ARITMETICA y ALGEBRA

CUARTO AÑO

ESCUELAS DE COMERCIO
(QUINTO NOCTURNO)

CABRERA y MEDICI

LIBRERIA DEL COLEGIO - BUENOS AIRES

PROGRAMA

1 9 3 8

MATEMATICAS PARA CUARTO AÑO
(QUINTO NOCTURNO)
DE LAS ESCUELAS DE COMERCIO

Dupl.

MATEMATICAS

PARA

CUARTO AÑO
(QUINTO NOCTURNO)

DE LAS

ESCUELAS DE COMERCIO

Ajustado estrictamente al nuevo Programa de Matemáticas de fecha 17 de Marzo 1938

Por los Profesores Diplomados en Matemáticas y Cosmografía

Ing. HÉCTOR J. MÉDICI
PROFESOR DEL COLEGIO MILITAR DE LA NACIÓN Y DE LA ESCUELA NORMAL DE PROFESORES M. ACOSTA

Ing. EMANUEL S. CABRERA
PROFESOR DE LA ESCUELA SUPERIOR DE COMERCIO Nº 3 Y DEL COLEGIO NACIONAL BERNARDINO RIVADAVIA

PRIMERA EDICION

1150 ejercicios entre resueltos y propuestos

Casa Editora
"Librería del Colegio"
ALSINA Y BOLIVAR
BUENOS AIRES
1938

ALGUNAS OBRAS DE LOS AUTORES

PARA PRIMER AÑO DE LAS ESCUELAS DE COMERCIO

Matemáticas para 1er Año de las Escuelas Comerciales y Normales.

PARA SEGUNDO AÑO DE LAS ESCUELAS DE COMERCIO

Aritmética para 2° año de las Escuelas de Comercio.
Geometría para 2° año de las Escuelas de Comercio.

PARA TERCER AÑO DE LAS ESCUELAS DE COMERCIO

Elementos de Aritmética y Algebra, Tercer curso.
Geometría para 3er año de las Escuelas de Comercio.

PARA CUARTO AÑO DE LAS ESCUELAS DE COMERCIO

Matemáticas para 4° año de las Escuelas de Comercio.

PARA INGRESO A LAS ESCUELAS DE COMERCIO, ESCUELAS NORMALES Y COLEGIOS NACIONALES

Aritmética Escolar y Geometría Escolar.

Impreso en los talleres gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Bs. Aires

CAPITULO I

RADICALES

PROGRAMA. — *Definición de la radicación. Regla de los signos. Valor absoluto de la raíz. Valor aritmético de un radical. Propiedades del valor aritmético de los radicales: Raíz de un producto, de un cociente, de una potencia y de una raíz. Recíprocas de las mismas. El valor de un radical no altera si se multiplican o dividen exactamente por un mismo número el índice y el exponente. Simplificación de radicales: Reducción a común índice; mínimo común índice. Extracción de factores fuera del radical. Introducción de factores dentro del radical. Operaciones con radicales: Radicales semejantes: definición. Suma y resta de radicales semejantes y de radicales cualesquiera. Multiplicación y división de radicales, de igual índice y de índice distinto. Racionalización de denominadores: Definición. Caso en que el denominador es un radical cuadrático o un radical cualquiera. Caso en que el denominador es un binomio con un término racional y el otro irracional cuadrático, o ambos irracionales cuadráticos. Ejercicios.*

1. **Definición de raíz y regla de los signos de la radicación.** — Como la definición de raíz emésima de un número natural, es la misma que la de un número entero o racional, aceptaremos esa definición también para los números reales.

En lo que sigue representaremos a los números reales por las letras del alfabeto griego α, β, γ...

Asi, por ejemplo:

α representa al n° 5, o al -8, o al $-\dfrac{3}{2}$, o a $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

y en general:

$\alpha, \beta, \gamma\ldots$ representan al n° a, o al $\mathbf{a}$, o al $\dfrac{\mathbf{a}}{b}$, o al $\underline{n}, \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\ldots$

Definicion. — Dado un número real α y otro natural $m > 1$, se llama *raíz emésima* del número α, al número real β que elevado a la emésima potencia sea igual a α.

En símbolos: $\sqrt[m]{\ } = \beta$ si $\beta^m = \alpha$

El número α cuya raíz se busca se llama *radicando* y el m índice de la raíz.

Ejemplos: $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$ porque $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

$\sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$ » $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}$

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$ » $(+3)^4 = 81$

y $(-3)^4 = 81$

Por las razones dadas más arriba resulta que podremos aplicar también la regla de los signos.

Regla de los signos. — I) *El signo de una raíz de índice impar de un número real es $+$ o $-$ según que dicho número sea positivo o negativo respectivamente.*

II) *Los signos de las dos raíces de índice par de un número real positivo son $+$ y $-$ respectivamente.*

Ejemplos:

$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$; $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm\frac{2}{3}$

2. **Casos de imposibilidad en el campo real.** — Tratemos de hallar las siguientes raíces:

$\sqrt{-25}$ y $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$

I) Es $\sqrt{-25} \mp +5$ puesto $(+5)^2 = +25$

y $\sqrt{-25} \mp -5$ puesto $(-5)^2 = +25$

II) Es $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}} \mp +\frac{1}{2}$ puesto $\left(+\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16}$

y $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}} \mp -\frac{1}{2}$ puesto $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = +\frac{1}{16}$

luego $\sqrt{-25}$ y $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$ *no existen* entre los números reales, pues no hay ningún número real que elevado al cuadrado nos dé -25, ni ningún otro que elevado a la cuarta potencia dé $-\frac{1}{16}$.

En general: $\sqrt[2m]{-a}$ *no tiene sentido puesto que no existe ningun número real que elevado a una potencia de exponente par*, 2 m, *dé un número negativo* (*).

3. **Valor absoluto.** — Definicion. — Se llama *valor absoluto* de la raíz emésima de un número real al número que se obtiene al suprimir los signos de dicha raíz.

Ejemplos:

Siendo $\sqrt[3]{-27} = -3$ es 3 el *valor absoluto* de $\sqrt[3]{-27}$

Siendo $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{2}$ » $\frac{1}{2}$ » » » » $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

4. **Los radicales considerados como raíces indicadas.** — Llamaremos *radicales* a las raíces indicadas de los números reales siempre que dichas operaciones sean posibles. Al índice de la raíz y al exponente del radicando los llamaremos *índice* y *exponente* del radical respectivamente.

Ejemplos: $\sqrt{4}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$; $\sqrt[4]{3}$ son radicales

(*) Recuerdese que un número par se representa por $2m$.

En cambio, $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}$ no es un radical pues no tiene sentido entre los números reales la raíz de índice par de un número negativo. En general diremos que:

Las raíces pares indicadas de números negativos, que son símbolos carentes de significado en el campo real, no se consideran como radicales.

5. **Valor aritmético de un radical.** — Definicion. — Se llama *valor aritmético de un radical,* al valor absoluto de la raíz que indica dicho radical.

Ejemplos: *El valor aritmético de* $\sqrt[4]{16} = 2$

« » » » $\sqrt[5]{-1} = 1$

» » » » $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$

Propiedades de los valores aritmeticos de los radicales. — Dado un radical se podrá establecer su signo por la regla respectiva y sólo quedará por calcular su valor aritmético.

Como, por otra parte, ya sabemos calcular el signo del resultado de cualquier operación conociendo el signo de los datos, nos ocuparemos ahora de ver como se procede para hallar el valor de esos resultados en el caso en que los datos sean radicales.

Por eso en lo que sigue, si no lo mencionamos especialmente, se sobreentenderá que hablamos del valor aritmético de los radicales con los cuales trabajemos.

6. **Raíz de un producto.** — Siendo la definición de raíz emésima de un número real la misma que la de raíz emésima de un número natural, todas las propiedades de estas últimas basadas en dicha definición, seguirán siendo válidas para los valores aritméticos de las primeras, pues sus demostraciones podrían aplicarse sin modificación alguna.

Teniendo en cuenta entonces la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación resulta que:
La raíz emésima de un producto es igual al producto de las raíces emésimas de los factores.

En símbolos: $\sqrt[m]{\alpha\beta\gamma} = \sqrt[m]{\alpha} \cdot \sqrt[m]{\beta} \cdot \sqrt[m]{\gamma}$ siendo α, β, γ números reales

Ejemplo: Teniendo en cuenta esta propiedad y la regla de los signos resulta:

$$\sqrt[3]{27 \cdot \frac{-1}{8} \cdot 125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{\frac{-1}{8}} \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot \frac{-1}{2} \cdot 5 = \frac{-15}{2}$$

$$\sqrt{3600} = \sqrt{36.100} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6.10 = 60$$

7. **Recíproca.** — Corolario. — *El producto de varias raíces de igual índice es otra raíz de ese mismo índice, cuyo radicando es el producto de los radicandos de las raíces dadas.*

En efecto: Siendo $\sqrt[m]{\alpha\beta\gamma} = \sqrt[m]{\alpha} \cdot \sqrt[m]{\beta} \cdot \sqrt[m]{\gamma}$ por teor. anterior

es $\sqrt[m]{\alpha} \cdot \sqrt[m]{\beta} \cdot \sqrt[m]{\gamma} = \sqrt[m]{\alpha\beta\gamma}$ por carácter recíp. iguald.

Ejemplo: $\sqrt{16}\sqrt{\frac{25}{4}} = \sqrt{16 \cdot \frac{25}{4}} = \sqrt{100} = 10$

Corolario. — *Para elevar una raíz a una potencia basta elevar al radicando a dicha potencia.*

En efecto: $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \overbrace{\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{a} \ldots \sqrt[m]{a}}^{n} = \sqrt[m]{a^n}$ por def. pot. y cor. ant.

Ejemplos: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a^2}$; $\left(\sqrt[5]{a}\right)^7 = \sqrt[5]{a^7}$

8. **Raíz emésima de un cociente.** — Recordando la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la división, resulta que:
La raíz emésima de un cociente, es igual al cociente de la raíz emésima del dividendo por la raíz emésima del divisor.

En símbolos: $\sqrt[m]{\alpha : \beta} = \sqrt[m]{\alpha} : \sqrt[m]{\beta}$

EJEMPLO: $\sqrt{100 : \frac{1}{4}} = \sqrt{100} : \sqrt{\frac{1}{4}} = 10 : \frac{1}{2} = 20$

9. **Recíproca.** — COROLARIO. — *El cociente de dos raíces de igual índice es otra raíz, de ese mismo índice, cuyo radicando es el cociente de los radicandos de las raíces dadas.*

En efecto: siendo $\sqrt[m]{\alpha : \beta} = \sqrt[m]{\alpha} : \sqrt[m]{\beta}$ por el teorema anterior

es $\sqrt[m]{\alpha} : \sqrt[m]{\beta} = \sqrt[m]{\alpha : \beta}$ por carác. recíp. iguald.

EJM.: $\sqrt{\frac{1}{36}} : \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{36} : \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Demostraremos en cambio otras propiedades de los valores aritméticos de los radicales, que a pesar de cumplirse para los números naturales, no las estudiamos, por razones de brevedad, en Primer Año, siguiendo un camino en todo idéntico al empleado al demostrar las otras propiedades de la radicación de números naturales. Esas propiedades son:

10. **Raíz de una potencia.** — TEOREMA. — *La raíz emésima de una potencia cuyo exponente es múltiplo del índice, es otra potencia de la misma base cuyo exponente es el cociente del exponente de la potencia dada por el índice de la raíz.*

HIP.) α^n siendo n número nat. TESIS) $\sqrt[m]{\alpha^n} = \alpha^{n:m}$

n es múltiplo de m

DEMOSTRACION. — Siendo $n = \dot{m}$ por hipótesis, el cociente $n : m$ es un número entero, por lo tanto tiene sentido la operación $\alpha^{n:m}$.

Para que sea $\alpha^{n:m}$ la raíz emésima de α^n debe ser por definición de raíz

$$(Raíz\ \alpha^{n:m})^m = radicando\ \alpha^n$$

Veamos si esta condición se cumple.

