EMANUEL S. CABRERA y HECTOR J. MEDICI

Geometría Escolar

PARA

INGRESO A LOS COLEGIOS SECUNDARIOS

Y

SEXTO GRADO DE LAS ESCUELAS NORMALES Y PRIMARIAS

400 problemas
220 figuras

CABAUT y Cía. - EDITORES
"Librería del Colegio" - Alsina y Bolívar
BUENOS AIRES
1936

Geometría Escolar

PARA

INGRESO A LOS COLEGIOS SECUNDARIOS

Y

SEXTO GRADO DE LAS ESCUELAS NORMALES Y PRIMARIAS

Por los Profesores Diplomados en Matemáticas y Cosmografía

Ing. HÉCTOR J. MEDICI

PROFESOR DEL COLEGIO NACIONAL
NICOLAS AVELLANEDA, DEL COLEGIO MILITAR
DE LA NACIÓN Y DE LA
ESCUELA NORMAL DE PROFESORES M. ACOSTA

Ing. EMANUEL S. CABRERA

PROFESOR DEL COLEGIO NACIONAL
BARTOLOMÉ MITRE, DEL COLEGIO NACIONAL
BERNARDINO RIVADAVIA Y DE LA
ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO Nº 3

400 problemas
220 figuras

Sección Infantil

CABAUT y Cía. - EDITORES
"Librería del Colegio" - Alsina y Bolívar
BUENOS AIRES
1936

OBRAS DE LOS AUTORES

Elementos de Aritmética, ... *Primer curso,* 11ª edición
Elementos de Aritmética, ... *Segundo curso* 9ª edición
Elementos de Aritmética y Algebra, . . . *Tercer curso,* 6ª edición
Elementos de Aritmética y Algebra, . . . *Cuarto curso,* 3ª edición
Elementos de Geometría, ... *Primer curso,* 11ª edición
Elementos de Geometría, ... *Segundo curso,* 10ª edición
Elementos de Geometría, ... *Tercer curso,* 8ª edición
Elementos de Geometría del Espacio, . . *Cuarto curso,* 6ª edición
Matemáticas para Primer Año de las Escuelas Normales, 5ª edición
Matemáticas para Segundo Año de las Escuelas Normales, 3ª edición
Matemáticas para Tercer Año de las Escuelas Normales, 5ª edición
Elementos de Cosmografía, ... 3ª edición
Aritmética Escolar para Ingreso y Sexto grado, ... 1ª edición
Geometría Escolar para Ingreso y Sexto grado, ... 1ª edición

Est. Gráf. "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

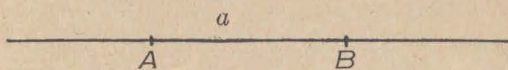
INDICE

CAPITULO I

SEGMENTOS

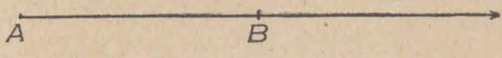
Es necesario distinguir, con toda claridad, las siguientes figuras:

LA RECTA que no tiene ni primero ni último punto y de la cual solo es posible representar una *parte*.



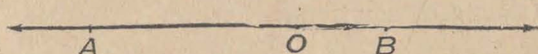
NOTACIÓN. — La recta que pasa por los puntos A y B se designa con AB o con una letra minúscula *a*, por ejemplo.

LA SEMIRRECTA que es la parte de recta formada por un primer punto de la misma llamado *origen* y todos los que le siguen en uno de los *sentidos* que tiene la recta.



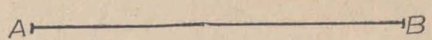
NOTACIÓN. — La semirrecta de origen A que pasa por el punto B se designa con $\overrightarrow{AB}$ que se lee: *semirrecta de origen* A *que contiene al punto* B.

CONSECUENCIA. — Como en una recta hay dos sentidos resulta que: *Un punto de una recta la divide en dos semirrectas llamadas opuestas.* Además *una semirrecta tiene primer punto pero no último.*



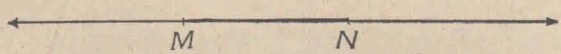
EJEMPLO. — El punto O de la recta *a* la divide en las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

El segmento que es la parte de recta que tiene primero y último puntos que se llaman *extremos* del mismo.



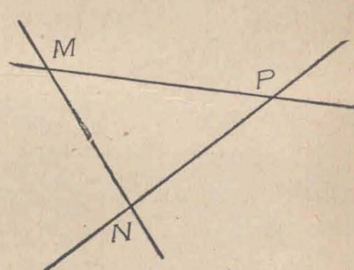
Notación. — El segmento de extremos A y B se designa con AB que se lee *segmento* AB.

Ejercicios. — I) *Dados dos puntos* M y N *dibujar y anotar, la recta, la semirrecta y el segmento que ellos determinan.*



En la figura tenemos dibujadas: la recta MN, las semirrectas $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$ y el segmento $\overline{MN}$.

II) *Dados los puntos* M, N y *P, que no están en una misma recta, dibujar y anotar: las rectas, semirrectas y segmentos que ellos determinan dos a dos.*

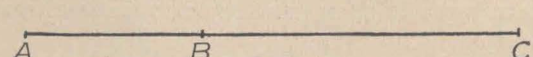


M, N y P determinan MN, NP y PM

$\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{PN}$ y $\overrightarrow{MP}$

y $\overline{MN}$, $\overline{NP}$ y $\overline{PM}$.

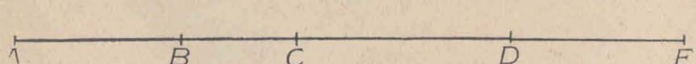
Definición. — Se dice que dos segmentos de una recta son *consecutivos* cuando sólo tienen común un extremo.



Ejemplos:

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son consecutivos

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$ son consecutivos.



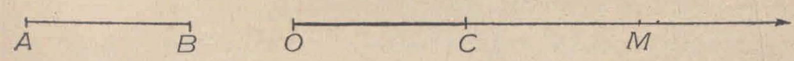
Suponemos bien sabido por los alumnos que al comparar dos segmentos AB y CD debe *necesariamente* suceder uno solo de los siguientes casos: *que el primero sea igual al segundo, o el primero mayor que el segundo, o el primero menor que el segundo* y eso se indica así:

1º) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ó 2º) $\overline{AB} > \overline{CD}$ ó 3º) $\overline{AB} < \overline{CD}$.

Las relaciones anteriores se pueden comprobar prácticamente con una *regla* o con un *compás* que son los *transportadores* de segmentos.

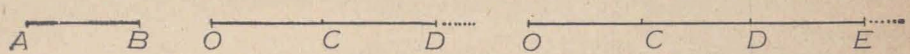
Recordamos a continuación algunos problemas que los alumnos han resuelto en los grados anteriores al estudiar las operaciones con segmentos.

Problemas. — I) *Dado un segmento* $\overline{AB}$*, construir sobre la semirrecta* $\overrightarrow{OM}$ *un segmento igual al* $\overline{AB}$.



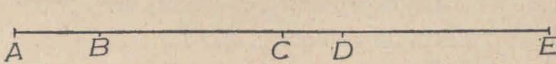
$\overline{OC} = \overline{AB}$

II) *Dado un segmento* $\overline{AB}$*, construir el doble, el triplo, etc. del mismo.*



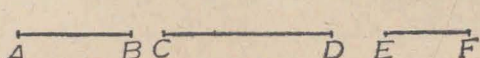
$$\overline{OD} = \overline{AB} + \overline{AB} = \overline{AB} \times 2 \quad ; \quad \overline{OE} = \overline{AB} + \overline{AB} + \overline{AB} = \overline{AB} \times 3$$

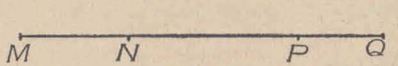
III) *Hallar la suma de los segmentos consecutivos* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$.



$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE}$$

IV) *Hallar la suma de varios segmentos cualesquiera* $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.

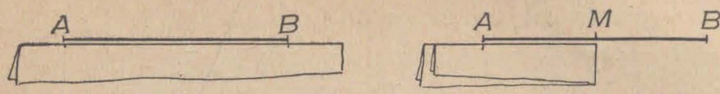




$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PQ} = \overline{MQ}$$

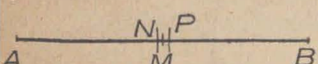
siendo $\overline{MN} = \overline{AB}$, $\overline{NP} = \overline{CD}$ y $\overline{PQ} = \overline{EF}$.

V) *Dividir un segmento en dos partes iguales.* MÉTODO PRÁCTICO. Marcamos sobre una tira de papel, cuyo borde recto hacemos coincidir con el segmento, los



extremos del mismo; la doblamos en forma tal que las marcas coincidan, y entonces el doblez señala sobre el borde el punto medio del segmento. Transportando sobre $\overline{AB}$ el segmento determinado por las marcas coincidentes con el doblez obtenemos el punto M que divide al $\overline{AB}$ en dos partes iguales.

MÉTODO APROXIMADO. — A partir de A y B transportamos sobre el $\overline{AB}$ otros $\overline{AN}$ y $\overline{BP}$ que sean a *simple vista* iguales a mitad de $\overline{AB}$. Si diera la casualidad

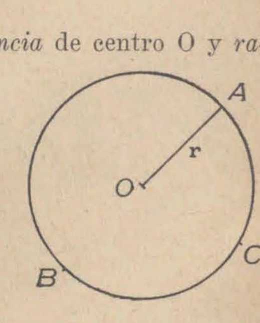


de que N coincidiera con P el punto así obtenido es el que divide a AB en dos partes iguales. En los otros casos, esos puntos serían distintos pero mucho más cercanos que A y B, por lo que resulta fácil tomar a simple vista el punto medio M del segmento que ellos determinan.

* * *

Para la resolución gráfica de muchos problemas, es necesario utilizar el compás para el trazado de la figura denominada *circunferencia,* que los alumnos ya conocen, y que se define así:

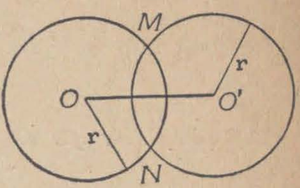
Circunferencia. — DEFINICIÓN. — Se llama *circunferencia* de centro O y *radio* r a la figura plana formada por los puntos cuya distancia a O es igual a r.



Si A, B, C, D... son puntos de la circunferencia

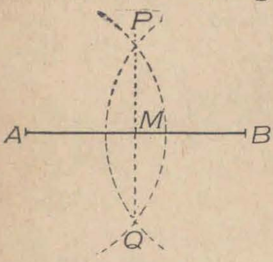
$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \ldots = r.$$

CONDICIÓN PARA QUE DOS CIRCUNFERENCIAS IGUALES SE CORTEN. — Para que dos circunferencias iguales sean *secantes*, es decir, *se corten en dos puntos*, basta que sus radios sean mayores que la mitad de la distancia entre sus centros.



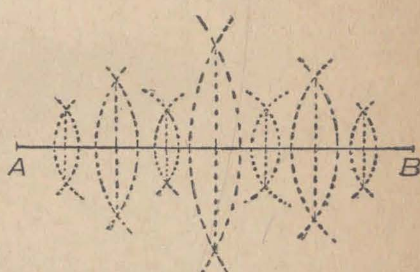
EJEMPLO: Siendo $r > \frac{\overline{OO'}}{2}$ las circunferencias iguales de centros O y O' y radios iguales a r resultan las circunferencias *secantes*.

División de un segmento en dos partes iguales con regla y compás. —



Trazando la circunferencia de centro A y radio mayor que la mitad de $\overline{AB}$ y con el mismo radio la de centro B, ésta corta a la anterior en dos puntos P y Q. Uniendo P con Q resulta que $\overline{PQ}$ corta a $\overline{AB}$ en un punto M que lo divide en dos partes iguales.

VII) *Dividir un segmento en cuatro, ocho,... partes iguales.* Basta dividirlo en dos partes iguales y a cada una de ellas en otras dos y a cada una de las obtenidas en otras dos... según se trate de dividirlo en cuatro, ocho,... partes iguales, respectivamente.



VIII) *Dividir un segmento en un número cualquiera de partes iguales.* CON LA REGLA GRADUADA. Basta medir el segmento, dividir el número así obtenido por el de partes en que se quiere dividir al segmento dado y transportar sobre éste, a partir de uno de sus extremos, segmentos consecutivos iguales al que tiene por medida el cociente anterior.

PROBLEMAS. — I) *Dados los puntos R, S, Z y K tales que cada tres de ellos no estén en la misma recta, dibujar y anotar, los segmentos, las rectas y las semirrectas que ellos determinan dos a dos.*

II) *Dar ejemplos de segmentos materiales.*

III) *Dados tres puntos de una recta M, N y P, ¿cuál es la parte común a las semirrectas:* a) $\overrightarrow{MN}$ *y* $\overrightarrow{NM}$; b) $\overrightarrow{MP}$ *y* $\overrightarrow{PN}$?

IV) *Dibujar a mano levantada:* a) *un segmento igual a otro*; b) *mayor que otro;* c) *menor que otro y comprobar empleando los transportadores de segmentos los resultados obtenidos;* d) *repetir la operación hasta lograr lo deseado.*

V) *Comprobar que si* $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{CD} = \overline{EF}$ es $\overline{AB} = \overline{EF}$.

VI) *Comprobar que si* $\overline{MN} = \overline{PQ}$ y $\overline{NR} = \overline{QS}$ es $\overline{MR} = \overline{PS}$.

VII) *Comprobar que* $a + b + c = c + b + a = a + (c + b)$.

VIII) *Dados dos segmentos* AB > CD *construir:* a) *la suma;* b) *la diferencia;* c) *la semisuma;* d) *la semidiferencia;* e) *un múltiplo de CD que supere a* AB; f) *la mitad de la suma del duplo de* AB *con el triplo de* CD; g) *la cuarta parte del triplo de la diferencia.*

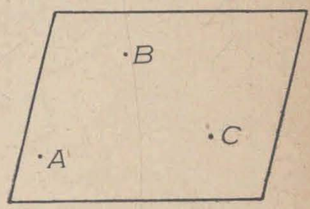
IX) *Comprobar que si se une un punto de una circunferencia con otros puntos de la misma, de todos los segmentos que se obtienen es mayor el que pasa por el centro.*

CAPITULO II

ANGULOS

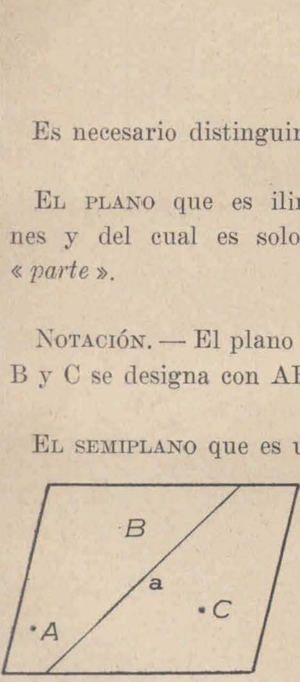
Es necesario distinguir, con toda claridad, las siguientes figuras:

El plano que es ilimitado en todas direcciones y del cual es solo posible representar una « *parte* ».



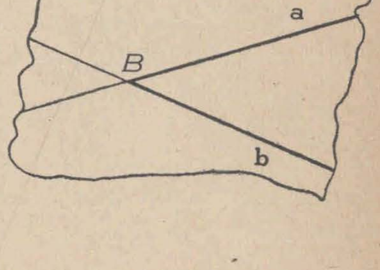
Notación. — El plano que pasa por los puntos A, B y C se designa con ABC.

El semiplano que es una de las partes en que queda *dividido* un plano por una recta del mismo.



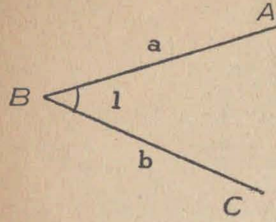
Ejemplo: La recta a del plano ABC lo divide en dos semiplanos, uno que contiene a los puntos A y B y otro que contiene al C.

El ángulo que es una de las cuatro partes en que queda *dividido* un plano por dos rectas del mismo que se corten.

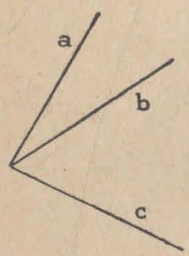


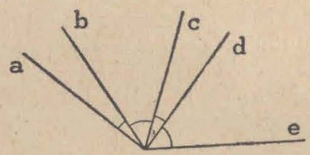
Notaciones. — El ángulo de lados a y b se designa con $\widehat{ab}$ que se lee *ángulo* ab;

el de vértice B y lados $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ se designa con $\widehat{ABC}$. Cuando no es posible confundirlo con otro se lo puede designar con la letra del vértice o con un número colocado en la forma que indica la figura. Así $\widehat{B}$ o $\widehat{1}$ que se lee ángulo B o ángulo 1.



DEFINICIÓN. — Se dice que dos ángulos son *consecutivos* cuando solo tienen común un lado y ningún otro punto fuera de él.





EJEMPLOS:

$\widehat{ab}$ y $\widehat{bc}$ son consecutivos

Análogamente $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$ y $\widehat{de}$ son consecutivos.

* * *

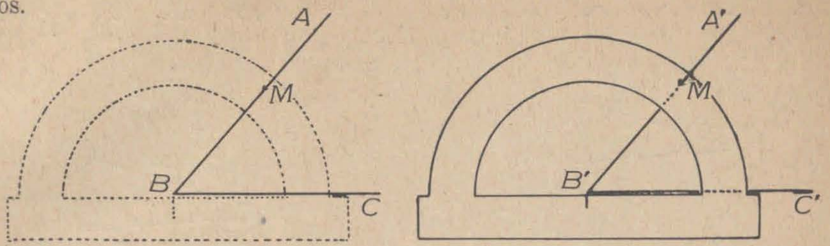
Suponemos bien sabido por los alumnos que al comparar dos ángulos $\widehat{ab}$ y $\widehat{cd}$ debe *necesariamente* suceder uno solo de los siguientes casos: *que el primero sea igual al segundo, o que el primero sea mayor que el segundo, o que el primero sea menor que el segundo* y eso se indica, respectivamente, así:

1º) $\widehat{ab} = \widehat{cd}$ ó 2º) $\widehat{ab} > \widehat{cd}$ ó 3º) $\widehat{ab} < \widehat{cd}$.

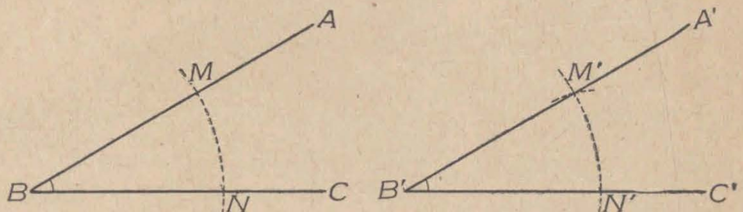
Las relaciones anteriores se pueden comprobar prácticamente con un *transportador de ángulos.*

PROBLEMAS. — I) *Dado un ángulo* ABC, *construir sobre una semirrecta dada* $\overrightarrow{B'C'}$ *un ángulo igual al* ABC. CON TRANSPORTADOR. Basta proceder como indica la figura de la página siguiente. Esto es, se hace coincidir un radio del transportador con el lado BC del ángulo, en forma tal que su vértice coincida con el centro del transportador y se marca sobre éste el punto M en que el otro lado del ángulo lo corta. Se lleva a coincidir en la forma indicada el mismo radio con la semirrecta B′C′ y se marca sobre el pizarrón o el papel el punto M que se había señalado. Trazando la semirrecta B′A′ que pase por M se obtiene el ángulo pedido.

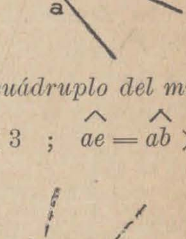
Cualquier hoja de papel con un borde recto puede servir de transportador de ángulos.



Con regla y compás: Con centro en el vértice B y con un radio cualquiera se traza una circunferencia que corta a los lados en los puntos M y N. Con cen-



tro en el origen B' de la semirrecta dado $\overrightarrow{B'C'}$ y con el mismo radio se traza otra circunferencia que corta a $\overrightarrow{B'C'}$ en el punto N'. Si con centro en N' y radio $\overline{MN}$ se traza otra circunferencia, ella corta a la anterior en dos puntos M' y M'' (M'' no está en la figura). Trazando la $\overrightarrow{B'M'}$ se obtiene el ángulo $\widehat{M'B'N'}$ que es el pedido.

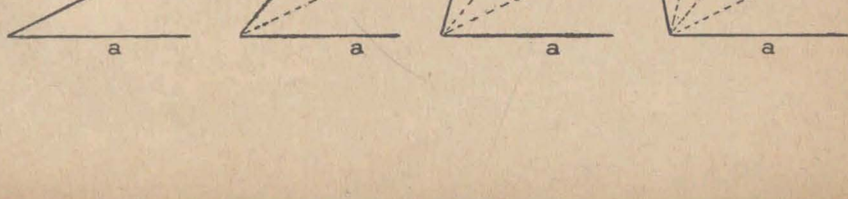


II) *Hallar la suma de los ángulos consecutivos* $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ *y* $\widehat{cd}$.

$$\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} = \widehat{ad}$$

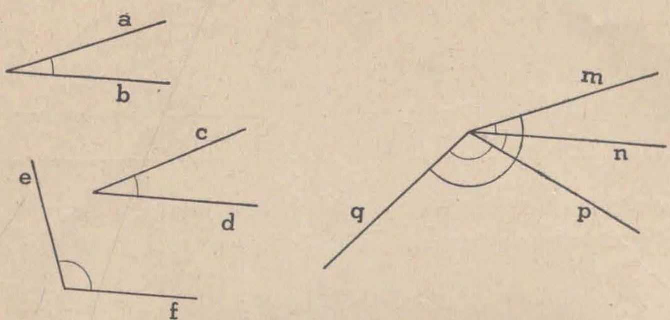
III) *Dado un ángulo ab, construir el doble, el triple, el cuádruplo del mismo.*

$\widehat{ac} = \widehat{ab} + \widehat{ab} = \widehat{ab} \times 2$; $\widehat{ad} = \widehat{ab} + \widehat{ab} + \widehat{ab} = \widehat{ab} \times 3$; $\widehat{ae} = \widehat{ab} \times 4$

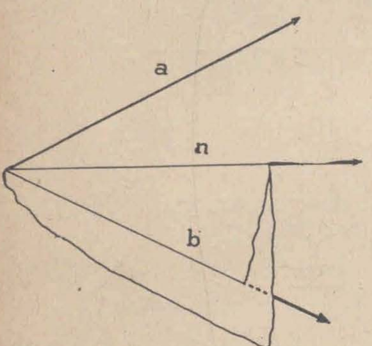


IV) *Hallar la suma de varios ángulos cualesquiera.*

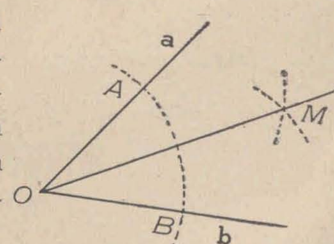
$\widehat{ab} + \widehat{cd} + \widehat{ef} = \widehat{mn} + \widehat{np} + \widehat{pq} = \widehat{mq}$ siendo $\widehat{mn} = \widehat{ab}$, $\widehat{np} = \widehat{cd}$ y $\widehat{pq} = \widehat{ef}$



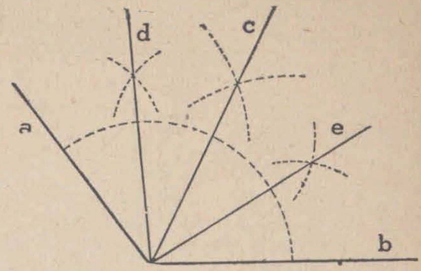
V) *Dividir un ángulo en dos partes iguales.* MÉTODO PRÁCTICO: Calcamos con un papel transparente el ángulo dado, lo doblamos en forma tal que los lados coincidan y entonces el doblez *n* señala la semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos iguales. Transportando el papel así doblado de manera que los lados coincidentes del ángulo calcado coincidan con el *b* y el lado *n* sea interior al ángulo *ab*, la semirrecta *n* lo divide en dos partes iguales.



MÉTODO GEOMÉTRICO: Con centro en el vértice O y con un radio cualquiera se traza una circunferencia que corta a los lados *a* y *b* en los puntos A y B, respectivamente. Con el mismo radio y centro en A y B se trazan dos circunferencias que se cortan en O y en M (en la figura solo se han trazado los arcos que se cortan en M). La semirrecta OM divide al ángulo *ab* en dos partes iguales y por eso se dice que es la *bisectriz* del ángulo *ab*.



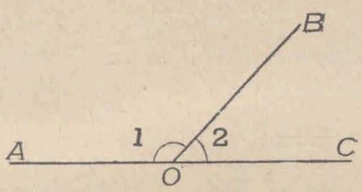
VI) *Dividir un ángulo en cuatro, ocho, etc. partes iguales.* Basta dividirlo en dos partes iguales y a cada una de ellas en otras dos y a cada una de las obtenidas en otras dos... según se trate de dividirlo en cuatro, ocho,... partes iguales, respectivamente.

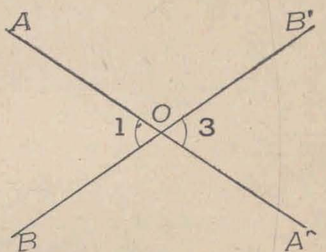


Angulos formados por dos rectas que se cortan.— Al cortarse dos rectas quedan formados dos clases de ángulos.

Los $\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ que se llaman *adyacentes*

y los $\widehat{AOB}$ y $\widehat{A'OB'}$ » » » *opuestos por el vértice.*





PROPIEDAD. — *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Esta propiedad puede comprobarse mediante el transportador de ángulos o calculando a uno de ellos y llevándolo a coincidir con el otro.

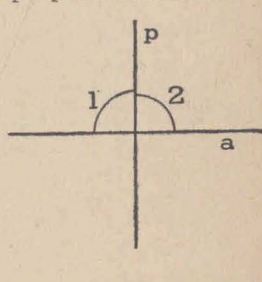
RECTAS PERPENDICULARES

Rectas perpendiculares. — Se dice que dos rectas son *perpendiculares* cuando forman dos ángulos adyacentes iguales.

EJEMPLO. — Siendo los ángulos adyacentes

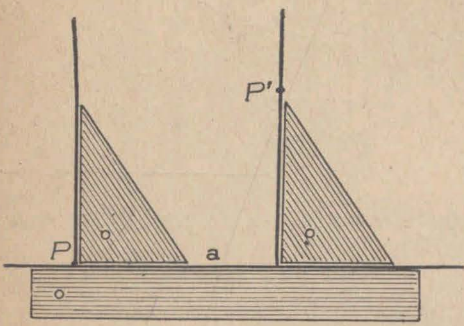
$\widehat{1} = \widehat{2}$ es $p \perp a$ y se lee

p es perpendicular a *a*.



PROBLEMA I. — *Trazado de la perpendicular a una recta por un punto de ella o exterior a la misma.*

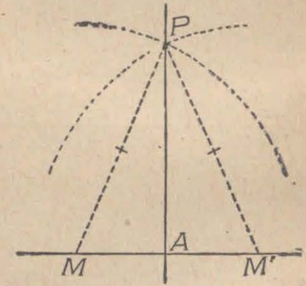
PRIMER MÉTODO. *Con la escuadra.* Se usa el instrumento llamado *escuadra*, que es tal que dos de sus cantos (*catetos*) son perpendiculares. Para trazar la perpendicular se hace coincidir uno de los catetos con la recta dada y se desliza la escuadra hasta que el otro cateto pase por el punto dado. Luego se traza la recta que ese canto determina y se tiene la perpendicular pedida.



Para facilitar esta operación se puede hacer coincidir primeramente la recta con el canto de una regla como se ve en la figura.

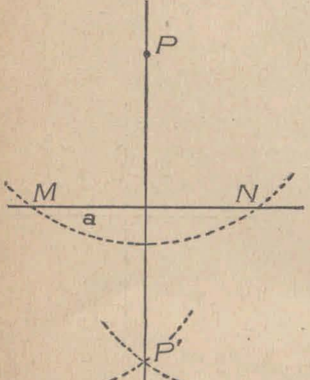
SEGUNDO MÉTODO. *Con regla y compás.* — II) *Por un punto de una recta trazarle la perpendicular.*

Sobre cada una de las semirrectas que determina el punto A en *a* se construyen los segmentos $\overline{AM} = \overline{AM'}$. Con centro en M y M' se trazan dos circunferencias iguales de radios mayores que $\overline{MA}$ que se cortan en dos puntos P y P' (P' no está en la figura). Trazando la recta AP se obtiene la perpendicular pedida.



En la práctica solo se trazan los arcos de circunferencia necesarios como se ve en la figura.

III) *Por un punto exterior a una recta trazarle la perpendicular.*



Con centro en el punto dado P se traza una circunferencia que corte a la recta *a* en los puntos M y N, para lo cual basta que pase por un punto del semiplano que limita *a* y no contiene a P. Con el mismo radio y centro en M y N se trazan dos circunferencias que se cortan en los puntos P y P' (en la figura solo se han trazado los arcos que se cortan en P'). Trazando la recta PP' se obtiene la perpendicular pedida.

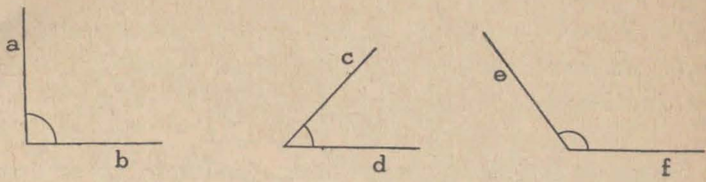
Si aplicamos los dos métodos anteriores para trazar la perpendicular a una recta por un mismo punto, comprobaríamos que: *En un plano por un punto pasa* UNA SOLA *perpendicular a una recta.*

DEFINICIONES. — Se llama *ángulo recto* aquel cuyos lados pertenecen a rectas perpendiculares. Se llama *ángulo agudo* al ángulo que es menor que un *ángulo recto* y *ángulo obtuso* al que es mayor que un recto.

$\widehat{ab}$ recto

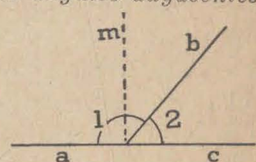
$\widehat{cd}$ agudo

$\widehat{ef}$ obtuso



Propiedad de los ángulos adyacentes.—*La suma de los ángulos adyacentes es igual a dos ángulos rectos o sea a* 180°

$$\widehat{1} + \widehat{2} = 2 \text{ rectos} = 180°$$

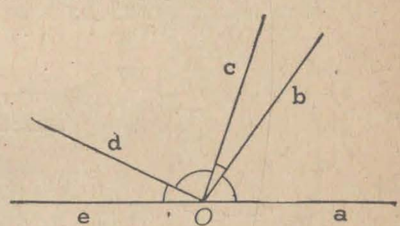


La suma de los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto y de un mismo lado de una recta es igual a dos ángulos rectos o sea 180°.

