda la Geometría.

9. Para no interrumpir más tarde nuestras consideraciones, mostremos en seguida dicho resultado, recurriendo precisamente al mismo ejemplo, en el cual fué notado por los pitagóricos. Demostraremos, pues, que:

Son inconmensurables entre sí el lado AB y la diagonal AC de un cuadrado cualquiera $ABCD$.



Razonando por absurdo, supongamos que existan dos enteros p y q, tales que sea

$$\frac{AB}{p} = \frac{AC}{q},$$

así que dividiendo AB en p partes iguales y AC en q partes iguales, todas estas partes de AB y AC resulten iguales entre sí.

Si entonces se trazan en el cuadrado dado las paralelas a los lados por los puntos de división en p partes iguales de AB y AD, el cuadrado resultaría descompuesto en p^2 cuadraditos iguales entre sí.

Análogamente, construyendo el cuadrado de la diagonal AC y trazando por los puntos de división de dos lados consecutivos en q partes iguales las paralelas a los lados, descompondremos el cuadrado de AC en q^2 cuadrados iguales entre sí e iguales a aquellos en los cuales está descompuesto el cuadrado dado.

Pero el triángulo ABC es rectángulo e isósceles, el cuadrado de AC es, por el teor. de PITÁGORAS (V_2 n. 17), equivalente al doble del cuadrado de AB; de manera que, si estos dos cuadrados fuesen descomponibles respectivamente en q^2 y p^2 cuadrados todos iguales, debería subsistir la identidad aritmética (n. 5, b).

$$q^2 = 2\,p^2,$$

la cual es manifiestamente absurda, porque, mientras el segundo miembro contiene el factor primo 2 una vez o un número impar de veces, el primer miembro no lo puede contener sino un número par o nulo de veces.

Como ejercicio se puede demostrar, de manera análoga, que, *en un triángulo equilátero cualquiera, son inconmensurables entre sí el lado y la altura.*

Comparación de razones

10. Expuesto lo anterior, coloquémonos en las condiciones más generales posibles, es decir, consideremos dos magnitudes homogéneas A y B cualesquiera, supo-

niendo ignorar si se trata de magnitudes conmensurables o no: y tomemos un número cualquiera p. ej. $\frac{3}{5}$. Si, al comparar A con los $\frac{3}{5}$ B, se encuentra que es exactamente

$$A = \frac{3}{5} B,$$

las dos magnitudes A y B son conmensurables y, por definición, están en la razón $\frac{3}{5}$.

Excluido este caso, será necesariamente, (n. 3)

$$A > \frac{3}{5} B \quad \text{o bien} \quad A < \frac{3}{5} B.$$

Si, para fijar las ideas, suponemos verificada la primera hipótesis, queda, naturalmente, todavía dudosa la conmensurabilidad de A y B; pero estamos seguros que, *si las dos magnitudes son conmensurables*, su razón $\frac{p}{q}$, cualquiera que ella sea, debe ser mayor que $\frac{3}{5}$, porque de

$$A = \frac{p}{q} B \quad \text{y} \quad A > \frac{3}{5} B$$

se desprende

$$\frac{p}{q} B > \frac{3}{5} B$$

y por lo tanto (n. 5, b)

$$\frac{p}{q} > \frac{3}{5}$$

Análogamente de

$$A < \frac{3}{5} B$$

se sigue que, *si A y B son conmensurables*, su razón $A : B$ no puede ser sino menor que $\frac{3}{5}$.

Por natural extensión, desde ahora en adelante, diremos también que *si A y B son inconmensurables*, la razón $A : B$ es mayor o menor que $\frac{3}{5}$, según que sea

$$A > \frac{3}{5} B \quad \text{o} \quad A < \frac{3}{5} B$$

Para hablar en general, pondremos la siguiente definición que en el caso de magnitudes conmensurables, como acabamos de verlo, está en perfecto acuerdo con el concepto ordinario de desigualdad entre números:

Def.: *Dadas dos magnitudes homogéneas A y B, se dice que la razón $A : B$ es mayor que un número $\frac{m}{n}$ o, indiferentemente, que el número $\frac{m}{n}$* es menor que la razón $A : B$, si es

$$A > \frac{m}{n} B;$$

y en tal caso se escribe

$$A : B > \frac{m}{n} \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} < A : B.$$

Se dice que la razón $A:B$ es menor *que el número* $\frac{m}{n}$ *o que* $\frac{m}{n}$ *es* mayor *que* $A:B$, *si es*

$$A < \frac{m}{n} B;$$

y se escribe

$$A:B < \frac{m}{n} \quad \text{o} \quad \frac{m}{n} > A:B.$$

En particular, según sea $A > B$ o $A < B$, la razón $A:B$ es mayor o menor que 1.

11. De la def. del n. 7 y del n. prec. resulta sin más que:

Dadas dos magnitudes homogéneas A y B cualesquiera y tomado arbitrariamente un número $\frac{m}{n}$, se verifica siempre uno y uno sólo de los tres casos:

$$A:B > \frac{m}{n} \quad \text{o} \quad A:B = \frac{m}{n} \quad \text{o} \quad A:B < \frac{m}{n}$$

Además para *la desigualdad entre razones* (de magnitudes inconmensurables) y *números* (enteros o fraccionarios), definida en el n. prec., valen las mismas propiedades que para la desigualdad entre números; es decir, si las magnitudes A y B son inconmensurables:

a) *Cada número menor que un número menor que la razón $A:B$ es también menor que $A:B$; y análogamente para los números mayores; es decir, de*

$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < A:B$$

se deduce

$$\frac{m}{n} < A:B;$$

y de

$$\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'} > A:B$$

resulta

$$\frac{m}{n} > A:B.$$

b) *Todo número menor que* $A:B$ *es también menor que todo número mayor que* $A:B$; es decir, de

$$\frac{m}{n} < A:B \quad \text{y} \quad A:B < \frac{m'}{n'}$$

se obtiene

$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}.$$

c) *Si un número* $\frac{m}{n}$ *es menor que* $A:B$ *se puede encontrar siempre algún número mayor que* $\frac{m}{n}$ *y menor que* $A:B$ (es decir, *comprendido entre* $\frac{m}{n}$ *y* $A:B$), *y análogamente para los números mayores.*

Dejando las demostraciones inmediatas de las proposiciones *a)* y *b)* (que podrán ser desarrolladas como ejercicio), nos limitamos a justificar la *c)*.

Supuesto

$$A:B > \frac{m}{n}$$

o sea, por def.,

$$A > \frac{m}{n}B,$$

basta tomar un submúltiplo $\frac{1}{s}B$ de B, menor que la diferencia $A - \frac{m}{n}B$ (n. 6), es decir, tal que sea:

$$A - \frac{m}{n}B > \frac{1}{s}B,$$

para que resulte

$$A > \left(\frac{m}{n} + \frac{1}{s}\right)B.$$

Se ve así que el número $\frac{m}{n} + \frac{1}{s}$ evidentemente mayor que $\frac{m}{n}$, es también menor que $A:B$.

12. A fin de aclarar lo que sigue conviene agregar algunas otras consideraciones sobre los números menores y mayores que la razón $A:B$ de dos magnitudes dadas cualesquiera.

Tomemos de la magnitud B un submúltiplo cualquiera $\frac{1}{n}B$ y comparemos la magnitud A con los sucesivos múltiplos de $\frac{1}{n}B$

$$\frac{1}{n}B,\quad \frac{2}{n}B,\quad \frac{3}{n}B\ \ldots.$$

Puede suceder que uno de ellos, p. ej. $\frac{m}{n}B$, sea exactamente igual a A; y en este caso, como ya sabemos, las dos magnitudes son conmensurables y es $A:B = \frac{m}{n}$.

Excluyamos, pues, este caso; es decir, supongamos que ninguno de los múltiplos de $\frac{1}{n}B$ resulte igual a A. Pues ellos, por la proposición de ARQUÍMEDES (n. 3) acaban por superar a cualquier magnitud; entonces en cada caso se encontrarán dos múltiplos consecutivos de $\frac{1}{n}B$ entre los cuales esté comprendida la magnitud A; es decir, tendremos para un cierto número $\frac{m}{n}$ (el cual, cuando sea $A < \frac{1}{n}B$, deberá tomarse igual a cero) tal que

$$\frac{m}{n}B < A < \frac{m+1}{n}B.$$

Ahora bien: si A y B son conmensurables, su razón, cualquiera que sea, está comprendida entre los dos números

$$\frac{m}{n} \quad \text{y} \quad \frac{m+1}{n},$$

diferentes de $\frac{1}{n}$; así que se puede decir que estos dos números dan, en tal caso, para la razón $A:B$ dos valores aproxima os a menos de $\frac{1}{n}$, el primero por *defecto,* el otro por *exceso.*

Por analogía, también cuando A y B sean inconmensurables, convendrá decir que los dos números $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ dan para la razón $A:B$ (no ya expresable exactamente con un número entero o fraccionario) dos *valores aproximados a menos* de $\frac{1}{n}$, el primero *por defecto,* el segundo *por exceso.* Y debe observarse que, como se puede elegir arbitrariamente el entero n, es posible obtener de tal manera para la razón $A:B$ un valor aproximado con un error de aproximación $\frac{1}{n}$, tan pequeño como se quiera.

Nótese que eso es lo que se hace precisamente en la práctica para la medida de las magnitudes, como lo hemos explicado ocasionalmente en el libro segundo.

13. Las reflexiones precedentes (nos. 10-12) sugieren la manera de *comparar entre sí dos razones* cualesquiera $A : B$ y $C : D$, donde A, B son dos magnitudes homogéneas y C, D otras dos magnitudes, también homogéneas entre sí, pero no necesariamente a las primeras.

Si las magnitudes de los dos pares, o también de uno solo, son conmensurables, la comparación entre $A : B$ y $C : D$ se sabe hacer.

En efecto, en el primer caso (A conmensurable con B, y C conmensurable con D) se trata sencillamente de comparar dos números (enteros o fraccionarios);

$$\frac{p}{q} = A : B, \quad \frac{r}{s} = C : D;$$

así que basta aplicar las reglas bien conocidas de la Aritmética. Si al contrario las magnitudes de uno de los dos pares, p. ej. A y B, son inconmensurables, mientras C y D son conmensurables y es $C : D = \frac{r}{s}$, el criterio de comparación está dado por la def. del n. 10, es decir, se tiene que

$$A : B > C : D \quad \text{o} \quad A : B < C : D \quad \text{según sea}$$

$$A > \frac{r}{s} B \quad \text{o} \quad A < \frac{r}{s} B,$$

(quedando excluído, por la inconmensurabilidad de A y B, el caso $A = \frac{r}{s} B$). Queda entonces por considerar, como nuevo, sólo *la comparación de dos razones* $A : B$ y $C : D$ *entre magnitudes, las unas y las otras inconmensurables.*

Notando que para esta última hipótesis ningún número es igual a $A : B$ y a $C : D$, consideremos para cada una de las dos razones los números menores y los números mayores.

Si sucede que algún número $\frac{m}{n}$ menor que $A:B$ es en cambio mayor que $C:D$, es decir:

$$A:B > \frac{m}{n}, \qquad \frac{m}{n} > C:D,$$

convendrá decir (de acuerdo con el caso conmensurable) que la razón $A:B$ es *mayor* que $C:D$ o, indiferentemente, que $C:D$ es *menor* que $A:B$, y se escribirá

$$A:B > C:D \quad \text{o sea} \quad C:D < A:B.$$

Si, por el contrario, entre los números mayores que $A:B$ se encuentra alguno menor que $C:D$, se deberá decir, por la misma definición precedente, que es:

$$A:B < C:D \quad \text{o sea} \quad C:D > A:B.$$

Cuando, en fin, no sea $A:B > C:D$ ni $A:B < C:D$, quiere decir que *todos* los números menores o mayores que una cualquiera de las dos razones son también menores o, respectivamente, mayores que la otra. Resulta que, para cualquier grado de aproximación, las dos razones admiten los mismos valores aproximados, sea por defecto que por exceso (n. prec.), por lo que es natural llamarlas *iguales*.

Resumiremos, entonces, todo lo dicho en las siguientes:

Def.: *Dadas dos magnitudes homogéneas A y B y otras dos magnitudes C y D, también homogéneas entre sí (pero no necesariamente a las primeras), se dice que la razón $A:B$* es mayor *que la razón $C:D$, o indiferen-*

temente, que $C:D$ es menor *que* $A:B$ *si existe algún número* $\frac{m}{n}$ *menor que* $A:B$ *y mayor que* $C:D$, *es decir, tal que sea*

$$A:B > \frac{m}{n} > C:D.$$

Se dice, al contrario, que las dos razones $A:B$ *y* $C:D$ *son* iguales *si ninguno de ellos es mayor que el otro,* es decir, si todos los números menores que una de las dos razones $A:B$ o $C:D$ son también menores que la otra y todos los números mayores que una de las dos razones son también mayores que la otra.

14. Para que estas definiciones resulten lógicamente justificadas es necesario asegurarse que, cuando uno o los dos pares de magnitudes sean conmensurables, estas nuevas definiciones equivalen a las ya establecidas para tales casos. Esto es casi inmediato para la desigualdad. En efecto, si es $A:B=\frac{p}{q}$ y $C:D=\frac{r}{s}$, de $\frac{p}{q}>\frac{m}{n}>\frac{r}{s}$ resulta $\frac{p}{q}>\frac{r}{s}$; y, recíprocamente, si es $\frac{p}{q}>\frac{r}{s}$, existe siempre algún número $\left(\text{p. ej. la semisuma de } \frac{p}{q} \text{ y } \frac{r}{s}\right)$ menor que $\frac{p}{q}$ y mayor que $\frac{r}{s}$.

Si A y B son inconmensurables y es, en cambio, $C:D=\frac{r}{s}$ de $A:B>\frac{m}{n}>\frac{r}{s}$ se desprende $A:B>\frac{r}{s}$ (n. 11, *b*); y, recíprocamente, si es $A:B>\frac{r}{s}$, se puede siempre encontrar algún número $\frac{m}{n}$, tal que resulte $A:B>\frac{m}{n}>\frac{r}{s}$ (n. 11, *c*).

En cuanto a la nueva definición de igualdad (n. prec.) si no es ni $A:B>C:D$, ni $A:B<C:D$, y se tiene $A:B=\frac{p}{q}$, es también necesariamente $C:D=\frac{p}{q}$, porque en caso contrario se-

ría (n. II) o $C : D > \frac{p}{q}$ o $C : D < \frac{p}{q}$, es decir $C : D > A : B$ o $C : D < A : B$, contra la hipótesis. Y, recíprocamente, si es

$$A : B = C : D = \frac{p}{q},\text{ no puede ser ni } A : B > C : D,$$

ni $A : B < C : D$.

15. Teniendo en cuenta las def. del número 13 resulta sin más que:

Dadas dos razones $A : B$ y $C : D$ se verifica siempre uno y uno solo de los tres casos:

$$A : B > C : D \quad\text{o}\quad A : B = C : D \quad\text{o}\quad A : B < C : D.$$

Además es fácil reconocer que la igualdad de razones satisface a las *propiedades reflexiva, simétrica* y *transitiva*.

Estas propiedades son claras en el caso conmensurable, pero se pueden demostrar también para el caso inconmensurable. De la forma misma de la def. del n. 13 resultan las dos primeras, es decir:

$$A : B = A : B;$$

$$\text{y de } A : B = C : D \text{ sale } C : D = A : B.$$

Para demostrar la propiedad transitiva conviene establecer primeramente la análoga propiedad para la desigualdad, es decir, hacer ver que de

$$A : B > C : D \quad\text{y}\quad C : D \geqq E : F$$

se deduce

$$A : B > E : F.$$

En efecto, la primera hipótesis significa, por definición (n. 13), que existe algún número $\frac{m}{n}$, tal que sea

$$A : B > \frac{m}{n} > C : D.$$

Ahora la segunda hipótesis implica por def., (sea $C : D$ mayor o igual que $E : F$)

$$\frac{m}{n} > E : F;$$

con que, siempre por def., se deduce:

$$A : B > E : F.$$

Después se llega inmediatamente al

TEOR.: De $A : B = C : D$ y $C : D = E : F$ resulta

$$A : B = E : F.$$

En efecto, de las dos razones $A : B$ y $E : F$ ninguna puede ser mayor que la otra, porque si fuese, por ej.,

$$A : B > E : F,$$

de esta desigualdad y de la igualdad $E : F = C : D$ resultaría, por la propiedad transitiva de la desigualdad, $A : B > C : D$ contra la hipótesis.

EJERCICIOS

1) Calcular la razón entre las superficies de dos cuadrados sabiendo que el lado de uno es $\frac{2}{3}$ del lado del otro.

2) Dado un cuadrado $ABCD$, uniendo ordenadamente los puntos medios de sus lados se obtiene otro cuadrado; uniendo del mismo modo los puntos medios de los lados de este último se obtiene un tercer cuadrado. Demostrar que la razón entre los perímetros del tercero y del segundo está comprendida entre 1 y 2. Calcular la razón de las superficies de cada cuadrado interior con el cuadrado $ABCD$.

3) Demostrar que la razón de los perímetros del cuadrado inscripto al cuadrado circunscripto a una circunferencia es mayor que $\frac{1}{2}$ y menor que 1. ¿Cuál es la razón de sus superficies?

4) El lado del triángulo equilátero circunscripto a una circunferencia es doble del lado del triángulo equilátero inscripto.

5) La razón de los perímetros del triángulo equilátero y el cuadrado inscriptos en una circunferencia es menor que $\frac{2}{3}$ y mayor que $\frac{1}{2}$.

§ 3. MAGNITUDES PROPORCIONALES

Las proporciones. — Sus propiedades. — Proporción continua. — Nota histórica. — Proporciones que se deducen de otra proporción dada. — Unicidad de la cuarta magnitud proporcional a tres dadas. — Unicidad de la tercera magnitud proporcional a dos dadas. — Ejercicios.

16. Cuando cuatro magnitudes A, B, C y D (de las cuales las dos primeras son homogéneas y las otras dos homogéneas entre sí, pero no necesariamente a las primeras) son tales que las dos razones $A:B$ y $C:D$ resultan iguales, se dice también que las cuatro magnitudes A, B, C y D en el orden escrito, forman una *proporción*, o que los pares A, B y C, D son *proporcionales*.

Las magnitudes A, B, C y D se llaman *términos* de la proporción; A y C se llaman *antecedentes*, B y D *consecuentes* y también A y C suelen llamarse homólogos de B y D respectivamente; en fin A y D, se llaman *extremos* y B y C *medios* de la proporción.

Si
$$A:B = C:D$$

se dice que D es la *cuarta proporcional* entre las magnitudes A, B y C en el orden escrito.

Toda proporción:

$$A:B = B:C,$$

en que los medios son iguales (para lo cual se requiere que las tres magnitudes A, B, C sean homogéneas), se llama *proporción continua*. En tal caso se dice que C es la *tercera proporcional* entre A, y B y B es la *media proporcional* entre A y C.

NOTA HISTÓRICA. — *La definición general abstracta de proporción o igualdad de razones* (ἀναλογιά) se remonta substancialmente a EUDOXIO de Cnido (IV siglo a. C.), y forma parte de la base del libro V de « Los Elementos », de EUCLIDES. En efecto, la def. 5 de este libro dice que « *A es a B como C es a D* » *si de cualquier manera que se forman los equimúltiplos n A, n C, de A y C y los equimúltiplos m B, m D de B y D la igualdad o desigualdad*

$$n\,A \gtreqless m\,B$$

lleva como consecuencia la igualdad o desigualdad

$$n\,C \gtreqless m\,D$$

en el mismo sentido.

R. DEDEKIND, en su clásico opúsculo: *Continuidad y números irracionales (1872)*[1], *substituyó en tal definición* la comparación de los equimúltiplos por la de los valores aproximados $\frac{m}{n}$, por defecto y por exceso, de las dos razones $A : B$ y $C : D$, llegando así a construir, en el conjunto de los números enteros y fraccionarios, la *sección* que define aritméticamente la razón $A : B = C : D$ como número irracional (Véase Apéndice I).

17. Es útil notar cómo del n. 14 resulta que en una proporción

$$A : B = C : D$$

según que uno de los pares de magnitudes A, B y C, D

---

[1] Trad. italiana y notas históricas-críticas de O. ZARISKI; Roma, Stock 1926.

sea conmensurable o inconmensurable, tal es, respectivamente, también el otro.

Además, las dos razones $A : B$ y $C : D$, por ser iguales entre sí, son ambas mayores o iguales o menores que 1; es decir (n$^{os.}$ 7-10) según sea $A > B$ o $A = B$ o $A < B$ es también, respectivamente, $C > D$ o $C = D$ o $C > D$.

18. En vista de las aplicaciones geométricas, de las cuales nos ocuparemos en el próximo Cap. VII, debemos establecer para las proporciones (o igualdades de razones) algunas propiedades generales, las cuales se pueden considerar como extensiones de propiedades elementalísimas de las igualdades entre números enteros o fraccionarios (razones de magnitudes conmensurables).

Por eso en cada uno de los teors. que demostraremos en los números 19-23, el caso conmensurable dará lugar a una verificación inmediata, en base a nociones elementales de Aritmética. En cambio, para tratar el caso inconmensurable o mejor dicho, el caso general, que comprende a los dos, procederemos sistemáticamente con el método de reducción al absurdo, haciendo ver en cada caso, según la def. de igualdad del n. 13, que ninguna de las dos razones, que deberemos considerar sucesivamente, puede ser mayor que la otra.

Para comprender el espíritu de ese método uniforme bastará estudiar con cuidado la demostración de uno o dos de esos teoremas; después cada cual podrá desarrollar por analogia fácilmente por sí mismo la demostración de los otros.

19. Dadas dos magnitudes homogéneas A y B, la razón $B : A$ se llama *inversa* de $A : B$. En el caso conmensurable, si es $A:B = \frac{p}{q}$, su inversa $B:A$ es igual a $\frac{q}{p}$, porque de $A = \frac{p}{q} B$ resulta $B = \frac{q}{p} A$ (n. 5).

Teor.: *Dada una proporción*

$$A:B = C:D$$

existe también la proporción que se obtiene "invirtiendo (las razones)", es decir, la

$$B:A = D:C.$$

En el caso conmensur ble el teor. es evidente por la observación hecha sobre la razón inversa.

Para demostrarlo, en el caso general basta ver (n. 13) que ninguna de las dos razones $B:A$ y $D:C$ puede ser mayor que la otra.

Supongamos, en efecto, que, p. ej., sea

$$B:A > D:C.$$

En tal caso existiría por def. (n. 13) algún número $\frac{m}{n}$, tal que

$$B:A > \frac{m}{n} > D:C,$$

o sea:

$$B > \frac{m}{n} A; \qquad D < \frac{m}{n} C;$$

y de aquí, multiplicando por $\frac{n}{m}$, se deduciría la desgualdad (n. 5, a)

$$\frac{n}{m} B > A; \qquad \frac{n}{m} D < C;$$

o sea:

$$A < \frac{n}{m} B; \quad C > \frac{n}{m} D,$$

las cuales son absurdas, porque significan (n. 10)

$$A:B < \frac{n}{m} < C:D,$$

o sea (n. 13)

$$A:B < C:D$$

contra la hipótesis

$$A:B = C:D.$$

20. Teor.: *Con la proporción*

$$A:B = C:D$$

subsiste también la proporción

$$(A + B) : B = (C + D) : D,$$

la cual se dice que se obtiene "componiendo" la proporción dada.

En el caso conmensurable la verificación es casi inmediata, porque si es

$$A:B = C:D = \frac{p}{q}$$

es decir,

$$A = \frac{p}{q} B; \quad C = \frac{p}{q} D,$$

se deduce

$$A + B = \left(\frac{p}{q} + 1\right) B, \quad C + D = \left(\frac{p}{q} + 1\right) D,$$

y estas dos igualdades expresan que las dos razones $(A + B) : B$ y $(C + D) : D$ son iguales a $\frac{p}{q} + 1$.

Para demostrar el teor. en el caso general, supongamos que una de las dos razones $(A + B) : B$ y $(C + D) : D$, p. ej. la primera, sea mayor: es decir que se tenga para algún número $\frac{m}{n}$

$$(A + B) : B > \frac{m}{n} > (C + D) : D,$$

o sea simultáneamente

$$A + B > \frac{m}{n} B \quad \text{y} \quad C + D < \frac{m}{n} D.$$

El número $\frac{m}{n}$, debiendo ser mayor que la razón $(C + D) : D$, la cual siendo $C + D > D$ es mayor que 1 (n. 10), resulta también mayor que 1; y entonces, restando de los dos miembros de las últimas dos desigualdades respectivamente B y D, se obtienen las dos nuevas desigualdades:

$$A > \left(\frac{m}{n} - 1\right) B, \quad C < \left(\frac{m}{n} - 1\right) D,$$

las cuales son absurdas, porque prueban que el número $\frac{m}{n} - 1$ es menor que $A : B$ y mayor que $C : D$; conducen por lo tanto a la conclusión $A : B > C : D$, contra la hipótesis.

No puede entonces ser:

$$(A + B) : B \gtrless (C + D) : D.$$

21. Con un razonamiento análogo al del n. prec. se demuestra el

Teor.: *Con cada proporción*

$$A : B = C : D$$

en la cual es $A > B$ (y por lo tanto (n. 17) *$C > D$) subsiste también la proporción*

$$(A - B) : B = (C - D) : D,$$

la cual se dice que ha sido obtenida "dividiendo" la proporción dada.

Pasemos a establecer ahora algunas propiedades de *las proporciones entre magnitudes homogéneas* (nos. 21-23).

22. Si cuatro magnitudes homogéneas A, B, C y D son proporcionales y conmensurables entre sí, de manera que se tenga

$$A : B = C : D = \frac{p}{q} \text{ y } B : C = \frac{r}{s},$$

o sea:

$$A = \frac{p}{q} B, \quad C = \frac{p}{q} D, \quad B = \frac{r}{s} C,$$

se deduce de la primera y tercera de estas relaciones

$$A = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} C,$$

y de la tercera y segunda

$$B = \frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} D,$$

y en virtud de la *propiedad conmutativa del producto de las proporciones,* se deduce que con la dada proporción subsiste también la:

$$A : C = B : D$$

Para extender esta propiedad al caso general (que contenga también el caso de magnitudes inconmensurables) es menester que expongamos antes los siguientes tres lemas, que para las magnitudes conmensurables son evidentes:

a) Dadas tres magnitudes homogéneas A, B *y* C, *de* $A > B$ *se obtiene*

$$A : C > B : C;$$

y recíprocamente.

En efecto, en la hipótesis $A > B$, tomado un submúltiplo $\frac{1}{n} C$ de la C menor que la diferencia $A - B$ (n. 6) y considerados los sucesivos múltiplos de $\frac{1}{n} C$, se acabará por encontrar (post. de ARQUÍMEDES) uno, p. ej., $\frac{m}{n} C$, el cual esté comprendido entre B y A; y de las desigualdades

$$A > \frac{m}{n} C > B, \text{ o sea } A : C > \frac{m}{n} > B : C,$$

resulta

$$A : C > B : D$$

Recíprocamente, si es $A : C > B : C$, no puede ser ni $A = B$, porque en tal caso sería $A : C = B : C$ (propiedad reflexiva de la igualdad de razones), ni $A > B$, porque resultaría, proposición precedente

$$A : C < B : C,$$

b) Dadas tres magnitudes homogéneas A, B, C, *de* $B > C$ *resulta:*

$$A : B < A : C;$$

y *recíprocamente.*

Supuesto $B > C$, tómese un submúltiplo $\frac{1}{n} A$ de A, menor que $B - C$, y entre los sucesivos múltiplos de $\frac{1}{n} A$ considérese uno, por ej. $\frac{m}{n}$A, el cual esté comprendido entre C y B, así que se tendrán las desigualdades

$$C < \frac{m}{n} A ; \qquad \frac{m}{n} A < B .$$

De aquí multiplicando por $\frac{n}{m}$ (n. 5 a) e invirtiendo las desigualdades se deduce:

$$A < \frac{n}{m} B , \qquad \frac{n}{m} C < A ;$$

con lo que, (n. 13) resulta precisamente

$$A : B < A : C .$$

La proposición inversa se demuestra como la inversa de *a)*.

c) *La razón de dos magnitudes no cambia, si las dos magnitudes se multiplican por un mismo número*; es decir, para cualquier número $\frac{p}{q}$, se tiene

$$A : B = \frac{p}{q} A : \frac{p}{q} B .$$

En efecto; si fuese, p. ej.,

$$A : B > \frac{p}{q} A : \frac{p}{q} B ,$$

existiría algún número $\frac{m}{n}$ comprendido entre esas dos razones, y se tendría:

$$A > \frac{m}{n} B ; \qquad \frac{p}{q} A < \frac{m}{n} \frac{p}{q} B .$$

De estas dos desigualdades la segunda contradice a la primera, como se reconoce, multiplicando los dos miembros por $\frac{q}{p}$ (n. 5 a).

23. Podemos demostrar ahora el siguiente teorema, cuya primera parte extiende al caso general la propiedad reconocida para magnitudes conmensurables, al principio del n. prec.

Teor.: *Con una proporción entre magnitudes homogéneas*

$$A:B = C:D,$$

subsisten también las siguientes

$$A:C = B:D$$

$$D:B = C:A$$

que se obtienen de la dada, "permutando los medios" y "los extremos" respectivamente.

Para demostrar la validez de la primera de estas proporciones, supongamos, como de costumbre, que una de las dos razones $A:C$ o $B:D$ sea mayor que la otra, p. ej.

$$A:C > B:D;$$

es decir, admitimos que exista un número $\frac{m}{n}$, tal que sea

$$A:C > \frac{m}{n} > B:D,$$

o lo que es lo mismo:

$$A > \frac{m}{n} C, \qquad B < \frac{m}{n} D.$$

Si así fuese, de la primera de esas desigualdades resultaría, lema *a*, del n. prec.

$$A:B > \frac{m}{n} C:B,$$

mientras en la segunda, por el lema *b*, se tendría

$$\frac{m}{n} C:B > \frac{m}{n} C: \frac{m}{n} D.$$

Pero por el lema *c*) esta última razón es igual a $C : D$; luego, por la propiedad transitiva de la desigualdad de razones (n. 15), se obtendría

$$A : B > C : D$$

contra la hipótesis.

Establecida así la permutabilidad de los medios, se demuestra inmediatamente la de los extremos. En efecto, escrita la proporción dada bajo la forma (propiedad simétrica de la igualdad de razones)

$$C : D = A : B,$$

permutando los medios,

$$C : A = D : B,$$

después permutando las dos razones se deduce

$$D : B = C : A.$$

24. Cor.: *Si varias razones entre magnitudes homogéneas son iguales, también es igual a las dadas la razón de la suma de los antecedentes a la suma de los consecuentes; es decir, de*

$$A : B = C : D = \ldots\ldots = H : K$$

se deduce:

$$(A + C + \ldots\ldots + H) : (B + D + \ldots\ldots + K) = H : K.$$

Empecemos por demostrar el teor. en el caso de dos razones; es decir, vamos a ver que de

$$A : B = C : D$$

resulta

$$(A + C) : (B + D) = C : D$$

En efecto, de la proporción dada, permutando los medios (n. prec.) se obtiene

$$A:C = B:D,$$

y componiendo (n. 20)

$$(A + C) : C = (B + D) : D;$$

permutando otra vez los medios, se llega a la proporción pedida:

$$(A + C) : (B + D) = C:D.$$

Si además $E:F$ es una tercera razón igual a las dadas, basta aplicar a la proporción

$$(A + C) : (B + D) = E:F$$

el resultado obtenido para deducir que

$$(A + C + E) : (B + D + F) = E:F;$$

y así se puede proseguir para cuantas razones se quieran.

25. Las propiedades generales de las proporciones establecidas en los n$^{os.}$ 17-23 fueron deducidas directamente de la def. de proporción (o igualdad de razones). De tales propiedades deduciremos ahora, algunos notables teoremas como es el de unicidad.

En los n$^{os.}$ 10 y 11 del próximo Cap. mostraremos cómo, en el caso de los segmentos y de los polígonos, se puede construir efectivamente la *cuarta proporcional* (n. 16) entre *tres magnitudes dadas*. Veremos ahora, en general, que cualquiera que sea el procedimiento con el cual se construya la cuarta proporcional entre tres magnitudes A, B y C (de las cuales las dos primeras son homogéneas entre sí, pero no necesariamente a la tercera), se llega siempre a magnitudes iguales.

En otras palabras, podemos demostrar *la unicidad de la cuarta proporcional.*

En el caso conmensurable esta unicidad es evidente, porque si es $B = \frac{p}{q} A$, la cuarta proporcional entre A, B y C está dada por $\frac{p}{q} C$. Ahora se trata de ver que, también en el caso inconmensurable, una magnitud resulta determinada de manera única con respecto a otra cuando se da su razón.

Basta demostrar que si coexisten las dos proporciones

$$A : B = C : D$$

$$A : B = C : D'$$

se deduce $D = D'$.

La deducción es inmediata, porque de las proporciones admitidas resulta (n. 15) la proporción (entre magnitudes homogéneas)

$$C : D = C : D'$$

o sea, permutando los medios (n. 23),

$$C : C = D : D',$$

y de aquí resulta sin más (n. 17) que $D = D'$.

Nota. — Se obtiene en particular, *la unicidad de la tercera proporcional* entre dos magnitudes dadas (n. 16).

26. Cor. *Si dos proporciones tienen ordenadamente iguales tres términos de igual lugar, son iguales también los términos restantes.*

Sean, p. ej., las dos proporciones

$$A : B = C : D$$

$$A' : B = C : D.$$

Permutando los extremos (n. 23), se obtiene:

$$D : B = C : A,$$

$$D : B = C : A',$$

y, por la unicidad de la cuarta proporcional, es

$$A = A'.$$

27. Resolveremos, en el Cap. VII, el problema de *dividir un segmento (o polígono) en dos partes proporcionales a dos segmentos (o polígonos) dados.* Aquí podemos demostrar en general *la unicidad de la división de una magnitud en partes proporcionales* a dos magnitudes dadas. Se trata de ver que, si coexisten las dos proporciones

$$A : B = C : D$$

$$A' : B' = C : D$$

y es $A + B = A' + B'$, se tiene necesariamente

$$A = A'; \qquad B = B'.$$

En efecto, de las dos proporciones dadas resulta

$$A : B = A' : B'$$

componiendo esta última (n. 20)

$$(A + B) : B = (A' + B') : B',$$

y permutando los medios en la que así se obtiene (n. 23)

$$(A + B) : (A' + B') = B : B'.$$

Pero, por hipótesis, son iguales las dos primeras magnitudes, ambas razones son, pues, iguales a la unidad (n. 17), es entonces $B = B'$. Resultan iguales también A y A', por ser diferencias de magnitudes iguales.

28. En el Cap. VII enseñaremos un procedimiento para construir la media proporcional (n. 16) entre dos segmentos o dos polígonos dados. Pero estableceremos en general la *unicidad de la media proporcional.*

Habrá que demostrar que de las dos proporciones continuas:

$$A : B = B : C,$$

$$A : B' = B' : C,$$

resulta la igualdad $B = B'$.

Supongamos, en efecto, que B y B' no sean iguales y sea, p. ej.:

$$B > B'.$$

En tal caso, por el lema *a)* del n. 22 se tiene

$$B : C > B' : C,$$

y, entonces, para las proporciones dadas es

$$A : B > A : B'.$$

Pero esta desigualdad, por el lema *b)* del n. 22, implica

$$B < B'$$

contrariamente a la hipótesis.

EJERCICIOS

1) En una balanza de fiel, los pesos son proporcionales a los recíprocos de los respectivos brazos. Sabiendo que un almacenero tiene una balanza de brazos desiguales y suponiendo que estén en la razón de $\frac{99}{100}$, colocando las pesas en el platillo que corresponde al brazo más largo, ¿en cuánto se beneficia en cada pesada de 10 kg.?

2) Con la misma balanza el comerciante vende a dos clientes 10 kg. de la misma mercadería; al despachar al primero, coloca por equivocación las pesas en el platillo que corresponde al brazo más corto, pero al despachar al segundo se da cuenta del error y las coloca en el brazo más largo, ¿cuánto ha ganado o cuánto ha perdido al final de las dos operaciones?

3) Sabiendo que los intereses de un capital son proporcionales al tanto por ciento (razón) y al tiempo, demostrar que son proporcionales al producto de la razón por el tiempo.

4) Nota: Como complemento del Cap. VI enunciaremos algunas def. y algunos teors. que el lector demostrará, sacados directamente del V Libro de los *Elementos* de Euclides, con el objeto de reproducir completamente la parte substancial de la teoría euclídea de las proporciones. Euclides expresa la *proporcionalidad* de dos pares de magnitudes A, B y C, D diciendo que la *razón* de A a B es igual a la razón de C a D, de modo que el teor. del n. 15 (propiedad transitiva de la igualdad entre razones) se puede enunciar diciendo que *razones iguales a una tercera son iguales entre sí.*

Esto dicho, establezcamos la siguiente:

Def.: *Dadas tres magnitudes A, B y C se dice que A es* a *C en la* razón compuesta *de A* a *B y de B* a *C.*

Más general, se dice que A es a C en la *razón compuesta* de A a B y de F a G si

$$B : C = F : G;$$

y todavía generalizando más se dice que A es a C en la *razón compuesta* de D a E y de F a G si existe una magnitud B tal que

$$A : B = D : E$$

$$B : C = F : G.$$

En particular, si A es a C como en la razón compuesta de D a E y de F a G y las razones $D : E$ y $F : G$ son iguales, es decir, si

$$D : E = F : G$$

se dice que A es a C como en la *razón duplicada* de D a E.

Así, pues, se dice que A es a C en la razón duplicada de A a B si

$$A : B = B : C,$$

es decir, si C es la tercera proporcional según A y B. En base a las def. precedentes demuéstrense las siguientes proposiciones. Si se quiere seguir completa y exclusivamente el procedimiento euclídeo, es preciso adoptar el criterio de proporcionalidad enunciado en la Nota del n. 16 (pág. 25), cuya equivalencia con el nuestro ya la hemos hecho notar en el n. 13.

5) TEOR: *Si A es a C como la razón compuesta de D* a *E y de F* a *G* y es

$$q\,D = p\,E, \quad s\,F = r\,G,$$

también A y C son conmensurables, y es

$$q.s\,A = p.r\,B.$$

6) Razones compuestas de razones iguales, son iguales, es decir, si $A : B = A' : B'$ y $B : C = B' : C'$, resulta $A : C = A' : C'$.

DEF.: *Tres magnitudes homogéneas A, B y C se llaman proporcionales* en orden perturbado *a A', B'* y *C', si las razones de A* a *B y de B* a *C son respectivamente iguales a las razones de B'* a *C' y de A'* a *B'.*

7) TEOR.: *Si A, B y C son proporcionales en orden perturbado a A', B' y C', según que A sea mayor, igual o menor que C', es también A' mayor, igual o menor que C'.*

Si $A > C$ tómese n de manera que $n(A - C) > B$; entonces existe por lo menos un múltiplo $p\ B$ de B comprendido entre $n\ A$ y $n\ C$, y de las relaciones $n\ A > p\ B > n\ C$ y de las proporciones dadas resulta, etc.

8) TEOR.: *Si A, B y C son proporcionales en orden perturbado a A', B' y C', la razón de A* a *C es igual a la razón de A'* a *C'.*

Considerados dos números cualesquiera, m y n, apliquemos el teor. prec. a las proporciones

$$m\ A : m\ B = n\ B' : n\ C'$$

$$m\ B : n\ C = m\ A' : n\ B', \qquad \text{etc.}$$

NOTA: Este teor. establece la validez del teorema 6 independientemente del orden de las razones componentes.

Extendiendo las defs. dadas antes del penúltimo teor., al caso de razones compuestas de cualquier número de razones, se extiende también a este caso el teor. 6 independientemente del orden de las razones componentes.

9) Si una razón compuesta de dos o más razones es igual a otra razón compuesta de igual número de razones, y una razón de las primeras (o una compuesta de alguna de las primeras) es igual a una razón de las otras (o a alguna razón compuesta de alguna de las otras) será también la restante razón de las primeras (o la razón compuesta de las restantes de las primeras) igual a la restante razón de las otras (o a la razón compuesta de las restantes de las otras); es decir, en el caso más simple de dos razones componentes, si

$$A : C = A' : C' \quad \text{y} \quad A : B = A' : B'$$

se tiene también

$$B : C = B' : C'.$$

10) La teoría euclídea de las proporciones que hemos reproducido se apoya esencialmente sobre el postulado de ARQUIMEDES (n. 3). HILBERT ha demostrado que se puede hacer la teoría de las proporciones entre segmentos, independiente de dicho postulado. Naturalmente que al definir la proporcionalidad de cuatro segmentos será menester elegir un criterio geo-

métrico distinto del euclídeo del n. 16 fundado en la comparación de los múltiplos de segmentos dados (n. 13) y que es equivalente al criterio euclídeo si se admite el postulado de la divisibilidad.

Nosotros reproduciremos aquí la simple y elegante exposición ideada por el prof. Beppo Levi, de tal teoría, limitándonos, naturalmente, a dar solamente los enunciados en su orden de deducción, dejando las demostraciones como ejercicios para el lector.

Def.: *Se dirá que cuatro segmentos* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *y* $\mathbf{d}$ *son proporcionales y se escribirá*

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}.$$

Si los dos triángulos rectángulos que tienen por catetos los segmentos $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ *y* $\mathbf{d}$ *son tales que el ángulo opuesto a* $\mathbf{a}$ *es igual al ángulo opuesto a* $\mathbf{b}$ *y, por lo tanto, el ángulo opuesto a* $\mathbf{c}$ *es igual al opuesto a* $\mathbf{d}$.

En otras palabras, tomados sobre un lado OX de un ángulo recto $\hat{O}$, los segmentos $OA = \mathbf{a}$, $OB = \mathbf{b}$ y sobre el otro OY los segmentos $OC = \mathbf{c}$, $OD = \mathbf{d}$, las rectas AC y BD deben resultar paralelas.

Establecido esto, demuéstrense las siguientes proposiciones:

11) Cor.: *El segmento cuarto proporcional a tres segmentos dados es único.* (Aplíquese la segunda forma de la def. precedente y la unicidad de la paralela por un punto a una recta.

12) Cor.: Si $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}$, es también

$$\mathbf{c} : \mathbf{d} = \mathbf{a} : \mathbf{b}, \qquad \mathbf{b} : \mathbf{a} = \mathbf{d} : \mathbf{c}$$

13) Cor.: *Si* $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}$ *y* $\mathbf{a} : \mathbf{e} = \mathbf{c} : \mathbf{f}$, *resulta también* $\mathbf{b} : \mathbf{e} = \mathbf{d} : \mathbf{f}$ (Basta aplicar la segunda forma de la def. precedente y el n. 74 del Cap. I_1).

14) Teor.: *Si* $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}$, *es también* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) : \mathbf{a} = (\mathbf{c} + \mathbf{d}) : \mathbf{c}$, *es decir, existe la proporción deducida por composición de la dada, y si* $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ *es también* $\mathbf{c} > \mathbf{a}$ *y* $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) : \mathbf{a} = (\mathbf{c} - \mathbf{d}) : \mathbf{c}$.

Tomemos el ángulo recto $X\hat{O}Y$ y sobre OX los segmentos $OA = \mathbf{a}$, $OB = AE = \mathbf{b}$ y sobre OY los segmentos $OC = \mathbf{c}$, $OD = \mathbf{d}$, trácese por E la paralela a la recta BD hasta cortar en F a la OY y desde A la paralela a la OY hasta cortar a la EF en F'. Los triángulos AEF', OBD son iguales: luego el segmento AF' es igual a OD y el segmento CF... etc.

15) TEOR.: *Dado un ángulo recto* $X\widehat{O}Y$, *si una circunferencia corta al lado* OX *en los puntos* M *y* N *y al lado* OY *en los puntos* P *y* Q *se tiene que:*

$$OM : OP = OQ : ON; \qquad OM : OQ = OP : ON.$$

Suponiendo que el punto O es exterior a la circunferencia y que los puntos O, M, N O, y P, Q se suceden sobre los dos lados en el orden escrito, considérense primero los triángulos OMQ, OPN y después los dos triángulos OQN y OPM, etc....

16) TEOR.: *Si sobre los lados* OX *y* OY *de un ángulo recto se toman los segmentos* OM, ON *y* OP, OQ *tales que* $OM : OP = OQ : ON$, *los puntos* M, N, P *y* Q *pertenecen a una circunferencia.* (Ejercicio precedente y ejerc. 11).

17) TEOR.: *En una proporción se pueden permutar los medios.*
Aplíquese el teor. prec. y la segunda parte del ejerc. 15.

18) COR.: Si $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}$ y $\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{e} : \mathbf{f}$ resulta $\mathbf{c} : \mathbf{d} = \mathbf{e} : \mathbf{f}$.
Véase ejerc. prec. y ejerc. 13.

Con lo expuesto se completa la parte abstracta de la teoría. Pero sigamos ulteriormente al prof. LEVI en la deducción del teorema de THALES que nosotros demostraremos por otro camino en el Cap. siguiente.

19) *Lema*: Si $\mathbf{a} : \mathbf{a}' = \mathbf{h} : \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} : \mathbf{b}' = \mathbf{h} : \mathbf{k}$ será también

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}') : (\mathbf{b} \pm \mathbf{b}') = \mathbf{h} : \mathbf{k}.$$

De las proporciones dadas resulta

$$\mathbf{a} : \mathbf{h} = \mathbf{a}' : \mathbf{k}; \qquad \mathbf{b} : \mathbf{h} = \mathbf{b}' : \mathbf{k}$$

y por consiguiente [ej. 12 - 13]

$$\mathbf{a} : \mathbf{a}' = \mathbf{b} : \mathbf{b}' \text{ y (ej. 14)}$$

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}') : \mathbf{a}' = (\mathbf{b} \pm \mathbf{b}') : \mathbf{b}' \text{ y puesto que [ej. 11 y 17]}$$

$$\mathbf{h} : \mathbf{a} = \mathbf{k} : \mathbf{a}'; \qquad (\mathbf{a} \pm \mathbf{a}') : \mathbf{h} = (\mathbf{b} \pm \mathbf{b}') : \mathbf{k},$$

y finalmente

$$(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}') : (\mathbf{b} \pm \mathbf{b}') = \mathbf{h} : \mathbf{k}.$$

20) Cor.: *En dos triángulos que tienen sus ángulos ordenadamente iguales, son proporcionales dos lados opuestos a ángulos iguales y las correspondientes alturas.* (Aplíquese la def. y el lema precedente).

21) Teor. de Thales: *Si dos paralelas cortan a los lados OX y OY de un ángulo cualquiera $\hat{O}$ respectivamente en A y B, C y D se tiene que:*

$$OA : OC = OB : OD.$$

Los triángulos OAB y OCD tienen los ángulos iguales, de donde, bajando desde A y C las perpendiculares AE y CF sobre OY será [ej. precedente]

$$OB : OD = AE : CF.$$

Construídos entonces sobre la semirrecta opuesta de OY los segmentos $OA' = OA$, $OC' = OC$, también los triángulos isósceles OAA' y OCC' tienen los ángulos iguales y por lo tanto $OA' : OC' = AE : FC$, es decir, $OA : OC = AE : CF$.

De las dos proporciones establecidas resulta (ej. 17) que

$$OA : OC = OB : OD.$$

Nota: La unicidad de la cuarta proporcional permite también invertir el teorema de Thales como lo veremos en el Cap. siguiente.

CAPÍTULO VII

Aplicaciones de la teoría de las proporciones

TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS SEMEJANTES

§ 4. TEOREMAS FUNDAMENTALES

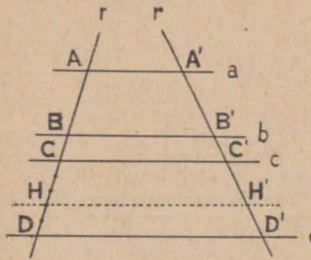
Teorema de Thales directo e inverso. — Proporcionalidad de triángulos o paralelogramos de igual altura. — Teoremas recíprocos. — Proporcionalidad de arcos o sectores de igual radio a sus respectivos ángulos centrales. — Clases de magnitudes proporcionales. — Problemas: construcción de la cuarta y tercera proporcional, división de un segmento en partes proporcionales a dos segmentos dados. — Semejanza de triángulos. — Puntos armónicos. — Construcción de la media proporcional. — Ejercicios.

Como aplicaciones inmediatas de la def. de pares de magnitudes proporcionales (VI, n$^{os.}$ 13, 17), demostraremos tres teors. de los cuales los dos primeros y sus inversos son particularmente fecundos en consecuencias geométricas.

1.) Teor. (llamado de Thales). *Si varias paralelas son cortadas por dos transversales, cada par de segmentos interceptados sobre una de ellas es proporcional a cada par de segmentos correspondientes, interceptados sobre la otra.*

Las dos transversales r y r' corten a las paralelas $a, b, c, d \ldots$, respectivamente en los puntos A, B, C, D y A', B', C', D'. Decimos que:

$$AB : CD = A'B' : C'D'.$$



En el caso conmensurable esta proporción está implícitamente contenida en el teor. del n. 39 del Cap. III_2; en efecto, hemos visto allí que en la correspondencia entre los segmentos de las dos transversales, interceptados por las mismas paralelas del haz, a segmentos iguales corresponden segmentos iguales, a la suma de dos segmentos corresponde la suma de los segmentos correspondientes; y, por lo tanto, a un múltiplo o submúltiplo de un segmento el múltiplo o submúltiplo, según el mismo entero, del segmento correspondiente (III_2, n. 40). Por eso si es, por ej. $AB = \frac{p}{q}\, CD$, como a los segmentos AB y $\frac{p}{q}\, CD$ de r corresponden sobre r' los segmentos $A'B'$ y $\frac{p}{q}\, C'D'$, respectivamente, resulta:

$$A'B' = \frac{p}{q}\, C'D'$$

El teor. se extiende también al caso inconmensurable, haciendo ver que todo número $\frac{m}{n}$ menor o mayor que una de las dos razones $AB : CD$ o $A'B' : C'D'$ es también menor o respectivamente mayor que la otra (VI, n. 13).

Recordemos, en efecto, que a la suma de dos segmentos de r corresponde sobre r' la suma de los segmentos correspondientes; resulta, pues, que si dos segmentos de r son desiguales, los segmentos correspondientes de r' son también desiguales en el mismo sentido (III_2, n. 40). Entonces si es por ej.

$$\frac{m}{n} < AB : CD$$

es decir (VI, n. 10)

$$AB > \frac{m}{n} CD,$$

(en la fig. se tiene $AB > CH = \frac{3}{5} CD$), basta tener en cuenta que a los segmentos AB, $\frac{m}{n} CD$ de r corresponden sobre r' los segmentos $A'B'$, $\frac{m}{n} C'D'$, respectivamente, para concluir, en virtud del teor. antes citado, que

$$A'B' > \frac{m}{n} C'D';$$

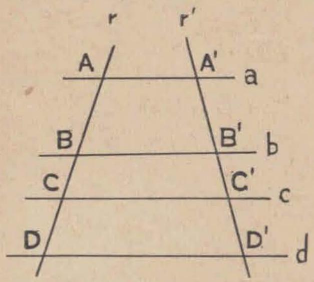
es decir, precisamente

$$\frac{m}{n} < A'B' : C'D'.$$

Nota histórica. — Según Proclo (comentador de Euclides), acerca de la contribución que Thales de Mileto (alrededor de 600 a. C.) habría dado a la Geometría, no resulta que se le pueda atribuir este teor. el que verosímilmente pertenece a los pitagóricos, por lo menos en el caso conmensurable.