Siendo $(\alpha^{n:m})^m = \alpha^{(n:m)\,m}$ por potencia de una pot.

simpl. da $(\alpha^{n:m})^m = \alpha^n$ que es el radicando,

lo que nos dice que es cierto que $\sqrt[m]{\alpha^n} = \alpha^{n:m}$

Ejemplos: $\sqrt{\left(\frac{a}{5}\right)^4} = \left(\frac{a}{5}\right)^{4:2} = \left(\frac{a}{5}\right)^2 = \frac{a^2}{25}$

$\sqrt[3]{2^6} = 2^{6:2} = 2^3$; $\sqrt{10000} = \sqrt{10^4} = \sqrt{10^{4:2}} = 10^2$

Observacion. — Si contrariamente a lo exigido por la hipótesis no fuera n múltiplo de m la operación $\alpha^{n:m}$ carecería de sentido. Por ejemplo $\sqrt[3]{a^5}$ conduciría a la expresión $\alpha^{\frac{5}{3}}$. que todavía no sabemos lo que significa, pues no se han definido las potencias de exponente fraccionario.

13. **Raíz de la raíz de un número.** — Teorema. — *La raíz emésima de la raíz enésima de un número es igual a la raíz de dicho número cuyo índice es el producto de los índices de las raíces dadas.*

Hip.) α número real
m y n nos naturales > 1

Tesis) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}$

Demost.) Representando por x el valor de $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}}$, se tiene que

si $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = x$ [1] es $x^m = \sqrt[n]{\alpha}$ por defin. raíz emésima

luego $(x^m)^n = \alpha$ por defin. raíz enésima

o bien $x^{mn} = \alpha$ por potencia de una pot.

por lo tanto $\sqrt[mn]{\alpha} = x$ [2] por def. de raíz emenésima

De [1] y [2] resulta $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}$ por consec. carac. trans.

Ejm.: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$

14. **Recíproca.** — Corolario. — *La raíz de índice* mn *de un número* α *es igual a la raíz de índice* m *de la raíz de índice* n *de dicho número* α.

En efecto: Siendo $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}$ por el teorema anterior

es $\sqrt[mn]{\alpha} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}}$ por carac. recípr. igual.

Ejemplos: $\sqrt[8]{7} = \sqrt[4.2]{7} = \sqrt[4]{\sqrt{7}}$; $\sqrt[4]{10} = \sqrt{\sqrt{10}}$

15. **Propiedades de los radicales.** — Cor. I. — *El valor de un radical no altera si se multiplican por un mismo número el índice y el exponente.*

En símbolos: $\sqrt[m]{\alpha^n} = \sqrt[mp]{\alpha^{np}}$

En efecto: Si $\sqrt[m]{\alpha^n} = x$ [1] es $x^m = \alpha^n$ por def. de raíz

y elevando a la p da $x^{mp} = \alpha^{np}$ por prop. unif. pot.

luego $x = \sqrt[mp]{\alpha^{np}}$ por def. raíz

y por [1] $\sqrt[m]{\alpha^n} = \sqrt[mp]{\alpha^{np}}$

Ejemplo: $\sqrt{6} = \sqrt[4]{6^2} = \sqrt[4]{36}$

16. **Corolario II.** — *El valor de un radical no altera si se dividen exactamente por un mismo número el índice y el exponente.*

En efecto: Siendo $\sqrt[m]{\alpha^n} = \sqrt[mp]{\alpha^{np}}$ por el corolario anterior

es $\sqrt[mp]{\alpha^{np}} = \sqrt[m]{\alpha^n}$ por carác. recíp. iguald.

Ejemplo: $\sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

17. Simplificación de radicales (*). — DEFINICION. — *Simplificar un radical* significa encontrar otro igual al dado cuyo índice y exponente sean menores que los del primero.

Para ello basta dividir dichos índice y exponente por un factor común o sea, suprimir ese factor común.

Sea, por ejemplo, simplificar el radical $\sqrt[30]{\alpha^{45}}$. Como 30 y 45 son divisibles por 3 resulta:

$$\sqrt[30]{\alpha^{45}} = \sqrt[30:3]{\alpha^{45:3}} = \sqrt[10]{\alpha^{15}}$$

y como 10 y 15 son divisibles por 5, resulta:

$$\sqrt[30]{\alpha^{45}} = \sqrt[10]{\alpha^{15}} = \sqrt[10:5]{\alpha^{15:5}} = \sqrt[2]{\alpha^{3}} = \sqrt{\alpha^{3}}$$

Como 2 y 3 son primos entre sí no tienen factores comunes y por lo tanto no podrán simplificarse por lo cual se dice que el radical $\sqrt{\alpha^3}$ es *irreducible.*

Se dice también que $\sqrt{\alpha^3}$ es el radical $\sqrt[30]{\alpha^{45}}$ *reducido a su más simple expresión.*

OBSERVACION. — Dado un radical para reducirlo a su mas simple expresión en lugar de dividir su índice y su exponente sucesivamente por sus factores comunes, basta dividirlo por el producto de todos ellos, o sea por su máximo común divisor.

EJEMPLO. — Reducir a su más simple expresión $\sqrt[24]{2^{60}}$

siendo *m. c. d.* (24 y 60) = 12,

se tiene: $\sqrt[24]{2^{60}} = \sqrt[24:12]{2^{60:12}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$

(*) Es conveniente hacer notar que todo lo estudiado sobre *simplificación de fracciones*, es aplicable a la *simplificación de radicales*, con sólo cambiar las palabras numerador y denominador de la fracción por exponente e índice del radical, respectivamente.

18. **Reducción a común índice** (*). — DEFINICION. — Reducir *varios radicales a común índice,* es encontrar otros radicales que siendo respectivamente iguales a los dados tengan el mismo índice.

Tratemos de reducir a común índice los radicales:

$$\sqrt[3]{5} \quad ; \quad \sqrt[5]{x^2} \quad \text{y} \quad \sqrt{m^7}$$

Un índice común a dichos radicales es, por ejemplo, el producto de sus índices 3.5.2.

Para que figure este índice en un radical igual al primero, basta multiplicar su índice y su exponente por 5.2 así resultaría:

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3\;5.2]{5^{5.2}} = \sqrt[30]{5^{10}}$$

Para que figure el índice 3.5.2 en un radical igual al segundo debemos multiplicar al índice y al exponente por 3.2, así tendríamos:

$$\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5.3.2]{x^{2.3.2}} = \sqrt[30]{x^{12}}$$

y para que figure en un radical igual al tercero debemos multiplicar al índice y al exponente por 3.5 y tendríamos:

$$\sqrt{m^7} = \sqrt[2.3.5]{m^{7.3.5}} = \sqrt[30]{m^{105}}$$

Observando que el índice y el exponente de cada uno de los radicales dados se han multiplicado por el producto de los índices de los otros, resulta la siguiente:

REGLA. — *Para reducir varios radicales a común índice se multiplican el índice y el exponente de cada uno de ellos por el producto de los índices de los otros.*

(*) Es conveniente hacer notar que la analogía observada en el párrafo anterior se conserva entre la *reducción de fracciones a común denominador* y la de *radicales a común índice.*

En símbolos: dados $\sqrt[m]{\alpha^n}$, $\sqrt[p]{\beta^q}$ y $\sqrt[r]{\gamma^s}$ reducidos a común índice resulta:

$$\sqrt[m]{\alpha^n} = \sqrt[mpr]{\alpha^{npr}} \quad ; \quad \sqrt[p]{\beta^q} = \sqrt[pmr]{\beta^{qmr}} \quad ; \quad \sqrt[r]{\gamma^s} = \sqrt[rmp]{\gamma^{smp}}$$

o también

$$\sqrt[m]{\alpha^n} = \sqrt[mpr]{\alpha^{npr}} \quad ; \quad \sqrt[p]{\beta^q} = \sqrt[mpr]{\beta^{qmr}} \quad ; \quad \sqrt[r]{\gamma^s} = \sqrt[mpr]{\gamma^{smp}}$$

19. **Mínimo común índice** (*). — Definicion. — Reducir varios radicales a *mínimo común índice*, es encontrar otros radicales que siendo respectivamente iguales a los dados, tengan por índice común al mínimo común múltiplo de sus índices.

Sea, por ejemplo, reducir a mínimo común índice los radicales:

$$\sqrt[4]{x^3} \quad ; \quad \sqrt[8]{a} \quad ; \quad \sqrt[12]{2^5}$$

Siendo el *m. c. m.* (4, 8 y 12) = 24 (*Matemát.* I) para que figure este índice en un radical igual al primero basta multiplicar a su índice y a su exponente por 6, que es el cociente de 24 : 4,

así tendríamos: $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4.6]{x^{3.6}} = \sqrt[24]{x^{18}}$

Procediendo de idéntica manera con los otros radicales tendríamos:

$$\sqrt[8]{a} = \sqrt[8.3]{a^{1.3}} = \sqrt[24]{a^3}$$

$$\sqrt[12]{2^5} = \sqrt[12.2]{2^{5.2}} = \sqrt[24]{2^{10}}$$

Observando que el índice de los radicales hallados es el mínimo común múltiplo de los índices de los dados, y que el exponente del radicando de cada uno de ellos es el producto de su exponente por el

(*) Nótese la gran analogía que existe entre este párrafo y el de *reducción de fracciones a mínimo común denominador.*

cociente del mínimo común índice por su índice, resulta la siguiente:

Regla. — *Para reducir radicales a mínimo común índice, se multiplican el índice y el exponente de cada uno de ellos, por el cociente de dividir el mínimo común múltiplo de sus índices por el índice respectivo*

En símbolos: $\sqrt[b]{\alpha^a}$; $\sqrt[d]{\beta^c}$; $\sqrt[f]{\gamma^e}$

reducidos a mínimo común índice, en el supuesto que

$m.\ c.\ m.\ (b, d, f) = m$ dan respectivamente.

$$\sqrt[b]{\alpha^a} = \sqrt[b\,(m\,:\,b)]{\alpha^{a\,(m\,:\,b)}} = \sqrt[m]{\alpha^{a\,(m\,:\,b)}}$$

$$\sqrt[d]{\beta^c} = \sqrt[d\,(m\,:\,d)]{\beta^{c\,(m\,:\,d)}} = \sqrt[m]{\beta^{c\,(m\,:\,d)}}$$

$$\sqrt[f]{\gamma^e} = \sqrt[f\,(m\,:\,f)]{\gamma^{e\,(m\,:\,f)}} = \sqrt[m]{\gamma^{e\,(m\,:\,f)}}$$

Ejemplo. — Reducir a mínimo común índice

$$\sqrt[15]{a^2} \ ; \ \sqrt[5]{b^4} \ ; \ \sqrt[25]{c^8} \ ; \ \sqrt[75]{d^6}$$

Siendo $m.\ c.\ m.\ (15, 5, 25, 75) = 75$ resulta:

$$\sqrt[15]{a^2} = \sqrt[75]{a^{2\,(75\,:\,15)}} = \sqrt[75]{a^{2.5}} = \sqrt[75]{a^{10}}$$

$$\sqrt[5]{b^4} = \sqrt[75]{b^{4\,(75\,:\,5)}} = \sqrt[75]{b^{4.15}} = \sqrt[75]{b^{60}}$$

$$\sqrt[25]{c^8} = \sqrt[75]{c^{8\,(75\,:\,25)}} = \sqrt[75]{c^{8.3}} = \sqrt[75]{c^{24}}$$

$$\sqrt[75]{d^6} = \sqrt[75]{d^{6\,(75\,:\,75)}} = \sqrt[75]{d^{6.1}} = \sqrt[75]{d^6}$$

20. **Extracción de factores fuera del radical.** — Consideremos el radical $\sqrt[3]{\alpha^{15}\beta}$.

Siendo $\sqrt[3]{\alpha^{15}\beta} = \sqrt[3]{\alpha^{15}}\,\sqrt[3]{\beta}$ por prop. distrib. (nº 6)

y $15 = 5.3 = \dot{3}$ es $\sqrt[3]{\alpha^{15}} = \alpha^{15:3} = \alpha^{5}$ por un teor. ant. (nº 10)

luego $\sqrt[3]{\alpha^{15}\beta} = \alpha^{5}\sqrt[3]{\beta}$.