EJEMPLO: Si $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$ y $\widehat{de}$ son consecutivos

y *a* y *e* son semirrectas opuestas es:

$$\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} = 2 \text{ rectos.}$$



En efecto: $\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} = (\widehat{ab} + \widehat{bc}) + (\widehat{cd} + \widehat{de}) = \widehat{ac} + \widehat{ce}$ porque hemos reemplazado a $\widehat{ab} + \widehat{bc}$ por su suma $\widehat{ac}$ y $\widehat{cd} + \widehat{de}$ por $\widehat{ce}$ y como $\widehat{ac} + \widehat{ce} = 2$ rectos pues son ángulos adyacentes,

luego $\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} = 2$ rectos

Medidas angulares. — Si un ángulo recto se divide en 90 partes iguales, cada una de estas partes se llama *ángulo de un grado*. Si a un ángulo de *un grado* se divide en 60 partes iguales cada una de ellas se llama *ángulo de un minuto* y si a un ángulo de un minuto se lo divide en 60 partes iguales cada una de ellas se llama *ángulo de un segundo*.

NOTACIÓN. $\widehat{1\,R} : 90 = 1°$ se lee *ángulo de un grado.*

$1° : 60 = 1'$ se lee *un minuto* y $1' : 60 = 1''$ se lee *un segundo.*

EJEMPLO: $\widehat{ABC} = 37°\ 27'\ 14''$; $\widehat{MNP} = 14°\ 53'\ 40''$.

EJERCICIOS. — *a) Ejemplos de ángulos agudos y obtusos; b) ¿Cuántos minutos tiene un ángulo recto?; c) ¿Cuántos segundos tiene 1°?; d) ¿Cuántos segundos tiene un ángulo recto?*

Suma de ángulos expresados en grados minutos y segundos. — REGLA. — *Se escriben los sumandos uno debajo de otro, de manera que el número de grados, minutos y segundos queden en columna, y se suma por columnas comenzando por la de los segundos. Si las dos primeras sumas son menores que* 60 *se escriben directamente. En caso contrario se le restan* 60, 120, *etc. según que ellas estén comprendidas entre* 60 *y* 120, 120 *y* 180 *etc., respectivamente, y se le suma* 1, 2, *etc. a la suma siguiente.*

EJEMPLOS: *Sumar* 37° 25′ 18″ *con* 56° 13′ 54″.

Disponiendo los sumandos como indica la regla se tiene:

$$\begin{array}{r} 37°\ 25'\ 18'' \\ +\ 56°\ 13'\ 54'' \\ \hline 93°\ 38'\ 72'' \end{array}$$

y como $72'' - 60'' = 12''$ y $38' + 1' = 39'$ resulta

$$93°\ 38'\ 72'' = 93°\ 39'\ 12''$$

En la práctica las operaciones parciales se hacen mentalmente.
Así, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 37°\ 25'\ 18'' \\ +\ 56°\ 13'\ 54'' \\ \hline 93°\ 39'\ 12'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50°\ 45'\ 38'' \\ +\ 120°\ 52'\ 49'' \\ 36°\ 56'\ 53'' \\ \hline 208°\ 35'\ 20'' \end{array}$$

Resta de ángulos expresados en grados, minutos y segundos. — REGLA. — *Se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de manera que el número de grados, minutos y segundos queden en columna, y se resta por columnas, comen-*

zando por la de la derecha. Si el número de segundos o de minutos del sustraendo fuera mayor que el del minuendo se le suma a éste 60″ o 60′ respectivamente, para hacer posible la resta, cuidando de restar la unidad al número de unidades de orden inmediato superior.

Ejemplo: *Restar* 76° 23′ 45″ *de* 120° 14′ 50″.

$$\begin{array}{r} 120^\circ\,14'\,50'' \\ -\ \ 76^\circ\,23'\,45'' \end{array}$$

Observamos que si se quiere restar por columnas no es posible hacer la diferencia 14′ — 23′. Pero si se toma 1° = 60′ de 120° y se lo suma a 14, resulta 14′ + 60′ = 74′ y 120° 14′ 50″ = 119° 74′ 50″, luego

$$\begin{array}{r} 119^\circ\,74'\,50'' \\ -\ \ 76^\circ\,23'\,45'' \\ \hline 43^\circ\,51'\,05'' \end{array}$$

En la práctica las operaciones parciales se hacen mentalmente. Así, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 120^\circ\,14'\,50'' \\ -\ \ 76^\circ\,23'\,45'' \\ \hline 43'\,51'\,05'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50^\circ\,12'\,23'' \\ -\,30^\circ\,25'\,50'' \\ \hline 19^\circ\,46'\,33'' \end{array}$$

Producto de un ángulo expresado en grados minutos y segundos por un número natural. — Regla. — *Para multiplicar un ángulo expresado en grados, minutos y segundos por un número natural, se multiplican los números de grados, minutos y segundos por ese número comenzando por los segundos. Si los dos primeros productos son menores que* 60 *se escriben directamente, en caso contrario se les resta* 60, 120, 180 *etc., según que esos productos estén comprendidos entre* 60 *y* 120, 120 *y* 180, 180 *y* 240, *etc. y se le suma al producto siguiente* 1, 2, 3, *etc respectivamente.*

Ejemplo: *Multiplicar* 36° 15′ 48″ *por* 3.

$$\begin{array}{r} 36^\circ\,15'\ \,48'' \\ \times\,3 \\ \hline 108^\circ\,45'\,144'' \end{array}$$

y como 144″ — 120″ = 24″ resulta 108° 45′ 144″ = 108° 47′ 24″.

En la práctica se hacen directamente las operaciones parciales, así:

$$\begin{array}{r} 36^\circ\ 15'\ 48'' \\ \times 3 \\ \hline 108^\circ\ 47'\ 24'' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 49^\circ\ 36'\ 52'' \\ \times 4 \\ \hline 198^\circ\ 27'\ 28'' \end{array}$$

Cociente de un ángulo expresado en grados minutos y segundos por un número natural. — Regla. — *Para dividir un ángulo expresado en grados, minutos y segundos por un número natural, se divide el número de grados por el número natural, obteniéndose el número de grados del cociente. Se multiplica el resto de esa división por 60 y se le agregan los minutos del dividendo y se procede en la misma forma para obtener los minutos y segundos del cociente.*

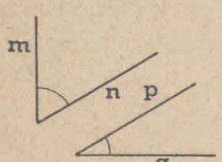
Ejemplo: *Dividir* 39° 58′ 20″ *por* 5.

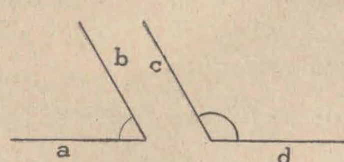
$$\begin{array}{lll} 39^\circ & 58' & 20'' \;\underline{|\;5\qquad\quad} \\ 4^\circ = 4 \times 60' = & \underline{240'} & \quad\;\; 7^\circ\ 59'\ 40'' \\ & 298' & \\ & 48' & \\ & 3' = 60'' \times 3 = & \underline{180''} \\ & & 200'' \\ & & 00'' \end{array}$$

En la práctica se hacen mentalmente las operaciones parciales, así:

$$39^\circ\ 58'\ 20'' \;\underline{|\;5\qquad} \qquad ; \qquad 126^\circ\ 38'\ 12'' \;\underline{|\;3\qquad}$$
$$7^\circ\ 59'\ 40'' \qquad\qquad\qquad\qquad 42^\circ\ 12'\ 44''$$

Angulos complementarios y suplementarios. — Definición. — Se dice que dos ángulos son *complementarios* cuando su suma es igual a un ángulo recto y





suplementarios cuando dicha suma es igual a dos ángulos rectos.

Ejemplo: Siendo $\widehat{mn} + \widehat{pq} = 1$ recto son $\widehat{mn}$ y $\widehat{pq}$ *complementarios.* Siendo $\widehat{ab} + \widehat{cd} = 2$ *rectos* son $\widehat{ab}$ y $\widehat{cd}$ suplementarios.

EJERCICIOS. — *a*) *Hallar el complemento y el suplemento de un ángulo de* 35° ; *b*) *Idem de* 15° 37′ 40″.

a) *El complemento de* 35° = 90° — 35° = 55° y *el suplemento de* 35° = 180° — 35° = 145°.

b) El *complemento de* 15° 37′ 40″ = 90° — 15° 37′ 40″ para facilitar la resta escribimos:

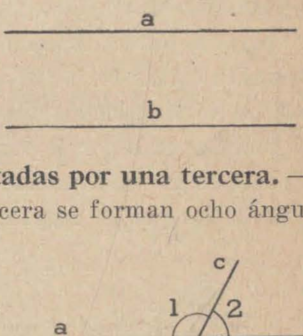
$$\begin{array}{r} 90^\circ = 89^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ 15^\circ\ 37'\ 40'' \\ \hline 74^\circ\ 22'\ 20'' \end{array}$$

Análogamente procedemos para hallar el suplemento de ese ángulo y tenemos

$$\begin{array}{r} 180^\circ = 179^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ \ 15^\circ\ 37'\ 40'' \\ \hline 164^\circ\ 22'\ 20'' \end{array}$$

RECTAS PARALELAS

Rectas paralelas. — DEFINICION. — Se dice que dos rectas de un plano son *paralelas*, cuando no se cortan.



NOTACIÓN. $a \parallel b$ se lee *a* es paralela a *b*.

Angulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una tercera. — Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una tercera se forman ocho ángulos que llevan los nombres siguientes:

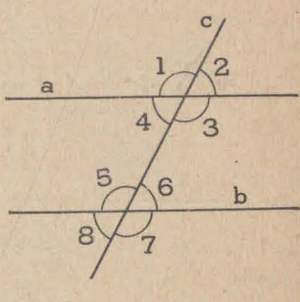
$\hat{1}$ y $\hat{5}$; $\hat{4}$ y $\hat{8}$; $\hat{2}$ y $\hat{6}$; $\hat{3}$ y $\hat{7}$ *correspondientes*

$\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ y $\hat{8}$ *externos*

$\hat{4}$, $\hat{3}$, $\hat{6}$ y $\hat{5}$ *internos*

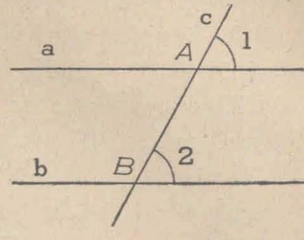
$\hat{1}$ y $\hat{7}$; $\hat{2}$ y $\hat{8}$ *alternos externos*

$\hat{4}$ y $\hat{6}$; $\hat{3}$ y $\hat{5}$ *alternos internos*

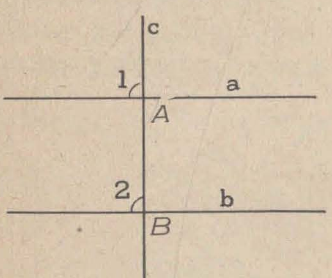


Obsérvese que los ángulos *internos* están en la « faja » *ab;* los *externos fuera* de esa faja y los *alternos* están a *distinto* lado de la secante *c*.

Propiedad de los ángulos correspondientes. — *Si dos rectas cortadas por una tercera forman ángulos correspondientes iguales, son paralelas y recíprocamente si los ángulos correspondientes son iguales las rectas son paralelas.*



EJEMPLO: Si los ángulos correspondientes $\hat{1}$ y $\hat{2}$ son iguales es $a \parallel b$ y puede comprobarse con un transportador o calcando uno de ellos y llevándolo a coincidir con el otro.



CONSECUENCIA. — *En un plano dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.*

EJEMPLO: Si $a \perp c$ y $b \perp c$ es $a \parallel b$, pues los ángulos correspondientes $\hat{1} = \hat{2} = 1$ Recto.

Trazado de paralelas. — *Trazar por un punto exterior a una recta la paralela a la misma.*

PRIMER MÉTODO. CON REGLA Y ESCUADRA. — Para trazar la paralela a una recta por un punto exterior a la misma, se hace coincidir la hipotenusa de la escuadra con la recta dada b y se aplica el borde de la regla contra uno de sus catetos. Manteniendo fija la regla se hace deslizar la escuadra hasta que su hipotenusa pase por el punto dado P y se traza la recta a señalada por ella obteniéndose la recta pedida puesto que los ángulos correspondientes 1 y 1′ materializados por la escuadra son iguales (fig. 1).

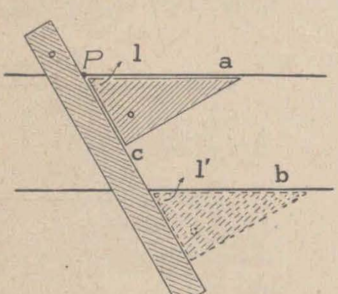


Fig. 1.

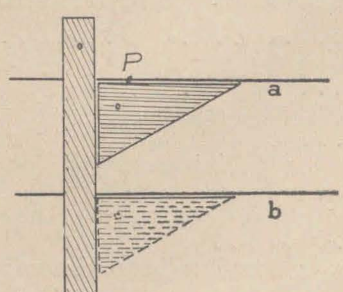
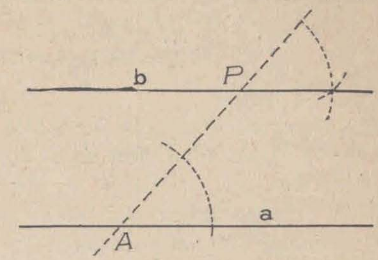


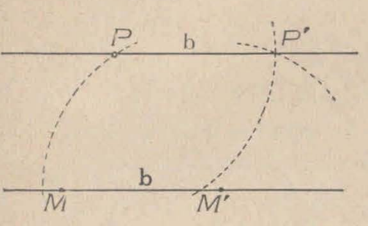
Fig. 2.

SEGUNDO MÉTODO. — Se procede en la misma forma que en el método anterior haciendo coincidir uno de los catetos con la recta dada y el otro cateto con la regla (fig. 2).

TERCER MÉTODO. CON REGLA Y COMPÁS. — Se traza la recta determinada por el punto dado P con un punto cualquiera A de la recta dada *a* y se construye con vértice P el ángulo correspondiente a uno de los de vértice A, como se ve en la figura. El lado *b* del ángulo construído es paralelo a la recta *a*.



CUARTO MÉTODO. — Con centro P se traza una circunferencia que corte a *b* en el punto M′. Con centro en M′ y con el mismo radio se traza otra circunferencia que pasa por P y que corta a *b* en el punto M. Con centro en M′ y con radio $\overline{MP}$ se traza una circunferencia que corta a la primera en los puntos P′ y P″ (P″ no está en la figura). La recta *b′* determinada por P y P′ es paralela a la recta *b*.



Postulado de las paralelas. — Si aplicáramos los cuatro métodos anteriores para trazar la paralela a una recta por un mismo punto comprobaríamos que: *Por un punto exterior a una recta pasa* UNA SOLA *paralela a la misma.*

PROBLEMAS. — I) *Dadas en un plano cuatro semirrectas* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, *del mismo origen, anotar todos los ángulos que ellas determinan.*

II) *Dar ejemplos de ángulos materiales.*

III) *Dados tres puntos* M, N, *y* P *que no estén en una misma recta rayar la parte común a los ángulos* MNP, NPM *y* NMP.

IV) *Dibujar a mano levantada: a) un ángulo igual a otro; b) mayor que otro; c) menor que otro y comprobar empleando el transportador los resultados obtenidos. Repetir la operación hasta lograr lo deseado.*

V) *Comprobar que si:* $\widehat{ab} = \widehat{cd}$ y $\widehat{cd} = \widehat{ef}$ es $\widehat{ab} = \widehat{ef}$.

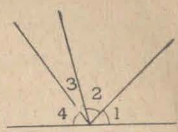
VI) *Comprobar que si:* $\widehat{mn} = \widehat{pq}$ y $\widehat{nr} = \widehat{qs}$ es $\widehat{mn} + \widehat{nr} = \widehat{pq} + \widehat{qs}$.

VII) *Dados un ángulo* $\widehat{ab} > \widehat{cd}$ *construir: a) la suma; b) la diferencia; c) la semisuma; d) la semidiferencia; e) un múltiplo de cd que supere a ab; f) la mitad de la suma del duplo de ab con el triplo de cd; g) la cuarta parte el triplo de la diferencia.*

VIII) *Construir con regla y compás: a) un ángulo de* 45°; *b) un ángulo de* 135°; *c) de* 22°30′; *d) de* 112°30′; *e) de* 67°30′.

IX) *Calcular el ángulo* $\hat{2}$ *sabiendo que*:

$$\hat{1} = 50°, \quad \hat{4} = 63° \text{ y } \hat{3} = 29°$$



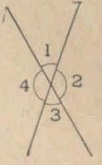
X) *Comprobar*: *a*) *que las bisectrices de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto*; *b*) *que las bisectrices de los ángulos opuestos por el vértice forman un ángulo igual a dos rectos.*

XI) *Comprobar que si desde un punto se trazan dos semirrectas paralelas a los lados de un ángulo forman otro que es igual o suplementario del dado.*

XII) *Idem trazando las perpendiculares.*

XIII) *Calcular los ángulos* $\hat{2}$, $\hat{3}$ y $\hat{4}$ *sabiendo que*:

$$\hat{1} = 53° \, 40'.$$



XIV) *Trazar a mano levantada*: *a*) *la paralela a una recta vertical, horizontal o inclinada*; *b*) *la perpendicular a una recta vertical, horizontal o inclinada.*

XV) *Trazar a mano levantada*: *a*) *un ángulo de* 30°; *de* 45°; *de* 60°; *de* 90°; *b*) *las bisectrices de los mismos.*

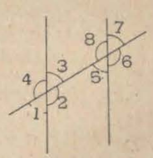
XVI) *Hallar el complemento*: *a*) de 38° 42′ 20″; *b*) de 36° 41′ 50″ + 28° 15; *c*) *de* 63° 15′ 40″ — 38° 42′ 50″; *d*) de la mitad de 60° 15′ 30″; *e*) de la cuarta parte del triplo de 50° 20′ 15″.

XVII) *Hallar el suplemento*: *a*) de 120° 45′ 54″ ; *b*) de 58° 42′15″ + 30° 40′ ; *c*) 150° 36′ 20″ — 49° 59′ 54″ ; *d*) de la mitad de 76° 43′ 50″; *e*) de la mitad del triplo de 148° 43′ 50″ — 50° 36′ 15″.

XVIII) *Comprobar que si dos rectas paralelas son cortadas por una tercera forman*:

a) *ángulos alternos externos iguales;*

b) *alternos internos iguales.*



XIX) *Calcular, aplicando la propiedad comprobada en el ejercicio anterior, los ángulos* 2, 3, 4, 5, 6, 7 *y* 8 *sabiendo que ángulo* 1 = 48° 20′. *¿Cómo son los ángulos* 3 *y* 8; 4 *y* 7; 2 *y* 5; 1 *y* 6?

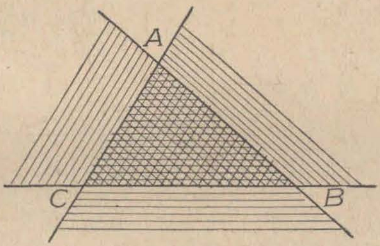
XX) *Construir con regla y compás*: *a*) *el complemento de un ángulo agudo; b*) *su suplemento; c*) *la mitad del complemento; d*) *el triplo de la mitad del suplemento.*

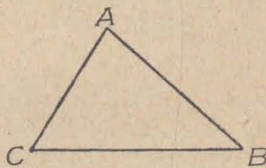
CAPITULO III

TRIANGULOS

Triángulos. — Dados tres puntos A, B y C que no estén en la misma recta se llama *triángulo* ABC a la parte común a los ángulos ABC, BCA y CAB.

Los puntos A, B y C son los *vértices* y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ los *lados* del triángulo ABC.





Clasificación. — I) Los triángulos se clasifican según sus lados en: *equiláteros* cuando tienen sus tres lados iguales (fig. 1), *isósceles* cuando tienen dos lados iguales (fig. 2), y en *escalenos* cuando sus tres lados son desiguales (fig. 3).

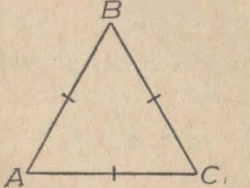


Fig. 1.

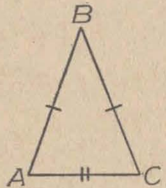


Fig. 2.

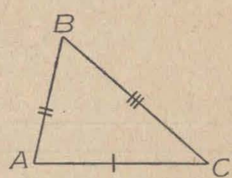
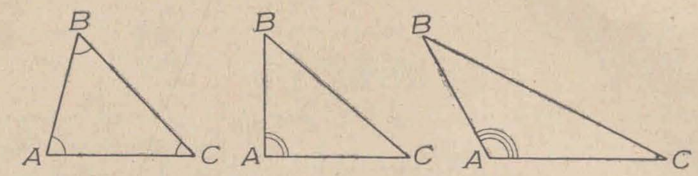


Fig. 3.

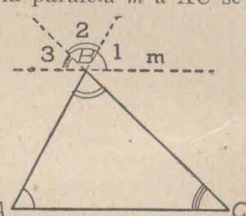
II) Los triángulos se clasifican de acuerdo con sus ángulos en: *acutángulos* cuando tienen sus tres ángulos agudos, *rectángulos* cuando tienen un ángulo recto y *obtusángulos* cuando tienen un ángulo obtuso.



Suma de los ángulos de un triángulo.— *La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*

En el $\overset{\triangle}{ABC}$ es $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2$ rectos.

JUSTIFICACIÓN. — Trazando las semirrectas AB y CB y por B la paralela *m* a AC se forman los ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$ y $\hat{3}$ cuya suma es igual a dos rectos

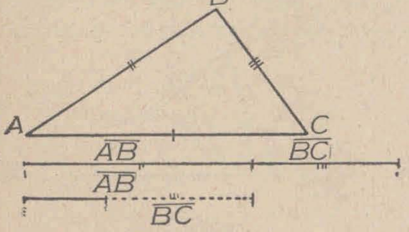


o sea $$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=2 \text{ rectos}$$

Pero $\hat{1}=\hat{A}$ y $\hat{3}=\hat{C}$ por correspondientes entre paralelas, y $\hat{2}=\hat{B}$ por opuestos por el vértice, luego sustituyendo en la igualdad anterior, los ángulos 1, 2, 3 por sus iguales A, B y C se tiene:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2 \text{ rectos}$$

Relaciones entre los lados de un mismo triángulo. — Dado un triángulo cualquiera, si sumamos dos de sus lados obtenemos un segmento que es mayor que el tercer lado y si en cambio hallamos la diferencia entre dos de esos lados el segmento que resulta es menor que el tercer lado. En la figura se comprueba que



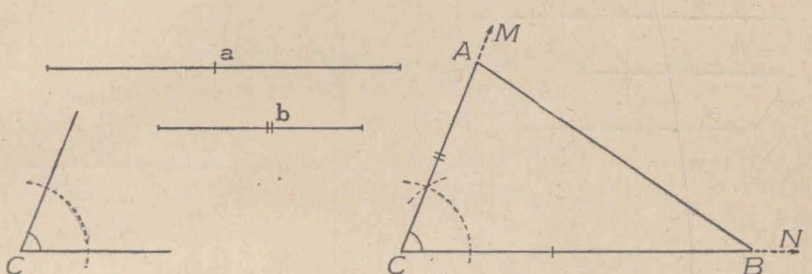
$$\overline{AC} < \overline{AB}+\overline{BC} \quad \text{y} \quad \overline{AC} > \overline{AB}-\overline{BC}.$$

En cualquier otro triángulo puede comprobarse esto mismo o sea que: *En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia de los mismos.*

Definición. — Se llama *perímetro* de un triángulo a la suma de sus lados.

Construcción de triángulos con regla y compás. — Problema I. — *Construir un triángulo dados un ángulo y los lados que lo forman.*

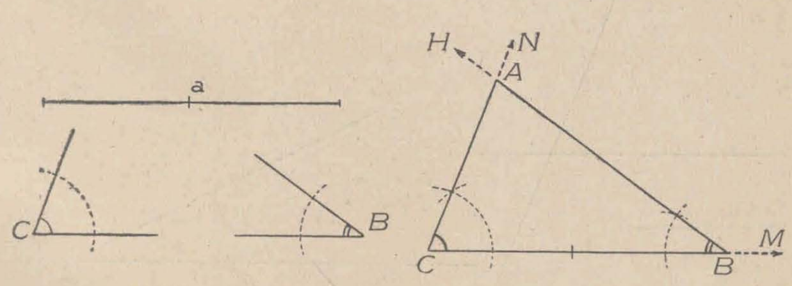
Datos Construcción



Solución. — Se construye el ángulo NCM igual al C y sobre uno de sus lados el segmento $\overline{CB} = a$ y sobre el otro lado el $\overline{CA} = b$. Uniendo A con B se obtiene el triángulo ABC pedido.

Problema II. — *Construir un triángulo dados un lado y los ángulos adyacentes a él.*

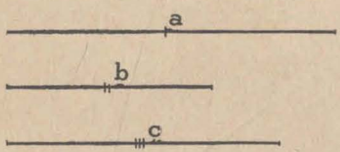
Datos Construcción



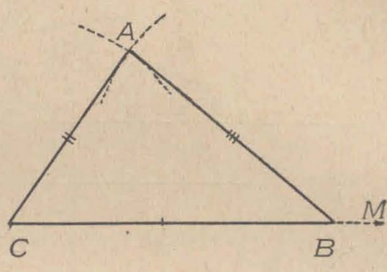
Solución. — Se construye un ángulo NCM igual al C, sobre uno de sus lados el segmento $\overline{CB} = a$ y con vértice B y lado $\overline{BC}$ un ángulo igual al B situado en el mismo semiplano que contiene al ángulo C. Los otros lados de estos ángulos se cortan en un punto A y forman el triángulo ABC pedido.

Problema III. — *Construir un triángulo dados los tres lados.*

Datos



Construcción

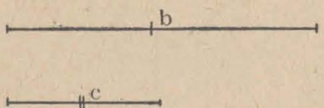


Solución. — Se construye un segmento $BC = a$. Con centro C y radio igual a b se traza una circunferencia y con centro B y radio igual a c otra circunferencia que corta a la anterior en dos puntos A y A′ (A′ no está en la figura). Uniendo A con B y C se obtiene el triángulo ABC pedido.

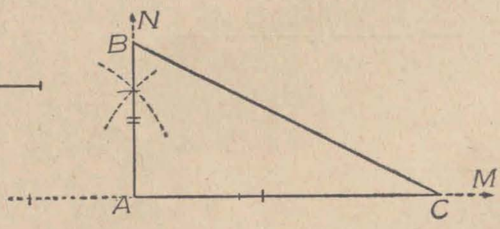
Construcción de triángulos rectángulos con regla y compás. — Problema IV. — *Construir un triángulo rectángulo dados los catetos.*

Basta proceder como en el problema I teniendo en cuenta que el ángulo formado por los catetos es recto y que su construcción se reduce al trazado de una recta perpendicular a otra (pág. 16).

Datos



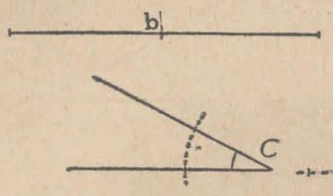
Construcción



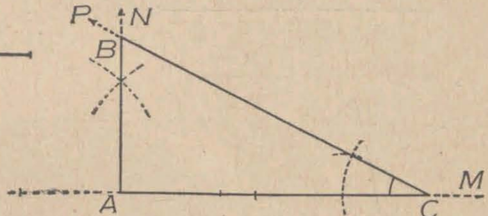
PROBLEMA V. — *Construir un triángulo rectángulo dados un cateto y el ángulo agudo adyacente a él.*

Basta proceder como en el problema II teniendo en cuenta que el otro ángulo adyacente al cateto es recto.

DATOS

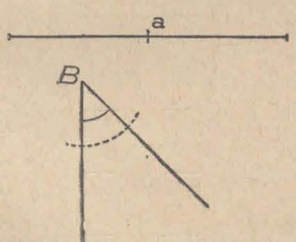


CONSTRUCCIÓN

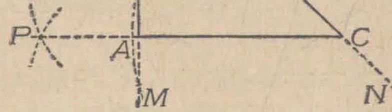


PROBLEMA VI. — *Construir un triángulo rectángulo dadas la hipotenusa y un ángulo agudo.*

DATOS



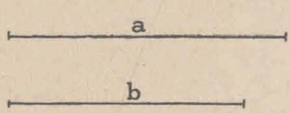
CONSTRUCCIÓN



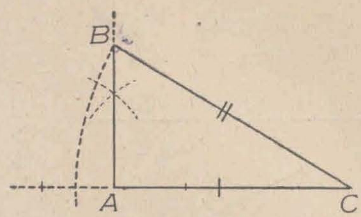
SOLUCIÓN. — Se construye el ángulo MBN = B y sobre uno de sus lados el segmento $\overline{BC} = a$. Trazando por C la perpendicular $\overline{CP}$ al otro lado del ángulo B se obtiene el triángulo CBA pedido (probl. de pág. 16).

Problema VII. — *Construir un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y un cateto.*

Datos

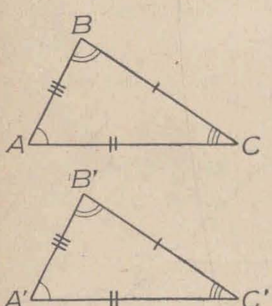


Construcción



Solución. — Se construye el ángulo recto A, sobre uno de sus lados el segmento $\overline{AC} = b$ y con centro en C y radio a se corta al otro lado en un punto B. Uniendo B con C se obtiene el triángulo BAC pedido.

Triángulos iguales. — Definición. — Se dice que un triángulo ABC *es igual* a otro A′B′C′ cuando los lados y los ángulos de uno son respectivamente iguales a los del otro.



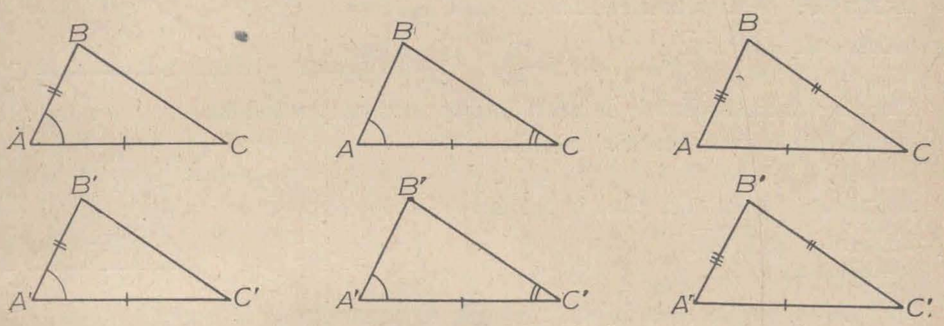
$$\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{A'B'C'} \quad \text{si} \begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} & \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} & \widehat{B} = \widehat{B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} & \widehat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$$

La resolución de los problemas anteriores, nos muestra que para poder construir un triángulo no es necesario conocer todos sus elementos, sino algunos, pues los restantes están relacionados con ellos en forma tal que construídos los primeros estos últimos resultan con sólo unir dos puntos. Por lo tanto para poder afirmar que dos triángulos son iguales bastará, también, saber que lo son algunos de sus elementos y los datos de los problemas resueltos nos dicen que en general: *Dos triángulos son iguales cuando lo son tres de sus elementos entre los cuales figure por lo menos un lado* y en particular que:

PRIMER CASO. — *Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales, son iguales.*

SEGUNDO CASO. — *Si dos triángulos tienen un lado y dos ángulos respectivamente iguales son iguales.*

TERCER CASO. — *Si dos triángulos tienen sus lados respectivamente iguales son iguales.*



1er. caso 2do. caso 3er. caso

Como los triángulos rectángulos tienen un par de ángulos iguales, los rectos, será suficiente para que sean iguales que tengan *dos pares de elementos respectivamente iguales entre los cuales figure un lado.*

Tenemos así los siguientes

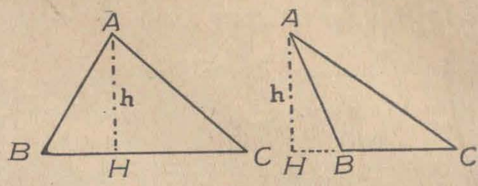
CASOS DE IGUALDAD DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS. — PRIMERO. — *Si dos triángulos rectángulos tienen sus catetos respectivamente iguales, son iguales.*

SEGUNDO CASO. — *Si dos triángulos rectángulos tienen un cateto y un ángulo agudo respectivamente iguales son iguales.*

TERCER CASO. — *Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente iguales, son iguales.*

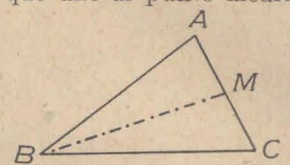
CUARTO CASO. — *Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales, son iguales.*

Alturas, medianas, mediatrices y bisectrices. — Definiciones. — I) Se llama *altura* de un triángulo al segmento de la perpendicular trazada a un lado o a su prolongación por el vértice del ángulo opuesto.