2) La unicidad de la cuarta proporcional (IV, n. 25) permite invertir el teor. del número prec.

Consideremos en primer lugar dos pares de rectas a, b y c, d, las cuales intercepten sobre dos transversales r y r' dos pares de segmentos AB, CD y $A'B'$, $C'D'$ *proporcionales e igualmente* dispuestos (III₂, n. 39); basta entonces admitir que *tres de las rectas dadas*, p. ej. a, b y c, *sean paralelas entre sí*, para concluir que también la cuarta, es decir, la d, es paralela a ellas; en efecto, la paralela por D a la a (y por lo tanto a las b y c) corta a la r' en un punto, que por el momento indicaremos con D'_1 y que por el teor. de Thales, es tal que:



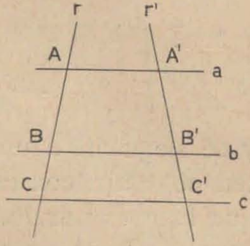
$$AB : CD = A'B' : C'D'_1.$$

De esta proporción y de la dada proporcionalidad entre AB, CD y $A'B'$, $C'D'$ resulta, en virtud de la unicidad de la cuarta proporcional, $C'D' = C'D'_1$; y por lo tanto los segmentos $A'B'$ y $C'D'$ como $A'B'$ y $C'D'_1$, están dispuestos como AB y CD. Se concluye que D'_1 coincide con D', o sea que la d es paralela a las a, b y c.

Podemos entonces enunciar el siguiente:

Teor. (inverso del teor. de Thales relativo a cuatro rectas). *Si dos pares de rectas cortan, sobre dos transversales, pares de segmentos proporcionales e igualmente dispuestos, y tres de las rectas dadas son paralelas entre sí, también la cuarta es paralela a ellas.*

3. En lugar de cuatro rectas, consideremos sólo tres, p. ej. las a, b y c, que corten a las transversales r y r' en los puntos A, B, C y A', B', C' respectivamente. Si se supone que de las tres rectas a, b y c *las dos primeras son paralelas* y que además son *proporcionales e igualmente dispuestos* los segmentos AB, BC y $A'B'$, $B'C'$, o bien AB, AC y $A'B'$, $A'C'$, se deduce con el mismo razonamiento del n. prec., que también la c es paralela a las a y b.



Pero, si al contrario, se supone que, *además de ser paralelas las* a *y* b *sean proporcionales e igualmente dispuestos* los segmentos AC, BC y $A'C'$, $B'C'$ (que tienen todos ellos un extremo sobre la tercera recta c), el razonamiento del n. prec. no conduce inmediatamente a demostrar que la c es paralela a las a y b [1].

Se llega a la misma conclusión con la observación siguiente:

Siendo por hipótesis

$$AC : BC = A'C' : B'C'$$

supongamos, para fijar las ideas, que, como en la fig. el punto C caiga sobre la prolongación de AB; entonces,

---

(1) Nótese en efecto, que si se indica con C'_1 el punto en el cual la paralela a las a y b, por c corta a la segunda transversal, la proporción

$$AC : BC = A'C'_1 : B'C'_1$$

que así se obtiene no tiene comunes con la proporción supuesta

$$AC : BC = A'C' : B'C'$$

tres términos, sino solamente dos.

siendo $AC > BC$, será también (VI, n. 17) $A'C' > B'C'$; y de la dada proporción *dividiendo* (VI, n. 21) se deduce

$$(AC - BC) : BC = (A'C' - B'C') : B'C',$$

o sea:

$$AB : BC = A'B' : B'C';$$

y se llega así a una de las proporciones que permiten concluir, con el razonamiento del núm. precedente, que la c es paralela a las a y b. Análogamente se razona si C cae entre A y B o sobre la prolongación de BA.

Resumiendo vemos que, admitido que de las tres rectas a, b y c las dos primeras son paralelas, se puede concluir que también la c es paralela a ellas; si se supone, además, que son proporcionales e igualmente dispuestos los segmentos de una cualquiera de las tres cuaternas

$$AB,\ BC \text{ y } A'B',\ B'C' \text{ o } AB,\ AC \text{ y } A'B',\ A'C'$$
$$\text{o } AC,\ BC \text{ y } A'C',\ B'C'$$

obtenemos el siguiente:

Teor. (inverso del teor. de THALES relativo a tres rectas). — *Si tres rectas, de las cuales las dos primeras son paralelas, cortan a dos transversales de manera que dos de los segmentos interceptados sobre una de éstas sean proporcionales e igualmente dispuestos respecto a los segmentos correspondientes interceptados sobre la otra, también la tercera recta es paralela a las dos primeras.*

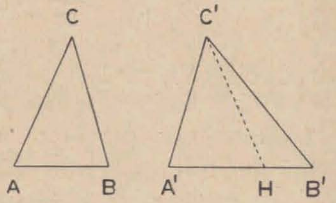
4. Un segundo ejemplo de proporcionalidad está dado por el siguiente:

Teor. *Dos triángulos o paralelogramos de igual altura son proporcionales a las respectivas bases.*

Basta demostrar el teor. en el caso de los triángulos, porque todo paralelogramo es el doble del triángulo de igual base y altura (V_2, n. 22).

Sean entonces ABC y $A'B'C'$ dos triángulos de igual altura respecto a las bases AB y $A'B'$, decimos que:

$$AB : A'B' = ABC : A'B'C' .$$



También aquí, en el caso conmensurable, el teor. es una consecuencia inmediata de resultados conocidos.

Sabemos, en efecto, que entre los triángulos de igual altura: 1) los de igual base son equivalentes (V_2, n. 24) entre sí.

2) La suma de varios triángulos de igual altura es equivalente al triángulo que tiene por base la suma de las bases de los triángulos considerados y la misma altura (V_2, n. 25 *a*), (del que resulta que de dos triángulos de bases desiguales el de base mayor es prevalente). Por eso multiplicando o dividiendo la base de un triángulo por un número entero y conservando inalterada la altura, se obtiene el múltiplo o submúltiplo, según aquel mismo entero, del triángulo considerado. De aquí se deduce inmediatamente que, si es

$$AB = \frac{p}{q} A'B' ,$$

se tiene también

$$ABC = \frac{p}{q} A'B'C' .$$

El teor. se extiende al caso inconmensurable, demostrando, como en el n. 1, que todo número $\frac{m}{n}$, menor o mayor que una de las dos razones $AB : A'B'$ o $ABC : A'B'C'$, es también menor o, respectivamente, mayor que la otra. Sea, p. ej.,

$$\frac{m}{n} < AB : A'B' ,$$

es decir (VI, n. 10)

$$AB > \frac{m}{n} A'B' .$$

Por cuanto se ha recordado antes, se tiene también:

$$ABC > \frac{m}{n} A'B'C' ,$$

es decir,

$$\frac{m}{n} < ABC : A'B'C' .$$

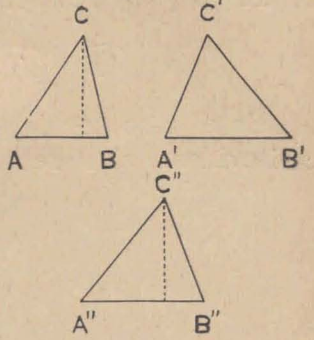
5. También este teor. se invierte en virtud de la unicidad de la cuarta proporcional.

Teor. (inverso del prec.) — *Si dos triángulos o dos paralelogramos son proporcionales a las respectivas bases, ellos tienen alturas iguales.*

Demostraremos también este teor. inverso solamente para los triángulos, por la misma razón aducida para el teorema directo.

Sean entonces ABC y $A'B'C'$ dos triángulos tales que

$$ABC : A'B'C' = AB : A'B'.$$



Decimos que ABC y $A'B'C'$ tienen, respecto a las bases AB y $A'B'$, alturas iguales.

Imaginemos construido un triángulo $A''B''C''$, equivalente al segundo triángulo $A'B'C'$ y que tiene sobre la base $A''B''$ altura igual a la del primer triángulo ABC (V_2, n. 24).

Será, por la primera parte del teor.,

$$ABC : A''B''C'' = AB : A''B'';$$

y siendo, por construcción,

$$A''B''C'' = A'B'C',$$

es también

$$ABC : A'B'C' = AB : A''B'';$$

de esta proporción y de aquella admitida por hipótesis resulta, por la unicidad de la cuarta proporcional, $A'B' = A''B''$. Por eso el triángulo $A'B'C'$, por ser equivalente a $A''B''C''$ y tener base igual a él, debe tener la misma altura de $A''B''C''$ (V_2, n. 28), o sea de ABC.

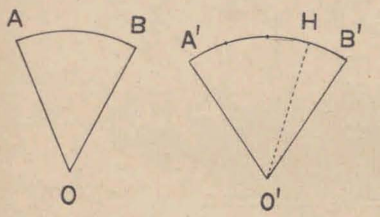
6. Teor. *Dos arcos o sectores de igual radio son proporcionales a los correspondientes ángulos centrales.*

Demostraremos el teor. solamente para los arcos, pues en los casos de los sectores vale un razonamiento del todo análogo.

Dados dos arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{A'B'}$ de igual radio y de centros O y O' respectivamente, se trata de ver que

$$\widehat{AB} : \widehat{A'B'} = A\hat{O}B : A'\hat{O'}B'.$$

En el caso conmensurable, esta proporción resulta casi evidente si se recuerda que a arcos iguales corresponden ángulos centrales iguales y que al arco suma corresponde el ángulo central suma (III$_2$, n. 19), (y, por consiguiente, al arco mayor corresponde el ángulo central mayor).



De aquí resulta que al múltiplo o submúltiplo de un arco corresponde el ángulo central, múltiplo o submúltiplo, según el mismo número; así que si es

$$\widehat{AB} = \frac{p}{q}\,\widehat{A'B'},$$

también es

$$A\hat{O}B = \frac{p}{q}\,A'\hat{O'}B',$$

y en el caso inconmensurable la igualdad de las dos razones, $\widehat{AB} : \widehat{A'B'}$; $A\hat{O}B : A'\hat{O'}B'$, se demuestra, como de costumbre, verificando que cada número $\frac{m}{n}$ menor o mayor que una de las dos razones es también menor o, respectivamente, mayor que la otra.

Por ej., de

$$\frac{m}{n} < \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{A'B'},$$

es decir (VI, n. 10)

$$\overset{\frown}{AB} > \frac{m}{n}\, \overset{\frown}{A'B'},$$

de donde

$$A\hat{O}B > \frac{m}{n}\, A'\hat{O}'B',$$

o sea

$$\frac{m}{n} < A\hat{O}B : A'\hat{O}'B'.$$

7. Antes de proseguir conviene reflexionar un momento sobre los tres teors. de los nos. 1, 4 y 6 y sobre el procedimiento, manifiestamente uniforme, que hemos seguido para demostrarlos.

Dadas dos transversales r y r' de un mismo haz de paralelas, a *cada* segmento de una corresponde un determinado segmento de la otra; y por el teor. de Thales, *cada* par de segmentos de la una es *proporcional* al par correspondiente de la otra.

Análogamente, para los teor. de los nos. 4 y 6, tenemos que, considerados, por ej., *todos* los rectángulos de dada altura, dos cualesquiera de esos rectángulos son *proporcionales* a las respectivas bases; del mismo modo considerados *todos* los posibles arcos (o sectores), cualesquiera que ellos sean, son *proporcionales* a los correspondientes ángulos centrales.

Eso se expresa diciendo que los segmentos determinados sobre dos transversales de un mismo haz de paralelas, o bien los rectángulos de dada altura y las bases correspondientes, o, en fin, los arcos (o sectores) de dado radio y los correspondientes ángulos centrales constituyen *clases de magnitudes proporcionales.*

Hablando en general se adopta la siguiente:

Def.: *Dos clases de magnitudes se llaman proporcioles si a cada cantidad de la una* corresponde *en la otra una determinada cantidad, de manera que cada par de cantidades de una clase sea proporcional al par correspondiente de la obra.*

Ahora bien, en la demostración de cada uno de los teors. de los nos. 1, 4 y 6 hemos reconocido la proporcionalidad de las dos clases de magnitudes, caso por caso consideradas, observando que a cada cantidad de una cualquiera de las dos clases corresponde en la otra una cantidad bien determinada, de manera que a cantidades iguales corresponden cantidades iguales, y a la suma de dos cantidades corresponde la suma de las cantidades correspondientes.

De esta doble propiedad se deduce, en cada caso, que a cualquier múltiplo o submúltiplo de una magnitud de una cualquiera de las dos clases corresponde en la otra el múltiplo o submúltiplo según el mismo número de la magnitud correspondiente y que a dos magnitudes desiguales corresponden magnitudes desiguales en el mismo sentido.

Son precisamente esas las circunstancias que permiten reconocer la proporcionalidad de las dos clases de magnitudes (directamente en el caso conmensurable, y después en base a la definición general de igualdad de razones (VI, n. 13) en el caso inconmensurable).

En fin, el fundamento común de las demostraciones de los teoremas varias veces recordados está en el siguiente *criterio general* de proporcionalidad entre dos clases de magnitudes:

Teor.: *Sean dadas dos clases de magnitudes, cada una de las cuales contenga con cada cantidad de ella todos los múltiplos y submúltiplos y con cada par de cantidades su suma y su diferencia. Se puede concluir que las dos clases son proporcionales si a cada cantidad de una cualquiera de ellas corresponde en la otra una determinada cantidad, de manera que:*

1) *A cantidades iguales corresponden cantidades iguales;*

2) *A la suma de dos cantidades tomadas arbitrariamente en una clase corresponda en la otra la suma de las cantidades correspondientes.*

8. Notemos que si se tienen dos clases de magnitudes proporcionales $A, B, C, \ldots\ldots$ y $A', B', C' \ldots\ldots$ (en las cuales se correspondan las cantidades designadas con la misma letra mayúscula, sencilla y acentuada) y es, por ej.,

$$A : B = C : D,$$

de las hipótesis

$$A' : B' = A : B,$$

$$C' : D' = C : D$$

y de la propiedad transitiva de la igualdad de razones (VI, n. 15), resulta

$$A' : B' = C' : D';$$

es decir, *si dos clases de magnitudes son proporcionales y cuatro cantidades de una de las dos clases están en proporción, también las cuatro cantidades correspondientes de la otra están en proporción.*

Si además las cantidades de las dos clases proporcionales son todas homogéneas, de las proporciones

$$A : B = A' : B', \quad A : C = A' : C', \quad B : C = B' : C' \ldots$$

se deducen, permutando los medios (VI, n. 23), las siguientes:

$$A : A' = B : B' = C : C' \ldots$$

Esto se puede expresar diciendo que, si dos clases de magnitudes, las unas homógeneas a las otras, son proporcionales, es constante la razón de las cantidades correspondientes. En el caso conmensurable las cantidades de una cualquiera de las dos clases se obtienen de las correspondientes, multiplicándolas todas por un mismo número.

Triángulos semejantes.

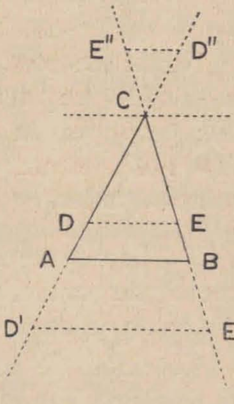
9. Como hemos hecho notar al principio, el teor. de Thales y su inverso dan lugar a muchas y notables consecuencias, de las cuales desarrollaremos en este parágrafo, las más importantes.

Más bien, todas estas consecuencias están regidas por el siguiente caso particular del teor. de Thales (y por su inverso), que se refiere al triángulo (y que, como ya dijimos, se remonta a la Escuela Pitagórica).

Teor. (de THALES relativo al triángulo y su inverso). *Si dado un triángulo, se traza una paralela a un lado, cada par de segmentos así determinados sobre uno de los otros dos lados* (o sobre su prolongación) es proporcional *al par de segmentos correspondientes interceptados sobre el otro lado.*

Es decir, si una paralela al lado AB del triángulo ABC corta a los lados AC y BC en D y E respectivamente (o a sus prolongaciones), se obtienen las proporciones:

$$AC : AD = BC : BE; \quad AC : DC = BC : EC;$$
$$AD : DC = BE : EC;$$



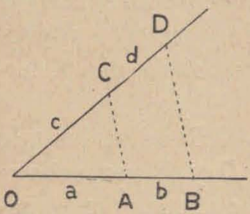
y, recíprocamente, si se toman los dos puntos D y E sobre los lados AC y BC (o sobre sus prolongaciones y de una misma parte respecto a C), de manera que se verifique una cualquiera de las tres proporciones indicadas, la DE resulta paralela a la AB; asi que, por la primera parte del teor., se obtienen también las otras dos proporciones.

Para ver cómo este teor. es un caso particular del de THALES basta considerar el haz de paralelas a la AB y las dos transversales AC y BC.

10. Apliquemos, en primer lugar, este teor. a resolver dos problemas:

PROBLEMA: *Construir el cuarto segmento proporcional a tres segmentos dados.*

Si a, b, c son estos segmentos, consideremos dos semirrectas (no opuestas) de un mismo origen O. Tomemos sobre la primera los dos segmentos consecutivos $OA = a$ y $AB = b$, sobre la segunda el segmento $OC = c$.



Unamos A con C, y tracemos por B la paralela a AC hasta cortar a la OC en D.

El segmento $d = CD$ es el cuarto proporcional a, b y c porque (n. prec.)

$$OA : AB = OC : CD \text{ o sea } \mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}.$$

Nota: La construcción se puede ejecutar de infinitos modos (según la elección de las dos semirrectas); pero por *la unicidad de la cuarta proporcional* (VI, n. 25), estamos seguros de obtener siempre segmentos iguales.

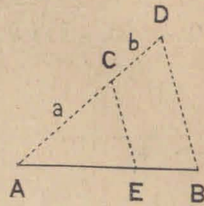
11. Como casos particulares de la construcción precedente, cuando sea $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ se tiene *la construcción del tercer segmento proporcional a dos segmentos dados.*

Notemos, de paso, que la misma construcción permite determinar *el cuarto proporcional a tres polígonos dados A, B y C.* Si transformados A, B y C en los tres rectángulos respectivamente equivalentes de prefijada altura $\mathbf{h}$ (V_2, n. 40) y son $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ las respectivas bases y es $\mathbf{d}$ el cuarto proporcional a $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, el rectángulo $\mathbf{r}$ ($\mathbf{d}$, $\mathbf{h}$) es el cuarto proporcional a A, B y C.

Análogamente para el *tercer polígono proporcional a dos polígonos dados A y B.*

12. Problema: *Dividir un segmento dado en partes proporcionales a dos segmentos dados.*

Sea dividir el segmento AB en dos partes proporcionales a dos segmentos dados **a** y **b**.



Trazada por A una semirrecta distinta de AB y de su opuesta, tómense sobre ella dos segmentos consecutivos AC = **a**, CD = **b**.

Nota: También aquí, aunque se pueda hacer la construcción de infinitos modos, se llega siempre al mismo punto E (VI, n. 27).

13. Con la misma construcción, dados tres polígonos A, B y C, se pueden determinar dos polígonos, que tengan por suma C y sean proporcionales a A y B. Transformados los tres polígonos en rectángulos de igual altura (cualquiera) h, basta dividir en el tercero la base en partes proporcionales a las bases de los dos primeros.

14. El teorema de Thales relativo al triángulo y su inverso conducen a establecer una relación entre triángulos (semejanza) que es más general que la relación de *igualdad* (superposición).

Para definir esta relación demostremos ante todo el teor. siguiente:

Teor.: *Si en dos triángulos (tomados los vértices en un determinado orden) los ángulos son ordenadamente iguales, los pares de lados opuestos a los ángulos están en proporción.*

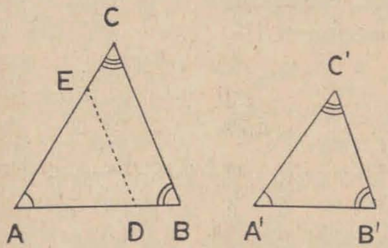
En los dos triángulos ABC, $A'B'C$ sea

$$\hat{A} = \hat{A'},\quad \hat{B} = \hat{B'},\quad \hat{C} = \hat{C'};$$

decimos que:

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'.$$

Si es $AB = A'B'$, los dos triángulos, por tener iguales un lado y los ángulos adyacentes, son iguales (II_1, n. 6), y entonces las razones



$$AB : A'B', \qquad AC : A'C',$$
$BC : B'C'$ son las tres iguales a la unidad.

Exceptuado este caso y supuesto, para fijar las ideas, $AB < A'B'$, tomemos sobre AB el segmento $AD = A'B'$, y tracemos desde D la paralela a BC hasta cortar en E a la AC.

Será entonces (I_1, n. 70) $\widehat{EDA} = \widehat{CBA}$, y como $\widehat{EDA} = \widehat{C'B'A'}$, los triángulos ADE y $A'B'C'$, tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes, son iguales (II_1, n. 6); luego será

$$(1) \qquad AD = A'B', \; AE = A'C'.$$

Por otra parte, la DE, por ser paralela a la BC, determina sobre los lados de ABC segmentos proporcionales (n. 9); entonces se obtiene la proporción:

$$AB : AD = AC : AE, \text{ o sea por las (1)}$$
$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

Análogamente se demuestra que

$$BC : B'C' = AB : A'B'; \; AC : A'C' = BC : B'C'.$$

15. En los triángulos ABC y $A'B'C'$ del teor. prec., si la razón de los lados correspondientes no es igual a 1, aparecen a nuestra intuición con superficies desiguales, pero de igual forma; se puede decir que uno es la copia reducida o aumentada del otro.

Esto se expresa diciendo que son *semejantes*. En términos precisos se da la siguiente:

Def.: *Dos triángulos se llaman semejantes si tienen ordenadamente iguales los ángulos y proporcionales los lados que comprenden ángulos iguales.*

Se llaman *correspondientes* los vértices de ángulos iguales y los lados que unen pares de vértices correspondientes (es decir, opuestos a ángulos iguales).

La semejanza comprende como caso particular a *la igualdad*, a la cual se reduce cuando la razón de los lados correspondientes es igual a 1.

Se tiene también la semejanza *directa* o *inversa* según que los ángulos correspondientes (iguales) tienen o no el mismo sentido (I_1, n. 83).

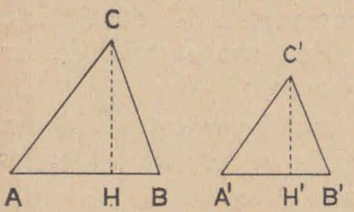
16. De la propiedad transitiva de la igualdad entre ángulos (I_1, n. 51) y de aquella entre razones (VI, n. 15) resulta que esta propiedad vale también para la semejanza entre triángulos, es decir:

Cor.: *Triángulos semejantes a un tercero son semejantes entre sí.*

17. Teniendo en cuenta la prec. def., el teor. del n. 14 lo podemos enunciar diciendo que: *Se puede afirmar que dos triángulos son semejantes si se sabe que tienen los ángulos ordenadamente iguales.*

Es este un *primer criterio de semejanza de triángulos.*

18. Cor.: *En dos triángulos semejantes las alturas correspondientes* (es decir, bajadas desde vértices correspondientes) *son proporcionales a los lados*.



Si, en efecto, en los triángulos semejantes, ABC y $A'B'C'$ se bajan las alturas CH y $C'H'$ de los vértices correspondientes C y C', uno, por lo menos, de los pares $\hat{A}$, $\hat{A}'$ y $\hat{B}$, $\hat{B}'$ estará constituído por ángulos agudos (II_1, n. 31).

Supuestos tales, para fijar las ideas, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{A}'$, los dos triángulos rectángulos AHC, $A'H'C'$ por tener iguales los ángulos agudos $\hat{A}$ y $\hat{A}'$, tienen iguales todos los ángulos (II_1, n. 31) y por lo tanto (n. prec.) son semejantes; de donde resulta:

$$CH : C'H' = AC : A'C'.$$

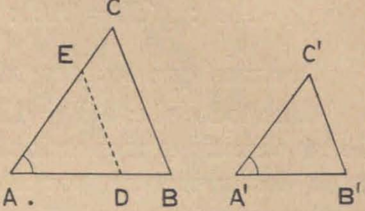
19. El inverso del teor. de THALES relativo al triángulo permite establecer otros dos *criterios de semejanza de triángulos*, que demostraremos en este número y en el siguiente.

Teor. *Se puede afirmar que dos triángulos son semejantes si se sabe que tienen un ángulo igual a un ángulo y proporcionales los lados que los forman.*

En los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ sea

$$B\hat{A}C = B'\hat{A}'C' \quad \text{y} \quad AB : A'B' = AC : A'C'.$$

Decimos que los dos triángulos son semejantes; y para demostrarlo bastará probar (n. 17) que ellos tienen iguales también los otros dos ángulos; es decir, que



$$\widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'},$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}.$$

Si $AB = A'B$, por la admitida proporción (VI, n. 17) resulta $AC = A'C'$, los dos triángulos, por el primer crit. de igualdad de triángulos (II_1, n. 1) son iguales y el teorema está demostrado.

Si $AB > A'B'$ entonces (VI, n. 17) será $AC > A'C'$. Tómese sobre AB el segmento $AD = A'B'$ y sobre AC el segmento $AE = A'C'$. Los triángulos ADE y $A'B'C'$, por tener iguales ordenadamente dos lados y el ángulo comprendido, son iguales (II_1, n. 1). Por otra parte, siendo $A'B' = AD$ y $A'C' = AE$, resulta, de la proporción admitida, que:

$$AB : AD = AC : AE;$$

por lo que la DE es paralela a la BC (n. 9). De aquí concluímos que los ángulos $\widehat{EDA}$, $\widehat{AED}$ son respectivamente iguales a los ángulos $\widehat{CBA}$ y $\widehat{ACB}$; por consiguiente los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen los ángulos ordenadamente iguales, luego (n. 17) son semejantes.

20. Teor.: *Se puede afirmar que dos triángulos son semejantes si se sabe que tienen sus lados ordenadamente proporcionales.*

En los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se verifican por hipótesis las proporciones

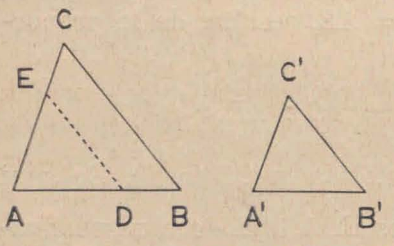
$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'.$$

Decimos que los dos triángulos son semejantes.

Ante todo, si es $AB = A'B'$, resulta también (VI, n. 17) de las admitidas proporciones que $BC = B'C'$, $CA = C'A'$; y los dos triángulos, por tener los lados ordenadamente iguales, son iguales (II_1, n. 11)

Para demostrar el teor. en todos los otros casos, bastará probar (n. 17) que se verifican las igualdades de ángulos $\hat{A} = \hat{A'}$, $\hat{B} = \hat{B'}$, $\hat{C} = \hat{C'}$; con este fin demostraremos que es posible construir un triángulo que tenga los ángulos ordenadamente iguales ya sea a los de ABC o a los de $A'B'C'$.

Supuesto, para fijar las ideas, $AB > A'B'$, y en consecuencia (VI, n. 17), $AC > A'C'$, tomemos el segmento $AD = A'B'$ sobre AB y el segmento $AE = A'C'$ sobre AC y unamos D con E. Siendo, por construcción



$$AD = A'B', \; AE = A'C',$$

y siendo por hipótesis $AB : A'B' = AC : A'C'$, tendremos también que:

$$AB : AD = AC : AE,$$

lo que nos dice que la DE resulta paralela a la BC (n. 9) y el triángulo ADE tiene los ángulos ordenadamente iguales a ABC, (I_1, n. 70).

Probemos ahora que ADE tiene también iguales los ángulos a los de $A'B'C'$; más aún que es igual a él. Obsérvese, en efecto, que ABC y ADE, por tener los ángulos iguales, tienen sus lados en proporción (n. 14), en particular es:

$$AB : AD = BC : DE.$$

De aquí, recordando que por hipótesis

$$AB : A'B' = BC : B'C'$$

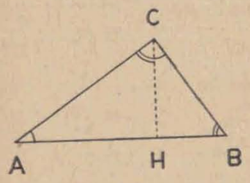
y que por construcción es $AD = A'B'$, se obtiene en virtud de la unicidad de la cuarta proporcional (VI, n. 25), $DE = B'C'$, y por consiguiente los dos triángulos ADE y $A'B'C'$, por tener sus lados ordenadamente iguales, son iguales.

Finalmente los dos triángulos ABC y $A'B'C'$, por tener sus ángulos ordenadamente iguales a los de ADE, tienen también iguales sus ángulos entre sí, y son, por lo tanto, semejantes (n. 17).

Aplicaremos ahora los prec. criterios de semejanza de triángulos para demostrar dos teor. notables referentes a los triángulos rectángulos, el uno inverso del otro, que nos conducirán a la construcción del segmento *medio proporcional* entre dos segmentos dados (VI, n. 16).

21. Teor.: *En un triángulo rectángulo la altura (bajada desde el vértice del ángulo recto) es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa; y cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.*

Dado el triángulo ABC rectángulo en C y bajada la altura CH relativa a la hipotenusa, los dos triángulos rectángulos ACH y CBH, tienen, cada uno, un ángulo agudo común con el triángulo rectángulo dado; luego tienen los ángulos ordenadamente iguales a los de ABC y por lo tanto iguales entre sí; es decir, por el n. 17, los triángulos ACH y CBH son semejantes a ABC, y en consecuencia (n. 16) semejantes entre sí.



Por ser ACH y CBH semejantes (correspondiendo a los vértices A, C y H del primero ordenadamente los vértices C, B y H del segundo) resulta que:

$$AH : CH = CH : BH;$$

es decir, la altura CH es media proporcional entre los segmentos AH y HB de la hipotenusa.

Del mismo modo comparando los triángulos semejantes ACH y ABC (en los cuales a los vértices A, C y H del primero corresponden ordenadamente los vértices A, B y C del segundo) se encuentra

$$AH : AC = AC : AB,$$

es decir, el cateto AC es medio proporcional entre la hipotenusa AB y su proyección AH sobre ella.

También de la comparación de los triángulos semejantes CBH y ABC resulta

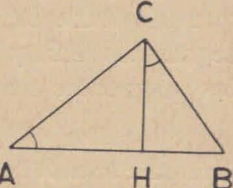
$$HB : CB = CB : AB.$$

22. Teor.: *Si en un triángulo una de las alturas divide interiormente al lado correspondiente en dos partes entre las cuales él sea medio proporcional, el triángulo es rectángulo; y análogamente, si la proyección de un lado sobre otro es interior a éste y el primer lado es medio proporcional entre esta proyección y el lado al cual ella pertenece, el triángulo es rectángulo.*

En el triángulo ABC, bajada desde C la altura CH sobre AB, sea H interior a AB y sea también

$$AH : CH = CH : HB.$$

Los dos triángulos AHC y CHB, tienen, por construcción, los ángulos $\widehat{AHC}$ y $\widehat{CHB}$ iguales por rectos, y dor hipótesis proporcionales los lados que los forman. Se deduce (n. 20) que los dos triángulos son semejantes, y entonces $\widehat{BCH} = \widehat{HAC}$. Pero como el triángulo AHC es rectán gulo en $\widehat{H}$, y HCA es el complemento de $\widehat{HAC}$ (II_1, n. 31), lo es también de $\widehat{BCH}$. De aqui se concluye que el ángulo $\widehat{BCA} = \widehat{BCH} + \widehat{HCA}$ es recto.



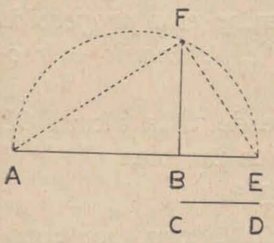
Sea, en segundo lugar,

$$AH : AC = AC : AB.$$

Los dos triángulos ACH y ABC, de los cuales el primero es rectángulo en H por construcción, tienen el ángulo $\widehat{A}$ común y los lados adyacentes proporcionales. Se deduce (n.° 19) que los dos triágulos son semejantes, luego el ángulo $\widehat{ACB}$ es recto.

23. Probl.: *Construir el segmento medio proporcional entre dos segmentos dados.*

Dados los dos segmentos AB y CD, tómese sobre la prolongación de AB el segmento $BE = CD$. Descrita sobre AE como diámetro una semicircunferencia, levántese la perpendicular a BF en su punto B; ella corta a la semicircunferencia en el punto F.

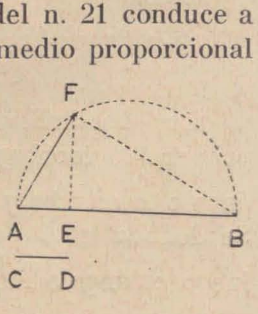


Decimos que BF es medio proporcional entre AB y BE, es decir, entre AB y CD.

Uniendo, en efecto, F con A y E, el triángulo AEF es rectángulo en F (IV_2, n. 33), de donde resulta (n. 21) que la altura BF es media proporcional entre los dos segmentos AB y BE de la hipotenusa, es decir, entre los segmentos dados AB y CD.

Nota. — El teor. del n. 22 (inverso del teor. n. 21) permite demostrar *la unicidad del segmento medio proporcional entre dos segmentos dados.* Se puede desarrollar tal demostración a título de ejercicio. Aquí nos limitaremos a recordar que en él la unicidad de la media proporcional ha sido demostrada para toda especie de magnitud en el n. 28 del Cap. VI.

24. La segunda parte del teor. del n. 21 conduce a otra construcción del segmento AF medio proporcional entre dos segmentos dados AB y CD, de la cual nos limitamos aquí a dar la figura (donde $AE = CD$).

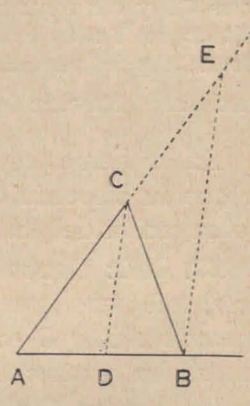


25. Observemos finalmente que una u otra de las dos construcciones precedentes permiten determinar el polígono de área media proporcional entre dos polígonos dados A y B. Basta transformar A y B en los rectángulos equivalentes de dada altura h (V_2, n. 40); y una vez construído el segmento medio proporcional entre las bases, considerar el rectángulo de altura h, que tiene como base esta media proporcional.

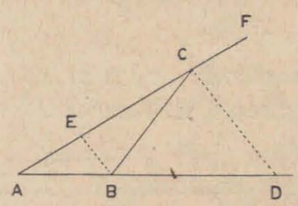
Grupo armónico de puntos

26. Proponemos, como ejercicio, la demostración (véase n. 9) de los siguientes

Teors. 1) *La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos, que son proporcionales a los otros dos lados adyacentes; e inversamente, si un lado de un triángulo está dividido en dos partes proporcionales a los otros dos lados respectivamente adyacentes, la recta que pasa por el punto de división del lado y por el vértice del ángulo opuesto es la bisectriz de este ángulo.*



2) *Si en un triángulo la bisectriz de un ángulo exterior corta a la rolongación del lado opuesto, las distancias de esta intersección a los extremos del lado mencionado son proporcionales a los otros dos lados que pasan por ellos; e inversamente, dados un triángulo y sobre la prolongación de uno de sus lados un punto cuyas distancias a los dos vértices que se encuentran sobre él sean proporcionales a los dos lados que pasan por ellos, la recta*



que une este punto con el vértice opuesto es la bisectriz del relativo ángulo exterior del triángulo.

Nota: Las figuras adjuntan indican claramente el proceso de la demostración. Trazadas en ambos casos las bisectrices CD del ángulo $\widehat{ACB}$ o de $\widehat{BCF}$ (segunda fig.) y las correspondientes paralelas por B hasta cortar en E al lado AC o a su prolongación el triángulo BCE resulta isósceles sobre la base BE. Aplicando el teor. de Thales a las paralelas CD y EB cortadas por las transversales AB y AC, resultan los dos teoremas directos.

Para los respectivos teoremas recíprocos, tomando $CE = BC$, se tiene, en ambos casos: $AD : DB = AC : BC = AC : CE$. Las rectas CD y EB resultan pues paralelas en virtud del recíproco del teor. de Thales (n. 2). Del hecho de ser isósceles eltriángulo BCE y del paralelismo de CD y EB resulta que CD es, en ambos casos, bisectriz del ángulo $\widehat{ACB}$ o $\widehat{BCF}$ respectivamente.

En la demostración del teor. 2) examínese el caso en que la bisectriz del ángulo exterior no corte a la prolongación del lado opuesto.

27. Def.: *Cuatro puntos A, B, C y D de una misma recta, tales que uno de ellos (C* por ej.) *sea interior al segmento AB, y D exterior, se llaman* **armónicos** *si son iguales las razones $AC : BC$* y *$AD : BD$.*

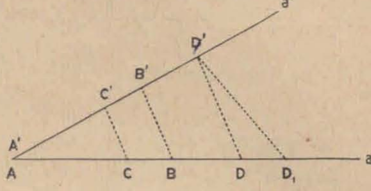
Los puntos C y D se llaman *conjugados armónicos* de A y B. Cada uno de los puntos (C o D) se llama *conjugado armónico* del otro (D o C) con respecto al par A, B.

Resulta inmediatamente el siguiente

28. Teor.: *El conjugado armónico D de un punto C (distinto del punto medio del segmento AB) respecto a un par A, B es único.*

Es decir, que dados tres puntos alineados A, B, C, si existe sobre la misma recta un punto D, tal que las razones $AC : BC$ y $AD : BD$ sean iguales (siempre que C no sea el punto medio del segmento AB) este punto es único.

Supongamos que sobre la recta $a \equiv AB$ hubiera dos puntos D y D_1 tales que



$$AC : BC = AD : BD \qquad AC : BC = AD_1 : BD_1$$

Resulta:

$$AD : BD = AD_1 : BD_1$$

Tracemos por el punto A otra recta a' distinta de la a y tomenos sobre ella un punto C'. Las paralelas a CC' por los puntos B y D determinan sobre a' los puntos B' y D' respectivamente. En virtud del teorema de THALES, se tiene

$$AC : BC = A'C' : B'C' \ ; \ AD : BD = A'D' : B'D'$$

y en virtud de las relaciones precedentes resultaría

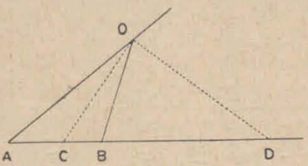
$$A'D' : B'D' = AD_1 : BD_1$$

lo, que por el teor. recíproco de THALES, nos dice que la recta $D'D_1$ sería paralela a BB' y por lo tanto a la recta $D'D$ lo cual es absurdo porque ellas tienen el punto D' común.

Demostrada la unicidad del punto D, veamos cómo se construye efectivamente este punto. Para ello basta recordar los dos ejercicios propuestos en el (n. 26).

De ellos resulta que:

a) Dado ùn triángulo cualquiera AOB, si C es el punto que determina sobre el lado AB la bisectriz del ángulo opuesto $\widehat{O}$, y si la bisectriz del ángulo exterior corta a la prolongación de AB en un punto D, los cuatro segmentos AC, BC, AD y BD son proporcionales, pues



$$AC : BC = AO : BO$$

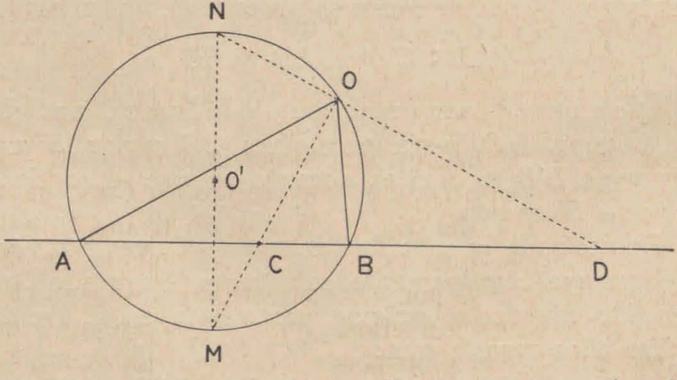
$$AD : BD = AO : BO,$$

luego:

$$AC : BC = AD : BD.$$

b) Recíprocamente, si cuatro puntos A, B, C y D de una misma recta son tales que C es interior a AB y D exterior (no siendo C el punto medio de AB) y los segmentos AC, BC, AD y BD son proporcionales (es decir, se verifica la proporción anterior), existe un triángulo de vértices A y B, y tal que las bisectrices del ángulo interior y del exterior opuesto a AB pasan por C y D respectivamente.

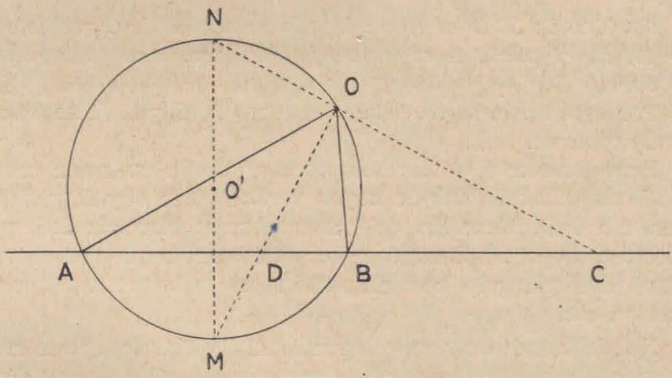
En efecto, para obtener un triángulo tal que la bisectriz del ángulo opuesto al lado AB pase por C, basta



construir una circunferencia O' que pase por A y B y trazar por el punto medio M de cualquiera de los dos arcos $\widehat{AB}$, la recta MC que corta a la circunferencia O' en un punto O. El triángulo AOB tiene la bisectriz del ángulo $\hat{O}$ que pasa por C. La otra bisectriz del ángulo exterior en $\hat{O}$ de AOB pasa necesariamente por D en virtud del teorema precedente.

29. Probl.: *Construir el conjugado armónico de un punto C respecto de otros dos puntos dados A y B* (alineados con C).

Si C es interior a AB bastará construir un triángulo sobre la base AB, tal que la bisectriz del ángulo opuesto al lado AB pase por C fig. precedente. Si C no es el



punto medio de AB, la otra bisectriz cortará a la recta AB en un punto D, que es el pedido. Si C es exterior a AB se obtiene del mismo modo un triángulo sobre la base AB, tal que la bisectriz del ángulo exterior opuesto a AB pase por C. La otra dará sobre AB el punto D pedido. Para ello tomemos una circunferencia cualquiera Q' que pase por A y B. Tracemos desde O' la recta perpendicular a AB, que cortará a la circunferencia en dos puntos M y N.

Uniendo cualquiera de los puntos M o N con C hasta cortar en O a la circunferencia la recta NO o MO (según que se haya tomado M o N) corta a la AB en un punto D, este punto es el pedido.

En efecto, en el triángulo AOB, OC y OD son las bisectrices del ángulo en $\hat{O}$ interior y exterior respectivamente.

Nota: Si C es el punto medio del segmento AB, las construcciones precedentes caen en defecto, pero la consideración hecha en (a) prueba que el punto D *no existe*, porque la recta OD resulta paralela a la AB.

Demuestre el lector como ejercicio el siguiente

30. Teor.: *Si D es el conjugado armónico de C respecto del par A, B, el punto A es el conjugado armónico de B respecto del par C, D.*

Por esta razón se dice, que los pares A, B y C, D, se *separan armónicamente.*

Para demostrar el teorema, constrúyase de cualquier manera (n. 28) un triángulo, dos de cuyos vértices sean C y D, y si B es interior a $C\ D$, tómeselo de manera que la bisectriz del ángulo opuesto pase por B. Bastará probar que la recta que une el tercer vértice del triángulo con el punto A es la bisectriz del ángulo exterior, etc.

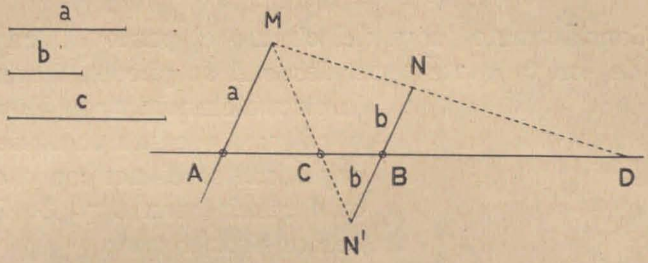
Nota: Cuando dos pares de puntos A, B y C, D se separan armónicamente, suele decirse también que *el segmento $A\ B$ está dividido armónicamente interior y exteriormente por los puntos C* y *D.*

Según esto, *dado un segmento cualquiera $A\ B$, existen dos puntos de la recta que lo contiene uno interior y otro exterior que lo dividen armónicamente, en una razón prefijada distinta de la unidad.*

Explicaremos la obtención de tales puntos resolviendo el siguiente

31. Probl.: *Dividir un segmento* c *interior y exteriormente, en partes proporcionales a dos segmentos dados* a *y* b *desiguales entre sí.*

Tomemos sobre una recta cualquiera un segmento $A\ B$ igual al segmento dado **c**. Por los extremos A y B tracemos dos rectas $A\ M$ y $B\ N$ paralelas entre sí. Tomemos finalmente sobre la primera el segmento $A\ M = \mathbf{a}$ y sobre la segunda los segmentos opuestos $BN = BN' = \mathbf{b}$. Los puntos C y D en que las rectas MN' y MN cortan a la AB resuelven el problema. De los trián-



gulos semejantes CMA y BCN' resulta $AC : BC = \mathbf{a} : \mathbf{b}$, y análogamente de la semejanza de los triángulos AMD y BND se obtiene

$$AD : BD = \mathbf{a} : \mathbf{b},$$

de donde

$$AC : BC = AD : BD.$$

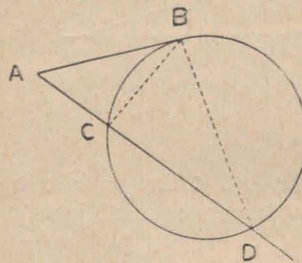
Los puntos C y D son únicos, como se vió en el n. 28.

Por esto también suele decirse que el segmento AB *ha sido dividido en dos segmentos aditivos* AC y CB proporcionales a **a** y **b**, y *en dos segmentos sustractivos* AD y BD, también proporcionales a **a** y **b** por ser AB igual a su respectiva suma o diferencia.

32. Damos una ulterior aplicación de los teors. sobre los triángulos semejantes, demostrando el teor. siguiente que será muy útil más adelante.

Teor. *Trazadas desde un punto exterior a una circunferencia una tangente y una secante, el segmento de* *tangente comprendido entre este punto y el punto de contacto es medio proporcional entre los dos segmentos de secantes comprendidos entre aquel punto y sus dos intersecciones con la circunferencia,* o, como suele decirse brevemente, *la tangente es media proporcional entre la secante total y su parte exterior.*

Considerando fuera del círculo el punto A, sea AB una de las tangentes que desde A se pueden trazar a la circunferencia y considérese por A una secante cualquiera, cuyas intersecciones con la circunferencia sean C y D. Debemos probar que:



$$AC : AB = AB : AD.$$

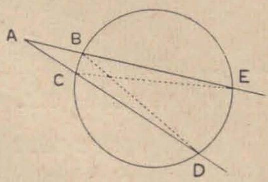
Uniendo B con C y D, los triángulos ABC y ADB (considerados sus vértices en el orden escrito) tienen los ángulos ordenadamente iguales, porque el ángulo en A es común y los ángulos $A\hat{B}C$ y $A\hat{D}B$ son iguales, por ser semi-inscriptos e inscriptos respectivamente que abarcan el mismo arco $\overset{\frown}{BC}$ (IV$_2$, n. 34).

Los dos triángulos son, pues, semejantes (n. 17), y correspondiéndose los vértices A y A, B y C, C y B se verifica precisamente la proporción:

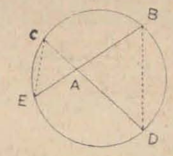
$$AC : AB = AB : AD.$$

33. Otras análogas consecuencias de las propiedades de los triángulos semejantes están dadas por los dos teoremas siguientes, de los cuales proponemos la demostración a título de ejercicio:

Teor.: a) *Trazadas por un mismo punto exterior dos secantes a una circunferencia, los segmentos de ellas comprendidos entre este punto y sus intersecciones con la circunferencia están en proporción* (siendo respectivamente extremos y medios dos segmentos pertenecientes a una misma secante).



b) *Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, sus segmentos están en proporción* (siendo extremos y medios respectivamente los segmentos de una misma cuerda).



Para la demostración basta observar en ambos casos que los triángulos ABD y ACE tienen sus tres ángulos iguales, y en consecuencia (n. 14) sus lados homólogos son proporcionales.

34. La unicidad de la cuarta proporcional permite invertir, sin dificultad, los teor. de los n$^{os.}$ 32 y 33; es decir, son ciertos los siguientes:

Teor.: a) *Considerados sobre una recta, a partir de un punto A y de la misma parte de él, dos segmentos AC y AD y sobre otra recta por A el segmento AB medio proporcional entre AC y AD, la circunferencia que pasa por B, C y D es tangente en B a la recta AB* (cfr. la fig. del n. 32).

b) *Si sobre una recta, a partir de uno de sus puntos A y de la misma parte respecto a él, se toman dos* *segmentos AB y AE, y sobre otra recta por A y también de la misma parte respecto a A se consideran dos segmentos AC y AD, de manera que sea*

$$AB : AC = AD : AE,$$

los cuatro puntos B, C, D y E pertenecen a una misma circunferencia (cfr. la primera fig. del n. prec.)

c) *Si sobre una recta, a partir de uno de sus puntos A y en partes opuestas respecto a él, se consideran dos segmentos AB y AE y sobre otra recta por A y siempre en partes opuestas respecto a A se consideran los dos segmentos AC y AD de manera que sea:*

$$AB : AC = AD : AE,$$

los cuatro puntos B, C, D y E pertenecen a una misma circunferencia (cfr. la segunda fig. del n. prec.).

EJERCICIOS

1) Si tres rectas que pasan por un mismo punto están cortadas por dos paralelas, se obtienen, sobre éstas, dos pares de segmentos adyacentes que están en proporción.

2) Nótense otros dos pares de segmentos proporcionales a los cuales se da origen con la construcción del ejercicio precedente.

3) Cada mediana de un triángulo es el lugar de los puntos medios de los segmentos paralelos al lado sobre el cual cae la mediana, interceptados por los otros dos lados.

4) Los puntos medios de las bases de un trapecio, el punto de encuentro de las diagonales y el de los lados no paralelos están en linea recta.

5) Si sobre dos rectas paralelas se tienen dos ternas de puntos consecutivos en el orden A, B, C y A', B', C', tales que

$$AB : BC = A'B' : B'C',$$

las tres rectas AA', BB', CC', pasan por un mismo punto o son paralelas (inverso del ej. 1).

6) Inviértase análogamente la proposición del ejercicio 2.

7) TEOR. de PAPPUS. — Si sobre dos rectas se dan dos ternas de puntos A, B, C y A' B', C' y las rectas AB' y CB' son paralelas respectivamente a las $A'B$, $C'B$, también las AC', $A'C$ son paralelas. (Téngase en cuenta el teor. de THALES y el del n. prec).

8) Si en dos triángulos ABC, $A'B'C'$ los ángulos $\hat{B}$, $\hat{B'}$ son iguales y los ángulos $\hat{C}$, $\hat{C'}$ son suplementarios, se tiene

$$AB : A'B' = AC : A'C'.$$

(Llévese el triángulo $A'B'C'$ de manera que su vértice B' caiga sobre el vértice B de ABC y los lados $B'A'$, $B'C'$ sobre BA, BC respectivamente, trácese por A la paralela a $A'C'$ hasta cortar en H a la BC, etc).