Si consideramos en cambio el radical $\sqrt{\alpha^{7}\beta}$, como $7 \neq \dot{3}$ no podrá sacarse directamente a α fuera del radical. Sin embargo, teniendo en cuenta que siendo (7) : 3 = 2 y resto 1 es $7 = 3.2 + 1$ luego

$$\sqrt[3]{\alpha\,\beta} = \sqrt[3]{\alpha^{3.2+1}\beta} = \sqrt[3]{\alpha^{3.2}\alpha\beta} = \sqrt[3]{\alpha^{3.2}}\,\sqrt[3]{\alpha\beta}$$

o sea $\sqrt[3]{\alpha^{7}\beta} = \alpha^{2}\sqrt[3]{\alpha\beta}$

Observando en la forma en que se ha extraído de la raíz el factor α y teniendo en cuenta que el mismo razonamiento puede hacerse para extraer cualquier otro factor de un radical, se deduce la siguiente

Regla. — *Para extraer de un radical un factor cuyo exponente sea mayor que su índice, se lo coloca fuera del mismo elevado a una potencia igual al cociente de la división entera de su exponente por el índice y se dejan bajo el radical al mismo factor con un exponente igual al resto de esa división, y a los demás factores.*

Ejm.: $\sqrt[3]{a^{5}b^{2}x} = a\sqrt[3]{a^{2}b^{2}x}$ puesto que (5) : 3 = 1 y resto 2

$\sqrt{4\,a^{4}b} = 2\,a^{2}\sqrt{b}$; $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = \sqrt{2^{2}.5} = 2\sqrt{5}$

21. **Introducción de factores dentro de un radical.** — Sea introducir dentro del radical $\sqrt[4]{\beta}$ el factor α^{3}.

Teniendo en cuenta que

$$\alpha^3 = \sqrt[4]{(\alpha^3)^4} = \sqrt[4]{\alpha^{12}} \quad \text{por corol. defin. de raíz}$$

resulta
$$\alpha^3 \sqrt[4]{\beta} = \sqrt[4]{\alpha^{12}}\, \sqrt[4]{\beta} \quad \text{por prop. unif. radicación}$$

luego
$$\alpha^3 \sqrt[4]{\beta} = \sqrt[4]{\alpha^{12}\beta} \quad \text{por un cor. ant. (n° 7)}$$

Observando que el procedimiento seguido es aplicable para introducir cualquier factor dentro de un radical, resulta la siguiente:

Regla. — *Se puede introducir un factor de un radical dentro del mismo multiplicando su exponente por el índice del radical.*

Ejemplos:
$$2\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2^4 . 5} = \sqrt[4]{16 . 5} = \sqrt[4]{80}$$

$$3\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{3^2 . \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}}$$

OPERACIONES CON RADICALES (*)

Siendo los radicales números, pues, por definición, indican operaciones posibles y con un solo resultado, podemos operar con ellos teniendo en cuenta todas las propiedades estudiadas para los números reales que son las mismas que la de los racionales.

Con el objeto de simplificar las expresiones veremos como puede operarse rápidamente con los radicales, para lo cual daremos antes la siguiente

Definicion. — Se dice que dos o más radicales son *semejantes*, cuando reducidos a su mas simple expresión y extraídos de ellos todos los factores posibles, tienen el mismo índice y el mismo radicando, es decir, que sólo pueden diferir en los factores colocados fuera de ellos, que se llaman *coeficientes*.

Ejemplos: I) $\sqrt[5]{6\,a^2b^3}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{6\,a^2b^3}$; $3\sqrt[5]{6\,a^2b^3}$; II) $\sqrt{3}$; $6\sqrt{3}$ y $5\sqrt{12} = 5\sqrt{\quad 3} = 5.2.\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ son radicales semejantes.

(*) Es conveniente hacer notar que todo lo estudiado para las operaciones con monomios es aplicable a las operaciones con radicales pues estos también son monomios.

22. **Suma de radicales semejantes.** — Sea, por ejemplo, sumar los radicales $\frac{1}{4}\sqrt[3]{4\,a^2b}$; $-6\sqrt[3]{4\,a^2b}$; $\frac{1}{8}\sqrt[3]{4\,a^2b}$,

Sacando el factor común $\sqrt[3]{4\,a^2b}$, tenemos:

$$\frac{1}{4}\sqrt[3]{4\,a^2b}-6\sqrt[3]{4\,a^2b}+\frac{1}{8}\sqrt[3]{4\,a^2b}=\left(\frac{1}{4}-6+\frac{1}{8}\right)\sqrt[3]{4\,a^2b}$$

$$=\frac{2-48+1}{8}\sqrt[3]{4\,a^2b}=-\frac{45}{8}\sqrt[3]{4\,a^2b}$$

luego $\frac{1}{4}\sqrt[3]{4\,a^2b}-6\sqrt[3]{4\,a^2b}+\frac{1}{8}\sqrt[3]{4\,a^2b}=\frac{-45}{8}\sqrt[3]{4\,a^2b}$

Ejemplo II. — Sumar los radicales $\frac{2}{5}\sqrt{2}$, $-\frac{3}{5}\sqrt{8}$, $\sqrt[4]{4}$.

Tratemos de simplificar los radicales dados y de extraer los factores posibles para ver si son semejantes.

Siendo $\frac{2}{5}\sqrt{2}=\frac{2}{5}\sqrt{2}$

y $\frac{3}{5}\sqrt{8}=\frac{3}{5}\sqrt{4\,.\,2}=\frac{3}{5}\sqrt{2^2\,.\,2}=\frac{3}{5}.2\sqrt{2}=\frac{6}{5}\sqrt{2}$

$\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$

es $\frac{2}{5}\sqrt{2}-\frac{3}{5}\sqrt{8}+\sqrt[4]{4}=\frac{2}{5}\sqrt{2}-\frac{6}{5}\sqrt{2}+\frac{5}{5}\sqrt{2}=$

$$=\left(\frac{2-6+5}{5}\right)\sqrt{2}=\frac{1}{5}\sqrt{2}$$

Como en cualquier caso se procedería de la misma manera podemos dar la siguiente:

Regla. — *La suma de varios radicales semejantes es el radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de dichos radicales.*

APLICACION. — Sumar los radicales $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\ }$, $-5\sqrt[3]{x^4}$, $\sqrt[3]{27\,x^7}$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{x} + (-5\sqrt[3]{x^4}) + \sqrt[3]{27\,x^7} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x} - 5\,x\sqrt[3]{x} + 3\,x^2\sqrt[3]{x}$$

$$= \left(\frac{2}{3} - 5\,x + 3\,x^2\right)\sqrt[3]{\ }$$

23. **Resta de radicales semejantes.** — Sea, por ejemplo, restar del radical $-5\sqrt{3\,ax^2}$ el $\frac{2}{7}\sqrt{3\,ax^2}$.

Teniendo en cuenta que los radicales son números y que la diferancia entre dos números se obtiene sumando al minuendo el contrario del sustraendo, se tiene

$$(-5\sqrt{3\,ax^2}) - \left(\frac{2}{7}\sqrt{3\,ax^2}\right) = -5\sqrt{3\,ax^2} + \left(-\frac{2}{7}\sqrt{3\,ax^2}\right) =$$

$$= \left(-5 + \frac{-2}{7}\right)\sqrt{3\,ax^2}$$

luego

$$= \frac{-35-2}{7}\sqrt{3\,ax^2} = \frac{-37}{7}\sqrt{3\,ax^2}$$

Este ejemplo y la consideración de que en la misma forma se hubiese podido proceder en cualquier otro caso nos permiten dar la siguiente:

REGLA. — *Para restar dos radicales semejantes se le suma al radical minuendo el sustraendo cambiado de signo, y se procede de acuerdo con la regla de la suma de radicales.*

APLICACION:

$$8\sqrt[4]{x^6} - \frac{4}{5}\sqrt{x^3} = 8\sqrt[4]{x^6} + \left(\frac{-4}{5}\sqrt{x^3}\right) = 8\sqrt{x^3} + \left(-\frac{4}{5}\sqrt{x^3}\right)$$

$$= \left(8 + \frac{-4}{5}\right)\sqrt{x^3} = \frac{36}{5}\sqrt{x^3}$$

luego

$$8\sqrt[4]{x^6} - \frac{4}{5}\sqrt{x^3} = \frac{36}{5}\,x\sqrt{x}$$

24. **Multiplicación de radicales.**— Sea, por ejemplo, multiplicar los radicales: $-\frac{2}{5}\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; $4\sqrt{7}$.

Para poder aplicar el corolario referente a la multiplicación de radicales es menester reducirlos previamente a común índice, pues esa era la condición que se exigía en él para poderlos multiplicar (nº 7).

Como
$$-\frac{2}{5}\sqrt[5]{3} = -\frac{2}{5}\sqrt[20]{3^4}$$
$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \sqrt[20]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}$$
$$4\sqrt{7} = 4\sqrt[20]{7^{10}}$$

---

es $$-\frac{2}{5}\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot 4\sqrt{7} = -\frac{2}{5}\sqrt[20]{3^4}\cdot\sqrt[20]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}\cdot 4\sqrt[20]{7^{10}}$$ por prop. unif. mult.

$$= \left(-\frac{2}{5}\cdot 4\right)\sqrt[20]{3^4}\cdot\sqrt[20]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}\cdot\sqrt[20]{7^{10}}$$ por prop. conm. y asoc. mult.

luego $$-\frac{2}{5}\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\cdot 4\sqrt{7} = -\frac{8}{5}\sqrt[20]{3^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot 7^{10}}$$ por un cor. ant. (nº 7)

Este ejemplo y la consideración de que en la misma forma se hubiese podido proceder en cualquier otro caso, nos permiten dar la siguiente:

Regla. — *El producto de varios radicales es el radical que tiene por coeficiente al producto de los coeficientes de los dados, y cuyo radicando está formado por el producto de los radicandos de esos radicales reducidos a común índice, si es necesario.*

Aplicaciones:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}m}\,.\,2\sqrt[3]{\frac{4}{5}m^5}\,.\,\sqrt[3]{40} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}m^5\,.\,40} = 2\sqrt[3]{8\,m^6} =$$
$$= 2\,.\,2\,m^2 = 4\,m^2$$

$$\sqrt[4]{3\,x}\,.\,\sqrt[8]{xy^3}\,\sqrt[8]{5\,y^2} = \sqrt[8]{9\,x^2}\,\sqrt[8]{x^4y^{12}}\,\sqrt[8]{5\,y^2} = \sqrt[8]{9\,x^2x^4y^{12}\,5\,y^2} =$$
$$= \sqrt[8]{45\,x^6y^{14}} = y\sqrt[8]{45\,x^6y^6}$$

25. **División de radicales.** — Sea dividir $3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ por $\frac{2}{5}\sqrt{2}$. Siendo la división la operación inversa de la Multiplicación, parece natural que el radical cociente de otros dos dados, sea el que resulte de reducirlos a común índice, tenga por coeficiente al cociente del coeficiente del dividendo por el del divisor, y como parte radical a la raíz de ese mismo índice cuyo radicando sea el cociente de los radicandos dados. En nuestro caso tendríamos

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} : \frac{2}{5}\sqrt{2} = 3\sqrt[6]{\frac{1}{4}} : \frac{2}{5}\sqrt[6]{8} = \left(3 : \frac{2}{5}\right)\sqrt[6]{\frac{1}{4} : 8}$$

Para saber si el resultado así obtenido es efectivamente el cociente, bastará multiplicarlo por el divisor y ver si reproduce al dividendo. En nuestro caso, como

$$\left(3 : \frac{2}{5}\right)\sqrt[6]{\frac{1}{4} : 8} \times \frac{2}{5}\sqrt[6]{8} = \left(3 : \frac{2}{5}\right)\frac{2}{5}\sqrt[6]{\left(\frac{1}{4} : 8\right)8}$$ por regla del producto de radicales. Simplificando da:

$$\left(3 : \frac{2}{5}\right)\sqrt[6]{\frac{1}{4} : 8}\,.\,\frac{2}{5}\sqrt[6]{8} = 3\sqrt[6]{\frac{1}{4}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$ que es el dividendo

luego es posible aplicar el procedimiento seguido en este ejemplo, que como es general nos permite enunciar la siguiente:

REGLA. — *El cociente de un radical por otro, es el radical que se obtiene reduciéndolos a común índice, si es necesario, hallando el cociente del coeficiente del radical dividendo por el del divisor y colocándolo como coeficiente del radical cuyo radicando es el cociente de los de los dados.*

APLICACIONES:

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{2}} : \frac{2}{5}\sqrt{2} = 3\sqrt[6]{\frac{1}{4}} : \frac{2}{5}\sqrt[6]{8} = \left(3 : \frac{2}{5}\right)\sqrt[6]{\frac{1}{4} : 8} =$$

$$= \frac{15}{2}\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$$

$$\frac{1}{7}\sqrt[5]{3x^2y^3} : \frac{1}{14}\sqrt[5]{9xy^6} = \left(\frac{1}{7} : \frac{1}{14}\right)\sqrt[5]{3x^2y^3 : 9xy^6} = 2\sqrt[5]{\frac{1}{3}xy^{-3}}.$$

26. **Racionalización de denominadores.** — Dada una fracción cuyo denominador sea un radical, se entiende por *racionalizar dicho denominador* encontrar otra fracción igual a la dada y en cuyo denominador no figuren radicales.