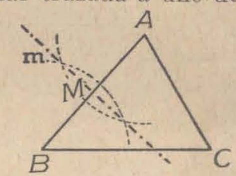
Ejemplo: $\overline{AH}$ es la altura del $\overset{\triangle}{ABC}$ correspondiente al lado $\overline{BC}$.

II) Se llama *mediana* de un triángulo al segmento que une al punto medio de un lado con el vértice del ángulo opuesto.



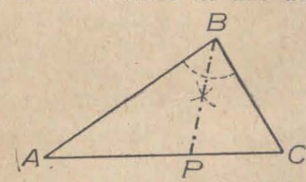
Ejemplo: $\overline{BM}$ es la mediana del $\overset{\triangle}{ABC}$ correspondiente al lado $\overline{AC}$.

III) Se llama *mediatriz* de un triángulo a la perpendicular trazada a uno de sus lados en el punto medio del mismo.



Ejemplo: m es la mediatriz del $\overset{\triangle}{ABC}$ correspondiente al lado $\overline{AB}$.

IV) Se llama *bisectriz* de un triángulo al segmento de la bisectriz de uno de sus ángulos comprendido entre el vértice del mismo y el lado opuesto.



Ejemplo: $\overline{BP}$ es la bisectriz del $\overset{\triangle}{ABC}$ correspondiente al ángulo B.

Puntos notables del triángulo. — I) *Las alturas de un triángulo, o sus prolongaciones, concurren en un punto* (fig. 1).

II) *Las medianas de un triángulo concurren en un punto* (fig. 2).

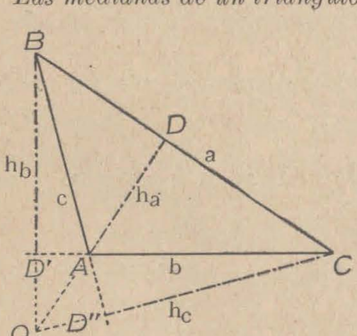


Fig. 1.

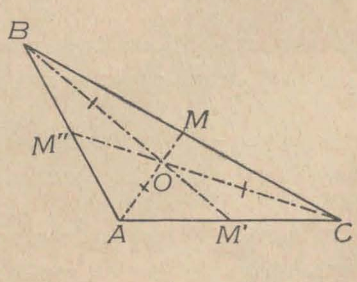


Fig. 2.

III) *Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes* (fig. 3).
IV) *Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes* (fig. 4).

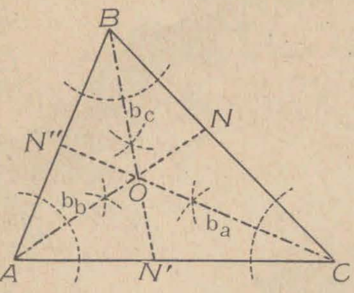


Fig. 3.

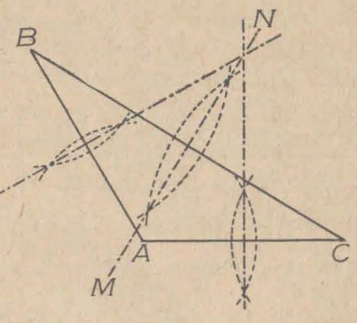


Fig. 4.

Se llaman *puntos notables del triángulo* a los puntos de intersección de sus alturas, de sus medianas, de sus mediatrices y de sus bisectrices.

PROPIEDADES. — Puede comprobarse que:

I) *El punto de concurrencia de las medianas de un triángulo está situado a dos tercios de cada una de ellas a partir del vértice respectivo* (ver. fig. nº 2).

EJEMPLO: Siendo O el punto de intersección de las medianas del $\overset{\triangle}{ABC}$ es

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\,\overline{AM}\ ;\ \overline{BO} = \frac{2}{3}\,\overline{BM'}\ \text{ y }\ \overline{CO} = \frac{2}{3}\,\overline{CM''}.$$

II) *El punto de concurrencia de las mediatrices de un triángulo equidista de los vértices del mismo, o sea, es el centro de la circunferencia que pasa por esos vértices que se llama circunferencia circunscripta al triángulo* (fig. 5).

EJEMPLO: Siendo O el punto de intersección de las mediatrices del $\overset{\triangle}{ABC}$ es $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ y la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$ es la circunferencia circunscripta a él. (En la figura solo se han trazado dos mediatrices para hallar el centro, pues ya se sabe que la tercera también pasa por él).

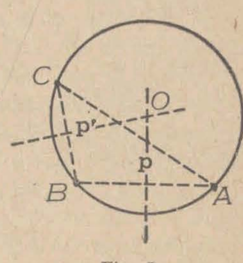


Fig. 5.

III) *El punto de concurrencia de las bisectrices de un triángulo equidista de los lados del mismo, o sea, es el centro de la circunferencia tangente a sus lados, que se llama circunferencia inscripta al triángulo* (fig. 6).

Siendo O el punto de intersección de las bisectrices del triángulo HIJ es $\overline{OP} = \overline{OP'} = \overline{OP''}$ y la circunferencia de centro O y radio $\overline{OP}$ es la circunferencia inscripta en él.

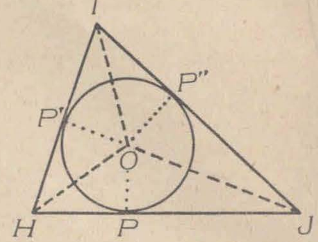
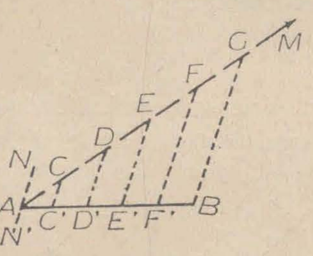


Fig. 6.

Damos a continuación una aplicación importante del trazado de paralelas.

División de un segmento en partes iguales. — *Dividir el segmento* AB *en cinco partes iguales.*



Se traza una semirrecta AM y se llevan a partir de A cinco segmentos consecutivos iguales, $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG}$, se une G con B y se trazan paralelas a GB por C, D, E y F, que cortan a AB en C', D', E' y F', respectivamente, dividiendo al segmento AB en cinco partes iguales.

PROBLEMA. — I) *¿Cuánto vale el ángulo* C *del triángulo* ABC *si* $A = 56° 42' 30''$ *y* $B = 72° 15'$?

II) *¿Cuánto vale cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero si los tres son iguales?*

III) *¿Cuánto vale cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo si ambos son iguales?*

IV) *Cuánto valen cada uno de los ángulos del triángulo* ABC: *a*) *si el* $A = 36°$ *y* B *es el doble del* C; *b*) *si* $A = 90°$ *y* $B = 2C$; *c*) *si* $A = 40°$ *y* $2B = 5A$.

V) *Comprobar que en todo triángulo isósceles: a*) *que los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales; b*) *que la mediana correspondiente a la base es altura del triángulo y bisectriz del ángulo opuesto; c*) *que la altura correspondiente a la base es mediana de ese lado y bisectriz del ángulo opuesto; d*) *que la bisectriz del ángulo opuesto a la base es mediana y altura correspondiente a la misma.*

VI) *Utilizando la propiedad a*) *del ejercicio anterior calcular los ángulos de un triángulo isósceles* ABC *sabiendo que: a*) *el ángulo* A *opuesto a la base es de* $60° 25' 30''$; *b*) *el ángulo de la base* $C = 51° 15' 40''$.

VII) *Dibujar a mano levantada:* a) *triángulos equiláteros;* b) *isósceles;* c) *rectángulos;* d) *obtusángulos;* e) *escalenos;* f) *dos triángulos iguales.*

VIII) *Calcular el perímetro:* a) *de un triángulo equilátero de* 12 *cm de lado;* b) *de un triángulo isósceles de* 12 *cm de base y* 10 *cm de lado igual.*

IX) *Qué longitudes tienen los lados de un triángulo de* 10 *m de perímetro:* a) *si es equilátero;* b) *si es isósceles y la base es de* 4 *m;* c) *si es isósceles y el lado igual es de* 3,80 *m;* d) *si es escaleno, un lado tiene* 3,70 *m y de los restantes lados uno es el doble del otro.*

X) *Decir si los segmentos* a, b *y* c *pueden ser lados de un mismo triángulo:* a) *cuando* $a = 10\,cm$, $b = 15\,cm$ *y* $c = 8\,cm$; b) *cuando* $a = 10\,m$, $b = 6\,m$ *y* $c = 6\,m$; c) $a = 9\,m$, $b = 6\,m$ *y* $c = 3\,m$; d) $a = 20\,m$, $b = 9\,m$ *y* $c = 10\,m$.

XI) *Construir con regla y transportador el triángulo* ABC *sabiendo que:* a) $a = 12\,cm$, $\hat{B} = 42°$ *y* $\hat{C} = 60°$; b) $a = 20\,cm$, $c = 36\,cm$ *y* $\hat{B} = 50°$; c) $a = 30\,cm$, $\mathrm{B} = 30°$ *y* $\mathrm{A} = 90$; d) $a = b = 35\,cm$ y $\hat{C} = 82°$; e) $a = 40\,cm$, $\hat{B} = \hat{C} = 51°$.

XII) *Construir con regla y compás el triángulo* ABC *sabiendo que:* a) $a = 40\,cm$, $b = 50\,cm$ *y* $c = 60\,cm$, *trazar la mediana correspondiente al lado* a, *la altura correspondiente al lado* b *y la bisectriz del ángulo* C; b) $a = 55\,cm$, $B = 60°$, $C = 45°$ *trazar la altura correspondiente a* a; c) $b = c = 20\,cm$, $a = 30\,cm$.

XIII) *Construir, aplicando las propiedades comprobadas en el ejercicio V, un triángulo isósceles conociendo:* a) *la base y la altura correspondiente;* b) *el ángulo opuesto a la base y la bisectriz correspondiente;* c) *la base y uno de los ángulos adyacentes a ella.*

XIV) *Si en un triángulo equilátero se trazan las medianas, las alturas y las bisectrices de sus ángulos y las mediatrices de sus lados, ¿qué puede observarse?*

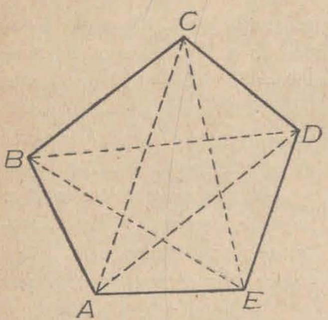
XV) *Dados tres puntos que no estén en la misma recta trazar una circunferencia que pase por ellos.*

XVI) *Dado un triángulo dibujar la circunferencia inscripta en él.*

CAPITULO IV

CUADRILATEROS

Polígonos. — Definición. — Dados tres o más puntos A, B, C, D y E, por ejemplo, tales que tres cualesquiera de ellos no estén en una misma recta y que la recta de dos consecutivos deje a los demás en un mismo semiplano, se llama *polígono* ABCDE a la parte común a los ángulos ABC, BCD, CDE, DEA y EAB, que se llaman *ángulos interiores* del polígono.



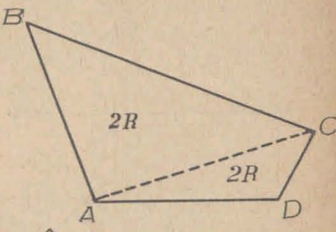
Los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$ se llaman *lados* y su suma *perímetro* del polígono, y los $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CE}$ *diagonales* del mismo.

Nombres de los polígonos. — Los nombres de los polígonos son los siguientes:

Triángulo	al	que	tiene	*tres*	lados	y	*tres*	ángulos.
cuadrilátero	»	»	»	*cuatro*	»	»	*cuatro*	»
pentágono	»	»	»	*cinco*	»	»	*cinco*	»
exágono	»	»	»	*seis*	»	»	*seis*	»
eptágono	»	»	»	*siete*	»	»	*siete*	»
octógono	»	»	»	*ocho*	»	»	*ocho*	»
eneágono	»	»	»	*nueve*	»	»	*nueve*	»
decágono	»	»	»	*diez*	»	»	*diez*	»
endecágono	»	»	»	*once*	»	»	*once*	»
dodecágono	»	»	»	*doce*	»	»	*doce*	»
pentadecágono	»	»	»	*quince*	»	»	*quince*	»

A los demás polígonos se los designa por el número de lados; así, se dice polígono de trece lados, de veintidós lados, etc.

Propiedad de los ángulos de un cuadrilátero. — Dado un cuadrilátero ABCD si trazamos una de sus diagonales, la AC, por ejemplo, queda dividido en dos triángulos ABC y ADC. En cada uno de éstos la suma de sus ángulos es igual a dos rectos, y como la suma de los ángulos de ambos triángulos da la de los ángulos del cuadrilátero resulta que:



La suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual a cuatro rectos.

Definiciones. — En todo cuadrilátero se llaman *ángulos o lados opuestos* a los que no son consecutivos.

Ejemplo: En el cuadrilátero ABCD, $\hat{A}$ y $\hat{C}$; $\hat{B}$ y $\hat{D}$ son ángulos opuestos y $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ lados opuestos.

Clasificación. — Los cuadriláteros se clasifican en las tres clases siguientes: *Paralelogramos* son los que tienen sus dos pares de lados opuestos paralelos (fig. 1).

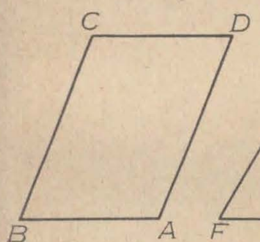


Fig. 1.

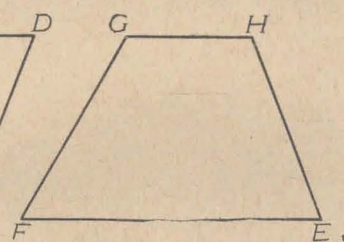


Fig. 2.

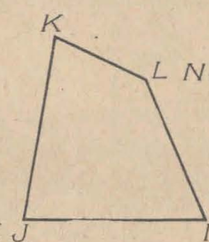


Fig. 3.

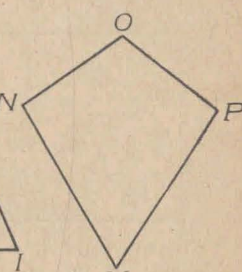


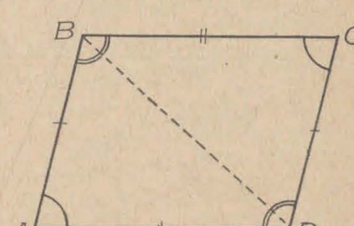
Fig. 4.

Trapecios son los que tienen un solo par de lados opuestos paralelos, que se llaman *bases* del trapecio (fig. 2), y

Trapezoides son los que no tienen lados paralelos (fig. 3).

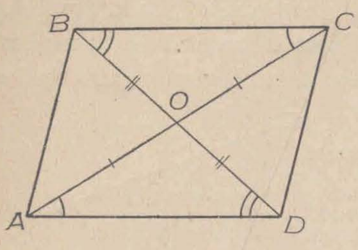
Entre éstos se llama *romboide* al que tiene dos vértices que equidistan de los otros dos. Así en la figura 4 es $\overline{ON} = \overline{OP}$ y $\overline{MN} = \overline{MP}$.

Paralelogramos. — Propiedades. — Dado un paralelogramo ABCD si trazamos una de sus diagonales, la DB por ejemplo, queda dividido en dos triángulos iguales ADB y DCB, por lo tanto resultan $\overline{AD} = \overline{BC}$; $\overline{AB} = \overline{CD}$; $\hat{A} = \hat{C}$. Si trazáramos la otra diagonal probaríamos que $\hat{B} = \hat{D}$, o sea:



I) *En todo paralelogramo los lados y los ángulos opuestos son iguales.*

Dado un paralelogramo ABCD, si trazamos sus dos diagonales observamos



que *se cortan* en un punto O y que se forman triángulos tales como el AOD y COB que son iguales, por lo tanto resultan también iguales $\overline{AO} = \overline{OC}$ y $\overline{BO} = \overline{OD}$, o sea:

II) *En todo paralelogramo sus diagonales se cortan en un punto que las divide en partes iguales.*

Paralelogramos especiales. — Son: el *rectángulo* (fig. 1) que es el que tiene sus ángulos rectos, el *rombo* (fig. 2) que tiene sus lados iguales y el *cuadrado* (fig. 3) que tiene sus ángulos rectos y sus lados iguales.

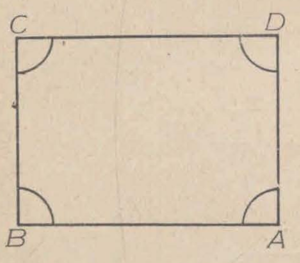


Fig. 1.

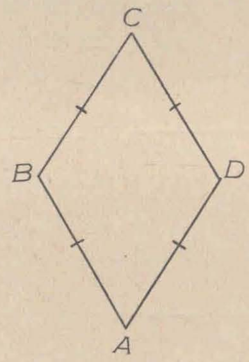


Fig. 2.

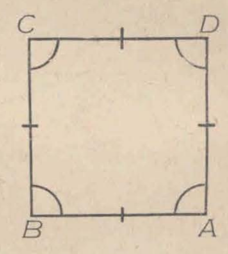
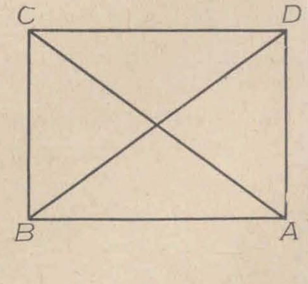


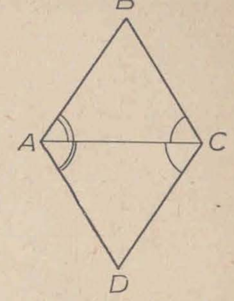
Fig. 3.

Propiedad particular del rectángulo. — Dado un rectángulo ABCD si trazamos sus diagonales se forman dos triángulos rectángulos ABC y BAD que son iguales, por lo tanto también lo son sus hipotenusas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, o sea:



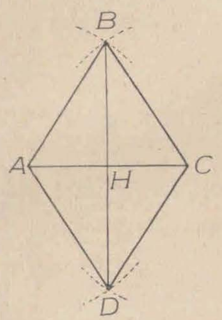
Las diagonales de un rectángulo son iguales.

Propiedades particulares del rombo. — Dado un rombo ABCD si trazamos una de sus diagonales, la AC, por ejemplo, se forman los triángulos iguales ABC y ACD y por lo tanto los ángulos A y C quedan divididos en dos partes iguales por la diagonal trazada, o sea:



Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

Dado un rombo ABCD si trazamos una diagonal, la AC por ejemplo, y observamos que siendo sus lados iguales si trazáramos con un radio igual a ese lado dos circunferencias con centro A y en C ellas se cortarán precisamente en B y D y por lo tanto al unir B con D obtendríamos la perpendicular BD a AC, lo que nos dice que:



Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Propiedades del cuadrado. — Siendo el cuadrado un rectángulo, pues tiene sus ángulos rectos, y un rombo, pues tiene sus lados iguales, resulta que:

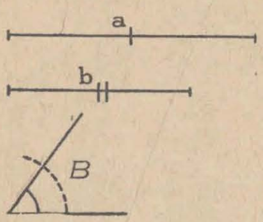
Las diagonales de un cuadrado son iguales, perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen.

Cuadro sinóptico de la clasificación de los cuadriláteros.

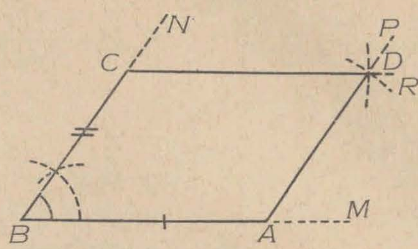
- Cuadriláteros
  - Paralelogramos
    - generales
    - especiales
      - rectángulo
      - rombo
      - cuadrado
  - No paralelogramos
    - Trapecio
    - Trapezoides
      - generales
      - especial
        - romboide.

Construcción de paralelogramos con regla y compás. — PROBLEMA I. — *Construir un paralelogramo dados dos lados consecutivos y el ángulo comprendido.*

DATOS



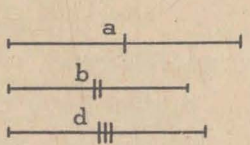
CONSTRUCCIÓN



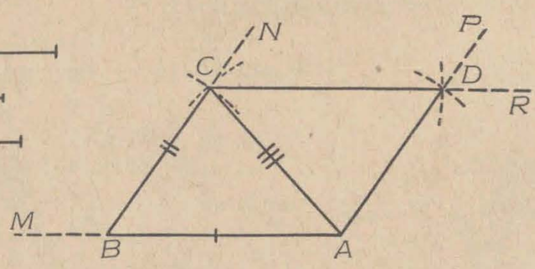
SOLUCIÓN. — Se construye el ángulo MBN igual a B; sobre uno de sus lados el segmento BA = a y sobre el otro el BC = b. Con centro C y radio a se traza una circunferencia y con centro A y radio b la cortamos en D. Uniendo este punto con A y con C se obtiene el paralelogramo pedido.

PROBLEMA II. — *Construir un paralelogramo conociendo dos lados consecutivos y una diagonal.*

DATOS



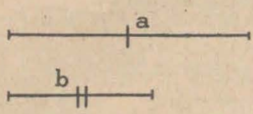
CONSTRUCCIÓN



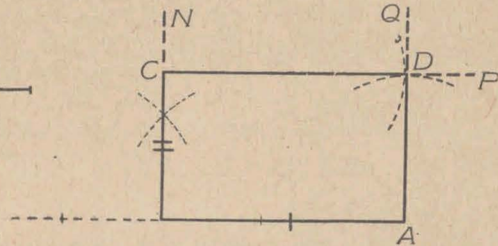
SOLUCIÓN. — Como los dos lados consecutivos y la diagonal forman un triángulo se empieza por construirlo, para lo cual se procede como en el problema III de la página 28 y se trazan el triángulo ABC. Con centros en A y en C y radios b y a, respectivamente, se trazan arcos que se cortan en D. Uniendo D con C y con A se obtiene el paralelogramo pedido.

Problema III. — *Construir un rectángulo conociendo dos lados consecutivos.*

Datos



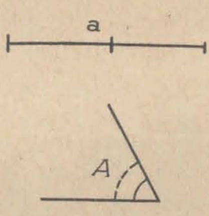
Construcción



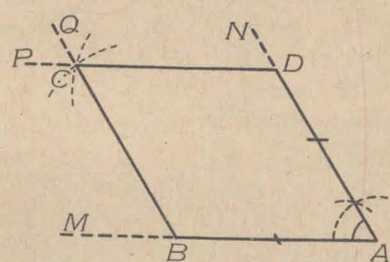
Solución. — Basta proceder como en el problema primero teniendo en cuenta que el ángulo comprendido entre los lados dados es recto.

Problema IV. — *Construir un rombo conociendo un lado y uno de sus ángulos.*

Datos



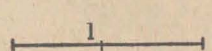
Construcción



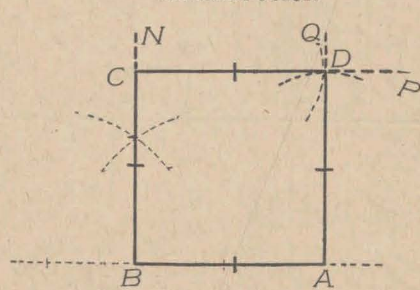
Solución. — Basta proceder como en el problema I teniendo en cuenta que el otro lado que forma al ángulo es igual al dado.

Problema V. — *Construir un cuadrado de lado dado.*

Datos



Construcción



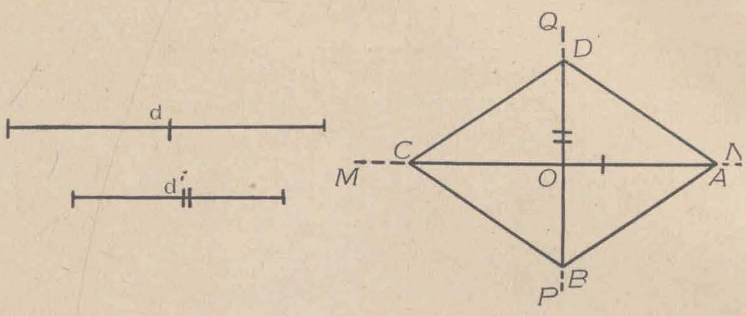
Solución. — Basta proceder como en el problema III teniendo en cuenta que el otro lado es igual al dado.

Problema VI. — *Construir un rombo conociendo el lado y una diagonal.*

Solución. — Basta proceder como en el problema segundo teniendo en cuenta que el otro lado es igual al dado.

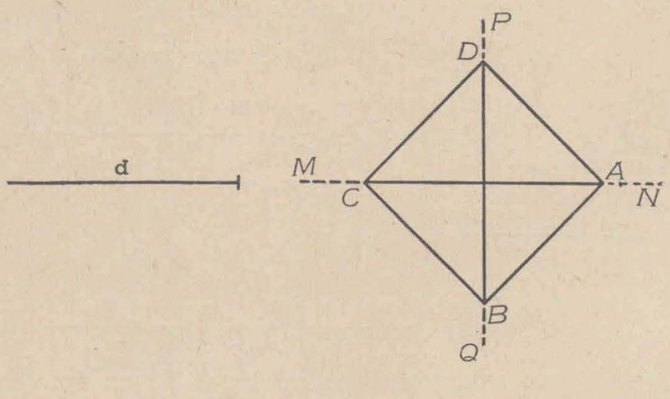
Problema VII. — *Construir un rombo dadas sus diagonales.*

Datos | Construcción



Solución. — Se trazan dos rectas perpendiculares en O y se lleva sobre una de ellas los segmentos $\overline{OA} = \overline{OC}$ igual a la mitad de la diagonal *d* y sobre la otra los $\overline{OB} = \overline{OD}$ igual a la mitad de la otra diagonal *d'*. Uniendo A con B y D y C con B y D se tiene el rombo pedido.

Problema VIII. — *Construir un cuadrado conociendo la diagonal.* Se procede como en el problema anterior, teniendo en cuenta que los diagonales son iguales.



EJERCICIOS. — I) *Cuánto vale el ángulo* D *del cuadrilátero* ABCD *si*: *a*) $A = 75° \, 30' \, 20''$, $B = 80° \, 24' \, 36''$ *y* $C = 90°$; *b*) $A = 36° \, 45' \, 22''$, $B = C = 120°$; *c*) $A = 60°$, B *es el doble de* C *y* C *la tercera parte de* D; *d*) $A = D$ *y* $B = C = 121° 16' 31''$.

II) *Cuánto valen los ángulos del paralelogramo* ABCD *si*: *a*) $A = 90°$; *b*) $B = 128° \, 36' \, 40''$; *c*) $C = 57° \, 49' \, 52$; *d*) $D = 60°$.

III) *¿Cómo son los ángulos opuestos a la diagonal principal de un romboide? ¿Por qué?*

IV) *¿Por qué son iguales los triángulos que se forman al trazar en un paralelogramo*: *a*) *una diagonal*; *b*) *las dos diagonales?*

V) *Idem en un rombo.*

VI) *Cuánto vale el perímetro*: *a*) *de un triángulo equilátero cuyo lado es de* 18 *cm*; *b*) *del cuadrilátero* ABCD *si* $\overline{AB} = 3{,}5$ *dm*, $\overline{BC} = 0{,}40$ *m*, $\overline{CD} = 30$ *cm y* $DA = 28$ *cm*; *c*) *de un romboide en el que* $\overline{AB} = \overline{AD} = 57$ *m y* $\overline{BC} = \overline{CD} = 3{,}60$ *m*; *d*) *de un trapecio isósceles de bases* $\overline{AB} = 12$ *m*, $\overline{DC} = 7{,}20$ *m y* $\overline{AD} = \overline{CB} = 3$ *m*.

VII) *Qué longitudes tienen los lados*: *a*) *de un rombo cuyo perímetro es de* 10 *m*; *b*) *de un rectángulo cuyo perímetro es de* 22,80 *m y su base es el doble de su altura*; *c*) *del cuadrilátero* ABCD *cuyo perímetro es de* 48 *m y* $\overline{AB} = 8$ *m*, $\overline{BC} = 2\,\overline{CD}$ *y* $\overline{CD} = 3\,\overline{DA}$.

VIII) *Construir el cuadrilátero* ABCD *sabiendo que* $\overline{AB} = 200$ *m*, $\overline{BC} = 320$ *m*, $\overline{CD} = 450$ *m*, $B = 90°$ *y* $C = 125°$. *Mídase cuanto vale el lado* AD *y los ángulos* A *y* D. (Represéntese en el papel o en la pizarra un cierto número de metros por otro de centímetros, por ejemplo, 100 m por 1 cm en el papel).

IX) *Construir un romboide sabiendo que una diagonal es de* 12 *cm*, *la otra de* 8 *cm y que la segunda corta a la primera en un punto que dista* 3 *cm de uno de sus extremos.* (Téngase en cuenta que las diagonales son perpendiculares y que la primera divide a la segunda en dos partes iguales).

X) *Comprobar que el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos medios de los lados*: *a*) *de un cuadrilátero cualquiera es un paralelogramo*; *b*) *de un rectángulo es un rombo*; *c*) *de un cuadrado es otro cuadrado*; *d*) *de un rombo es un rectángulo.*

XI) *Dibujar a mano levantada paralelogramos cualesquiera, rectángulos, rombos y cuadrados.*

XII) *Construir un trapecio rectángulo dados*: *a*) *la base* $b = 10$ m, *la* $b' = 7$ m *y la altura* $h = 4$ m; *b*) *la base* $b = 85$ m, *la* $b' = 45$ m *y el lado oblícuo* $l = 50$ m.

XIII) *Dibujar el polígono* ABCDE *sabiendo que*: $\overline{AB} = 33$ *m*, $\overline{BC} = 25$ *m*, $\overline{CD} = 36$ *m*, $\overline{DE} = 55$ *m*, $B = 90°$, $\widehat{C} = 130°$, $\widehat{D} = 100°$, *y obtener el valor del otro lado* $\overline{EA}$ *y de los ángulos* A *y* E.