9) Determinar dos puntos de manera que dividan interior y exteriormente a un segmento dado en partes proporcionales a dos segmentos desiguales dados (o sea en una razón dada distinta de 1), (n. 31 del Cap. VII).

10) Si dos puntos C y D dividen al segmento AB, el uno interiormente y el otro exteriormente, en una misma razón, los puntos A y B dividen al segmento CD, el uno interiormente, el otro exteriormente, en una misma razón.
Los dos pares de puntos A, B y C, D *se dividen armónicamente*, o sea, los cuatro puntos A, B, C, D forman un grupo o cuaterna armónica.

11) Si C y D dividen armónicamente al segmento AB, desde un punto M cualquiera cuyas distancias a A y B sean proporcionales a AC y BC, se ve CD bajo un ángulo recto.

12) Lugar de los puntos cuyas distancias a dos puntos dados son proporcionales a dos segmentos dados (desiguales entre sí), (ej. prec.). Se obtiene la llamada *circunferencia* de APOLONIO (relativa a los dos puntos dados y a la razón dada).

13) Construir un triángulo, dadas la base, la mediana relativa a ésta y dos segmentos proporcionales a los otros lados (ej. prec.).

14) Construir un triángulo equivalente a un triángulo asignado, dadas la base y el punto de encuentro de ésta con la bisectriz del ángulo opuesto (n. 31 VII, ej. 12).

15) Construir un triángulo dadas la base y el ángulo opuesto, sabiendo que los dos lados que lo forman deben ser el uno doble del otro (ej. 12).

16) En el plano de un triángulo construir los puntos cuyas distancias a los tres vértices sean proporcionales a tres segmentos dados (ej. 12).

17) Lugar de los puntos cuyas distancias a dos círculos dados sean proporcionales a sus radios. (Considérense las distancias de un punto del lugar a los dos centros y recuérdese el ej. 12).

18) Lugar de los puntos desde los cuales se ven dos círculos dados bajo un mismo ángulo. (El ángulo bajo el cual se vé un círculo desde un punto exterior es el de las dos tangentes trazadas desde el punto al círculo). Considérese para cada círculo el triángulo que tiene por vértices un punto M del lugar en cuestión, el punto de contacto de una tangente por él y el centro. Las distancias del punto M a los dos centros son proporcionales, etc. (ej. 12).

19) Construir un triángulo conociendo dos ángulos y una altura. (Empiécese por construir un triángulo semejante al pedido).

20) En dos triángulos semejantes las medianas y las bisectrices correspondientes son proporcionales a los lados homólogos.

21) Dos triángulos que tienen sus tres alturas proporcionales son semejantes.

22) Dos triángulos que tienen las tres medianas proporcionales son semejantes.

23) Si cuatro segmentos $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, son tales que:

$$\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c}\ , \text{ y } \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}$$

y los tres primeros $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ son lados de un triángulo, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$ son también lados de un triángulo, y los dos triángulos que así resultan tienen cinco elementos (lados y ángulos) iguales sin ser iguales.

24) Si dos triángulos desiguales ABC, $A'B'C'$ están situados de manera que los lados AB, BC, AC, del primero son ordenadamente paralelos a los lados $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ del segundo, las rectas AA', BB', CC' de los vértices homólogos pasan por un mismo punto. (*Teor. de los triángulos homotéticos*).

25) Si dos triángulos desiguales ABC, $A'B'C'$ son tales que las rectas AA', BB', CC', de los vértices homólogos pasan por un mismo punto y los dos lados AB, AC del primero son paralelos a los dos lados $A'B'$, $B'C'$ del segundo, también el lado CA es paralelo al lado $C'A'$. (Por absurdo y teniendo en cuenta el ej. prec.).

26) *Con la regla solamente y aplicando los dos ej. prec.*

a) Trazar por un punto dado la paralela a dos rectas dadas, paralelas entre sí.

b) Dado en el plano un paralelogramo, trazar por un punto la paralela a cualquier recta dada.

27) Si en un triángulo rectángulo se inscribe un cuadrado (con un lado sobre la hipotenusa) la hipotenusa queda dividida en tres partes, que forman una proporción continua.

28) Construir una circunferencia que pase por dos puntos dados A, B, y sea tangente a una recta c. (Si la AB corta a la c en S, y X es el punto de contacto de la circunferencia buscada con c, el segmento SX respecto a SA, SB, es, etc.

29) Construir una circunferencia que pase por un punto dado C y sea tangente a dos rectas dadas a, b. (Si c es la bisectriz del ángulo ab (o de la faja ab) y C_1 es el simétrico de C con respecto a c, la circunferencia pasa también por C_1, de donde refiriéndose al ej. prec., etc.).

§ 5. APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS. — POLÍGONOS SEMEJANTES

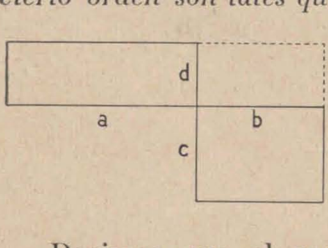
Proporcionalidad de segmentos y equivalencia de rectángulos. — Potencia de un punto con respecto a una circunferencia. — Pentágono, decágono y pentadecágono regulares. — Sección áurea de un segmento o división de un segmento en media y extrema razón. — Polígonos semejantes. — Confección de planos. — Escalas. — Ejercicios.

Un segundo grupo de aplicaciones de la teoría de las proporciones se obtiene del teor. fundamental del n. 4 sobre la proporcionalidad de los paralelogramos de igual altura.

Este teor. y su inverso (n. 5) conducen, en el caso de los rectángulos, a establecer una importante relación entre la teoría de las proporciones de segmentos y la de la equivalencia entre polígonos.

35. Teor.: *Si cuatro segmentos están en proporción, el rectángulo de los extremos es equivalente al de los medios.*

Reciprocamente, *si cuatro segmentos tomados en un cierto orden son tales que el rectángulo de los extremos es equivalente al de los medios, los cuatro segmentos están en proporción.*



Sean **a, b, c** y **d** cuatro segmentos tales que:

$$a : b = c : d.$$

Decimos que el rectángulo **r** (**a, d**) de **a** y **d** es equivalente al rectángulo **r** (**b, c**) de **b** y **c**.

Obtenido el rectángulo **r** (**a**, **d**) de los dos segmentos **a** y **d**, constrúyase en el ángulo opuesto por el vértice a uno de sus ángulos, el rectángulo de los segmentos **b** y **c** tomando el segmento **b** en la prolongación de **a**. Completado el rectángulo **r** (**b**, **d**) de los dos segmentos **b** y **d** tendremos (n. 4)

$$\mathbf{r}\ (\mathbf{a}, \mathbf{d}) : \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{d}) = \mathbf{a} : \mathbf{b},$$

$$\mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) : \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{d}) = \mathbf{c} : \mathbf{d}.$$

De aquí y de la proporcionalidad de **a**, **b** y **c**, **d** resulta, por la propiedad transitiva de la igualdad de razones (VI, n. 15),

$$\mathbf{r}\ (\mathbf{a}, \mathbf{d}) : \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{d}) = \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) : \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{d});$$

de donde, se concluye que (VI, n. 17) los dos rectángulos **r** (**a**, **d**) y **r** (**b**, **c**) son equivalentes.

Recíprocamente supongamos que, dados los cuatro segmentos **a**, **b**, **c** y **d**, los dos rectángulos **r** (**a**, **d**) y **r** (**b**, **c**) de los extremos y de los medios sean equivalentes. Decimos que los cuatro segmentos **a**, **b**, **c** y **d** están en proporción.

Refiriéndonos a la figura anterior, tendremos (n. 4)

$$\mathbf{r}\ (\mathbf{a}, \mathbf{d}) : \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{d}) = \mathbf{a} : \mathbf{b},$$

$$\mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) : \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{d}) = \mathbf{c} : \mathbf{d}.$$

Pero, por hipótesis, **r** (**a**, **d**) y **r** (**b**, **c**) son equivalentes, de donde será (VI, n. 15)

$$\mathbf{r},\ (\mathbf{a}, \mathbf{d}) : \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{d}) = \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) : \mathbf{r}\ (\mathbf{b}, \mathbf{d}).$$

De aquí y de las proporciones precedentes se deduce (VI, n. 15) que

$$a : b = c : d.$$

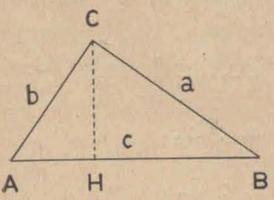
36. Como caso particular de este teor. se tiene que: *Si un segmento es medio proporcional entre otros dos, el cuadrado del primero es equivalente al rectángulo de los otros dos.*

Recíprocamente, si tres segmentos son tales que el cuadrado del primero es equivalente al rectángulo de los otros dos, el primero es medio proporcional entre estos últimos.

37. Resulta de aquí que el teor. del n. 21 se reduce al teor. del n. 16 del Cap. V_2. Por eso la teoría de las proporciones ofrece una fácil demostración del teor. de Pitágoras;

Teor.: *El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados de sus catetos.*

Hemos demostrado, n. 21, que en todo triángulo rectángulo, cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. Si ABC es el triángulo rectángulo en C y AH y HB las proyecciones de los catetos AC y BC respectivamente sobre AB, se tiene:



$$AH : AC = AC : AB \quad \text{y} \quad HB : CB = CB : AB$$

y en virtud del n. 36:

$$c\,(AC) = r\,(AB, AH), \quad c\,(CB) = r\,(HB, AB)$$

sumando

$$c\ (AC) + c\ (CB) = r\ (AB,\ AH) + r\ (AB,\ HB),$$

y como (V_2, n. 12) es

$$r\ (AB,\ AH) + r\ (AB,\ HB) = r\ (AB,\ AH + HB)$$

y por ser además $AH + HB = AB$ se tiene

$$c\ (AC) + c\ (CB) = r\ (AB,\ AB),$$

o sea

$$c\ (AC) + c\ (CB) = c\ (AB).$$

Del mismo modo, en base a los teoremas del número prec., el teor. del n. 32 se puede enunciar diciendo que: *Trazadas por un punto exterior a una circunferencia una tangente y una secante, el cuadrado de la tangente es equivalente al rectángulo de la secante total y su parte exterior.*

Dejamos que el lector enuncie los teoremas que de manera análoga se deducen de los teors. *a* y *b* del número 33.

38. NOTA: En el libro segundo (V_2 n. 43) hemos dicho que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la longitud de su base por la de su altura. En particular el área de un cuadrado, es igual al cuadrado de la longitud de su lado. En base a esto se puede definir el *producto de dos segmentos* **a** *y* **b** *como la superficie del rectángulo por ellos contenido y el cuadrado de un segmento como la del cuadrado construído sobre él.* El producto de dos segmentos **a** y **b** y el cuadrado de **a** se indican respectivamente con

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \text{o simplemente} \quad \mathbf{ab} \quad \text{y con} \quad \mathbf{a}^2.$$

En base a las propiedades estudiadas en (V_2 n. 6) resulta que el producto de dos segmentos tiene la propiedad *uniforme,* y la *conmutativa* y *distributiva* respecto de la suma y de la diferencia.

El teorema de PITÁGORAS se puede escribir entonces brevemente

$$c^2 = a^2 + b^2$$

indicando con c la hipotenusa y con a y b los catetos.

El teorema del n. 35 adquiere la forma siguiente:

Si cuatro segmentos a, b, c *y* d *son proporcionales, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.*

Siendo $a : b = c : d$, sabemos (n. 35) que

$$r\,(a, d) = r\,(b, c)\,;$$

luego:

$$ad = bc\,.$$

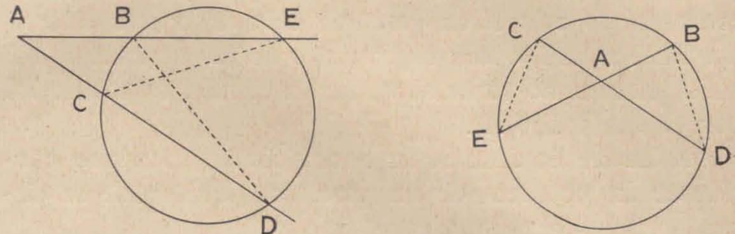
En cuanto *al cuadrado de la suma de dos segmentos y al cuadrado de la diferencia* han sido explicados en el segundo libro Cap. V, n. 7. Haga el lector, como ejercicio, el producto de la suma por la diferencia de dos segmentos.

Potencia de un punto con respecto a una circunferencia

Hemos visto, n. 33, que si desde un punto A, exterior a una circunferencia, se trazan dos secantes, los segmentos de éstas comprendidos entre el punto A y las intersecciones con la circunferencia, son proporcionales, y también que si dos cuerdas de una circunferencia se cortan en un punto A, sus segmentos son proporcionales.

En ambos casos se tiene:

$$AB : AC = AD : AE.$$



Es decir, n. 35, que

$$r.\ (AB,\ AE) = r.\ (AC,\ AD),$$

o de acuerdo con nuestra definición de producto de dos segmentos:

$$AB\ .\ AE = AC\ .\ AD.$$

Es decir, que se verifica el siguiente

39. Teor.: *Si desde un punto del plano de una circunferencia se trazan dos o más secantes a ella, los productos de los segmentos determinados por este punto y las intersecciones de cada secante con la circunferencia son todos iguales entre sí.*

También hemos visto, n. 32, que si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan una secante y una tangente, ésta es media proporcional entre los segmentos determinados por el punto y los de la secante con la circunferencia. En este caso vale también el teorema análogo.

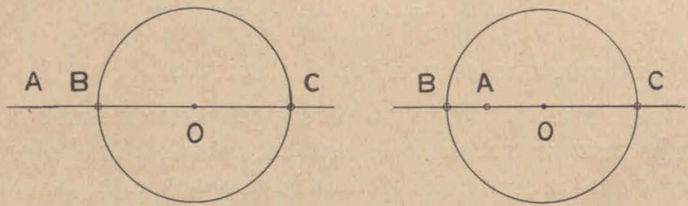
40. Def.: *Dada una circunferencia y un punto A de su plano, trácese por A una recta que corte a la circunferencia en dos puntos B y C* (cuerda o secante según que A sea interior o exterior). *Llámase potencia de A, con respecto a la circunferencia, a la superficie del rectángulo AB, AC, o sea al producto de los segmentos AB* y AC (el cual no varía al variar la cuerda o secante BC por el punto fijo A).

A fin de no introducir restricciones conviene considerar la potencia de un punto cualquiera de la circunferencia como una *superficie nula.*

Resultan, pues, los

41. Cor.: *La potencia de un punto exterior a la circunferencia está dada por el cuadrado de la tangente trazada desde el punto a la circunferencia.*

42. Cor.: *La potencia de un punto es igual a la diferencia de los cuadrados de la distancia del punto considerado al centro de la circunferencia y del radio de ésta.*



Puesto que la potencia p de un punto A es igual, cualquiera que sea la secante, tracemos por A el diámetro que corta a la circunferencia en B y C. Se tendrá en la primera y segunda figura respectivamente, según que A sea exterior o interior a la circunferencia:

$$p = AB \, . \, AC = (AO - BO)\,(AO + OC)$$

$$p = AB \, . \, AC = (BO - AO)\,(AO + OC).$$

Si llamamos d a la distancia del punto A al centro O y r al radio de la circunferencia, resulta para un punto exterior ($d > r$)

$$p = (d - r)\,(d + r) = d^2 - r^2$$

para un punto interior ($d < r$)

$$p = (r - d)\,(r + d) = r^2 - d^2.$$

Es, en cambio, *nula* para un punto de la misma circunferencia.

Observación: Si el punto es exterior, los segmentos ordenados AB y AC de origen A tienen el mismo sentido; si es interior, tienen sentidos opuestos. Por analogía con el producto de números, se ha convenido en atribuir a la potencia de un punto exterior el signo *positivo* y a la de un punto interior el signo *negativo*. Con este convenio vale la única fórmula

$$p = d^2 - r^2$$

cualesquiera que sean los valores de d y r.

43. Dadas dos circunferencias en un mismo plano, ocurre inmediatamente preguntarse si hay puntos del plano para los cuales ambas circunferencias tienen *igual potencia.*

Si r y r' son sus respectivos radios y se indican con d y d' las distancias de cada uno de tales puntos a los correspondientes centros O y O', debe tenerse, n. prec.:

$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2$$

de donde

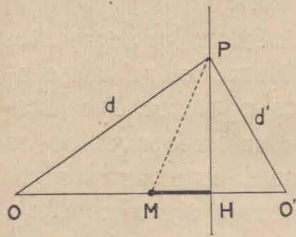
$$d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2 \qquad (1)$$

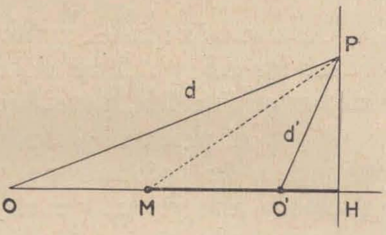
a) Si las dos circunferencias son concéntricas y tienen radios distintos ($r \neq r'$), siendo, en ese caso $d' = d$ por ser O y O'

coincidentes, debería ser también $r' = r$, lo cual es contrario a la hipótesis; no existen pues tales puntos para el caso de dos circunferencias concéntricas y distintas.

b) Si las dos circunferencias no son concéntricas y tienen radios iguales ($r = r'$) resulta de (1) que debe ser también $d = d'$. Los puntos que cumplen tal condición son los de la mediatriz del segmento OO' y solamente ellos, porque de las igualdades $d = d'$ y $r = r'$, se obtiene $d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2$.

c) Si las dos circunferencias no son concéntricas y tienen radios distintos ($r \neq r'$), veremos que también en este caso los puntos pedidos son los de una recta perpendicular a la recta OO' de sus centros y solamente ellos.





Siendo, por hipótesis $r \neq r'$, resulta de la (1) también $d \neq d'$. Para fijar las ideas sea $r > r'$, de donde, $d > d'$.

Consideremos un punto P del plano cuyas distancias a los centros O y O' de las dos circunferencias sean respectivamente d y d' ($d > d'$); H, su proyección sobre la recta OO', M el punto medio del segmento OO'. Los triángulos OPM y $O'PM$ tienen el lado MP común y los lados OM y $O'M$ iguales, y como tienen los terceros lados desiguales, $d > d'$, el ángulo $\widehat{OMP}$ del primero (II_1 n. 21) es mayor que su suplementario $\widehat{O'MP}$ del segundo. Por lo tanto, la proyección H del punto P sobre OO' está en la semirecta de origen M que contiene al centro O' de la circunferencia menor. Calculemos la proyección MH de la mediana PM de OPO'.

Se tiene, teor. de PITÁGORAS que:

$$d^2 = OH^2 + HP^2; \quad d'^2 = O'H^2 + HP^2$$

$$d^2 - d'^2 = OH^2 - O'H^2 = (OH + O'H)\ (OH - O'H) \quad (2)$$

Según que H esté o no entre M y O' se tiene respectivamente, en la primera y segunda figura, por ser $MO = MO'$:

$$OH + O'H = OO';\ OH - O'H = MO + MH - MO' + MH = 2\,MH$$
$$OH - O'H = OO';\ OH + O'H = MO + MH + MH - MO' = 2\,MH$$

Sustituyendo en (2), en ambos casos resulta:

$$d^2 - d'^2 = 2OO' \,.\, MH$$

Para que P sea un punto de igual potencia con respecto a O y O' se debe cumplir la (1), es decir que

$$2OO' \,.\, MH = r^2 - r'^2 \qquad (3)$$

Esta última relación prueba, por ser fijos O y O' y r, r' que todos los puntos de la perpendicular por H a OO' cumplen la condición, y ellos son los únicos, porque cualquier otro punto fuera de la perpendicular en H tiene una proyección MH' distinta de MH por ser M fijo y por caer H' en la semirrecta de origen M que pasa por O'.

La relación (3) permite construir un segmento igual a MH mediante una simple cuarta proporcional, pues basta escribirla en la forma siguiente:

$$2OO' \,.\, MH = (r + r')\,(r - r').$$

De donde $\quad 2OO' : (r + r') = (r - r') : MH$

Con lo cual queda perfectamente determinado el punto H de OO', tomando a partir de M hacia O' un segmento igual al cuarto proporcional entre $2OO'$, $r + r'$ y $r - r'$.

De aquí resulta el

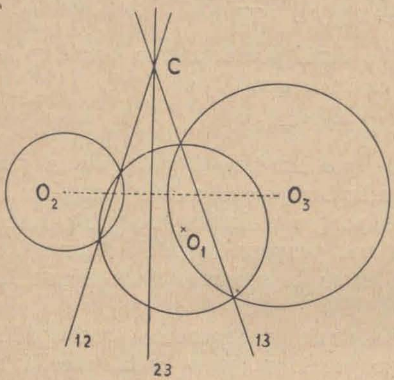
TEOR.: *El lugar de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de dos circunferencias dadas, es una recta perpendicular a la recta de sus centros.*

44. DEF.: *El lugar de los puntos de igual potencia respecto de dos circunferencias, se llama* eje radical *de las dos circunferencias.*

Si las dos circunferencias dadas son *secantes* o *tangentes*, el eje radical es la secante o la tangente común, respectivamente, porque para sus puntos comunes la potencia es nula. Si las dos circunferencias no son ni secantes ni tangentes, se construye el eje radical mediante la cuarta proporcional, explicada en el n. precedente, o del modo más breve que indicaremos en seguida.

45. Teor.: *Los ejes radicales de tres circunferencias concurren a un mismo punto, o son paralelos entre sí. Cuando el punto existe, dicho punto se llama* centro radical *de las tres circunferencias dadas.*

Sean O_1, O_2 y O_3 las tres circunferencias, 12, 13 y 23 los ejes radicales de O_1O_2, O_1O_3 y O_2 O_3 respectivamente.



Supongamos que 12 y 23 se corten en un punto C. Este punto, por pertenecer al eje 12, tiene igual potencia respecto de O_1 y O_2, y por pertenecer al eje 23 tiene igual potencia respecto de O_2 y O_3; por consiguiente C tiene igual potencia respecto de O_1 y O_3, por lo tanto el eje radical 13 de estas circunferencias, pasa también por C.

En el caso de que los ejes 12 y 23 fuesen paralelos, razónese por absurdo, suponiendo que el tercer eje 13 corte a los otros dos, etcétera.

46. Cor.: *El eje radical de dos circunferencias es el lugar de los puntos desde los cuales se pueden trazar a ambas circunferencias tangentes iguales,* porque la potencia (n. 41) es igual al cuadrado de la tangente trazada desde el punto a la circunferencia.

Observación: El teor. precedente permite construir rápidamente el eje radical de dos circunferencias no secantes, ni tangentes; basta trazar una tercera que corte a ambas; los ejes radicales de éstas con ella dan el centro radical de las tres, y como el eje de las dos dadas pasa por este punto y es perpendicular a la recta de sus centros, queda así perfectamente determinado.

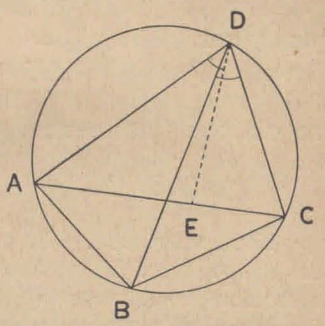
Veamos ahora cómo la relación establecida en el n. 35 entre proporciones y equivalencias conduce a una notable propiedad de los cuadriláteros.

47. Teor. (de Ptolomeo): *Si un cuadrilátero convexo está inscripto en un círculo, el rectángulo de las* *diagonales es equivalente a la suma de los rectángulos de los lados opuestos.*

Dado el cuadrilátero convexo $ABCD$, inscripto en un círculo, y trazadas sus diagonales AC y BD, decimos que

$$r\ (AC,\ BD) = r\ (AB,\ CD) + r\ (AD,\ BC)$$

En efecto, en el ángulo $\widehat{ADC}$, ciertamente mayor que $\widehat{BDC}$, trácese una semirrecta que, con la DA, forme un ángulo igual a $\widehat{BDC}$, y sea E su intersección con la diagonal AC.



Los triángulos AED y BCD, teniendo iguales los ángulos $\widehat{ADE}$ y $\widehat{BDC}$, por construcción, y los ángulo $\widehat{EAD}$ y $\widehat{CBD}$, por inscriptos en un mismo arco de circunferencia (IV, n. 32) resultan semejantes (n. 17), de donde:

$$AD : AE = BD : BC,$$

y, en consecuencia (n. 35), es:

$$r\ (AD,\ BC) = r\ (AE,\ BD).$$

En segundo lugar, restando o sumando (según la disposición de la figura) a los ángulos iguales $\widehat{ADE}$ y $\widehat{BDC}$ el ángulo $\widehat{BDE}$, obtenemos $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$; y como $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$ (por ser ángulos inscriptos en un mismo arco), resultan semejantes también los triángulos ADB y EDC y se obtiene

$$AB : BD = EC : CD;$$

luego es:

$$r\ (AB,\ CD) = r\ (EC,\ BD).$$

De estas dos relaciones de equivalencia resulta:

$$r\ (AB,\ CD) + r\ (AD,\ BC) = r\ (AE,\ BD) + r\ (EC,\ BD),$$

y por ser

$$AE + EC = AC,$$

se obtiene finalmente:

$$r\ (AB,\ CD) + r\ (AD,\ BC) = r\ (AC,\ BD).$$

NOTA HISTÓRICA. — El teor. de PTOLOMEO, que se encuentra en el 1er. Libro de su *Sintaxis Matemática,* más conocido con el nombre de *Almagesto* (alrededor de 150 a. C). conduce inmediatamente a la *fórmula de adición del seno.* Obsérvese que el seno de un arco α (no mayor que un cuarto de circunferencia) se puede definir como la razón de la mitad de la cuerda del arco 2α, al radio de la circunferencia. Para ello, dados dos arcos α y β, se aplique el teor. de PTOLOMEO a un cuadrilátero $A\ B\ C\ D$, en el cual $A\ B$ y $B\ C$ sean las cuerdas subtendidas por 2α y 2β y D el punto diametralmente opuesto a B. Precisamente PTOLOMEO, en su *Almagesto* (para calcular, con fines astronómicos, su Tabla de las cuerdas) considera un cuadrilátero inscripto, uno de cuyos lados pasa por el centro de la circunferencia y no la diagonal, como hemos hecho nosotros; llega así, según nuestro lenguaje, a la expresión del seno de la diferencia y del coseno de la suma de dos arcos. [1]

---

[1] Cfr. M. T. ZAPELLONI: *El teorema de* PTOLOMEO *y las fórmulas de adición de las funciones circulares.* (Periódico di Matematiche. Serie IV, vol. VIII - 1928 págs. 60 - 67).

48. El teor. del n. 35 da el ejemplo de un tipo de proporcionalidad entre dos clases de magnitudes que es, en cierto modo, opuesto a la proporcionalidad directa, definida en el n. 7.

Considerados *todos* los rectángulos equivalentes a uno dado, hagamos corresponder a la base de cada uno de ellos la respectiva altura.

Si son b y b' las bases de dos cualesquiera de los rectángulos equivalentes a uno dado, y h y h' las correspondientes alturas, tenemos, por el teor. mencionado,

$$b : b' = h' : h,$$

es decir, las bases y las alturas de los considerados rectángulos se corresponden de manera que la razón de dos segmentos cualesquiera de una clase es igual a la *inversa* de la razón de los segmentos correspondientes de la otra.

Esto se expresa diciendo que estas dos clases de segmentos son *inversamente proporcionales* entre sí.

Y se pone en general la siguiente:

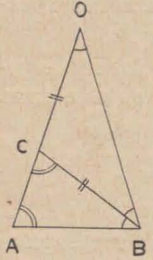
Def.: *Dos clases de magnitudes se llaman* inversamente proporcionales *si a cada cantidad de una corresponde en la otra una determinada cantidad de manera que la razón de cada par de cantidades de una clase sea igual a la inversa de la razón de las correspondientes cantidades de la otra.*

Pentágono, decágono y pentadecágono regulares.

SECCIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO

49. Los teors. sobre los triángulos semejantes y el del n. 32 sobre la tangente y la secante a una circunferencia permiten **inscribir en una dada circunferencia un decágono regular.**

Para esto supongamos resuelto el problema, y sea AB el lado de un decágono regular inscripto en la circunferencia de centro O (es decir, de radio OA). El triángulo ABO, isósceles sobre la base AB, tiene el ángulo del vértice $\hat{O}$ igual a la *décima parte de cuatro rectos* (IV_2 n. 64), es decir, a $\frac{1}{5}$ de 2 rectos. De aquí resulta que la suma de los dos ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ de la base vale $\frac{4}{5}$ de 2 rectos (II_1 n. 12), así que cada uno de ellos es igual a los $\frac{2}{5}$ de 2 rectos; son, por lo tanto, dobles del ángulo de su vértice $\hat{O}$. De esto resulta que si se traza la bisectriz BC del ángulo en B, el triángulo OBC, por tener iguales los ángulos en $\hat{O}$ y en $\hat{B}$, es isósceles sobre la base BO, de manera que $OC = BC$.



Por otra parte, en el triángulo ACB la suma de los dos ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ da $\frac{3}{5}$ de 2 rectos, así que el ángulo $\hat{C}$ vale $\frac{2}{5}$ de 2 rectos y es, entonces, igual al ángulo en A. Se ve así que el triángulo ACB es isósceles sobre la base AC, es decir, que $AB = CB$; además este triángulo ACB, como tiene los ángulos ordenadamente iguales a los de ABO, es semejante a él (n. 17); luego se verifica la proporción:

$$OA : BA = BA : CA,$$

y siendo

$$BA = BC = OC,$$

será

$$OA : OC = OC : CA.$$

Por consiguiente:

El lado AB del decágono regular es igual a la parte OC del radio OA, la cual es media proporcional entre el radio y su parte restante CA. Se puede también decir (n. 36) que *el lado del decágono regular es igual a la parte del radio cuyo cuadrado es equivalente al rectángulo del radio y de su parte restante.*

Según una manera de hablar, que se remonta a los geómetras griegos, esto se expresa diciendo que *el lado del decágono regular es igual a la sección* (o parte) *áurea* del radio, y de éste se dice que ha sido dividido en *media* y *extrema* razón.

50. El teor. prec. se puede también enunciar en los términos siguientes:

Si en un triángulo isósceles el ángulo del vértice es igual a $\frac{1}{5}$ *de dos rectos, la base es igual a la sección áurea del lado.*

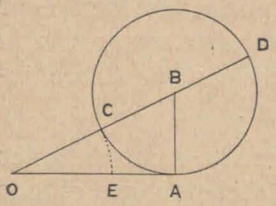
Es cierto también el recíproco de este teor. que se demuestra sencillamente repitiendo en orden inverso los sucesivos pasos, con los cuales en el n. prec. hemos llegado al teor. directo. Se tiene entonces que:

Si en un triángulo isósceles la base es igual a la sección áurea del lado, el ángulo del vértice es igual a $\frac{1}{5}$ *de dos rectos.*

51. En base a las consideraciones precedentes el problema de la inscripción del decágono regular en una circunferencia de dado radio se reduce a este otro, que aqui resolveremos:

Probl.: *Construir la sección áurea de un dado segmento, o dividir un segmento en media y extrema razón.*

Si OA es el segmento dado, considérese sobre la perpendicular en A a OA el segmento $AB = \frac{1}{2} OA$, y trazada la circunferencia de centro B y radio BA, la cual resulta tangente a la recta OA en A (IV_1 n. 26), trácese después la semirrecta OB.



Llamadas C y D las intersecciones de esta semirrecta con la circunferencia, en el sentido de O hacia B, decimos que el segmento OC, transportado en OE sobre la OA, da la sección áurea del segmento OA.

En efecto, el segmento OA de la tangente es medio proporcional entre los segmentos OC y OD de la secante (n. 32), es decir,

$$OD : OA = OA : OC.$$

De esta proporción se obtiene por *división* (lo cual es lícito, por cuanto OD es mayor que OA, igual a su vez al diámetro CD de la circunferencia) la siguiente (VI, n. 21):

$$(OD - OA) : OA = (OA - OC) : OC,$$

y siendo

$$OA = CD, \quad OC = OE,$$

resulta:

$$OE : OA = EA : OE.$$

Basta invertir (VI, n. 19) esta última para obtener la proporción

$$OA : OE = OE : EA,$$

la cual nos dice que OE es la sección áurea de OA.

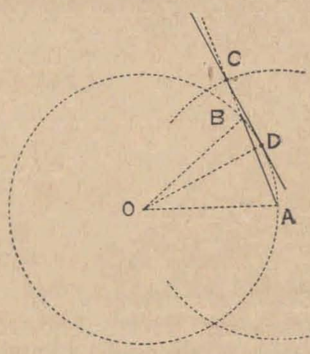
52. NOTA. Refiriéndonos todavía a la figura del n. prec. la proporción

$$OD : OA = OA : OC,$$

que hemos deducido inmediatamente de esta figura, aplicando el teor. del n. 32, muestra que OD es el segmento, cuya sección áurea es OA, es decir, el radio del decágono regular de lado OA. Por eso la construcción del n. prec. permite también *obtener el decágono regular de lado dado.*

53. Cuando en una circunferencia se tiene inscripto un decágono regular, la circunferencia resulta dividida en diez arcos iguales (IV, n. 64).

Considerados los diez puntos de división, basta tomarlos de dos en dos para obtener los vértices de un pentágono regular inscripto en la dada circunferencia.



Por otra parte es fácil construir directamente el lado de este pentágono regular cuando ya se conoce el lado del decágono regular de igual radio. Sea, en efecto, AB el lado del decágono regular inscripto en la circunferencia de radio OA. En el triángulo isósceles OAB el ángulo $\hat{A}$ es igual a $\frac{2}{5}$ de 2 rectos, es decir a $\frac{1}{5}$ de 4 rectos, lo que da precisamente el ángulo central correspondiente al lado de un pentágono regular. Resulta de aquí que para obtener el lado del pentágono regular de radio OA, basta cortar la semirrecta AB con la circunferencia de centro A y radio AO. Si C es la intersección así obtenida, el segmento OC es el lado buscado.

54. La figura construída permite establecer una notable relación entre los lados del pentágono y decágono regulares de igual radio y su radio común. Trácese con este objeto, desde C la tangente CD a la circunferencia de centro O y radio OA, se tiene entonces (n. 32),

$$AC : CD = CD : BC,$$

o sea, traduciendo esta expresión en una relación de equivalencia (n. 36)

$$c\ (CD) = r\ (AC,\ BC);$$

pero AB, lado del decágono regular de radio OA, es la sección áurea de OA y también de $AC = OA$; resulta, pues (n. 49),

$$c\ (AB) = r\ (AC,\ BC);$$

y de estas dos relaciones de equivalencia se obtiene

$$c\ (CD) = c\ (AB);$$

luego (V_2 n. 15)

$$CD = AB$$

Si después unimos O con el punto de contacto D de la tangente obtendremos un triángulo ODC, rectángulo en D (IV_2 n. 26), en el cual la hipotenusa OC es el lado del pentágono regular de radio OA, el cateto CD es igual al lado AB del decágono regular de igual radio, y finalmente el otro cateto OD es igual al radio común de los dos polígonos regulares. Obtenemos así el TEOR.: *El lado de un pentágono regular es la hipotenusa del triángulo rectángulo, que tiene por catetos su radio y el lado del decágono regular de igual radio.*

55. Inscripto en una circunferencia dada un decágono regular, basta dividir por la mitad los arcos (o los ángulos centrales) correspondientes a cada lado para obtener sucesivamente los polígonos regulares, inscriptos en la misma circunferencia, de 20, 40..., 5×2^n..., lados.

Como, además,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{10-6}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15},$$

si a partir de un mismo punto A dividimos una circunferencia en diez y después en seis partes iguales (n. prec. y IV_2 n. 66), y $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ son respectivamente la décima y la sexta parte de la misma circunferencia, la cuerda correspondiente al arco BC (IV_2 n. 56) es *el lado del pentadecágono* regular inscripto.

Dividiendo por mitad sucesivamente los arcos, obtenemos los polígonos regulares de

$$30, 60 \ldots\ldots, 15 \times 2^n, \ldots\ldots \text{ lados.}$$

Nota: Reuniendo los resultados precedentes con los de los n^{os}. 65-69 del capítulo IV_2 podemos afirmar que sabemos construir, *con la regla y el compás,* todos los polígonos regulares de dado radio que tienen (cualquiera que sea el entero n) $2^n.3$; $2^n.5$; lados, resultado que se remonta a la Escuela pitagórica.

Surge de aquí el problema general siguiente: ¿es posible inscribir en una circunferencia de radio dado, un polígono regular de cualquier número de lados, no haciendo uso en su construcción más que de la regla y del compás? Una discusión que requiere conocimientos superiores a las Matemáticas elementales, conduce a la conclusión de que esto no es siempre posible.

En particular (como fué demostrado por GAUSS) el problema es posible con los instrumentos indicados para todos los números primos de la forma

$$2^n + 1,$$

pero no para los otros números primos.

Así se llega a inscribir en el círculo, además del triángulo equilátero y el pentágono, los polígonos regulares de $17 = 2^4 + 1$, $257 = 2^8 + 1$; $65537 = 2^{16} + 1, \ldots$ lados, mientras que no son inscriptibles *(sin recurrir a instrumentos superiores)* los polígonos regulares de 7, 11, 13, 19... lados (1).

Polígonos semejantes.

Los teors. sobre los triángulos semejantes demostrados en los n^{os}. 14-20 constituyen el fundamento de una teoría general de la semejanza entre polígonos, de la cual daremos en este parágrafo una breve idea con el objeto de establecer una importante propiedad de la razón de las superficies de dos polígonos semejantes (2).

Como para los triángulos (n. 15); todos tenemos la noción intuitiva de polígonos (o, más general, de figuras planas cualesquiera) que tienen *igual forma y desigual magnitud,* de manera que se puede considerar un polígono como la copia, reducida o ampliada del otro. Esta relación entre polígonos está geométricamente precisada por la siguiente definición:

56. Def.: *Dos polígonos se llaman semejantes si es posible considerar los vértices en orden tal, que resulten*

(1) Véase para mayores noticias el art. de F. ENRIQUES: Sobre las ecuaciones resolubles por radicales cuadráticos y sobre la construcción de los polígonos regulares: en la P. II de los *Collectanea* de F. E.

(2) El que desee conocer mayores desarrollos al respecto puede consultar el Cap. XV de la "Geometria Sólida" de F. E. y U. A.

ordenadamente iguales los ángulos, y proporcionales los lados que comprenden ángulos iguales.

Es decir, dos polígonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ (considerados los vértices en el orden escrito) se llaman *semejantes* si es:

$$\hat{A} = \hat{A'},\quad \hat{B} = \hat{B'},\quad \hat{C} = \hat{C'},\quad \hat{D} = \hat{D'},\quad \hat{E} = \hat{E'};$$

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \ldots = EA : E'A'.$$

Para obtener ejemplos de polígonos semejantes con más de tres lados, basta considerar dos cuadrados, o más general, dos polígonos regulares de igual número de lados.

En dos polígonos semejantes se llaman *correspondientes* u *homólogos* los vértices de ángulos iguales y los lados y las diagonales que unen vértices correspondientes.

Si la razón de los lados correspondientes es igual a 1, la semejanza se reduce a la *igualdad.*

En el caso de figuras pertenecientes a un mismo plano se puede distinguir la *semejanza directa* y la *inversa,* según que los ángulos correspondientes sean directa o inversamente iguales.

57. Cor.: *Polígonos semejantes a un tercero son semejantes entre sí* (I_1 n. 51 *a*, VI n. 15).

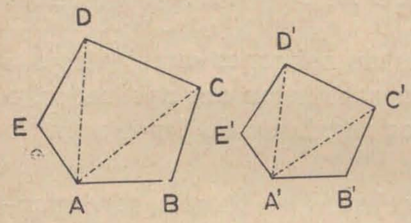
58. Teor.: *Si desde dos vértices correspondientes de dos polígonos semejantes se trazan todas las posibles diagonales, los polígonos resultan descompuestos en el mismo número de triángulos ordenadamente semejantes.*

Sean $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$ dos polígonos semejantes; será entonces:

$$\hat{A} = \hat{A'},\ \hat{B} = \hat{B'},\ \hat{C} = \hat{C'},\ \hat{D} = \hat{D'},\ \hat{E} = \hat{E'};$$

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A'.$$

Uniendo A con C y D, y A' con C' y D', decimos que los triángulos ABC, ACD y ADE, son semejantes respectivamente a $A'B'C'$, $A'C'D'$ y $A'D'E'$.



Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque tienen los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{B'}$ iguales y proporcionales los lados que los forman (n. 19).

De aquí que los ángulos $A\hat{C}B$ y $B\hat{A}C$ son iguales respectivamente a $A'\hat{C'}B'$ y $B'\hat{A'}C'$ y que AC, $A'C'$ son proporcionales a AB y $A'B'$ y por lo tanto también a CD y $C'D'$. Pero entonces en los triángulos ACD, $A'C'D'$ los ángulos

$$A\hat{C}D = B\hat{C}D - B\hat{C}A,\quad A'\hat{C'}D' = B'\hat{C'}D' - B'\hat{C'}A'$$

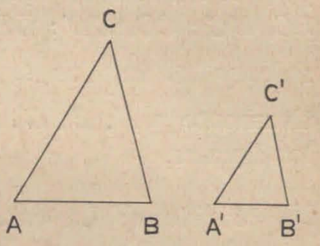
son iguales por ser diferencias de ángulos iguales; los dos triángulos son semejantes por tener (n. 19) un par de ángulos iguales y los lados que los forman proporcionales.

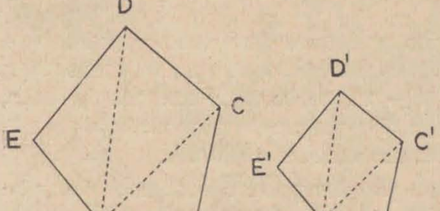
Análogamente se demuestra que son semejantes también los triángulos ADE y $A'D'E'$.

59. Establecido esto, podemos resolver el

PROBLEMA: *En un plano sobre un lado dado y en un semiplano prefijado respecto a su recta, construir un polígono semejante a un polígono dado.*

a) Sean dados en primer lugar un triángulo ABC y un segmento cualquiera $A'B'$. Se quiere construir sobre $A'B'$, en un semiplano respecto a la recta $A'B'$, un triángulo semejante a ABC y tal que el lado dado $A'B'$ corresponda al lado AB de ABC. Tracemos por A' y B' en el semiplano prefijado respecto a $A'B'$, dos semirrectas que formen con la transversal $A'B'$ dos ángulos conjugados interiores, iguales a $\hat{A}$ y $\hat{B}$ respectivamente. Como la suma de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ es menor que dos rectos (II_1 n. 13), las dos semirrectas se cortan en un punto C' (I_1 n. 76), y el triángulo $A'B'C'$, que tiene los ángulos ordenadamente iguales a ABC será semejante a él (n. 17).





b) Sea dado, en segundo lugar, un polígono cualquiera $ABCDE$ y sea $A'B'$ el lado prefijado como homólogo de AB, sobre el cual se quiere construir, en un semiplano prefijado, el polígono semejante. Descompuesto el polígono en triángulos, trazando por A todas las diagonales, constrúyase sobre $A'B'$, en la parte prefijada, el triángulo $A'B'C'$ semejante a ABC; sobre $A'C'$, en la parte opuesta de $C'A'B'$, constrúyase el triángulo $A'C'D'$ semejante a ACD, y sobre $A'D'$ en la parte opuesta de $A'C'D'$, el triángulo $A'D'E'$ semejante a ADE.

El polígono $A'B'C'D'E'$ es semejante al dado porque por construcción, los pares de segmentos AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CD, $C'D'$; DE, $D'E'$; EA, $E'A'$ son proporcionales y los ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{E}$, son iguales respectivamente a $\hat{A'}$, $\hat{B'}$, $\hat{C'}$, $\hat{D'}$, $\hat{E'}$, por ser sumas de ángulos iguales.

60. NOTA: La construcción precedente se puede extender a figuras planas cualesquiera. Dada una figura plana F y fijados en ella dos puntos A y B, con el procedimiento antes indicado se puede construir, a partir de dos puntos A' y B', elegidos arbitrariamente como correspondientes de A y B, una figura F' semejante a F, es decir, respondiendo a la noción común de figura que tiene la *misma forma* de F, pero *magnitud desigual o igual*.

61. Para reconocer si dos polígonos de un mismo número n de lados son semejantes, no es necesario comprobar todas las n igualdades de ángulos y las $n - 1$ igualdades de razones de lados, de las cuales habla la def. (n. 56) porque algunas de estas igualdades resultan como consecuencia de las restantes.

En otras palabras, existen para los polígonos algunos *criterios de semejanza* que son una generalización de los dados para los triángulos en los nos. 17, 19 y 20 que, por otra parte, se reducen a los criterios de igualdad del n. 3 del Cap. III_2 cuando la razón de los lados homólogos es igual a 1. También aquí nos limitamos solamente a dar el enunciado, proponiendo como ejercicio (por lo menos para el caso de los cuadriláteros) la demostración, que se puede fundar sobre la descomposición de los dos polígonos en triángulos semejantes, por medio de diagonales que parten de dos vértices homólogos (n. 58).

TEOR.: *Se puede concluir que dos polígonos con el mismo número de lados son semejantes, si tomando los vértices en un cierto orden, se sabe que ellos tienen ordenadamente:*

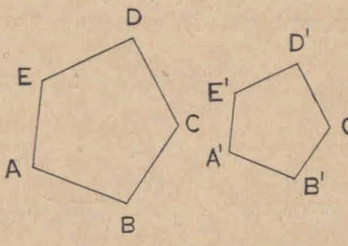
a) iguales los ángulos y en proporción $n - 2$ lados consecutivos (de ángulos iguales);

b) o bien *iguales $n - 2$ ángulos consecutivos y proporcionales los $n - 1$ lados que los comprenden;*

c) o bien *iguales $n - 3$ ángulos consecutivos y proporcionales los lados* (correspondiéndose los lados de ángulos iguales).

62. Dados dos polígonos semejantes, $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$, tenemos por definición las proporciones

$$AB : A'B' = BC : B'C' = \ldots. = EA : E'A'.$$



La suma $AB + BC + \ldots. + EA$ de los antecedentes y la suma $A'B' + B'C' + \ldots. + E'A'$ de los consecuentes dan respectivamente los perímetros de los dos polígonos; así que si a estas proporciones se aplica el teor. del n. 24 del cap. VI, se deduce la proporción:

$$(AB+BC+\ldots+EA):(A'B'+B'C'+\ldots+E'A')=AB:A'B',$$

se obtiene así el

Teor.: *Los perímetros de dos polígonos semejantes están entre sí como dos lados correspondientes cualesquiera.*

63. Demostremos, por último, la propiedad general de los polígonos semejantes enunciada al principio del parágrafo.

Teor.: *Dos polígonos semejantes están entre sí como los cuadrados de dos lados correspondientes cualesquiera.*

a) Probemos, en primer lugar, que el teorema es cierto para dos rectángulos semejantes: si a y b son los lados del primero, a' y b' los lados correspondientes del segundo, tendremos por definición (n. 56)

$$\mathsf{a} : \mathsf{b} = \mathsf{a}' : \mathsf{b}'.$$

Ahora comparando el primer rectángulo $r\ (\mathsf{a}, \mathsf{b})$ con el cuadrado $c\ (\mathsf{a})$ de a y análogamente el segundo rectángulo $r\ (\mathsf{a}', \mathsf{b}')$ con el cuadrado $c\ (\mathsf{a}')$, de (a'), se obtiene (n. 4)

$$c\ (\mathsf{a}) : r\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) = \mathsf{a} : \mathsf{b},$$

$$c\ (\mathsf{a}') : r\ (\mathsf{a}', \mathsf{b}') = \mathsf{a}' : \mathsf{b}',$$

y en virtud de la igualdad de las razones $\mathsf{a} : \mathsf{b}$ y $\mathsf{a}' : \mathsf{b}'$

$$c\ (\mathsf{a}) : r\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) = c\ (\mathsf{a}') : r\ (\mathsf{a}', \mathsf{b}'),$$

invirtiendo (VI, n. 19) y permutando los medios (VI, n. 23),

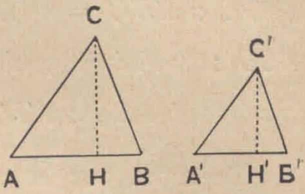
$$r\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) : r\ (\mathsf{a}', \mathsf{b}') = c\ (\mathsf{a}) : c\ (\mathsf{a}').$$

Análogamente se demuestra que

$$r\ (\mathsf{a}, \mathsf{b}) : r\ (\mathsf{a}', \mathsf{b}') = c\ (\mathsf{b}) : c\ (\mathsf{b}')$$

b) El teorema se extiende en seguida a dos triángulos semejantes ABC y $A'B'C'$.

En efecto, consideradas dos alturas homólogas CH y $C'H'$ se tiene (n. 18)



$$AB : A'B' = CH : C'H'.$$

Los dos rectángulos $r\ (AB, CH)$ y $r\ (A'B', C'H')$ resultan, por def., semejantes, y, en virtud de lo que se dijo hace un momento, se tiene:

$$r\ (AB, CH) : r\ (A'B', C'H') = c\ (AB) : c\ (A'B'),$$

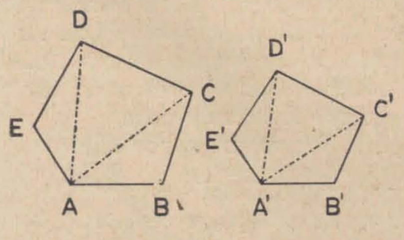
y como los triángulos ABC y $A'B'C'$ son equivalentes respectivamente a las mitades de estos dos rectángulos (IV, n. 28), se concluye sin más (VI, n. 22 *c*) que:

$$ABC : A'B'C' = c\ (AB) : c\ (A'B').$$

Análogamente se demuestra que:

$$ABC : A'B'C' = c\ (BC) : c\ (B'C') = c\ (CA) : c\ (C'A').$$

c) Considerados finalmente dos polígonos semejantes cualesquiera, p. ej. los dos pentágonos $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$; divídanse en triángulos, trazando las diagonales por dos vértices correspondientes A y A'.



Los triángulos en los cuales ambos polígonos resultan descompuestos son semejantes dos o dos (n. 58), se tiene entonces:

$$ABC : A'B'C' = c\,(AB) : c\,(A'B') = c\,(AC) : c\,(A'C')$$

$$ACD : A'C'D' = c\,(AC) : c\,(A'C') = c\,(AD) : c\,(A'D')$$

$$ADE : A'D'E' = c\,(AD) : c\,(A'D').$$

De aquí, por la propiedad transitiva de la igualdad de razones (VI, n. 15),

$$ABC : A'B'C' = ACD : A'C'D' = ADE : A'D'E'$$
$$= c\,(AB) : c\,(A'B');$$

basta aplicar el teor. de la suma de los antecedentes y de los consecuentes (VI, n. 24) para obtener

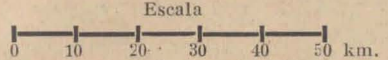
$$(ABC + HCD + ADE) : (A'B'C' + A'C'D' + A'D'E')$$
$$= c\,(AB) : c\,(A'B'),$$

es decir,

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = c\,(AB) : c\,(A'B').$$

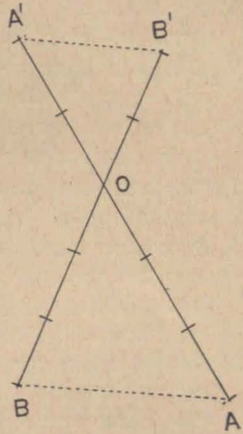
64. Confección de planos-escalas. — La semejanza de polígonos tiene una inmediata aplicación práctica en la confección de planos. Un *plano,* en general, no es sino una figura semejante a otra que puede ser la forma de un terreno, la planta de un edificio, la configuración de un jardín, de un parque, de una ciudad, etc. La razón de semejanza entre la figura representada en el plano y la figura verdadera es lo que se llama *escala.*

Decir que la escala del plano de un mapa, por ejemplo, es de 1 a 10.000, que se escribe 1 : 10.000, ó $\frac{1}{10.000}$, significa que una longitud de una unidad 1m., por ej., en el mapa, representa 10.000 m. en el terreno. Los mapas o los planos suelen llevar la indicación de la escala mediante un segmento que expresa el número de unidades, metros, kilómetros, etc., que una longitud del plano igual a la de ese segmento representa en el terreno.