Veremos a continuación algunos de los casos que pueden presentarse.

27. **Caso en que el denominador es un radical único.** — Tratemos, p. ej., de racionalizar el denominador de $\frac{\alpha}{\sqrt[7]{\beta^5}}$.

Para que desaparezca el signo radical del denominador de la fracción dada, bastaría que β estuviese elevado a la séptima potencia puesto que $\sqrt[7]{\beta^7} = \beta$. Para conseguirlo multipliquemos dicho denominador por $\sqrt[7]{\beta^2} = \sqrt[7]{\beta^{7-5}}$ y a fin de que subsista el valor de la fracción dada multipliquemos también al numerador por el mismo número, y tendremos

$$\frac{\alpha}{\sqrt[7]{\beta^5}} = \frac{\alpha\sqrt[7]{\beta}}{\sqrt[7]{\beta^5}\sqrt[7]{\beta^2}} = \frac{\alpha\sqrt[7]{\beta^2}}{\sqrt[7]{\beta^5 . \beta^2}} = \frac{\alpha\sqrt[7]{\beta^2}}{\sqrt[7]{\beta^7}} = \frac{\alpha\sqrt[7]{\beta^2}}{\beta}$$

EJEMPLO II.— Consideremos ahora la fracción $\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta^{10}}}$ en la que el exponente del radicando del denominador es mayor que el índice del radical.

Cómo $$\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta^{10}}} = \frac{\alpha}{\beta^3\sqrt[3]{\beta}} = \frac{1}{\beta^3}\,\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}} = \frac{1}{\beta^3}\,\frac{\alpha\sqrt[3]{\beta^2}}{\beta}$$

puede observarse que la fracción dada se ha racionalizado extrayendo del radical el factor β^9 y procediendo con el radical que queda como en el ejemplo anterior.

REGLA.— *Para racionalizar el denominador de una fracción cuando éste es un radical único, se extraen del mismo todos los factores posibles y se multiplican ambos términos de la fracción dada por el radical del mismo índice que el de su denominador cuyo radicando tenga por exponente a la diferencia entre su índice y su exponente.*

EJEMPLOS

$$\frac{x}{a\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = \frac{x\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}}{a\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{x\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}{a\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}} = \frac{x\sqrt[3]{\frac{4}{9}}}{\frac{2}{3}a}$$

$$\frac{8}{3\sqrt[4]{a^7}} = \frac{8}{3\,a\sqrt[4]{a^3}} = \frac{8\sqrt[4]{a}}{3\,a\sqrt[4]{a^3}\,\sqrt[4]{a}} = \frac{8\sqrt[4]{a}}{3\,a^2}$$

$$\frac{2\,b^2}{5\sqrt[5]{a^7m^2x^5}} = \frac{2\,b^2}{5\,ax\sqrt[5]{a^2m^2}} = \frac{2\,b^2\sqrt[5]{a^3m^3}}{5\,ax\sqrt[5]{a^2m^2}\sqrt[5]{a^3\,m^3}} =$$

$$= \frac{2\,b^2\sqrt[5]{a^3m^3}}{5\,axam} = \frac{2\,b^2\sqrt[5]{a^3m^3}}{5\,a^2mx}$$

28. **Caso particular.** — Cuando el denominador de una fracción es *irracional cuadrático* (raíz cuadrada de un número) el problema de la racionalización se simplifica como puede verse en el siguiente

Ejemplo: Racionalizar $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$.

Procediendo de acuerdo con la regla del párrafo anterior, se tiene

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta}$$

lo que nos permite enunciar la siguiente

Regla. — *Para racionalizar el denominador de una fracción cuando éste es un irracional cuadrático, se pone por denominador al radicando del de la fracción dada, y por numerador al producto de su numerador por su denominador.*

Aplicaciones:

$$\frac{6}{\sqrt{0{,}3}} = \frac{6\sqrt{0{,}3}}{0{,}3} = 20\sqrt{0{,}3} \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}\,.\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

29. **Caso en que el denominador es un binomio con un término racional y otro irracional cuadrático.** — Sea, por ejemplo racionalizar $\dfrac{\alpha}{\beta+\sqrt{\gamma}}$.

Para que desaparezca el signo radical del sumando $\sqrt{\gamma}$ del denominador, bastaría elevarlo al cuadrado desde que $(\sqrt{\gamma})^2 = \gamma$. Tratemos entonces de buscar un factor tal que al multiplicar por él a ambos términos de la fracción aparezca $(\sqrt{\gamma})^2$. Teniendo en cuenta que el denominador de la fracción dada es una suma $\beta + \sqrt{\gamma}$ y que el producto de la suma de dos números por la diferencia de los mismos es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos números resulta que el factor buscado es la diferencia $\beta - \sqrt{\gamma}$ que se llama la *conjugada* del denominador. Luego:

$$\frac{\alpha}{\beta+\sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha(\beta-\sqrt{\gamma})}{(\beta+\sqrt{\gamma})(\beta-\sqrt{\gamma})} = \frac{\alpha(\beta-\sqrt{\gamma})}{\beta^2-(\sqrt{\gamma})^2} = \frac{\alpha(\beta-\sqrt{\gamma})}{\beta^2-\gamma}$$

La observación de este ejemplo que es general nos permite enunciar la siguiente

REGLA. — *Para racionalizar el denominador de una fracción cuando éste es un binomio con un término racional y el otro irracional cuadrático, se pone por denominador a la diferencia entre el cuadrado del término racional y el radicando del irracional y por numerador al producto del de la fracción dada por la conjugada del denominador.*

EJEMPLO
$$\frac{13}{\frac{1}{2}+\sqrt{7}}=\frac{13\left(\frac{1}{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-7}=\frac{13\left(\frac{1}{2}-\sqrt{7}\right)}{\frac{1}{4}-7}$$
$$=\frac{13\left(\frac{1}{2}-\sqrt{7}\right)}{-\frac{27}{4}}=-\frac{52}{27}\left(\frac{1}{2}-\sqrt{7}\right)$$

30. **Caso en que el denominador es un binomio cuyos dos términos son irracionales cuadráticos.** — Sea, por ejemplo, racionalizar el denominador de $\dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}}$.

Procediendo como en el ejemplo anterior, tendríamos

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta})^2-(\sqrt{\gamma})^2}=$$
$$=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\sqrt{\ }+\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}-\sqrt{\ })(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta})^2-(\sqrt{\gamma})^2}=$$
$$=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}$$

La observación de estos ejemplos que son generales nos permite dar la siguiente:

Regla. — *Para racionalizar el denominador de una fracción cuando es un binomio cuyos dos términos son irracionales cuadráticos, se escribe por denominador a la diferencia de los radicandos del denominador de la fracción dada, y por numerador al producto de su numerador por la conjugada de su denominador.*

Ejemplo $$\frac{-0{,}5}{\sqrt{}\quad\sqrt{3}} = \frac{0{,}5\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3}$$

Aplicaciones. — I) Calcular las raíces: *a*) cuadradas de 4 ; 36 ; $9\,a^4$; $\frac{4}{9}\,a^2$; $100\,x^4\,y^6$; *b*) cúbicas de -1 ; $-0{,}001$; $\frac{8}{27}\,m^9$; 1000000^{12} ; $a^6 b^9 c^3$; *c*) cuartas de $16\,a^4$; $0{,}0001$; $625\,a^8\,b^{24}$; 10000 ; $81\,x^4\,y^4$; *d*) quintas de -1 ; -32 ; 32 ; $\frac{1}{a^{10}}$; $\frac{32\,a^5}{b^{15}}$.

II) Averiguar cuáles de los radicales siguientes son números racionales:

$$\sqrt{4}\ ;\ \sqrt{12}\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ \sqrt[3]{9}\ ;\ \sqrt[4]{81}\ ;\ \sqrt[3]{-1}\ ;\ \sqrt[3]{-8}\ ;$$
$$\sqrt[3]{125}\ ;\ \sqrt{\frac{4}{9}}\ ;\ \sqrt[3]{\frac{1}{8}}\ ;\ \sqrt[4]{0{,}0625}\ ;\ \sqrt{0{,}1}\ ;\ \sqrt[3]{0{,}01}.$$

III) Calcular el valor numérico de: *a*) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$ para $a = 0{,}3$ $b = \frac{-8}{27}$.

b) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{ab^2}}}$ para $a = 1$, $b = 8$; *c*) $\sqrt{2\,x} + \sqrt{5\,y}$ para $x = 18$, $y = 200$.

d) $2\sqrt{x^2 + \sqrt{5\,br}}$ para $x = 4$, $b = \frac{1}{5}$, $r = 81$.

e) $\sqrt[3]{2\,ab^2}$ para $a = -5$, $b = -10$.

IV) Calcular las potencias y raíces siguientes: $\sqrt[3]{27\,a^6 b^9 c^3}$; $\sqrt[5]{\frac{-32\,x^{10}}{b^{15}}}$.

$$(2\sqrt{b})^3\ ;\ (5\sqrt{a^2x})^3\ ;\ \sqrt{9\sqrt{3}}\ ;\ \left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{8\,a^3}}\right)^7\ ;\ \sqrt[3]{-8\,c^6 b^3}$$
$$\sqrt{a^2+2\,ab+b^2}\ ;\ \sqrt{x^2 - xy + \frac{y^2}{4}}\ ;\ \sqrt{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2}\ ;\ \sqrt[4]{\frac{9.\,b.}{16\,c^{12}}}.$$

V) Calcular el área de un cuadrado sabiendo que la medida de su lado es *a*) $5\sqrt{3}$ *b*) $\sqrt{2\sqrt{2}-2}$; *c*) $6\sqrt[4]{6}$; *d*) $\sqrt{\sqrt{4}}$; *e*) $\sqrt{2\sqrt{2}}$

VI) Poner bajo un solo signo radical las siguientes expresiones:

$$\sqrt{\sqrt{3}}\ ;\quad \sqrt{\sqrt{a}}\ ;\quad \sqrt{\sqrt[3]{x^2}}\ ;\quad \sqrt{3\sqrt{3}}\ ;\quad \sqrt[b]{\sqrt[a]{x^c}}\ ;\quad \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}}\ .$$

$$\frac{\sqrt{a}\ \sqrt{b}}{\sqrt{c}}\ ;\quad \frac{a\sqrt{xy}\ \sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[5]{2a}\ \sqrt[6]{c^5}}\ :\quad \sqrt{a\sqrt{b\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}}\ ;\quad \frac{3\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}\ ;\quad \sqrt[3]{(a+b)\sqrt{a+b}}\ ;\quad \sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{a\sqrt{a}}}\ ;\quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{(a+b)}}$$

VII) Simplificar los siguientes radicales

$$\sqrt[p]{x^{pq}}\ ;\quad \sqrt[pq]{x^q}\ ;\quad \sqrt{9a^4b^2c^{10}}\ ;\quad \sqrt[x]{a^{2x}}\ ;\quad \sqrt{1\frac{9}{16}}$$

$$\sqrt[4]{9x^2y^2}\ ;\quad \sqrt[6]{27x^3y^3z^6}\ ;\quad \sqrt{x^2-2x+1}\ ;\quad \sqrt[12]{x^2z^4y^2}\ ;\quad \sqrt[4]{a^4:b^2}$$

$$\sqrt[4]{a^2+2ab+b^2}\ ;\quad \sqrt{x^2-xb+\frac{b^2}{4}}\ ;\quad \sqrt[6]{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2}$$

$$\sqrt[4]{25(a^2+2ab+b^2)}\ ;\quad \sqrt[3]{27(b^2-c)^6x^6}\ ;\quad \sqrt{\frac{(x^2-y^2)(x-y)}{x+y}}\ ;\quad \sqrt[6]{\frac{1}{64}\ \frac{x^{12}}{y^{24}}}$$

$$\sqrt[9]{\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^3+3a^2+3a+1}}\ :\quad \sqrt[x^2-y^2]{a^{x+y}\ b^{x^2+2xy+y^2}}$$