XIV) *Dado el polígono* ABCDEF, *si se considera el triángulo que tiene por vértices a los puntos* A, C *y* E, *¿cómo es el perímetro del triángulo con respecto al del polígono? ¿Por qué?*

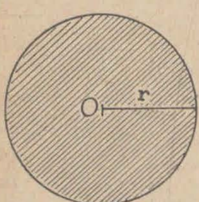
XV) *Construir un paralelogramo sabiendo que su diagonal* $d = 12$ m, *la* $d' = 8$m *y que uno de los ángulos que ellas forman es igual a* 63°. (Recuérdese que las diagonales de un paralelogramo se cortan en partes iguales).

CAPITULO V

CIRCUNFERENCIA Y POLIGONOS REGULARES

Damos a continuación otros conocimientos sobre la circunferencia, que serán útiles en el estudio de los polígonos regulares.

Círculo. — Se llama *círculo* de centro O y de radio *r* a la figura formada por la circunferencia de centro O y de radio *r* y todos los puntos interiores a la misma, que son aquellos que están a una distancia del centro menor que el radio.



Angulos centrales. — Dada una circunferencia de centro O y dos puntos de ella A y B, el ángulo AOB se llama *ángulo central* (fig. 1).

Arcos y sectores. — Dados dos puntos A y B de una circunferencia se llama *arco* AB a la figura formada por los puntos de la circunferencia pertenecientes al ángulo central (fig. 1) y *sector circular* AOB a la figura formada por los puntos del círculo pertenecientes al ángulo central (fig. 2).

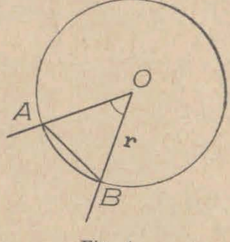


Fig. 1.

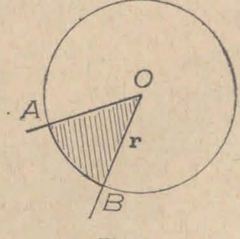
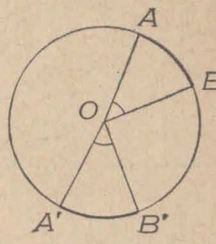


Fig. 2.

Los puntos A y B se llaman *extremos* del arco, el segmento AB que ellos determinan *cuerda* subtendida por el arco AB y el ángulo AOB *ángulo central correspondiente* al arco o al sector (fig. 1).

Igualdad de arcos y de sectores. — DEFINICIÓN. — Se dice que dos *arcos* o dos *sectores son iguales* cuando pertenecen a una circunferencia o a circunferencias iguales y sus ángulos centrales son iguales.



En la circunferencia de centro O es

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \text{ si } A\widehat{O}B = A'\widehat{O}B'$$

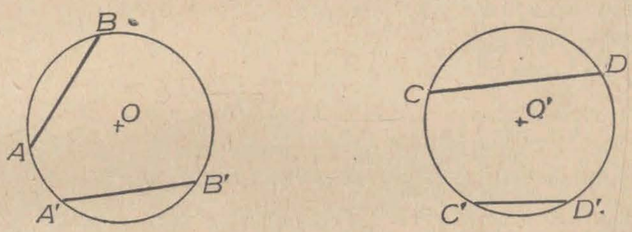
y en el círculo de centro O es

$$\textit{sector } AOB = \textit{sector } A'\widehat{O}B' \text{ si } A\widehat{O}B = A'\widehat{O}B'.$$

Relaciones entre arcos y cuerdas. — Puede demostrarse que: *en una misma circunferencia o en circunferencias iguales*:

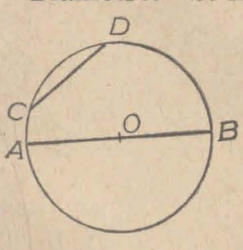
I) *Arcos iguales subtienden cuerdas iguales y recíprocamente.*

II) *Si un arco, menor que una semicircunferencia, es mayor que otro, la cuerda subtendida por el primero es mayor que la subtendida por el segundo y recíprocamente.*



EJEMPLOS: En la circunferencia de centro O es $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ pues $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ y en la circunferencia de centro O′ es $\overline{CD} > \overline{C'D'}$ pues $\overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{C'D'}$.

Diámetro. – Se llama *diámetro* de una circunferencia a la cuerda de la misma que pasa por su centro.

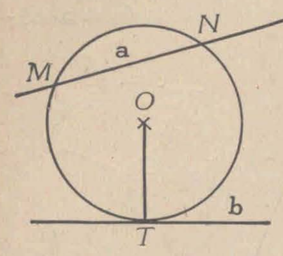


CONSECUENCIAS. — I) *Todos los diámetros de una circunferencia son iguales.* II) *En toda circunferencia el diámetro es la mayor de las cuerdas.*

Estas propiedades pueden comprobarse fácilmente con un transportador de segmentos.

EJEMPLO: En la circunferencia de centro O es *Diámetro* $\overline{AB}$ > *cuerda* $\overline{CD}$.

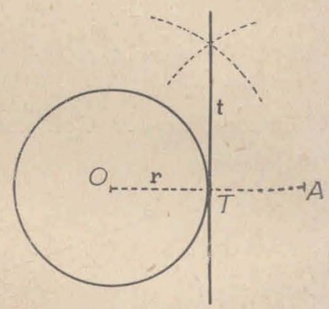
Secantes y tangentes a una circunferencia.—Se dice que una recta es *secante* a una circunferencia cuando la corta en dos puntos y que es *tangente* cuando tiene con ella *un solo* punto común.



Ejemplo: *a* es secante a la circunferencia de centro O pues tiene común con ella los puntos M y N y *b* es tangente pues solo tiene común con la circunferencia el punto T que se llama *punto de contacto.*

Propiedad de la tangente.—*La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de contacto.*

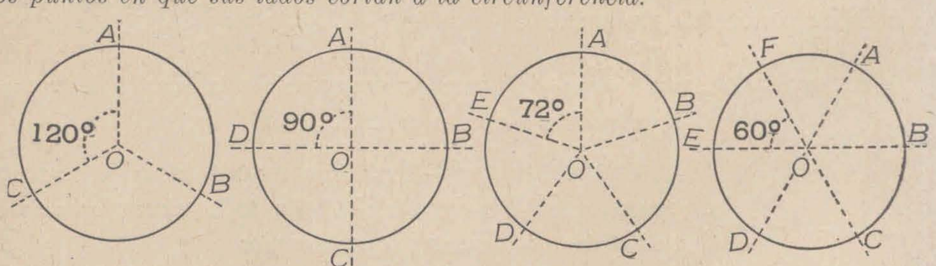
Ejemplo: En la circunferencia de centro O la tangente *t* es perpendicular al radio $\overline{OT}$ en el punto de contacto T.



Problema.— *Trazar la tangente a una circunferencia en uno de sus puntos.*

De acuerdo con la propiedad anterior, basta considerar la recta que pasa por el centro y por el punto dado y trazarle la perpendicular en ese punto, como se indica en la figura.

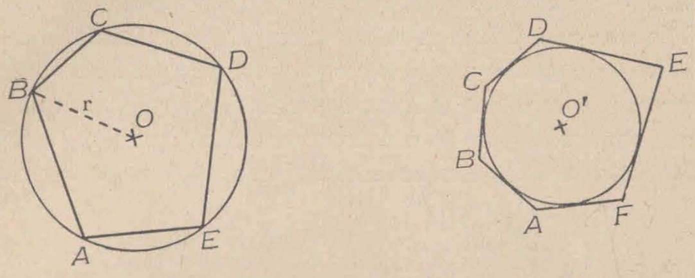
División de la circunferencia en partes iguales. — *Para dividir una circunferencia en* 3, 4, 5, 6, *etc., partes iguales, basta construir, empleando un transportador,* 3, 4, 5, 6, *etc. ángulos centrales consecutivos de* $360°:3=120°$; $360°:4=90$; $360°:5=72°$; $360°:6=60°$ *etc., respectivamente, y marcar los puntos en que sus lados cortan a la circunferencia.*



Polígonos regulares. — Se dice que un *polígono es regular* cuando tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

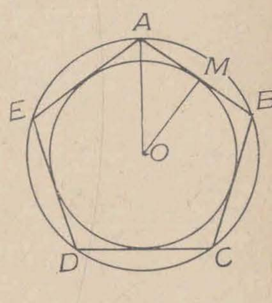
Ejemplos: El triángulo equilátero y el cuadrado son polígonos regulares.

Polígonos inscriptos y circunscriptos. — Definiciones. — Se dice que un polígono está *inscripto* en una circunferencia cuando todos sus vértices pertenecen a ella y que está *circunscripto* a la misma cuando todos sus lados son tangentes a dicha circunferencia.



Ejemplos: El polígono ABCDE está inscripto en la circunferencia de centro O y ABCDEF está circunscripto a la circunferencia de centro O'.

Propiedad. — *Dado un polígono regular es posible inscribirlo en una circunferencia y circunscribirlo a otra del mismo centro que la anterior.*



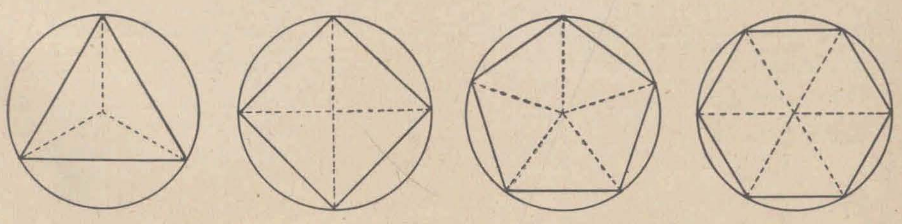
Ejemplo: El pentágono regular ABCDE está inscripto en la circunferencia de centro O y radio $\overline{OA}$ y circunscripto a la de centro O y radio $\overline{OM}$.

El centro común de las circunferencias inscripta y circunscripta a un polígono regular se llama *centro* del polígono y a sus radios, *radio* y *apotema* del polígono, respectivamente.

Ejemplo: O es el centro del polígono ABCDE, $\overline{OA}$ su radio y $\overline{OM}$ su apotema.

La apotema de un polígono regular une el centro del mismo con el punto medio de uno de sus lados.

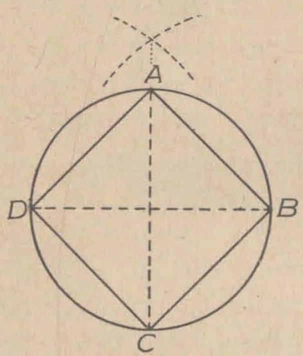
Construcción de polígonos regulares empleando el transportador. — *Para construir un polígono regular se traza una circunferencia cualquiera, se la divide en tantos arcos iguales como lados tenga el polígono a construir y se unen los puntos de división consecutivos.*

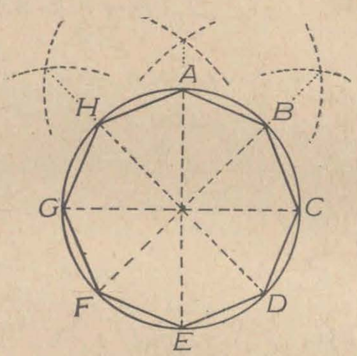


Con ese procedimiento hemos construído el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono y el exágono, como se ve en la figura.

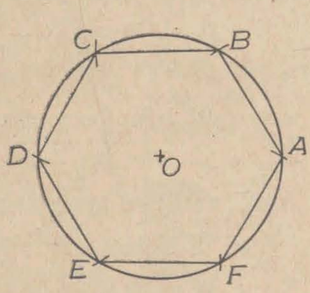
Procedimiento para construir polígonos regulares con regla y compás. — PROBLEMA I. — *Construcción del cuadrado y del octógono con regla y compás.*

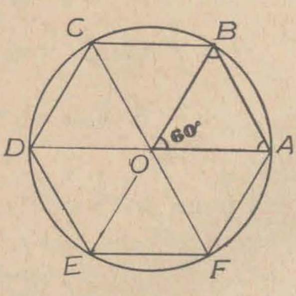
Este problema se resuelve de la misma manera que la indicada en el procedimiento anterior, solo que se usa la regla y el compás para construir los cuatro ángulos de 90°, trazando dos diámetros perpendiculares. Los ocho ángulos de 45° cada uno, necesarios para la construcción del octógono, se obtienen trazando las bisectrices de los ángulos anteriores, como se ve en la figura.





PROBLEMA II. — *Construcción del exágono regular con regla y compás.*



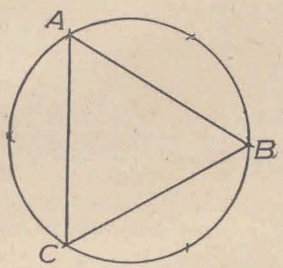


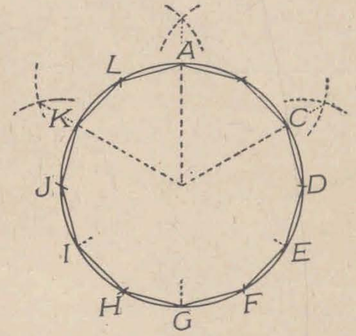
Para construir un exágono regular se traza una circunferencia y se transporta cinco veces el radio sobre la misma a partir de un punto A. Uniendo los puntos consecutivos de división A, B, C, D, E, F y A se tiene el exágono ABCDEF pedido.

Efectivamente: uniendo los puntos A, B, C, D, E y F con O se obtienen los triángulos equiláteros $\overset{\triangle}{AOB}$, $\overset{\triangle}{BOC}$, $\overset{\triangle}{COD}$, $\overset{\triangle}{DOE}$ y $\overset{\triangle}{EOF}$, luego como sus ángulos valen $60°$ se tiene $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOF}$. El último ángulo FOA es igual a $360° - 60° \times 5 = 60°$ por lo tanto el lado AF es también igual al radio. Luego:

El lado de un exágono regular inscripto en una circunferencia es igual a su radio.

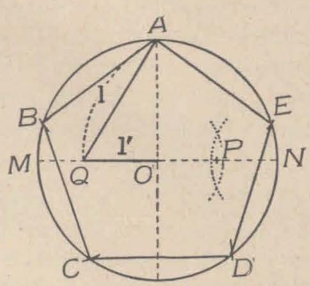
PROBLEMA III. — *Construir un triángulo equilátero y un dodecágono regular con regla y compás.*

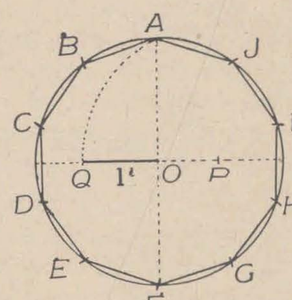




Para construir un triángulo equilátero o un dodecágono regular se procede como en el problema anterior y se unen los tres puntos de división no consecutivos en el primer caso, y para el dodecágono se trazan con regla y compás las bisectrices de los ángulos al centro del exágono, como se ve en la figura, y se unen los puntos de división consecutivos.

PROBLEMA IV. — *Construir un pentágono y un decágono con regla y compás.*

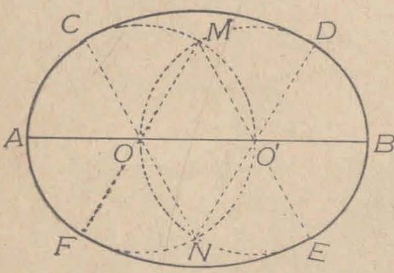




Se trazan dos diámetros perpendiculares $AO \perp MN$, con centro en el punto medio P del radio ON y con radio igual a PA se corta al diámetro MN en el punto Q. El segmento $\overline{AQ}$ es el lado l del pentágono y el $\overline{OQ}$ el lado l' del decágono pedidos que se llevan a partir de un punto cualquiera de la circunferencia dada y se unen los puntos de división consecutivos, obteniéndose los polígonos ABCDE y ABCDEFGHIJ pedidos.

Damos a continuación una aplicación del trazado de circunferencias.

Construcción del óvalo. — Para construir un óvalo de diámetro dado AB se divide a éste en tres partes iguales $\overline{AO} = \overline{OO'} = \overline{O'B}$, y con centro en O y O′ se trazan circunferencias de radio igual a la tercera parte de AB; las cuales se cortan en M y N. Con centro en M y en N y radio igual al diámetro AO′ se trazan arcos de circunferencias hasta encontrar a las dos circunferencias de centro O y O′ en E, F, C y D respectivamente.



EJERCICIOS. — I) *Dibujar circunferencias a mano levantada y señalar su centro.*

II) *Trazar una circunferencia de 5 cm de radio que pase: a) por un punto dado; b) por dos puntos dados; c) tangente a una recta dada en un punto dado; d) secante a una recta dada.*

III) *Dada una circunferencia señalar en ella: a) dos arcos iguales; b) una cuadrante (cuarta parte de la circunferencia; c) dos cuerdas iguales.*

IV) *Comprobar que en toda circunferencia: a) todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a ésta y al arco que subtiende en dos partes iguales; b) que las cuerdas iguales equidistan del centro; c) que de dos cuerdas desiguales la mayor dista menos del centro que la menor.*

V) *Dada una circunferencia cualquiera determinar su centro.* (Basta tomar tres puntos cualesquiera de ella y proceder como si se deseara trazar la circunferencia circunscripta al triángulo que tiene por vértices a esos puntos (pág. 33, II).

VI) *Dados dos puntos* O *y* O′ *comprobar que las circunferencias de centro* O *y* O′ *tales que: a) la suma de los radios es menor que* OO′, *son* EXTERIORES; *b) que la suma de sus radios es igual a* $\overline{OO'}$, *son* TANGENTES EXTERIORMENTE; *c) la diferencia de sus radios es igual a* $\overline{OO'}$, *son* TANGENTES INTERIORMENTE; *d) la diferencia de sus radios es menor que* $\overline{OO'}$, *la de radio menor es* INTERIOR *a la de radio mayor; e) la suma de los radios es mayor que* $\overline{OO'}$ *y la diferencia de los mismos es menor que* $\overline{OO'}$ *son* SECANTES.

VII) *Comprobar que si en una circunferencia se dibujan ángulos que tengan por vértices puntos de la misma y cuyos lados pasen por los extremos de un diámetro (ángulos inscriptos en una semicircunferencia) esos ángulos son rectos.*

VIII) *Comprobar que si se toma un punto exterior a una circunferencia y se une con su centro, se traza la circunferencia que tiene por diámetro el segmento obtenido y se* *une el punto tomado con los de intersección de la segunda circunferencia con la primera, se obtienen dos tangentes a esta última.*

IX) *Probar que si* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *son diámetros de una misma circunferencia es* $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

X) *Dada una circunferencia de* 5 *cm de radio inscribir en ella: a) un triángulo equilátero; b) un cuadrado; c) un pentágono regular; d) un exágono regular; e) un octógono regular; f) un decágono regular; g) un dodecágono regular; h) trazar las tangentes a la circunferencia en cada uno de los vértices de esos polígonos y comprobar que se obtienen polígonos regulares.*

XI) *Comprobar que el centro de un polígono regular se obtiene como intersección de las bisectrices de dos ángulos consecutivos o de las mediatrices de dos lados consecutivos.*

XII) *Si en una misma circunferencia se inscriben: a) un exágono y un triángulo equilátero; b) un cuadrado y un octógono; c) un pentágono y un decágono, ¿cómo son los lados del triángulo, del cuadrado y del pentágono con respecto al doble del lado del polígono de doble número de lados? ¿Por qué?*

XIII) *Si* $\overline{AB}$ *es un diámetro de una circunferencia de centro* O *y se traza la perpendicular: a) a* $\overline{OB}$ *en su punto medio y se unen los puntos en que ella corta a la circunferencia con* A *se obtiene un triángulo equilátero; b) a* $\overline{OA}$ *y a* $\overline{OB}$ *en sus puntos medios y se unen los puntos obtenidos resulta un exágono regular.* Aplicar estos procedimientos en la construcción de triángulos y exágonos regulares a mano levantada.

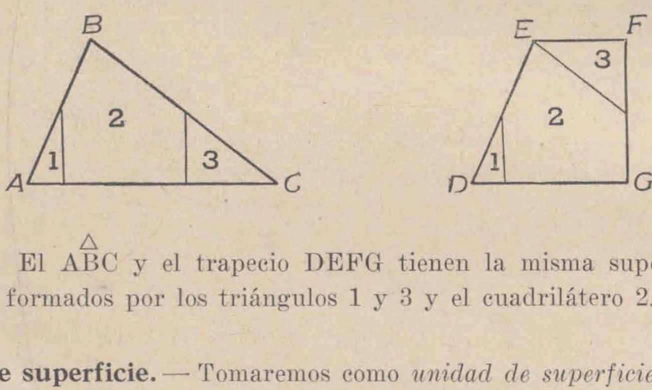
XIV) *Dividir una circunferencia en seis, ocho, diez y doce partes iguales y dibujar: a) los dos triángulos equiláteros que tienen por vértices los puntos de la primera división; b) los dos cuadrados resultantes de la segunda división; c) los dos pentágonos resultantes de la tercera; y d) los dos exágonos que resultan de la última división.*

XV) *Inscribir y circunscribir una circunferencia a un polígono regular.*

CAPITULO VI

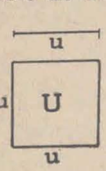
SUPERFICIE DE LOS POLIGONOS

Superficie de un polígono. — Diremos que *dos polígonos tienen la misma superficie* cuando se los puede descomponer en el mismo número de polígonos respectivamente iguales.



EJEMPLO: El $\overset{\triangle}{ABC}$ y el trapecio DEFG tienen la misma superficie, pues ambos están formados por los triángulos 1 y 3 y el cuadrilátero 2.

Unidad de superficie. — Tomaremos como *unidad de superficie* a la superficie de un cuadrado que tenga por lado a la *unidad de longitud.*



En el sistema métrico decimal (ver *Aritmética Escolar*, pág. 82) la unidad de superficie es el *metro cuadrado.*

EJEMPLO: Si el segmento u es la unidad de longitud, la superficie del cuadrado de lado u es la *unidad de superficie.*

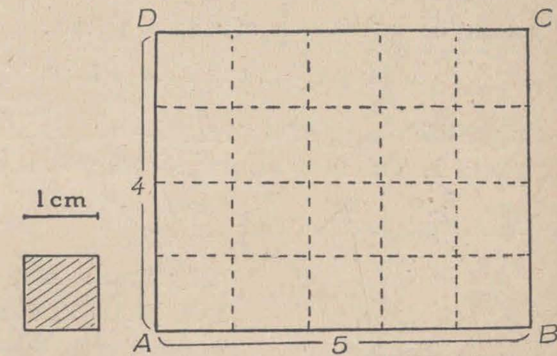
Valor de la superficie de un rectángulo. —Hallar el valor de la superficie de un rectángulo, es encontrar el número de unidades de superficie que contiene. Como se ha visto en los grados anteriores:

La superficie de un rectángulo es igual al producto de la base por su altura.

Ejemplo: En el rectángulo ABCD que tiene por base $\overline{AB} = 5$ cm y por altura $\overline{AD} = 4$ cm se tiene:

$$Superficie\ \mathrm{ABCD} = 5\ \mathrm{cm} \times 4\ \mathrm{cm} = 5 \times 4\ \mathrm{cm}^2 = 20\ \mathrm{cm}^2.$$

Efectivamente es 20 cm^2 el valor de la superficie del rectángulo ABCD, pues si dividimos la base en cinco partes iguales y la altura en cuatro cada parte valdrá *1 cm*. Si por los puntos de división trazamos paralelas a la altura y a la base, respectivamente, queda dividido el rectángulo ABCD en 4 filas de 5 cuadraditos cada una o sea en $5 \times 4 = 20$ cuadraditos de 1 cm^2, que es el valor obtenido directamente multiplicando 5 cm $\times$ 4 cm.



Esta manera de hallar la superficie de un rectángulo es aplicable también a los casos en que la base y la altura no contengan un número entero de unidades como en el ejemplo siguiente:

Ejemplo II. — *Hallar la superficie de un rectángulo* MNPQ *cuyo largo es 5,8 cm y su ancho 2,5 cm.*

Como 1 cm no está contenido en los datos un número entero de veces tomamos como unidad de longitud a *1 mm* y de superficie a *1 mm²* y se tiene:

$$Superficie\ rectángulo\ \mathrm{MNPQ} = 58\ \mathrm{mm} \times 25\ \mathrm{mm} = 1450\ \mathrm{mm}^2 = 14{,}50\ \mathrm{cm}^2$$

que es el número de cuadraditos en que se podría descomponer el rectángulo, procediendo en la misma forma que en el ejemplo I.

En la práctica se obtiene este resultado multiplicando directamente

$$5{,}8\ \mathrm{cm} \times 2{,}5\ \mathrm{cm} = 5{,}8 \times 2{,}5\ \mathrm{cm}^2 = 14{,}50\ \mathrm{cm}^2.$$

En resumen, llamando b a la base del rectángulo y h a la altura se tiene

$$\boxed{Superficie\ rectángulo = b \times h}$$

Ejemplos. — I) *Calcular la superficie de un rectángulo que tiene 4 dm de base y 35 cm de altura.*

Solución:

$$Superficie\ rectángulo = b \times h = 4\ \mathrm{dm} \times 35\ \mathrm{cm} = 4\ \mathrm{dm} \times 3{,}5\ \mathrm{dm} = 14\ \mathrm{dm}^2.$$

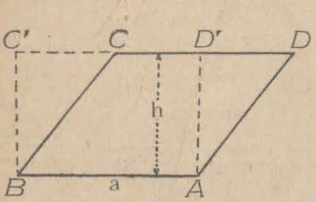
Superficie del cuadrado. — Como el cuadrado es un rectángulo en que la base y la altura son iguales al lado, se tiene

$$\boxed{\textit{Superficie cuadrado} = \textit{lado} \times \textit{lado} = (\textit{lado})^2}$$

Ejemplo: *¿Cuál es la superficie de un cuadrado que tiene* 1,5 *m de lado?*

Superficie cuadrado $= 1{,}5\ \mathrm{m} \times 1{,}5\ \mathrm{m} = 2{,}25\ \mathrm{m}^2$.

Superficie del paralelogramo. — Sea un paralelogramo ABCD de base *a* y de altura *h*. Trazando las perpendiculares a la base por sus extremos queda



formado el rectángulo ABC'D' que tiene la misma superficie que el rectángulo dado, pues son sumas del trapecio ABCD' y de los triángulos iguales BCC' y ADD'. Y como la superficie del rectángulo es igual a la base por la altura, y éstas son las mismas que las del paralelogramo dado, se tiene

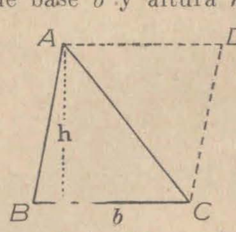
$$\boxed{\textit{Superficie paralelogramo} = \textit{base} \times \textit{altura}}$$

Obsérvese que en el paralelogramo la altura es distinta de sus lados, pues éstos son oblícuos a la base.

Ejemplo: *¿Cuál es la superficie de un paralelogramo cuya base es igual a* 10,53 *m y su altura* 8,05 *m?*

Superf. paralelogramo $= 10{,}53\ m \times 8{,}05\ m = 84{,}7665\ m^2$

Superficie del triángulo. — Sea un triángulo ABC de base *b* y altura *h*. Trazando las paralelas por los extremos de uno de los lados a los otros dos se tiene un paralelogramo que está formado por dos triángulos iguales al dado, y tiene la misma base y altura que el triángulo.. Luego:



Superficie ABC $\times$ 2 = *Superficie paralelogramo* ABCD

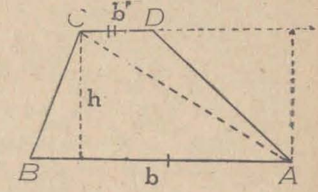
y por lo tanto la superficie del triángulo ABC será la mitad de la del paralelogramo que era *base* $\times$ *altura*, o sea

$$\boxed{\textit{Superficie del triángulo} = \frac{\textit{base} \times \textit{altura}}{2}}$$

EJEMPLO: *¿Cuál es la superficie de un triángulo que tiene* 8,54 *m de base y* 10,70 *de altura?*

$$Sup.\ triángulo = \frac{8{,}54\ \mathrm{m} \times 10{,}70\ \mathrm{m}}{2} = 45{,}6890\ \mathrm{m}^2.$$

Superficie del trapecio. — Sea un trapecio ABCD de bases b y b' y altura h. Trazando una diagonal, la $\overline{AC}$ por ejemplo, queda dividido el trapecio en dos triángulos ABC y DCA cuyas superficies sumadas dan la superficie del trapecio, o sea



$$Superficie\ del\ trapecio\ \mathrm{ABCD} = Sup.\ triáng.\ \mathrm{ABC} + Sup.\ triáng.\ \mathrm{CDA} =$$

$$= \frac{b \times h}{2} + \frac{b' \times h}{2}$$

y operando como si fueran fracciones numéricas se tiene

$$Sup.\ trapecio = \frac{b \times h + b' \times h}{2} = \frac{(b + b')h}{2} = \frac{b + b'}{2} \times h$$

Luego

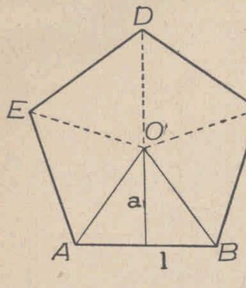
$$\boxed{Superf.\ trapecio = \frac{base\ mayor + base\ menor}{2} \times altura}$$

que se lee: *La superficie de un trapecio es igual a la semisuma de las bases por la altura.*

EJERCICIOS. — I) *¿Cuál es la superficie de un trapecio cuyas bases son de* 8,5 *m y* 12,45 *m de longitud y su altura es de* 6,20 *m?*

SOLUCIÓN. — *Superficie del trapecio* $= \dfrac{8{,}5\ \mathrm{m} + 12{,}45\ \mathrm{m}}{2} \times 6{,}20\ \mathrm{m} = 64{,}945\ \mathrm{m}^2.$

Superficie de un polígono regular. — Sea un polígono regular, un pentágono ABCDE por ejemplo, sea l el lado, O el centro del polígono y a la apotema.



Uniendo el centro O con los vértices A, B, C, D y E, queda dividido el polígono en tantos triángulos isósceles iguales como lados tiene el polígono, 5 en nuestro caso.

La suma de las superficies de esos triángulos da la superficie polígono, o sea:

$$\textit{Superficie pol. reg. } \mathrm{ABCDE} = \textit{Sup. } \overset{\triangle}{\mathrm{AOB}} \times 5$$

y reemplazando *Sup.* $\overset{\triangle}{\mathrm{AOB}}$ por su valor $\dfrac{l \times a}{2}$, se tiene:

$$\textit{Superficie pol. reg. } \mathrm{ABCDE} = \frac{l \times a}{2} \times 5 = \frac{l \times a \times 5}{2} = \frac{(l \times 5) \times a}{2}$$

pero $l \times 5 =$ *perímetro de* ABCDE, luego:

$$\boxed{\textit{Superficie pol. reg. ABCDE} = \frac{\textit{Perímetro } \mathrm{ABCDE} \times a}{2}}$$

que se lee:

La superficie de un polígino regular es igual a la mitad del producto del perímetro por la apotema.

Ejemplo: *Calcular la superficie de un exágono regular sabiendo que su lado es de 2 m y su apotema de 1,73 m.*

Solucion. — Siendo $\textit{Sup. exágono regular} = \dfrac{\text{Perím.} \times a}{2} = \dfrac{2\,\text{m} \times 6 \times 1{,}73\,\text{m}}{2} = 10{,}38\,\text{m}^2$

Relación entre el lado y la apotema de un polígono regular. — Puede demostrarse que en todos los polígonos regulares del mismo número de lados, existe una razón constante entre el lado y la apotema del mismo, de modo que conociendo la longitud del primero bastará multiplicarla por esa razón para obtener la longitud de la segunda.