Así toda distancia de dos puntos cualesquiera del plano que tuviese esta escala y que fuese igual a la de este segmento, representará una distancia de 50 km. en el terreno.

En la práctica del dibujo técnico, a veces se presenta el caso de tener que *reducir* o *ampliar* un plano, es decir, dibujarlo a una escala más chica o más grande que la del plano dado. En estos casos se hace uso de un *compás de proporción*, el cual consiste en dos barras articuladas en un punto O.



Supongamos tener que dibujar un polígono semejante a otro dado, y cuya razón de semejanza sea, por ej., $\frac{2}{3}$.

Colocando el punto O del compás de manera que $OA' = \frac{2}{3}\ OA$ y $OB' = \frac{2}{3}\ OB$, resulta $A'B' = \frac{2}{3}\ AB$, cualquiera que sea la abertura del compás. Se hará la construcción como en el problema del (n. 59), tomando sobre el polígono dado los segmentos con las puntas A, B y marcando sus correspondientes en el nuevo polígono con las puntas A', B'. Es claro que el compás solamente será útil dentro de ciertos límites debido a que sus lados tienen una longitud limitada.

EJERCICIOS

1) Construir una circunferencia que pase por dos puntos dados A y B y sea tangente a una circunferencia dada C. (Trácese por A y B una circunferencia que corte a la C y por el punto de encuentro del eje radical de estas dos circunferencias con la recta AB, trácese una tangente a la circunferencia C...).

2) Dados sobre una recta cuatro puntos A, B, A', B', determinar un punto O, cuyas distancias a A y A' sean proporcionales a las de B y B' con O. (Trácense por A y B' y respectivamente por A' y B dos circunferencias secantes y considérese el punto de encuentro de la recta dada con el eje radical).

3) Si cuatro circunferencias C, K, L, M se cortan dos a dos, y las cuerdas comunes de C, K, y de L, M, pertenecen a una misma recta, los ejes radicales de los círculos C, L y K, M y de C, M y K, L se encuentran en un mismo punto de la recta. (Se demuestra estableciendo la unicidad del punto que resuelve el problema propuesto en el prec. ej.).

4) El rectángulo contenido por dos segmentos es medio proporcional entre los cuadrados de éstos.

5) Construir el segmento cuarto proporcional a dos triángulos y un segmento asignados.

6) Si cuatro segmentos están en proporción, también sus cuadrados son proporcionales.

7) Construir un cuadrado que sea cuarto proporcional a tres cuadrados dados.

8) Demostrar el caso particular del teor. de THALES enunciado al n. 9 del Cap. VII apoyándose en la proporcionalidad de los triángulos de dada altura (a las bases) y sobre la igualdad de razones (n. 15 del Cap. VI). [Demostración de EUCLIDES].

9) Si dos paralelogramos (o triángulos) son equivalentes y un ángulo de uno de ellos es igual a un ángulo del otro, los lados que comprenden los ángulos iguales forman una proporción, de la cual son extremos (y medios) dos lados de un mismo paralelogramo (o triángulo); y recíprocamente, si dos paralelogramos (o triángulos) tienen un ángulo igual a un ángulo, y los lados que comprenden los ángulos iguales forman una proporción, de la cual son extremos (y medios) dos lados de un mismo paralelogramo (o triángulo), los dos paralelogramos (o triángulos) son equivalentes.

10) El lado de un cuadrado es medio proporcional entre la altura y la mitad del lado de un triángulo equilátero equivalente. (Comparar el cuadrado con el rectángulo que tiene por altura la altura del triángulo equilátero y por base la unidad de la base de éste).

11) En un triángulo los rectángulos de los segmentos, de cada altura en los cuales éstas están divididas por su punto de encuentro, son equivalentes. (Considérase el círculo circunscripto).

12) Dividir un segmento dado en dos partes, tales que el rectángulo por ellos contenido sea equivalente a otro rectángulo dado.

13) Inscribir en un cuadrado un rectángulo equivalente a un rectángulo dado. (Divídase el lado del cuadrado en dos partes... ; ej. prec.)

14) El rectángulo de dos lados de un triángulo es equivalente al rectángulo de la altura correspondiente al tercer lado y del diámetro del círculo circunscripto. (Bajada desde el vértice A de ABC la altura AH y trazado el diámetro AD del círculo circunscripto, compárense los dos triángulos AHC, ABD, etc.).

El teor. del n. 35 del Cap. VII permite deducir de los teor. sobre la proporcionalidad de segmentos otros tantos teor. de equivalencia entre rectángulos, como se vió en el n. 37 y en los ej. prec. Pero esos teor. de equivalencia se pueden también establecer directamente, siguiendo el orden de deducción dado por los siguientes ej. Este orden fué ideado por G. VAILATI (1863-1909) [1]. Notemos, por otra parte, que por esta vía se llega a establecer toda la teoría euclídea de las proporciones entre segmentos si se parte de la siguiente def. (equivalente por el n. 35 del Cap. VII a la adoptada por nosotros en el texto): *Cuatro segmentos* **a, b, c, d** *se llaman proporcionales cuando el rectángulo de* **a**, *y* **d** *es equivalente al de* **b** *y* **c**. Entonces la permutabilidad de los medios (o de los extremos) y el teor. de la razón perturbada (ej. 3) son inmediatas consecuencias de la def. El ej. 16 da el teor. de la razón compuesta (ej. 6 Cap. VI), mientras los (ej. 17) dan el teor. de THALES y su inverso.

15) Si sobre dos semirrectas no opuestas que parten desde un punto P se consideran respectivamente dos pares de segmentos

[1] *De una manera de relacionar la teoría de las proporciones entre segmentos con la de equivalencia.* Comunicación al II Congreso de *Mathesis*, Livorno 1901; Escritos de G. VAILATI, Firenze, Seeber, 1911; pág. 399-405. Cfr. del mismo autor el art. «*Sobre la teoría de las proporciones*» en el Vol. I de la parte 5.ª de los *Collectanea* de F. ENRIQUES.

PA, PB y PC, PD, de manera que el rectángulo de PA, PB sea equivalente al rectángulo de PC, PD, los cuatro puntos A, B, C, D pertenecen a una circunferencia. (Por absurdo de los teor. n. 32 y 33).

16) Si se tienen dos ternas de segmento **a**, **b**, **c** y **a'**, **b'**, **c'**, tales que sean equivalentes los rectángulos de **a**, **b'** y **a'**, **b**; y de **a**, **c'** y **a'**, **c**, serán equivalentes también los rectángulos de **b**, **c'** y **b'**, **c**. Sobre dos semirrectas no opuestas que parten de un punto P separénse los segmentos $PA = \mathbf{a}$, $PB = \mathbf{b'}$, $PC = \mathbf{c'}$, y respectivamente $PA' = \mathbf{a'}$, $PB' = \mathbf{b}$, $PC' = \mathbf{c}$. Teniendo en cuenta el enunciado precedente, compárensen los ángulos $P\widehat{B}B'$, $P\widehat{C}C'$ con el ángulo $A\widehat{A'}B'$. Tómense después sobre las dos semirrectas PA, PA', respectivamente, los segmentos $PB_1 = PB'$, $PB_1' = PB$, y de la comparación de los ángulos $P\widehat{B_1}B_1'$, $P\widehat{B}B'$ resultará que los puntos B_1, B_1', C, C', están sobre una circunferencia.

17) Si dos semirrectas no opuestas que parten de un punto P son cortadas por dos rectas paralelas, respectivamente en los puntos A, C y B, D (distintos de P), los rectángulos de los segmentos PA, PD y PC, PB' son equivalentes. (Considerados respectivamente sobre las dos semirrectas los segmentos $PD' = PC$ y $PB' = PB$, basta probar que el cuadrilátero $ACB'D'$ tiene los ángulos opuestos suplementarios, y por lo tanto, inscriptible en un círculo.

18) Extiéndase la proposición precedente al caso en que dos rectas secantes en un punto P sean cortadas por dos paralelas en partes opuestas de P.

19) Enunciar y demostrar el teorema que invierte las dos proposiciones precedentes.

20) Si dos triángulos tienen los lados ordenadamente paralelos, las rectas que unen los vértices opuestos pasan por un mismo punto o son paralelas. (Teor. de los *triángulos* homotéticos).

21) Si dos triángulos ABC, $A'B'C'$ son tales que las rectas AA', BB', CC' pasan por un mismo punto, y los lados AB, BC son paralelos respectivamente a $A'B'$, $B'C'$, también los terceros lados AC, $A'C'$ son paralelos. (Por absurdo).

22) Dado un polígono $ABC....H$ y considerado en su plano un punto O, que no esté sobre la recta de ningún lado del polígono, trácese por un punto A considerado arbitrariamente sobre la OA (y distinto de O y A) la paralela a BC hasta encontrar a la OB en B', la paralela a BC hasta encontrar a la OC en C', y así sucesivamente. Demostrar que el polígono $A'B'C'....H'$ así obtenido es semejante al $ABC....H$. Los dos polígonos $ABC....H$, $A'B'C'....H'$, se llaman homotéticos entre sí, respecto al centro O (en la razón $OA' : OA = A'B' : AB = B'C' : BC = ...$) la que se llama *razón de homotecia* y el punto O *centro de homotecia*.

Nota: Con la misma construcción se puede obtener la *figura homotética* de una figura cualquiera respecto a un dado centro y en una dada razón. Para mayores desarrollos cfr. el Cap. XV de la « Geom. Sólida ».

23) La figura homotética de una circunferencia es una circunferencia. Dadas dos circunferencias, ¿se puede considerar una de ellas como figura homotética de la otra?

24) Construir un paralelogramo semejante a un paralelogramo dado, conociendo una diagonal.

25) Construir un triángulo, del cual se conocen dos ángulos y

a) una altura: o bien
b) una bisectriz; o bien
c) la proyección de un lado sobre otro; o bien
d) el perímetro.

Resuélvase el problema con el llamado *Método de semejanza* (¹). Dejando a un lado la condición *a)* o *b)* o *c)* o *d)*, constrúyase un triángulo cualquiera semejante al buscado, y entre los triángulos semejantes a éste determínese el que satisface a la ulterior condición, que no se ha tenido en cuenta.

26) Construir un triángulo, dado el ángulo del vértice, dos segmentos proporcionales a los lados que lo comprenden y la

---

(¹) Quién quiera más amplias indicaciones sobre los métodos a los cuales aquí aludimos, para la resolución de los problemas, y la literatura que a ellos se refiere, lea el art. de A. Sabbatini: « *Sobre los métodos elementales para la resolución de los problemas geométricos* » en la II parte de los *Collectanea*, de F. Enriques.

bisectriz relativa al ángulo mismo. (*Método de semejanza*; se deja la tercera condición, y aplíquese después el ej. 13).

27) Circunscribir a un círculo dado, un rombo semejante a un rombo dado. (Considérese la circunferencia inscripta en el rombo dado; se obtiene así una figura semejante a la que se quiere construir. (*Método del problema contrario*).

28) Circunscribir a un cuadrilátero dado $ABCD$ un cuadrilátero $EFGH$ semejante a otro cuadrilátero $MNPQ$. (Supuesto que los lados EF, FG, GH, HE pasen respectivamente por los vértices B, C, D, A, los ángulos $B\hat{F}C$, $D\hat{H}A$ son iguales a los ángulos $\hat{N}$, $\hat{Q}$; de donde se pueden construir los círculos circunscriptos a los triángulos BFC, DHA. Sean R, S los puntos en los cuales la diagonal FH encuentra a esas dos circunferencias; los ángulos $E\hat{F}H$, $E\hat{H}F$ son iguales respectivamente a los ángulos $M\hat{N}Q$, $M\hat{Q}N$; luego se conocen los arcos $\overset{\frown}{BR}$, $\overset{\frown}{AS}$, etc.

29) Inscribir en un cuadrado dado $MNPQ$ un cuadrilátero $M'N'P'Q'$ semejante a un cuadrilátero dado $ABCD$. Empléese el método del problema contrario. Circunscripto a $M'N'P'Q'$ un cuadrilátero $A'B'C'D'$ semejante a $MNPQ$ (ej. prec.) se obtiene una figura semejante a la buscada, etc.

30) Construir un triángulo equilátero cuyos vértices pertenezcan a tres circunferencias concéntricas dadas. (Construído cualquier triángulo equilátero determínese un punto, cuyas distancias a sus vértices sean proporcionales a los radios de los círculos dados (ej. 18), etc.).

31) Construir un triángulo semejante a un triángulo dado que tenga un vértice en un punto dado y los otros dos sobre dos rectas dadas. (Supuestas las dos rectas dadas no paralelas, sea $P\hat{Q}R$ el ángulo formado por ellas en el cual cae el punto dado O; si es ABC el triángulo dado, y al vértice A debe corresponder en el triángulo buscado el vértice O, determínese el punto O, desde el cual los segmentos AB, CA se ven bajo ángulos iguales respectivamente a $P\hat{Q}O$, $R\hat{Q}O$, etc.).

32) Inscribir en un triángulo dado otro triángulo cuyos lados sean ordenadamente paralelos a tres rectas asignadas. (Empléese el *Método de homotecia*, que está comprendido en el método de semejanza). Construído cualquier triángulo que tenga los lados paralelos a las rectas dadas, supuestas no paralelas entre sí, por los vértices de éste trácense tres rectas paralelas a los lados del triángulo dado, después transfórmese por homotecia.

33) Inscribir en un círculo dado un triángulo que tenga los lados ordenadamente paralelos a tres rectas dadas.

34) Inscribir en un círculo dado un triángulo semejante a un triángulo dado, y del cual un lado pase por un punto fijado. (Se reduce el n. prec. con una rotación).

35) Inscribir un cuadrado en un triángulo dado. (El cuadrado se llama *inscripto* si tiene un lado sobre un lado del triángulo y los otros dos vértices sobre los lados restantes. Constrúyase un cuadrado que tenga un lado sobre la base del triángulo y un vértice sobre uno de los otros dos lados, entonces, etc.)

36) Por un punto interior a un círculo trazar una cuerda, que sea dividida por el punto dado en partes proporcionales a dos segmentos. (Si M es el centro del círculo dado y S es el punto, considérese sobre la prolongación de MS el punto M_1 tal que M_1S, MS sean proporcionales a los dos segmentos dados, y construyase la circunferencia de centro M_1 homotética de M respecto al centro S, etc.)

37) Los perímetros de dos polígonos regulares de igual número de lados son proporcionales a los lados, a los radios, a las apotemas respectivas; y sus superficies son proporcionales a los cuadrados de los lados, de los radios y de las apotemas.

38) Si, dados dos triángulos, los lados del uno son ordenadamente dobles de los correspondientes del otro, el primer triángulo es equivalente al cuádruplo del segundo.

39) Si cuatro segmentos están en proporción y los dos primeros son lados homólogos de dos polígonos semejantes y los dos últimos son lados homólogos de otros dos polígonos semejantes, los cuatro polígonos son proporcionales.

40) Construir un polígono que sea semejante a un polígono dado y equivalente a otro polígono dado. (Se quiere un polígono semejante al polígono A y equivalente al polígono B. Si A', B' son los cuadrados equivalentes respectivamente a A y B, indiquemos con a' y b' los lados. Determinado el segmento x cuarto proporcional a a', b' y un lado cualquiera a de A, constrúyase el polígono semejante a A, y que tenga a x por lado homólogo de a. El polígono X es el pedido).

41) Dos polígonos semejantes siempre se pueden descomponer en un mismo número de triángulos, semejantes dos a dos según la misma razón (que es igual a la de los dos polígonos dados). Recuérdese el ej. prec. Nótese que puede hacerse de manera que los triángulos parciales resulten, dos a dos, *directamente* semejantes.

42) Transformar un triángulo en un triángulo isósceles dado su ángulo del vértice.

43) Transformar un triángulo (o un polígono) dado en un triángulo equilátero.

44) Transformar un triángulo dado en un triángulo rectángulo que tenga un dado ángulo agudo.

45) Dividir un triángulo dado en dos partes equivalentes por medio de una perpendicular a un lado prefijado. (Supuesto que los otros dos lados del triángulo dado no sean iguales, en cuyo caso la resolución sería inmediata, nótese que una de las dos partes en las cuales queda dividido el triángulo dado es un triángulo rectángulo que tiene un ángulo agudo común con el primitivo. Pero este triángulo rectángulo debe ser mitad del dado. Entonces, recordando el ej. preced., etc).

46) Si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, como lados correspondientes, se construyen tres polígonos semejantes, el polígono construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los polígonos construídos sobre los dos catetos.

47) Construir un polígono equivalente al doble de un polígono dado y al homotético.

48) Construir un triángulo equilátero equivalente a la suma de dos triángulos equiláteros dados.

49) Construir un hexágono regular equivalente a un triángulo equilátero dado. Debe ser equivalente a la sexta parle del exágono, etc.

50) Construir un pentágono regular equivalente a la diferencia de dos pentágonos regulares dados.

51) Determinar el perímetro de un polígono que sea equivalente al doble de un polígono semejante dado. (Resuélvase el problema sin construir el polígono incógnito).

52) Si sobre los lados y sobre las diagonales de un paralelogramo se construyen seis polígonos semejantes, la suma de los polígonos construídos sobre las diagonales es equivalente a la suma de los polígonos construídos sobre los lados.

53) Si desde el vértice de un triángulo se trazan dos rectas que formen con su base ángulos iguales al ángulo del vértice, se tienen dos triángulos semejantes entre sí y al dado; sobre los tres lados del triángulo primitivo considerados como lados correspondientes, constrúyanse tres polígonos semejantes. El polígono construído sobre la base es a la suma de los otros dos como la base es a la suma de los lados de los dos nuevos triángulos construídos sobre ella.

Sin hacer uso de la regla, sólo con el compás, resuélvanse los siguientes problemas:

54) Trazar desde un punto A la paralela a la recta que une dos puntos B y C. (Nótese que el punto D, tal que $ABCD$ sea paralelogramo, es tal que $CD = AB$, $AD = BC$).

55) Construir un segmento doble de otro segmento dado. (Si AO es el segmento, considérese el exágono regular inscripto en la circunferencia de radio AO y que tiene uno de los vértices en el punto A). Repitiendo un número suficiente de veces la misma construcción, se puede construir un múltiplo cualquiera de un segmento dado.

56) Construir el simétrico de un punto respecto a una recta (dada por medio de dos puntos).

57) Bisecar un dado arco de circunferencia. (Dado el arco $\overparen{AB}$ de centro O constrúyanse los puntos C, D tales que los cuadriláteros $ABOC$, $ABDO$ sean paralelogramos (iguales) con centro C y D y radio igual a $CB = DA$, descríbanse dos circunferencias, de las cuales E sea un punto de intersección. Entonces las dos circunferencias, de centros C, D y de radio OE se cortarán en dos puntos que pertenecen a la circunferencia

dada y bisecan cada uno de los arcos $\widehat{AB}$. Para la demostración recúrrase al teorema de PITÁGORAS y sus consecuencias.

58) Construir el cuarto proporcional a tres segmentos dados **a, b, c**. (Descriptas dos circunferencias concéntricas en O y de radios **a, b** considérense dos puntos A, B; con un mismo radio arbitrario córtense sobre la segunda circunferencia dos puntos A', B'. El segmento $A'B'$ es el segmento buscado. Para la demostración compárense los dos triángulos AOB, $A'O'B'$, que son semejantes. Si es **c** $>$ 2 **a**, la construcción no es ya posible; pero basta elegir un número entero K, tal que sea **c** $>$ 2 K **a** y notar que el cuarto proporcional a **a, b, c** es también cuarto proporcional a K**a**, K**b**, **c**.).

59) Determinar los puntos comunes a una circunferencia y a una recta que no pasa por su centro (dada por medio de dos puntos). (Si O es el centro del círculo dado y P es el simétrico de O respecto a la recta dada AB, supóngase que existan las dos intersecciones C, D de AB con la circunferencia O, y considérese el cuadrilátero $OCPD$).

60) Determinar los puntos comunes a una circunferencia y a una recta por su centro. (Si O es la circunferencia dada y A es un punto de la recta dada por el centro, córtese la O con una circunferencia cualquiera de centro A, etc.).

61) Dividir por mitad un segmento dado AB. (Si C es el punto de la prolongación de AB, tal que AC es doble de AB, considérese el segmento tercero proporcional a AC, AB, etc.)

62) Determinar el pie de la perpendicular bajada desde un punto sobre una recta (dada por medio de dos puntos). (Considérese el simétrico del punto dado respecto a la recta dada, etc.).

63) Determinar el punto común a dos rectas (dadas cada una por medio de dos puntos). (Excluído el caso de las rectas perpendiculares (ej. prec.), sean AB, CD las dos rectas dadas. Si C', D' son los simétricos de C, D respecto a A, B, el punto H buscado es común también a $C'D'$. Si E es el punto tal que el cuadrilátero $C'D'DE$ es un paralelogramo, obsérvese que en el triángulo CDE, en el cual HC' es paralela a DE, el segmento $CH = C'H'$ es....)

NOTA. — En los ejercicios precedentes se demuestra que las construcciones fundamentales efectuables mediante la regla y el compás se pueden hacer con el uso del compás solamente.

Así todos *los problemas resolubles con la regla y con el compás se pueden resolver empleando sólo el compás.*

Este resultado pertenece a L. MASCHERONI (1750-1800). Para la historia de la cuestión y para ulteriores desarrollos que se refieren al argumento, véase el art. de E. DANIELE «*Sobre la resolución de los problemas geométricos con el compás*» en la II parte de los *Collectanea*, de F. ENRIQUES.

Proponemos aquí algunos ejercicios para los alumnos más aventajados, sin ninguna indicación del método a seguir. Entre estos ejercicios hay algunos notablemente difíciles.

64) Inscribir en un círculo un triángulo isósceles, siendo dada la suma de la base y de la altura. Discusión.

65) Construir un triángulo dadas las tres medianas.

66) En un triángulo el ortocentro y el baricentro son centros de dos homotecias en los cuales se corresponden el círculo circunscripto y el círculo de los nueve puntos.

67) Lugar de los centros de los círculos que se ven desde dos puntos dados bajo ángulos dados.

68) Construir un círculo que se vea desde tres puntos dados bajo ángulos dados.

69) Construir un círculo tangente a tres círculos dados. Discusión.

70) Dados tres círculos desiguales y construída para cada par de ellos las tangentes comunes secantes en un punto fuera del segmento que une sus centros, se obtienen tres puntos de intersección que están en linea recta.

71) Inscribir en un triángulo dado un triángulo que tenga dos lados paralelos a dos rectas dadas y del cual el tercer lado pase por un punto prefijado.

72) Inscribir en un triángulo dado, un triángulo que tenga un lado paralelo a una recta dada, del cual los otros dos lados pasen por dos puntos prefijados.

73) Inscribir en un triángulo dado, un triángulo cuyos lados pasen ordenadamente por tres puntos dados.

74) Inscribir en un círculo un triángulo cuyos lados pasen ordenadamente por tres puntos.

75) Dados un triángulo *ABC* y tres segmentos arbitrarios **a**, **b**, **c**, divídanse los lados *AB*, *BC*, *CD* en partes proporcionales respectivamente a los segmentos **a**, **b**; **b**, **c**; **c**, **a**. Los segmentos que unen los puntos de división con los vértices opuestos pasan por un mismo punto, en el cual el segmento que pasa por *A* queda dividido como (**b** + **c**) : **a**, etc.

76) Dados cuatro puntos, *A*, *B*, *C*, *D*, no alineados, y cuatro segmentos arbitrarios **a**, **b**, **c**, **d**, divídanse los segmentos *AB*, *AC*... que los unen dos a dos en partes proporcionales respectivamente a **a** : **b**, **a** : **c**; ... Las tres rectas que unen los puntos de división pertenecientes a segmentos que no tienen un vértice común, pasan por un mismo punto.

CAPITULO VIII

§ 6. CICLOMETRÍA O MEDICIÓN DE FIGURAS CIRCULARES

Postulado de continuidad. — Rectificación de la circunferencia y de arcos circulares. — Superficie del círculo y de sectores circulares. — Ejercicios.

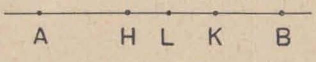
Hasta ahora hemos enseñado a comparar entre sí los arcos y los sectores de igual radio (Cap. IV_2), pero no aquellos de radios desiguales. En este capítulo nos proponemos hacer posible la comparación de arcos de radio cualquiera con segmentos rectilíneos (y por lo tanto, entre sí) y, en particular, de definir un segmento que responda al concepto intuitivo de circunferencia rectificada. Análogamente enseñaremos a comparar los sectores circulares o los círculos con los polígonos, llegando, en particular, a definir un polígono de superficie igual al círculo.

Pero antes de estudiar los dos problemas mencionados, debemos detenernos un momento sobre aquellas propiedades que todos reconocemos en la recta y que nos permiten concebirla como una *línea continua.*

Continuidad.

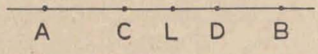
1. Observaciones. — Si imaginamos que dos puntos H y K se mueven, p. ej. con movimiento uniforme,

sobre un segmento AB, siguiendo en sentidos opuestos,



el uno a partir de A hacia B y el otro desde B hacia A, vemos que ellos se encuentran en un punto L del segmento; y antes del encuentro el punto H está siempre a la izquierda de L, el punto K está siempre a la derecha de L.

Si, modificando la hipótesis precedente, se supone que los puntos móviles H y K van retardando su movimiento, de manera de no traspasar los puntos C y D respectivamente, es claro que



cada punto L entre C y D deja siempre a la izquierda al punto móvil H y siempre a la derecha al punto móvil K.

En los dos casos se encuentra, *por lo menos*, un punto L (*de separación*), el cual divide al segmento AB en dos partes, AL y BL, tales que todas las sucesivas posiciones de H son interiores a AL y todas las sucesivas posiciones de K son interiores a BL.

La observación nos conduce también al mismo resultado cuando los dos puntos móviles H y K van el uno hacia el otro a saltos, con tal que *cada* posición asumida por H esté a la izquierda de *cada* posición asumida por K, es decir, que los dos móviles no se crucen.

Dando forma precisa a las precedentes observaciones (basadas en la intuición de la *continuidad de la recta)* enunciaremos el siguiente

Post. (de la continuidad de la recta). — *Si se tienen sobre un segmento AB dos clases de puntos y se designa con H uno cualquiera de la primera clase y con K uno cualquiera de la segunda, y si en un dado sentido de*

AB cada punto H precede a cada punto K, existe en el segmento, por lo menos, *un punto* (de separación) *L, el cual divide a AB en dos partes, tales que en una de ellas están todos los puntos H y en la otra todos los puntos K.*

2. Condiciones ulteriores permiten reconocer en algunos casos que el punto *L*, de separación, entre los puntos *H* y los puntos *K* es *único.*

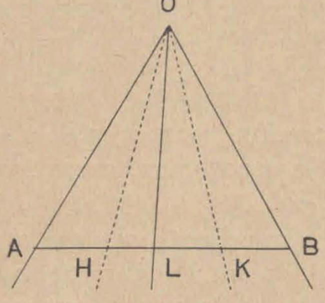
Por ej., si suponemos que, *por pequeño que sea un segmento arbitrario* ε *se puede encontrar siempre un punto H y un punto K, cuya distáncia resulte menor que* ε; en tal caso el punto *L* de separación entre los *H* y los *K* es ciertamente único, porque si existiesen dos distintos, L_1 y L_2, la distancia de un punto cualquiera *H* a un punto cualquiera *K* nunca podría llegar a ser menor que la distancia $L_1 L_2$.

También el punto de separación *L* es ciertamente único, *si cada punto del segmento* AB *es un punto* H *o un punto* K. En efecto, si hubiese dos distintos puntos de separación L_1 y L_2, cada punto interior al segmento L_1, L_2 no podrá ser ni un punto *H* ni un punto *K*.

3. *El postulado de la continuidad,* enunciado en el n. 1 para los segmentos rectilíneos, *se extiende también a los arcos circulares y a los ángulos* (pensados estos últimos como constituídos por sus semirrectas).

Valen, en efecto, las mismas observaciones intuitivas del n. 1, si se imaginan, para un arco circular, dos puntos que se mueven sobre él, el uno hacia el otro, a partir de los extremos, y para un ángulo, dos semirrectas, que giran alrededor del vértice una hacia la otra, a partir de los lados.

Por otra parte, admitida la continuidad de los segmentos rectilíneos según el postulado del n. 1, se deduce en seguida la continuidad para los ángulos. Considerado, para fijar las ideas, un ángulo convexo $\widehat{AOB}$, basta hacer corresponder a cada semirrecta del ángulo su intersección con un segmento AB que tiene los extremos sobre los lados, y aplicar el post. del n. 1 al segmento AB. Después de esto se extiende la continuidad a cualquier arco circular, haciendo corresponder a cada punto del arco la semirrecta del correspondiente ángulo central que pasa por él.



Notemos todavía (sin detenernos sobre tales cuestiones críticas) que del post. de la continuidad de la recta (n. 1) se puede deducir la proposición que hemos admitido como postulado en el n. 24 del Cap. IV_2, para discutir las posibles intersecciones de rectas y circunferencias, y de circunferencias entre sí. (1)

Rectificación de la circunferencia y de los arcos circulares.

4. Dada una circunferencia de centro O y *radio* r, considérense todos los polígonos inscriptos y circunscriptos a ella. Puesto que cada polígono inscripto en O está contenido en cada polígono circunscripto, se tiene (III_2 n. 13) que el perímetro de uno cualquiera de los primeros es menor que el perímetro de uno cualquiera de los segundos.

Tómese ahora un segmento AB igual al perímetro de uno cualquiera de los polígonos circunscriptos, por

(1) Cfr. el art. de C. VITALI: *Sobre las aplicaciones del postulado de la continuidad en la Geometría Elemental,* en el Vol. I de la parte I de los *Collectanea,* de F. ENRIQUES

ej. igual a cuatro veces el diámetro (perímetro del cuadrado circunscripto). En AB tendremos segmentos AH iguales a los perímetros de los polígonos inscriptos en O, y de los segmentos AK iguales a los perímetros de los polígonos circunscriptos que no superan cuatro diámetros, y siendo $AH < AK$, cada punto H, extremo de uno de los primeros segmentos, precederá en el sentido AB del segmento, a todos los puntos K, extremos de los segundos. De aquí, en base al post. del n. 1, se deduce que existe, por lo menos, un punto de separación L, tal que *el segmento AL resulta mayor que los perímetros de los polígonos inscriptos y menor que los de los polígonos circunscriptos a O*, o como se dice, *comprendido* entre los unos y los otros.

NOTA: El segmento AL es ciertamente *mayor* (y nunca *igual*) al perímetro de cada polígono inscripto en O, pues si se tuviese un polígono inscripto en O, cuyo perímetro fuese igual a AL, se podría construir (por ej. bisecando los ángulos centrales del primer polígono) otro polígono inscripto cuyo perímetro fuese mayor que AL, y entonces se obtendría un punto H a la derecha de L. Análogamente, el segmento AL *es menor* (y nunca *igual*) que el perímetro de cada polígono circunscripto a O.

5. Ahora nos proponemos demostrar que el punto L de separación de los puntos H y de los puntos K es ÚNICO, es decir que *existe un único segmento AL, comprendido entre los perímetros de todos los polígonos inscriptos y los perímetros de todos los polígonos circunscriptos a la circunferencia dada.*

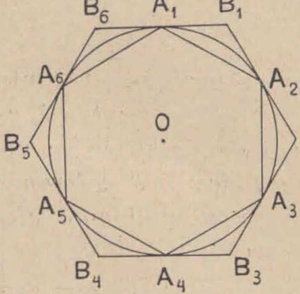
Esta *unicidad* se demuestra en base al primer criterio del n. 2, es decir, haciendo ver que, por pequeño que se considere un segmento ε, existen siempre dos polígonos, el uno inscripto y el otro circunscripto a la circunferencia, y tales que la diferencia entre el perímetro AH del primero y el perímetro AK del segundo resulta menor que ε. Precisamente estableceremos el siguiente

Teor.: *Dada una circunferencia y prefijado un segmento* ε, *tan pequeño como se quiera, se puede determinar siempre un entero* n *bastante grande, tal que los perímetros de los dos polígonos regulares de* n *lados, inscripto y circunscripto a la circunferencia, tengan una diferencia menor que* ε.

Dividimos la demostración en tres partes:

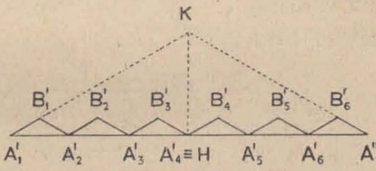
a) Demostraremos ante todo que: *Cualquiera que sea el entero* n, *la diferencia entre los perímetros de los dos polígonos regulares de* n *lados, inscripto y circunscripto a una circunferencia, es menor que el doble de la altura del triángulo isósceles, que tiene por base el perímetro del polígono inscripto y los ángulos de la base iguales a la* n$^{\text{ma}}$ *parte de dos rectos.*

Sean $A_1\ A_2\ \ldots.\ A_n$ y $B_1\ B_2\ \ldots.\ B_n$ dos polígonos regulares de n lados (en la fig. $n = 6$), inscripto y circunscripto a la dada circunferencia O (el segundo con los lados tangentes a O en los vértices del primero).



Los n triangulitos isósceles $A_1\ A_2\ B_1$, $A_2\ A_3\ B_2$, ..., $A_n\ A_1\ B_n$, son todos iguales, porque tienen ordenadamente iguales sus lados, (II_1, n. 11); además en cada uno de ellos, p. ej. $A_1\ A_2\ B_1$, el ángulo del vértice, por ser ángulo interior de un polígono regular de n lados, es igual a la fracción $\frac{n-2}{n}$ de dos rectos, así que la suma de los dos ángulos de la base es lo que le falta a $\frac{n-2}{n}$ de dos rectos para valer dos rectos, es decir $\frac{2}{n}$ de dos rectos; de aquí se concluye que en $A_1\ B_1\ A_2$ (como en cada uno de los otros triangulitos iguales) los ángulos de la base son iguales cada uno a $\frac{1}{n}$ de dos rectos.

Esto dicho, construyamos sobre un segmento $A'_1\ A''_1 = n\ A_1\ A_2$, es decir, igual al perímetro del polígono inscripto, el triángulo isósceles $A'_1\ A''_1\ K$, semejante al triangulito $A_1\ A_2\ B_1$, es decir, que tiene los ángulos de la base iguales a $\frac{1}{n}$ de dos rectos; y, para hacer más intuitivas nuestras consideraciones, observemos que este triángulo $A'_1\ A''_1\ K$ se puede imaginar obtenido disponiendo los n triangulitos $A_1\ A_2\ B_1, \ldots, A_n\ A_1\ B_n$ en $A'_1\ A'_2\ B'_1\ \ldots, A'_n\ A''_1\ B'_n$, es decir, con las bases una consecutiva a la otra sobre el segmento $A'_1\ A''_1$, y prolongando el lado $A'_1\ B'_1$ del primer triangulito y el lado $A''_1\ B'_n$ del último hasta encontrarse en K.



Como los triángulos $A'_1\ A''_1\ K$ y $A_1\ A_2\ B_1$ son semejantes por ser $A'_1\ A''_1 = n\ A_1\ A_2$, será también, por la proporcionalidad de los lados correspondientes,

$$A'_1\ K = n\ A_1\ B_1, \qquad K\ A''_1 = n\ B_1\ A_2;$$

de donde, observando que $A_1\ B_1$ y $B_1\ A_2$ son cada uno la mitad de un lado del polígono regular circunscripto, se concluye que $A'_1\, K + K\, A''_1$ es el perímetro de este polígono.

Pero, bajada desde K la altura KH, de los dos triángulos $A'_1\, HK$ y $A''_1\, HK$ obtenemos (II_1, n. 20)

$$A'_1\, K - A'_1\, H < K\, H; \quad K\, A''_1 - H\, A''_1 < K\, H,$$

sumando miembro a miembro,

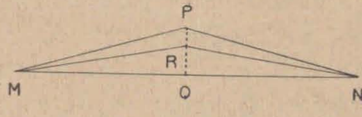
$$A'_1\, K + K\, A''_1 - (A'_1\, H + H\, A''_1) < 2\, K\, H;$$

de donde queda demostrado que la diferencia de los perímetros de los dos polígonos considerados es menor que el doble de KH.

b) Si construímos el triángulo T, semejante al triángulo $A'_1\, A''_1\, K$, que tenga por base el cuádruplo del diámetro de O (perímetro del cuadrado circunscripto), la altura de T será a la altura KH de $A'_1\, A''_1\, K$ como la base de T es a $A'_1\, A''_1$ (VII, n. 18), y como esta base cualquiera que sea n, es mayor que $A'_1\, A''_1$ (perímetro del polígono regular inscripto de n lados), será también la altura de T mayor que KH (VI, n. 16); de donde, teniendo en cuenta la conclusión a la cual llegamos en *a*) podemos afirmar que:

Cualquiera que sea el entero n, *la diferencia de los perímetros de los polígonos regulares de* n *lados, inscriptos y circunscriptos a una circunferencia, es menor que el doble de la altura del triángulo isósceles que tiene por base cuatro diámetros y los ángulos de la base iguales a la* n$^{\text{ma.}}$ *parte de dos rectos.*

c) Ahora es fácil completar la demostración de nuestro teor. Prefijado cualquier segmento ε, por pequeño que sea, constrúyase sobre la base MN, igual al cuádruplo del diámetro de la dada circunferencia (y en un semiplano con respecto a MN) el triángulo isósceles MNP que tiene la altura $PQ = \frac{1}{2}\varepsilon$,



(en la fig. por razones de claridad se ha considerado ε más bien grande), y elíjase un entero n bastante grande para que $\frac{1}{n}$ de dos rectos sea menor que los ángulos de la base de MNP. Entonces el triángulo T, del cual se habló poco antes, es decir, el triángulo isósceles de base MN, que tiene los ángulos de la base iguales a $\frac{1}{n}$ de dos rectos, tendrá el vértice R sobre la PQ en un punto intermedio entre P y Q; y cómo la diferencia de los perímetros de los dos polígonos regulares de n lados, inscriptos y circunscriptos a la O, es menor (por lo demostrado en b), que el doble de QR, será, con mayor razón, menor que el doble de $PQ = \frac{1}{2}\varepsilon$, es decir, menor que el segmento prefijado ε.

6. Resumiendo las consideraciones de los dos n^os^ prec., podemos enunciar el siguiente teor. fundamental:

Teor.: *Dada una circunferencia, existe un segmento y uno sólo, el cual está comprendido entre los perímetros de los polígonos inscriptos y los de los polígonos circunscriptos a la circunferencia dada.*

7. Observación: Si colocamos sobre el papel un hilo flexible e inextensible, dispuesto en forma de circunferencia, y, después de haberlo cortado en un punto, lo extendemos sobre una recta, la observación nos asegura que ese hilo es más largo que el perímetro de cada polígono inscripto y más corto que el perímetro de cada polígono circunscripto; por eso coincide con el segmento caracterizado por el teor. prec. Queda así justificada la siguiente

Def.: *Dada una circunferencia, el segmento comprendido entre los perímetros de los polígonos inscriptos y circunscriptos se llama* circunferencia rectificada, *o también* segmento rectificante *de la circunferencia.*

8. Teor.: *Las circunferencias rectificadas son proporcionales a los respectivos radios y, en consecuencia, a los respectivos diámetros.*

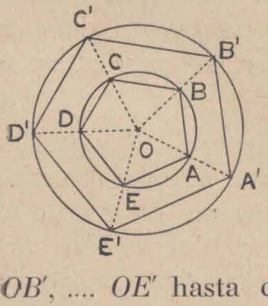
Sean dadas dos circunferencias de radios r y r', y sea, para fijar las ideas, $r < r'$. Si c y c' son los respectivos segmentos rectificantes, se trata de demostrar que:

$$c : c' = r : r',$$

o sea que

$$r : r' = c : c'.$$

Para demostrar esta proporción haremos ver que el cuarto proporcional d, según r, r' y c (VII, n. 10), está comprendido entre los perímetros de los polígonos inscriptos y de los perímetros de los polígonos circunscriptos a la circunferencia de radio r', y por eso coincide con el respectivo segmento-rectificante c'.



Supongamos, por comodidad, que las dos circunferencias dadas sean concéntricas en el punto *O*.

Inscripto en la circunferencia de radio r' un polígono cualquiera $A'B'C'D'E'$, tracemos los radios OA', OB', ... OE' hasta cortar a la otra circunferencia en A, B, ..., E respectivamente. El polígono $ABCDE$, que así resulta inscripto en la circunferencia de radio $\mathbf{r}$, es semejante a $A'B'C'D'E'$, porque tales son los triángulos ABO y $A'B'O'$,...., EAO y $E'A'O'$ (VII, n. 17).

Resulta de aquí que, si indicamos con $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}'$ los perímetros de esos dos polígonos, será (VII, n. 62)

$$\mathbf{p} : \mathbf{p}' = AB : A'B',$$

y, teniéndose en los triángulos semejantes ABO, $A'B'O'$, $AB : A'B' = \mathbf{r} : \mathbf{r}'$, resulta:

$$\mathbf{p} : \mathbf{p}' = \mathbf{r} : \mathbf{r}'.$$

Pero habiéndose indicado con $\mathbf{d}$ el cuarto proporcional según $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{c}$, es decir, el segmento $\mathbf{d}$, tal que

$$\mathbf{r} : \mathbf{r}' = \mathbf{c} : \mathbf{d},$$

tendremos también (VI, n. 15)

$$\mathbf{p} : \mathbf{p}' = \mathbf{c} : \mathbf{d};$$

y permutando los medios (VI, n. 23)

$$\mathbf{p} : \mathbf{c} = \mathbf{p}' : \mathbf{d};$$

recordando que $\mathbf{p}$, por ser perímetro de un polígono inscripto en la circunferencia de radio $\mathbf{r}$, es menor que el respectivo segmento rectificante $\mathbf{c}$ (n. 7), se concluye que (VI, n. 17)

$$\mathbf{p}' < \mathbf{d}.$$

Análogamente se demuestra que $\mathbf{d}$ es menor que el perímetro de cada polígono circunscripto a la circunferencia de radio $\mathbf{r}'$; luego $\mathbf{d}$ coincide necesariamente con el segmento rectificante c'; entonces, poniendo $d = c'$ en la proporción $r : r' = c : d$ y cambiando las dos razones, se obtiene

$$c : c' = r : r',$$

y también (VI, n. 22 c):

$$c : c' = 2\,r : 2\,r'.$$

9. Hasta este punto no sabemos comparar entre sí más que arcos circulares de igual radio (VII, n. 6); pero es también posible la comparación de arcos de radios distintos extendiendo a un arco cualquiera las consideraciones que nos han conducido a la *rectificación* de la circunferencia.

Dado un arco AB de centro O, considérense todas las poligonales *inscriptas* en él, es decir, las que tienen sus extremos en A y B y los otros vértices sobre el arco, y las poligonales *circunscriptas* al arco, es decir, aquellas que tienen sus extremos sobre las prolongaciones de los radios OA y OB y los lados tangentes al arco (IV_2, n. 48). Con un procedimiento análogo al de los nos. 4 y 6 se demuestra, en base al post. del n. 1, el siguiente

Teor.: *Dado un arco de circunferencia, existe un segmento y uno sólo, que está comprendido entre los perímetros de las poligonales inscriptas y los perímetros de las poligonales circunscriptas al arco.*

Una observación análoga a la del n. 7 conduce de manera natural a la siguiente

Def.: *Dado un arco de circunferencia, el segmento comprendido entre los perímetros de las poligonales* *inscriptas y circunscriptas al arco se llama* arco rectificado *o también* segmento rectificante *del arco.*

10. La definición de segmento rectificante conduce a algunas consecuencias que es necesario aclarar.

a) De la def. del n. prec. sigue, en primer lugar, que *arcos iguales tienen segmentos rectificantes iguales. Además, el arco suma de dos (o más) arcos de igual radio tiene como segmento rectificante la suma de los segmentos rectificantes de los arcos sumandos.*

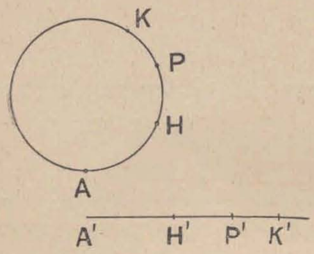
Se reconoce comparando los perímetros de las poligonales inscriptas y circunscriptas al arco suma con los perímetros de las poligonales inscriptas y circunscriptas a los arcos sumandos.

De aquí resulta que, si dos arcos son desiguales, son desiguales en el mismo sentido sus respectivos segmentos rectificantes; y que cualquier múltiplo o submúltiplo de un arco tiene como segmento rectificante el múltiplo o submúltiplo, según el mismo número, del segmento rectificante del arco considerado.

b) Dada una circunferencia, considérense todos los arcos (ordenados) a partir de un dado punto A y en un determinado sentido sin excluir los arcos mayores que la entera circunferencia; y, en correspondencia de cada arco $\widehat{AP}$, imaginemos llevado el segmento rectificante sobre una semirrecta, a partir de su origen A', en $A'P'$.

Es intuitivo que si el punto P, partiendo de A, se mueve sobre la circunferencia en el sentido prefijado, describiéndola cuantas veces se quiera, el extremo P' del segmento $A'P'$, rectificante del arco $\widehat{AP}$, describe, siempre en el mismo sentido, la semirrecta; de donde resulta que no sólo a cada arco $\widehat{AP}$ corresponde un determinado segmento rectificante $A'P'$, sino también recíprocamente a cualquier segmento $A'P'$, tomado arbitrariamente, corresponde un determinado arco $\widehat{AP}$, que tiene a $A'P'$ como segmento rectificante.

Esto también se demuestra con todo rigor teniendo en cuenta la continuidad de los arcos circulares (n. 3).



En efecto, es claro que podemos limitarnos a considerar los segmentos menores que la circunferencia rectificada. Si $A'P'$ es un tal segmento, clasifiquemos los puntos de la circunferencia en dos clases, llamando «puntos H» cada punto, tal que el arco $\widehat{AH}$ (en el sentido prefijado) admita un segmento rectificante $A'H' \leq A'P'$, y «puntos K» cada punto tal que el análogo arco $\widehat{AK}$ tenga un segmento rectificante $A'K' > A'P'$.

Cada punto de la circunferencia es un punto H o un punto K; y *cada* arco $\widehat{AH}$ es menor que *cada* arco $\widehat{AK}$ (porque en caso contrario sería, por la observación *a)* $A'K' \leqq A'H'$, contra la hipótesis). Con otras palabras: sobre la circunferencia, a partir de A y en el sentido prefijado, cada punto H precede a cada punto K, en virtud de la continuidad de los arcos circulares (n. 3), existe un punto P que *separa* los puntos H de los puntos K.

Este punto de separación es *único*, porque si hubiese otro punto P_1, los puntos de la circunferencia comprendidos entre P y P_1 no podrían ser puntos H y tampoco puntos K.

Después de esto es fácil reconocer que $\widehat{AP}$ es precisamente el arco que admite como rectificante el segmento $A'P'$. Si, en efecto, rectificando $\widehat{AP}$ se obtuviese un segmento $A'P_1'$ distinto de $A'P'$, p. ej., menor, bastaría tomar un submúltiplo de la circunferencia rectificada menor que $P_1'P'$ (VI, n. 6), para que el correspondiente arquito, llevado sobre la circunferencia sucesivamente en $\widehat{AP}$, en $\widehat{PQ}$, determine un punto Q, que debería ser un punto K, por cuanto sigue, en el sentido prefijado para el punto P, y, al mismo tiempo, un punto H, por cuanto el arco $\widehat{AQ} = \widehat{AP} + \widehat{PQ}$ admite el segmento rectificante $A'P_1' + P_1'Q' < A'P'$. De manera análoga se excluye la posibilidad $A'P_1' > A'P'$; luego el arco $\widehat{AP}$ tiene por segmento rectificante al $A'P'$.

Resulta entonces que, si se consideran por una parte todos los arcos circulares de dado radio y por otra parte todos los segmentos, pensados como rectificantes de los arcos indicados, *a cada arco corresponde un determinado segmento (rectificante); y, recíprocamente, a cada segmento corresponde un determinado arco (del cual es rectificante).*

Existe, pues, como suele decirse, entre arcos y segmentos rectificantes una *correspondencia biunívoca.*

c) De las observaciones *a)* y de la biunivocidad de la correspondencia entre la clase de los arcos de dado radio y sus segmentos rectificantes, se deduce que a cantidades iguales de una cualquiera de esas clases corresponden en la otra cantidades iguales, y a la suma de dos cantidades consideradas arbitrariamente en una cualquiera de las dos clases corresponde en la otra la suma de las cantidades correspondientes. Se verifica, pues (VII, n. 7), el

Teor.: *Los arcos de dado radio y sus segmentos rectificantes constituyen dos clases de magnitudes proporcionales.*

d) En virtud del teor. prec. si cuatro arcos de igual radio están en proporción, tales son también sus segmentos rectificantes, y recíprocamente (VII, n. 8).

De aquí sigue la *existencia del cuarto proporcional* según tres arcos de radio dado. En efecto, si son **a**, **b** y **c** estos tres arcos, **a**$'$, **b**$'$ y **c**$'$ los respectivos segmentos rectificantes, y es **d**$'$ el cuarto proporcional según **a**$'$, **b**$'$ y **c**$'$ (VII, n. 10), es decir el segmento tal que sea:

$$\mathbf{a}' : \mathbf{b}' = \mathbf{c}' : \mathbf{d}',$$

el arco **d**, que tiene el mismo radio que **a**, **b** y **c** y admite el segmento rectificante **d**$'$, satisface a la proporción:

$$\mathbf{a} : \mathbf{b} = \mathbf{c} : \mathbf{d}.$$

e) Hasta ahora hemos hablado de arcos de igual radio. Arcos de radios desiguales no son, como ya se notó en el n. prec., magnitudes homogéneas entre sí, pero en cambio son homogéneos los respectivos segmentos rectificantes. Por eso, *desde ahora en adelante, se compararán entre sí arcos circulares cualesquiera, recurriendo a la comparación de sus segmentos rectificantes.*

f) Notemos por último que, de la existencia del arco cuarto proporcional según tres arcos circulares (de igual radio) se deduce en seguida *la existencia del cuarto proporcional según tres ángulos cualesquiera* α, β y γ. Recuérdese, en efecto, que los arcos de igual radio son proporcionales a los correspondientes ángulos centrales (VII, n. 6). Por eso, si sobre una circunferencia se consideran los arcos **a**, **b** y **c**, que tienen como ángulos centrales respectivamente α, β y γ, y es **d** el arco cuarto proporcional según **a**, **b** y **c**, el respectivo ángulo central δ es tal que:

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta.$$

Superficie del círculo y de los sectores circulares.