VIII) Reducir a común índice los siguientes radicales:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[6]{5}\ ;\quad \sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[4]{a^3},\ \sqrt[12]{a^5}\ ;\quad \sqrt[3]{a+b},\ \sqrt{a^2-b^2},\ \sqrt[8]{a-b}$$

$$\sqrt{a(1-x)^2},\ \sqrt[3]{a^3(1+x)^2}\ ;\quad \sqrt[3]{\frac{a-x}{a+x}},\ \sqrt{a+x},\ \sqrt[4]{\frac{1}{a+1}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{p}{q}},\ \sqrt[6]{\frac{p}{q}}\ ;\quad \sqrt[3]{a^nb},\ \sqrt{ab^n},\ \sqrt[4]{a^nb^n}\ ;\quad \sqrt[3]{25},\ \sqrt{5}$$

$$\sqrt[4]{a^3},\ \sqrt[6]{a^5},\ \sqrt[12]{a^7}\ ;\quad \sqrt[10]{x^5},\ \sqrt[24]{y^{16}},\ \sqrt[60]{x^{45}}\ ;\quad \sqrt[6]{16},\ \sqrt[12]{729},\ \sqrt[20]{3125}$$

IX) Extraer fuera del radical todos los factores posibles en las siguientes expresiones:

$\sqrt[4]{64}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[3]{32}$; $\sqrt[5]{8192}$; $\sqrt[4]{2048}$; $\sqrt{1944\,x^7y^4z^3t}$

$\sqrt{28}$; $\sqrt{8}$; $\sqrt{20}$; $\sqrt{128}$; $\sqrt{60}$; $\sqrt[3]{24}$; $\sqrt{99}$

$3\sqrt{32}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt[3]{10000}$; $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt[3]{a^3+a^4b}$; $\sqrt{a^5b^3c^2}$

$\sqrt[3]{2\,500\,0000\,a^7b^5c^2}$; $\sqrt{a^2b}$; $\sqrt{ax^2}$; $\sqrt[5]{3\,x^5b}$; $\sqrt{9\,x^2y}$

$\sqrt{10\,a^2b^2}$; $\sqrt{a^2b^6x}$; $\sqrt{x^{2n+1}}$; $\sqrt[3]{x^{3n+2}}$; $\sqrt[3]{x^3(1-x)^4}$

$5\sqrt[3]{108\,x^4}$; $\sqrt{x^3-a^2x^2}$; $\sqrt[3]{a^3+a^3b^2}$; $3\,a\sqrt[5]{2\,a^7b^5-3\,a^5b^7}$

X) Introducir dentro del radical los factores de los siguientes radicales:

$4\sqrt{3}$; $2\sqrt{5}$; $4\sqrt[3]{5}$; $x^3\sqrt{x}$; $3\,a^2\sqrt[3]{a^2}$

$2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $2\sqrt[3]{3}$; $2\sqrt{0{,}05}$; $(a+b)\sqrt{c}$

$\frac{1}{5}\sqrt[3]{100}$; $2\,a^2\sqrt[3]{5}$; $2\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$; $4\sqrt[3]{\frac{3}{80}}$; $\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}}$

$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{x}{4}\sqrt{\frac{16}{x^2}}$; $(b+2)\sqrt{\frac{1}{b^2-4}}$; $\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}$

$\frac{2}{3}x^3\sqrt{\frac{9\,y}{8\,x}}$; $(x-y)\sqrt{x+y}$; $(x+y)\sqrt{\frac{1}{x+y}}$

$\frac{a-b}{a+b}\sqrt[3]{\frac{(a+b)^3}{a^2-b^2}}$; $(1-a^2)\sqrt{\frac{1+a^2}{1-a^2}}$; $(a-b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}$

XI) Efectuar las siguientes operaciones:

$\sqrt{2}+3\sqrt{2}$; $7\sqrt{3}-5\sqrt{3}-\sqrt{3}$; $\sqrt{a}+3\sqrt{a}$

$a\sqrt{x}-b\sqrt{x}$; $7\sqrt{a}-5\sqrt{x}+12\sqrt{x}-15\sqrt{a}$; $\sqrt{3}+\sqrt{27}$

$\sqrt{48}+\sqrt{75}-\sqrt{12}$; $2\sqrt{18}-5\sqrt{50}+3\sqrt{98}-\sqrt{72}+\sqrt{8}$

$3\sqrt{20}+12\sqrt{45}+2\sqrt{125}$; $3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{54}$

$2a\sqrt[8]{a^4} - 3a\sqrt[6]{a^3} + 9\sqrt{a^3}$; $a + 3\sqrt{a} + 5\sqrt{a^2} + 7\sqrt{a^3}$

$3\sqrt{18} - 11\sqrt{2} + 2\sqrt{50} - 4\sqrt{8}$; $\frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{16}{27}} - \frac{5}{2}\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{\frac{2}{125}}$

$5\sqrt{18} - 4\sqrt{48} + 7\sqrt{50} - \sqrt{192}$; $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^6} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{16x^3} + \frac{2}{5}\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{625}$; $\sqrt{\frac{25}{18}} + \sqrt{\frac{40}{27}} + \sqrt{\frac{5}{6}}$

$a\sqrt{x} + 5\sqrt{a^2x} - 12\sqrt{(a+b)^2x}$; $\sqrt{(a+b)^2x} + \sqrt{(a-b)^2x}$

$\sqrt{4+4a^2} + \sqrt{9+9a^2} - \sqrt{25+25a^2}$; $\sqrt{a-b} + \sqrt{16a-16b}$

$4\sqrt{3a} - 7\sqrt{12a^3} + 5\sqrt{48a} + 9\sqrt{27a^3}$;

$\sqrt{\frac{x^3z}{y^3}} + \sqrt{\frac{xz^3}{y^3}} + \sqrt{\frac{x^3z^3}{y}}$; $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^6} - \frac{1}{6}\sqrt[3]{16x^3} + \frac{2}{5}\sqrt{2}$

XII) Efectuar las multiplicaciones y divisiones siguientes:

$\sqrt{2}\,\sqrt{8}$; $\sqrt{20}\,\sqrt{10}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}\,\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{3}{5}}\,\sqrt{\frac{3}{2}}\,\sqrt{\frac{5}{3}}$

$\sqrt[3]{60}\,\sqrt[3]{90}\,\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{2}\,\sqrt[9]{3}\,\sqrt[12]{5}$; $\sqrt[8]{x^4}\,\sqrt[6]{y^4}\,\sqrt[50]{z^{15}}$

$\sqrt{28}\,\sqrt{7}$; $\sqrt{5}\,\sqrt{10}$; $\sqrt{a}\,\sqrt{3a}$; $\sqrt{5x}\,\sqrt{x}$

$\sqrt{a^7}\,\sqrt{3a}$; $\sqrt[3]{2a}\,\sqrt[3]{2a^2}$; $\sqrt[3]{5y}\,\sqrt{25y^2}$; $\sqrt[3]{2a}\,\sqrt[3]{3a^4}\,\sqrt[3]{7a^5}$

$\sqrt{12} : \sqrt{3}$; $\sqrt{18} : \sqrt{2}$; $\sqrt{\frac{10}{3}} : \sqrt{\frac{15}{2}}$; $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{21}{10}} : \frac{7}{5}\sqrt{\frac{2}{105}}$

$\sqrt[3]{4ab^2}\,\sqrt[5]{8b^4c^3}$; $\sqrt[3]{24}\,\sqrt[6]{\frac{9}{8}}\,\sqrt[9]{\frac{8}{27}}$; $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{5}} \cdot 2\sqrt[4]{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt[8]{\frac{25}{9}}$

$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\,\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; $\sqrt{\sqrt{m^2+n^2}+\sqrt{2mn}} \cdot \sqrt{\sqrt{m^2+n^2}-\sqrt{2mn}}$

$\sqrt[6]{\frac{x^8}{y^2}}\,\sqrt[12]{\frac{y^{16}}{z^4}}\,\sqrt[15]{\frac{z^{20}}{x^5}}$; $\sqrt[3]{\frac{4}{9}yx}\,\sqrt{\frac{27}{125}yz^2}\,\sqrt[6]{\frac{5}{2}x^3yz^2}$

$$\sqrt[3]{144} : \sqrt[6]{12}\ ;\ \sqrt[3]{14\,ab^2} : \sqrt[4]{7\,a^3b^2}\ ;\ \sqrt[3]{\frac{9}{4}} : \sqrt[5]{\frac{9}{16}}\ ;\ \left(\sqrt[6]{243} + \sqrt[3]{48}\right) : \sqrt{3}$$

$$\frac{6}{5}\sqrt{\frac{10}{3}} : 2\sqrt{\frac{6}{5}}\ ;\ \sqrt{x^2} : \sqrt[4]{x^3}\ ;\ \sqrt{x^2 - y^2} : \sqrt{x - y}\ ;\ \sqrt{xy^3} : \sqrt[3]{xy^4}$$

$$\sqrt[3]{x^2 - y^2} : \sqrt[3]{x^2y^2 + xb^3}\ ;\ \sqrt[4]{35} : \sqrt[6]{\frac{7}{5}}\ ;\ 6 : \sqrt{3}\ ;\ 5 : \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b}} : \sqrt[6]{\frac{b}{a}}\ ;\ \sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}} : \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\ ;\ \sqrt[2n]{x} : \sqrt[n]{x^2}$$

XIII) Racionalizar los denominadores de las fracciones siguientes:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{3}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{2}{\sqrt{18}}\ ;\ \frac{2}{\sqrt{2^3}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}}\ ;\ \frac{x}{\sqrt[5]{x^7}}\ ;\ \frac{a}{2\sqrt{b}}\ ;\ \frac{3}{4\sqrt{2\,y}}\ ;\ \frac{2\,a}{\sqrt[3]{7}}\ ;\ \frac{2\,ab}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^5}}\ ;\ \frac{x\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{a}}}\ ;\ \frac{15}{\sqrt[n]{3}}\ ;\ \frac{2 + \sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{8\,a}}{\sqrt{2\sqrt{2\,a}}}\ ;\ \frac{1}{2\sqrt{2\,a}\sqrt[3]{2\,b}}\ ;\ \frac{6\,x^2}{\sqrt[5]{27\,ab^4c^3}}\ ;\ \frac{2\sqrt[6]{27}}{\sqrt[4]{9}}\ ;\ \frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[6]{8}}$$

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{5} - 2}\ ;\ \frac{4}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}\ ;\ \frac{1}{7 - \sqrt{10}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}\ ;\ \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\ ;\ \frac{9}{\sqrt{15} + \sqrt{6}}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{3\sqrt{5} - \sqrt{3}}{4\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}\ ;\ \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}\ ;\ \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\frac{a\sqrt{2} - 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{2}}\ ;\ \frac{a - b}{(a + b) - 2\sqrt{ab}}\ ;\ \frac{2\,a}{\sqrt{a + b} + \sqrt{a - b}}$$

$$\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\,;\quad \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\,;\quad \frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\,;\quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,;\quad \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}\,;\quad \frac{3}{\sqrt{11+2\sqrt{10}}}\,;\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y}}}\,;\quad \frac{1-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{7+2\sqrt{2}}}\,;\quad \frac{x-y}{\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a+\sqrt{y}}}$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\,;\quad \frac{28}{3+\sqrt{2}+\sqrt{7}}\,;\quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$$

Para resolver los tres últimos ejercicios asóciense en el denominador dos de los términos y procédase como si dicho denominador fuese un binomio.

CAPITULO II

POTENCIAS DE EXPONENTE FRACCIONARIO (*)

PROGRAMA. — *Definición de potencia de exponente fraccionario y positivo. Las potencias de exponente fraccionario y positivo tienen las mismas propiedades fundamentales que las potencias de exponente entero. Definición de potencia de exponente fraccionario y negativo. Propiedades fundamentales, (las mismas que para las potencias de exponente entero). Función exponencial. Definición. Gráfico de la función experimental.*

31. **Definición de potencia de exponente fraccionario y positivo.** — En las potencias estudiadas hasta ahora, el exponente era siempre un número entero. Así tienen significado claro para nosotros las expresiones tales como

$$3^0 \;;\; (-2)^4 \;;\; \left(-\frac{3}{5}\right)^5 \;;\; \left(-\frac{1}{8}\right)^{-2} \text{ etc.}$$

Vamos a extender ahora el estudio de las potencias al caso en que el exponente de éstas sea un número fraccionario positivo.