En el cuadro que sigue damos los números por los cuales hay que multiplicar al lado para obtener la apotema, en algunos polígonos regulares:

Polígonos	Nº por el que hay que multiplicar al lado para obtener la apotema
Triángulo	0,2887
Cuadrado	0,5000
Pentágono	0,6882
Exágono	0,8660
Heptágono	1,0383
Octógono	1,2071
Eneágono	1,3737
Decágono	1,5388
Dodecágono	1,8660

Ejemplos. — I) *La apotema de un pentágono regular de 5 m de lado vale*

$$a = 5\text{ m} \times 0{,}6882 = 3{,}4410\text{ m}.$$

II) *Calcular la superficie de un octógono regular de 3 m de lado.*

Solución. — Siendo *Sup. octógono regular* $= \dfrac{P\,.\,a}{2} = \dfrac{3\text{ m}\,.\,8\,.\,a}{2} = 3\text{ m}\,.\,4\,.\,a = 12\text{ m}\,.\,a$

debemos hallar la apotema para lo cual basta multiplicar la longitud del lado por 1,2071, o sea:

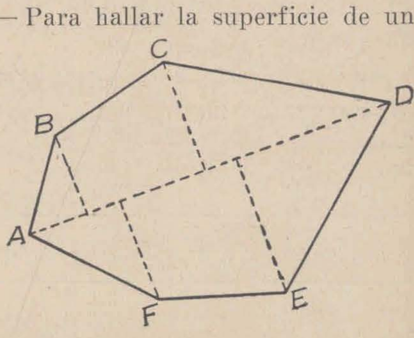
$$a = 1{,}2071 \times 3\text{ m} = 3{,}6213\text{ m}$$

y reemplazando este valor redondeado al centímetro, se tiene:

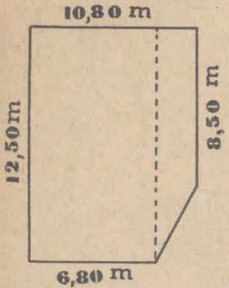
$$S = 12\text{ m} \times 3{,}62\text{ m} = 43{,}44\text{ m}^2.$$

Observación. — De la observación del cuadro anterior resulta que *en el triángulo, en el cuadrado, en el pentágono y en el exágono regular la apotema es menor que el lado, pues la razón entre éste y aquélla es menor que 1, y en cambio desde el heptágono en adelante el lado es menor que la apotema.*

Superficie de un polígono cualquiera. — Para hallar la superficie de un polígono cualquiera bastará dividirlo en polígonos cuyas superficies sepamos hallar. Así, por ejemplo, en la figura adjunta se ha dividido el polígano ABCDEF en triángulos rectángulos y trapecios.



Ejemplo: *Calcular con los datos del croquis la superficie del terreno.*



Solución. — Para hallar la superficie del terreno lo dividimos, mediante la paralela al lado de 12,50 m en un rectángulo y en un trapecio cuya altura se obtiene restando (10,80 m — 6,80 m) = 4 m, luego:

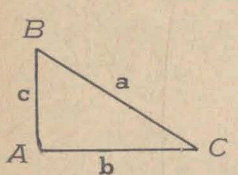
$$\textit{Sup. terreno} = \textit{Sup. rectángulo} + \textit{Sup. trapecio}$$

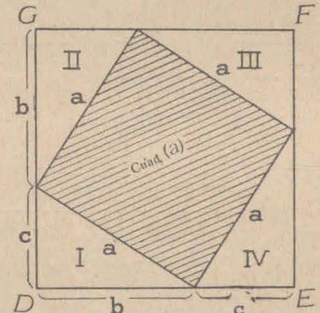
$$= 12{,}50 \text{ m} \times 6{,}80 \text{ m} + \frac{12{,}50 \text{ m} + 8{,}50 \text{ m}}{2}$$

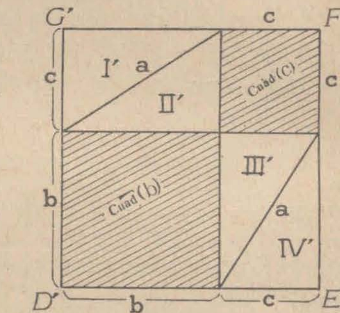
$$= 12{,}50 \text{ m} \times 6{,}80 \text{ m} + 21 \text{ m} \times 2 \text{ m}$$

$$\textit{Sup. terreno} = 85 \text{ m}^2 + 42 \text{ m}^2 = 127 \text{ m}^2$$

Teorema de Pitágoras. — Consideremos el triángulo rectángulo BAC. Si se construyen dos cuadrados iguales DEFG y D′E′F′G′ cuyos lados sean la suma de los catetos b y c del triángulo, y los descomponemos en la forma indicada en las figuras resulta que al quitar de la primera los cuatro triángulos I,



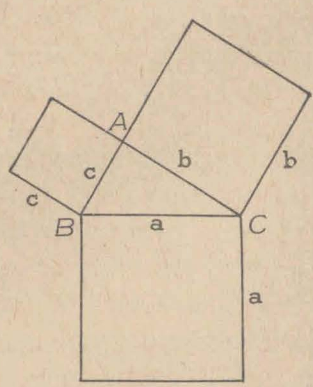




II, III y IV obtenemos un cuadrilátero que es un cuadrado, pues los lados son iguales a la hipotenusa a del triángulo dado, y sus ángulos son rectos, pues resultan de quitar a ángulos formados alrededor de un punto y de un mismo lado de la recta, dos ángulos que suman 90° por ser iguales a los ángulos agudos de un mismo triángulo rectángulo.

Y como al quitar de D′E′F′G′ los cuatro triángulos quedan el cuadrado de lado b y el de lado c, resulta que:

La superficie del cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos, o sea



$$\boxed{\textit{Sup. cuad } (a) = \textit{sup. cuad } (b) + \textit{sup. cuad } (c)}$$

El resultado anterior se expresa gráficamente en la forma que indica la figura anterior.

Expresión aritmética del Teorema de Pitágoras. — Teniendo en cuenta que la superficie de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado, resulta que el Teorema de Pitágoras puede expresarse mediante la fórmula siguiente:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

que se lee:

El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Corolarios. — I) *La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.*

En efecto: Siendo $a^2 = b^2 + c^2$ por el teorema de Pitágoras, extrayendo la raíz cuadrada da

$$\boxed{a = \sqrt{b^2 + c^2}}$$

II) *Un cateto de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.*

En efecto: Siendo $b^2 + c^2 = a^2$ por el teorema de Pitágoras y pasando c^2 al segundo miembro y luego b^2, se tiene:

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{y} \quad c^2 = a^2 - b^2$$

y extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros da

$$\boxed{b = \sqrt{a^2 - c^2}} \quad \text{y} \quad \boxed{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

Ejemplos. — I) *¿Cuál es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen* 6 *cm y* 8 *cm de longitud?*

Solución. — Llamando x a la hipotenusa buscada, se tiene

$$x = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \quad \text{luego} \quad x \text{ cm} = 10 \text{ cm}.$$

II) *¿Cuál es la longitud de un cateto si el otro mide* 4,5 *m y la hipotenusa* 7,5 *m?*

Solución. — Llamando y al cateto buscado, se tiene:

$$y = \sqrt{7{,}5^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{56{,}25 - 20{,}25} = \sqrt{36} = 6 \quad \text{luego} \quad y \text{ m} = 6 \text{ m}.$$

III) *¿Qué longitud tiene la diagonal de un cuadrado de 50 cm de lado?*

Solución. — Como la diagonal d de un cuadrado es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados del mismo, se tiene:

$$d = \sqrt{50^2 + 50^2} = \sqrt{2500 + 2500} = \sqrt{5000} = 70{,}7 \text{ cm aproximadamente}$$

IV) *¿Qué longitud tiene el lado de un cuadrado cuya diagonal es de 5 m?*

Solución. — Teniendo en cuenta lo dicho en el problema anterior, resulta llamando x al lado del cuadrado: $x^2 + x^2 = 5^2$ o sea $2\,x^2 = 25$

y pasando 2 al segundo miembro, se tiene:

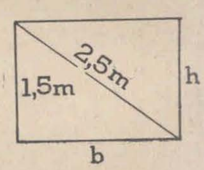
$x^2 = \dfrac{25}{2} = 12{,}5$ y extrayendo la raíz cuadrada da: $x = \sqrt{12{,}5} = 3{,}53$ aproximadamente.

Luego el lado del cuadrado mide 3,53 m.

$\sqrt{12{,}50}$	3,53
9	
35'0	35 : 6 = 5 ; 65 × 5 = 325
32 5	
2 50'0	250 : 70 = 3 ; 703 × 3 = 2109
2 10 9	
39 1	

V) *Calcular la superficie de un rectángulo de 1,5 m de altura y 2,5 m de diagonal.*

Solución: Siendo *Sup. rectángulo* $= b \times h = b \times 1{,}5$ m



debemos calcular b para poder aplicar la fórmula. Para ello basta tener en cuenta que la base es un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la diagonal y el otro cateto es la altura.

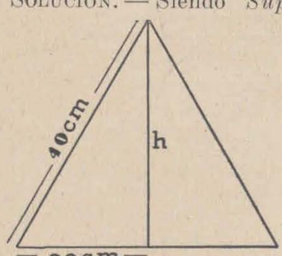
Aplicando el corolario II del Teorema de Pitágoras da

$$b = \sqrt{2{,}5^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{6{,}25 - 2{,}25} = \sqrt{4} = 2 \text{ m}$$

luego *Superficie del rectángulo* $= 1{,}5 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 3 \text{ m}^2$.

VI) *Calcular la superficie de un triángulo equilátero de 40 cm de lado.*

Solución. — Siendo *Sup. triángulo* $= \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{40 \text{ cm} \times h}{2} = 20 \text{ cm} \times h$



Debemos calcular h. Para ello basta observar que es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es igual al lado del triángulo y el otro cateto es la mitad del mismo. Luego aplicando el corolario II del Teorema de Pitágoras, se tiene:

$\sqrt{120\,0}$	34.6
9	
30'0	30 : 6 = 5
25 6	64 × 4 = 256
4 40'0	440 : 68 = 6
4 11 6	686 × 6 = 41 6
28 4	

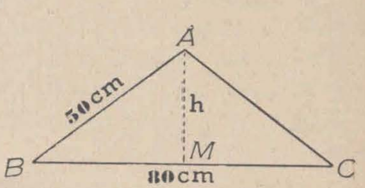
$$h = \sqrt{40^2 - 20^2} = \sqrt{1600 - 400} = \sqrt{1200} = 34{,}6 \text{ cm}$$

luego *Superficie del rectángulo* $= 20 \text{ cm} \times 34{,}6 \text{ cm} = 692 \text{ cm}^2$.

VII) *Calcular la superficie de un triángulo isósceles de 80 cm de base y 50 cm de lado igual.*

SOLUCIÓN. — Siendo $Sup.\ triáng. = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{80 \text{ cm} \times h}{2} = 40 \text{ cm} \times h$

debemos calcular h para aplicar la fórmula. Para ello basta observar que h es cateto del triángulo rectángulo AMB cuya hipotenusa es el lado igual de 50 cm y el otro cateto es la mitad de la base 80 cm: 2 = 40 cm. Luego aplicando el corolario II del Teorema de Pitágoras da:

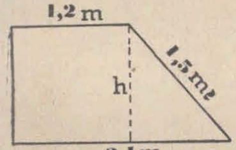


$$h = \sqrt{50^2 - 40^2} = \sqrt{2500 - 1600} = \sqrt{900} = 30 \text{ cm}$$

luego $\qquad Sup.\ del\ triángulo = \dfrac{80 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}}{2} = 1200 \text{ cm}^2$

VIII) *Calcular la superficie del trapecio rectángulo cuyas bases tienen* 1,20 *m*, 2,10 *m de longitud y su lado oblículo es de* 1,5 *m.*

SOLUCIÓN. — Siendo $Sup.\ trapecio = \dfrac{b + b'}{2} \times h = \dfrac{1{,}20 \text{ m} + 2{,}10 \text{ m}}{2} \times h = 1{,}65 \text{ m} \times h$



debemos calcular h para poder aplicar la fórmula. Para ello basta observar que es h un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el lado oblícuo de 1,5 m y el otro cateto es igual a la diferencia entre las bases 2,10 m — 1,20 m = 0,90 m. Luego aplicando el corolario del Teorema de Pitágoras da:

$$h = \sqrt{1{,}5^2 - 0{,}9^2} = \sqrt{2{,}25 - 0{,}81} = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2 \text{ m}$$

luego *Superficie del trapecio* $= 1{,}65 \text{ m} \times 1{,}2 \text{ m} = 1{,}98 \text{ m}^2$.

PROBLEMAS. — I) *Calcular la diagonal de un salón rectangular de 8 m de largo por 6 m de ancho.*

II) *Calcular la longitud de una escalera que apoyada en una pared alcanza* 4,8 *m de altura cuando el pié dista* 3,60 *m de la pared.*

III) *Calcular la superficie de un paralelogramo sabiendo que dos de sus lados consecutivos tienen* 10 *m* y 12,50 *m de longitud y que una de sus diagonales lo divide en dos triángulos rectángulos.* (Obsérvese que esa diagonal es la altura del paralelogramo y forma con los lados dados un triángulo rectángulo).

IV) *Probar que la superficie de un rombo es igual al producto de sus diagonales dividido por dos.* (Trácense las diagonales, calcúlese la superficie de cada uno de los triángulos que determina una de ellas, teniendo en cuenta que la otra le es perpendicular).

V) *Calcular la superficie de un rombo cuyas diagonales son de* 6,5 *m y* 10,40 *m.*

VI) *Calcular el lado de un rombo sabiendo que su superficie es de* 24 *m*² *y una de sus diagonales es de* 6 *m de longitud.*

VII) *Calcular la diagonal de un cuadrado de* 1,44 m^2 *de superficie.*

VIII) *Calcular la superficie de un triángulo isósceles cuya base es* 44 *m y su lado igual es de* 27,50 *m.* (Véase el problema VII de la pág. 61).

IX) *Calcular la superficie de un triángulo equilátero: a) de* 1 *m de lado; b) de* 1 *m de apotema.*

X) *Calcular la superficie de un trapecio isósceles (lados no paralelos iguales) sabiendo: que una base tiene* 10 *m de longitud, la otra* 6 *m y el lado igual* 2,5 *m.* (Trácense por los extremos de la base menor las perpendiculares a la base mayor y obsérvese que la altura es un cateto de uno de los triángulos rectángulos que se forman).

XI) *Calcular la superficie del trapezoide* ABCD *sabiendo que* $\overline{AB} = 30$ *m*, $\overline{BC} = 40$ *m*, $\overline{CD} = 50$ *m y* $\hat{B} = 90°$. (Calcúlese la diagonal AC y obsérvese que el triángulo ACD es equilátero; ver pág. 60, VI).

XII) *Calcular la superficie del exágono regular inscripto en la circunferencia de* 2 *m de radio. Calcúlese la apotema.*

XIII) *Calcular la superficie del pentágono, del octógono y del decágono regular de* 5 *m de lado.* (Véase el cuadro de la pág. 57).

XIV) *Construir un cuadrado igual: a) al doble de otro dado; b) a la suma de los cuadrados.* (Recuérdese que el cuadrado construído sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados....)

XV) *¿Cuál es la superficie del cuadrado que tiene por vértices los puntos medios de los lados de un cuadrado de* 2 *m de lado?* (Aplíquese el Teorema de Pitágoras para hallar el lado del cuadrado pedido).

XVI) *¿Cuál es la superficie destinada a aire y luz en el frente de una casa si tiene una puerta de* 1,10 *m de ancho por* 4 *m de alto, una ventana de* 1 *m por* 1,50 *y dos balcones de* 1,30 *m por* 2 *m?*

XVII) *Para embaldosar un patio de forma rectangular de* 25 *m de ancho se utilizaron* 27 000 *baldosas de* 0,25 *m de lado, ¿qué superficie tiene el patio? ¿Cuál es su largo?*

XVIII) *¿Qué altura tiene un trapecio que tiene* 315 *m cuadrados de superficie si sus bases tienen* 17,8 *m y* 24,6 *m de longitud?*

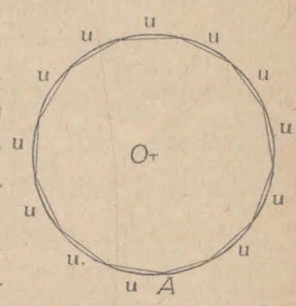
XIX) *Un terreno de forma triangular de* 500 *m de altura y* 450 *m de base tiene la misma superficie que otro rectangular de* 150 *m de largo, ¿cuál es el ancho de este último terreno?*

XX) *¿Qué longitud tiene una de las bases de un trapecio si la otra es de* 36 *m, la altura es* 18,2 *m y la superficie es de* 553,28 m^2?

CAPITULO VII

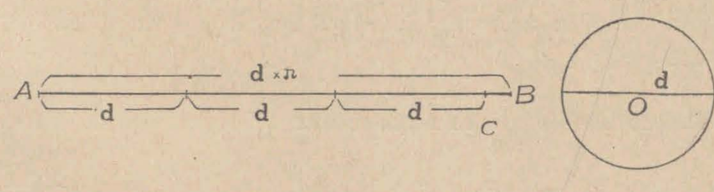
MEDICION DE FIGURAS CIRCULARES

Medición de figuras circulares. — Si tratáramos de hallar *directamente* la longitud de una circunferencia tomando como unidad a un segmento u, y transportándolo a partir de uno de sus puntos, en la forma que indica la figura, veríamos que por pequeño que sea el segmento que se toma como unidad, no puede coincidir con el arco que subtiende, y por lo tanto no podría obtenerse la longitud buscada.



Si en cambio recubrimos totalmente a esa circunferencia con un hilo flexible, y luego lo estiramos obtenemos un segmento $\overline{AB}$ cuya longitud puede tomarse, *prácticamente*, como longitud de la circunferencia.

Llevando sobre $\overline{AB}$ a partir de A, el diámetro, vemos que está contenido en



él tres veces, quedando un resto $\overline{CB}$, que una medición cuidadosa nos hace ver que es aproximadamente algo mayor que 0,14 del diámetro, es decir

$$\textit{Longitud de circunferencia de diámetro } d = 3\,d + 0{,}14\,d = 3{,}14\,d$$

Si repitiéramos esta experiencia para circunferencias de muy distintos diámetros, podríamos comprobar siempre que las longitudes de esas circunferencias serían con gran aproximación 3,14 veces el diámetro de las mismas, como puede demostrarse.

Luego la fórmula que permite hallar la longitud aproximada de una circunferencia de diámetro d es:

$$\textit{Longitud de circunferencia de diámetro } d = 3{,}14 \times d$$

Para obtener exactamente la longitud de una circunferencia es necesario multiplicar al diámetro d por el número π (que se lee *pi*) igual a 3,14159265... ; luego 3,14 es un valor aproximado de ese número. También se suele tomar como valor aproximado de π el de 3,1416 que es mayor que él. Luego:

$$\boxed{\textit{Longitud de circunferencia} = \pi d = 2\pi r} \quad \text{pues } d = 2r$$

Ejemplos. — I) *¿Qué longitud tiene una circunferencia de 3 m de radio?*

Solución. — *Long. circunf.* $= 2\pi r = 2 \times 3{,}14 \times 3$ m $= 18{,}84$ m.

II) *¿Cuál es el radio de una circunferencia de 15,70 cm de longitud?*

Solución. — *Long. circunf.* $= 2\pi r = 15{,}70$ cm o sea $2 \cdot 3{,}14 \times r = 15{,}70$ cm

pasando $2 \times 3{,}14 = 6{,}28$ al segundo miembro da: $r = \dfrac{15{,}70 \text{ cm}}{6{,}28} = 2{,}5$ cm.

Longitud de un arco. — Dado un arco de circunferencia de radio r cuyo ángulo central sea de n grados para hallar su longitud, basta considerar a la circunferencia como un arco especial cuyo ángulo central es de 360° y tener presente que:

Si a un ángulo de 360° le corresponde un arco de longitud $2\pi r$

a uno » 1° » » » » » » $\dfrac{2\pi r}{360°}$

y a otro » n° » » » » » » $\dfrac{2\pi r \cdot n°}{360°}$

y simplificando resulta:

$$\boxed{\textit{Longitud del arco de radio } r \textit{ y de } n \textit{ grados} = \dfrac{\pi r \cdot n°}{180°}}$$

Arco rectificado. — Se llama así al segmento de recta cuya longitud es igual a la de un arco dado.

EJEMPLOS. — I) *¿Qué longitud tiene un arco de 6 m de radio cuyo ángulo central correspondiente es de 120°?*

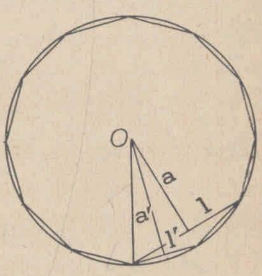
SOLUCIÓN. — $Long.\ arco = \dfrac{\pi\, r\, n^\circ}{180^\circ} = \dfrac{3{,}14 \times 6\ \text{m} \times 120}{180^\circ} = 12{,}56\ \text{m}.$

II) *¿Qué longitud tiene un arco de 5 m de radio cuyo ángulo central correspondiente es de 40°12′?*

SOLUCIÓN. Como $1^\circ = 60'$ resulta $12' = \left(\dfrac{12}{60}\right)^\circ = \left(\dfrac{1}{5}\right)^\circ = 0^\circ{,}2$ y $40^\circ\,12' = 40^\circ{,}2$

luego $Long.\ arco. = \dfrac{3{,}14 \times 5\ \text{m} \times 40{,}2}{180^\circ} = 3{,}506\ \text{m}.$

Superficie del círculo. — Tratemos de encontrar el valor de la superficie de un círculo de centro O y radio *r*, para lo cual inscribimos un polígono regular cualquiera de lado *l* y apotema *a*. Vemos que la superficie del círculo es mayor que la del polígono pues las partes comprendidas entre los lados y los arcos que los subtienden están sin cubrir por el polígono. Mayor aproximación entre ambas superficies se logrará duplicando el número de lados del polígono inscripto considerado, que será ahora de lado *l′* y apotema *a′* y así sucesivamente. Como las superficies de estos polígonos se hallan multiplicando su perímetro por su apotema y dividiendo por 2, se puede considerar a la *longitud de la circunferencia* como el perímetro de un polígono especial al que tienden los polígonos inscriptos en ella cuando aumenta el número de lados y al *radio* como al valor a que tienden las apotemas de esos polígonos, y se tendría:



$$Superficie\ círculo = \frac{longitud\ de\ circunferencia \times radio}{2} = \frac{2\,\pi\, r \times r}{2} = \pi\, r^2$$

Luego

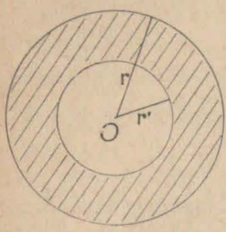
$$\boxed{Superficie\ del\ círculo\ de\ radio\ r = \pi\, r^2}$$

EJEMPLO: *¿Cuál es la superficie de un círculo de 5 cm de radio?*

SOLUCIÓN:

Siendo $Sup.\ del\ círculo = \pi\, r^2 = 3{,}14 \times 5^2\ \text{cm}^2 = 3{,}14 \times 25\ \text{cm}^2 = 78{,}5\ \text{cm}^2.$

Superficie de la corona circular. — Dadas dos circunferencias concéntricas se llama *corona circular* a la figura formada por los puntos que siendo interiores a la circunferencia de radio mayor son exteriores a la de radio menor.



EJEMPLOS La parte rayada en la figura es una corona circular.

De acuerdo con la definición resulta:

La superficie de una corona circular es igual a la diferencia entre la superficie del círculo de radio mayor y la de radio menor.

Superficie de la corona circular $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

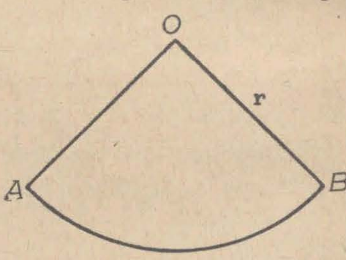
EJEMPLO: *¿Cuál es la superficie de la corona circular de* 20 *cm y* 12 *cm de radios?*

SOLUCIÓN. — Siendo *Sup. corona* $= \pi(R^2 - r^2) = 3{,}14(20^2 - 12^2)\ cm^2 =$

$= 3{,}14(400 - 144)\ cm^2 = 3{,}14 \times 256\ cm^2 = 803{,}84\ cm^2$.

Superficie del sector circular. — Consideraciones análogas a las hechas para obtener la manera de hallar la superficie de un círculo, nos conducen a aceptar que:

La superficie del sector circular es igual a la de un triángulo cuya base tiene una longitud igual a la base del sector rectificada y por altura al radio del mismo, o sea



Sup. del sector AOB = *Sup. triáng. base* $\overset{\frown}{AB}$ *rectificado y radio* $\overline{OA}$

y teniendo en cuenta la fórmula de la superficie de un triángulo, llamando r al radio del sector, se tiene:

Sup. del sector circular AOB *de radio* r $= \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{AB}$ *rectificado* $\times\ r$

EJEMPLOS. — I) *¿Cuál es la superficie de un sector circular de* 5 *m de radio cuya base tiene* 2,75 *m de longitud?*

SOLUCIÓN. — Siendo *Sup. sector circular* AOB $= \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{AB}\ rect.\ r = \frac{1}{2}\ 2{,}75\ m \times 5\ m =$

$= 6{,}8750\ m^2$.

II) *¿Cuál es la superficie de un sector circular de* 2,4 *m de radio y cuyo ángulo central es de* 18°?

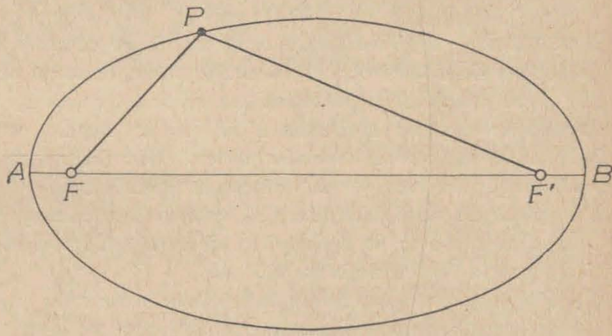
SOLUCIÓN. — Siendo $Sup.\ sector\ circular = \frac{1}{2}\ \widehat{AB}\ rect. \times r = \frac{1}{2}\ \widehat{AB}\ rect. \times 2{,}4\ m$

$$y\quad \widehat{AB}\ rect. = \frac{\pi\, r\, n^\circ}{180^\circ} = \frac{3{,}14 \times 2{,}4\ m \times 18^\circ}{180^\circ} = 0{,}7536\ m$$

se tiene $Sup.\ sector\ circular = \frac{1}{2}\ 0{,}7536\ m \times 2{,}4\ m = 9{,}0432\ m^2.$

Damos a continuación otra aplicación de la circunferencia al trazado de la curva llamada:

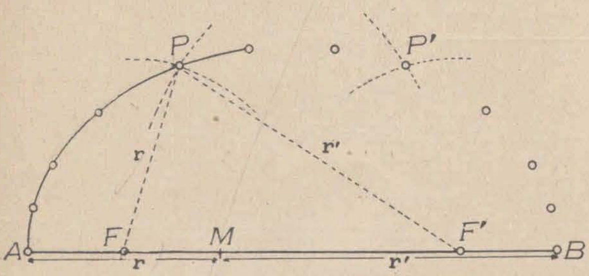
La elipse. — Si miramos a una circunferencia «*de frente*» la vemos con su verdadera forma, si en cambio, la observamos de costado se nos presenta *deformada*, con el aspecto de una curva más achatada, que se llama *elpise.* Una elipse puede construirse prácticamente así: Se toma un segmento $\overline{AB}$, que llamaremos *eje mayor de la elipse*, y dos puntos del mismo, F y F′ a igual distancia de A y de B, a los que denominaremos *focos*, y se fijan mediante dos alfileres los extremos de un hilo de longitud a $\overline{AB}$ en los focos F y F′. Se estira el hilo con la punta de un lápiz y se mueve éste de manera que los dos porciones del hilo queden siempre estiradas, hasta dar una vuelta completa pasando por A y por B. En esa forma el lápiz dibuja una elipse. Como la suma de las distancias de la punta del lápiz a los focos es igual a la longitud del hilo y por lo tanto a $\overline{AB}$, resulta que:



La elipse es una curva plana tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos a otros dos llamados focos es igual a su eje mayor.

SEGUNDO MÉTODO: La propiedad anterior nos permite construir una elipse determinando, con el empleo del compás, algunos de sus puntos y uniéndolos con un trazo continuo.

Para ello si $\overline{AB}$ es el eje mayor de la elipse, F y F′ sus focos, tomamos un punto M cualquiera de $\overline{FF'}$ y con centro F y radio $\overline{AM}$ trazamos un arco de circunferencia al que cortamos con otro de centro F′ y radio $\overline{BM}$ obteniendo el punto P de la elipse, puesto que $\overline{FP} + \overline{PF'} = \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$. Repetimos la construcción hasta obtener un número grande de puntos y poder dibujar fácilmente la elipse.



EJERCICIOS. — I) *Calcular la longitud de la circunferencia: a) de* 12 *cm de radio; b) de* 50 *cm de diámetro; c) que sea la suma de otras dos de* 3 *cm y* 8 *cm de radio.*

II) *¿Qué longitud ha recorrido un vehículo, cuyas ruedas tienen* 58 *cm de radio, si cada una de ellas ha efectuado* 1580 *vueltas, durante ese recorrido?*

III) *¿Cuántas vueltas tendrán que dar cada una de las ruedas de un vehículo, de* 1 *m de diámetro, para recorrer un camino de* 3,14 *Km?*

IV) *¿Qué longitud debe tener el radio de una circunferencia para que la longitud de ésta sea: a) el doble de la longitud de otra dada; b) la suma de las de otras dadas; c) l diferencia de las de otras dadas?*

V) *Qué longitud aproximada tiene el radio terrestre si el metro es la diez millonésima parte del cuarto de meridiano terrestre?*

VI) *¿Qué longitud tiene un arco de circunferencia de* 20 *m de radio si el ángulo central vale: a)* 42°; *b)* 58°; *c)* 34° 24′; *d)* 174°; *e)* 138° 30′ 30″; *f)* 215°; *g)* 248° 36′; *h)* 300°; *i)* 315° 18′ 42″; *j)* 1°; *k)* 12′; *l)* 30′ 54″.

VII) *¿Qué longitud en m tiene la «milla marina» si es igual al arco de* 1′ *de meridiano terrestre y el radio de la Tierra tiene, aproximadamente* 6370 *Km?*

VIII) *Calcular el radio de un arco de: a)* 1,57 *m de longitud y* 30° *de ángulo central; b)* 1,57 *m de longitud y* 90° *de ángulo central; c)* 31,4 *m de longitud y* 120° *de ángulo central.*

IX) *Calcular el ángulo central correspondiente a un arco de* 6,28 *m de longitud sabiendo que su radio es de: a)* 4 *m; b)* 20 *m; c)* 6,28 *m; d)* 12,56 *m; e)* 50 *m; f)* 100 *m.*

X) *Calcular la superficie del círculo: a) de* 2 *m de radio; b) de* 11 *m de diámetro; c) doble de otro dado; d) suma de las superficies de otros dos dados; e) diferencia de las superficies de otros dos dados.* (Para la resolución de los ejercicios *c*), *d*) y *e*) aplíquese el Teorema de Pitágoras).