Después de haber tratado el problema de la rectificación de la circunferencia, nos ocuparemos de la *superficie del círculo y del sector circular*, es decir, del problema de la determinación de un polígono, cuya superficie sea igual a la de un círculo o sector dado.

11. Observaciones.— Con este objeto es necesario recordar para las superficies en general (y especialmente para aquellas contenidas por figuras de lados rectilíneos y circulares) los postulados I, II, III, IV del n. 3 Cap. V_2 que responden a la noción intuitiva de la *igualdad de superficies*, sobre los cuales ya hemos basado la teoría de la equivalencia de los polígonos. Agregaremos el siguiente postulado que comprende también al V de los postulados mencionados.

Dadas dos superficies A y B, cualesquiera, o ellas son iguales, o una de ellas es mayor que la otra; es decir, se verifica siempre *uno y uno sólo* de los tres casos:

$$A > B \text{ o } A = B \text{ o } A < B.$$

Es útil advertir que esta manera de comparación indirecta nos es impuesta por la naturaleza de la cuestión.

Se vió ya que polígonos de igual superficie son siempre equivalentes por suma, es decir, descomponibles en partes iguales. Pero un círculo y un cuadrado, aunque tengan igual superficie (como se reconoce físicamente para láminas homogéneas de igual peso y espesor) no pueden ser jamás descompuestas en un número (finito) de partes iguales. (1)

(1) La demostración (por descomposición con arcos circulares y segmentos) es tan sencilla que un alumno inteligente puede obtenerla por si mismo; cfr. del resto el art. de U. Amaldi. Sobre la teoría de la equivalencia, I Vol. *Collectanea*, de F. Enriques.

Admitido el criterio de comparación de las superficies más arriba postulado, se podrá afirmar que un círculo y un polígono tienen superficies iguales cuando se haya demostrado, de cualquier manera, que ninguna de las dos superficies es mayor que la otra, es decir, que no existe entre ellas una diferencia.

En el razonamiento que desarrollaremos en los próximos números para establecer este resultado nos será útil la siguiente observación, que en el caso de superficies con contorno circular se podría fácilmente demostrar, pero que es por sí misma evidente a la intuición:

Dada una superficie cualquiera plana, siempre se puede obtener un polígono que tenga superficie menor que la superficie dada.

Para darse cuenta experimentalmente basta reflexionar que, cualquiera que sea la forma de la superficie considerada, es posible, con oportunos cortes rectilíneos, recortar de ella un polígono.

12. Teniendo en cuenta, pues, las observaciones precedentes, consideremos un círculo, e indiquemos con r su radio y con c su circunferencia rectificada.

Es claro que la superficie C del círculo es mayor que la de cada polígono inscripto, porque cualquiera de éstos forma sólo una parte de él; y es, al contrario, menor que la de cada polígono circunscripto, porque uno cualquiera de ellos contiene al círculo como una de sus partes.

Suele decirse entonces que la superficie del círculo está *comprendida* entre la de cualquier polígono inscripto y la de cualquier polígono circunscripto.

Ahora definiremos, en primer lugar, una superficie poligonal (y precisamente triangular) que goza de esta misma propiedad; y después haremos ver que esta superficie poligonal y la del círculo son iguales.

Con este objeto demostraremos como lemas las dos proposiciones siguientes:

a) *La superficie de un triángulo* $\triangle$ *que tiene por base la circunferencia rectificada y por altura el radio, está, como la del círculo, comprendida entre las superficies de cualquier polígono inscripto y la de cualquier polígono circunscripto.*

En efecto, la superficie de $\triangle$ es mayor que la de cualquier polígono inscripto, porque cada uno de éstos está descompuesto, por los radios que van del centro O del círculo a cada vértice, en la suma de un cierto número de triángulos, cuyas alturas son todas menores que $\mathbf{r}$ y cuyas bases tienen una suma (perímetro del polígono) menor que $\mathbf{c}$ (n. 7); y es, en cambio, menor que la superficie de cualquier polígono circunscripto, porque cada uno de éstos está descompuesto por los dos radios que van desde O a cada vértice en triángulos, cuyas alturas son todas iguales a $\mathbf{r}$ y cuyas bases tienen una suma (perímetro del polígono) mayor que $\mathbf{c}$ (n. 7).

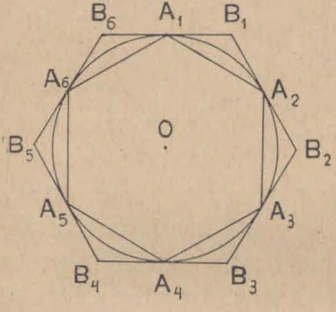
b) *Dado un círculo, y prefijado arbitrariamente un polígono, tan pequeño como se quiera, se puede encontrar siempre un entero* n *bastante grande, tal que la diferencia entre los polígonos regulares de* n *lados, inscripto y circunscripto al círculo, sea menor que el polígono prefijado.*

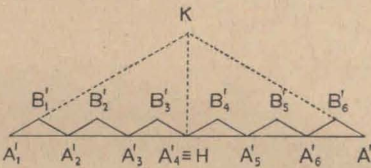
Indiquemos con H el polígono prefijado, con P_n y P'_n los polígonos regulares de n lados, respectivamente, inscriptos y circunscriptos al círculo dado.

Se trata de probar que es posible elegir el entero n bastante grande, para que resulte

$$P'_n - P_n < H.$$

Consideremos nuevamente las figuras del n. 5 en la primera de las cuales están representados los dos polígonos P_n y P'_n (para $n = 6$); y observemos que, cualquiera que sea n, la diferencia $P'_n - P_n$ está dada

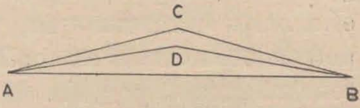




por la suma de los **n** triangulitos isósceles $A_1\ A_2\ B_1$, $A_2\ A_3\ B_2\ \ldots$, $A_n\ A_1\ B_n$, o sea de los **n** triangulitos, a ellos iguales. $A'_1\ A'_2\ B'_1$, $A'_2\ A'_3\ B'_2$, $\ldots$, $A'_n\ A'_1\ B'_n$, de la segunda figura. Por lo tanto la diferencia $P'_n - P_n$ resulta menor que el triángulo isósceles $A'_1\ A''_1\ K$, que tiene por base el perímetro del polígono inscripto P_n y los ángulos de la base iguales a la $n^{ma.}$ parte de dos rectos.

Si entonces, sobre la circunferencia rectificada **c** del círculo dado se construye el triángulo semejante a $A'_1\ A''_2\ K$, es decir, el triángulo isósceles que tiene los ángulos de la base iguales a la $n^{ma.}$ parte de dos rectos, este último triángulo, por ser $\mathbf{c} > A'_1\ A''_1$ resultará mayor que $A'_1\ A''_1\ K$ y en consecuencia también mayor que la diferencia $P'_n - P_n$ de los dos polígonos regulares n de lados, inscripto y circunscripto.

Transformemos ahora el polígono prefijado H, cuya superficie queremos hacer menor que $P'_n - P_n$, en el triángulo isósceles ABC de base $AB = c$ (en la fig. se tomó la altura más bien grande con respecto a AB, mientras que, en efecto, si H es muy pequeño, también ella resulta pequeñísima) y tomemos un entero n, bastante grande, para que la $n^{ma.}$ parte de dos rectos sea menor que los ángulos de la base $\hat{A}$ y $\hat{B}$ de ABC. Si, entonces, sobre la misma base $AB = c$ construímos el triángulo isósceles ABD, que tiene los ángulos de la base iguales a la $n^{ma.}$ parte de dos rectos, este nuevo triángulo resultará interior a ABC, de donde (indicando con las mismas letras de los vértices la superficie):



$$ABD < ABC,$$

y siendo, por construcción $ABC = H$, resulta

$$ABD < H.$$

Pero para el entero n así determinado se tiene, como se vió al principio,

$$P'_n - P_n < ABD,$$

de modo que se obtiene finalmente

$$P'_n - P_n < H.$$

13. Los dos lemas *a)* y *b)* del n. prec. permiten ahora establecer el siguiente teor. fundamental:

Teor.: *La superficie de un círculo es igual a la de un triángulo que tiene por base la circunferencia rectificada y por altura el radio.*

Indicadas con C y $\triangle$ respectivamente las superficies del círculo y del triángulo antes mencionado, resultará demostrada su igualdad si se hace ver que ninguna de ellas puede ser mayor que la otra (n. 11). Para ello basta observar que, si fuese $C > \triangle$ o $\triangle > C$, se podría considerar un polígono H menor que la diferencia entre C y $\triangle$ (n. 11); y como estas dos superficies están comprendidas entre las superficies de los polígonos P'_n y las de los polígonos P_n (n. prec. *a*), para cualquier entero n, deberíamos tener:

$$P'_n - P_n > H. \text{ *}$$

Pero esta desigualdad es absurda, porque, como se vió (n. prec. *b*), se puede encontrar siempre un entero n bastante grande para que la diferencia $P'_n - P_n$ resulte menor que cualquier polígono prefijado arbitrariamente y en particular menor que el polígono H.

Por consiguiente debe ser necesariamente $C = \triangle$.

14. Una serie de consideraciones perfectamente análogas a las de los nos. 12 y 13 conducen a la *superficie del sector circular;* se llega así al

Teor.: *La superficie de un sector circular es igual a la de un triángulo, que tiene por base el correspondiente arco rectificado y por altura el radio.*

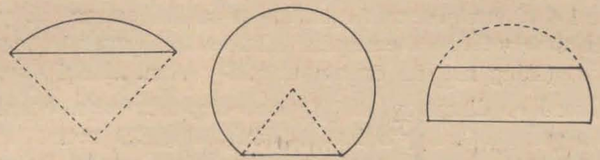
15. Las consideraciones de los nos 11 y 14 hacen posible la comparación de los círculos y de los sectores circulares con los polígonos y también entre sí.

---

* N. del T.: Si fuese por ej.: $C > \Delta$, se tendría $H < C - \Delta$, y como (a. n. 12) es $C < P'_n$ y $\Delta > P_n$, sería precisamente

$$H < P'_n - P_n.$$

Lo mismo dígase de los segmentos circulares, pues cada segmento con una sola base puede obtenerse por diferencia o suma de un sector circular y de un trián-



gulo, y cada segmento con dos bases puede definirse como diferencia de dos segmentos con una sola base.

Más general aún: resultan comparables con los polígonos y también entre sí todas las superficies de contorno circular, porque cada una de ellas, como ya se notó (n. 11), se puede definir por reunión e interferencia (suma y diferencia) de polígonos, círculos, sectores y segmentos circulares. Se extienden así a esas superficies todas las propiedades válidas para las superficies poligonales respecto a la igualdad y desigualdad y a la suma y diferencia (Cap. V_2); de donde podemos afirmar (VI, n$^{os.}$ 1 y 3) que *las superficies planas de contorno poligonal o circular pertenecen a una única clase de magnitudes geométricas,* en la cual se pueden incluir también todas las superficies planas de contorno cualquiera (cuando se haya establecido una conveniente definición).

EJERCICIOS

1) Si el segmento rectificante de una circunferencia es igual al perímetro de un polígono regular, el radio de la circunferencia es mayor que la apotema y menor que el radio del polígono. (Compárese el segmento rectificante de la circunfe-

rencia dada con los relativos a las circunferencias inscriptas y circunscriptas al polígono y téngase en cuenta el n. 8.

2) Dados sobre una recta tres puntos consecutivos A, B, C, la circunferencia rectificada de diámetro AC es igual a la suma de las circunferencias rectificadas de diámetros AB y BC. El teorema vale para cualquier número de segmentos consecutivos. (Ténganse en cuenta el n. 8 y el n. 24 del Cap. VI).

3) Sobre el diámetro AB de una circunferencia considérense dos puntos C, D y sobre AC, AD, BC, BD como diámetros descríbanse cuatro semicircunferencias, las dos primeras en un mismo semiplano con respecto a la recta AB, las otras en el opuesto; se obtiene así una figura con contorno curvilíneo *(pelecoide)* cuyo perímetro es igual al de la circunferencia rectificada. (Véase ej. prec.)

4) Arcos de distintos radios, correspondientes a ángulos centrales iguales, tienen segmentos rectificantes proporcionales a los respectivos radios. (Se demuestra, como el teor. del n. 8, que es un caso particular del teor. enunciado).

5) Si sobre los lados de un polígono, como cuerdas, se construyen otros tantos arcos de circunferencia capaces de un ángulo igual a $^2/_3$ de un recto, la suma de los respectivos arcos rectificados es doble del segmento que se obtiene rectificando la circunferencia circunscripta a un triángulo equilátero, cuyo perímetro sea igual al del polígono dado. (Téngase en cuenta el ej. prec.)

6) ¿Qué proposición más general sugieren los ejercicios 2, 3, 5? Enúnciese y demuéstrese.

7) Consideremos dos circunferencias, cuyos diámetros sean el uno la mitad del otro, y la primera ruede, sin arrastre, interiormente a la segunda. Cada punto de la circunferencia móvil describe un diámetro de la otra. [Teor. de Cardano (1501-1576)]. (Considérese la circunferencia móvil en dos posiciones distintas, en las cuales sean A y B, respectivamente, los puntos de contacto con la circunferencia fija [de centro O]. Si A' es el punto de intersección [distinto de O] de la circunferencia móvil con el diámetro OA, todo se reduce a hacer ver que los arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'B'}$ tienen segmentos rectifican-

tes iguales. Con este fin compárense los respectivos ángulos centrales y recuérdense el n. 32 del Cap. IV_2, y el ej. 4).

8) Un círculo es prevalente a cualquier polígono de igual perímetro. (Compárese con el polígono regular de igual perímetro y de igual número de lados; y recuérdense las propiedades de *máximo* de ese polígono ej. 23, Cap. IV_2, pág. 164 y el ej. 1).

9) Si la superficie de un círculo es igual a la de un polígono regular, el radio del círculo es mayor que la apotema y menor que el radio del polígono, (Compárese la superficie del círculo con las de los círculos inscriptos y circunscriptos al polígono).

10) El círculo circunscripto a un polígono regular e inscripto en otro, es medio proporcional entre las superficies de los círculos respectivamente inscripto en el primero y circunscripto al segundo.

11) Dado un triángulo rectángulo, la suma de las superficies de los círculos que tienen por diámetros los catetos es igual a la superficie del círculo que tiene por diámetro la hipotenusa (ej. 46, pág. 120).

12) Construir un círculo cuya superficie sea doble o triple de otro círculo dado (ej. prec.).

13) Divídase un círculo en tres partes de igual superficie por medio de dos circunferencias concéntricas a la dada.

14) Construir un círculo cuya superficie sea igual a la de una corona circular dada.

15) La superficie de una corona circular es igual a la del círculo, que tiene por diámetro una cuerda de la circunferencia exterior, que sea tangente a la circunferencia interior.

16) El *pelecoide*, construído considerando sobre el diámetro AB de un círculo dos puntos C, D (ej. 3) es al círculo como CD es a AB.

17) Si sobre los lados de un cuadrado inscripto en un círculo, considerados como diámetros, se construyen exteriormente cuatro semicírculos, la suma de las *lúnulas* * así obtenidas tiene superficie igual al cuadrado (ej. 46, pág. 120).

---

* **Se llama asi a la superficie limitada por dos arcos circulares.**

18) Si sobre los lados de un triángulo rectángulo, considerados como diámetros, se describen las semicircunferencias en el mismo semiplano del triángulo con respecto a la hipotenusa, la suma de las superficies de las dos *lúnulas*, que así se obtienen sobre los catetos, es igual a la superficie del triángulo. (*Lúnulas* de HIPÓCRATES).

19) Si se efectúa la construcción precedentemente indicada sobre los lados de un triángulo equilátero, la suma de las tres lúnulas tiene superficie igual a la suma del triángulo y de un octavo del círculo circunscripto.

20) Ejecutada la misma construcción del ej. prec. sobre los lados de un exágono regular, constrúyase un circulo cuya superficie sea igual a la diferencia entre el exágono y la suma de las seis lúnulas.

21) En una semicircunferencia de diámetro AB inscríbase el triángulo rectángulo isósceles que tiene el vértice en el centro O de la circunferencia y la base CD paralela a AB. Descripta la circunferencia de diámetro CD demuéstrese que la superficie del triángulo CDO es igual, tanto a la superficie de la lúnula del círculo CD exterior al semicírculo AB como a la suma de las superficies de los dos triángulos curvilíneos del semicírculo AB, exteriores al círculo CD.

22) Dado un semicírculo de diámetro AB, desde un punto C interior a este diámetro levántese la perpendicular hasta cortar a la semicircunferencia en D; y descríbanse en el semicírculo las dos semicircunferencias de diámetros AC, CB. Demostrar que el triángulo de lados circulares, que así se obtiene (*arbelo* de ARQUÍMEDES), tiene superficie igual a la del círculo de diámetro CD.

23) Dada una semicircunferencia de diámetro AB, descríbase con el mismo centro O, y en el semiplano opuesto respecto de AB, otra semicircunferencia de radio distinto, con el diámetro CD sobre la recta AB. Supuesto C comprendido entre A y O (y por lo tanto D entre O y B) descríbanse en el mismo semiplano respecto de AB, en la cual yace la primera semicircunferencia, las semicircunferencias (iguales) de diámetros AC y DB. En fin, sean E, F las intersecciones de la perpendicular en O a la AB con las dos semicircunferencias concén-

tricas. Las cuatro semicircunferencias encierran una figura (*solinón* de ARQUÍMEDES), cuya superficie es igual a la del círculo de diámetro EF.

24) Dadas dos circunferencias iguales O, O', tangentes (exteriormente) en A, trácense en ellas dos radios OB, $O'B'$, paralelos, y en un mismo semiplano con respecto a la recta de los centros, y sobre el segmento BB' como diámetro descríbase la semicircunferencia que cae respecto de BB', en parte opuesta de A. Se llama *drepanoide* el triángulo de lados circulares $AB'B$.

Demostrar que la superficie del drepanoide es igual a la del paralelogramo $OO'B'B$.

25) Considerados dos vértices opuestos de un cuadrado como centros, descríbanse dos circunferencias que pasen por los otros dos vértices. Construir un segmento circular cuya superficie sea igual al huso circular limitado por las dos circunferencias.

26) Construir un segmento circular cuya superficie sea igual a la diferencia entre un círculo dado y un polígono regular inscripto de 3 ó de 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lados.

27) Tres circunferencias iguales se tocan dos a dos exteriormente. Construir un cuadrado y un círculo de los cuales el triángulo curvilíneo así determinado sea la diferencia.

CAPÍTULO IX

MEDIDAS Y APLICACIONES DEL ALGEBRA A LA GEOMETRÍA

§ 7. GENERALIDADES

Longitud de los segmentos. — Amplitud de los ángulos. — Area de los polígonos. — Area del rectángulo. — Reglas. — Fórmulas relativas al triángulo. — Longitud de la circunferencia y de los arcos circulares. — Area del círculo y de los sectores circulares. — Ejercicios.

1. Fijada la atención sobre cualquier especie de magnitud (segmentos, ángulos, superficies poligonales, etcétera), elijamos entre ellas arbitrariamente una magnitud fija **U**, que llamaremos *unidad,* con la cual compararemos todas las demás de la misma especie.

La razón **A : U** de una magnitud cualquiera **A** de la especie considerada a la **U**, se llama *medida* de A, con respecto a la unidad **U**. La medida de **U** es 1; y, para cualquier otra cantidad A, la medida resulta racional o irracional, según que A sea conmensurable o no con la unidad **U**.

De esta manera, a cada cantidad corresponde un número bien determinado, su medida (con respecto a la unidad prefijada); y, recíprocamente, a cada número corresponde una determinada cantidad (Apéndice I, n. 8), que lo admite como medida (con respecto a la dada unidad). Mejor dicho, la clase de todas las cantidades consideradas y la clase de las correspondientes medidas resultan *proporcionales* (VII, n. 7), porque a cantidades iguales corresponden medidas iguales, y recíprocamente; y a la suma de dos cantidades corresponde la suma de las respectivas medidas (Ap. I, n. 1) y recíprocamente.

Así la razón $A : B$ de dos cantidades es igual a la razón (o cociente) $\frac{a}{b}$ de sus medidas (Ap. I, n. 11); y si cuatro cantidades están en proporción, tales son también los números que expresan sus medidas, y recíprocamente.

2. Considérense dos clases de magnitudes, $A, B, C....$ y $A', B', C',....$ proporcionales (pero no necesariamente homogéneas las unas a las otras). Si se designan con $a, b, c,....$ las medidas de las cantidades de la primera clase (con respecto a cualquier unidad U) y con $a', b', c'....$ las medidas de las correspondientes cantidades de la segunda (con respecto a una unidad U' cualquiera) de las proporciones, válidas por hipótesis,

$$A : B = A' : B', A : C = A' : C', B : C = B' : C'....$$

se obtienen (n. prec.) las proporciones entre números

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'},.....,$$

o sea, permutando los medios,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}....$$

Resulta que *la proporcionalidad entre dos clases de magnitudes cualesquiera, está expresada por el hecho que las medidas de las cantidades de una cualquiera de las dos clases se obtienen multiplicando las medidas de las cantidades correspondientes de la otra por un número fijo* (razón de proporcionalidad).

3. Se debe observar explícitamente que la medida de una cantidad tiene, por su misma definición, un significado relativo a la elección de la unidad. Si ésta se cambia, por ejemplo si se duplica o se triplica, o, en general, se multiplica por un número r, la medida de la unidad usada antes asume el valor $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{3}$ ó, en general, $\frac{1}{r}$; y, análogamente, la medida de cualquier otra cantidad se reduce a la mitad o a la tercera parte o, en general, queda dividida por r.

Resulta, pues, que las medidas de las cantidades de cualquier especie, con respecto a dos unidades distintas, son proporcionales.

4. Para expresar que una cantidad A admite, con respecto a la unidad elegida U, la medida a, se debería escribir, según la convención del n. 9, del Ap. I

$$A = a\,U;$$

pero se acostumbra escribir más brevemente

$$A = a$$

sobreentendiendo la unidad, que se considera bien conocida.

5. Longitud de los segmentos.

Las medidas de los segmentos se llaman particularmente *longitudes*.

Como bien sabemos, la elección de la unidad es teóricamente arbitraria.

Pero es sabido que, en el sistema métrico decimal, al cual se han adherido casi todos los países civilizados, se adopta, como unidad de longitud, el *metro* (1 m.), que está dado por la arista de cierto listel - patrón de platino irisado que se conserva en el Bureau International des Poids et Mesures, de Sèvres, cerca de París; y las unidades auxiliares se llaman *decámetro* (1 Dm. = 10 m.); *hectómetro* (1 Hm. = 100m.); *Kilómetro* (1 Km. = 1000 m.),... y *decímetro* (1 dm. = 0,1 m.); *centímetro* (1cm. = 0,01 m.); *milímetro* (1 mm. = 0,001 m.).

El *metro-patrón* fué construido igual a la cuarenta millonésima parte del meridiano terrestre, como resultaba de las mediciones efectuadas para el arco de meridiano comprendido entre Dunkerque y Barcelona, por DELAMBRE y por MECHAIN, entre 1793 y 1799, por iniciativa de la Asamblea Nacional francesa. Pero determinaciones más recientes y exactas han puesto en claro la desigualdad de los distintos meridianos terrestres, por lo que resulta *inexacta* (si no aproximadamente $\frac{1}{5000}$ de su longitud) *la definición natural* del metro como submúltiplo del meridiano terrestre.

Es por esto que la Conferencia internacional de pesas y medidas, que tuvo lugar en París el año 1889, decidió adoptar la *definición convencional* indicada al principio.

6. AMPLITUD DE LOS ÁNGULOS. — Para los ángulos la unidad fundamental es el ángulo recto, que en el sistema métrico decimal se considera dividido en 100 partes iguales, llamadas *grados centesimales*, y cada uno de éstos se considera subdividido en 100 *minutos centesimales* y en 10.000 *segundos centesimales*. Pero este sistema de medida va difundiéndose muy lentamente; todavía se usa casi universalmente el *sistema sexagesimal*, en el cual el ángulo recto se divide en 90 partes iguales, que se llaman *grados sexagesimales* o sencillamente *grados* [1°]; el grado está subdividido en 60 *minutos* [1'] y el minuto en 60 *segundos* [1''].

Para entendernos llamaremos *amplitud* de un ángulo a su medida en el sistema sexagesimal. De otro sistema de medida de los ángulos, que tiene un particular interés teórico, hablaremos en el n. 25.

Area de los polígonos

7. Las medidas de las superficies reciben particularmente el nombre de *áreas*. Como unidad de áreas se podría asumir, aun en el sistema métrico decimal, un polígono (o, en general, una superficie cualquiera). Pero, por razones de sencillez, se consideró conveniente adoptar el cuadrado del segmento elegido como unidad de longitud, y por eso, en nuestro sistema métrico decimal, es el *metro cuadrado* [1 m^2], es decir, el cuadrado cuyo lado tiene 1 m. de longitud.

Teniendo presente la relación así convencionalmente establecida entre la unidad de longitudes y de las áreas, la primera se llama *primitiva*, la segunda *derivada;* y, correspondientemente, llámanse *magnitudes primitivas* los segmentos, *magnitudes derivadas* las superficies.

Sabemos también que, además del metro cuadrado, se usan como unidades auxiliares sus múltiplos y submúltiplos según 100; 100^2; 100^3;

decámetro cuadrado [1 Dm^2 = 100 m^2],
hectómetro cuadrado [1 Hm^2 = 10.000 m^2],
kilómetro cuadrado [1 Km^2 = 1.000.000 m^2],
decímetro cuadrado [1 dm^2 = 0,01 m^2],
centímetro cuadrado, [1 cm^2 = 0,0001 m^2],
milímetro cuadrado [1 mm^2 = 0,000.001 m^2],

8. Area del rectángulo.

Los diversos teors. establecidos en los Caps. precedentes sobre la equivalencia (Cap. V) y sobre la proporcionalidad de polígonos (Cap. VII) permiten justificar racionalmente las reglas prácticas conocidas, que enseñan a calcular las áreas de los tipos de polígonos más usuales.

Empecemos por el rectángulo y convengamos, por brevedad de escritura, designar en adelante con un mismo símbolo a cada cantidad y su correspondiente medida.

Así, dado un rectángulo designaremos con a y b sus lados o, indiferentemente, sus longitudes (*dimensiones* del rectángulo), con $r\ (a,\ b)$ el rectángulo o su área.

Comparando este rectángulo con $r\ (1,\ b)$ y $c\ (1)$, es decir, con el rectángulo de dimensiones 1 y b y con la unidad de las áreas, cuadrado de lado unitario, resulta, en virtud de la proporcionalidad entre los rectángulos de igual altura y sus bases (VII, n. 4),

$$r\ (a,\ b) : r\ (1,\ b) = a : 1,$$

$$r\ (1,\ b) : c\ (1) = b : 1;$$

de donde, pasando a las áreas y recordando que el área de c (1) es 1, deducimos

$$r\ (a,\ b) = a.r\ (1,\ b), \qquad r\ (1,\ b) = b$$

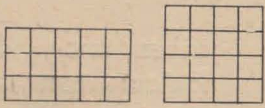
y por lo tanto

$$r\ (a,\ b) = ab,$$

así se obtiene la conocida

Regla. — *Para calcular el área de un rectángulo se multiplican entre sí sus dos dimensiones* (longitud de dos lados consecutivos).

Esta regla queda así establecida en general, es decir, también cuando las dimensiones del rectángulo sean irracionales; mientras que la demostración que de ellas se da en estudios más elementales (y que aquí recordamos reproduciendo la fig. para un rectángulo de dimensiones $^3/_4$ y $^5/_4$) valía sólo en el caso de rectángulos de lados conmensurables con la unidad de longitud o conmensurables entre sí.



R U

9. Nota: Como ya se advirtió incidentalmente, la regla prec vale en la hipótesis que se asuma como unidad de áreas el cuadrado de la unidad de longitud. Si, como sería lícito, se adoptase como unidad de las áreas cualquier otro polígono, cuya medida respecto al cuadrado de la unidad de las longitudes fuese r, el área del rectángulo de dimensiones a y b estará dada (n. 3) por la relación

$$\frac{a\,b}{r};$$

de donde en la medida de cada rectángulo aparecerá el divisor fijo r. Este divisor fijo se elimina, o mejor dicho, se reduce a 1 eligiendo precisamente como unidad de áreas el cuadrado de la unidad de longitudes.

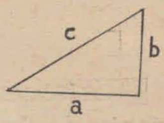
10. Como caso particular de la regla del n. 8 se tiene también la conocida

Regla. — *Para calcular el área de un cuadrado se multiplica por sí misma la longitud del lado, o, como suele decirse, se halla la segunda potencia (o cuadrado) de la longitud del lado.*

Inversamente vale la

Regla. — *Dada el área de un cuadrado, para calcular la longitud del lado se extrae la raíz cuadrada del área.*

11. Las reglas precedentes dan lugar a numerosas aplicaciones. Mencionaremos las más importantes:



Dado un triángulo rectángulo, indiquemos con a, b y c las longitudes de los catetos y, respectivamente, de la hipotenusa. Por el teor. de Pitágoras y por el número prec. tendremos

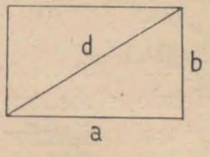
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

de donde resultan las fórmulas:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

que permiten *calcular la longitud de la hipotenusa dadas las de los catetos y la longitud de un cateto dadas las del otro cateto y la de la hipotenusa.*

12. Así, si en un rectángulo indicamos con a y b sus dimensiones y con d la longitud de la diagonal, recordando que esta última divide al rectángulo en dos triángulos rectángulos (iguales) de catetos a y b y de hipotenusa d, resulta



$$a^2 + b^2 = d^2,$$

de donde:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad a = \sqrt{d^2 - b^2}, \qquad b = \sqrt{d^2 - a^2}.$$

En particular, para el cuadrado de lado a, la diagonal d valdrá

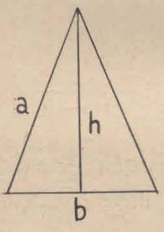
$$d = \sqrt{2\,a^2}, \qquad \text{o sea } d = a\sqrt{2},$$

donde

$$\sqrt{2} = 1,\,4142\;\ldots.$$

Entonces $\sqrt{2}$ es el número irracional que da la razón de la diagonal de un cuadrado al lado (Ap. I, nos. 7 y 16).

13. Un *triángulo isósceles* de lado a y base b está dividido por la altura en dos triángulos rectángulos iguales; si se indica con h la longitud de la altura, sus catetos valen $\frac{1}{2}\,b$ y h, la hipotenusa vale a. Por eso:



$$a^2 = \frac{1}{4}\,b^2 + h^2$$

y en consecuencia

$$(1) \qquad a = \sqrt{\frac{1}{4}\,b^2 + h^2}, \quad b = 2\sqrt{a^2 - h^2}, \quad h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}\,b^2}.$$

14. Puesto que cualquier *polígono regular* de n lados está dividido por los radios, que (desde el centro) van a los vértices, en n triángulos isósceles iguales, que tienen por base *el lado del polígono,* por lado *el radio* y por altura *la apotema del polígono,* las fórmulas (1) del n. precedente permiten calcular la longitud de uno de esos elementos cuando sean conocidas las longitudes de los otros dos.

En particular, para el *triángulo equilátero* de lado a, la altura h está dada por la tercera de las (1) del n. prec., donde resulta

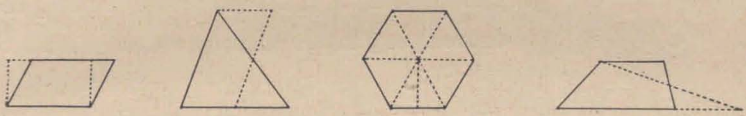
$$h = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} \text{ o sea } h = a \frac{\sqrt{3}}{2} = a \,.\, 0{,}8660\ldots;$$

de donde, inversamente

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}} h = h \,.\, 1{,}1546\ldots$$

pues la altura del triángulo equilátero que tiene un lado dado es igual a la apotema del exágono regular que tiene el mismo lado, así, *dado el lado de un exágono regular, podremos calcular la apotema, y recíprocamente, dada la apotema podremos calcular el lado.*

15. Teniendo en cuenta los teors. sobre la equivalencia de los polígonos de los N^os.^ 12, 22, 25 *b*, 23 del



Cap. V_2, que aquí recordamos reproduciendo las respectivas figuras, se deducen sucesivamente de la regla del n. 8 estas otras reglas prácticas, también muy conocidas:

a) *El área de un paralelogramo es igual al producto* (de las longitudes) *de la base y de la altura.*

b) *El área de un triángulo es igual a la mitad del producto* (de las longitudes) *de la base y de la altura.*

c) *El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto* (de las longitudes) *del perímetro y de la apotema.*

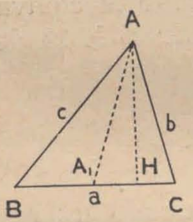
d) *El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de la altura por la suma de las bases,* o (para poner en evidencia el rectángulo equivalente) *al producto de la altura por la semisuma de las bases.*

Fórmulas relativas al triángulo

16. Las reglas precedentes (unidas a algunos teor. de equivalencia) permiten determinar las *alturas*, las *medianas*, las *bisectrices* y el *área* dé un triángulo cualquiera, cuando se conocen las longitudes de sus lados.

Indicamos aquí rápidamente las fórmulas a las cuales se llega. Dado un triángulo ABC, designemos con a, b y c las longitudes de los lados BC, CA y AB, y con h_a, h_b y h_c las alturas relativas a esos tres lados ordenadamente.

Si H es el pie de la altura h_a, resulta (n. 11):



$$h_a{}^2 = b^2 - \overline{HC}^2;$$

pero por los teor. del n. 19 del Cap. V_2 se deduce, según que el ángulo $\hat{C}$ es obtuso o agudo,

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2\, a\,.\, HC,$$

o sea

$$\overline{HC}^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4\, a^2}.$$

De aquí y de la expresión de h_a^2, resulta

$$h_a^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4\, a^2}$$

De donde:

$$4\, a^2\, h_a{}^2 = 4\, a^2\, b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 =$$

$$= (2\,a\,b + a^2 + b^2 - c^2)\ (2\,a\,b - a^2 - b^2 + c^2) =$$

$$= ([a + b]^2 - c^2)\ (c^2 - [a - b]^2) =$$

$$= (a + b + c)\ (a + b - c)\ (c + a - b)\ (c - a + b).$$

Si indicamos con p el semiperímetro de ABC, es decir,

$$a + b + c = 2p$$

se tiene

$$a + b - c = 2(p - c),$$

$$c + a - b = 2(p - b).$$

$$c - a + b = 2(p - a).$$

La fórmula antes obtenida asume el aspecto

$$4\, a^2\, h_a^2 = 16\, p\,(p - a)(p - b)(p - c);$$

resultando finalmente:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Análogamente se encuentra

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

Si se designa con S el área del triángulo, aplicando la regla del n. prec. *b*) y teniendo en cuenta la expresión obtenida para h_a, o h_b, o h_c, resulta:

$$S = \sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}.$$

17. Calculemos, en segundo lugar, las medianas m_a, m_b y m_c del triángulo ABC. Puesto $m_a = AA_1$ (v. fig. del n. prec.), y excluído el caso en el cual ABC sea isósceles sobre la base $BC = a$, de los dos ángulos suplementarios $C\widehat{A_1}A$ y $A\widehat{A_1}B$, uno es obtuso, el otro es agudo; si, como en la figura, es obtuso el segundo, se tiene (V_2; n. 19):

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot A_1H,$$

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + a \cdot A_1H,$$

y, sumando miembro a miembro,

$$b^2 + c^2 = 2\, m_a^2 + \frac{a^2}{2};$$

luego:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2).$$

Análogamente se encuentra

$$m_b^2 = \frac{1}{4}(2\,c^2 + 2\,a^2 - b^2)$$

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2).$$

Se verifica en seguida que estas fórmulas son válidas (con fáciles simplificaciones) también en el caso excluído de un triángulo isósceles.

18. Demuéstrese a modo de ejercicio que las longitudes s_a, s_b y s_c de las bisectrices están dadas por

$$s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{b\,c\,p\,(p-a)},$$

$$s_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{c\,a\,p\,(p-b)},$$

$$s_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{a\,b\,p\,(p-c)}.$$

Otras fórmulas relativas al triángulo serán indicadas en los ejercicios.

Longitud de la circunferencia y de los arcos circulares

19. Hemos visto que, dada una circunferencia, existe un determinado segmento c, comprendido entre los perímetros de los polígonos inscriptos y los de los polígonos circunscriptos, y hemos sido conducidos a definir el segmento c como circunferencia rectificada (VIII, n. 7). Por eso (fijada la unidad de medida de las longitudes) se asumirá como *longitud de la circunferencia* la del correspondiente segmento c.

Recordemos ahora que si c y c' son las circunferencias rectificadas de dos circunferencias y r y r' los radios, se tiene (VIII, n. 8):

$$\mathbf{c} : \mathbf{c}' = 2\,\mathbf{r} : 2\,\mathbf{r}',$$

o sea, permutando los medios

$$\mathbf{c} : 2\,\mathbf{r} = \mathbf{c}' : 2\,\mathbf{r}',$$

e indicando con c y c'; r y r' las longitudes de **c** y **c**$'$, **r** y **r**$'$ respectivamente, resulta también

$$\frac{c}{2\,r} = \frac{c'}{2\,r'}.$$

Se reconoce así que *la razón entre la longitud de la circunferencia y la del diámetro es* CONSTANTE (es decir, tal que no varía al variar el radio).

Esa razón de proporcionalidad

$$\mathbf{c} : 2\,\mathbf{r} = \frac{\mathbf{c}}{2\,\mathbf{r}}$$

se designa con π, y es un número *irracional* poco mayor que 3, cuyas primeras cifras decimales son:

$$\pi = 3{,}1415926\ldots.$$

En los cálculos prácticos suele adoptarse el valor (aproximado por defecto a menos de $1/10^2$) 3,14 ó, a lo sumo, el valor (aproximado por exceso a menos de $1/10^5$) 3,1416.

De la relación

$$\frac{c}{2\,r} = \pi \quad \text{o} \quad c = 2\,\pi\,r = \pi\,d$$

resulta la conocida

REGLA: *La longitud de una circunferencia se obtiene multiplicando por π la longitud del diámetro* d.

En cuanto al cálculo de π, observemos que este número da la longitud de la circunferencia de diámetro 1; así que se podrán obtener valores aproximados de π midiendo experimentalmente la longitud de una tal circunferencia o, mejor, calculando las longitudes de los perímetros de polígonos regulares inscriptos o circunscriptos a la circunferencia de diámetro 1; se alcanzará una aproximación tanto mayor cuanto más grande sea el número de lados de esos polígonos.

20. El número π ha sido objeto, desde la antigüedad, de investigaciones y de cálculos pacientes.

En el *Papyrus Rhind*, debido al escritor egipcio AHMES (2000 a. C.) está implícitamente fijado para π el valor

$$\frac{256}{81} = 3{,}1604\ldots.$$

ARQUÍMEDES (287?-212 a. C.) calculó los perímetros de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos, que se obtienen partiendo del exágono y duplicando sucesivamente el número de lados; por ese camino llegó hasta los polígonos de 96 lados y demostró que π está comprendido entre $3+\frac{10}{71}$ y $3+\frac{10}{70}$; este último valor, acaso más fácil de recordar bajo la forma $\frac{22}{7}$, supera a π en menos de 0,002.

El holandés ADRIANO MEZIO (segunda mitad del siglo XVI) le asignó el valor $\frac{355}{113}$, que supera a π en menos de $\frac{3}{107}$, y otros matemáticos o simples calculistas, casi rivalizando el uno con el otro en paciencia y habilidad, llevaron la determinación aproximada de π mucho más allá de la que se necesita para los cálculos más delicados; ¡SHANKS calculó 707 cifras decimales! Las primeras 30 son las siguientes [1]

$$\pi = 3,\ 141.592.653.589.793.238.462.643.383.279\ldots.$$

Notemos, en fin, que, expresiones de π, en las cuales se puede alcanzar la aproximación que se desee, son las de WALLIS (1616-1703) bajo forma de producto infinito,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\cdot,$$

la dada por BROUNKER (1620-1684), bajo forma de fracción continua,

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+}}}}},$$

y, en fin, la dada por LEIBNITZ (1646-1716) bajo forma de suma infinita, o, como se dice, de serie:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$$

(1) He aqui, como curiosidad, una cuarteta mnemónica francesa:

Que j'aime à faire apprendre un nombre util aux sages!
Immortel ARCHIMÈDE, artiste ingénieur,
Qui de ton jugement peut priser la valeur?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

Los números de las letras de cada palabra dan las cifras de π hasta la *30ª* decimal.

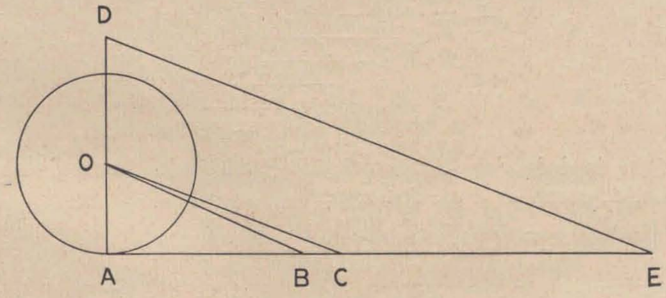
21. Los calculadores de π fueron, por largo tiempo, animados en sus fatigas por la esperanza de llegar, después de un cierto número de cifras, al valor exacto de π. Pero eso era imposible, por cuanto, como ya se dijo, π es un número *irracional*.

Esto fué establecido en el año 1770 por LAMBERT, y más recientemente, en el año 1882, LINDEMANN [1] demostró que π *no puede satisfacer á ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales* (por eso se dice que π es un *número trascendente).*

De aquí resulta, en particular, que π no es calculable con solas *extracciones de raíces cuadradas efectuadas un número finito de veces*; por tal razón es *imposible construir* MEDIANTE LOS INSTRUMENTOS ELEMENTALES (regla, compás, etc.) *el segmento de longitud igual a una circunferencia dada.* Es en este sentido que se debe entender *la imposibilidad de la rectificación de la circunferencia.*

Se pueden dar sin embargo *construcciones aproximadas ejecutables con la regla y el compás,* que conducen a la determinación de un segmento, el cual difiere de la longitud de la circunferencia dada en un segmento pequeñísimo y prácticamente despreciable. Demos como ejemplo la siguiente *rectificación aproximada* debida a SPECHT [2].

Dado un círculo O de radio r, consideremos sobre una tangente a él, a partir del punto de contacto A, el segmento AB



igual al diámetro aumentado de un quinto del radio, y consecutivamente a éste el segmento BC igual a dos quintos del radio.

---

[1] *Ueber die Ludolph'sche Zahl,* Berichte de Berliner Akad, der Wiss, 1882.

[2] Journal de Crelle, t. 3, pág. 83.

Unamos O con B y con C, tomemos AD igual a OB, y desde D tracemos la paralela a la OC hasta cortar a la AC en E. El segmento AE representa por aproximación la circunferencia O rectificada.

En efecto, de los triángulos semejantes ADE y AOC, resulta que:

$$AE : AD = AC : AO.$$

Pero

$$AC = \frac{13}{5} r = \frac{13}{5} OA, \quad AD = OB,$$

de donde

$$AE = \frac{13}{5} OB,$$

siendo (n. 11)

$$OB = r \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2},$$

se concluye que

$$AE = r \, . \, \frac{13}{25} \sqrt{146} \, .$$

Haciendo los cálculos:

$$\frac{AE}{2r} = 3{,}1415919.....$$

Comparando este valor con π, se ve que hay un error poco superior a 0,0000007, así que AE representa la circunferencia por defecto, y difiere de ella en *menos de dos millonésimos del radio* (menos de 2 mm. para una circunferencia de 1 km. de radio).

22. Pasemos a los arcos circulares.

Si nos limitamos a considerar arcos de igual radio r, y que constituyen por lo tanto una clase de magnitudes directamente comparables, basta fijar como *unidad* un cierto arco de radio r y tomar como *medida de un arco cualquiera*, que tiene el mismo radio, su razón al arco unidad.

A menudo se considera como arco-unidad la 360ª parte alícuota de la circunferencia, es decir, el arco correspondiente a un ángulo central de 1°. Este arco recibe el nombre de *grado*; como unidades auxiliares se adoptan el *minuto* y el *segundo*, es decir, los arcos (de igual radio r) correspondientes a ángulos centrales de $1'$ y $1''$.

En virtud de la proporcionalidad entre los arcos de igual radio y los correspondientes ángulos centrales (VII, n. 6) la medida en arcos-grado de un arco coincide con la amplitud del correspondiente ángulo central.

23. Consideremos, en segundo lugar, todos los posibles arcos circulares de radio cualquiera. Para cada uno de ellos hemos visto que existe un determinado segmento, comprendido entre los perímetros de las poligonales inscriptas y de las circunscriptas, y hemos sido conducidos a definir tal segmento como *arco rectificado* (VIII, n. 9).

Del mismo modo que se hizo para la circunferencia, se tomará como *longitud de un arco cualquiera* la del correspondiente arco rectificado (con respecto a la unidad de longitud).

Ahora es fácil determinar la longitud l de un arco conociendo la longitud r de su radio y la amplitud α del correspondiente ángulo central (que suponemos expresada en grados y donde sea necesario también en fracciones decimales de grados). Basta recordar que los arcos de dado radio son proporcionales a sus correspondientes ángulos centrales (VII, n. 6) como a los respectivos arcos rectificados (VIII, n. 10). Por eso, comparando el arco de longitud l y amplitud α a la circunferencia de igual radio r, cuya longitud es $2\pi r$ y por amplitud 360°, se obtiene

$$\frac{l}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360}$$

o sea

$$(1) \qquad l = \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

Análogamente, si se supone expresada la amplitud α en minutos (y fracciones decimales de minutos) o en segundos (y fracciones decimales de segundos) y se recuerda que el ángulo de cuatro rectos es igual a $21600' = (2 \times 10800)'$ o a $1.296.000'' = (2 \times 648000)''$ se obtiene respectivamente

$$(2) \qquad l = \frac{\pi r \alpha}{10.800} \quad \text{o} \quad l = \frac{\pi r \alpha}{648.000}.$$

Resolviendo la (1) y (2) con respecto a α, obtenemos las fórmulas:

$$(3) \qquad \alpha = \frac{180\ l}{\pi r}, \qquad \alpha = \frac{10.800\ l}{\pi r}, \qquad \alpha = \frac{648.000\ l}{\pi r},$$

que *dan la amplitud* (en grados, minutos o segundos) *del ángulo central correspondiente a un arco de dado radio y de longitud dada.*

24. Considerados, sobre dos circunferencias de radio r y r' respectivamente, dos arcos, a los cuales correspondan ángulos centrales de igual amplitud α, las respectivas longitudes l y l' serán dadas, por la (I),

$$l = \frac{\pi\, r\, \alpha}{180}, \qquad l' = \frac{\pi\, r'\, \alpha}{180};$$

de donde resulta

$$\frac{l'}{l} = \frac{r'}{r};$$

es decir: *Las longitudes de dos arcos de distintos radios, pero correspondientes a un mismo ángulo central, son proporcionales a los respectivos radios.*

Este teor. comprende como caso particular el del n. 8 del Cap. VIII y se podría demostrar con un razonamiento geométrico análogo al teor. desarrollado allí.

25. Las consideraciones precedentes conducen a un sistema de *medida de los ángulos,* que suele preferirse, en los desarrollos teóricos, a la medida en grados.

Recordemos una vez más que en una misma circunferencia los ángulos centrales son proporcionales a sus arcos correspondientes (VII, n. 6).

Por eso podemos adoptar como medida de un ángulo cualquiera la longitud del arco interceptado por él sobre la circunferencia que tiene su centro en el vértice y cuyo radio es la unidad.

Tal medida de los ángulos (por una razón que aclararemos en seguida) se llama medida de los ángulos en *radianes.*

Por la definición misma, la medida en radianes de un ángulo de cuatro rectos (ó 360°) es 2π (longitud de la circunferencia de radio 1), la de un ángulo llano es π, la de un ángulo recto, $\frac{\pi}{2}$, etc.; y el ángulo unidad es *aquél que sobre la circunferencia de radio 1* (con el centro en el vértice) *intercepta un arco* de longitud igual a 1. Como los arcos correspondientes a un mismo ángulo central son proporcionales a sus radios (n. prec.), se reconoce que *ese ángulo-unidad intercepta sobre cada circunferencia, que tiene el centro en su vértice, un arco de longitud igual al radio.*

Esta propiedad da cuenta del nombre de *radián* atribuído a tal ángulo-unidad, y en segundo lugar permite encontrar la relación que intercede entre la longitud l de un arco cualquiera, su radio r y la medida ω en radianes del correspondiente ángulo central. En efecto, siendo ω, por definición, la longitud del arco interceptado por dicho ángulo sobre la circunferencia de radio 1, se tiene por la mencionada proporcionalidad de las longitudes de los arcos de igual ángulo central y los respectivos radios (n. prec.),

$$\frac{l}{r} = \frac{\omega}{1} \quad \text{o sea} \quad l = r\,\omega;$$

de donde se deduce: 1) *la medida en radianes de un ángulo se puede definir también como la razón entre la longitud y el radio del arco interceptado por el ángulo sobre una circunferencia cualquiera de centro en el vértice;* 2) *la longitud de un arco se obtiene multiplicando la medida en radianes del correspondiente ángulo central por el radio.*

En fin, para encontrar la relación que intercede entre la medida en radianes ω y la amplitud α de un mismo ángulo, basta observar que las medidas en radianes y las amplitudes de cada ángulo, como medidas de las mismas magnitudes en dos unidades distintas, deben ser proporcionales (n. 3); así que, comparando

ω y α con la medida en radianes y la amplitud de un ángulo llano, se encuentra

$$\frac{\omega}{\alpha} = \frac{\pi}{180},$$

y entonces

$$\omega = \frac{\pi\ \alpha}{180} \text{ o sea } \alpha = \frac{180\ \omega}{\pi},$$

De esta última relación, poniendo $\omega = 1$, se deduce que la amplitud de un radián está dada por

$$\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 57^{\circ}\ 17'\ 44'',\ 806 \ldots.$$

es decir, poco menos de $57^{\circ}\ \frac{1}{3}$.