Como la definición de potencia con exponente entero no es aceptable en el caso en que el exponente sea fraccionario, daremos una nueva definición.

Por razones que después veremos, los matemáticos han preferido la siguiente

(*) Creemos conveniente que los alumnos comprueben que todo lo relativo a potencias de exponente fraccionario es una repetición de lo estudiado al tratar las potencias de exponente entero y negativo, pues de las popiedades de estas últimas resultan las de las primeras con sólo cambiar la frase exponente entero y negativo por la de exponente fraccionario.

DEFINICION. — Toda *potencia de exponente fraccionario y positivo* de un número real significa la raíz de índice igual al denominador del exponente, de la potencia de dicho número real cuyo exponente es el numerador del exponente dado.

En símbolos: $\alpha^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m}$

EJMS.: $3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3} = \sqrt[5]{27}$; $-8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8^1} = \sqrt[3]{-8} = -2$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}}$$

32. **Las potencias de exponente fraccionario y positivo tienen las mismas propiedades fundamentales que las potencias de exponente entero.** — La definición de potencia con exponente fraccionario y positivo elegida, que puede parecer arbitraria, tiene la ventaja, como veremos enseguida, de que con ella todas las propiedades de la potencias con exponente entero, siguen siendo válidas para las nuevas potencias.

PROPIEDAD UNIFORME. — *Si ambos miembros de una igualdad se elevan a una misma potencia de exponente fraccionario y positivo, se obtiene otra igualdad.*

Si $\alpha = \beta$ es $\alpha^{\frac{m}{n}} = \beta^{\frac{m}{n}}$

DEMOST.) Siendo	$\alpha = \beta$	por hipótesis
es	$\alpha^m = \beta^m$	por prop. uniforme potenciación
y	$\sqrt[n]{\alpha^m} = \sqrt[n]{\beta^m}$	por prop. uniforme radicación
luego	$\alpha^{\frac{m}{n}} = \beta^{\frac{m}{n}}$	por def. exponente fracionario

PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS. — I) *La potencia de exponente fraccionario y positivo de un producto, es igual al producto de las potencias de los factores.*

En símbolos: $(\alpha.\beta.\gamma)^{\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}}.\beta^{\frac{m}{n}}.\gamma^{\frac{m}{n}}$

Demost.) Siendo $(\alpha\beta\gamma)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(\alpha\beta\gamma)^m}$ por definición, es por propiedad distributiva de la potenciación de números reales de exponente natural:

$$(\alpha\beta\gamma)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^m \beta^m \gamma^m} = \sqrt[n]{\alpha^m} \cdot \sqrt[n]{\beta^m} \cdot \sqrt[n]{\gamma^m} \quad \text{por prop. distrib. rad.}$$

luego $(\alpha\beta\gamma)^{\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}} \cdot \beta^{\frac{m}{n}} \cdot \gamma^{\frac{m}{n}}$ por def. de exponente fraccionario

Ejm.: $\left(-2.\frac{1}{3}.5\right)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{1}{3}}.\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2}\,\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\,\sqrt[3]{5}$

II) *Toda potencia de exponente fraccionario y positivo de un cociente, es igual al cociente de las potencias, de igual exponente, del dividendo y divisor*

En símbolos: $(\alpha : \beta)^{\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}} : \beta^{\frac{m}{n}}$

Demost.) Si $\alpha : \beta = \gamma$ es $\alpha = \beta\gamma$ por def. de cociente

y elevando a la potencia m da $\alpha^m = \beta^m \gamma^m$ por puf. dist. exp. nat

luego $\alpha^m : \beta^m = \gamma^m$ por def. de cociente

y sustituyendo a γ por su igual $\alpha : \beta$ resulta: $(\alpha : \beta)^{\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}} : \beta^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo: $\left(-\frac{3}{4}:8\right)^{\frac{2}{3}} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} : (8)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{3}{4}\right)^2} : \sqrt[3]{8^2}$

$$= \sqrt[3]{\frac{9}{16}} : \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{\frac{9}{16} : 64} = \sqrt[3]{\frac{9}{16.64}}$$

Producto de potencias de igual base. — *El producto de potencias de igual base y exponente fraccionario y positivo es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas.*

En símbolos: $\alpha^{\frac{m}{n}}.\alpha^{\frac{p}{q}}.\alpha^{\frac{r}{s}} = \alpha^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

Demost.) De acuerdo con la definición de potencia con exponente fraccionario y positivo, se tiene:

Primer miembro: $\alpha^{\frac{m}{n}}\,\alpha^{\frac{p}{q}}\,\alpha^{\frac{r}{s}} = \sqrt[n]{\alpha^m}\,\sqrt[q]{\alpha^p}\,\sqrt[s]{\alpha^r}$ [1]

y como para multiplicar radicales es necesario reducirlos primero a común índice y multiplicar luego los radicandos, se tiene:

$$a^{\frac{m}{n}}\,a^{\frac{p}{q}}\,a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[nqs]{a^{mqs}}\,\sqrt[nqs]{a^{pns}}\,\sqrt[nqs]{a^{rnq}} = \sqrt[nqs]{a^{mqs}\,a^{pns}\,a^{rnq}} = \sqrt[nqs]{a^{mqs+pns+rnq}}$$

Por otra parte el segundo miembro da:

$$a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{mqs+pns+rnq}{nqs}} = \sqrt[nqs]{a^{mqs+pns+rnq}} \quad \text{[2] def. poten. exp. frac.}$$

Luego de [1] y [2] resulta $a^{\frac{m}{n}}\,a^{\frac{p}{q}}\,a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$ por consecuencia II del carácter transitivo.

$$\text{Ejm.:}\quad \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{10+15+4}{20}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{29}{20}} = \sqrt[20]{\left(\frac{3}{4}\right)^{29}}$$

Cociente de potencias de iguales bases. — *El cociente de dos potencias de igual base y exponente fraccionario y positivo, es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor.*

En símbolos: $\alpha^{\frac{m}{n}} : \alpha^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

Demost.) Es $a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ el cociente de dividir $a^{\frac{m}{n}}$ por $a^{\frac{p}{q}}$ porque

Cociente $a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \times$ *divisor* $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}$ que es el dividendo

luego $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

$$\text{Ejm.:}\quad \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{3}{5}} : \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{10}} = \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{3}{5}-\frac{1}{10}} = \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{5}{10}} = \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

Potencia de una potencia. — *La potencia de exponente fraccionario y positivo de una potencia con exponente fraccionario y positivo, es otra potencia de la misma base cuyo exponente es el producto de los exponentes.*

En símbolos: $\left(\alpha^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \alpha^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$

DEMOST.) Siendo $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$ [1]

Por otra parte $a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$ [2]

Luego de [1] y [2] resulta $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$ por consec. carác. transit.

EJMS.: $\left[(-3)^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = (-3)^{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}} = (-3)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-3)^2} = \sqrt[3]{9}$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{\frac{1}{2}}$$

33. **Definición de potencia de exponente fraccionario y negativo.** — Teniendo en cuenta las definiciones de potencia con exponente entero y negativo y potencia con exponente fraccionario y positivo resulta natural dar la siguiente

DEFINICION. — Toda *potencia con exponente fraccionario y negativo* de un número real, significa el cociente del número uno por una potencia de la misma base, con exponente positivo y de igual valor absoluto que el de la dada.

En símbolos: $\alpha^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{m}{n}}}$

EJEMPLOS: $(-3)^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{-3^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-3}}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{3^2}{4^2}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{9}{16}}}$$

Siguiendo procedimientos análogos a los empleados en los párrafos anteriores puede demostrarse que todas las propiedades de las potencias con exponente natural siguen siendo válidas para las de exponente fraccionario y negativo.

NOTA. — Combinando potencias con exponentes fraccionarios positivos y negativos, podrán presentarse casos tales como

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{-\frac{}{q}} \quad ; \quad a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{}{q}} \quad ; \quad \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} \quad ; \quad a^{-\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} \quad ; \quad \left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

en todos los cuales son aplicables también las mismas reglas de las potencias con exponente entero o fraccionario, las que podrán demostrarse por procedimientos análogos a los seguidos en este mismo capítulo.

EJEMPLOS. $a^{-\frac{1}{3}} . a^{-\frac{2}{3}} . a^{-\frac{5}{3}} = a^{-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}} = a^{-\frac{8}{3}}$;

$$x^{-\frac{1}{2}} : x^{-\frac{3}{4}} = x^{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)} = x^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad \left(a^{-\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{2}{5} \cdot -\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{5}} \quad ;$$

$$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{5}}\right]^{-\frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{5} \cdot -\frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{10}}$$

34. **Gráfico de la función exponencial $y = a^x$.** — Sea la función $y = a^x$. Fijando un valor para a, por ejemplo $a = 10$, se forma una tabla de valores, tomando a x como argumento y hallando los valores correspondientes de y.

Tomando los valores de x como abscisas y los correspondientes de y como ordenadas en un sistema de ejes coordenados ortogonales, quedan determinados puntos cuyo conjunto constituyen lo que se llama la *gráfica de la función exponencial.*

Siendo infinitos los pares de valores correspondientes que se pueden obtener de una función tal como la dada, en la práctica sólo se representan algunos de los puntos de su gráfica y se les une por un trazo continuo. Teniendo en cuenta que para $x = 0$ resulta $y = 10^0 = 1$

» $x = 1$ » $y = 10^1 = 10$

» $x = \frac{1}{2}$ » $y = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} \simeq 3{,}16$

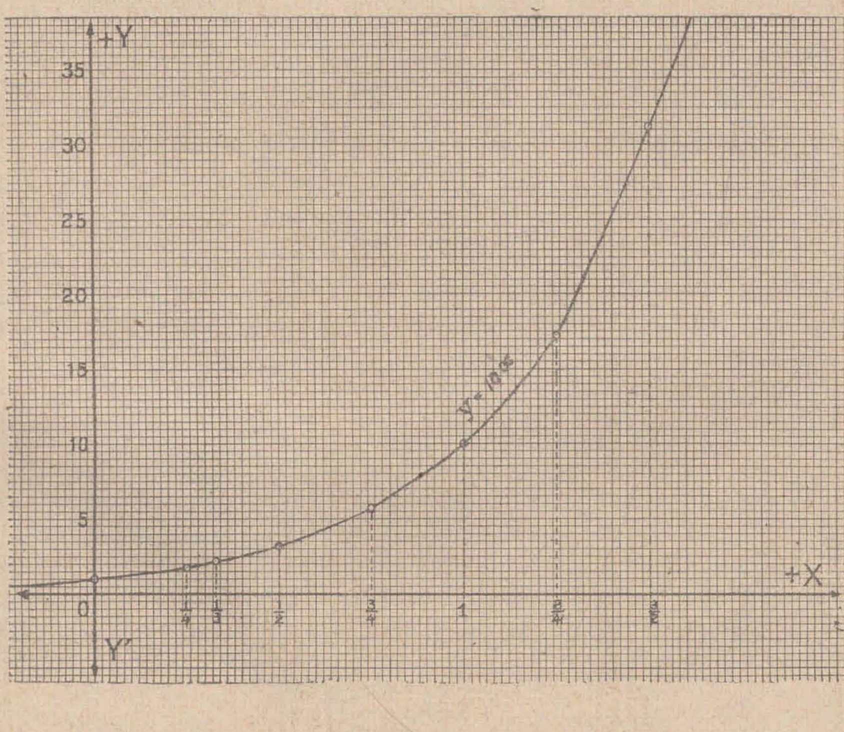
» $x = \frac{1}{3}$ » $y = 10^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{10} \simeq 2{,}15$

» $x = -1$ » $y = 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ etc.

se forma la tabla de valores que damos a continuación

x	-2	-1	0	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
y	0,01	0,1	1	10	100	3,1622...	2,1544...	31,62...	0,3

y con ellos la gráfica que sigue:



Aplicaciones. — I. Escribir las expresiones siguientes usando sólo exponentes e índices enteros y positivos

$a^{\frac{1}{3}}$; $b^{\frac{3}{2}}$; $x^{\frac{1}{5}}$; $a^{\frac{m}{n}}$; $x^{1+\frac{1}{3}}$; $a^{-\frac{1}{2}}$; $x^{-\frac{1}{3}}$; $a^{-\frac{m}{n}}$