XI) *Calcular el radio del círculo cuya superficie es:* *a*) 12,56 dm^2; *b*) 314 m^2; *c*) 0,7850 m^2; *d*) 0,0314 m^2.

XII) *Calcular la superficie de la corona circular:* *a*) *de radios* R = 80 *cm* *y* *r* = 35 *cm;* *b*) *limitada por las circunferencias de longitudes* 6,28 *m* *y* 0,2512 *m;* *c*) *limitada por las circunferencias inscripta y circunscripta a un exágono regular de* 40 *cm de lado.*

XIII) *Calcular la superficie de un sector circular de radio* r *y ángulo central* n *sabiendo que:* *a*) $r = 30\ m$, $n = 50°$; *b*) $r = 2\ m$, $n = 90°$; *c*) $r = 1\ m$, $n = 135°$; *d*) $r = 50\ cm$, $n = 50° 24'$; *e*) $r = 10\ cm$, $n = 60° 54'$.

XIV) *Calcular el radio de un sector circular de superficie* S *y ángulo central* n *cuando:* *a*) $S = 31{,}4\ m^2$, $n = 36°$; *b*) $S = 1{,}57\ m^2$, $n = 45°$; *c*) $S = 945{,}14\ m^2$ *y* $n = 120° 24'$.

XV) *Calcular el ángulo central corespondiente a un sector circular de superficie* S *y radio* r *cuando:* *a*) $S = 628\ m^2$ *y* $r = 3\ m$; *b*) $S' = 12{,}56\ cm^2$, $r = 5\ cm$; *c*) $S = 0{,}785ú\ m^2$, $r = 6\ m$; *d*) $S = 100\ m^2$, $r = 8\ m$.

XVI) *Calcular la superficie de las aberturas hechas en el frente de una casa sabiendo que ellas son: una puerta de* 2 *m de ancho por* 4 *m de altura y un balcón de* 1,50 *m de ancho por* 2,50 *m de alto, teniendo ambas la forma de un rectángulo seguido de un semicírculo.*

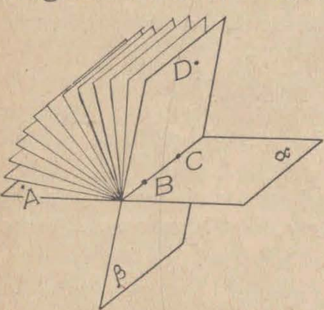
XVII) *Calcular la superficie de una ventana que tiene la forma que resulta de trazar sobre cada uno de los lados de un cuadrado de* 60 *cm de lado un semicírculo con centro en el punto medio del mismo y diámetro igual a la mitad de ese lado, y exterior al cuadrado.*

XVIII) *Dado un segmento* AB *construir el óvalo que tiene ese eje mayor y la elipse de ese mismo eje cuyos focos sean los centros* O *y* O′ *que se utilizan para el trazado del óvalo y comprobar que las dos figuras son distintas.*

CAPITULO VIII

ANGULOS DIEDROS Y TRIEDROS, PRISMAS, PIRAMIDES Y POLIEDROS REGULARES

Angulos diedros. — Dados dos planos que se corten, llamaremos *ángulos diedros* a cada una de las partes en que el espacio queda « dividido » por esos planos.

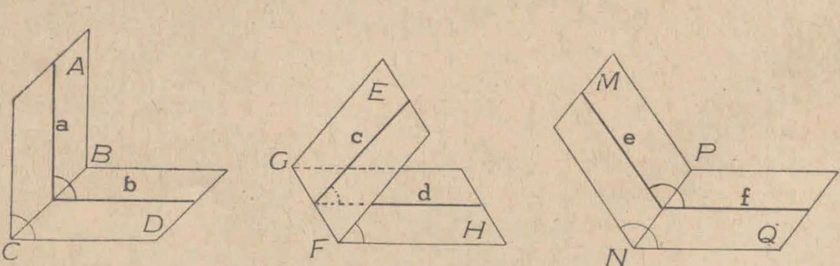


La recta común a los dos planos se llama *arista* del diedro y los semiplanos que ella limita en cada plano se denominan *caras del diedro.*

EJEMPLO: BC es la arista y los semiplanos BCA y BCD son las caras del diedro ABCD.

Sección normal. — DEFINICION. — Si por un punto de la arista de un diedro se trazan, en cada cara, las perpendiculares a dicha arista, se obtiene un ángulo plano que se llama *sección normal* del diedro.

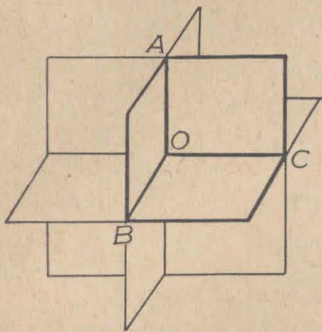
Se dice que un diedro es *agudo, recto* u *obtuso* según que su sección normal sea un ángulo plano agudo, recto u obtuso, respectivamente.



EJEMPLOS: $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ y $\widehat{ef}$ son las secciones normales del diedro recto ABCD, del diedro agudo EFGH y del diedro obtuso MNPQ, respectivamente.

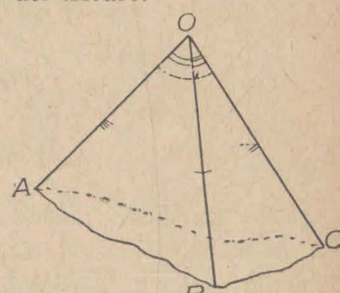
Ejemplos prácticos. — Un cuaderno abierto es un ejemplo de diedro material. Sus caras son las tapas y su arista es el doblez por donde están sujetas las hojas. Las paredes contiguas de un aula son caras de un diedro dentro del cual están los alumnos y los bancos de la misma.

Angulos triedros. — Dados tres planos que pasen por un mismo punto, se llaman *ángulos triedros* a cada una de las ocho partes en que el espacio queda dividido por esos planos.



El punto O común a los tres planos se llama *vértice del triedro,* las semirrectas OA, OB y OC *aristas* y los ángulos planos AOB, BOC y COA se denominan *caras* del triedro.

Ejemplos: En el triedro $\widehat{O}$. ABC, O es el vértice, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ las *aristas* y los ángulos planos $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ y $\widehat{COA}$ son las *caras* del mismo.



Ejemplos prácticos. — En una esquina de una caja de tiza tenemos un ejemplo de triedro material que tiene por caras al fondo de la caja y a las dos caras contiguas que pasan por esa esquina. Lo mismo sucede con los rincones del aula que son triedros cuyas caras son el techo o el piso y dos paredes contiguas. Los alumnos y los bancos están en el interior de esos triedros.

Ejercicios. — I) *Dibujar a pulso ángulos diedros agudos, rectos y obtusos, trazar secciones normales de los mismos.*

II) *Comprobar que las secciones normales de un mismo diedro son iguales.*

III) *Trazar una sección normal del diedro que forman dos paredes contiguas de una habitación.*

IV) *Si se considera el diedro que tiene por caras a las tapas de un cuaderno abierto, ¿cuáles son secciones normales de ese diedro?*

V) *Dibujar ángulos triedros.*

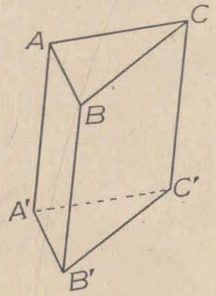
VI) *¿Qué clase de diedros son los de los triedros que se forman en cada una de las esquinas de un aula? ¿Qué figuras son sus caras?*

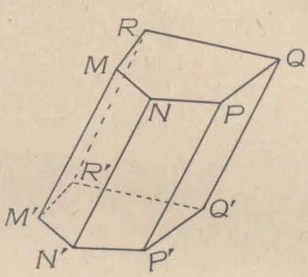
VII) *Comprobar que la suma de las caras de un triedro es menor que* 360°. (Recuérdese que las caras de un triedro son ángulos planos).

VIII) *Comprobar que en todo triedro una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que la diferencia.*

PRISMAS Y PIRAMIDES

Prismas. — Recordemos que los elementos de un *prisma* son: las *bases* que son dos polígonos iguales situados en planos paralelos, las *caras laterales* que son paralelogramos que tienen dos lados opuestos que son lados de las bases y los otros comunes con dos caras laterales. Estos lados se llaman *aristas laterales* del prisma, y los otros *aristas de la base.*





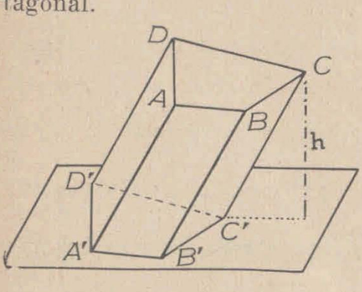
EJEMPLO: En el prisma ABCA'B'C' las bases son $\overset{\triangle}{ABC}$ y $\overset{\triangle}{A'B'C'}$, las caras laterales son los paralelogramos ABB'A', BCC'B' y CAA'C', las aristas laterales son $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ y las de las bases son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ y $\overline{C'A'}$.

CONSECUENCIA. — *Las aristas laterales de un prisma son iguales,* pues son lados opuestos de paralelogramos.

DEFINICIONES. — Se dice que un prisma es *triangular, cuadrangular, pentagonal,* etc. según que sus bases sean *triángulos, cuadriláteros, pentágonos* etc., respectivamente.

EJEMPLOS:

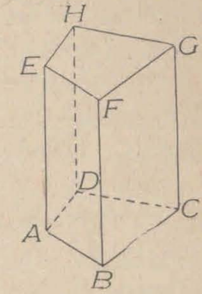
El *prisma* ABCA'B'C' es triangular y el *prisma* MNPQRM'N'P'Q'R' es pentagonal.



DEFINICIÓN. — Se llama *altura* de un prisma a la distancia de un punto de una de las bases al plano de la otra, o sea el segmento de la perpendicular al plano de la base comprendido entre ese punto y ese plano.

EJEMPLO: En el prisma ABCDA'B'C'D' es h su altura.

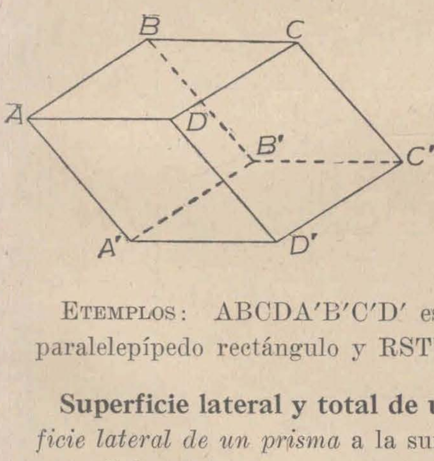
Prismas rectos.— DEFINICIÓN.— Se dice que un *prisma es recto* cuando las aristas laterales son perpendiculares (*) a los planos de las bases, y que es *regular* cuando es recto y sus bases son polígonos regulares.

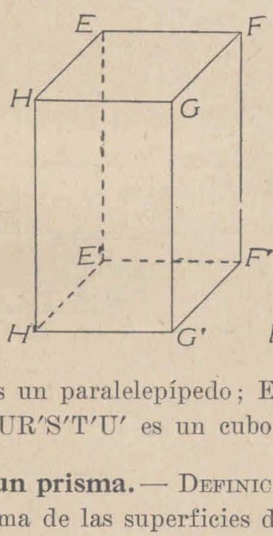


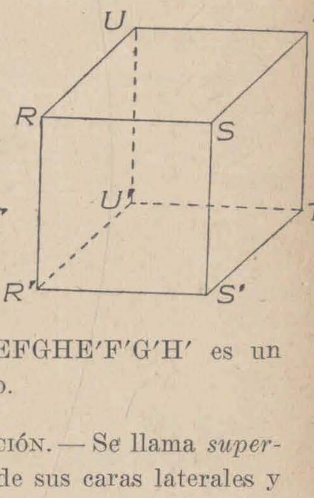
EJEMPLO: El prisma EFGHABCD es recto, pues $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$ son perpendiculares a sus bases.

CONSECUENCIA.—*En un prisma recto la altura es igual a una cualquiera de sus aristas laterales.*

Paralelepípedo. — DEFINICIÓN. — Se llama *paralelepípedo* al prisma cuya base es un paralelogramo; *paralelepípedo rectángulo* cuando es recto y tiene por base a un rectángulo y en el caso particular de que todas sus aristas sean iguales se denomina *cubo*.







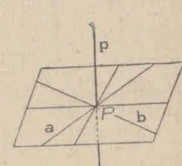
ETEMPLOS: ABCDA′B′C′D′ es un paralelepípedo; EFGHE′F′G′H′ es un paralelepípedo rectángulo y RSTUR′S′T′U′ es un cubo.

Superficie lateral y total de un prisma. — DEFINICIÓN. — Se llama *superficie lateral de un prisma* a la suma de las superficies de sus caras laterales y *superficie total* a la suma de la superficie lateral más las superficies de sus dos bases.

EJEMPLO: La superficie lateral del prisma ABCDA′B′C′D′ es igual *Sup.* ABB′A′ + *Sup.* BCC′B′ + *Sup.* CDD′C′ + *Sup.* DAA′D′ y superficie total es *Sup. lat.* ABCDA′B′C′D′ + 2 *Sup.* ABCD.

(*) Una recta es *perpendicular a un plano* cuando lo corta y es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por el pié, para lo cual basta que lo sea a dos de esas rectas.

EJEMPLO: En la figura *p* es perpendicular al plano *ab* por serlo a *a* y a *b*.



Fórmulas de la superficie lateral y total del prisma recto. — Cuando el prisma es recto no es necesario calcular la superficie de cada una de sus caras laterales por separado, pues hay una fórmula que permite hallar esa superficie lateral mediante una simple multiplicación, como veremos enseguida.

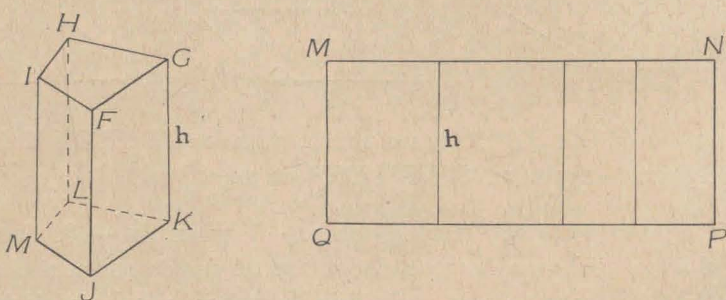
En efecto: consideremos un prisma recto material, de madera por ejemplo, y apliquemos sobre sus caras laterales un trozo de papel lo suficientemente grande para que las recubra totalmente. Si recortamos la parte de papel que sobresale de las bases del prisma a lo largo de las mismas, y extendemos la restante sobre un plano, obtenemos el rectángulo MNPQ que puede tomarse como superficie lateral del prisma considerado, pues se aplica perfectamente sobre ella.

Si observamos que las bases MN y QP del rectángulo MNPQ coinciden al arrollar al mismo sobre el prisma con los contornos de las bases y que los lados $\overline{MQ}$ y $\overline{NP}$ se pueden hacer coincidir a lo largo de una arista de dicho prisma, resulta entonces que:

La superficie lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro P *de su base por su altura h,*

o sea

Superficie lateral del prisma recto $= P \times h$



Teniendo en cuenta la definición de superficie total resulta, llamando S a la superficie de una base:

Superficie total del prisma recto $= P \times h + 2\,S$

El rectángulo MNPQ es el *desarrollo* de la superficie lateral del prisma dado y permite reconstruirlo, como veremos en las aplicaciones prácticas.

Ejemplos. — I) *¿Cuál es la superficie lateral y total de un prisma recto de 1,5 m de altura cuya base es un cuadrado de 0,8 m de lado?*

Solución:

$$\textit{Sup. lat. prisma recto} = \mathrm{P} \times h = 0{,}8\,\mathrm{m} \times 4 \times 1{,}5\,\mathrm{m} = 3{,}2 \times 1{,}5\,\mathrm{m}^2 = 4{,}8\,\mathrm{m}^2$$

y
$$\textit{Sup. total prisma recto} = \textit{Sup. lat.} + 2\,\mathrm{S} = 4{,}8\,\mathrm{m}^2 + (0{,}8)^2\,\mathrm{m}^2 \times 2 = 4{,}8\,\mathrm{m}^2 + 0{,}64\,\mathrm{m}^2 \times 2 = 6{,}08\,\mathrm{m}^2$$

II) *¿Cuál es la superficie lateral y total de un prisma regular exagonal de 1 m de arista de la base, cuya altura es igual al doble del radio de la base?*

Solución. — Siendo $\textit{Sup. lat. prisma regular} = \mathrm{P} \times h = 1\,\mathrm{m} \times 6 \times h$

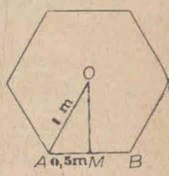
y como en un exágono regular el lado es igual al radio del mismo es $h = 2\,\mathrm{m}$ y por lo

tanto $\textit{Sup. lat. prisma regular} = 1\,\mathrm{m} \times 6 \times 2\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m}^2$.

Para hallar la superficie total es necesario conocer la apotema de la base, pues siendo un polígono regular su superficie es:

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{P} \times a}{2}$$

Si unimos el centro O de la base con el vértice A y con el punto medio M del lado $\overline{\mathrm{AB}}$ obtenemos el triángulo rectángulo AMO del cual conocemos la hipotenusa $\overline{\mathrm{OA}} = 1\,\mathrm{m}$ y el cateto $\overline{\mathrm{AM}} = 0{,}5\,\mathrm{m}$, luego podemos hallar el otro cateto, $\overline{\mathrm{OM}}$ que es la apotega de exágono, mediante el corolario II del Teorema de Pitágoras, así:

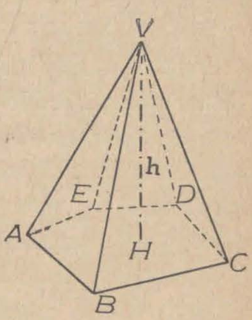


$$a = \overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{1 - 0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}86\ \mathrm{m}$$

Luego
$$\mathrm{S} = \frac{1\,\mathrm{m} \times 6 \times 0{,}86\,\mathrm{m}}{2} = \frac{5{,}16\,\mathrm{m}^2}{2} = 2{,}58\,\mathrm{m}^2$$

y por lo tanto $\textit{Sup. total prisma regular} = 12\,\mathrm{m}^2 + 2{,}58\,\mathrm{m}^2 \times 2 = 17{,}16\,\mathrm{m}^2$.

Pirámides. — Recordemos que los elementos de una *pirámide* son: la *base* que es un polígono cualquiera, las *caras laterales* que son *triángulos* con un vértice común que es el *vértice* de la pirámide. Cada uno de estos triángulos tienen un lado común con la base que son las *aristas de la base* y los otros dos lados comunes con dos caras laterales que son las *aristas laterales* de la pirámide.



Ejemplo: En la pirámide V.ABCDE, V es el vértice, el polígono ABCDE es la base, los triángulos VAB, VBC, VCD, VDE y VEA las caras laterales, $\overline{\mathrm{VA}}$, $\overline{\mathrm{VB}}$, $\overline{\mathrm{VC}}$, $\overline{\mathrm{VD}}$ y $\overline{\mathrm{VE}}$ son las aristas laterales y $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{DE}}$ y $\overline{\mathrm{EA}}$ las aristas de la base.

Definiciones. — Se dice que una pirámide es *triangular, cuadrangular, pentagonal,* etc. según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc., respectivamente.

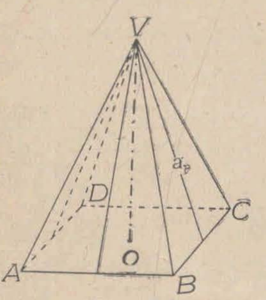
La pirámide triangular se llama también *tetraedro.*

Ejemplo: La pirámide ABCDE es pentagonal.

Definición. — Se llama *altura* de una pirámide a la distancia del vértice al plano de su base.

Ejemplo: h es la altura de la pirámide V . ABCDE.

Pirámide regular. — Definición. — Se dice que una *pirámide es regular* cuando su base es un polígono regular y su vértice pertenece a la perpendicular trazada al plano de la base por el centro de la misma.



Ejemplo: V . ABCD es una pirámide regular porque ABCD es un cuadrado y VO es perpendicular al plano ABCD en el centro O de ABCD.

Consecuencia. — *Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales.*

Apotema de una piramide regular. — Se llama *apotema de una pirámide regular* al segmento que une al vértice con el punto medio de una arista de la base.

En la figura anterior a_p es la apotema de la pirámide.

Superficie lateral y total de una pirámide. — Definición. — Se llama *superficie lateral* de una pirámide a la suma de las superficies de las caras laterales y *superficie total* a la suma de la superficie lateral más la superficie de la base.

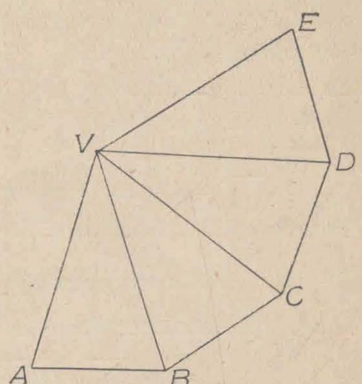
Ejemplo: La superficie lateral de la pirámide V . ABCD es igual a

Sup. $\overset{\triangle}{\mathrm{VAB}}$ + *Sup.* $\overset{\triangle}{\mathrm{VBC}}$ + *Sup.* $\overset{\triangle}{\mathrm{VCD}}$ + *Sup.* $\overset{\triangle}{\mathrm{VDA}}$ y la superficie total es *Sup. lateral* V . ABCD + *Sup.* ABCD.

Fórmulas de las superficies lateral y total de la pirámide regular. — Cuando la pirámide es regular no es necesario calcular la superficie de cada una de sus caras laterales por separado, pues hay una fórmula que permite hallar esa superficie lateral mediante una simple multiplicación, como veremos enseguida.

En efecto: consideremos una pirámide regular material, de madera por ejemplo, y apliquemos sobre sus caras laterales un trozo de papel lo suficientemente grande para que la recubra totalmente. Si recortamos la parte de papel que sobresale de la base de la pirámide y la que sobresale de su vértice, y extendemos la restante sobre un plano, obtenemos la figura VABCD que puede tomarse como superficie lateral de la pirámide considerada, pues se aplica perfectamente sobre ella.

La figura VABCDE es el *desarrollo* de la superficie lateral de la pirámide regular dada, y permite reconstruirla como veremos en las aplicaciones prácticas.



Si observamos que la figura obtenida está formada por triángulos iguales, que tienen por bases las aristas de la base de la pirámide y por alturas a la apotema de la misma. Resulta que la superficie lateral de la pirámide dada se obtiene multiplicando la de uno de estos triángulos por el número de ellos. Así en el ejemplo tomado, tendríamos:

$$\textit{Sup. lat. pir. reg.}\ \mathrm{V\,.\,ABCDE} = \textit{Sup.}\ \overset{\triangle}{\mathrm{VAB}} \times 4 = \frac{\overline{\mathrm{AB}}\,.\,a}{2} \times 4 = \frac{\overline{\mathrm{AB}}\,.\,4}{2} \times a$$

y como $\overline{\mathrm{AB}} \times 4 =$ perímetro P, resulta

$$\boxed{\textit{Superficie lateral de la pirámide regular} = \frac{\mathrm{P} \times a}{2}}$$ o sea:

La superficie lateral de una pirámide regular es igual a la mitad del producto del perímetro de su base por la apotema de la misma.

Teniendo en cuenta la definición de superficie total, resulta

$$\boxed{\textit{Superficie total de la pirámide regular} = \frac{\mathrm{P} \times a}{2} + \mathrm{S}}$$

Ejemplos. — I) *Calcular la superficie lateral y total de una pirámide regular pentagonal de 2 m de arista de la base y 3,2 m de apotema.*

Solución. — $\textit{Sup. lat. pir. reg.} = \dfrac{\mathrm{P} \times a}{2} = \dfrac{2\,\mathrm{m} \times 5 \times 3{,}2\,\mathrm{m}}{2} = 16\,\mathrm{m}^2.$

Para calcular la superficie de la base debemos conocer la apotema de la misma. El cuadro de la página 57 nos indica que debemos multiplicar al lado del pentágono por 0,6882 para obtener su apotema, luego:

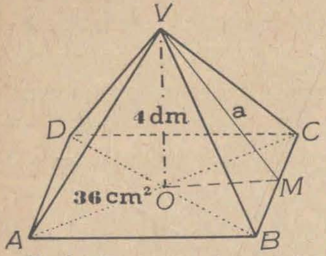
$$\textit{Apotema de la base} = 0{,}6882 \times 2\,\mathrm{m} = 1{,}3764\,\mathrm{m}$$

y tomando el valor redondeado de 1,38 se tiene:

$$\textit{Superficie de la base} = \frac{2\,\mathrm{m} \times 5 \times 1{,}38\,\mathrm{m}}{2} = 6{,}90\,\mathrm{m}^2$$

luego $\textit{Superficie total pir. reg.} = 16\,\mathrm{m}^2 + 6{,}90\,\mathrm{m}^2 = 22{,}90\,\mathrm{m}^2.$

II) *Calcular la superficie lateral y total de una pirámide regular cuadrangular sabiendo que su base tiene 36 dm^2 de superficie y su altura es de 4 dm.*



SOLUCIÓN. —

Siendo *Sup. lat. pir. reg.* $= \dfrac{P \times a}{2} = \dfrac{\overline{AB} \times 4 \times a}{2}$

es necesario calcular el lado $\overline{AB}$ y la apotema a.

Teniendo en cuenta que la superficie de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado, resulta:

$$\overline{AB}^2 = 36 \text{ dm}^2 \quad \text{y extrayendo la raíz da} \quad \overline{AB} = \sqrt{36 \text{ dm}^2} = 6 \text{ dm}.$$

Para calcular la apotema observemos que es la hipotenusa del triángulo rectángulo VOM cuyos catetos conocemos, pues $\overline{VO} = 4$ dm y $\overline{OM} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = 3$ dm.

Luego aplicando el corolario II del teorema de Pitágoras, se tiene:

$$a = \overline{VM} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ dm}$$

por lo tanto: *Superficie lat. pir. reg.* $= \dfrac{6 \text{ dm} \times 4 \times 5 \text{ dm}}{2} = 60 \text{ dm}^2$

y *Superficie total pir. reg.* $= 60 \text{ dm}^2 + 36 \text{ dm}^2 = 96 \text{ dm}^2$.

POLIEDROS REGULARES

Tetraedro regular. — Si sobre un trozo de cartulina dibujamos cuatro triángulos equiláteros iguales, dispuestos en la forma que se indica en la figura 1,

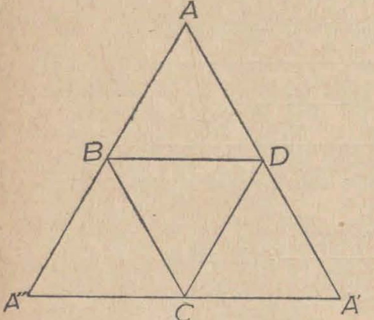


Fig. 1.

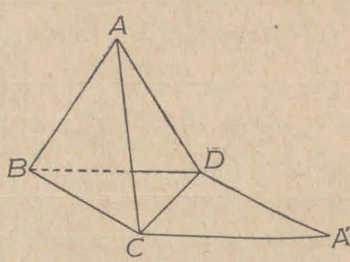


Fig. 2.

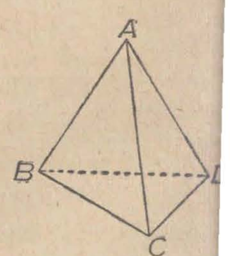


Fig. 3.

y hacemos girar los triángulos ABD, A″BC y A′CD alrededor de $\overline{BD}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente hasta que coincidan AB con A″B, A″C con A′C y A′D con

AD se obtiene una figura 3 que se llama *tetraedro regular*, que tiene: 4 *caras*, 4 *vértices* y 6 *aristas*.

Exaedro regular. — Si dibujamos sobre un trozo de cartulina seis cuadrados iguales dispuestos en la forma que indica la figura 1, y hacemos girar a A′B′FE, FB″C″G, GC′D′H y HDAE alrededor de los lados EF, FG, GH y

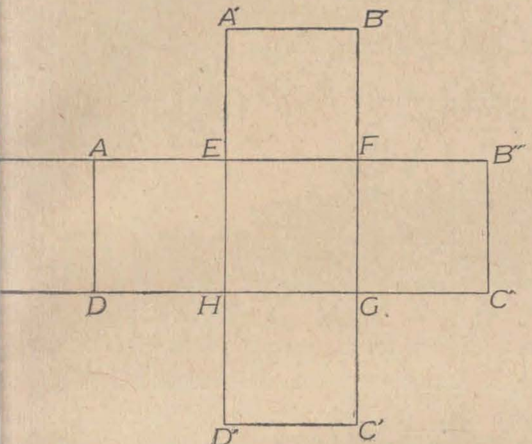


Fig. 1.

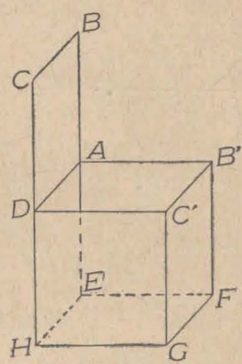


Fig. 2.

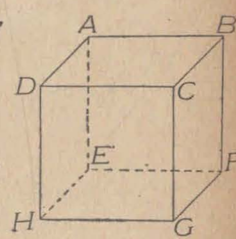


Fig. 3.

HE, respectivamente, hasta que coincidan los lados B′F con FB″, C″G con GC′, HD′ con HD y EA con EA′ se obtiene la figura 2. Si, por último, hacemos girar el cuadrado DCBA alrededor de DA hasta que coincida con el AB′C′D se obtiene una figura 3 que se llama *exaedro regular* o *cubo* que tiene: 6 *caras*, 8 *vértices* y 12 *aristas*.

Octaedro regular. — Si dibujamos sobre un trozo de cartulina ocho triángulos equiláteros iguales dispuestos en la forma que indica la figura 1, separamos de ella la parte ABEDCB′, y hacemos girar los triángulos que la forman alrededor de sus lados comunes $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ de manera que el lado AB coincida con el AB′ y que los otros lados $\overline{BE}$, $\overline{ED}$, $\overline{DC}$ y $\overline{CB'}$ formen un cuadrado, se obtiene la pirámide cuadrangular A.BCDE (fig. 2).

Haciendo la misma operación con la otra parte BC′D′E′FE de la figura 1 se obtiene la pirámide cuadrangular FB′C′D′E′ (fig. 2).

Haciendo coincidir las bases de estas pirámides se obtiene una figura 3 llamada *octaedro regular*, que tiene: 8 *caras*, 6 *vértices* y 12 *aristas*.