Area del círculo y de los sectores circulares

26. Como la superficie de un círculo es igual a la de un triángulo que tiene por base la circunferencia rectificada y por altura el radio (VIII, n. 13), se deduce que el área s del círculo de radio r es

$$s = \frac{1}{2}\ 2\ \pi\ r\ ;\ r = \pi\ r^2,$$

de donde la conocida

Regla. — *El área de un círculo se obtiene multiplicando por π el cuadrado del radio.*

27. Escribiendo esta fórmula en la forma

$$\frac{s}{r^2} = \pi$$

y recordando que π es la razón de la circunferencia rectificada al diámetro (n. 19), tenemos el

Teor.: *La razón entre el área de un círculo y el cuadrado de la longitud de su radio es igual a la razón entre la respectiva circunferencia rectificada y su diámetro.*

28. Aplicando la fórmula del n. prec. a dos círculos de áreas s y s' y de radios r y r', se tiene:

$$\frac{s}{r^2} = \frac{s'}{r'^2} \qquad \frac{s}{s'} = \frac{r^2}{r'^2}.$$

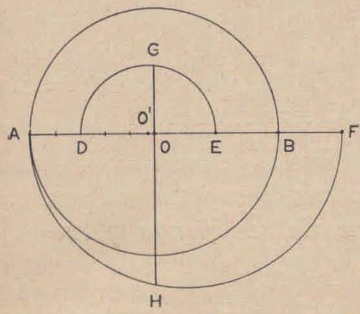
es decir, se verifica el

Cor.: *Dos círculos están entre sí como los cuadrados de sus radios.*

29. El problema geométrico de la *cuadratura del círculo*, es decir, el problema de construir un polígono y en particular un cuadrado, que tenga área igual a la de un círculo dado, es *imposible* en el mismo sentido, en el cual es imposible la rectificación de la circunferencia (n. 21), es decir, un tal polígono no se puede construir exactamente MEDIANTE LOS INSTRUMENTOS ELEMENTALES (regla, compás, etc.).

Hemos dado ya ejemplo de un rectificación aproximada de la circunferencia, ejecutable con la regla y el compás (n. 20); y es claro que esa construcción permite determinar un triángulo, cuya superficie difiere muy poco de la del círculo. Pero se pueden encontrar también construcciones (ejecutables con regla y compás) que dan directamente la *cuadratura aproximada del círculo*, y de las cuales se deducen, recíprocamente, otras tantas rectificaciones aproximadas de la circunferencia.

Daremos aquí un ejemplo de tales cuadraturas aproximadas.
Sobre el diámetro $AB = 2r$ del círculo dado, considérense, a partir del centro O y en partes opuestas de él, los segmentos



$$OD = \frac{3}{5} r; \quad OF = \frac{3}{2} r,$$

y dividido por mitad en E el radio OB (a cuya prolongación pertenece F), trácense en partes opuestas respecto a AB, las semicircunferencias de diámetros DE y AF. La perpendicular en O a AB corta en G y H respectivamente a esas dos semicircunferencias, el cuadrado de lado GH tiene aproximadamente área igual al círculo dado.

En efecto, se tiene:

$$AO = r; OF = \frac{3}{2} r; \; OD = \frac{3}{5} r; OE = \frac{1}{2} r$$

y por ser OH media proporcional entre OA y OF y análogamente OG, entre OD y OE:

$$OA : OH = OH : OF, \quad OD : OG = OG : OE$$

o sea,

$$OH^2 = \frac{3}{2} r^2, \qquad OG^2 = \frac{3}{10} r^2$$

$$GH = OH + OG = \frac{\sqrt{30} + \sqrt{150}}{10} r = r \,.\, 1{,}77246..,$$

y como

$$\sqrt{\pi} = 1{,}77246,...$$

GH difiere, por exceso, del lado del cuadrado que tiene la misma área del círculo, menos de $\frac{1}{100000}$ del radio (menos de 1 cm. para un círculo de 1 km. de radio) [1].

---

[1] Para las cuestiones relativas a la rectificación de la circunferencia y a la cuadratura del círculo, v. Caló «Sobre los problemas trascendentes y en particular sobre la cuadratura del círculo», en la parte II de los «Collectanea», de F. Enriques.

30. Sabemos que la superficie de un sector circular es igual a la de un triángulo que tiene por base el respectivo arco rectificado, y por altura el radio (VIII, n. 14). Por eso del n. 15 *b* se deduce la

REGLA. — *El área de un sector circular está dada por el semiproducto de las longitudes del arco y del radio.*

Es decir, si r es la longitud del radio y l la del arco, el área del sector es igual a

$$(1) \qquad s = \frac{1}{2} l r.$$

Si es α la amplitud (en grados y fracciones decimales de grado) del correspondiente ángulo central, se tiene por la fórmula (1) del n. 23

$$(2) \qquad s = \frac{1}{2} \frac{\pi r \alpha}{180} r = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}.$$

31. Comparando las áreas de dos sectores de igual radio r y de arcos de longitudes l y l' respectivamente, obtendremos por la (1)

$$s = \frac{1}{2} l r; \quad s' = \frac{1}{2} l' r,$$

y en consecuencia

$$\frac{s}{s'} = \frac{l}{l'},$$

es decir, *sectores de igual radio son proporcionales a los respectivos arcos rectificados.*

Puesto que estos arcos rectificados son proporcionales a los correspondientes ángulos centrales, encontramos de nuevo, de acuerdo con el n. 6 del Cap. VII, la proporcionalidad entre sectores de igual radio y ángulos centrales α y α'.

También de la (2).

$$s = \frac{\pi\, r^2\, \alpha}{360};\quad s' = \frac{\pi\, r'^2\, \alpha}{360},$$

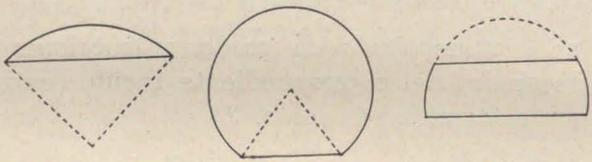
de donde:

$$\frac{s}{s'} = \frac{r^2}{r'^2},$$

es decir, *sectores de distintos radios, pero comprendidos entre ángulos centrales iguales, están entre sí como los cuadrados de sus radios.*

Este teor. comprende como caso particular el del n. 28.

32. Conocida la regla para calcular el área de un sector, se puede calcular también la de un *segmento circular de una base,*



restando o sumando al área del correspondiente sector el área del triángulo limitado por la base del segmento circular y por los dos radios que van a los extremos de éste.

El área de un *segmento circular de dos bases* se obtiene como diferencia de los de los dos segmentos de una base.

EJERCICIOS

1) El área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de los dos catetos.
2) El área de un rombo es igual al semiproducto de las dos diagonales.
3) El área de un cuadrilátero es igual al semiproducto de una diagonal por la suma de las distancias a ésta de los otros dos vértices.
4) Los agrimensores romanos tomaban como área del triángulo equilátero de lado a el número $\frac{1}{2}\, a^2$. ¿Qué error come-

tían? ¿Qué error se comete tomando, según HERÓN, como área de un tal triángulo el número

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)a^2?$$

5) Si, como de costumbre, se asume como radio del ecuador terrestre 860 millas geográficas y como longitud del ecuador mismo 5.400 millas geográficas, ¿hay acuerdo entre las cifras?

6) La longitud de la semicircunferencia está dada aproximadamente por la suma de los lados del cuadrado y del triángulo equilátero inscriptos en el círculo. ¿De qué orden es la aproximación?

7) NICOLO DA CUSA (1464) para construir un triángulo equilátero que tiene perímetro igual a un dado círculo, inscribe un cuadrado en el círculo y considera el triángulo equilátero inscripto en el círculo que tiene por diámetro la suma del lado del cuadrado indicado y del radio del círculo dado. ¿Qué valor aproximado de π se saca de aquí?

8) Dado un círculo, divídase el diámetro AB en cinco partes iguales, prolónguese AB de un segmento BC igual a una de estas quintas partes; sobre la tangente en A considérese el segmento AD igual a tres de esas partes. El perímetro del triángulo ACD es aproximadamente igual a la longitud de la circunferencia. ¿Cuál es el valor aproximado de π que se obtiene de la precedente construcción?

9) ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia en la cual el arco de 1.° tiene la longitud de *1* mm.?

10) Dados un cuadrado y un círculo concéntricos de igual perímetro, calcular la diferencia entre las áreas de uno de los cuatro segmentos circulares y de uno de los triángulos rectángulos de contorno mixto así determinados.

11) Para transformar un dado cuadrado en un círculo de igual superficie, los matemáticos indianos consideraban a partir del centro del cuadrado, sobre la paralela a un lado, un segmento igual a la mitad de la diagonal, dividían la parte de este segmento exterior al cuadrado en tres partes iguales y consideraban el círculo con centro en el centro del cuadrado y que

pasa por el primero de los dos puntos mencionados. ¿Qué valor aproximado de π se obtiene de esta construcción?

12) Según el célebre pintor y geómetra ALBRECHT-DURER (1525) el problema precedente se resuelve considerando como diámetro los $\frac{8}{10}$ de la diagonal del cuadrado. Se tiene así para π el valor aproximado $3 + \frac{1}{8}$ que aparece ya en VITRUVIO.

13) Calcular el área de la corona circular comprendida entre las circunferencias inscriptas y circunscriptas a un polígono regular de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lados.

14) Calcular el área del triángulo limitado por tres arcos de circunferencia convexos, dos a dos tangentes externamente e iguales entre sí.

15) Calcular el área de un cuadrilátero de contorno circular, cuyos lados sean arcos iguales, tangentes dos a dos en los vértices, del cual sea dado el radio. Discusión de los casos posibles.

16) Calcular el área del cuadrilátero de lados circulares convexos, determinado por las cuatro circunferencias con los centros en los vértices de un cuadrado, que tienen por radio el lado del mismo.

17) Dado en el círculo de radio r y centro O un segmento de una sola base AB, si l es la longitud del arco correspondiente y h la distancia del punto A al radio OB, el área del segmen- es $\frac{1}{2}$ $r\ (l \mp h)$, donde se debe considerar el signo $-$ o $+$, según que el segmento es menor o mayor que el semicírculo. Nótese que la razón $\frac{h}{r}$ es lo que en GONIOMETRÍA se llama *seno* del ángulo $A\hat{O}B$ (Cap. siguiente).

§ 8. — APLICACIONES DEL ÁLGEBRA A LA GEOMETRÍA

Representación de cantidades por números (sus medidas). — Resolución algebraica de los problemas geométricos. — Discusión e interpretación de las soluciones. — Interpretación geométrica de las fórmulas algebraicas fundamentales. — Problemas que se resuelven con regla y compás. — Aplicación a las ecuaciones de 2.° grado. — Sofismas geométricos. — Ejercicios.

33. La posibilidad de representar las magnitudes por medio de números, sus medidas, permite traducir las relaciones geométricas en igualdades (o desigualdades) algebraicas. Así, la demostración de un teorema que expresa una relación de igualdad entre magnitudes, se reduce a la verificación de una o más igualdades entre los números que expresan sus medidas; y la resolución de un problema se puede reducir a la resolución de una o más ecuaciones, que relacionan las medidas conocidas de los datos con las medidas incógnitas de las cantidades que se buscan.

En cuanto a la posibilidad de expresar teoremas geométricos por medio de identidades algebraicas, nos bastará recordar, como ejemplo, los teoremas de los n^{os}. 7, 8 y 10 del Cap. V_2, los cuales, si se indican las medidas de los segmentos, que se consideran, con las mismas letras que los representan (pero cursivas ordinarias), se traducen respectivamente en las siguientes identidades:

$$(a + b)\,c = a\,c + b\,c$$

$$(a + b + c + \ldots. + h)\,k = a\,k + b\,k + c\,k + \ldots. + hk$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b.$$

Pero mucho más interesante es *la aplicación del Algebra a la resolucion de los problemas geométricos.*

Cuando se quiere resolver un problema geométrico con el subsidio del Algebra, conviene ante todo elegir oportunamente las magnitudes que se adoptan como *incógnitas*; para tal elección no se pueden dar criterios generales; la más conveniente resulta, al contrario de un cierto instinto especial, que sólo se adquiere con una larga y paciente ejercitación.

Después se traducen las relaciones, establecidas por el problema entre las cantidades dadas y aquellas por determinarse, en una o más ecuaciones *(se pone en ecuación el problema)*, y si la ecuación o el sistema de ecuaciones, al cual se llega, es de primero o segundo o tercer... grado el problema mismo se llama respectivamente de *primer, segundo, tercer... grado.*

Después de esto *se resuelve* esa ecuación o ese sistema de ecuaciones (supuesto, naturalmente, que lo consientan los procedimientos del Algebra elemental), y *se discuten* las soluciones así obtenidas.

Esa discusión es necesaria y esencial, porque si la ecuación o el sistema de ecuaciones admite varias soluciones, puede suceder que sólo algunas de ellas den efectivamente soluciones del problema geométrico propuesto, y que, por eso, las otras deben ser *excluídas* (o porque son negativas, contra las condiciones implícitamente impuestas a las magnitudes *incógnitas* por la misma naturaleza de ellas, o porque pasan de ciertos límites, entre los cuales deben estar comprendidas esas magnitudes, o por otras razones). Las soluciones algebraicas que deben excluirse, responden tal vez a una forma ligeramente modificada del problema propuesto, o a un problema en cualquier modo conexo con el primitivo.

Además, si los datos del problema no están numéricamente fijados, pero están representados por letras, y susceptibles entonces de asumir infinitos valores distintos, puede acontecer que cuando tales datos pasen ciertos determinados límites, alguna solución algebraica que antes daba lugar a una solución del problema geométrico propuesto, falte de algunas de las condiciones (de signo o de valor absoluto, etc.) que son por eso necesarias. Así puede ser que, para ciertos valores especiales de los datos, soluciones algebraicas generalmente distintas vayan a coincidir, o soluciones que antes existían lleguen a faltar (se tornan imaginarias).

Es objeto precisamente de la *discusión* el examen ordenado y preciso de todas esas eventualidades, y la determinación de las condiciones (de igualdad o desigualdad) a las cuales deben satisfacer los datos, para que cada una de ellas tenga lugar.

Después de la discusión, las fórmulas resolutivas de las ecuaciones del problema permiten obtener, con cálculos bien determinados sobre los valores de los datos, las medidas de las cantidades pedidas, y del punto de vista numérico, la resolución está terminada.

Pero se busca en general dar un paso ulterior; más bien se puede decir que es aquí el fin último de la aplicación del Álgebra a las resoluciones de los problemas geométricos.

Las fórmulas de resolución obtenidas indican una serie bien definida de cálculos, que, ejecutados sobre las medidas de las cantidades dadas, permiten determinar las medidas de las cantidades incógnitas.

Ahora bien, trataremos de *interpretar* geométricamente esas operaciones algebraicas para deducir de ellas una serie de *construcciones,* efectivamente ejecutables con los instrumentos elementales (regla y compás), las cuales permitan obtener de las cantidades dadas las cantidades incógnitas.

34. Daremos aquí la *interpretación* y *construcción geométrica* de los tipos más sencillos de fórmulas, construcciones que, combinadas adecuadamente entre sí, conducen a los casos más complejos que pueden presentarse en los problemas de geometría elemental.

Naturalmente, nos limitaremos a aquellas fórmulas que dan lugar a construcciones ejecutables con la regla y con el compás; también aquí designaremos con letras minúsculas latinas los segmentos e, indiferentemente, sus medidas.

1) La suma y la diferencia de dos segmentos

$$a + b, \quad a - b$$

se construyen inmediatamente.

2) La expresión

$$x = \frac{a\ b}{c},$$

se puede escribir

$$c : b = a : x$$

y representa el segmento cuarto proporcional a c, b y a (v. construcción en el n. 10 del Cap. VII). La misma relación se puede poner bajo la forma

$$c\ x = a\ b,$$

el segmento x es la altura del rectángulo de base c, equivalente al rectángulo de base a y altura b.

Así cada segmento representado por una expresión de la forma

$$x = \frac{a\ b\ b'}{c \cdot c'}$$

se construye, considerando sucesivamente las *dos* cuartas proporcionales,

$$x' = \frac{a\ b}{c}, \qquad x = \frac{x'\ b'}{c'};$$

y análogamente un segmento

$$x = \frac{a\ b\ b'\ b''}{c\ c'\ c''}$$

se construye mediante tres cuartas proporcionales, y así sucesivamente.

3) La extracción de la raíz cuadrada

$$x = \sqrt{a\,b},$$

resulta de

$$x^2 = a\,b,$$

y en consecuencia

$$a : x = x : b,$$

que, como se ve, corresponde a la medía proporcional entre las dos magnitudes a y b (n. 24 del Cap. VII); la ecuación a la cual satisface x pone en evidencia que se resuelve de tal manera el problema de determinar el lado del cuadrado equivalente al rectángulo de base a y altura b.

Recordando las construcciones *2)* se construye con cuartas y medias proporcionales toda expresión de la forma

$$\frac{c}{d}\sqrt{a\,b}\,,\ \text{o}\ \frac{c\,c'}{d\,d'}\sqrt{a\,b}\,,\ \text{etc.}$$

4) Se reduce al caso precedente la construcción de la expresión

$$x = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a - b)\,(a + b)}.$$

Pero como

$$x^2 = a^2 - b^2$$

se puede también construir la misma expresión, en base al teorema de Pitágoras, como segundo cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa a y cateto b (n. 11).

El mismo teor. permite construir la expresión

$$x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

como hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos a y b.

De la misma manera se construyen también expresiones más complicadas. Así, para obtener

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$$

se construye antes

$$x_1 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

después

$$x_2 = \sqrt{x_1^2 - c^2},$$

y finalmente:

$$x = \sqrt{x_2^2 + d^2}.$$

35. Las expresiones 2) del n. prec. pueden ponerse en la forma

$$x = a\,\frac{b}{c}, \qquad x = a\,\frac{b\ b'}{c\ c'}, \qquad x = a\,\frac{b\ b'\ b''}{c\ c'\ c''},$$

y como las razones entre segmentos

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{b'}{c'}, \quad \frac{b''}{c''},$$

son *números abstractos o puros* (es decir, independientes de la unidad de medida de los segmentos) todas estas expresiones están contenidas en el tipo

$$x = m\,a,$$

donde x y a son longitudes de segmentos y m es un número abstracto.

Por tal motivo, esas expresiones se llaman *expresiones racionales monomias de 1^er^ grado.*

Ahora bien, si el coeficiente numérico m, contrariamente a cuanto se supuso antes, no está dado bajo forma de razón de dos segmentos (o de producto de tales razones) sino, p. ej., como longitud de un segmento, la construcción indicada en el n. prec. se aplica igualmente, teniendo en cuenta que cada longitud se puede interpretar como razón del segmento correspondiente al segmento unidad. Así la expresión

$$x = a\,b$$

se puede interpretar como la longitud de un segmento, escribiéndola

$$x = a\,\frac{b}{1};$$

de donde resulta que el segmento x es el cuarto proporcional según el segmento *unidad* y los segmentos a y b. Análogamente la

$$x = \frac{b}{c},$$

puesto que se puede escribir

$$x = b\,\frac{1}{c},$$

se construye como cuarta proporcional según c, b y la *unidad*.

Con esta misma previsión, que consiste en asumir entre los datos también el segmento *unidad*, se pueden construir, con los procedimientos indicados por las fórmulas 2), 3), 4) del n. prec., expresiones que por sí mismas no están contenidas en aquellos tipos. Por ejemplo, en relación a las expresiones 2), se puede interpretar la

$$x = \sqrt{a}$$

escribiéndola

$$x = \sqrt{a\ 1};$$

y así el segmento x resulta medio proporcional entre el segmento a y la *unidad.*

36. NOTA. — Las consideraciones de los dos últimos números sugieren las siguientes preguntas: ¿Cómo se distinguen las expresiones, que es posible interpretar y construir sin hacer uso del segmento - unidad, de las que se pueden interpretar sólo cuando entre los datos se asuma ese segmento-unidad?; y en este segundo caso, ¿con cuál criterio se debe introducir el segmento-unidad en las expresiones consideradas para que sean interpretables geométricamente?

Para responder a estas preguntas, consideremos una ecuación cualquiera del tipo

$$x = P\ (a, b, c, \ldots.),$$

donde P designa una expresión dependiente exclusivamente de las medidas $a, b, c, \ldots.$ de ciertos segmentos. Si es posible interpretar esas expresiones de manera que se pueda obtener de ellas una serie de construcciones que, aplicadas a los segmentos $a, b, c, \ldots.$ supuestos dados, conduzcan al segmento x, este procedimiento constructor debe necesariamente depender de los segmentos $a, b, c, \ldots.$ en sí mismos y no de la unidad adoptada para medirlos. Pero sabemos (n. 3) que, si se cambia la unidad, por ejemplo, considerando una que sea r veces más pequeña que la primitiva, las longitudes $a, b, c, \ldots.$ de los segmentos dados, como también la longitud x del segmento que se quiere construir, resultan todas multiplicadas por r.

Por eso la expresión $P\ (a, b, c, \ldots.)$ debe ser tal, que si en ella cada una de las longitudes $a, b, c, \ldots.$, de las cuales depende, se multiplica por r, el valor de la expresión, una vez hechos los cálculos, resulte igual a su valor primitivo *P (a, b, c,....)* multiplicado por *r*. En verdad son tales (como se verifica inmediatamente) no sólo las expresiones racionales monomias de 1er. grado

$$x = \frac{a\,b}{c}, \quad x = \frac{a\,b\,b'}{cc'}, \quad x = \frac{a\,b\,b'b''}{c\,c'c'',...},$$

sino también todas las otras expresiones interpretadas en el n. 34

$$x = \sqrt{a\,b}\,, \quad x = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ etc.}$$

Toda expresión *P (a, b, c,....)* que goza de la propiedad indicada se llama *homogénea de primer grado* (respecto a las cantidades *a, b, c,....*, de las cuales ella depende); así que podemos afirmar que *para que una expresión*

$$x = P\,(a,\ b,\ c,....)$$

se pueda interpretar como un segmento construible, a partir de los segmentos a, b, c,.... *de los cuales ella depende, es necesario que sea una expresión homogénea de primer grado.*

No son en cambio homogéneas por sí mismas las expresiones consideradas en el n. prec.

$$x = ab\,,\ x = \frac{b}{c}\,,\ x = \sqrt{a},....,$$

pero hemos logrado interpretarlas geométricamente y construirlas como segmentos, introduciendo el segmento unidad, haciéndolas así homogéneas respecto al conjunto de las cantidades *a, b, c,....* (de las cuales dependen explícitamente) y de la *unidad.* En efecto, si aquí por un momento indicamos el segmento unidad con *u*, en vez que con *1*, las hemos podido interpretar escribiéndolas bajo la forma

$$x = \frac{a\,b}{u}\,,\ x = \frac{b\,u}{c}\,,\ x = \sqrt{a\,u},....$$

37. Puesto que hemos visto que con la regla y el compás son construibles las expresiones

$$a + b, \quad a\,b, \quad \frac{a}{b}, \quad \sqrt{a},$$

resulta sin más probado que con esos instrumentos elementales son resolubles *los problemas de 1°. y 2.°* grado (es decir, traducibles en ecuaciones de 1.° y 2.° grado) y todos los que se pueden reducir a problemas de 2.° grado, siempre que den lugar a ecuaciones, que, aunque siendo de grado superior al 2°, son resolubles con solas extracciones de raíces cuadradas (como las ecuaciones de 3.er grado sin términos independientes; las ecuaciones de 3.er y 4.° grado recíprocas, las ecuaciones de 4.° grado sin términos de grado impar).

El resultado se invierte, es decir, son éstos los únicos problemas resolubles con la regla y el compás. Nosotros no podemos demostrarlo [1] aquí, y nos limitamos a agregar que la *imposibilidad de trisecar con la regla y el compás un ángulo cualquiera* se reconoce precisamente probando con consideraciones goniométricas que ella depende de una ecuación de 3er. grado de tipo general [2].

Se trata entonces de un problema, que en orden de dificultad, sigue inmediatamente a los resolubles con regla y compás, mientras que, por ejemplo, los problemas de la rectificación de la circunferencia y de la cuadratura del círculo, en cuanto dependen de la construcción de la razón π, que, como ya se dijo (n. 21), no satisface a ninguna ecuación algebraica (de coeficientes racionales), es de una dificultad, para decir así, infinitamente superior.

38. Como una aplicación que resume las consideraciones de los nos. prec., damos aquí, por último, la *interpretación geométrica de la fórmula resolutiva de las ecuaciones de 2.° grado.*

Toda ecuación de tal género se puede pensar reducida a la forma

$$x^2 \pm a\,x \pm b^2 = o$$

---

[1] Cfr. el Art. de G. Castelnuovo, « *Sobre la resolubilidad de los problemas geométricos con los instrumentos elementales; contribución de la geometría analítica* », en la II parte de los « Collectanea », de F. Enriques.

[2] Cfr. el Art. ya cit. de A. Conti, en la II parte de los *Collectanea*, de F. Enriques.

donde a y b designan dos números positivos (longitudes de segmentos dados). Pero como nosotros construiremos, en valor absoluto, también las eventuales raíces negativas, de los cuatro tipos de ecuaciones, correspondientes a todas las posibles combinaciones del signo, podemos limitarnos a considerar sólo los dos siguientes:

$$\alpha) \qquad x^2 - a\,x + b^2 = o$$

$$\beta) \qquad x^2 + a\,x - b^2 = o$$

pues los otros dos se reducen a éstas, cambiando de signo a x (con lo cual cambia el signo, pero no el valor absoluto de las raíces).

Empezando por la α), notemos que esta ecuación, puesto que se puede escribir

$$a\,x - x^2 = b^2 \qquad \text{o sea} \qquad x\,(a - x) = b^2,$$

traduce en forma algebraica el problema geométrico de *determinar las dimensiones* (x y $a - x$) *del rectángulo de semiperímetro* a, *equivalente al cuadrado de lado* b.

La fórmula de resolución de las ecuaciones de 2.º grado, según el Álgebra, da para las soluciones de α las expresiones

$$(1) \qquad \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$$

las cuales son reales y distintas siempre y sólo cuando sea

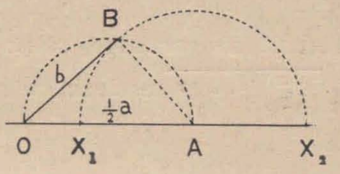
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2 > o,$$

es decir, dada nuestra hipótesis de que los números a y b son positivos,

$$\frac{a}{2} > b.$$

Supuesta verificada esta condición, las dos soluciones (1) de la α) (ambas positivas) se construyen, sumando y restando del segmento $\frac{a}{2}$ el segmento $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2}$, es decir, el segmento cateto del triángulo rectángulo, que tiene la hipotenusa $\frac{a}{2}$ y el cateto b.

La construcción efectiva está indicada en la figura donde las dos raíces (1) están representadas por OX_1, OX_2, y son precisamente OX_1 y OX_2 las dimensiones del rectángulo buscado.



Si es

$$\frac{a}{2} > b$$

la ecuación α) admite la única solución $\frac{a}{2}$, inmediatamente construíble ; en cambio, si es

$$\frac{a}{2} < b$$

la α) no tiene soluciones reales y, correspondientemente, la construcción indicada para el primer caso resulta imposible y el problema geométrico es insoluble.

Pasemos a la ecuación

$$\beta) \qquad x^2 + ax - b^2 = O$$

que, como puede escribirse

$$x\,(x + a) = b^2,$$

traduce el problema geométrico de *determinar las dimensiones del rectángulo equivalente al cuadrado de lado* b *y que tiene por diferencia de sus lados el segmento* a.

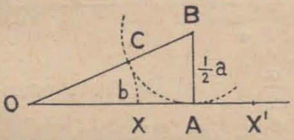
La fórmula general de resolución de las ecuaciones de 2.° grado da para la β las dos soluciones

$$-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2},$$

las cuales, por ser $\left(\frac{a}{2}\right) + b^2 > o$, son siempre reales y distintas, pero una positiva y la otra negativa. Si nos proponemos resolver el problema geométrico enunciado, debemos considerar sólo la solución positiva

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2} - \frac{a}{2},$$

la cual se construye, restando el segmento $\frac{a}{2}$ del segmento $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2}$, es decir, de la hipotenusa del triángulo de catetos $\frac{a}{2}$ y b. La construcción efectiva está indicada en la figura, en la cual OX representa la solución positiva de la β), es decir, el lado menor del rectángulo buscado.



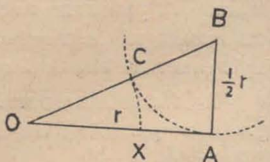
La solución negativa de β), considerada en valor absoluto, está dada naturalmente por OX', donde X' es el simétrico de X respecto a A.

39. Nota. — El problema geométrico, al cual hemos sido conducidos en el n. prec. por la interpretación de la ecuación β), comprende como caso particular el problema de la *construcción de la sección áurea de un segmento dado r,* resuelto ya en el n. 51 del Cap. VII.

En efecto, en este problema se trata de encontrar la parte x de r, cuyo cuadrado sea equivalente al rectángulo de dimensiones r y $r - x$, de donde el problema se traduce en la ecuación:

$$x^2 = r\,(r - x) \quad \text{o sea} \quad x^2 + r\,x - r^2 = o,$$

que es precisamente un caso particular de la β), de la cual se obtiene poniendo $a = b = r$.

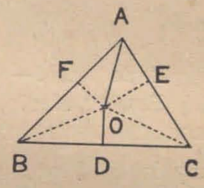


Si introducimos estos valores $a = b = r$ en la construcción indicada en el n. prec. para la solución positiva de la β), encontramos nuevamente la construcción, que ya dimos en el n. 51 del Cap. VII para la sección áurea.

Sofismas geométricos

Hemos reservado para el final de la Geometría plana un grupo de sofismas[1] en los cuales proponemos como ejercicio descubrir el error.

Sofisma. — *Todo triángulo es isósceles.* Dado un triángulo cualquiera ABC, levántese en el punto medio D de BC la perpendicular y trácese la bisectriz del ángulo opuesto $\hat{A}$.



Si esta bisectriz y la perpendicular son paralelas, tienen necesariamente que coincidir, y el triángulo es isósceles.

Si ellas se cortan en un punto O, éste o es interior o es exterior al triángulo.

Si O es interior al triángulo, bájense desde O las perpendiculares OF y OE sobre AB y AC respectivamente. Como

$$F\hat{A}O = E\hat{A}O,$$

los dos triángulos rectángulos AFO y AEO son iguales, y es

$$(1) \qquad AF = AE.$$

Análogamente es

$$OB = OC$$

y los dos triángulos rectángulos OBF y OCE, por tener iguales la hipotenusa y un cateto son iguales. Resulta

$$(2) \qquad FB = EC$$

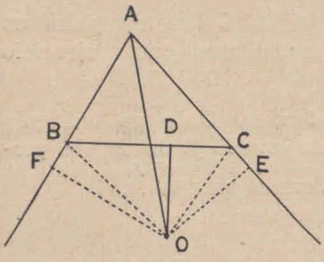
y entonces sumando miembro a miembro las (1), (2), se obtiene

$$AB = AC,$$

el triángulo dado es, pues, isósceles.

[1] Cfr. W. Rouse Ball *Recreations et pròblèmes suathématiques*, 3.ª edi., traducidas por J. Fitz-Patrick; Paris; Hermann, 1898.

Si el punto O es exterior al triángulo, basta repetir la misma construcción. Se demuestra análogamente la igualdad de los dos triángulos rectángulos AFO y AEO, de donde resulta



$$AE = AF.$$

De la igualdad de los triángulos OBF y OCE se deduce

$$FB = EC,$$

y restando miembro a miembro se obtiene

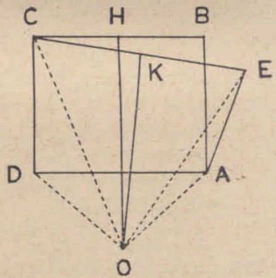
$$AB = AC;$$

también en este caso el triángulo es isósceles.

II Sofisma. — *Un ángulo recto es igual a un ángulo obtuso.*

Sea, en efecto, un rectángulo $ABCD$, por el vértice A tracemos una recta exterior al rectángulo y que forme con AB un ángulo $E\hat{A}B$ agudo.

Tomemos $AE = AB = DC$, unamos C con E, y en los puntos medios H y K, de CB y CE respectivamente, levantemos las perpendiculares, las cuales se cortan necesariamente en un punto O, porque las CB y CE no son paralelas.



Entonces uniendo O con A, D, E y C se tiene

$$OD = OA, \ OC = OE.$$

Puesto que por hipótesis es $DC = AE$, los dos triángulos ODC y OAE que tienen los lados ordenadamente iguales son iguales y es $O\hat{D}C = O\hat{A}E$.

Pero en el triángulo isósceles OAD es

$$O\hat{D}A = O\hat{A}D,$$

de donde resulta

$$O\hat{D}C - O\hat{D}A = O\hat{A}E - O\hat{A}D,$$

es decir,

$$A\hat{D}C = D\hat{A}E$$

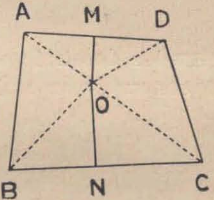
III Sofisma. — *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, los otros dos lados son paralelos.*

Consideremos un cuadrilátero $ABCD$ en el cual sea $AB = CD$.

Levantadas las perpendiculares a AD y BC en sus puntos medios M y N, si esas dos rectas son paralelas, tales son también sus perpendiculares AD y BC.

Si al contrario ellas se cortan en un punto O, este punto será o interior o exterior al cuadrilátero, unamos en cada caso el punto O con los puntos A, B, C y D.

Si O es interior al cuadrilátero, como es $AO = OD$, $OB = OC$, $AB = DC$, los dos triángulos ABO y DCO son iguales, y es entonces



$$\widehat{AOB} = \widehat{DOC},$$

pero es también

$$\widehat{AOM} = \widehat{MOD} \text{ y } \widehat{BON} = \widehat{NOC}$$

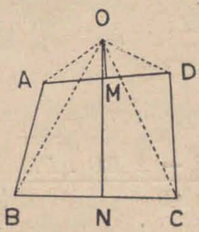
y entonces, sumando miembro a miembro

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOM} + \widehat{BON} = \widehat{DOC} + \widehat{MOD} + \widehat{CON},$$

de donde resulta

$$\widehat{AOM} + \widehat{AOB} + \widehat{BON} = 2 \textit{ rectos}.$$

Entonces, los tres puntos M, O y N están en línea recta, y por consiguiente las rectas AD y BC perpendiculares a una misma recta, son paralelas.



Si O es exterior al cuadrilátero, se tiene

$$\widehat{AOB} = \widehat{DOC}, \quad \widehat{BON} = \widehat{NOC},$$

de donde resulta

$$\widehat{AOB} + \widehat{BON} = \widehat{DOC} + \widehat{NOC},$$

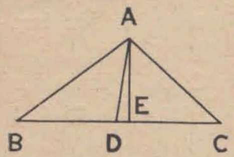
o sea

$$\widehat{AON} = \widehat{NOD}.$$

Entonces la ON es la bisectriz de $\widehat{AOD}$, por lo tanto coincide con la OM, y como antes, se deduce que AB es paralela a DC.

IV Sofisma. — *Todo segmento es igual a una de sus partes.*

Sea ABC un triángulo cualquiera, y para fijar las ideas supongamos que $\hat{B}$ sea agudo y además $\hat{A} > \hat{C}$.



Tracemos por A la AD de manera que sea $\widehat{BAD} = \hat{C}$, los dos triángulos ABC y DBA son semejantes, y entonces, pasando a las medidas,

$$\frac{ABC}{DBA} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{AD}^2}.$$

Pero los dos triángulos ABC y DBA tienen la misma altura; entonces sus áreas están como las longitudes de las bases, es decir,

$$\frac{ABC}{DBA} = \frac{BC}{BD}.$$

Resulta de las dos igualdades precedentes que

$$\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC}{BD},$$

o sea

$$\frac{AC^2}{BC} = \frac{AD^2}{BD}.$$

Pero bajada desde A la perpendicular AE sobre BC, obtenemos (V_2, n. 19).

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\ BC\ .\ BE,$$

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2\ BD\ .\ BE;$$

substituyendo en la igualdad anterior,

$$\frac{AB^2 + BC^2 - 2\ BC\ .\ BE}{BC} = \frac{AB^2 + BD^2 - 2\ BD\ .\ BE}{BD},$$

o sea

$$\frac{AB^2}{BC} + BC - 2\ BE = \frac{AB^2}{BD} + BD - 2\ BE.$$

De aquí, simplificando y transportando,

$$\frac{AB^2}{BC} - BD = \frac{AB^2}{BD} - BC,$$

y finalmente

$$\frac{AB^2 - BD \,.\, BC}{BC} = \frac{AB^2 - BC \,.\, BD}{BD}.$$

De esta igualdad resulta que el segmento BC es igual a su parte BD.

EJERCICIOS

1) Demostrar algebraicamente los teoremas enunciados en los nos. 7, 8 y 10, del Cap. V°.
2) Si los puntos A, B, C, D forman un grupo armónico, las longitudes de los segmentos AC, AB, AD están en progresión *armónica,* es decir, sus recíprocos están en progresión aritmética.
3) Si los puntos A, B, C, D forman un grupo armónico y O es el punto medio de AB, se tiene $OC^2 = OB \,.\, OD$.
4) Dados varios segmentos, cuyas medidas son designadas con $a, b, c, d, e, f\ldots.$, construir los segmentos cuya medida sea:

$$\frac{a^3 + b^3}{c^2 + d^2} \left(= \frac{a^2}{\frac{c^2}{a} + \frac{d^2}{a}} + \frac{b^2}{\frac{c^2}{b} + \frac{d^2}{b}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{a\,b\,c}{d}}, \quad \sqrt{5\,\frac{a\,b\,c\,d}{e f}}$$

$$\sqrt{5\,a^2 + 2\,b^2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\sqrt{a^2 b + c^3}, \quad \sqrt{3\,\frac{a\,b\,c}{d} + e^2}, \quad \frac{c\,\sqrt{a^2 + b^2}}{d}$$

$$\sqrt{a\,b - c^2} \qquad (a\,b > c^2)$$

$$\sqrt{\frac{a^3 + b^2 c}{d}} + \sqrt{\frac{e^3 - f^3}{g}} \qquad (e > f)$$

$$\sqrt{g\sqrt{a^2+b^2}+h\sqrt{e^2+f^2}}$$

$$\sqrt[4]{a^4+b^4}\quad\left(\sqrt{=a\sqrt{a^2+\frac{b^4}{a^2}}}\right)$$

$$\sqrt{\sqrt{a^2+2b^2}\sqrt{e^2+3f^2}},$$

5) Dados varios segmentos cuyas medidas son $a, b, c, d, \ldots.,$ y dado el segmento unidad de medida ($u = 1$), construir los segmentos

$$a\,b\,c\quad\left(=\frac{a\,b\,c}{u^2}\right)$$

$$a\,b\,c+\frac{3}{7}-c^2$$

$$\sqrt{a^2-b}\ \left(=\sqrt{a^2-b\,u}\right),\quad\sqrt{a+b^2+c^3},\quad\sqrt{5\,a^2+b},$$

$$\frac{a+\sqrt{a^2+4\,c\,d}}{2\,e},\quad\frac{3\,d+\sqrt{a^2-b\,c}}{5\,e}\quad(a^2>b\,c)$$

$$\sqrt{3\,d+\sqrt{a-b^2+c}}\ (a+c>b^2),\quad\sqrt{2\,a+\sqrt{3\,b+\sqrt{c+d^2}}}$$

$$\sqrt{\sqrt{a^3-\frac{c\,d}{b^2}}\sqrt{a^2+5\,b}}\quad\left(a^3>\frac{c\,d}{b^2}\right)$$

En todos esos casos las fórmulas deben hcaerse homogéneas de primer grado con un artificio conveniente.

6) Mediante la *regla de dos bordes,* usada para efectuar la construcción fundamental indicada en otros ejercicios, dados los segmentos $a, b, c, d \ldots.$ y la unidad de medida ($u = 1$), determínense los segmentos

$$a\,b,\quad\frac{a\,b}{c},\quad\frac{a\,b\,c}{d},$$

$$\sqrt{a^2+b^2},\quad\sqrt{a+2\,b^2},\quad\sqrt{5+a^2}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2},\quad\sqrt{a\,b+c+d^3}$$

Con el SUBSIDIO DEL ÁLGEBRA :

7) Determinar dos segmentos, dadas su suma y el área del rectángulo por ellos contenido.

8) Determinar el lado del polígono regular de 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lados, dado el radio o la apotema.

9) Calcular el área del polígono regular de 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lados, dado:

a) el lado,

b) o bien el radio,

c) o la apotema.

10) Transformar un polígono regular de 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15 lados en otro polígono regular equivalente, cuyo número de lados (distinto del precedente) sea también uno de los números 3, 5, 6, 8, 10, 12, 15.

11) Demostrar que las áreas de dos polígonos regulares de un número par de lados, inscriptos en el mismo círculo, están entre sí como los perímetros de los polígonos regulares, inscriptos en el mismo círculo y que tienen respectivamente un número de lados mitad del número de lados de los dos polígonos dados (1).

12) Transformar un rectángulo dado en un triángulo rectángulo de base dada en el cual uno de los catetos sea triple del otro.

13) Construir un triángulo rectángulo de dada base, del cual sea dada la suma o la diferencia de los catetos.

14) Construir un triángulo dados la base, el pie de la relativa altura y la suma o la diferencia o la razón de los otros dos lados.

15) Construir un triángulo, dadas la base, el punto en el cual ella está dividida por la bisectriz del ángulo del vértice y la suma o la diferencia de los otros dos ángulos.

16) Construir un triángulo dadas la base, el área y la suma o la diferencia de los otros dos lados.

17) Demostrar que en cada triángulo la suma de los cuadrados de dos lados es equivalente a dos veces la suma del cuadrado de la mediana correspondiente a este lado.

18) Demostrar que en cada triángulo la diferencia de los cuadrados de dos lados es igual a dos veces el rectángulo del ter-

(1) U. Amaldi: Appunti di Geometria; Pitágora, II n. 1 — 1895-1896.

cer lado y de la proyección de la correspondiente mediana sobre él.

19) Demostrar que el rectángulo de dos lados de un triángulo es equivalente al rectángulo de la altura correspondiente al tercer lado y del diámetro del círculo circunscripto. (En el dado triángulo ABC bájese la altura AD y trácese el diámetro AE del círculo circunscripto; después compárense los triángulos ABD, ABC).

20) Si R es el radio del círculo circunscripto a un triángulo de lados a, b, c y de semiperímetro p y de área S, se tiene (ej. prec.)

$$R = \frac{a\,b\,c}{4\,S}.$$

21) Si r es el radio del círculo inscripto a un triángulo, se tiene (siendo p el semiperímetro)

$$S = p\,r.$$

22) Si r_1, r_2, r_3 son los radios de los círculos ex-inscriptos comprendidos en los ángulos $C\hat{A}B$, $B\hat{A}C$, $B\hat{C}A$, respectivamente se tiene

$$r_1 = \frac{S}{p-a}, \quad r_2 = \frac{S}{p-b}, \quad r_3 = \frac{S}{p-c}.$$

23) Conservando las notaciones precedentes demuéstrense las fórmulas siguientes:

$$S = \sqrt{r\,r_1\,r_2\,r_3},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b},$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c},$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3},$$

$$4\,R = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}.$$

24) Dado un círculo de radio r, tenemos que:

a) el lado del cuadrado inscripto es $r\sqrt{2}$ y del circunscripto es $2\,r$;

b) los lados de los triángulos equiláteros inscripto y circunscripto son respectivamente r y $\frac{2}{3}\,r\sqrt{3}$.

25) El lado del decágono regular inscripto en el círculo de radio r es

$$r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

26) El lado del pentágono regular de radio r es

$$r\,\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

(Considerados tres lados consecutivos AB, BC, CD del decágono regular inscripto, aplíquese el teorema de PTOLOMEO (VII, n. 47) al cuadrilátero $ABCD$ y téngase en cuenta el ej. precedente).

27) El lado del pentágono regular inscripto en un círculo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos los lados del exágono y del decágono regulares inscriptos en el mismo círculo. Demostrarlo algebraicamente (n. 54 del Cap. VII.

28) Si l y L son los lados de dos polígonos regulares de igual número de lados, el uno inscripto y el otro circunscripto al círculo de radio r, tenemos que

$$L = \frac{2\,r\,l}{\sqrt{4\,r^2 - l^2}}$$

29) Calcular en base a los ejercicios 25, 26, 27, los lados del pentágono y decágono regulares circunscriptos al círculo de radio dado r.

30) Si indicamos con pn, Pn los perímetros de los polígonos regulares de n lados inscripto y circunscripto a un círculo, se tiene

$$P_2 n = \frac{2\,Pn\,pn}{Pn + pn}, \quad p_2 n = \sqrt{pn\ P_2 n}.$$

31) Si se forma una sucesión, cuyos términos sean alternativamente los valores inversos de las longitudes de los perímetros de los polígonos regulares circunscriptos e inscriptos a un dado círculo, en los cuales el número de lados vaya siempre duplicándose, esos términos, a partir del tercero, serán alternativamente medio aritmético y medio geométrico respecto a los dos términos inmediatamente precedentes [1]. (Cfr. ej. prec.)

$$\frac{a+b}{2} \quad \text{y} \quad \sqrt{a\,b}.$$

32) Si s_n, S_n, son las áreas de los polígonos regulares de n lados inscripto y circunscripto al círculo, se tiene que:

$$S_{2n} = \frac{2\,S_n\,s_n}{s_{2n} + s_n}\,, \quad s_{2n} = \sqrt{s_n\,S_n}\,.$$

33) Fórmese una sucesión cuyos términos sean alternativamente los valores inversos de las áreas de los polígonos regulares inscriptos y circunscriptos a un círculo dado y tales que el número de los lados vaya siempre duplicándose. Esos términos, a partir del tercero, serán alternativamente media geométrica y media aritmética, cada uno respecto a los dos términos inmediatamente precedentes (Cfr. ej. prec.).

34) Considérense todos los polígonos regulares que tienen un perímetro dado (isoperímetros). Si r_n, a_n son el radio y la apotema del de n lados entre esos polígonos, se tiene:

$$a_{2n} = \frac{a_n + r_n}{2}\,, \quad r_{2n} = \sqrt{r_n\,a_{2n}}\,.$$

35) Si se forma una sucesión, cuyos términos sean alternativamente los valores inversos de las longitudes de la apotema y del radio de polígonos regulares isoperímetros, cuyos lados vayan siempre duplicándose, esos términos, a partir del tercero, serán alternativamente media aritmética y media geométrica, cada uno respecto a los dos términos inmediatamente precedentes (Cfr. ej. prec.).

---

(1) **Recordemos que, dados dos números a y b, se llaman** ***media aritmética y geométrica*** **de los dos números, respectivamente:** $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$.

36) Considérense todos los polígonos regulares equivalentes a un polígono dado. Si r_n, a_n indican el radio y la apotema del que tiene n lados, se tiene

$$r_{2n} = \sqrt{a_n \, r_n} \, , \quad a_{2n} = \frac{\sqrt{2 \, a_n (a_n + r_n)}}{2} \, .$$

37) Si se forma una sucesión, cuyos términos son alternativamente las áreas de los cuadrados del radio y del cuadrado de la apotema de polígonos regulares todos equivalentes entre s y cuyo número de lados vaya siempre duplicándose, esos términos, a partir del tercero, serán alternativamente media geométrica y media aritmética, cada uno respecto a los dos inmediatamente precedentes (Cfr. ej. prec.).

NOTA. — Las cuatro proposiciones de los ej. 31, 32, 33, 34 conducen a cuatro métodos, entre ellos aritméticamente idénticos *para el cálculo numérico de* π. Para dar una idea de estos métodos y poner claramente en luz lo que ellos tienen de común es conveniente anteponer el siguiente

LEMA ARITMÉTICO. — *Si en la sucesión de números*

$$a_1, \; b_1, \; a_2, \; b_2, \; \ldots, \; a_n, \; b_n, \; \ldots$$

los dos primeros son desiguales y los otros, a partir del tercero, son alternativamente media aritmética y media geométrica de los dos inmediatamente precedentes, es decir,

$$a_i = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}, \quad b_i = \sqrt{a_i \, b_{i-1}},$$

las dos sucesiones

$$a) \qquad a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_n, \; \ldots$$

$$b) \qquad b_1, \; b_2, \; \ldots, \; b_n, \; \ldots$$

son convergentes; es decir: 1.°) los números de una van aumentando y los de la otra decreciendo; 2.°) considerado un número positivo pequeño cualquiera, se pueden encontrar siempre dos números a_n, b_n, cuya diferencia es menor en valor absoluto que el número prefijado.

En efecto supuesto, para fijar las ideas $a_1 < b_1$, siendo:

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

será

$$a_2 > \frac{a_1 + a_1}{2} = a_1$$

y

$$a_2 < \frac{b_1 + b_1}{2} = b_1$$

y análogamente, siendo

$$b_2 = \sqrt{a_2\, b_1}$$

será

$$b_2 < \sqrt{b_1\, b_1} = b_1$$

y

$$b_2 > \sqrt{a_2\, a_2} = a_2.$$

Resulta, pues, que la *a)* es creciente y la *b)* decreciente.

En segundo lugar de las identidades

$$b_2 - a_2 = \frac{b_2^2 - a_2^2}{b_2 + a_2} = \frac{a_2\, b_1 - a_2^2}{b_2 + a_2} = \frac{a_2}{b_2 + a_2}\,(b_1 - a_2)$$

y de la

$$\frac{a_2}{b_2 + a_2} < \frac{a_2}{2\,a_2} = \frac{1}{2}$$

resulta

$$b_2 - a_2 < \frac{1}{2}\,(b_1 - a_2),$$

y siendo

$$a_2 = \frac{1}{2}\,(a_1 + b_1),$$

y en consecuencia

$$b_1 - a_2 = \frac{1}{2}\,(b_1 - a_1)$$

obtenemos

$$b_2 - a_2 < \frac{1}{4}\,(b_1 - a_1).$$

En general se demuestra del mismo modo que:

$$b_i - a_i < \frac{1}{4} (b_{i-1} - a_{i-1}).$$

Por eso las diferencias $b_i - a_i$ serán desde un cierto valor en adelante menores que cualquier número positivo asignado (por pequeño que sea). Análogamente se razonará en la hipótesis $a_1 > b_1$; en tal caso resultará que es decreciente la sucesión $a)$ y creciente la $b)$.

Antepuesto esto, podemos dar una noción de los métodos para el cálculo de π.

I. Métodos de los perímetros. — Si c es la longitud de la circunferencia de radio 1, es (IX, n. 19):

$$c = 2\pi \quad \text{luego}$$

$$\pi = \frac{c}{2},$$

de manera que para tener un valor aproximado (por defecto o por exceso) de π basta calcular la longitud del semiperímetro de un polígono inscripto o circunscripto al círculo de radio 1.

Por otra parte, en virtud del ej. 31 y del Lema aritmético demostrado, las dos sucesiones

$$\frac{1}{P_n}, \frac{1}{P_{2n}}, \frac{1}{P_{4n}}, \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{p_n}, \frac{1}{p_{2n}}, \frac{1}{p_{4n}}, \ldots\ldots$$

son convergentes, cualquiera que sea el número n de lados de los dos primeros polígonos regulares (inscripto y circunscripto) que se consideren; y en base al ej. 31 esas dos sucesiones se podrán igualmente calcular apenas se conozcan los dos primeros términos.

Serán también convergentes las dos sucesiones

$$(1) \qquad \frac{2}{P_n}, \frac{2}{P_{2n}}, \frac{2}{P_{4n}}, \ldots\ldots$$

$$(2) \qquad \frac{2}{p_n}, \frac{2}{p_{2n}}, \frac{2}{p_{4n}}, \ldots\ldots$$

que por cuanto se dijo al principio admiten como límite común $\frac{1}{\pi}$. Por eso los términos de las (1) (2) darán otros tantos valores aproximados (respectivamente por exceso y por defecto) de $\frac{1}{\pi}$. Si partimos de los cuadrados circunscripto e inscripto, los primeros términos de las (1) (2) son respectivamente $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Pues $\frac{1}{4}$ es medio aritmético entre 0 y $\frac{1}{2}$, y $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ es medio geométrico entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, deducimos que para obtener dos sucesiones convergentes, cuyo límite común sea $\frac{\pi}{1}$, basta formar una sucesión de medias aritméticas como aquella indicada en el Lema aritmético, partiendo de los números 0 y $\frac{1}{2}$.