$(a-b)^{\frac{1}{2}}$; $(a+b)^{-\frac{2}{3}}$; $x^{\frac{2}{5}} . y^{\frac{2}{5}}$; $(a . b^{-2})^{-\frac{2}{3}}$

$\left(a^{-\frac{1}{2}} . b^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{6}}$; $x^{0,5}$; $a^{-0,25}$; $a^{0,2}$; $(a^{-2} b^{2})^{-\frac{1}{2}}$

II. Escribir las expresiones siguientes aplicando la definición de exponente fraccionario

$\sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $(\sqrt{5}\,)^3$; $\sqrt[6]{a^2 b^6}$; $\sqrt{x^{-4}}$; $\sqrt[3]{b^{-2}}$

$\sqrt[3]{a^{-2} b^{-4}}$; $\sqrt{(a-b^2)^3}$; $\sqrt{8\,a^2 : 4\,b^2}$; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^5}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[4]{7}}$

III. Efectuar las siguientes operaciones: $9^{\frac{1}{2}} . 9^{\frac{1}{4}}$; $25^{\frac{1}{2}} . 25^{\frac{1}{6}}$; $0,25^{\frac{1}{2}} : 0,25^{\frac{1}{4}}$

$a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{2}{3}}$; $x^{\frac{1}{4}} . x^{\frac{1}{6}} . x^{\frac{3}{2}}$; $b^2 : b^{-\frac{1}{2}}$; $\sqrt{a} . a^{-\frac{1}{2}}$

$a^{-2} . b^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{1}{2}} . b^{\frac{2}{3}}$; $a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a^{\frac{3}{2}}}$; $a^{\frac{5}{3}} . \sqrt[3]{b^{-4}}$; $\left(a^{-\frac{2}{5}} + b^{-\frac{1}{5}}\right)^2$

$m^{-\frac{3}{5}} . m^{\frac{2}{15}}$; $x^{\frac{1}{3}} . x^{-\frac{1}{6}}$; $a^{\frac{3}{5}} . a^{-\frac{5}{6}}$; $b . b^{-\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{5}{6}} . \sqrt[5]{a^{-\frac{2}{3}}}$

IV. Hallar el valor de las potencias siguientes:

$36^{\frac{1}{2}}$; $0,125^{\frac{1}{3}}$; $32^{-\frac{1}{5}}$: $16^{\frac{3}{2}}$; $\left(\dfrac{121}{144}\right)^{\frac{1}{2}}$; $49^{\frac{1}{2}}$; $1,44^{-\frac{1}{2}}$

$64^{-\frac{1}{6}}$; $8^{\frac{1}{3}}$; $27^{-\frac{1}{3}}$; $81^{\frac{3}{4}}$; $512^{-\frac{2}{3}}$; $1,728^{-\frac{1}{3}}$; $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$; $0,0025^{-\frac{3}{2}}$

V. Hallar x sabiendo que

$x^{\frac{1}{2}} = 3$; $x^{-\frac{1}{2}} = 3$; $x^{\frac{1}{4}} = -2$; $x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{4}$; $\left(\dfrac{1}{4}\,x\right)^{-\frac{2}{3}} = 1$

$x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$; $x^{-2} = 4$; $\left(x^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$; $(2x)^{-\frac{3}{2}} = 1$

VI. Resolver las ecuaciones siguentes:

$$x^{\frac{1}{2}} + (x-9)^{\frac{1}{2}} = 36\,(x-9)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{R.: } x = 25$$

$$(2-x)^{\frac{2}{3}} = (4 - 5\,x - 3\,x^2)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{R.: } x = 0$$

CAPITULO III

LOGARITMOS

PROGRAMA. — *Definición. Logaritmo de la base, de uno, y de una potencia de la base. Función logarítmica: Su representación gráfica. Relacionar la función logarítmica con la exponencial. Propiedades de los logaritmos. Logaritmo de un producto, de un cociente, de una potencia y de una raíz. Logaritmos decimales: Definición. Característica y mantisa. Deducción de las reglas para la determinación de la característica. La mantisa del logarismo decimal de un número, no altera cuando se multiplica o divide el número por la unidad seguida de ceros. Tabla de logaritmos: Descripción de una tabla de logaritmos de simple entrada y de doble entrada. Manejo de las mismas. Aplicación de los logaritmos al cálculo de productos, cocientes, potencias y raíces. Cologaritmo: Definición. Aplicación del cologaritmo al cálculo de cocientes. Multiplicación y división de un logaritmo con característica positiva o negativa por un número natural. Cálculo de expresiones en que figuren productos, cocientes, potencias y raíces. Escalas logarítmicas: Aplicación de las mismas para la confección de gráficos. Ejercicios y problemas.*

35. **Definición de logaritmo.** — Dados dos números reales α y β, siendo β un número positivo distinto de uno, se llama *logaritmo* del número α en *base* β, al exponente de la potencia a la que hay que elevar la base β para obtener a α.

En este curso solo nos ocuparemos de los logaritmos cuya base β sea un número natural b.

NOTACIÓN. $\log_b \alpha = \gamma$ se lee: logaritmo de α en base b es igual a γ.

En símbolos: $\log_b \alpha = \gamma \quad \text{si} \quad b^\gamma = \alpha$.

35. **Logaritmo de la base, de uno y de una potencia de la base.** — Teniendo en cuenta la definición de logaritmo y que la potencia primera de un número es igual a dicho número (*Mat.* I) resulta el siguiente:

COROLARIO. — I) *El logaritmo de la base de un sistema de logaritmos, en dicho sistema, es igual a uno.*

En símbolos: $\log_b b = 1$ puesto que $b^1 = b$

EJEMPLOS: $\log_{10} 10 = 1$; $\log_5 5 = 1$

Teniendo en cuenta la definición de logaritmo y que la potencia cero de un número es igual a uno (*Mat.* I) resulta el siguiente:

COROLARIO. — II) *El logaritmo del número uno es, en cualquier base, igual a cero*

En símbolos: $\log_b 1 = 0$ puesto que $b^0 = 1$

EJEMPLOS: $\log_{10} 1 = 0$; $\log_5 1 = 0$

De la definición de logaritmo resulta el siguiente

COROLARIO. — III) *El logaritmo de una potencia de la base de un sistema de logaritmos, en dicho sistema, es el exponente de esa potencia.*

En símbolos: $\log_b b^m = m$ puesto que $b^m = b^m$

EJEMPLOS: $\log_{10} 10^5 = 5$; $\log_b b^{2,58} = 2,58$; $\log_b b^{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

$$\log_{10} 1000000 = \log_{10} 10^6 = 6$$

$$\log_{10} 0,00001 = \log_{10} \frac{1}{10^5} = \log_{10} 10^{-5} = -5$$

$\log_2 32 = 5$ puesto que $2^5 = 32$

$\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$ » » $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$

$\log_3 \sqrt[5]{3^2} = \log_3 3^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$ » » $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$

$\log_{10} 0,01 = -2$ » » $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$

Estos ejemplos y otros análogos nos muestran *que los logaritmos pueden ser números enteros, fraccionarios o irracionales.*

Observación. — Por definición de logaritmo la igualdad $\alpha = b^{\gamma}$ se puede escribir así $\log_b \alpha = \gamma$.

Ejemplos. — La igualdad

$343 = 7^3$ puede escribirse así: $\log_7 343 = 3$

la $1 = 10^0$ » » » $\log_{10} 1 = 0$

36. **Gráfico de la función logarítmica.** — Sea, por ejemplo, representar la función $y = \log_{10} x$, que se llama *función logarítmica*, pues la variable dependiente y es el logaritmo de la variable independiente x en base 10.

Teniendo en cuenta que por definición de logaritmo, es

$$\log_{10} 1 = 0 \quad \text{puesto que} \quad 10^0 = 1$$

$$\log_{10} 0,1 = -1 \quad » \quad » \quad 10^{-1} = 0,1$$

$$\log_{10} 10 = 1 \quad » \quad » \quad 10^1 = 10$$

$$\log_{10} \sqrt{10} = \frac{1}{2} \quad » \quad » \quad 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

podemos formar el siguiente cuadro de valores

x	1	10	0,1	$\sqrt{10}$
y	0	1	-1	$\frac{1}{2}$

que nos permite obtener la gráfica que sigue donde se ha tomado la unidad para las ordenadas diez veces mayor que la de las abscisas.

Esta gráfica nos permite hallar el valor aproximado del logaritmo de un número cualquiera, 6, por ejemplo.

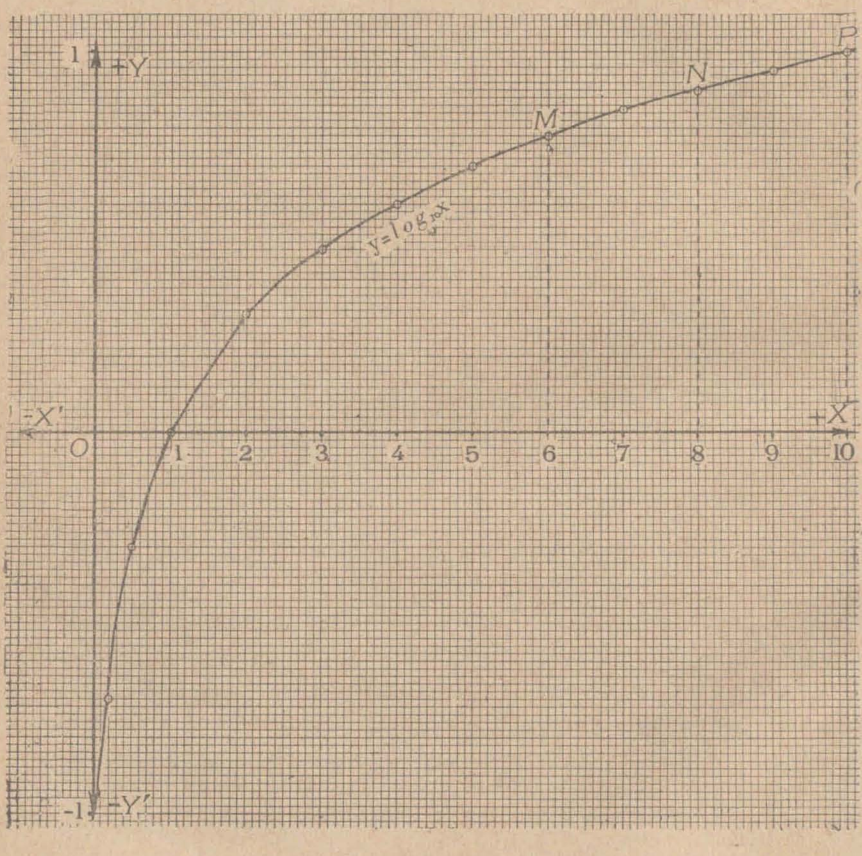
Para ello basta trazar por el punto de abscisa 6 la paralela al eje de las y hasta cortar a la gráfica en un punto M cuya ordenada nos dá el logaritmo de 6. En nuestro caso resulta $\log 6 = \text{med. } \overline{M6} \cong 0,78$.

Puede también observarse que: *a mayor número corresponde mayor logaritmo*, asi: $\log_{10} 8 > \log_{10} 6$ puesto que $\overline{N8} > \overline{M6}$, y que si *un número está comprendido entre otros dos, lo mismo sucede con sus respectivos logaritmos*, así:

como $\quad 6 < 8 < 10 \quad$ es $\quad \log_{10} 6 < \log_{10} 8 < \log_{10} 10$

puesto que $\quad \overline{M6} < \overline{N8} < \overline{P10}$

Puede demostrarse, por medio del cálculo, que las propiedades que acabamos de comprobar son siempre válidas.



37. **Relación entre la función logarítmica y la exponencial.** — De la función exponencial $y = 10^x$

resulta $x = \log_{10} y$ por definición de logaritmo

lo que nos dice que *las abscisas de los puntos de la gráfica de esa función son los logaritmos de los números representados por las ordenadas de esos puntos.*

Así, por ejemplo, si se quiere hallar el log 10, se traza por el punto del eje de las íes de ordenada 10 la paralela al eje de las abscisas hasta cortar a la gráfica. La abscisa 1 del punto de intersección es el logaritmo buscado.