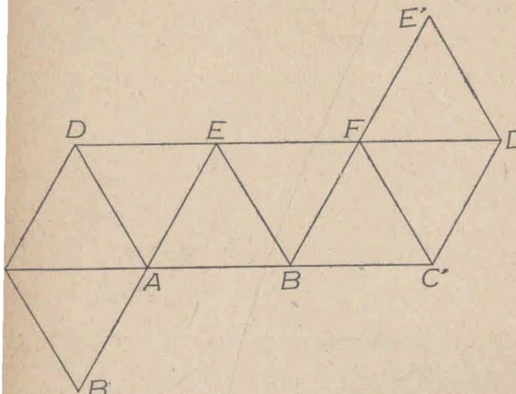


Fig. 1.

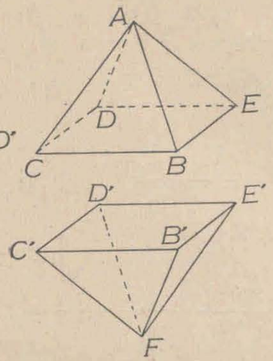


Fig. 2.

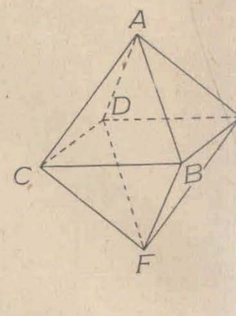


Fig. 3.

Dodecaedro regular. — Dibujamos sobre un trozo de cartulina diez pentágonos regulares iguales dispuestos en la forma que indica la figura 1. Separamos de ella la parte situada a la izquierda de J′I′ y hacemos girar los pen-

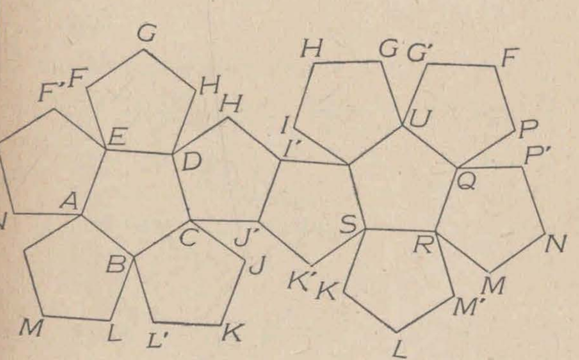


Fig. 1.

Fig. 2′

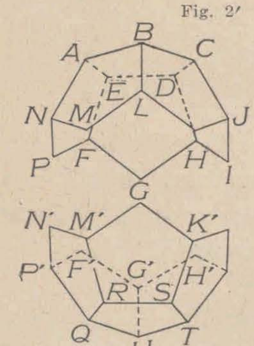


Fig. 2.

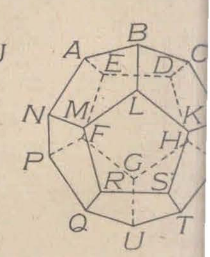


Fig. 3.

tágonos que tienen un lado común con ABCDE alrededor de dichos lados, de manera que $\overline{AN}$ coincida con $\overline{AN'}$, $\overline{BL}$ con $\overline{BL'}$, $\overline{CJ}$ con $\overline{CJ'}$, $\overline{DH}$ con $\overline{DH'}$ y $\overline{EF}$ con $\overline{EF'}$ y obtenemos la figura 2. Haciendo lo mismo con la otra mitad de la figura 1 se obtiene la figura 2′. Haciendo coincidir los bordes de esas dos figuras obtenemos el *dodecaedro regular* que tiene: 12 *caras*, 20 *vértices* y 30*aristas*

Icosaedro regular. — Dibujamos sobre un trozo de cartulina veinte triángulos equiláteros iguales dispuestos en la forma que indica la figura 1. Haciendo girar los triángulos comprendidos entre $\overline{BB'}$ y $\overline{GG'}$, alrededor de sus

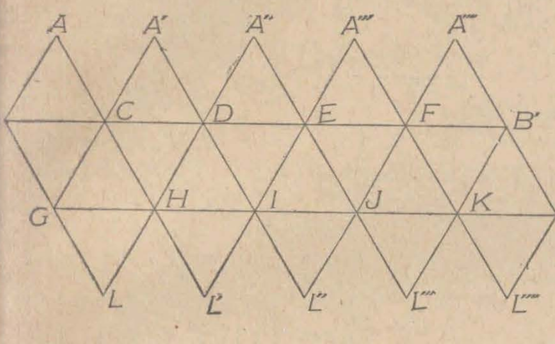


Fig. 1.

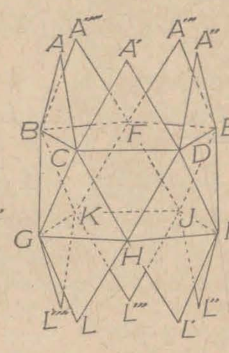


Fig. 2.

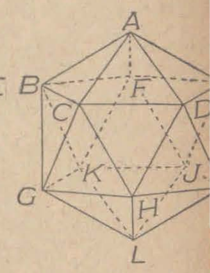


Fig. 3.

lados comunes hasta que $\overline{BG}$ coincida con $\overline{B'G'}$ y de manera que los lados $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FB'}$ formen un pentágono regular lo mismo que los $\overline{GH}$, $\overline{HI}$... KG' obtenemos la figura 2. Hacemos girar los restantes triángulos alrededor de esos lados de manera que $\overline{BA}$ coincida con $\overline{BA''''}$, $\overline{CA}$ con $\overline{CA'}$,... y $\overline{FA'''}$ con $\overline{FA''''}$ y que $\overline{GL}$ coincida con G'L'''', $\overline{HL}$ con $\overline{HL'}$,... y $\overline{KL'''}$ con KL'''' se obtiene la figura 3 llamada *icosaedro regular* que tiene: 20 *caras*, 12 *vértices* y 30 *aristas.*

Observaciones. — I) *Las caras de los poliedros regulares son polígonos regulares e iguales y concurren en igual número en cada vértice.*

II) *El número de caras más el número de vértices de un polígono regular es igual al número de aristas menos dos.*

Puede demostrarse que:

El tetraedro, el exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro regulares son los únicos poliedros regulares existentes.

Superficie de un poliedro regular. — Es igual a la suma de las superficies de sus caras. Como esas caras son polígonos regulares iguales, bastará calcular la superficie de una de ellas y multiplicarla por el número de caras.

Superficie del poliedro regular de n caras = Sup. de una cara $\times$ n.

Ejemplos: *Calcular la superficie de los poliedros regulares que tienen una arista de 10 cm.*

I) *Superficie del tetraedro regular = Sup. de una cara* $\times 4$

y como las caras son triángulos equiláteros se tiene:

$$\textit{Superficie de una cara} = \frac{10 \text{ cm} \times h}{2} = 5 \text{ cm} \times h$$

y como $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8{,}7 \text{ cm}$ (pág. 60, VI)

es $$\textit{Superficie de una cara} = 5 \text{ cm} \times 8{,}7 \text{ cm} = 43{,}5 \text{ cm}^2$$

y $$\textit{Superficie del tetraedro regular} = 43{,}5 \text{ cm}^2 \times 4 = 174 \text{ cm}^2$$

II) *Superficie del exaedro regular = Sup. de una cara* $\times 6$

y como las caras son cuadrados, resulta:

$$\textit{Superficie de una cara} = 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$$

y $$\textit{Superficie del exaedro regular} = 100 \text{ cm}^2 \times 6 = 600 \text{ cm}^2$$

III) *Superficie del octaedro regular = Sup. de una cara* $\times 8$

y como $\textit{Superficie de una cara} = 43{,}5 \text{ cm}^2$, resulta

$$\textit{Superficie del octaedro regular} = 43{,}5 \text{ cm}^2 \times 8 = 348 \text{ cm}^2$$

IV) *Superficie del dodecaedro regular = Sup. de una cara* $\times 12$

y como las caras son pentágonos regulares, se tiene:

$$\textit{Superficie de una cara} = \frac{P \times a}{2} = \frac{10 \text{ cm} \times 5 \times 10 \text{ cm} \times 0.6882}{2} = 172{,}05 \text{ cm}^2$$

$$\textit{Superficie del dodecaedro regular} = 172{,}05 \text{ cm}^2 \times 12 = 2064{,}60 \text{ cm}^2$$

V) *Superficie del icosaedro regular. = Sup. de una cara* $\times 20 =$
$= 43{,}5 \text{ cm}^2 \times 20 = 870 \text{ cm}^2$

Ejercicios. — I) *Dar ejemplos de objetos que puedan tomarse como modelos: a) de prismas; b) de pirámides; c) de paralelepípedos.*

II) *¿Qué forma tienen: a) los ladrillos comunes; b) las baldosas; c) las tablas de una mesa; d) las paredes; e) las aulas?*

III) *¿Qué clase de pirámides son las célebres Pirámides de Egipto?*

IV) *¿Qué figura es la parte superior del obelisco de la Plaza de la República?*

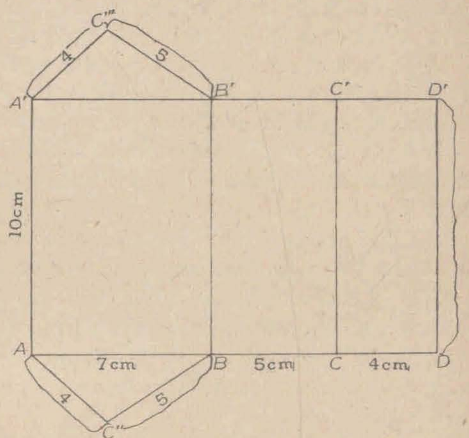
V) Se llaman *diagonales de un paralelepípedo* a los segmentos que unen dos vértices que no pertenecen a la misma cara.

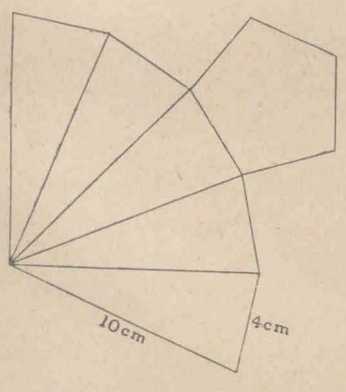
¿Cuántas diagonales tienen un paralelepípedo?

VI) *Calcular el valor de una diagonal de un paralelepípedo rectángulo sabiendo que son iguales y que ese paralelepípedo tiene* 40 *cm de largo,* 30 *cm de ancho y* 37,5 *cm de altura.* (Téngase presente que la diagonal buscada es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene un cateto igual a la altura del paralelepípedo y el otro es una de las diagonales de la base).

VII) *Calcular la diagonal de un cubo de* 10 *cm de arista.* (Téngase en cuenta la observación anterior).

VIII) *Construir un prisma recto triangular de* 10 *cm de altura y tal que los lados de la base sean de* 7 *cm,* 5 *cm y* 4 *cm.* (Tómese un trozo de cartulina y dibújese un rectángulo de 10 cm de altura y (7 + 5 + 4) cm de base. Márquense en ésta y en A′D′ los puntos B y B′, C y C′ tales que sean $\overline{AB} = \overline{A'B'} = 7$ cm, $\overline{BC} = \overline{B'C'} = 5$ cm. Dóblese la cartulina por $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ y péguese $\overline{AA}$ con $\overline{DD'}$ Luego hágase lo mismo con las bases ABC″ y A′B′C‴ y se tendrá el prisma construído.





IX) *Construir una pirámide regular pentagonal de* 10 *cm de arista lateral y* 4 *cm de lado de base.* Dibújense cinco triángulos isósceles de 10 cm de lado igual y 4 cm de base y un pentágono regular de 4 cm de lado, dispuestos en la forma que indica la figura adjunta y procédase como en el caso anterior, plegando oportunamente la figura hecha de dimensiones indicadas.

X) *Calcular la superficie lateral y total de un prisma recto de* 40 *cm de altura que tiene por base: a) un rombo cuyas diagonales son de* 12 *cm y* 16 *cm respectivamente; b) a un triángulo equilátero de* 10 *cm de lado; c) a un triángulo isósceles de* 20 *cm de base y* 12,5 *cm de lado igual; d) un pentágono regular de* 5 *cm de lado; e) un octógono regular de* 4 *cm de lado; f) un decágono regular de* 10 *cm de lado.*

XI) *Calcular la superficie lateral y total de un paralelepípedo rectángulo: a) cuya diagonal es de* 50 *cm, su altura de* 40 *cm y su base tiene los lados iguales; b) de* 15 *dm de largo,* 20 *dm de ancho y altura igual a la diagonal de la base.*

XII) *Calcular la superficie lateral y total de la pirámide regular que tiene por base: a) a un cuadrado de* 2 *m de lado y cuyas aristas laterales son iguales a ese lado; b) a un exágono regular de* 20 *cm de lado, y cuya altura es de* 30 *cm; c) un triángulo equilátero de* 12 *cm de lado y sus aristas laterales son de* 10 *cm; d) un cuadrado de* 25 cm^2 *de superficie y de altura igual a la diagonal del mismo.* (Aplíquese el Teorema de Pitágoras para calcular la apotema).

XIII) *Calcular la superficie lateral y total de la pirámide que tiene por base a un rectángulo de* 10 *cm de largo por* 7,5 *cm de ancho y cuya altura, que pasa por el centro de la base es de* 5 *cm.* (Obsérvese que esta pirámide no es regular).

XIV) *Calcular la superficie lateral y total de un tetraedro regular sabiendo que: a) la arista es igual a* 6 *cm; b) la apotema de una cara es de* 28,87 *cm.*

XV) *Calcular la superficie lateral y total de un exaedro regular sabiendo que: a) su arista es* 5 *cm; b) su diagonal es de* 8 *cm; c) la diagonal de una cara es de* 3 *cm.*

XVI) *Calcular la superficie de un octaedro regular sabiendo que: a) su arista es de* 4 *cm; b) la apotema de una cara es de* 6 *cm; c) una de sus diagonales es de* 8 *cm.* (Obsérvese que la diagonal de un octaedro es diagonal de un cuadrado de lado igual a la arista).

XVII) *Calcular la superficie de un dodecaedro regular sabiendo que: a) la arista es de* 12 *cm; b) la apotema de una de sus caras es de* 68,82 *m.*

XVIII) *Calcular la superficie de un icosaedro regular sabiendo que: a) su arista es de* 5 *cm; b) la apotema de una cara es de* 28,87 *cm.*

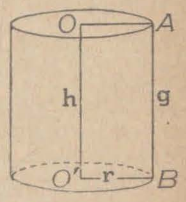
XIX) *Dibujar el poliedro que tiene por vértices: a) los centros de las caras de un cubo; b) los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular.*

CAPITULO IX

CUERPOS REDONDOS

Para tener bien presente las características de los cuerpos redondos, *cilindro, cono* y *esfera,* que los alumnos conocen desde los grados inferiores, por haber visto y construído modelos materiales de los mismos, recordemos que:

El cilindro se puede suponer engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de los lados, llamado *eje.* El lado opuesto al eje se llama la *generatriz* del cilindro, pues ella engendraría la *superficie cilíndrica,* y los otros dos lados del rectángulo engendrarían dos círculos denominados *bases* y de los cuales son *radios.*

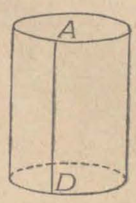


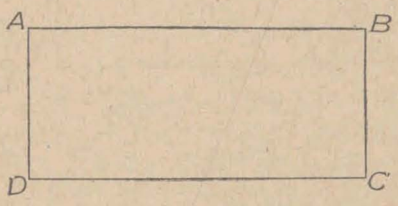
Ejemplo: El rectángulo OABO' engendra el cilindro de eje OO', generatriz $\overline{AB}$ y bases de radio $\overline{OA} = \overline{O'B}$.

La *altura* del cilindro es la distancia entre los centros de las bases y es igual a la generatriz $\overline{AB} = \overline{OO'} = h$.

Las circunferencias de las bases se ven como elipses.

Fórmula de la superficie lateral y total del cilindro. — Consideremos un cilindro material, de madera por ejemplo, y apliquemos sobre su superficie





un trozo de papel lo suficientemente grande para que lo recubra totalmente al hacer coincidir uno de sus bordes con una generatriz y aplicar el resto sobre la superficie hasta volver a la misma generatriz. Si recortamos la parte de papel que sobresale de las bases del cilindro a lo largo de las mismas y la parte que sobresale de la generatriz mencionada, a lo largo de ella, y extendemos la restante sobre un plano, obtenemos el rectánguló ABCD que puede tomarse como superficie lateral del cilindro considerado, pues se aplica perfectamente sobre ella.

El rectángulo es el *desarrollo* de la superficie lateral del cilindro y permite reconstruirlo como veremos en las aplicaciones prácticas.

Si observamos que las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ del rectángulo ABCD, coinciden al arrollar el mismo sobre el cilindro con las circunferencias de sus bases, y que los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ al coincidir lo hacen a lo largo de una generatriz de dicho cilindro, resulta que:

La superficie lateral de un cilindro es igual a la superficie de un rectángulo que tiene por base la circunferencia rectificada de su base y por altura a la del cilindro.

Luego, como la circunferencia rectificada de la base es igual $2.\pi.r$ y la superficie de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura, se tiene:

$$\boxed{\textit{Superficie lateral del cilindro} = 2\,\pi\,.\,r\,.\,h}$$

Teniendo en cuenta que la superficie total es igual a la superficie lateral más la de las bases y que cada una de éstas tiene una superficie igual a $\pi\,r^2$, por ser círculos y por lo tanto las dos una de $2\,\pi\,r^2$, resulta:

$$\boxed{\textit{Superficie total del cilindro} = 2\,.\,\pi\,.\,r\,.\,h + 2\,.\,\pi\,.\,r^2 = 2\,.\,\pi\,.\,r(h + r)}$$

Ejemplos. — I) *Calcular la superficie lateral y total de un cilindro de 5 cm de radio y 20 cm de altura.*

Solución. — *Sup. lat. cilindro* $= 2.\pi.r.h = 2 \times 3{,}14 \times 5 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = 628 \text{ cm}^2$

y *Sup. total cilindro* $= 2\,\pi\,r(h + r) = 2 \times 3{,}14 \times 5 \text{ cm}(20 \text{ cm} + 5 \text{ cm}) =$

$= 31{,}4 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} = 785 \text{ cm}^2$.

II) *Calcular la superficie lateral y total de un cilindro de* 12,56 m^2 *de superficie de la base y altura igual al diámetro de la misma.*

Solución. — Siendo *Sup. lat. cilindro* $= 2\,\pi\,r\,h$

debemos calcular r y h para poder aplicar esa fórmula.

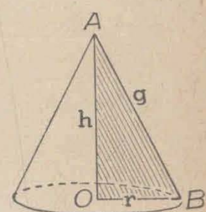
Como *Sup. base* $= \pi r^2 = 12{,}56\ m^2$ resulta, pasando π al segundo miembro y extrayendo la raíz cuadrada, que:

$$r = \sqrt{\frac{12{,}56\ m^2}{3{,}14}} = \sqrt{4\ m^2} = 2\ m \quad \text{luego} \quad h = 2\,r = 4\ m$$

por lo tanto *Sup. lat. cilindro* $= 2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 2\ m \times 4\ m = 50{,}24\ m^2$

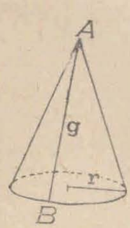
y *Sup. total cilindro* $= 50{,}24\ m^2 + 12{,}56\ m^2 \times 2 = 75{,}36\ m^2$.

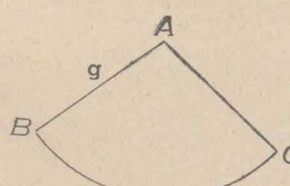
El cono se puede suponer engendrado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de los catetos, llamado *eje.* La hipotenusa se llama la *generatriz* del cono, pues ella engendraría la *superficie cónica,* y el otro cateto engendraría un círculo denominado *base del cono* y de la cual es radio.



EJEMPLO: El triángulo rectángulo AOB engendra el cono de eje $\overline{AO}$, generatriz $\overline{AB} = g$ y bases de radio $\overline{OB} = r$. La altura del cono es la distancia entre el vértice y el centro de la base y es igual al eje $\overline{AO} = h$.

Fórmula de la superficie lateral y total del cono. — Consideremos un cono material, de madera por ejemplo, y apliquemos sobre su superficie un trozo de papel, lo suficientemente grande para que lo recubra totalmente al hacer coincidir uno de sus bordes con una generatriz y aplicar el resto sobre la superficie hasta volver a la misma generatriz. Si recortamos la parte que sobresale de la base del cono, siguiendo la circunferencia de la misma y la parte que sobresale del vértice y de la generatriz antes mencionada, a lo largo de ella, y extendemos la restante sobre un plano, obtenemos el sector circular ABC que puede tomarse como superficie lateral del cono considerado, pues se aplica perfectamente sobre ella.





El sector ABC es el *desarrollo* de la superficie lateral del cono y permite reconstruirla como veremos en las aplicaciones prácticas.

Si observamos que el arco BC coincide con la circunferencia de la base del cono, al arrollar el sector sobre el mismo, y que los radios AB y AC al coincidir lo hacen a lo largo de una generatriz de dicho cono resulta que:

La superficie lateral de un cono es igual a la superficie de un sector circu-

lar que tiene por base un arco de longitud igual a la circunferencia rectificada de la base del cono y por radio a la generatriz del mismo.

Luego como la circunferencia rectificada de la base es igual a $2\pi r$, y la superficie de un sector es igual al producto de la mitad de la base por el radio g, se tiene:

$$\boxed{\textit{Superficie lateral del cono} = \frac{2\pi r \cdot g}{2} = \pi r g}$$

Teniendo en cuenta que la superficie total es igual a la superficie lateral más la de la base y que la del círculo de la base es πr^2, resulta:

$$\boxed{\textit{Superficie total del cono} = \pi r g + \pi r^2 = \pi r (g + r)}$$

EJEMPLOS. — I) *Calcular la superficie lateral y total de un cono de* 0,4 *m de radio y* 0,5 *m de generatriz.*

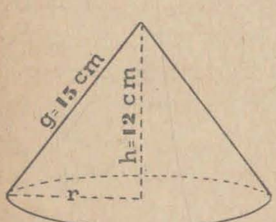
SOLUCIÓN. — *Sup. lat. del cono* $= \pi . r . g = 3{,}14 \times 0{,}4\text{ m} \times 0{,}5\text{ m} = 0{,}628\text{ m}^2$

y *Sup. total del cono* $= \pi r (g + r) = 3{,}14 \times 0{,}4\text{ m} (0{,}5\text{ m} + 0{,}4\text{ m}) =$

$= 3{,}14 \times 0{,}4\text{ m} \times 0{,}9\text{ m} = 1{,}1304\text{ m}^2$

II) *Calcular la superficie lateral y total de un cono de* 15 *cm de generatriz y* 12 *cm de altura.*

SOLUCIÓN. — Siendo *Sup. lat. cono* $= \pi r . g = 3{,}14 \times r \times 15\text{ cm}$



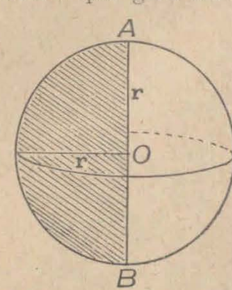
debemos calcular r. Para ello basta observar que es un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $g = 15$ cm y el otro cateto es $h = 12$ cm. Aplicando el corolario del Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$r = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9\text{ cm}$$

luego *Sup. lat. cono* $= 3{,}14 \times 9\text{ cm} \times 15\text{ cm} = 423{,}90\text{ cm}^2$

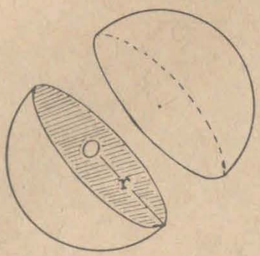
y *Sup. total cono* $= \pi r (g + r) = 3{,}14 \times 9\text{ cm} (15\text{ cm} + 9\text{ cm}) = 687{,}24\text{ cm}^2$.

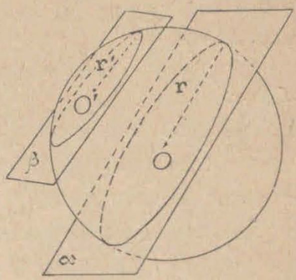
La esfera se puede suponer engendrada por un semicírculo que gira alrededor de uno de sus diámetros. La semicircunferencia correspondiente engendraría la *superficie esférica*. El centro y el radio del semicírculo tomado se llaman *centro* y *radio*, respectivamente, de la esfera y de la superficie esférica.



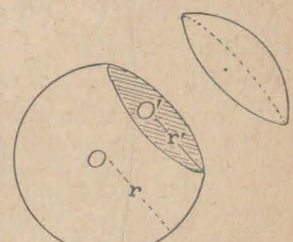
EJEMPLO: El semicírculo de centro O y de radio $\overline{OA} = r$ engendra la esfera de centro O y radio r.

Si tomamos una esfera material, de jabón por ejemplo, y la cortamos de un solo golpe mediante un cuchillo, de manera que éste pase por el centro, la esfera





queda dividida en dos partes llamadas *hemisferios*, y en cada una de éstas hay un círculo, que puede verificarse que tienen por centro y radios a los de la esfera; razón por la cual se dice que es un *círculo máximo* de la misma.



Cualquier otro corte hecho en forma análoga a la anterior da lugar a la formación de círculos máximos, en cambio los cortes hechos sin que el cuchillo pase por el centro, dividen a la esfera en dos partes, llamadas *segmentos esféricos*, en los que se notan círculos de centro distinto del de la esfera y de radios menores que los de ésta, por lo cual se denominan *círculos menores*.

Si consideramos, en cambio, una esfera geométrica no podemos *cortarlas* efectivamente, pero lo observado en los ejemplos anteriores nos permite comprender que:

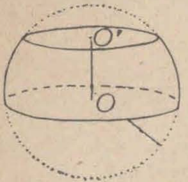
Los puntos comunes a una esfera y a un plano forman un círculo, que tiene el mismo centro y radio que el de la esfera si dicho plano pasa por su centro, tienen centro distinto de éste y radio menor que aquél en cualquier otro caso. Eso suele decirse, brevemente, así:

Las secciones de una esfera con un plano son círculos, máximos o menores según que el plano pase o no por el centro.

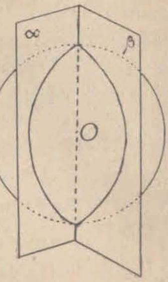
El plano se llama *secante*.

En las figuras anteriores las circunferencias se ven como elipses.

Otras figuras que se pueden obtener de una esfera son las siguientes:



Segmento bibásico se llama así a la parte de esfera comprendida entre dos planos secantes paralelos.

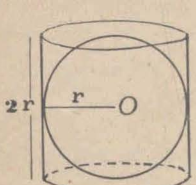


Cuña esférica es la parte de esfera interior a un ángulo diedro cuya arista pasa por el centro de la misma.

Si en lugar de una esfera se considera una superficie esférica, se obtienen las figuras denominadas *circunferencias máximas y menores, casquete y zonas esféricas y huso esférico* como correspondientes a los círculos máximos y menores, segmentos esféricos y segmentos bibásicos y cuña, respectivamente.

Fórmula de la superficie de una esfera. — Como no es posible recubrir mediante una hoja de papel, la superficie de una esfera material, sin que ese papel sufra arrugas o roturas, se pueden hacer otras experiencias físicas para hallar prácticamente una superficie *desarrollable,* es decir, extensible sobre un plano, que se pueda tomar como superficie de la esfera.

Así, si tomáramos una esfera material hecha con una lámina delgada, hoja de lata por ejemplo, y un cilindro del mismo material desprovisto de sus bases, de radio igual al de la esfera y de altura igual al diámetro de ésta, podríamos comprobar, mediante una balanza, que tienen el mismo peso, es decir que:



La superficie de una esfera es igual a la superficie lateral de un cilindro de radio igual al de la esfera y de altura igual al diámetro de la misma, o sea:

Superficie esfera radio r = *Sup. lat. cilin. radio* r *y alt.* $2r$.

Luego se tiene de acuerdo con la fórmula de su superficie lateral:

Superficie de la esfera de radio $= 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

Observación. — Teniendo en cuenta que πr^2 es la superficie de un *círculo máximo,* resulta que:

La superficie de una esfera es igual al cuádruplo de la de uno de sus círculos máximos.

EJEMPLOS. — I) *Calcular la superficie de una esfera de 9 cm de radio.*

SOLUCIÓN. — *Superficie de la esfera* $= 4\pi r^2 = 4 \times 3{,}14 \times 9^2 \text{ cm}^2 =$

$$= 4 \times 3{,}14 \times 81 \text{ cm}^2 = 1017{,}36 \text{ cm}^2.$$

II) *Calcular la superficie de una esfera cuya circunferencia máxima tiene* 3,14 *dm de longitud.*

SOLUCIÓN. — Siendo *Superficie de la esfera* $= 4\pi r^2$

debemos calcular r para poder aplicar la fórmula.

Como la *Longitud de la circunferencia* $= 2\pi r = 3{,}14$ dm

pasando $2\pi = 2 \times 3{,}14 = 6{,}28$ al segundo miembro da:

$$r = \frac{3{,}14 \text{ dm}}{6{,}28} = 0{,}5 \text{ dm} = 50 \text{ cm}$$

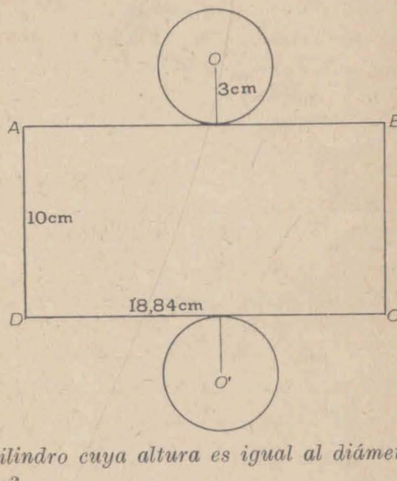
luego *Superficie de la esfera* $= 4 \times 3{,}14 \times 50^2 \text{ cm}^2 = 4 \times 3{,}14 \times 2500 \text{ cm}^2 = 31400 \text{ cm}^2$

EJERCICIOS. — I) *Calcular la superficie lateral y total de un cilindro de* 35 *cm de altura y* 8 *cm de diámetro de base.*

II) *Hallar la superficie total de un cilindro de* 3,2 *dm de altura sabiendo que su superficie lateral es de* 12,56 *dm*^{2}.

III) *Construir un cilindro de* 10 *cm de altura y* 3 *cm de radio.*

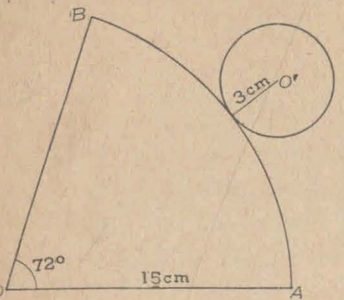
Se dibuja sobre un trozo de cartulina un rectángulo ABCD de 10 cm de altura y $2 \times 3{,}14 \times 3$ cm $= 18{,}84$ cm de base. Se recorta este rectángulo y se dobla en forma tal que BC coincida con AD, en cuyo caso AB y CD forman dos circunferencias iguales de 3 cm de radio, con las que se hacen coincidir las circunferencias de dos círculos de ese mismo radio.



IV) *Calcular la superficie lateral y total del cilindro cuya altura es igual al diámetro de su base y ésta tiene una superficie de* 28,26 *cm*^{2}.