II. Métodos de las áreas. — En base al n. 26 del Cap. IX el área s el círculo de radio *1* es

$$s = \pi$$

Así que para obtener un valor aproximado (por defecto o por exceso) de π, basta calcular el área de un polígono inscripto o circunscripto al círculo de radio *1*.

Del ej. 33 y del lema aritmético resulta que las dos sucesiones

$$(3) \qquad \frac{1}{sn}, \quad \frac{1}{s_2 n}, \quad \frac{1}{s_4 n}, \ldots\ldots$$

$$(4) \qquad \frac{1}{Sn}, \quad \frac{1}{S_2 n}, \quad \frac{1}{S_4 n}, \ldots\ldots$$

son convergentes.

Su límite común será $\frac{1}{\pi}$, y, calculando un número suficientemente grande de términos de ellas, se obtendrá un valor aproximado de $\frac{1}{\pi}$ con un error tan pequeño como sea necesario.

Como $S_2 = 2$, $S_4 = 4$, partiendo de los cuadrados inscripto y circunscripto se obtiene otra vez la misma sucesión de medias aritméticas y geométricas que hemos encontrado con el 1.er método.

III. Método de los isoperímetros. — El radio r de una circunferencia de longitud 2, (n. 19 del Cap. IX), es:

$$r = \frac{1}{\pi}.$$

Y si un polígono regular tiene el perímetro 2, su apotema será menor que r, es decir, que $\frac{1}{\pi}$, y su radio será mayor que $\frac{1}{\pi}$; así que $\frac{1}{\pi}$ será el límite común de las dos sucesiones convergentes (cfr. ej. 35 y el Lema aritmético):

$$a_n,\ a_{2n},\ a_{4n}, \ldots.$$

$$r_n,\ r_{2n},\ r_{4n}, \ldots.$$

donde a_i, r_i son la apotema y el radio del polígono regular de i lados, cuyo perímetro es igual a 2.

Partiendo del cuadrado $\left(a_4 = \frac{1}{4},\ r_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ se obtiene otra vez la misma sucesión numérica, encontrada con los dos primeros métodos.

IV. Método de los equivalentes. — Si un círculo tiene el área igual a 1, su radio r es tal que (IX, n. 26)

$$r^2 = \frac{1}{\pi},$$

de modo que, si r_i, a_i indican el radio y la apotema de un polígono regular de i lados, de área igual a 1, tendremos

$$a^2_i < \frac{1}{\pi} < r^2_i.$$

Luego $\frac{1}{\pi}$ será el límite común de las sucesiones (convergentes por el ej. 37 y el Lema aritmético):

$$r^2_n,\ r^2_{2n},\ r^2_{4n}, \ldots.$$

$$a^2_n,\ a^2_{2n},\ a^2_{4n}, \ldots.$$

Si partimos del cuadrado, para el cual es

$$r_4^2 = \frac{1}{2}, \quad a_4^2 = \frac{1}{4},$$

obtenemos otra vez la conocida sucesión de medias aritméticas y geométricas [1].

NOCIONES SOBRE LOS DIAGRAMAS CARTESIANOS.

Hemos visto (IX, n. 2), que, si dos clases de magnitudes son directamente proporcionales, la medida y de cualquier cantidad de una de las dos clases, que para entendernos llamaremos segunda, se obtiene multiplicando la medida x de la cantidad correspondiente de la primera por un número fijo r (razón de proporcionalidad); es decir, se tiene

$$(1) \qquad y = r\, x,$$

donde r se puede interpretar también como la *medida* de la cantidad de la segunda clase, que corresponde a aquella cantidad de la primera, que se eligió como unidad.

Si, en cambio, dos clases de magnitudes son inversamente proporcionales (VII, n. 48) y se denotan también con x e y las medidas de dos cantidades cualesquiera respectivamente pertenecientes a la primera y a la segunda clase correspondientes entre sí, mientras sea r la medida de la cantidad de la segunda clase que corresponde a la cantidad de la primera elegida como unidad, subsiste, por def., la proporción

$$y : r = 1 : x,$$

de donde resulta

$$(2) \qquad y = \frac{r}{x}.$$

Las ecuaciones (1) y (2), que caracterizan las dos leyes de *proporcionalidad*, respectivamente *directa* e *inversa*, dan los ejemplos más sencillos posibles de lo que en Matemática se llama *función*.

---

[1] Quien desee sobre estos métodos noticias más precisas vea los *Elementos de Geometría* de SANNIA-D'OVIDIO.

Cuando dos *variables* x e y, es decir, las medidas de dos magnitudes susceptibles cada una de infinitos valores, dependen una de la otra, de manera que para cada valor dado a la x queda correspondientemente determinado un valor para la y, se dice que la *y es función de la x*.

La ley según la cual la y está ligada a la x, puede ser de naturaleza cualquiera: puede ser una ley expresable por una ecuación algebraica, como p. ej. la (1) o la (2); pero puede también ser una ley física, o biológica, o económica, etc., como resulta de considerar, p. ej., la temperatura en un dado lugar como función del tiempo, o la estatura de un hombre como función de la edad, o la cifra total de las exportaciones de un dado país como función del tiempo, etc.

En cada caso se puede obtener una imagen del comportamiento de una dada función construyendo su *diagrama* o *gráfica*, de la manera que aquí rápidamente indicaremos.

Tomemos una hoja de papel cuadriculado (p. ej. milimétrico), fijemos dos rectas de la cuadrícula secantes en un punto O, de la parte media de la hoja; y, llamando OX a la horizontal, OY a la vertical, convendremos en llamar *positivo* sobre cada una de ellas un sentido elegido a voluntad, p. ej. el de izquierda a derecha sobre la OX, y el de abajo hacia arriba en la OY. Fijada finalmente una unidad para las longitudes, p. ej. el lado de la cuadrícula (el cm. para el papel milimétrico), llámanse *ejes coordenados de origen O* a las dos rectas OX, OY, pensadas cada una con su sentido positivo, con su punto O y con la elegida unidad.

A cada punto P de la hoja (o, mejor dicho del plano, del cual el papel es imagen) hacemos corresponder los dos números, que miden sus distancias a los ejes, y precisamente demos a la distancia al eje OY el signo $+$ o $-$, según que P cae a la derecha o a la izquierda de él, a la distancia al eje OX el signo $+$ o $-$, según que P cae arriba o abajo de él. Estos dos números (relativos) se llaman *coordenadas* del punto; y para distinguirlas se llama *abscisa* (y se designa genéricamente con x) a la distancia al eje OY, *ordenada* (y se designa genéricamente con y) a la distancia al eje OX.

De esta manera, no sólo se hace corresponder a cada punto del plano una determinada *abscisa* x y una determinada *ordenada*

y; recíprocamente, tomados arbitrariamente dos números (relativos) x e y, resulta perfectamente determinado el único punto que tiene la abscisa x y la ordenada y.

Establecidas estas convenciones, se puede representar con una *línea* cada función y de x, p. ej., la (1) o la (2); asígnense sucesivamente a x valores arbitrarios, p. ej., $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ ó $0{,}1, \pm 0{,}2, \ldots$, etc., y, calculado para cada uno el correspondiente valor de y, represéntese cada par de valores correspondientes de x e y mediante el punto P que tiene por abscisa el primero, por ordenada el segundo. Se tienen así en el plano cuantos puntos se quieran; y si se imagina hacer variar con continuidad el valor de x; si los de y también varían con continuidad, el punto representativo P describe una cierta línea, que se llama *gráfica* o *diagrama* o *curva representativa* de la función considerada.

Es bien claro cómo esta gráfica da una imagen precisa y expresiva de la ley de dependencia entre las variables x e y. Proponiendo los ejercicios siguientes, sobrentendemos siempre que se dispone de una hoja de papel cuadriculado, o más bien milimétrico, sobre la cual se hayan fijado dos ejes OX, OY (con sus sentidos positivos y con sus unidades de medidas).

38) Marcar en el plano los puntos de coordenadas:

$$0 \text{ y } 0;\ 2 \text{ y } 0;\ -3 \text{ y } 0;\ 0 \text{ y } 1;\ 0 \text{ y } -4;$$

$$2 \text{ y } 3;\ -2 \text{ y } 3;\ -2 \text{ y } -3;\ 2 \text{ y } -3.$$

39) Demostrar que la gráfica de cada función del tipo $y = a\,x$ (función homogénea de primer grado), donde a es un número cualquiera (también negativo), es una recta que pasa por el origen O. Si $a > o$, la recta está en el ángulo recto de los dos semiejes positivos y en el opuesto al vértice; si $a < o$, está en los otros dos ángulos.

NOTA. — La gráfica de la ley de proporcionalidad directa (1) entre magnitudes geométricas (medidas por números absolutos) es una semirrecta del ángulo de los semiejes positivos.

40) Dibujar la gráfica de la proporcionalidad (directa) de las siguientes clases de magnitudes:

a) lados y perímetros de los triángulos equiláteros (o de los cuadrados, o de los polígonos regulares de cualquier número dado de lados);

b) lados y diagonales de los cuadrados.

c) lados y apotemas de los exágonos regulares.

41) Demostrar que cada recta por O es la gráfica de una determinada función homogénea de primer grado $y = a\,x$.

42) Demostrar que: 1) la gráfica de una función del tipo $y = ax + b$ (función de primer grado), donde a y b son números dados cualesquiera, es una recta que pasa por el punto de coordenadas O y b, y paralela a la recta por el origen que representa la $y = a\,x$); 2) cada recta es la gráfica de una determinada función de primer grado.

43) Dibujar por puntos la gráfica de la proporcionalidad (inversa) entre los catetos de los triángulos rectángulos de 5 cm.^{2} de área.

44) Dibujar por puntos la gráfica de la función $y = \dfrac{a}{x}$, donde a es un número cualquiera. Se encuentra una curva llamada *hipérbola equilátera,* que está formada por dos arcos o *ramas,* separadas la una de la otra y abiertas, que se extienden al infinito, acercándose indefinidamente tanto al eje OX como al eje OY. Si $a > o$ las dos ramas están una en el ángulo de los semiejes positivos, la otra en el opuesto al vértice; están en cambio en los otros dos ángulos, si $a < o$.

Nota. — La gráfica de la proporcionalidad inversa (2) entre magnitudes geométricas (medidas por números absolutos) es una rama de hipérbola equilátera, perteneciente al ángulo de los semiejes positivos.

45) Dibujar por puntos la gráfica que representa:

a) El área de un cuadrado como *función* de la longitud de su diagonal (variable);

b) El área de un exágono regular como *función* de su apotema (variable).

46) Dibujar la gráfica de la función $y = a\,x^2$, donde a es un número cualquiera. Se obtiene una curva, llamada *parábola,* constituída por una sola rama que se extiende al infinito, simétrica respecto al eje OY y tangente al eje OX en O. Ella vuelve la concavidad hacia arriba o hacia abajo, según que es $a > o$, o $a < o$.

47) Sobre el papel milimétrico descríbase con cuidado la parábola que representa la función $y = x^2$ (hallando muchos puntos y uniéndolos con continuidad). Reconocer que ella permite resolver gráficamente (por aproximación) cada ecuación de segundo grado con una incógnita. (Las eventuales raíces de $x^2 + p x + q = o$ son dadas por las abscisas de los puntos comunes a la parábola indicada y a la recta representada por la función $y = - p x - q$).

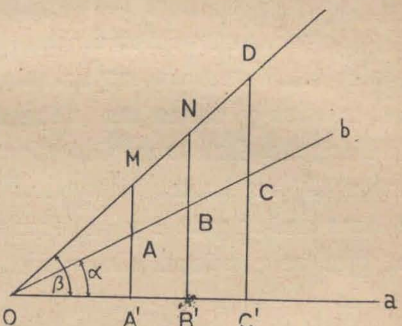
Desarróllese bajo este aspecto geométrico la discusión de la existencia de las raíces.

CAPÍTULO X

§ 9. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS [1]

Def. del seno, coseno, tangente y cotangente del ángulo agudo. — Cálculo de estas funciones para los ángulos de 45°, 30° y 60°. — Funciones goniométricas de un ángulo cualquiera. — Relaciones fundamentales entre las funciones de un mismo arco. — Tablas trigonométricas. — Aplicaciones. — Resolución de triángulos rectángulos. — Ejercicios.

Consideremos un ángulo agudo α de vértice O y lados a y b. Si desde puntos cualesquiera A, B, C... de uno de sus lados trazamos las perpendiculares AA', BB', CC'... al otro, los triángulos rectángulos OAA', OBB', OCC'... que resultan, son semejantes entre sí y se obtiene:



$$1)\quad AA' : OA = BB' : OB = CC' : OC = \ldots$$

$$2)\quad OA' : OA = OB' : OB = OC' : OC = \ldots$$

$$3)\quad AA' : OA' = BB' : OB' = CC' : OC = \ldots$$

---

[1] Estas breves nociones de trigonometría han sido agregadas por el traductor a fin de responder a los programas oficiales.

Estas igualdades nos prueban que:

a) *En tales triángulos la razón de cada cateto a su correspondiente hipotenusa y la de un cateto al otro no dependen de ellos.*

Si repetimos la misma operación con otro ángulo agudo $\hat{\beta}$ diferente de $\hat{\alpha}$ que tiene común con éste el vértice y el lado *a*, subsisten las mismas igualdades de razones pero son distintas de las precedentes.

Resulta entonces que al variar el ángulo α que la semirrecta *b* forma con la *a*, varían las razones precedentes, es decir:

b) *Las razones (1) (2) y (3) dependen solamente del ángulo* α.

El valor numérico de estas razones para cada ángulo dado, tiene mucha importancia teórica y práctica; por tal motivo y como no dependen sino de la amplitud del ángulo, han recibido nombres especiales. La primera (1) se llama *seno* del ángulo α, la segunda (2) *coseno* del ángulo α y la tercera (3) *tangente* del ángulo α, que se escriben abreviadamente:

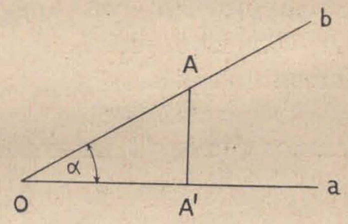
$$sen.\alpha, \qquad cos.\alpha, \qquad tang.\alpha.$$

Se tienen, pues, las siguientes:

Def.: *En todo triángulo rectángulo, se llama* **seno** *de un ángulo agudo a la razón entre el cateto opuesto* *al ángulo y la hipotenusa,* **coseno** *a la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa y* **tangente** *a la razón entre el cateto opuesto y el otro.*

Puesto que el seno, el coseno y la tangente de un ángulo vienen dados por razones entre segmentos, son *números abstractos.* Sin embargo, algunos autores suelen llamarlos impropiamente *líneas trigonométricas.*

Para cada ángulo agudo se pueden calcular fácilmente sus valores. En efecto, si α es el ángulo dado, como las razones mencionadas no dependen de los lados del triángulo, tomemos sobre uno de sus lados y a partir del vértice un segmento OA igual a la *unidad* de segmentos y sea A' su proyección sobre el otro lado.



Se tiene, entonces:

$$sen.\,\alpha = AA' : OA = med.\ AA' \text{ respecto de } OA$$

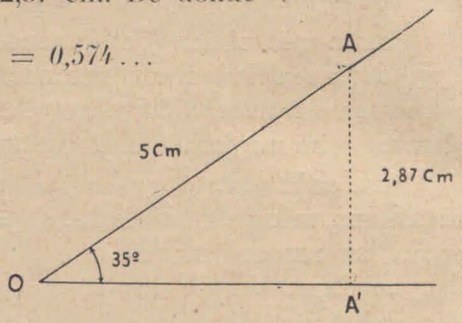
$$cos.\,\alpha = OA' : OA = med.\ OA' \quad ,, \quad ,, \quad ,,$$

$$tg.\,\alpha = AA' : OA' = med.\ AA' : med.\ OA'$$

porque la razón de dos segmentos es igual a la de sus medidas con respecto a la misma unidad. Bastará medir entonces los catetos AA' y OA' con la unidad OA, y los números que resulten serán respectivamente sen. α, y cos. α. La tangente será la razón del primero con el segundo.

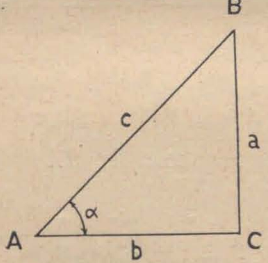
Ej.: En la figura hemos calculado gráficamente el seno de 35°. Para ello hemos tomado $OA = 5$ cm. y ha resultado $AA' = 2{,}87$ cm. De donde

$$sen.\,35° = \frac{2{,}87}{5} = 0{,}574\ldots$$



Determine análogamente el lector el coseno de 35° calculando el segmento OA' y la tangente del mismo ángulo.

De la def. precedente, resulta también que si indicamos con a y b las medidas de los catetos y con c la de la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC, se tiene



$$sen.\,\alpha = \frac{a}{c};\; cos.\,\alpha = \frac{b}{c};\; \text{tg.}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

de donde

$$a = c.\ sen.\alpha, \qquad b = c.\ cos.\alpha,$$

$$a = b.\ tg.\ \alpha$$

y también

$$c = \frac{a}{sen.\alpha}, \quad c = \frac{b}{cos.\alpha}, \quad b = \frac{a}{tg.\alpha}.$$

En palabras:

En todo triángulo rectángulo:

1) *Un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto;*

2) *o por el coseno del ángulo adyacente;*

3) *o al otro cateto por la tangente del ángulo opuesto.*

4) *La hipotenusa es igual a un cateto dividido por el seno del ángulo opuesto;*

5) *o por el coseno del ángulo adyacente.*

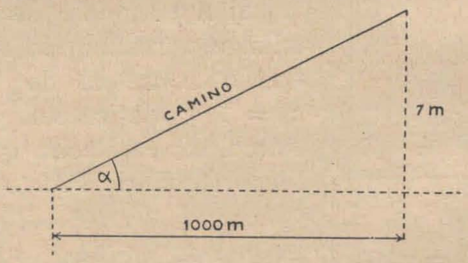
6) *Un cateto es igual al otro cateto dividido por la tangente del ángulo opuesto a este último.*

La tangente de un ángulo tiene aplicación práctica inmediata en el cálculo de *pendientes*. Todos saben qué significa decir que la pendiente de un camino es de 7 por 1000, por ejemplo: quiere decir que por cada 1000 metros (o unidades) de camino horizontal se ascienden o descienden 7 metros (o unidades).

La pendiente es, pues, la tangente del ángulo que la recta del camino forma con la horizontal, es decir,

$$tg.\alpha = \frac{7}{1000} = 0{,}007.$$

En la figura, para mayor claridad, hemos exagerado las proporciones.



Las pendientes, en la práctica, suelen indicarse con notaciones de la forma:

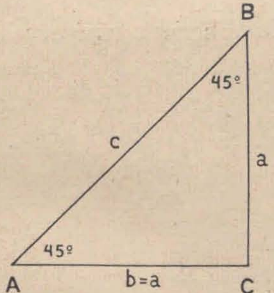
7 : 1000; 1 : 2; 1 : 1; 5 : 100, etc.

El primer número expresa lo que se asciende o desciende, y el segundo la distancia horizontal. Así, pues, para que quede perfectamente determinada una pendiente es preciso decir, además, si es en *ascenso* o en *descenso*.

Cálculo del seno, coseno y tangente de los ángulos de 45°, 30° y de 60°.

Hemos explicado con un ejemplo cómo se pueden calcular prácticamente el seno, el coseno y la tangente de un ángulo cualquiera. Pero hemos observado también que los valores así obtenidos son muy poco aproximados debido a la imperfección de las medidas tomadas directamente sobre la figura.

Vamos a calcular, en cambio, con toda exactitud, pero indirectamente, el seno, el coseno y la tangente de los ángulos de 45°, de 30° y de 60°.



Si $\hat{A}$ es un ángulo de 45°, el triángulo rectángulo ABC construido sobre él de hipotenusa $c = 1$ y de catetos a y b, es isósceles, es decir, que $a = b$, luego (teor. de Pitág.) es:

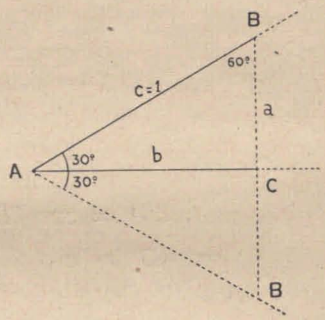
$$c^2 = a^2 + b^2 = 2\,a^2 = 2\,b^2 = 1 \;\therefore$$

$$a = b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\ 45° = \frac{a}{c} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos\ 45°$$

$$tg.\ 45° = \frac{a}{b} = 1.$$

Si $\hat{A}$ es un ángulo de 30°, construído como antes el triángulo rectángulo ABC de hipotenusa unitaria y de catetos a y b, dteerminemos su simétrico ACB' con respecto a la recta AC.



El triángulo ACB' es equilátero por ser equiángulo; luego se tiene:

$$a = \frac{1}{2};\quad b^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$sen\ 30° = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\ 30° = \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La misma figura permite calcular las líneas del ángulo de 60°:

$$sen\ 60^\circ = \frac{b}{c} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

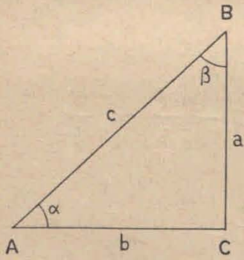
$$cos\ 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$

$$tg\ 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Observación: Hemos encontrado que

$$sen\ 30^\circ = cos\ 60^\circ$$

$$sen\ 60^\circ = cos\ 30^\circ \quad \text{siendo } 30 + 60 = 90.$$



Esto es general, es decir, que:

El coseno de un ángulo es igual al seno del ángulo complementario.

Pues siendo por def. en el triángulo rectángulo ABC (donde por ser rectángulo α y β son complementarios):

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c}; \quad cos\ \alpha = \frac{b}{c}$$

$$cos\ \beta = \frac{a}{c}; \quad sen\ \beta = \frac{b}{c}$$

resulta precisamente

$$sen\ \alpha = cos\ \beta$$

$$sen\ \beta = cos\ \alpha \qquad \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Se llama cotangente de un ángulo a la recíproca de la tangente del mismo.

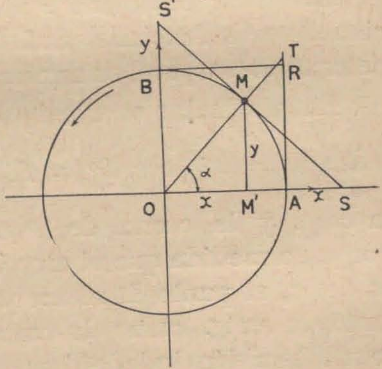
$$\mathit{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\mathit{tg}\,\alpha}.$$

De donde

$$\mathit{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} = \mathit{tg}.\beta.$$

Resulta, pues, que la tangente y cotangente de dos ángulos complementarios son también iguales.

Nota: Para las aplicaciones elementales bastan las breves nociones expuestas aquí. Sin embargo, las completaremos dando las definiciones de las funciones goniométricas y algunas de sus propiedades más usuales.



Tracemos con centro en el origen O de un sistema de coordenadas ($O\ x$, y) una circunferencia de radio igual a la unidad (*circunferencia trigonométrica*). Fijemos sobre la circunferencia, a partir del punto A, un sentido de los arcos; adoptaremos como positivo el sentido *contrario al de las agujas del reloj*, como está indicado con la flecha.

Sea M el extremo de un arco positivo AM de origen A, y M' su proyección sobre el eje $O\ x$:

Def.: Se llama *seno* del arco $\widehat{AM}$ o de su correspondiente ángulo central α, al número (+ o —) que corresponde a la ordenada del punto *M*; coseno, al número (+ o —) que corresponde a su abscisa; *tangente* a la ordenada (+ o —) del punto de encuentro (cuando existe) de la tangente geométrica en *A* a la circunferencia y la prolongación del radio que pasa por *M*. La cotangente es la abscisa (+ o —) del punto *R* (cuando existe) de la intersección de dicha prolongación con la tangente geométrica en *B* a la circunferencia. *Secante*, a la longitud (+ o —) del segmento *OS* que determina sobre *Ox* la tangente geométrica en *M* y *cosecante* a la longitud (+ o —) del segmento *OS'* que esta misma tangente determina sobre el otro eje *Oy*.

Se ve que las def. anteriores están contenidas en éstas como casos particulares.

Al variar el ángulo α o el arco desde *O* a 2π varían las seis funciones definidas, las cuales quedan así determinadas para cualquier ángulo agudo u obtuso.

En particular se tiene

$$sen\ 0^\circ = 0, \quad cos.\ 0^\circ = 1, \quad tg\ 0^\circ = 0, \quad sec\ 0^\circ = 1$$

la *cotg.* y la *cosec.* de 0° no tienen valor numérico porque a medida que el arco disminuye indefinidamente, es decir, el punto *M* se acerca al origen *A* de los arcos, tanto la cotg. como la cosec. aumentan en valor absoluto también indefinidamente, llegando a superar a cualquier número positivo prefijado por grande que sea.

También es inmediato que

$$sen\ 90^\circ = 1, \quad cos\ 90^\circ = 0,$$
$$cotg\ 90^\circ = 0, \quad cosec\ 90^\circ = 1.$$

La *tangente* y la *secante* no tienen, para 90°, valor numérico; vale la consideración anterior.

Las seis funciones goniométricas así definidas no son independientes entre sí; están relacionadas de tal manera que basta conocer el valor de una de ellas para calcular todas las demás. La expresión fundamental que relaciona al seno y al coseno de un mismo ángulo α, fig. preced, resulta de aplicar el teor. de PITÁGORAS al triángulo OMM' en el cual se tiene

$$M'M^2 + OM'^2 = OM^2,$$

y como, por def.

$$OM = 1, \quad M'M = sen\ \alpha, \quad OM' = cos\ \alpha$$

se tiene

$$(1) \qquad sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

cualquiera que sea el ángulo α.

De la semejanza entre los triángulos OMM' y OTA se tiene:

$$AT : MM' = OA : OM',$$

y como se trata de magnitudes homogéneas (segmentos):

$$AT : OA = MM' : OM'$$

o sea

$$tg\ \alpha : 1 = sen\ \alpha : cos\ \alpha$$

$$(2) \qquad tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$$

De esta relación y de la (1) deduzca el lector, como ejercicio, el valor de tg α conociendo solamente el seno o el coseno de α, e inversamente calcule el valor del seno o del coseno conociendo solamente la tangente.

De un modo análogo puede demostrarse que:

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} \quad \text{y} \quad cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}.$$

Tablas naturales de senos, cosenos, tangentes y cotangentes

Hemos tenido oportunidad de ver que el cálculo práctico o medida directa de los valores de las funciones goniométricas es poco aproximado. Por procedimientos indirectos, pero no al alcance de estas breves nociones, se pueden calcular con la aproximación que uno desee. Con el objeto de evitar cálculos tan laboriosos se han construído tablas donde está contenido, al lado de cada ángulo, el valor de cada una de las funciones goniométricas. La tabla que adjuntamos aquí es solamente de las cuatro funciones mencionadas más arriba, y en ella los ángulos varían de grado en grado empezando desde cero. Como el seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento, la tangente, a la cotangente de su complemento, en la columna de la izquierda solamente figuran los ángulos hasta 45° inclusive. La columna final de la derecha va desde abajo hacia arriba, empieza con 45° y termina con 90°. El uso de estas tablas es, pues, muy simple. Si se pide el seno, el coseno, la tangente o la cotangente de un ángulo menor o igual que 45°, por ej. de 27°, se busca en la primera columna este ángulo y enfrente de él en las columnas correspondientes se encuentran los valores de sen 27°, cos 27°, tg 27° y cotg. 27°. Si el ángulo dado pasa de 45°, por ej. 76°, se leerá a partir desde abajo en la última columna el N.º 76 y enfrente hacia la izquierda se obtendrán los valores de la tangente 76°, cotg 76°, sen 76° y cos 76°. En este caso vale, pues, para la columna, la designación escrita en su parte inferior:

Ang.	Sen.	Cos.	Tg.	Cotg.	Ang.
0°	0,000	1,000	0,000	∞	90°
1	0,017	1,000	0,017	57,290	89
2	0,035	0,999	0,035	28,636	88
3	0,052	0,999	0,052	19,081	87
4	0,070	0,998	0,070	14,301	86
5	0,087	0,996	0,087	11,430	85
6	0,105	0,995	0,105	9,514	84
7	0,122	0,993	0,123	8,144	83
8	0,139	0,990	0,141	7,115	82
9	0,156	0,988	0,158	6,314	81
10	0,174	0,985	0,176	5,671	80
11	0,191	0,982	0,194	5,145	79
12	0,208	0,978	0,213	4,705	78
13	0,225	0,974	0,231	4,331	77
14	0,242	0,970	0,249	4,011	76
15	0,259	0,966	0,268	3,732	75
16	0,276	0,961	0,287	3,487	74
17	0,292	0,956	0,306	3,271	73
18	0,309	0,951	0,325	3,078	72
19	0,326	0,946	0,344	2,904	71
20	0,342	0,940	0,364	2,747	70
21	0,358	0,934	0,384	2,605	69
22	0,375	0,927	0,404	2,475	68
23	0,391	0,921	0,424	2,356	67
24	0,407	0,914	0,445	2,246	66
25	0,423	0,906	0,466	2,145	65
26	0,438	0,899	0,488	2,050	64
27	0,454	0,891	0,510	1,963	63
28	0,469	0,883	0,532	1,881	62
29	0,485	0,875	0 554	1,804	61
30	0,500	0,866	0,577	1,732	60
31	0,515	0,857	0,601	1.664	59
32	0,530	0,848	0,625	1.600	58
33	0,545	0,839	0,649	1,540	57
34	0,559	0,829	0,675	1,483	56
35	0,574	0,819	0,700	1,428	55
36	0,588	0,809	0,727	1,376	54
37	0,602	0,799	0,754	1,327	53
38	0,616	0,788	0,781	1,280	52
39	0.629	0,777	0,810	1,235	51
40	0,643	0,766	0,839	1,192	50
41	0,656	0,755	0,869	1,150	49
42	0,669	0,743	0,900	1,111	48
43	0,682	0,731	0,933	1,072	47
44	0,695	0,719	0,966	1,036	46
45	0,707	0,707	1,000	1.000	45
Ang.	**Cos.**	**Sen.**	**Cotg.**	**Tg.**	**Ang.**

Resolución de problemas y ejercicios:

PROBLEMA 1: *Dados los catetos* **a** *y* **b** *de un triángulo rectángulo determinar su hipotenusa* **c** *y sus ángulos.*

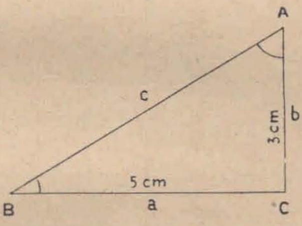
DATOS:	INCÓGNITAS:
$a = 5$ *cm.*	c,
$b = 3$ *cm.*	$\hat{A}$, $\hat{B}$.

Por el teor. de PITÁGORAS se calcula **c**:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$$

$$\mathbf{c} = \sqrt{34} = 5{,}831 \text{ cm.}$$

$$\text{tg. } B = \frac{b}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}600.$$



En la tabla, a una tangente de *0,601* corresponden 31°; tomaremos, pues, $\hat{B} = 31°$ aproximadamente.

Como $\hat{A}$ es el complemento de $\hat{B}$, resulta

$$\hat{A} = 90 - 31 = 59°.$$

NOTA: Se puede evitar el empleo del teor. de PITÁGORAS para el cálculo de la hipotenusa, calculando primero el ángulo $\hat{B}$. En esta forma se tiene después que

$$b = c \text{ sen } B$$

de donde:

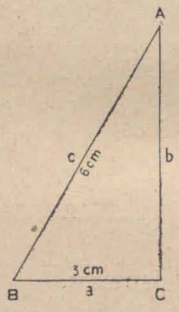
$$c = \frac{b}{\text{sen } B}.$$

En la tabla se tiene para sen $B =$ sen $31° = 0{,}515$, luego:

$$c = \frac{3}{0{,}515} = 5{,}82\ldots.$$

La pequeña diferencia entre el valor anterior de c y éste proviene de haber tomado el valor del ángulo B solamente aproximado.

PROBL. 2: *Calcular todos los elementos de un triángulo rectángulo del cual se conocen la hipotenusa* **c** *y un cateto* **a**.



DATOS:	INCÓGNITAS:
$a = 3$ cm.	b,
$c = 6$ cm.	$\hat{A}$, $\hat{B}$.

Se tiene: $sen\ A = \dfrac{a}{c} = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$

$$\hat{A} = 30°.$$

De donde

$$B = 90° - 30° = 60°.$$

$$b = c.\ \cos A = 6 \times \cos 30° = 6 \times 0{,}866 = 5{,}196\ \ldots.$$

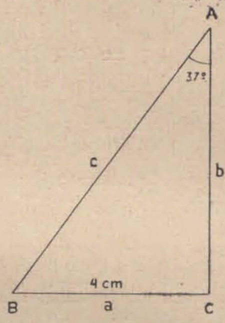
$$b = 5{,}196\ldots.\ cm.$$

PROBL. 3: *Calcular todos los elementos de un triángulo rectángulo del cual se conocen un cateto* **a** *y un ángulo agudo* $\hat{\mathbf{A}}$.

DATOS:	INCÓGNITAS:
$a = 4$ cm.	$b,\ c$
$\hat{A} = 37°$	$\hat{B}$

Se calcula inmediatamente $\hat{B}$ por ser

$$\hat{B} = 90° - \hat{A} = 90° - 37° = 35°.$$



Ahora

$$b = a.\ tg\ B = 4 \times tg\ 53° = 4 \times 1{,}327$$

$$b = 5{,}308\ cm.$$

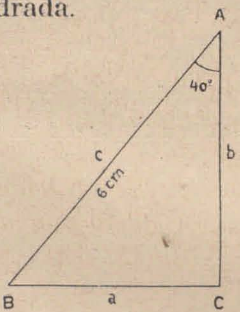
La hipotenusa c se puede calcular por la relación pitagórica

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 5{,}308^2$$

pero más cómodamente se calcula así:

$$c = \frac{a}{sen\ A} = \frac{4}{sen\ 37°} = \frac{4}{0{,}602} = 6{,}644 \ldots\ cm.$$

evitándose de este modo la extracción de la raíz cuadrada.



PROBL. 4.: *Calcular todos los elementos de un triángulo rectángulo del cual se conocen la hipotenusa* **c** *y un ángulo (agudo)* $\hat{A}$.

DATOS:	INCÓGNITAS:
$c = 6$ cm.	$a,\ b$
$\hat{A} = 40°$	$\hat{B}$.

Se calcula B inmediatamente:

$$\hat{B} = 90 - \hat{A} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$\hat{B} = 50^\circ.$$

Ahora

$$a = c \ sen \ A = 6 \ sen \ 40^\circ = 6 \times 0{,}643 \ldots.$$

$$a = 3{,}858 \ldots. \text{ cm.}$$

$$b = c \ sen \ B = 6 \ sen \ 50 = 6 \times 0{,}766 \ldots.$$

$$b = 4{,}596 \ldots. \ cm.$$

Nota: Calculado **a**, podría también calcularse **b** por la relación pitagórica

$$c^2 = a^2 + b^2 .: \ b^2 = c^2 - a^2 = 6^2 - 3{,}858^2$$

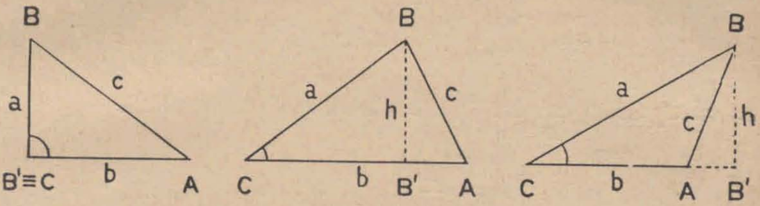
pero el procedimiento anterior es más breve.

Estos son los únicos casos a que puede dar lugar la *resolución del triángulo* rectángulo. Otro grupo numeroso de problemas, cálculo de áreas, proyecciones, alturas, etc., se reduce a uno de estos casos típicos, como veremos a continuación.

Probl. 5: *Calcular el área de un triángulo cualquiera conociendo dos lados y el ángulo comprendido:*

DATOS:	INCÓGNITAS:
$a, b, \hat{C}$	S (área).

Tracemos la altura h correspondiente al vértice B; podrán suceder tres casos: que la proyección B' de B coincida con C, que caiga en el segmento $AC = b$ o que sea exterior a él.



En el primer caso el triángulo dado es rectángulo, siendo $\hat{C} = 90°$, luego

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2} a\, b.$$

Veremos que en los demás casos la superficie está dada por una fórmula análoga pero más general

$$S = \frac{1}{2} a\, b \operatorname{sen} C$$

que contiene a la precedente como caso particular, porque si el triángulo ABC es rectángulo

$$C = 90°, \quad \operatorname{sen} C = 1,$$

y ella se reduce a la (1).

En los otros dos casos, en el triángulo ABC se tiene

$$(2) \qquad S = \frac{1}{2} b.\, h$$

Pero en el triángulo rectángulo $B'BC$ resulta

$$BB' = BC\ sen.\ C$$

o sea

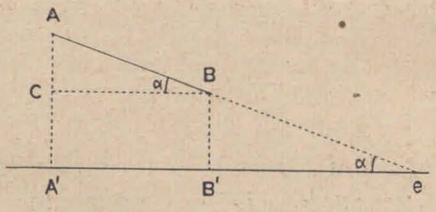
$$h = a\ sen\ C$$

sustituyendo en la (2) se obtiene precisamente

$$S = \frac{1}{2}\ a.\ b.\ sen\ C.$$

Probl. 6: *Calcular la proyección de un segmento sobre un eje, dados el eje y el segmento.*

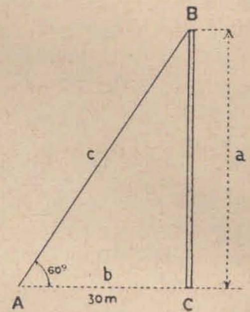
DATOS:	INCÓGNITAS:
$AB, e, \hat{\alpha}$	$A'B'$.



Se conocen, pues, la longitud del segmento AB y el ángulo α que él forma con el eje. Trazando por B la paralela al eje resulta el triángulo rectángulo ABC, siendo $BC = A'B'$ proyección pedida. Para conocer $A'B'$ bastará, pues, resolver este triángulo (prob. 4) del cual se conocen la hipotenusa AB y un ángulo agudo α.

PROBL. 7: *Calcular la altura de una torre sabiendo que el ángulo que forma la visual dirigida desde su pie a su cúpula a una distancia de 30 m. es de 60°.*

Del triángulo ABC se conocen un cateto y un ángulo agudo, luego (probl. 3) se tiene



$$a = 30 \times tg\ 60°$$

$$a = 30 \times 1{,}732$$

$$a = 51{,}96\ m.$$

EJERCICIOS

1) Calcular el área de un triángulo isósceles de 0,70 m. de base sabiendo que los ángulos de la base son de 40°.
2) Calcular el área de un paralelogramo, uno de cuyos lados tiene 35 m., sabiendo que el otro forma con él un ángulo de 36° y tiene 20 m. de longitud.
3) Calcular el área de un trapecio rectangular sabiendo que sus bases tienen 30 y 40 m. respectivamente y que el lado oblicuo forma con la base mayor un ángulo de 60°.
4) Calcular el área de un trapecio isósceles sabiendo que sus bases tienen 50 y 30 m. cada una y que la inclinación de los otros dos lados sobre la base mayor es de 70°.
5) Desde un punto del terreno diríjanse dos visuales, una al pie y otra a la cúpula de una torre. Sabiendo que las visuales forman entre sí un ángulo de 20° y suponiendo que la torre tiene una altura aproximada de 35 m., averiguar la distancia del punto a la torre.
6) Calcular el área del techo de un galpón a dos aguas de 30 m. de largo por 20 de ancho, sabiendo que las chapas tienen una pendiente de *quince por ciento* (15 %).

APÉNDICE

I

ARITMÉTICA DE LAS RAZONES [1]

Volvamos sobre las consideraciones desarrolladas en el Cap. VI referente a las magnitudes geométricas y sus razones.

Entre las razones de dos magnitudes cualesquiera hemos definido la *igualdad* y la *desigualdad*, de manera que en cada caso resulte posible la comparación de razones; hemos reconocido que estas relaciones entre razones gozan de las mismas propiedades fundamentales que la igualdad y la desigualdad entre números enteros y fraccionarios; (tales números pueden considerarse como razones entre magnitudes conmensurables).

En este Cap. probaremos cómo pueden también definirse para las razones en general, la *suma* y el *producto* (y por consiguiente la *diferencia* y el *cociente*) de manera que las operaciones de *adición* y *multiplicación* (*sustracción* y *división*) así definidas, se reduzcan, en el caso de razones entre magnitudes conmensurables, a las operaciones con números enteros o fraccionarios, que en Aritmética reciben respectivamente los mismos nombres.

Así, pues, todas las posibles razones entre magnitudes constituyen una clase de entes, que parece natural considerar como *números*, en un sentido más general. Son éstos los llamados *números reales*. Ellos comprenden, en particular, a los enteros y a los fraccionarios (es decir, a las razones de magnitudes conmensurables); y para distinguir estos números en el primitivo sentido

[1] N. del T. Esta cuestión figura en el Cap. VIII del texto original. Como excede el límite de las nociones exigidas por nuestros programas, la hemos colocado en el apéndice por considerarla de sumo provecho para los alumnos aventajados que deseen profundiza el estudio de la Matemática.

de la palabra, de los nuevos, llamaremos *racionales* a los primeros, e *irracionales* a los segundos.

Veremos, finalmente, cómo puede darse una definición aritmética de los números reales igualmente válida para los números racionales e irracionales. En nuestras consideraciones nos referiremos, por motivos de sencillez, a las razones entre segmentos. Los resultados establecidos se extienden después a las razones entre magnitudes (geométricas) de cualquier otra especie (n. 8).

Operaciones con razones

Para definir las diversas operaciones con razones cualesquiera, (conmensurables o no), nos servirá de guía la operación análoga para el caso de razones conmensurables.

1. Suma. — Si a y b son dos segmentos, ambos conmensurables con un mismo segmento c y se tiene que

$$a = \frac{p}{q}\, c, \quad b = \frac{r}{s}\, c$$

se deduce que

$$a + b = \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right) c$$

es decir, la suma de las razones $\frac{p}{q} = a : c$, $\frac{r}{s} = b : c$ está dada por la razón

$$(a + b) : c.$$

De acuerdo con esto, en general (aun cuando se trate de magnitudes inconmensurables), se llama *suma* $(a : c) + (b : c)$ *de dos razones* $a : c$ y $b : c$ (con el segundo término común), *a la razón* $(a + b) : c$.

Si las dos razones que se quieren sumar no tienen el segundo término común, como por ejemplo, $a : c$ y $e : f$, se reduce al caso precedente, sustituyendo las razones dadas por dos razones respectivamente iguales a ellas con el segundo término común. Por ej., se determina el segmento b, tal que sea:

$$b : c = e : f$$

o sea el cuarto proporcional a f, e y c. (VII n. 10) y se pone

$$(a : c) + (e : f) = (a : c) + (b : c) = (a + b) : c.$$

Para justificar la sustitución indicada, es menester demostrar que se obtiene siempre como suma, la misma razón, de cualquier manera que se elijan las dos razones iguales a las dadas, o, en otras palabras, que *sumas de razones iguales son iguales* (propiedad *uniforme*). Es preciso probar, pues, que de:

$$a : c = a' : c' , \quad b : c = b' : c'$$

se deduce

$$(a + b) : c = (a' + b') : c'.$$

De las igualdades admitidas, se deduce, permutando los medios (VI n. 23)

$$a : a' = b : b' = c : c'$$

y por consiguiente, aplicando a las dos primeras razones el teor. de la suma de los antecedentes y de los consecuentes (VI n. 20)

$$(a + b) : (a' + b') = c : c'$$

y basta permutar los medios para obtener la proporción buscada.

De manera análoga se extiende la Def. de suma al caso de tres o más sumandos; es claro que la suma así definida goza en todos los casos de las propiedades *asociativa* y *conmutativa*, por cuanto estas propiedades son válidas para la suma de segmentos.

2. Diferencia. — La *sustracción* se define como operación inversa de la adición. Por consiguiente, si es $a : c > b : c$ (o sea $a > b$, (VI n. 22 a) se llama *diferencia* $(a : c) - (b : c)$ de estas dos razones a la razón

$$(a - b) : c.$$

También, en este caso, con la oportuna construcción de un cuarto proporcional, la diferencia de dos razones cualesquiera sin su segundo término común se reduce a la anterior.

3. Producto. — Si a, b y c son tres segmentos, dos a dos conmensurables, y es

$$a = \frac{p}{q}\, b \quad , \quad b = \frac{r}{s}\, c.$$

se deduce

$$a = \frac{pr}{qs}\, c$$

es decir, el producto $\frac{pr}{qs}$ de $\frac{p}{q} = a : b$ y $\frac{r}{s} = b : c$, resulta igual a la razón $a : c$.

De acuerdo con esto, llamaremos en todos los casos, *producto* de dos razones $a : b$ y $b : c$ (con el término intermedio común) a la razón $a : c$, y escribiremos

$$(a : b)\,(b : c) = a : c.$$

Si se trata de dos razones cualesquiera (es decir, cuyo término intermedio no es común), como por ej., $a : b$ y $e : f$, sustituiremos estas dos razones por otras dos respectivamente iguales, y tales que el segundo término de la primera sea igual al primer término de la segunda. Por ej., determinaremos el segmento c, tal que sea:

$$e : f = b : c$$

(es decir el cuarto proporcional a e, f y b, y pondremos:

$$(a : b)\,(e : f) = (a : b)\,(b : c) = a : c$$

También en este caso se justifica esta última sustitución, probando que *productos de razones iguales son iguales*, es decir, que de

$$a' : b' = a : b \;,\; b' : c' = b : c$$

se obtiene

$$(a' : b')\,(b' : c') = (a : b)\,(b : c)$$

o sea

$$a' : c' = a : c.$$

Este resultado es inmediato porque de las igualdades admitidas se deduce (VI n. 23) que

$$a' : a = b' : b \,;\, b' : b = c' : c$$

luego

$$a' : a = c' : c$$

y finalmente

$$a' : c' = a : c.$$

De la definición de producto de razones se deducen las propiedades *distributiva* y *asociativa* (cuando, naturalmente, se extienda del modo usual la definición de producto al caso de tres o más razones).

En cuanto a la propiedad *conmutativa*, ella es una inmediata consecuencia de la permutabilidad de los medios en una proporción, la cual, en el caso conmensurable, como se notó en el n. 15 del Cap. VI, expresa, precisamente, tal propiedad. En el caso general, si dado el producto

$$(a : b)\,(b : c) = a : c$$

se quiere determinar el producto

$$(b : c)\,(a : b)$$

basta determinar el segmento d, tal que sea

$$a : b = c : d$$

y se tendrá

$$(b : c)\,(a : b) = (b : c)\,(c : d) = b : d.$$

De la proporción anterior, permutando los medios, se deduce

$$a : c = b : d$$

o sea

$$(a : b)\,(b : c) = (b : c)\,(a : b).$$

4. Cociente. — La división se define como operación inversa de la multiplicación, de manera que en base a la expresión

$$(a : b)\,(b : c) = a : c$$

debe llamarse *cociente* de las dos razones $a : c$ y $b : c$ (con el segundo término común) a la razón $a : b$. Se escribe

$$(a : c) : (b : c) = a : b,$$

y como siempre, el caso de dos razones que no tienen el segundo término común se reduce a este caso construyendo oportunamente un segmento cuarto proporcional.

5. Nota. — Cuando en las definiciones precedentes una de las dos razones corresponde a dos segmentos conmensurables, se trata de suma, diferencia, producto o cociente de una razón y de un número entero o fraccionario. Así, por ej., se puede hallar el cociente de 1 por una razón cualquiera $a : b$, pensando la unidad como razón de dos segmentos iguales, y se encuentra

$$1 : (a : b) = (b : b) : (a : b) = b : a$$

se obtiene la *razón inversa* de $a : b$.

Hagamos notar que de las relaciones

$$(a : c) : (b : c) = a : b\ ,\ (a : c)\ (c : b) = a : b$$

válidas por Def., resulta que el *cociente de dos razones es igual al producto del dividendo por la inversa del divisor.*

Números reales y su representación aritmética

6. Hemos enseñado no solamente a reconocer si dos razones son iguales o desiguales, sino también a operar con ellas, por *suma* y *diferencia, producto* y *cociente,* y hemos comprobado que las relaciones de igualdad y desigualdad y las diversas operaciones definidas gozan de las mismas propiedades que se verifican cuando ella representa el número entero o fraccionario, es decir, cuando se trata de razones entre magnitudes conmensurables.

Esto induce, como ya lo hemos insinuado al principio, a considerar el conjunto de todas las razones como una nueva clase de números que se llaman *números reales*, y que contienen, en particular, a los números enteros y fraccionarios como razones entre magnitudes conmensurables. Dijimos ya que los enteros y fraccionarios se llaman números *racionales*, mientras que los nuevos números definidos como razones entre magnitudes inconmensurables se llaman números *irracionales*.

Ahora bien, para justificar, bajo otro aspecto, esta extensión del concepto de número, haremos ver que es posible dar una *definición aritmética*, válida para todos los números reales, es decir, igualmente para los irracionales que para los racionales.

Con tal objeto, empecemos por considerar un número irracional cualquiera, es decir, la razón $a : b$ de dos segmentos inconmensurables (como serían, por ej., la diagonal y el lado de un cuadrado, VI 9). Se observó ya (VI n. 12) que en la práctica un tal número irracional se puede sustituir por un número racional, es decir, uno de sus valores suficientemente aproximado por defecto o por exceso (siendo el grado de aproximación, en cada caso, determinado por el máximo error tolerable de acuerdo al objeto que se persigue); pero si se quiere dar una definición aritmética exacta del número irracional, es preciso comprender en tal definición todos los posibles valores aproximados del número irracional. Nos vemos, pues, naturalmente obligados a fijar la atención, con respecto a un número irracional $a : b$, sobre todos los números racionales menores y sobre todos los números racionales mayores que él.

La clase de todos los números racionales menores que $a : b$ (y solamente ellos) se llamará *clase inferior* de $a : b$, y la designaremos con H, mientras que la clase de todos los números racionales mayores que $a : b$ (y solamente ellos) se llamará *clase superior* y la designaremos con K.

Obsérvese que estas dos clases no se alteran si los dos segmentos a y b se sustituyen por otros dos segmentos, o en general, otras dos magnitudes A y B de cualquier especie cuya razón sea igual a $a : b$ (VI n. 13). En cambio, se alteran, si la razón $a : b$ se sustituye por otra razón mayor o menor porque en ese caso hay números que pasan de la clase mayor a la menor o respectivamente de ésta a aquélla. En definitiva, *la clasificación o partición de los números racionales en las dos clases indicadas depende del número irracional considerado y no de las dos magnitudes (inconmensurables) elegidas para definirlo como su razón.*

Establecido esto, importa observar que en todos los casos esta partición de los números racionales en las dos clases H y K

relativas a una razón irracional $a : b$ goza de las siguientes propiedades:

1) Todo número racional pertenece a una (y a una sola) de las dos clases.