V) *¿Cuánto costará el revoque de la pared de un pozo cilíndrico de* 1,60 *m de diámetro interno y* 15 *m de profundidad si se paga* 2,80 $ *por el m*^{2} *de superficie revocada?*

VI) *¿Cuántas hojas de papel dorado de* 0,44 *m de largo por* 0,25 *m de ancho se necesitarán para recubrir la superficie lateral de una columna cilíndrica de* 1,80 *m de altura y* 0,36 *m de diámetro?*



VII) *Construir un cono de* 15 *cm de generatriz y* 3 *cm de radio.*

Se construye sobre un trozo de cartulina un sector circular AOB de 15 cm de radio y cuyo ángulo cengtral AOB lo calculamos teniendo en cuenta que la longitud de su base AB es igual a la de la circunferencia de la base del cono, luego como:

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi\, r\, n}{180},$$ pasando $\pi\, r$ y 180° al otro miembro da

$$n = \frac{180° \,.\, \overset{\frown}{AB}}{r \,.\, \pi} = \frac{180° \,.\, 2 \times \pi \,.\, 3 \text{ cm}}{15 \text{ cm} \times \pi} = \frac{180° \,.\, 2 \,.\, 3}{15}$$

$$n = 12° \times 2 \times 3 = 72°$$

Luego se recorta el sector así construído y se dobla en forma tal que $\overline{OA}$ coincida con $\overline{OB}$, en cuyo caso su base forma una circunferencia de 3 cm de radio, con la que hacemos coincidir la de un círculo de ese mismo radio, que es la base, para obtener el cono pedido.

VII) *Calcular la superficie lateral y total del cono del ejercicio anterior.*

IX) *Calcular la superficie lateral y total de un cono de* 8 *cm de generatriz y* 12,56 cm^2 *de superficie de base.*

X) *Calcular la superficie lateral y total de un cono de* 10 *cm de altura y* 7,5 *cm de radio de base.*

XI) *Calcular la superficie lateral y total de un cono de* 10 *cm de altura sabiendo que el diámetro de su base es igual a su generatriz.*

XII) *Calcular la superficie total de un cono de* 3 *cm de radio cuya superficie lateral es de* 94,20 cm^2.

XIII) *Calcular la superficie de una esfera: a) de* 23 *cm de radio; b) de* 12,56 *dm de circunferencia máxima; c) de* 28,26 cm^2 *de superficie de círculo máximo.*

XIV) *Calcular la longitud de la circunferencia máxima de una esfera cuya superficie es* 113,04 cm^2 *de superficie.*

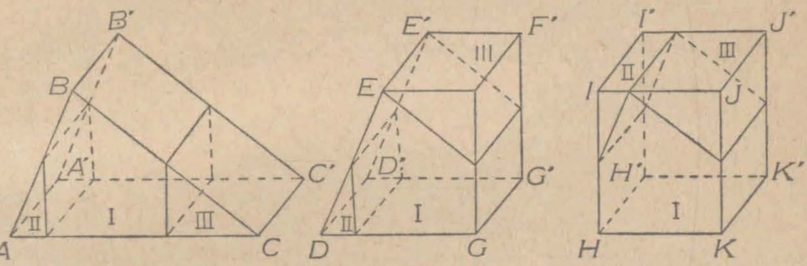
XV) *Calcular la superficie de un círculo menor de una esfera de* 10 *cm de radio sabiendo que la distancia de su centro al de la esfera es de* 8 *cm.*

XVI) *Si se supone esférica a la Tierra, ¿qué clase de círculos son: a) los meridianos; b) los paralelos; c) el Ecuador?*

CAPILULO X

VOLUMENES DE LOS POLIEDROS Y DE LOS CUERPOS REDONDOS

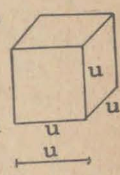
Diremos que *dos poliedros tienen el mismo volumen* cuando se los puede descomponer en el mismo número de poliedros respectivamente iguales.



Ejemplo: Los poliedros de la figura son equivalentes por ser sumas de los prismas I, II y III.

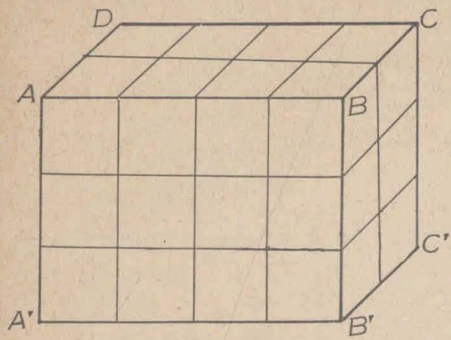
Unidad de volumen. — Tomaremos como *unidad de volumen* al volumen de un cubo que tenga por arista a la unidad de longitud.

En el sistema métrico decimal la unidad de volumen es el *metro cúbico.*



Ejemplo: Si el segmento u es la unidad de longitud el volumen del cubo de arista u es la unidad de volumen.

Valor del volumen de un paralelepípedo rectángulo. — Hallar el valor del volumen de un paralelepípedo rectángulo, es encontrar el número de unidades de volumen que contiene.



Sea, por ejemplo, hallar el volumen del paralelepípedo rectángulo ABCDA'B'C'D' de 3 cm de altura, cuya base tiene 4 cm de largo y 2 cm de ancho.

Dividiendo el largo, el ancho y el alto del paralelepípedo en 4, 2 y 3 partes iguales, respectivamente, y trazando por los puntos de división planos paralelos a las caras, se obtienen tres capas paralelas a las bases formadas por cuatro filas de dos cubos cada una, o sea, el paralelepípedo considerado contiene $4 \times 2 \times 3 = 24$ cubos de 1 cm^3 de volumen. Observando que

$4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 4 \times 2 \times 3 \text{ cm}^3$ (ver *Arit.*, pág. 84), resulta:

Vol. paral. rectg. ABCDA'B'C'D' $= 4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$, lo que nos dice que:

El volumen del paralelepípedo rectángulo dado es igual al producto del largo por el ancho por el alto, expresados en la misma unidad.

Esta fórmula es general y por lo tanto aplicable a los casos en que el largo, ancho y alto no tengan un número entero de unidades, como sucede en el ejemplo siguiente.

Ejemplo II. — *Hallar el volumen de un paralelepípedo rectángulo cuyo largo es 5,8 cm, su ancho es de 2,5 cm y su altura es de 7,2 cm.*

Como un centímetro no está contenido en los datos un número entero de veces, y en cambio lo está un milímetro, tomamos a éste como unidad de longitud y al 1 mm^3 como unidad de volumen, y se tiene:

$$\textit{Vol. paral. rectg} = 58 \text{ mm} \times 25 \text{ mm} \times 72 \text{ mm} = 104\,400 \text{ mm}^3 = 104{,}400 \text{ cm}^3.$$

En la práctica se obtiene este mismo resultado multiplicando directamente los datos. Así tendríamos:

$$\textit{Vol. paral. rectg.} = 5{,}8 \text{ cm} \times 2{,}5 \text{ cm} \times 7{,}2 \text{ cm} = 104{,}4 \text{ cm}^3.$$

En resumen; llamando l, a y h al largo, al ancho y al alto, respectivamente, resulta:

Volumen del paralelepípedo rectángulo $= l \times a \times h$

Como $l \times a = \mathrm{S}$ es igual a la superficie de la base del paralelepípedo, la fórmula anterior se escribe también así:

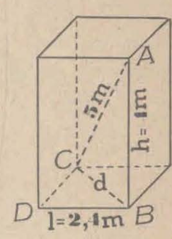
Volumen del paralelepípedo rectángulo $= \mathrm{S} \times h$	que se lee:

El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de la superficie de la base por la altura.

Ejemplo I. — *Calcular el volumen de un paralelepípedo rectángulo sabiendo que su diagonal es de 5 m, su altura es de 4 m y una de las aristas de la base es de 2,4 m.*

Solución. — Siendo *Vol. paral.* $= l.a.h = 2{,}4\,\mathrm{m}.a.4\,\mathrm{m}$

Para hallar a observemos que es el cateto de un triángulo rectángulo CDB cuya hipotenusa es la diagonal de la base y el otro cateto es $l = 2{,}4$ m. Luego por el corolario del Teorema de Pitágoras, se tiene:



$$\mathrm{CD} = a = \sqrt{d^2 - (2{,}4)^2} = \sqrt{d^2 - 5{,}76}$$

Para calcular d observamos que es un cateto del triángulo rectángulo ABC cuya hipotenusa es la diagonal del paralelepípedo y el otro cateto es la altura del mismo, luego

$$d = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

y por lo tanto $$a = \sqrt{d^2 - 5{,}76} = \sqrt{9 - 5{,}76} = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8\,\mathrm{m}$$

Luego *Volumen paral. rectg.* $= 2{,}4\,\mathrm{m} \times 1{,}8\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m} = 17{,}28\,\mathrm{m}^3$.

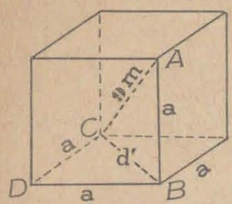
Fórmula del volumen del cubo.—Siendo el cubo un paralelepípedo rectángulo en el cual el largo, el ancho y el alto son iguales a la arista del mismo, resulta, llamando a a esa arista:

Volumen del cubo $= a \times a \times a = a^3$	es decir:

El volumen de un cubo es igual al cubo de su arista.

Ejemplo: *Calcular el volumen de un cubo cuya diagonal vale 9 m.*

Solución. — Siendo *Volumen del cubo* $= a^3$, debemos calcular su arista. Para ello tengamos presente que en el triángulo rectángulo ABC es



$$9^2 = d'^2 + a^2$$

y en el triángulo CDB es $\quad d'^2 = a^2 + a^2 = 2\,a^2$

luego $\quad 81 = 2\,a^2 + a^2 = 3\,a^2$

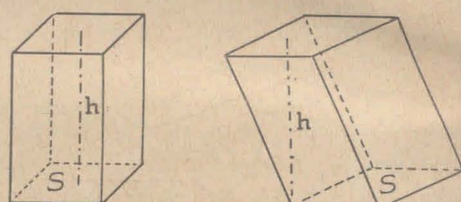
y pasando 3 al primer miembro resulta

$a^2 = \dfrac{81}{3} = 27$ y extrayendo la raíz cuadrada da $a = \sqrt{27} = 5{,}19$ m

y por lo tanto $\quad$ *Volumen del cubo* $= (5{,}19\ \mathrm{m}^3) = 139{,}7984\ \mathrm{m}^3$.

Volumen de un paralelepípedo cualquiera. — Puede demostrarse, y los alumnos que sigan estudios secundarios lo harán en cuarto año, que:

El volumen de un paralelepípedo cualquiera es igual al de un paralelepípedo rectángulo que tenga la misma altura, y base de igual superficie; resulta recordando la fórmula que da el volumen de este último que



$$\boxed{\textit{Volumen del paralelepípedo} = \textit{Sup. base} \times \textit{altura} = \mathrm{S} \times h}$$

La propiedad anterior puede comprobarse prácticamente tomando los dos paralelepípedos de la misma sustancia y verificando mediante una balanza que sus pesos son iguales.

Ejemplo: *Calcular el volumen de un paralelepípedo oblícuo de 2,20 m de altura sabiendo que su base es un rectángulo de 3,8 m de largo por 2,5 m de ancho.*

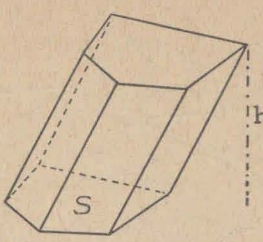
Solución. — Siendo *Volumen paral.* $= \mathrm{S} \times h = \mathrm{S} \times 2{,}20$ m

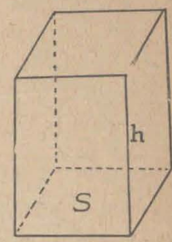
y como la base es un rectángulo su superficie es $\mathrm{S} = 3{,}8\ \mathrm{m} \times 2{,}5\ \mathrm{m} = 9{,}50\ \mathrm{m}^2$

luego $\quad$ *Volumen paralelepípedo* $= 9{,}50\ \mathrm{m}^2 \times 2{,}20\ \mathrm{m} = 20{,}90\ \mathrm{m}^3$.

Fórmula del volumen del prisma. — Puede demostrarse teóricamente y comprobarse experimentalmente con una balanza, como indicamos para el paralelepípedo, que:

El volumen de un prisma cualquiera es igual al de un paralelepípedo rectángulo que tenga la misma altura y por base un rectángulo de igual superficie que la base del prisma; por lo que resulta, recordando la fórmula del volumen del paralelepípedo rectángulo, que:





Volumen del prisma = *Superficie base* × *altura* = $S \times h$

o sea:

El volumen de un prisma es igual al producto de la superficie de la base por la altura.

Ejemplos.— I) *Calcular el volumen de un prisma cuya base es un cuadrilátero de* 6 m^2 *de superficie y su altura es de* 2,8 *m.*

Solución. — *Volumen prisma* = $S \times h = 6 \text{ m}^2 \times 2{,}8 \text{ m} = 16{,}8 \text{ m}^3$.

II) *Calcular el volumen de un prisma triangular de* 1,40 *m de altura cuya base es un triángulo isósceles de* 80 *cm de base y* 50 *cm de lado igual.*

Solución. — Siendo *Volumen prisma* = $S \times h = S \times 1{,}40 \text{ m}$

y como la base es un triángulo es $S = \dfrac{b \times h'}{2} = \dfrac{80 \text{ cm} \times h'}{2} = 40 \text{ cm} \times h'$

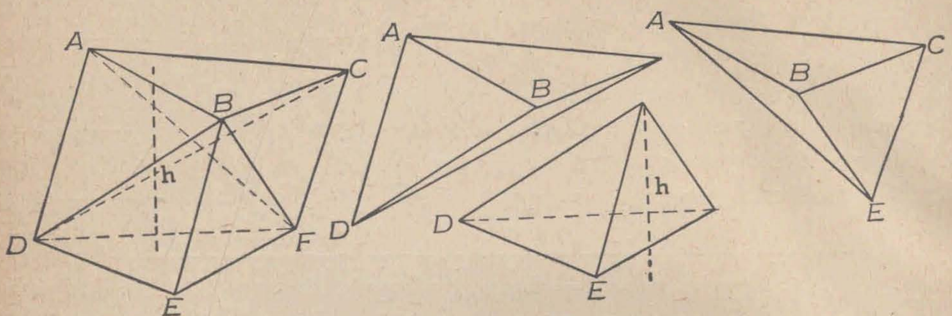
la altura h' la calculamos por el corolario del Teorema de Pitágoras procediendo como en el ejercicio de la página 61, VII, y nos da

$$h' = \sqrt{50^2 - 40^2} = \sqrt{2500 - 1600} = \sqrt{900} = 30 \text{ cm}$$

Luego $S = 40 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} = 1200 \text{ cm}^2$ y por lo tanto

$$\textit{Volumen prisma} = 0{,}1200 \text{ m}^2 \times 1{,}40 \text{ m} = 0{,}168 \text{ m}^3.$$

Fórmula del volumen de la pirámide triangular. — Si tomamos un prisma triangular cualquiera ABCDEF y lo dividimos en la forma que indica la figura obtenemos tres pirámides que puede demostrarse que tienen el mismo volumen. Prácticamente puede comprobarse lo anterior tomando un prisma



triangular, de jabón por ejemplo, dividiéndolo con un cuchillo en la forma indicada en la figura y comprobando que dos cualesquiera de las pirámides obtenidas tienen el mismo peso.

Tomando una de esas pirámides, la que tiene por base la del prisma y la misma altura que éste, resulta que su volumen es la tercera parte del del prisma, o sea:

El volumen de una pirámide triangular es la tercera parte del volumen del prisma triangular de igual base y altura.

Recordando la fórmula del volumen del prisma, se tiene:

$$\boxed{\textit{Volumen pirámide triangular} = \frac{1}{3} \,.\, \textit{Sup. base} \times \textit{altura} = \frac{1}{3}\ \mathrm{S} \times h}$$

Ejemplo: *Calcular el volumen de una pirámide triangular de* 3 *m de altura sabiendo que su base es un triángulo equilátero de* 1 *m de lado.*

Solución. — Siendo $\textit{Vol. pirámide} = \frac{1}{3}\ \mathrm{S} \times h = \frac{1}{3}\ \mathrm{S} \times 3\ \mathrm{m}$

debemos calcular S. Como $S = \dfrac{b \times a}{2} = \dfrac{1\,\text{m} \times a}{2} = 0{,}5\,\text{m} \times a$; calculamos a pro
cediendo como indicamos al resolver el problema de la página y tenemos:

$$a = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{1 - 0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}86$$

luego $S = 0{,}5\,\text{m} \times 0{,}86\,\text{m} = 0{,}430\,\text{m}^2$ y por lo tanto:

$$\textit{Volumen pirámide} = \frac{1}{3}\,0{,}43\,\text{m}^2 \times 3\,\text{m} = 0{,}43\,\text{m}^3.$$

$\sqrt{0{,}75}$	0,86
64	
110'0	110 : 16 = 6
99 6	166 × 6 = 996
10 4	

Fórmula del volumen de una pirámide cualquiera. — Dada una pirámide cualquiera puede demostrarse teóricamente y comprobarse experimentalmente con una balanza, como indicamos para el paralelepípedo (pág. 96), que:

El volumen de una pirámide cualquiera es igual al de una pirámide triangular que tenga la misma altura y por base un triángulo de igual superficie que la base de la primera pirámide, por lo que resulta que:

$$\boxed{\textit{Volumen de la pirámide} = \frac{1}{3}\,\textit{Sup. base} \times \textit{altura} = \frac{1}{3}\,S \times h}$$ o sea:

El volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto de la superficie de su base por su altura.

Ejemplo: *Calcular el volumen de una pirámide regular cuadrangular sabiendo que el lado de la base es de 4 m y las caras laterales son triángulos equiláteros.*

Solución. — Siendo $\textit{Vol. pirámide.} = \frac{1}{3}\,S \times h = \frac{1}{3}\,4^2\,\text{m}^2 \times h = \frac{1}{3}\,16\,\text{m}^2 \times h.$

Para calcular h, *observamos* (fig. pág. 78) que es un cateto del triángulo rectángulo VOA cuya hipotenusa es la arista lateral de 4 m y el cateto OA es la mitad de la diagonal del cuadrado base; luego

$$h = \sqrt{4^2 - \overline{OA}^2} \quad \text{y como} \quad \overline{OA}^2 = \left(\frac{\overline{BA}}{2}\right)^2 = \frac{\overline{BA}^2}{4} = \frac{4^2 + 4^2}{4} = \frac{16 + 16}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

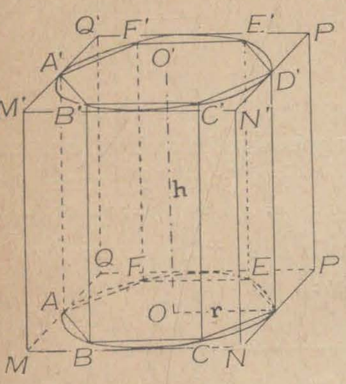
es $h = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8} = 2{,}8\,\text{m}$

luego $\textit{Vol. pirámide} = \frac{1}{3}\,16\,\text{m}^2 \times 2{,}8\,\text{m} = 14{,}93\,\text{m}^3$

$\sqrt{8}$	2,8
4	
40'0	40 : 4 = 8
38 4	48 . 8 = 384
16	

VOLUMEN DE LOS CUERPOS REDONDOS

Fórmula del volumen del cilindro. — Consideremos un cilindro de radio r y altura h e inscribamos en él el prisma regular ABCDEFA′B′C′D′E′F′ y circunscribamos el prisma regular MNPQM′N′P′Q′ cuyas bases son polígonos regulares inscriptos y circunscriptos, respectivamente, a las bases del cilindro dado.



Si se tiene en cuenta que los prismas inscriptos y circunscriptos que tienen por bases a los polígonos regulares que resultan de duplicar sucesivamente el número de lados de los polígonos de las bases, puede observarse que, como esos polígonos tienden a confundirse con las circunferencias de las bases del cilindro, los prismas mencionados tienden a confundirse con dicho cilindro, en forma tal que éste puede considerarse también como un prisma especial. Luego, el volumen de un cilindro se podrá hallar de la misma manera que el de un prisma, o sea:

Volumen del cilindro $=$ *Superficie de la base* $\times$ *altura* $= \pi r^2 \times h$

o sea:

El volumen de un cilindro es igual al producto de la superficie de su base por su altura.

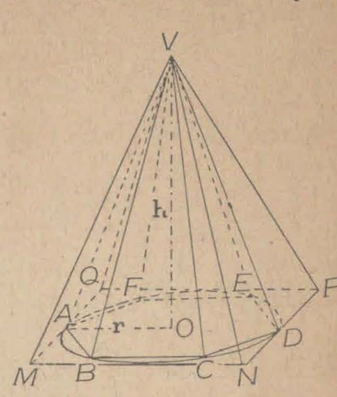
EJEMPLO: *Calcular el volumen de un cilindro de* 30 *cm de radio y* 50 *cm de altura.*

SOLUCIÓN:

Volumen cilindro $= \pi r^2 h = 3{,}14 \times 30^2 \text{ cm}^2 \times 50 \text{ cm} = 3{,}14 \times 900 \text{ cm}^2 \times 50 \text{ cm} =$

$= 1413 \text{ cm}^3$

Fórmula del volumen del cono. — Consideremos un cono de radio r y altura h e inscribimos en él la pirámide regular V . ABCDEF y circunscribamos la pirámide regular V . MNPQ, cuyas bases son polígonos regulares inscriptos y circunscriptos, respectivamente, a la base del cono dado. Si se tiene en cuenta que las pirámides inscriptas y circunscriptas que tienen por bases los polígonos regulares que resultan de duplicar sucesivamente el número de lados de los polígonos de las bases, puede observarse que, como esos polígonos tienden a confundirse con la circunferencia de la base del cono, las pirámides mencionadas tienden a confundirse con dicho cono, en forma tal que éste puede considerarse también como una pirámide especial. Luego el volumen de un cono se podrá hallar de la misma manera que el de una pirámide, o sea:



$$\boxed{\textit{Volumen del cono} = \frac{1}{3}\ \textit{Superficie de la base} \times \textit{altura} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$ o sea:

El volumen de un cono es igual a un tercio del producto de la superficie de su base por su altura.

EJEMPLOS. — I) *Calcular el volumen de un cono de 3 m de radio y 10 cm de altura.*

SOLUCIÓN. — *Volumen del cono* $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} . 3{,}14 \times 3^2\ \text{cm}^2 \times 10\ \text{cm} =$

$$= \frac{1}{3}\ 3{,}14 \times 9\ \text{cm}^2 \times 10\ \text{cm} = 94{,}2\ \text{cm}^3.$$

II) *Calcular el volumen de un cono de 10 cm de generatriz y 6 cm de radio.*

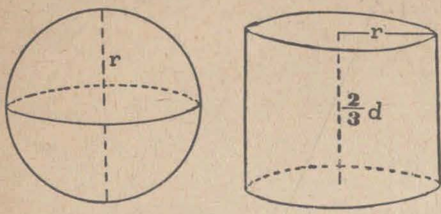
SOLUCIÓN.— Siendo *Volumen del cono* $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi . 6^2\ \text{cm}^2\ h$

y como h es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la generatriz y el otro cateto es el radio, luego:

$$h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8\ \text{cm},$$ por lo tanto:

Volumen del cono $= \frac{1}{3}\ 3{,}14 \times 6^2\ \text{cm}^2 \times 8\ \text{cm} = \frac{1}{3}\ 3{,}14 \times 36\ \text{cm}^2 \times 8\ \text{cm} = 301{,}44\ \text{cm}^3$

Fórmula del volumen de la esfera. —Si tomamos una esfera material, de arcilla por ejemplo, y un cilindro de la misma sustancia, de radio igual al de la esfera y cuya altura sea los dos tercios del diámetro de la esfera, podremos comprobar mediante una balanza que tienen el mismo peso, y, por lo tanto, el mismo volumen, luego



$$\textit{Volumen de la esfera de radio } r = \textit{Volumen del cilindro de radio } r \textit{ y altura } \frac{2}{3}\,2\,r$$

$$\textit{Volumen cilindro} = \textit{Sup. base} \times \textit{altura} = \pi\, r^2 \times \frac{2}{3}\,2\,r = \pi\, r^2 \times \frac{4}{3}\,r = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3$$

resulta

$$\boxed{\textit{Volumen de la esfera de radio } r = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3}$$

El volumen de una esfera es igual a cuatro tercios del producto del número π por el cubo del radio.

Ejemplos. — I) *Calcular el volumen de una esfera de* 6 *cm de radio.*

Solución. — $\textit{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3 = \frac{4}{3}\,3{,}14 \times 6^3\ \mathrm{cm}^3 =$

$$= \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 216\ \mathrm{cm}^3 = 904{,}32\ \mathrm{cm}^3$$

II) *Calcular el volumen de una esfera cuya superficie es de* 314 dm^3.

Solución. — Siendo $\textit{Volumen esfera} = \frac{4}{3}\,\pi\, r^3 = \frac{4}{3}\,3{,}14 \times r^3$

debemos calcular el radio. Para ello tengamos en cuenta que

$$\textit{Sup. esfera} = 4\,\pi\, r^2 = 4 \times 3{,}14 \times r^2 = 314\ \mathrm{dm}^2$$

y pasando $4 \times 3{,}14$ al segundo miembro da:

$$r^2 = \frac{314\ \mathrm{dm}^2}{4 \times 3{,}14} = 25\ \mathrm{dm}^2 \quad \text{extrayendo la raíz da:} \quad r = \sqrt{25} = 5\ \mathrm{dm}$$

y $\textit{Volumen de la esfera} = \frac{4}{3}\,3{,}14 \times 5^3\ \mathrm{dm}^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 125\ \mathrm{dm}^3 = 523{,}33\ \mathrm{dm}^3.$

EJERCICIOS. — I) *¿Cuántos ladrillos de* 26 cm $\times$ 12 cm $\times$ 5 cm *entran en un metro cúbico de mampostería si la mezcla necesaria para ligarlos representa la tercera parte de este volumen?*

II) *¿Qué altura alcanzarán* 500 *litros de agua vertidos en un tanque que tiene la forma de un paralelepípedo rectángulo de* 2 m *de largo por un* 0,80 m *de ancho?*

III) *¿Cuánto pesará un tirante de* 4″ $\times$ 4″ *de* 4,20 m *de longitud si el peso específico de la madera es* 0,62. (Recuérdese que 1 pulgada = 1″ = 2,5 cm).

IV) *Una caja de forma de paralelepípedo rectángulo tiene un volumen de* 0,480 m^3 *y ha sido llenada por cajitas cúbicas de* 2 cm *de arista, ¿cuántas cajitas contenía? ¿Cuántos panes de jabón de* 8 cm *de largo* 5 cm *de ancho y* 2 cm *de espesor podrían colocarse en lugar de las cajitas cúbicas?*

V) *¿Qué altura es necesario darle a un salón de* 6,50 m *de largo por* 4 m *de ancho para poder alojar en él a* 35 *alumnos si se juzga indispensable que a cada uno de ellos le corresponda* 3,5 m^3 *de aire?*

VI) *Calcular el volumen de una pileta de natación de* 10 m *de ancho por* 33,33 *de largo cuyas profundidades mínima y máxima son, respectivamente,* 0,90 m *y* 2,50 m*?*

VII) *¿Cuál debe ser la altura de un prisma regular exagonal de* 15 m *de perímetro si su superficie total es de* 92,4750 m^2*? ¿Qué volumen tiene ese prisma?*

VIII) *¿Cuál es el peso específico de la piedra de que está hecha una pirámide triangular, que tiene por base un triángulo equilátero de* 1,75 m *de lado y* 5,40 m *de altura, cuyo peso es de* 66,78 *quitales?*

IX) *Calcular el volumen de una pirámide que tiene por base a un rombo de* 50 cm *de lado una de cuyas diagonales es de* 60 cm *de longitud, y la otra es igual a la altura de la pirámide.*

X) *Calcular el peso de un tetraedro regular de plata sabiendo que su arista es de* 8 cm *y que el peso específico de la plata es* 10,47.

XI) *Calcular el volumen de un octaedro regular: a) de* 10 cm *de arista; b) de* 10 cm *de diagonal.*

XII) *Calcular el peso de un cubo de mármol: a) de* 5 cm *de arista; b) de* 10 cm *de diagonal; c) de* 64 cm^2 *de superficie lateral; d)* 16 cm^2 *de superficie de una cara.*

XIII) *Calcular el volumen de un cilindro de* 1,20 m *de altura cuya superficie lateral es de* 3,0144 m^2.

XIV) *Calcular el peso de un caño de acero de* 2,80 m *de longitud sabiendo que el diámetro interno es de* 15 cm*, el espesor es de* 1 cm *y el peso específico de acero es* 7,816.

XV) *¿Cuántos hectólitros de agua hay en un pozo cilíndrico de* 8,40 m *de profundidad y* 6,28 m *de circunferencia cuando el agua alcanza en él una altura de* 3,80 m*? ¿Cuántos cuando está lleno?*

XVI) *Cuánto costará la excavación de una zanja que tiene una profundidad de* 80 cm*, un ancho de* 1,20 m *en la boca y paredes laterales* 1 m *de largo si la longitud es de* 138,50 m *y se paga* 2 $ *por* m^3 *de tierra excavada.*

XVII) *¿Cuánto se pagará por una pila de leña que tiene la forma de un cono de* 6 m *de diámetro de base y* 5 m *de arista lateral si cuesta* 15,30 $ *el estéreo?*

XVIII) *¿Cuántos quintales de alfalfa pueden guardarse en un silo que tiene la forma de un cilindro seguida de un cono si la altura total es de* 15 *m, el diámetro del mismo es de* 8 *m y la generatriz del cono es de* 5 *m?*

XIX) *¿Cuál es el peso de una esfera de aluminio de* 40 *cm de diámetro si el peso específico de esta sustancia es* 2,56?

XX) *¿Cuál es el peso de una esfera de fundición, hueca, si el diámetro interior es de* 8 *cm y el espesor es de* 4 *mm y el peso específico del acero es* 7,2?

OBRAS DE LOS AUTORES

Elementos de Aritmética, ... *Primer curso,* 11ª edición
Elementos de Aritmética, ... *Segundo curso,* 9ª edición
Elementos de Aritmética y Algebra, . . . *Tercer curso,* 6ª edición
Elementos de Aritmética y Algebra, . . . *Cuarto curso,* 3ª edición
Elementos de Geometría, ... *Primer curso,* 11ª edición
Elementos de Geometría, ... *Segundo curso,* 10ª edición
Elementos de Geometría, ... *Tercer curso,* 8ª edición
Elementos de Geometría del Espacio, . . *Cuarto curso,* 6ª edición
Matemáticas para Primer Año de las Escuelas Normales, 5ª edición
Matemáticas para Segundo Año de las Escuelas Normales, 3ª edición
Matemáticas para Tercer Año de las Escuelas Normales, 5ª edición
Elementos de Cosmografía, ... 3ª edición
Aritmética Escolar para Ingreso y Sexto grado, ... 1ª edición
Geometría Escolar para Ingreso y Sexto grado, ... 1ª edición

Establecimiento Gráfico
"Tomás Palumbo"
321 - La Madrid - 325
Buenos Aires

Precio: $ 1,50