En efecto, por la hipótesis de la inconmensurabilidad de a y b no existe ningún número racional igual a $a : b$, luego cada número racional es menor o mayor que $a : b$ (VI n. 11).

2) La clase H contiene, con cada uno de sus números h, todos los números racionales menores que h; y también la clase K contiene con cada uno de sus números k todos los números racionales mayores que k.

En efecto, sabemos (VI n. 11) que todo número racional menor que un número racional, menor a su vez que $a : b$ es también menor que $a : b$, y lo mismo dígase de los racionales mayores.

3) La clase H no contiene un *máximo* (es decir, un número mayor que todos los otros) ni la clase K contiene un *mínimo* (es decir, un número menor que todos los otros).

Pues hemos visto (VI n. 12) que dado un número racional h menor que $a : b$, es posible encontrar otro menor que $a : b$ pero mayor que h; y análogamente para los números k de K.

Ahora bien, si en vez de partir de un número irracional partimos de un número racional (es decir, entero o fraccionario $\frac{p}{q}$, como es siempre la razón entre dos magnitudes conmensurables, y consideramos, como en el caso inconmensurable, la clase de todos los números racionales menores que $\frac{p}{q}$ y la clase de todos los mayores, reconoceremos en seguida que estas dos clases gozan de las propiedades 1), 2), 3) exceptuando una particularidad, sobre la cual es preciso fijar la atención. Las propiedades 2) y 3) se conservan incondicionalmente válidas; pero no así la propiedad 1), puesto que en el presente caso las dos clases de números menores de $\frac{p}{q}$ y de los mayores, no contienen a todos los números racionales, pues excluyen precisamente al número $\frac{p}{q}$ (y a sus iguales), del cual puede decirse que constituye el *elemen-*

to de separación de las dos clases (por cuanto es mayor que todos los números de una y menor que todos los de la otra).

Se puede modificar aún el enunciado de la 1) de manera que la clasificación comprenda también este caso de los números racionales. Basta, evidentemente, formular la siguiente proposición:

Dado cualquier número real (racional o irracional) *la clase menor* ***H*** (constituída por todos los números racionales menores que el dado número real) *y la clase mayor* ***K*** (constituída por todos los números racionales mayores) *gozan de las siguientes propiedades:*

1) *Todo número racional* excepto uno a lo sumo, *pertenece a una* (y a una sola) *de las dos clases.*

2) *La clase* ***H*** *contiene, con cada uno de sus números* h, *todos los números racionales menores; la clase* ***K*** *contiene, con cada uno de sus números* k, *todos los números racionales mayores.*

3) *La clase* ***H*** *no tiene* máximo *ni la clase* ***K*** *tiene* mínimo.

Toda clasificación de los números racionales en dos clases que satisfagan a estas tres propiedades se llama una *sección* o *cortadura* y se designa con (***H*** | ***K***).

Podemos, pues, afirmar que *todo número real, define en el conjunto de los números racionales, una* sección; *cuando tal número es racional, constituye su elemento de* separación.

7. El resultado precedente se puede invertir, es decir, que: *Toda sección, cualquiera que ella sea, en el conjunto de los números racionales, define un número real.*

Antes de demostrar este Teor. conviene probar, con un ejemplo, cómo es posible definir una sección independientemente de la consideración de la razón entre dos magnitudes.

Por ejemplo, consideremos la clasificación de los números racionales que resulta de asignar a una clase ***H*** todos los números racionales cuyo cuadrado es menor que 2, y a una clase ***K*** todos los números racionales cuyo cuadrado sea mayor que 2. Las clases ***H*** y ***K*** gozan de las propiedades 1), 2) y 3), es decir, constituyen una *sección,* y además comprenden a todos los números racionales sin excepción, porque no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea igual a 2 (VI n. 9).

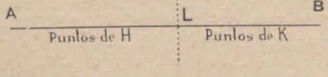
Nótese, además, que de cualquier manera que se haya construído una sección $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, se deduce de las propiedades 1) y 2) que *cada número* h *de* ***H*** *es menor que cada número* k *de* ***K***, porque no puede ser, en virtud de la 1), $h = k$, y con mayor razón $h > k$, porque, en tal caso, por la 2) la clase ***H*** contendría a h y a k.

Para demostrar, ahora, que toda sección $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$ determina un número real, distingamos dos casos, según que las dos clases ***H*** y ***K*** de la sección dada comprenden a todos los números racionales, o bien comprenden a todos menos uno, que indicaremos con $\frac{p}{q}$.

En esta última hipótesis el número $\frac{p}{q}$ no puede ser ni menor que algún número h de ***H*** (porque en tal caso $\frac{p}{q}$ estaría en ***H***) ni menor que algún número k de ***K*** (porque en este caso pertenecería a ***K***). Entonces dicho número $\frac{p}{q}$ por ser mayor que todos los h y menor que todos los k es el elemento de separación de las dos clases; por consiguiente, la sección $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$ define, precisamente, a este número racional $\frac{p}{q}$.

Queda por examinar el caso de una sección $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$ que carece de elemento (racional) de separación; nosotros demostraremos que, en tal hipótesis, define un número irracional. Haremos ver que tomado arbitrariamente un segmento $\boldsymbol{b}$, resulta determinado un segmento $\boldsymbol{a}$ (inconmensurable con $\boldsymbol{b}$) tal que el número irracional $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}$ es mayor que todos los números h de ***H*** y menor que todos los números k de ***K***.

Con este objeto consideremos por una parte todos los segmentos $h\,\boldsymbol{b}$ que se obtienen multiplicando a $\boldsymbol{b}$ por cada uno de los números de la clase ***H***, y por otra parte todos los segmentos $k\,\boldsymbol{b}$ que se obtienen multiplicando a $\boldsymbol{b}$ por cada uno de los números k de ***K***; e imaginemos transportados los unos y los otros sobre una semirrecta a partir desde su origen A, llamando, para entendernos,



« puntos H », los extremos de los segmentos $h\,b$, y « puntos K » los extremos de los segmentos $k\,b$. Puesto que todo número h es menor que todo número k, tendremos que todo punto H precede sobre la semirrecta, a partir de A, a todo punto K; por el postulado de la continuidad (VIII n. 1) existe seguramente por lo menos un punto L de separación entre los puntos H y los puntos K.

Pero se reconoce fácilmente que este punto de separación es *único*. Basta probar (VIII n. 2) que tomando un segmento ε arbitrariamente pequeño, siempre es posible hallar un punto H y un punto K cuya distancia sea menor que ε. Para ello tomemos un submúltiplo de b, $\frac{1}{n}\,b$ menor que ε (V n. 6) y consideremos sus sucesivos múltiplos

$$\frac{1}{n}\,b\,,\ \frac{2}{n}\,b\,,\ \frac{3}{n}\,b\,,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

los cuales por tener todos ellos con b una razón racional, pertenecen a la clase de los segmentos $h\,b$ o a la clase $k\,b$. En virtud del postulado de ARQUÍMEDES (VI n. 3) tales múltiplos llegan a superar a cualquier segmento dado, se encontrará uno que es el *último* de la clase $h\,b$, de manera que ya su consecutivo esté en la clase $k\,b$. Los extremos de estos dos segmentos sobre la semirecta AL dan, precisamente, un punto H y un punto K, cuya distancia, siendo igual a $\frac{1}{n}\,b$, es menor que ε.

Demostrada la unicidad del punto L de separación entre los puntos H y K, pongamos $a = AL$ y consideremos el número real $a : b$.

Puesto que para cada número h de H y para cada número k de K se tiene, respectivamente,

$$a > h\,b \quad \text{y} \quad a < k\,b$$

o sea

$$a : b > h \quad \text{y} \quad a : b < k$$

se reconoce inmediatamente que en la dada sección la clase H está formada por todos los números racionales menores que $a : b$, la clase K por todos los números racionales mayores; y podemos agregar que el número **a** : **b** es seguramente irracional (o, en otras palabras, que los dos segmentos **a** y **b** son inconmensurables) porque, en caso contrario, el número racional **a** : **b** daría un elemento de separación de la sección considerada, la que por hipótesis no tiene.

Podemos ya resumir la precedente discusión en el siguiente

Teor.: *Todo número real define en el conjunto de los números racionales una sección* (cuyas dos clases están formadas por los números racionales respectivamente mayores y menores que el número considerado). *Viceversa, toda sección, cualquiera que ella sea, define un número real* (mayor que todos los números de la clase inferior y menor que todos los de la clase superior) el cual es *un número irracional o racional según que las dos clases de la sección contienen a todos los números racionales o uno menos* (que en tal caso es, precisamente, el número definido por la sección).

Esta Def. aritmética de los números reales por medio de la correspondiente sección es debida a Dedekind.

8. En la discusión que antecede hemos considerado los números reales como razones de segmentos. Pero se pueden también pensar como razones de magnitudes de cualquier otra especie (geométricas): *superficies, arcos circulares, ángulos.* No solamente la razón de dos magnitudes homogéneas cualesquiera define siempre un número real (n. 6); viceversa, considerado arbitrariamente un número real (definido aritméticamente o como razón de dos segmentos), y elegida una magnitud B de cualquier especie, existe una magnitud A homogénea a B, y tal que la razón $A : B$ es igual al número real prefijado.

Esto se ve del modo más simple recordando que, en sustancia, la comparación de dos magnitudes cualesquiera puede reducirse siempre a la comparación de dos segmentos (V_2 n. 40) (VIII nos. 10-15).

Así, pues, si B es una superficie poligonal o circular, basta considerar un rectángulo de superficie igual a B, y si **h** y **b** son su altura y su base, tomar como superficie A la del rectángulo que tiene igual altura **h** y por base el segmento **a** que admite como razón a **b** el número real prefijado. Si en cambio B es un arco circular y **b** es el respectivo segmento rectificante, la magnitud A es el arco de igual radio que tiene como rectificante al segmento $\boldsymbol{a}$, tal que la razón $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}$ sea igual al número real dado.

Finalmente, si B es un ángulo y con $\boldsymbol{b}$ se designa el arco que intercepta sobre cualquier circunferencia de centro en su vértice, el ángulo A es el que sobre la misma circunferencia intercepta al arco $\boldsymbol{a}$ que tiene con $\boldsymbol{b}$ la razón prefijada.

En todos los casos, la magnitud A resulta determinada de modo único en virtud de la unicidad de la cuarta proporcional (VI n. 25).

9. Conviniendo en designar los números reales (racionales o no) con letras cursivas minúsculas, se indica que un número real a está definido aritméticamente por una sección $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, escribiendo:

$$a = (\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K}).$$

Si A y B son dos magnitudes cuya razón es a, se escribe, por extensión de la conocida notación para el caso conmensurable,

$$A = a\ B$$

y se dice que la magnitud A es obtenida *multiplicando B por a.*

Así, pues, también el número irracional, como el racional, aparece como un operador que aplicado a una magnitud da otra magnitud homogénea que tiene con la anterior una razón igual al número considerado.

10. En los números 3 y 5 hemos definido con los números reales (considerados como razones) las operaciones fundamentales (adición, sustracción, multiplicación y división) por vía puramente geométrica. Pero ahora, que hemos dado una definición aritmética de los números reales, se comprende que será posible definir aritméticamente dichas operaciones.

Puesto que una sección define un número real, por cuanto da todos los posibles valores aproximados por exceso y por defecto, se induce que la suma $a + a'$ de dos números reales $a = (\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$, $a' = (\boldsymbol{H'} \mid \boldsymbol{K'})$, se podrá aproximar tanto como se quiera, sumando valores suficientemente aproximados de a y a'. Y en efecto, se demuestra fácilmente que, si con $\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H'}$ se designa la clase formada con las sumas de cada número de $\boldsymbol{H}$ con cada número de $\boldsymbol{H'}$ y con $\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K'}$ la clase análogamente obtenida de $\boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{K'}$, las dos clases $H + H'$, $K + K'$ constituyen una sección que caracteriza precisamente a la suma $a + a'$ definida geométricamente en el número 1. Procedimientos análogos valen para la diferencia $a - a'$, para el producto $a\,a'$ y para el cociente $\frac{a}{a'}$.

11. Conviene, finalmente, hacer notar que los números reales se pueden considerar como constituyendo una nueva especie de magnitud (aritméticas), por cuanto gozan de todas las propiedades que caracterizan a las magnitudes generales (VI n. 3).

Entonces *la razón* de dos números se identifica con su cociente, de manera que la proporcionalidad de dos pares de números a, b y c, d, equivale a la igualdad

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

de sus cocientes.

12. Idea sobre la representación de los números reales en forma decimal.

La representación de un número real a mediante la correspondiente sección $(H \mid K)$ en el conjunto de los números racionales es la más general posible y, desde el punto de vista teórico, la más importante. Pero se pueden pensar muchas otras, las que todas ellas se reducen substancialmente a extraer, con alguna ley oportunamente definida, de la clase H o de la clase K o de ambas, una sucesión de infinitos valores *progresivamente aproximados* a a (es decir, de valores aproximados, cuyo grado de aproximación o mejor dicho su *error* llegue a ser menor que cualquier número prefijado).

Entre todas estas representaciones aritméticas posibles de los números reales, hay dos que merecen ser indicadas, aunque sea rápidamente, la una por su importancia práctica, la otra por su particular interés histórico y teórico.

Empecemos por la primera, la cual extiende a todos los números reales la representación bajo forma de *número decimal* conocida en la aritmética para las fracciones ordinarias. Consideremos un número real $a = (H \mid K)$ que para fijar las ideas supondremos irracional. Imaginando recorrer, en orden creciente, los números de H, detengámonos en el *último* número entero que encontremos; el entero consecutivo pertenecerá a K (porque debido a la hipótesis de la irracionalidad de a, no puede ser elemento de separación de H y K; los dos números enteros consecutivos así obtenidos (que serán O y 1 si es a menor que 1) dan dos valores aproximados de a, a menos de una unidad, el primero por defecto, el segundo por exceso.

Si estos dos valores aproximados son, por ejemplo, 2 y 3, consideremos los números con una sola cifra decimal comprendidos entre 2 y 3 (incluso los extremos), es decir,

2,0 2,1 2,2.... 2,9 3,0;

y tomemos el último de ellos que se encuentra en H. Si es 2,7 el consecutivo 2,8 forma parte de K; y estos dos números dan dos valores aproximados de a a menos de 0,1 (y con una sola cifra decimal), e uno por defecto y el otro por exceso.

Así continuando, encontraremos dos valores análogos aproximados de a a menos de 0,01 (y con dos cifras decimales) por ej: 2,71, y 2,72; dos valores aproximados a menos de 0,001 y con tres cifras decimales, por ej: 2,718 y 2,719, etc.

Ahora bien, es claro que el procedimiento no tendrá fin porque todo número racional es necesariamente menor o mayor que a (y nunca igual).

De modo que llegaremos a forma: dos sucesiones de infinitos números decimales cada una

2 2,7 2,71 2,718....,
3 2,8 2,72 2,719....,

En la primera de las cuales se tienen los valores aproximados de a a menos de 1, de 0,1, de 0,01,.... en la segunda los correspondientes valores aproximados por exceso [1].

[1] Estas dos sucesiones gozan de las siguientes propiedades:

1) Todo número de la primera sucesión es mayor que el precedente o por lo menos igual (si entre las sucesivas cifras decimales se encuentra algún cero), o, como suele decirse, que la primera sucesión es generalmente creciente.

2) La segunda sucesión es generalmente decreciente.

3) Las diferencias entre cada número de la primera y los de igual lugar de la segunda, siendo ordenadamente iguales a

1 0,1 0,01 0,001....

acaban por ser tan pequeños como se quiera.

Dos sucesiones que tienen tales propiedades se llaman *convergentes*.

Estas dos sucesiones dan un modo de aproximarse paulatinamente al número irracional a con un grado de aproximación tan grande como se quiera. Pensando, por así decir, en potencia esta indefinida aproximación progresiva, podemos representar el número irracional a con el símbolo

$$2{,}718\ldots.,$$

Donde después de la coma se imaginan escritas ordenadamente las infinitas cifras decimales a las cuales dan lugar los valores aproximados de la primera sucesión.

Este símbolo se llama «un número decimal con infinitas cifras» o «ilimitado» y por el modo mismo en el cual se piensa, obtenido, es tal que donde no se tenga en cuenta de las cifras decimales a partir de un cierto lugar en adelante, se obtiene un valor aproximado por defecto del número irracional, a menos de una unidad decimal del orden de la última cifra conservada. Basta aumentar de 1 esta última cifra para obtener el correspondiente valor aproximado por exceso.

Observemos que este símbolo de número decimal con infinitas cifras no debe parecer extraño o insólito porque en aritmética práctica se ha visto que, si dada una fracción $\frac{p}{q}$ (que supondremos reducida a sus términos mínimos), se intenta ponerla bajo forma decimal, dividiendo el numerador por el denominador, se obtiene un número finito de cifras decimales solamente cuando el denominador q no contiene factores primos diferentes de 2 y de 5, como sucede, por ej., con

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = 0{,}375 \text{ ó } \frac{37}{25} = \frac{37}{5^2} = 1{,}48$$

$$\text{ó } \frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 5} = 0{,}35. \text{ etc.}$$

En todos los otros casos la división jamás tiene término y conduce sucesivamente a *infinitas cifras decimales*; se verifica, en cambio, que estas infinitas cifras decimales se presentan (al menos desde un cierto lugar en adelante) en grupos de cifras iguales, o, como suele decirse, *periódicamente*; es decir, que toda fracción ordinaria que (reducida a sus términos mínimos) contenga en el denominador algún factor primo diferente de 2 y de 5, genera un *número decimal ilimitado* PERIÓDICO (simple o mixto). Así, por ej.:

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots;\ \frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots.;\ \frac{49}{15} = 3,2666\ldots;\ etc.$$

Este resultado es invertible, como se ha visto en Aritmética, es decir, todo número decimal ilimitado y periódico es engendrado por una determinada fracción ordinaria ([1]) por ej.:

$$0,6363\ldots = \frac{63}{99} = \frac{7}{11};\ 0,833\ldots = \frac{83\text{-}8}{90} = \frac{5}{6},$$

$$3,733\ldots = \frac{373\text{-}37}{90} = \frac{56}{15},\ etc.$$

De todo esto se desprende que un decimal ilimitado que representa, en el sentido aclarado más arriba, un número irracional, es necesariamente *no periódico.*

Recíprocamente, si se prefija arbitrariamente un número decimal ilimitado no periódico, como será por ejemplo

$$0,12\ 11\ 22\ 111\ 222\ldots.$$

(supuesto naturalmente que se conoce la ley de formación de sus cifras) se demuestra (con un razonamiento del todo análogo al del número 7) que él representa un determinado número irracional; vale decir, que si se prefija cualquier segmento b, existe un segmento a y uno sólo, cuya razón $a : b$ admite como valores aproximados por defecto

$$0,1\quad 0,2\quad 0,121\quad 0,1211\ldots.$$

([1]) Recordemos que las reglas para hallar las fracciones generatrices de los decimales ilimitados periódicos son las siguientes:

a) La generatriz de un decimal periódico puro o simple tiene por denominador el número formado por tantas cifras 9 como cifras tiene el período; el numerador se obtiene restando la eventual parte entera del número formado por ésta seguida del período.

b) La generatriz de un decimal periódico mixto tiene por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tiene el período, seguidos de tantos ceros como cifras tiene el antiperíodo; el numerador se obtiene restando la eventual parte entera seguida del antiperíodo de esta misma parte seguida del período.

y por exceso

$$0{,}2 \quad 0{,}13 \quad 0{,}122 \quad 0{,}1212\ldots.$$

Podemos, entonces, enunciar el

TEOR: *Todo número real se puede representar bajo forma de número decimal* (limitado o ilimitado, y en este caso periódico o no); *y recíprocamente todo número decimal*[1] *representa un número real. Se trata de un número racional si el decimal es limitado o también ilimitado, pero periódico, de un número irracional si el decimal es ilimitado pero no periódico.*

Obsérvese que cuando se da un número irracional bajo forma decimal, por ej. el número antes considerado

$$a = 0{,}12\ 11\ 22\ 111\ 222\ldots.$$

la correspondiente sección $(\boldsymbol{H} \mid \boldsymbol{K})$ se obtiene asignando a la clase $\boldsymbol{H}$ todos los valores aproximados por defecto

$$0{,}1 \quad 0{,}12 \quad 0{,}121 \quad 0{,}1211\ldots.$$

y con cada uno de ellos todos los números racionales menores; a la clase $\boldsymbol{K}$ todos los otros números racionales (vale decir los valores aproximados por exceso

$$0{,}2 \quad 0{,}13 \quad 0{,}122 \quad 0{,}1212\ldots.$$

y con cada uno de ellos, todos los números racionales mayores).

En fin, en lo que respecta a la ejecución práctica de los cálculos sobre los números reales, representados bajo forma decimal, nos limitamos a afirmar que se puede encontrar directamente el valor aproximado de una suma o de un producto, etc., *con cualquier número prefijado de cifras decimales* (es decir, con una aproximación prefijada) sumando o multiplicando, etc., según las reglas conocidas los valores aproximados de los su-

[1] De los números decimales ilimitados periódicos conviene excluir todos aquellos de período 9, porque cada uno de ellos se puede sustituir por un decimal limitado. Por ej.

$$0{,}999\ldots. = 1;\ 0{,}35999\ldots. = 0{,}36;\ 7{,}16999\ldots. = 7{,}17, \text{ etc.}$$

mandos o de los factores, etc., *tomados cada uno con un número suficientemente grande de cifras decimales* [1].

13. Idea sobre el procedimiento euclídeo de las divisiones sucesivas y sobre la representación de los números por fracciones continuas.

A otro tipo de representación aritmética de los números reales conduce el procedimiento que Euclides usó en el libro X de los *Elementos* para la determinación de la magnitud submúltipla máxima común de dos magnitudes A y B, y que aplicado a los números enteros da lugar al método tan conocido de las divisiones sucesivas para la investigación del máximo común divisor de dos números enteros.

Diremos, para abreviar, que se *divide* una magnitud A por otra magnitud B cuando se busca el máximo múltiplo $q\ B$ de B contenido en A. El número entero q (que se toma igual a cero si es $A < B$) se llama *cociente* de A por B; sino es $A = q\ B$ se llama *resto* de la división de A por B a la magnitud $R = A - q\ B$, la cual por su misma definición es necesariamente menor que B.

He aquí, ahora, en qué consiste el procedimiento de Euclides.

Dadas las dos magnitudes A y B, divídase A por B, luego B por el resto R_1 de la primera división, después R_1 por el resto de la segunda división y así siguiendo; se tendrá sucesivamente:

$$(1)\qquad A = q_0\ B + R_1,\ B = q_1\ R_1 + R_2,\ R_1 = q_2\ R_2 + R_3,\ldots.$$

donde $q_0, q_1, q_2,\ldots.$ son otros tantos números enteros (de los cuales el primero puede ser también cero) y los restos $R_1, R_2, R_3,\ldots.$ son decrecientes, siendo:

$$B > R_1 > R_2 > R_3\ldots.$$

Este proceso termina solamente si después de un cierto número de divisiones se llega a una división exacta, o sea si se encuentran dos restos consecutivos R_{n-1} y R_n, tales que

$$R_{n-1} = q_n \cdot R_n.$$

[1] Para un estudio sistemático de tales cuestiones véase E. Maccaferri "*Calcolo numerico approssimato*"; Milano, Hoepli 1919.

En tal caso, resulta de la penúltima relación (1), es decir, de:

$$R_{n-2} = q_{n-1} R_{n-1} + R_n ,$$

que R_n siendo contenido exactamente en sí mismo y en R_{n-1} es también submúltiplo de la suma $q_{n-1} R_{n-1} + R_n$, o, lo que es lo mismo, de R_{n-2}; y así teniendo en cuenta sucesivamente todas las relaciones (1) de derecha a izquierda, se deduce que R_n es submúltiplo de $R_{n-3} \ldots R_1$, B y A y en particular, por consiguiente, submúltiplo de A y B, los cuales son por esto conmensurables entre sí. Aún más, R_n es el *máximo* submúltiplo común de A y B porque todo submúltiplo común de estas dos magnitudes divide exactamente en virtud de los (1) también a $R_1, R_2 \ldots R_n$, y por consiguiente no puede ser sino el mismo R_n o un submúltiplo de él.

Consideremos, el caso en que el proceso indicado no tiene fin; obtendremos infinitos restos sucesivos

$$(2) \qquad R_1, R_2, R_3, \ldots R_n, \ldots$$

Si este caso se presenta, se puede, razonando por absurdo, probar que las magnitudes A y B son *inconmensurables* entre sí.

Pues si así no fuese, es decir, si A y B tuvieran un submúltiplo común M, éste tendrá que estar contenido en todos los restos (2) como resulta de las relaciones (1); mientras que haremos ver que estos restos al crecer el índice n indefinidamente acaban por ser tan pequeños como se quiera y por lo tanto no pueden ser todos múltiplos de una cantidad determinada M.

Para demostrarlo, comencemos por observar que, por la hipótesis de que el procedimiento no tiene fin, no puede ser naturalmente $A = B$; supongamos, entonces, para fijar las ideas que es $A > B$, tendremos $q_0 > 1$, de donde, teniendo en cuenta que $B > R_1$, se deduce de la primera de los (1)

$$A > q_0 R_1 + R_1 = (q_0 + 1) R_1 \geq 2 R_1$$

o sea

$$R_1 \leq \tfrac{1}{2} A.$$

Análogamente, por ser $q_1, q_2, q_3 \dots$ todos mayores que cero se encuentra, teniendo en cuenta sucesivamente las (1):

$$R_2 > \tfrac{1}{2} R_1,\ R_5 < \tfrac{1}{2} R_3 \dots$$

$$R_2 < \tfrac{1}{2} B,\ R_4 < \tfrac{1}{2} R_2 \dots$$

o sea:

$$R_1 < \tfrac{1}{2} A,\ R_3 < \tfrac{1}{4} A,\ R_5 < \tfrac{1}{8} A, \dots$$

y

$$R_2 < \tfrac{1}{2} B,\ R_4 < \tfrac{1}{4} B,\ R_6 < \tfrac{1}{8} B, \dots$$

de modo que resulta efectivamente que si la sucesión de restos es ilimitada, ellos acaban por ser tan pequeños como se quiera.

A la misma conclusión se llega, en la hipótesis $A < B$, aplicando el mismo razonamiento a partir de la segunda de las relaciones (1).

Resumiendo en un único enunciado la presente discusión obtenemos el

TEOR. — *Dadas dos cantidades homogéneas, para saber si ellas son conmensurables y para determinar, en caso afirmativo, la máxima múltipla común, apliquemos a ellas el procedimiento euclídeo de las divisiones sucesivas. Si la serie de los restos tiene fin, las dos cantidades son conmensurables y el último resto es la máxima submúltipla común de las dos cantidades. Si la serie de los restos no tiene fin, las dos cantidades son inconmensurables.*

14. Aplicando el teor. precedente es fácil reconocer por esta nueva vía la *inconmensurabilidad de la diagonal y del lado de un cuadrado* cualquiera que sea.

Es también fácil establecer que *todo segmento es inconmensurable con su sección áurea.*

Consideremos el triángulo isósceles ABO que tiene por lado OA igual al segmento dado y el ángulo $\hat{O}$ del vértice igual a $\frac{4}{5}$ de recto y que, por lo tanto, tiene como base AB, que es igual a la sección áurea de OA. Trazada la bisectriz BC del ángulo $\hat{B}$ (igual a $\frac{8}{5}$ de recto) obsérvese que el resto de la división de OA

por su sección áurea AB es el segmento AC, sección áurea, a su vez, de AB, así que en las sucesivas divisiones se reproduce siempre el mismo caso: tener que dividir un segmento por su propia sección áurea, por lo tanto el proceso no tiene fin.

15. El procedimiento euclídeo conduce a otra representación aritmética de los números reales a la cual hemos hecho alusión al principio, es decir, bajo forma de *fracciones continuas*.

Nos limitaremos aquí a dar una rapidísima noción. Las relaciones (1) que intercedan entre dos magnitudes A y B y los restos R_1, R_2, R_3 .... de las sucesivas divisiones se pueden escribir (recordando el n.° 5).

$$(3) \quad A : B = q_0 + \frac{1}{B : R_1}, \; B : R_1 = q_1 + \frac{1}{R_1 : R_2},$$

$$R_1 : R_2 = q_2 + \frac{1}{R_2 : R_3} \; \dots\dots$$

Si la razón $A : B$ es racional (es decir, si A y B son conmensurables) el algoritmo de Euclides tiene fin; y si se termina en la cuarta división, por ej., tal que se tenga

$$R_2 : R_3 = q_3$$

se deduce de esta relación y de las tres precedentes

$$A : B = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}},$$

La expresión aritmética del 2.° miembro se llama una *fracción continua limitada* (de cocientes incompletos q_0, q_1, q_2, q_3); de donde podemos afirmar que todo número racional, es decir, toda razón entre magnitudes conmensurables, se puede representar bajo forma de fracción continua limitada (variando para cada caso los valores de los cocientes incompletos y su número es siempre finito). Recíprocamente, es claro que toda fracción continua limitada, una vez efectuados los cálculos, da un número racional único.

Supongamos, en segundo lugar, que la razón $A : B$ sea irracional (es decir, las magnitudes A y B sean inconmensurables), el algoritmo de Euclides no tendrá fin, dando lugar a infinitos cocientes incompletos $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots$ En tal caso se demuestra, teniendo en cuenta de las (3), que las fracciones continuas limitadas (las cuales se llaman *reducidas)*

$$q_0\,,\; q_0 + \frac{1}{q_1}\,,\; q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}\,,\; q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}}\,,\;\ldots\ldots$$

nos proporcionan infinitos valores aproximados de la razón $A : B$ alternativamente por defecto y por exceso, y tales que al crecer el número de los cocientes incompletos considerados, la aproximación acaba por ser tan grande como se quiera. Nos vemos pues conducidos a representar el número irracional $A : B$ por medio de la fracción continua ilimitada

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots\ldots}}}$$

Recíprocamente, si prefijada con una ley cualquiera, una sucesión de infinitos números enteros

$$q_0\,,\; q^1\,,\; q_2\,,\; q_3\,\ldots\ldots$$

de los cuales el primero puede ser también nulo, pero todos los otros positivos, formando la correspondiente fracción continua ilimitada, se demuestra (con un razonamiento análogo al del n. 7 o al mencionado para el caso de los números decimales ilimitados n. 12) que existe un número irracional perfectamente determinado, representado por dicha fracción continua, en el sentido que tal número admite como valores progresivamente aproximados (alternativamente por defecto y por exceso) a las correspondientes reducidas. Como conclusión obtenemos el

TEOR.: *Todo número real es representable bajo forma de fracción continua y recíprocamente; y se trata de un número racional o irracional según que la fracción continua es limitada o ilimitada.*

Si un número irracional está definido mediante su fracción continua ilimitada, la correspondiente sección $(H \mid K)$ se obtiene asignando a la clase H todas las reducidas de lugar impar (primera, tercera, quinta,......) y con cada una de ellas todos los números racionales menores, y a la clase K todos los otros números racionales (o sea, las reducidas de lugar par y con cada una de ellas todos los números racionales mayores).

16. Reconocer, como ejercicio (n. 14), que la razón de la diagonal de un cuadrado a su lado está dada por la fracción continua ilimitada...

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots\cdots}}$$

y la razón de un segmento a su sección áurea, por

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots\cdots}}}$$

17. Desde el punto de vista teórico, la representación de los números reales mediante las fracciones continuas es mucho más expresiva, y por así decir, profunda, que la representación decimal (n. 12). Ante todo, como acabamos de verlo, ella establece una distinción clara y simple entre racionales e irracionales, dando lugar a un algoritmo finito para los primeros, infinito para los segundos. Además, como lo demostró LAGRANGE (1736-1813), ella da para cada grado de aproximación, *la aproximación más ventajosa*, en el sentido que si un número irracional a está definido mediante su fracción continua (ilimitada) el valor de cada reducida es una fracción (de términos primos entre sí), la cual, entre las infinitas fracciones que dan el número a con la misma aproxima-

ción, es precisamente la que tiene los términos más pequeños. En fin, la representación en fracción continua constituye un medio muy potente y fecundo para clasificar los números irracionales. Por ej. (aquí debemos limitarnos a afirmarlo solamente), los irracionales cuadráticos (es decir, aquellos que satisfacen a ecuaciones de 2.º grado de coeficientes racionales), están caracterizados por la propiedad que en sus correspondientes fracciones continuas (seguramente ilimitadas), los cocientes incompletos presentan, a partir desde un lugar en adelante, una *periodicidad.*

II

REFLEXIONES SOBRE LA ORDENACIÓN DE LA GEOMETRÍA

Volvamos atrás para reflexionar sobre todo lo que hemos hecho en este tratado. Hemos estudiado las propiedades de las figuras geométricas (en el plano). Estas propiedades se suceden en un cierto orden lógico: cada teorema depende, en virtud de su demostración, de los precedentes; cada concepto complejo, se define mediante los más simples o elementales, explicados antes. Por consiguiente, el edificio de la Geometría se construye y crece por vía de demostraciones y de definiciones; y, reconocemos asombrados, que el camino que conduce a los descubrimientos más interesantes e inesperados, nos es indicado por tantos pequeños pasos, tan fáciles, naturales y necesarios, que el pensamiento los ha recorrido uno tras otro, casi sin darse cuenta.

He aquí, pues, un sentido de creación que acompaña al progreso de nuestra ciencia geométrica, puesto que la mente descubre en sí misma todo un mundo que ignoraba contener y que parece extraído de la nada.

Cuando buscamos comprender claramente el origen y el significado de esta aparente creación, nos vemos obligados a examinar el orden lógico del tratado; y también, a preguntarnos si, y en qué modo, el texto se podría perfeccionar. Un ideal de perfección se asoma en nuestro pensamiento: el orden del tratado sería absolutamente perfecto si todas las proposiciones que contiene fuesen demostradas y todos los conceptos lógicamente definidos. Es éste el ideal formulado por Blas Pascal en el siglo décimoséptimo. Es verdad que existen proposiciones tan intuitivas o evidentes que toda justificación de ellas puede parecer superflua; así hay palabras que evocan en nuestra mente la correspondiente idea geométrica, sin que aparezca necesaria explicación alguna de la misma; pero hacer un llamado a la intuición o a la fantasía, y por consiguiente, en cierto modo, a la vista corporal, es diferente que proceder paso a paso con razonamiento impecable, es decir, con los ojos del espíritu; y el estudiante de Geometría, que ha aprendido a apreciar el valor de la demostración aun de cosas fáciles, no aceptará fácilmente la excusa de quien quiera eximirse de demostrar las más fáciles todavía; con mayor razón, exigirá que hasta de las ideas más elementales se le dé una definición precisa.

Pero la pregunta, así hecha, desconoce el verdadero significado del orden lógico de la ciencia.

El ideal de «demostrar todo y definir todo» no tiene sentido para quien comprenda qué significa «demostrar» y «definir».

Recordemos las nociones dadas al respecto, en la Introducción (Parte I Geom. plana). Demostrar una propiedad quiere decir deducirla de otras ya conocidas o admitidas de tal modo que la verdad de aquélla no pueda ser negada, sin contradicción, por quien haya aceptado la verdad de éstas. Luego la demostración es esencialmente *relativa:* reduce las consecuencias a las premisas, pero no da nada a quien no sabe nada. Invirtiendo el orden de las demostraciones, necesariamente se debe llegar a principios que se aceptan sin demostración, que tienen por base criterios no ya lógicos, sino experimentales o intuitivos; la ciencia se apoya toda ella sobre estos *postulados*, proposiciones primeras o fundamentales.

También la definición es esencialmente *relativa*: resuelve una noción en otras más elementales, que se suponen dadas; así construye lo complejo con lo simple, pero nada crea.

El que define se asemeja al que construye un muro o un edificio; jamás pensará hacerlo sin los materiales necesarios. Por consiguiente, invirtiendo el orden de las definiciones (es decir, sustituyendo cada noción definida por la definición) debe llegarse necesariamente a *conceptos primitivos* o *fundamentales,* los cuales deben aceptarse sin definición. En un diccionario podemos borrar sucesivamente los términos definidos, colocando en su lugar la frase que nos ha servido para definirlos, la que (si no se quiere caer en un círculo vicioso no debe contener al término definido. Pero es claro que en estas sucesivas supresiones llegaremos necesariamente a detenernos en un cierto punto si no queremos borrar también aquellas voces que son menester para definir las otras.

La necesidad de fundar el orden de la ciencia demostrativa sobre principios de conocimiento inmediato fué bien advertida por los geómetras griegos aun antes de EUCLIDES, como aparece en ARISTÓTELES.

La exigencia análoga para la definición ha sido comprendida menos claramente. Si bien se ponía entre los principios el enunciado de los «términos», para cada uno de éstos se daba también una especie de descripción o pintura que podría parecer una definición y que interpretada así, resulta ilusoria, o bien implica un círculo vicioso.

El orden de la ciencia está viciado de tales errores, confusiones y aproximaciones del rigor lógico. La crítica moderna rehusa los subterfugios que simulan un ideal inconsistente. Consciente del carácter relativo de la demostración y de la definición y, por lo tanto de la necesidad de proposiciones y de conceptos primitivos, ella busca no ya esconder, sino *declarar explícitamente todos los conceptos fundamentales* (las figuras elementales y sus primeras relaciones) que se asumen sin definición y análogamente, de *enunciar todos los postulados,* admitidos sin demostración. Los otros conceptos que figuran en el texto deberán ser definidos de manera lógica y precisa por medio de los primeros, y las proposiciones no postuladas, deberán demostrarse deduciéndolas de los postulados.

Pero estos dos criterios, que presentamos como semejantes, ofrecen diversas dificultades para nuestra inteligencia. Todos estamos dispuestos a admitir que se pueda razonar sobre verdades reconocidas de cualquier manera aunque de origen extralógico; y en cambio, la idea de razonar sobre conceptos no definidos parece comprometer irrevocablemente el carácter lógico de la ciencia.

Si no se puede comprender de qué cosa se habla, sin tener presente un objeto (figurado en un modelo o representado en la fantasía), parece que cada paso de nuestros razonamientos esté ligado a una representación sensible y participe de la incertidumbre e imprecisión de ésta.

Pero a esta dificultad se contesta que nosotros debemos observar de una vez todas las figuras y sus relaciones fundamentales para fijar las primeras propiedades en el enunciado preciso de los postulados. En el razonamiento deductivo se adoptarán sólo estas propiedades explícitamente postuladas, y no las otras, que la visión directa podría enseñarnos.

Se desprende de esto que los postulados vienen, en cierto modo, a definir los conceptos fundamentales de la deducción geométrica. Hasta, en un caso el postulado equivale a una definición propiamente dicha: cuando la propiedad que él expresa resuelve precisamente una noción compleja en otras más simples.

Por ejemplo, la intuición nos permite reconocer que dos polígonos son iguales cuando tienen ordenadamente iguales los lados y los ángulos comprendidos; la proposición que enuncia esta propiedad puede tomarse indiferentemente, ya sea como postulado (en el cual entra el concepto general no definido de figuras iguales), o bien como la definición de los polígonos iguales, para la cual el concepto de tal igualdad queda reducido a la noción elemental de la igualdad de segmentos y ángulos.

Pero no todos los postulados pueden reducirse a la simple forma de definición explícita. En cambio, puede decirse de ellos que — expresando las mutuas relaciones de los conceptos fundamentales (los únicos que se mencionan en los razonamientos) — precisan su significado y, por consiguiente, proporcionan en su conjunto, la *definición implícita* de tales conceptos.

Este aspecto de los postulados fué puesto en claro por Gergonne, a principios del siglo pasado: los postulados definen los conceptos primitivos del mismo modo que un sistema de ecuaciones define el conjunto de valores de las incógnitas que lo satisface. Se puede razonar sobre éstos aun cuando no se sepa o no se quiera calcularlos efectivamente, teniendo en cuenta las ecuaciones condicionales. Análogamente, en Geometría, se razona sobre conceptos no explícitamente definidos, haciendo uso de los postulados a los cuales deben satisfacer.

En Geometría, como en toda ciencia racional, el orden de las demostraciones y el de las definiciones no es, en realidad, necesario. Después de haber observado algunas propiedades, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de un objeto cualquiera, podemos descubrir, por ejemplo, que la *e* es consecuencia lógica de las *a*, *b*, *c*, *d*, y también que la *d* es consecuencia de las *a*, *b*, *c*, *e*; entonces tenemos la libertad de asumir como postulados los *a*, *b*, *c*, *d*, y demostrar como teorema la *e*, o bien postular *a*, *b*, *c*, *e*, y dar como teorema la *d*. Lo que se ha dicho para la demostración vale también para la definición.

Hay, pues, en la elección de los conceptos y de las proposiciones fundamentales algo de arbitrario: la Lógica no da al respecto criterios decisivos. La sencillez y la evidencia son exigidas a los principios para obtener sobre ellos el consenso general y garantir su certeza y precisión, pero no por motivos propiamente lógicos. En ciencias diversas de la Geometría, por ej., en algunas teorías físicas ocurre a veces introducir postulados no evidentes que se aceptan provisoriamente como «hipótesis de trabajo», salvo que se justifique, más tarde, con el experimento, la verdad de las consecuencias que de ellos se desprenden.

La Lógica, filosofía del razonamiento, enseña las reglas precisas de la deducción y de la definición sobre las cuales no es este el caso de insistir. Para el desarrollo de la ciencia, estas reglas tienen solamente un valor negativo: permiten eliminar los desarrollos erróneos, pero no aseguran que los resultados deducidos tengan un verdadero interés científico.

La máquina de razonar imaginada por Jevons, proporcionaría miles y miles de combinaciones de las verdades que se le dieren para transformar; ¿pero cuántas de éstas resultarían verdaderamente significativas? También los conceptos pueden combinarse de infinitos y diversos modos según definiciones arbitrarias. Pero la visión de objetos reales correspondientes a los términos definidos limita en el uso tal arbitrio.

Si se quiere definir alguna cosa que tenga un sentido intuitivo y que se pueda confrontar con otros conceptos intuitivos, es menester acompañar la definición con una apropiada observación que la justifique, como se hace en general para los postulados.

La definición arbitraria no basta ni siquiera para establecer la *existencia* de un objeto del pensamiento lógicamente posible, es decir, no contradictorio consigo mismo. Es claro que, si se define una figura como reunión de otras, p. ej., la reunión de dos círculos, su existencia resulta de la de sus componentes; ¿pero qué se puede afirmar de algo que sea definido (por interferencia) como parte común a dos figuras, p. ej., de un punto que se quiera dar como intersección de rectas o circunferencias? En general, no basta atribuir a un ente ciertas propiedades para que él sea efectivamente posible: así un triángulo *birrectángulo* es imposible; razonando sobre él se llega a absurdos.

Por consiguiente, (prescindiendo de casos evidentes), la definición debe acompañarse con el juicio de existencia de lo definido, juicio extraído directamente de la intuición y expresado con un postulado, o bien establecido como teorema.

Tal exigencia fué advertida por los griegos, y de ella es testimonio ARISTÓTELES. Con sumo cuidado EUCLIDES demuestra la existencia de las figuras más complejas, dando su *construcción*. Las construcciones elementales que sirven de base a todas las otras están contenidas en sus postulados. Es así como enseña a construir el triángulo equilátero, el cuadrado, el exágono regular, etcétera, reduciéndolos siempre al trazado de rectas y circunferencias y a sus mutuas intersecciones.

Se encuentran también problemas sencillísimos, como la trisección del ángulo que no se puede resolver con dichas construcciones elementales si bien una intuición de continuidad nos asegura la existencia de la solución buscada. El uso más extendido de este criterio, (principio de continuidad como base de los juicios de existencia independientemente de la construcción), constituye un nuevo carácter de la Geometría moderna en comparación con la antigua.

No obstante el grado de arbitrariedad, los tratados de Geometría se parecen entre sí más de lo que ocurre en las otras ciencias. Este hecho tiene su explicación no solamente en la naturaleza de nuestra intuición, sino también en la continuidad del desarrollo histórico que procede desde EUCLIDES.

EUCLIDES ha quedado como base de todos los ordenamientos, aun cuando se han empezado a abrir nuevas vías en el comienzo del siglo pasado. Estas vías nuevas de la crítica y de los motivos científicos y filosóficos, históricos, didácticos y artísticos que en ellos se expresan, han sido ampliamente examinadas en « *Questioni riguardanti le Matematiche elementari* », recogidas y coordinadas por F. ENRIQUES, en las cuales han colaborado, con el que las ordenó, numerosos colegas y discípulos. Durante 25 años, la obra se ha ido agrandando y, a través de numerosas traducciones, se ha difundido también más allá de los confines de aquel país (Italia). En Italia ella ha servido para superar aquel espíritu lógico estrecho, en virtud del cual los estudiosos gustaban perderse en pequeñas discusiones formales, de las cuales hacían a menudo el propio sistema y el propio muudo. Junto con el presente tratado, que extrae de ella numerosas ideas inspiradoras, la mencionada obra ha ejercido una poderosa influencia sobre todos los nuevos libros de enseñanza. Ahora bien, ¿ cuál es la posición de la Geometría elemental respecto a la de EUCLIDES ?

Digámoslo de la manera más breve, recomendando al lector las « *Questioni* » para un examen más profundo de los principios.

Ante todo, ella contiene una declaración explícita de los conceptos fundamentales y también de aquellos postulados implícitamente admitidos por el geómetra griego, que se refieren a las propiedades lineales de la recta y superficiales del plano (ordenación de los puntos de la recta, segmentos, partes del plano, ángulos, etc.)

La teoría de la igualdad, satisfaciendo también las exigencias de la crítica moderna, se informa siempre en el espíritu euclídeo.

EUCLIDES adopta como primitivo (sin definición) el concepto de figuras « iguales en magnitud »: segmentos y ángulos iguales, superficies iguales. A la igualdad de figura o congruencia (como también a la simple igualdad de forma) no le da EUCLIDES un nombre especial; pero en las proposiciones 1, 4, 7 y 26 del Libro I de los Elementos, se expresa que dos triángulos son congruentes, diciendo que tienen iguales los lados y los ángulos. Más adelante (Libro III) se define la igualdad de dos círculos mediante la de los radios. Y en el Libro VI, se introducen los polígonos semejantes (de igual forma) como aquéllos que tienen iguales los ángulos y proporcionales los lados que los forman.

El « movimiento » lo adopta EUCLIDES (I, 4 y 7) para reconocer la igualdad de dos triángulos, concluyendo en virtud del axioma 7 que son iguales cuando se pueden superponer; se trata en primer lugar de triángulos que tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido, luego, de triángulos con tres lados iguales. En este segundo caso no se recurre ya al movimiento, sino solamente al transporte del triángulo sobre una base dada, como se ha hecho en el caso anterior (transporte que el autor ejecuta más adelante con la construcción mediante círculos: 23 y 24). El uso del movimiento limitado a las proposiciones citadas, aparece en realidad excepcional en los Elementos; Euclides ha sentido que contiene un paso extralógico, porque se abstiene de recurrir a él, aun en los casos en que el movimiento habría conferido al discurso una evidencia inmediata (por ej., para reconocer la igualdad de los ángulos en la base del triángulo isósceles; I, 5).

La crítica moderna ha puesto en claro la distinción entre la congruencia y la igualdad de magnitud de las superficies o de los sólidos. En particular, para los polígonos esta última relación se reduce a la equivalencia o descomponibilidad en partes congruentes (Duhamel).

En nuestro tratado hemos adoptado tal criterio elaborando toda la teoría de la igualdad de las superficies (y después de los sólidos) en una forma que utilizamos también las contribuciones críticas y didácticas de De Zolt y de Faifofer.

Para fundar la teoría de la congruencia, algunas direcciones de la crítica moderna, analizan la idea del movimiento como correspondencia entre puntos, extensible desde las figuras al plano o al espacio que los contiene, en el mismo sentido establecido por el progreso de la Geometría proyectiva [1]. Se obtiene así, desde un principio, la definición más general de figuras iguales. Nosotros hemos conservado en nuestra exposición el sabor euclídeo, adoptando el movimiento solamente como medio intuitivo para reconocer los primeros casos de igualdad de las figuras elementales, cuya definición se reduce a la comparación de segmentos y ángulos; la única diferencia con Euclides es el enunciado explícito de los postulados adoptados según el análisis moderno. [2]

---

(1) Cfr. el artículo de A. Guarducci, "Della congruenza", en el Vol. I de la parte I de las citadas "*Questioni*".

(2) Un empleo más libre del movimiento en un orden de ideas intuitivo-experimentales se ha hecho en esta traducción de la *Geometría*.

Aquí el criterio histórico da fundamento a la norma didáctica que el concepto general de correspondencia constituye una dificultad para los jóvenes, y que el espíritu nuevo de la Geometría proyectiva debe desarrollarse naturalmente mediante una precedente educación euclídea.

También nos hemos acercado a EUCLIDES en la teoría de las proporciones (libro V), definiendo por abstracción las razones entre pares de magnitudes, mediante su igualdad y desigualdad. Pero hemos aclarado el sentido de la definición euclídea, admitiendo, desde un principio, la divisibilidad de las magnitudes en base a su contigüidad. Se prepara así la introducción de los números racionales concebidos de modo concreto como razones que conducen luego, naturalmente, a la definición aritmética de DEDEKIND [1], que parece también sugerida en los Programas italianos.

Por otra parte, la mencionada modificación del libro de EUCLIDES ha sido ya introducida en libros didácticos anteriores al nuestro, por ej., el de FAIFOFER.

También aquí, como en la comparación de superficies circulares y más tarde de los sólidos, con el método de exaustión, nosotros nos hemos acercado al espíritu euclídeo con la forma de nuestra definición: después de haber aprendido a comparar dos razones y a reconocer la igualdad en el caso conmensurable y, por consiguiente, en general, la desigualdad, llamamos « iguales dos razones cuando la una no es mayor que la otra ».

Resulta así la máxima simplificación y economía de esta exposición que nos hemos empeñado en perfeccionar (ensayando también vías diversas) en las sucesivas ediciones de nuestro tratado.

Estas breves notas valen para orientar al estudioso que quiera comprender la enseñanza recibida, no como un sistema inmóvil y cerrado en sí, sino más bien como un momento del desarrollo secular de la ciencia geométrica. Una visión histórica profunda se ofrece en el libro ya citado en la introducción « *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna*», editada por F. ENRIQUES, vol. I; Stock, Roma, 1925.

---

(1) Cfr. op. cit., p. 18, en particular la nota IX de O ZARISKI, p. 238.

GEOMETRIA

INDICE DEL LIBRO III

CAPÍTULO VI

RAZONES Y PROPORCIONES

§ 1. Magnitudes geométricas.

§ 2. Magnitudes conmensurables y magnitudes inconmensurables

§ 3. Magnitudes proporcionales

CAPÍTULO VII

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LAS PROPORCIONES TRIÁNGULOS Y POLÍGONOS SEMEJANTES

§ 4. Teoremas fundamentales

§ 5. Aplicaciones de la proporcionalidad de segmentos. Polígonos semejantes

CAPÍTULO VIII

§ 6. Ciclometría o medición de figuras circulares

CAPÍTULO IX

MEDIDAS Y APLIÇACIONES DEL ALGEBRA A LA GEOMETRÍA

§ 7. Generalidades

§ 8. Aplicaciones del Algebra a la Geometría

CAPÍTULO X

§ 9. Funciones trigonométricas

APÉNDICE

I

ARITMÉTICA DE LAS RAZONES

II

REFLEXIONES SOBRE LA ORDENACIÓN DE LA GEOMETRÍA