Análogamente de la función logarítmica $y = \log_{10} x$

resulta $x = 10^y$ por def. de log.

lo que nos dice que *las abscisas de los puntos de la gráfica de la función logarítmica son las potencias de base* 10 *de los números representados por las ordenadas de esos puntos.*

En resumen: la gráfica de la función logarítmica de base 10 es la de la exponencial de la misma base, en las que se cambian las abscisas por las ordenadas y recíprocamente, de manera que, construída la gráfica de la exponencial de base 10, se obtiene la curva logarítmica de base 10 haciendo girar el plano de los ejes 180° alrededor de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, con lo cual el eje XX' ocupa la posición que ocupaba el YY', y éste la de aquél.

38. **Logaritmos de números negativos.** — Tratemos de hallar el $\log_2 - 8$.

$$\log_2 - 8 \neq 3 \quad \text{puesto que} \quad 2^3 = 8 \neq -8$$

$$\log_2 - 8 \neq -3 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \neq -8$$

luego $\log_2 - 8$ no existe entre los números reales, pues no hay ningún número real que tomado como exponente de 2 nos dé una potencia igual a — 8.

Como lo mismo sucedería al tratar de hallar el logaritmo de cualquier número negativo, pues todas las potencias de un número positivo son números positivos, resulta que

Los números negativos no tienen logaritmos en el campo real.

Esto puede verse claramente observando que la gráfica de la función logarítmica, no tiene ningún punto en el segundo ni en el tercer cuadrante, donde las abscisas son negativas.

39. **Propiedades de los logaritmos.** — PROPIEDAD UNIFORME. — *Si se toman los logaritmos, de la misma base, de ambos miembros de una igualdad entre números positivos, se obtiene otra igualdad*

HIP.) $\alpha = \alpha'$; α y $\alpha' > 0$ TESIS) $\log_b \alpha = \log_b \alpha'$
base $b \neq 1$

DEMOST.) Si	$\log_b \alpha = \beta$	es	$b^{\beta} = \alpha$		por definición de logaritmo
»	$\log_b \alpha' = \beta'$	»	$b^{\beta'} = \alpha'$		» » » »
y como			$\alpha = \alpha'$		por hipótesis
es			$b^{\beta} = b^{\beta'}$	[1]	por cons. carac. transtivo
para lo cual debe ser			$\beta = \beta'$	[2]	
pues si fuese			$\beta \lesseqgtr \beta'$		
como $b \neq 1$,	por híp.,	sería	$b^{\beta} \lesseqgtr b^{\beta'}$		lo cual no es posible por [1]

Reemplazando en [2] β por $\log_b \alpha$ y β' por $\log_b \alpha'$, se tiene:

$$\log_b \alpha = \log_b \alpha'$$

40. **Propiedad no distributiva con respecto a la suma y a la resta.** — COROLARIO. — *La logaritmación no es distributiva con respecto a la adición ni a la sustracción.*

En símbolos: $\log_b (\alpha + \beta + \gamma) \neq \log_b \alpha + \log_b \beta + \log_b \gamma$

$$\log_b (\alpha - \beta) \neq \log_b \alpha - \log_b \beta$$

En efecto: para negar la propiedad distributiva basta encontrar un caso en que no se cumpla.

EJM. I: $\log_2 (16 + 8 + 8) = \log_2 32 = 5$ pues $2^5 = 32$

en cambio $\log_2 16 + \log_2 8 + \log_2 8 = 4 + 3 + 3 = 10$

luego $\log_2 (16 + 8 + 8) \neq \log_2 16 + \log_2 8 + \log_2 8$

y por lo tanto $\log_b (\alpha + \beta + \gamma) \neq \log_b \alpha + \log_b \beta + \log_b \gamma$

EJM. II: $\log_2 (16 - 8) = \log_2 8 = 3$ pues $2^3 = 8$

en cambio $\log_2 16 - \log_2 8 = 4 - 3 = 1$

luego $\log_2 (16 - 8) \neq \log_2 16 - \log_2 8$

y por lo tanto $\log_b (\alpha - \beta) \neq \log_b \alpha - \log_b \beta$

41. **Propiedad no distributiva con respecto a la multiplicación ni a la división.**— COROLARIO. — *La logaritmación no es distributiva con respecto a la multiplicación ni a la división.*

En símbolos: $\log_b (\alpha . \beta . \gamma) \neq \log_b \alpha . \log_b \beta . \log_b \gamma$

$\log_b (\alpha : \beta) \neq \log_b \alpha : \log_b \beta$

En efecto: para negar esta propiedad basta encontrar un caso en que no se cumpla.

EJM. I: $\log_2 (4.8.16) = \log_2 512 = 9$ puesto que $2^9 = 512$

en cambio $\log_2 4 . \log_2 8 . \log_2 16 = 2.3.4 = 24$

luego $\log_2 (4.8.16) \neq \log_2 4 . \log_2 8 . \log_2 16$

y por lo tanto $\log_b (\alpha . \beta . \gamma) \neq \log_b \alpha . \log_b \beta . \log_b \gamma$

EJM. II: $\log_2 (64 : 16) = \log_2 4 = 2$ pues $2^2 = 4$

en cambio $\log_2 64 : \log_2 16 = 6 : 4 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

luego $\log_2 (64 : 16) \neq \log_2 64 : \log_2 16$

y por lo tanto $\log_b (\alpha : \beta) \neq \log_b \alpha : \log_b \beta$

42. Logaritmo de un producto. — TEOREMA. — *El logaritmo de un producto de números positivos es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.*

HIP.) α, β n^os reales positivos TESIS) $\log_b (\alpha . \beta) = \log_b \alpha + \log_b \beta$

base $b \neq 1$

DEMOST. — Llamando x al $\log_b \alpha$ e y al $\log_b \beta$ se tiene, por definición de logaritmos, que

si $\log_b \alpha = x$ [1] es $b^x = \alpha$

y si $\log_b \beta = y$ [2] es $b^y = \beta$

mult. m. a m. da $b^x . b^y = \alpha . \beta$ por prop. unif. mult.

o sea $b^{x+y} = \alpha . \beta$ y de acuerdo con la

def. de logaritmo (obs. n° 35) $\log_b (\alpha . \beta) = x + y$

Sust. x e y por [1] y [2] $\log_b (\alpha . \beta) = \log_b \alpha + \log_b \beta$

EJM.: $\log_2 (4.8.16) = \log_2 4 + \log_2 8 + \log_2 16 = 2 + 3 + 4 = 9$

43. Logaritmo de un cociente. — TEOREMA. — *El logaritmo de un cociente de números positivos es igual al logaritmo del dividendo menos el del divisor.*

HIP.) α, β números reales positivos

base $b \neq 1$.

TESIS) $\log_b (\alpha : \beta) = \log_b \alpha - \log_b \beta$

DEMOST.) Llamando x al $\log_b \alpha$, e y al $\log_b \beta$ se tiene, por definición de logaritmos, que:

si $\log_b \alpha = x$ [1] es $b^x = \alpha$

y si $\log_b \beta = y$ [2] es $b^y = \beta$

Dividiendo m. a m. da $b^x : b^y = \alpha : \beta$ por prop. unif. div.

y también $b^{x-y} = \alpha : \beta$

y de acuerdo con la definición de logaritmo (obs. nº 35)

$$\log_b (\alpha : \beta) = x - y.$$

Sustituyendo x e y por [1] y [2] se tiene:

$$\log_b (\alpha : \beta) = \log_b \alpha - \log_b \beta.$$

EJEMPLO: $\log_2 (64 : 16) = \log_2 64 - \log_2 16 = 6 - 4 = 2$

44. **Logaritmo de una potencia.** — TEOREMA. — *El logaritmo de una potencia de un número positivo se obtiene multiplicando su exponente por el logaritmo de su base.*

HIP.) α número real positivo ; m número racional ; $b \neq 1$.

TESIS) $\log_b \alpha^m = m \log_b \alpha$

DEMOST.) Llamando x al $\log_b \alpha$ tenemos que:

si $\log_b \alpha = x$ [1] es $b^x = \alpha$

Elevando ambos miembros a la potencia $m^{\text{ésima}}$, da.

$$(b^x)^m = \alpha^m$$

o sea $b^{mx} = \alpha^m$ por pot. de pot.

Luego (obs. nº 35) $\log_b \alpha^m = mx$

Sustituyendo x por [1] $\log_b \alpha^m = m \log_b \alpha$

EJMS.: $\log_5 125^2 = 2 \log_5 125 = 2 . 3 = 6.$

$$\log_5 \sqrt[3]{625} = \log_5 625^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_5 625 = \frac{1}{3} . 4 = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}$$

45. **Logaritmo de una raíz.** — Corolario. — *El logaritmo de una raíz de un número positivo se obtiene dividiendo el logaritmo del radicando por el índice de la raíz.*

En símbolos: $\log_b \sqrt[n]{\alpha} = \dfrac{\log_b \alpha}{n}$

En efecto. $\log_b \sqrt[n]{\alpha} = \log_b \alpha^{\frac{1}{n}}$ por prop. unif. y def. exp. frac.

luego $\log_b \sqrt[n]{\alpha} = \dfrac{1}{n} \log_b \alpha = \dfrac{\log_b \alpha}{n}$ por el teor. anter.

Ejemplo: $\log_2 \sqrt[3]{64} = \dfrac{\log_2 64}{3} = \dfrac{6}{3} = 2.$

46. **Logaritmos decimales.** — Definicion. — Se llaman *logaritmos decimales* a los que tienen por base al número diez.

Ejm.: El logaritmo decimal de 100 000 es 5 porque $10^5 = 100\,000$.

En adelante nos ocuparemos solamente de los logaritmos decimales de manera que en las notaciones suprimiremos la escritura de la base cuando se trate de un logaritmo decimal.

Así escribiremos $\log 100\,000 = 5$ en lugar de $\log_{10} 100\,000 = 5$.

47. **Característica y mantisa.** — De acuerdo con la definición de logaritmos decimales resulta que solamente las potencias enteras de la base tendrán por logaritmo un número entero.

Por ejemplo $\log 10 = 1$, $\log 10\,000 = 4$, $\log 0{,}1 = -1$ etc.

En cambio los demás números, como se hallan comprendidos entre potencias enteras de diez tendrán por logaritmos números comprendidos entre los de dichas potencias, es decir, entre dos números enteros. Luego, en general, los logaritmos de base diez están formados de una parte entera, llamada *característica*, y de otra decimal llamada *mantisa* la cual puede tener infinitas cifras.

Ejm. Si $\log 12 = 1{,}\underline{abc}\ldots$ es 1 la *característica* y $0{,}\underline{abc}\ldots$ la *mantisa*.

48. Determinación de la característica. — PRIMER CASO. — *Números enteros o decimales con parte entera.*

Tratemos de hallar los logaritmos de los números 8; 25,7; 186 etc. de una, dos, y tres etc., cifras enteras respectivamente.

Teniendo en cuenta que 8 está comprendido entre 1 y 10 y que

$$\log 1 = 0 \quad \text{y} \quad \log 10 = 1$$

resulta que el logaritmo buscado está comprendido entre 0 y 1, es decir

$$\log 8 = 0 + \textit{fracción decimal menor que } 1$$

Teniendo en cuenta que 25,7 está comprendido entre 10 y 100 y que

$$\log 10 = 1 \quad \text{y} \quad \log 100 = 2$$

resulta que el logaritmo buscado está comprendido entre 1 y 2, es decir

$$\log 25{,}7 = 1 + \textit{fracción decimal menor que } 1$$

Por último como 186 está comprendido entre 100 y 1000 y

$$\log 100 = 2 \quad \text{y} \quad \log 1\,000 = 3$$

resulta que el logaritmo buscado está comprendido entre 2 y 3, es decir

$$\log 186 = 2 + \textit{fracción decimal menor que } 1$$

Estos ejemplos y otros análogos permiten observar que los números enteros o decimales con parte entera de una cifra tienen por característica de su logaritmo al número 0, los de dos cifras al número 1, los de tres cifras al número 2, etc., lo que nos permite dar la siguiente

REGLA I. — *La característica del logaritmo de un número entero o decimal con parte entera, es nula o positiva y consta de tantas unidades como cifras enteras tiene el número menos una.*

Así: *Característica* log 9 347 = 3 ; *característica* log 515 790 = 5

SEGUNDO CASO. — *Números decimales menores que la unidad.* — Tratemos de hallar los logaritmos de los números 0,72; 0,056; 0,004; etc., en los que la primera cifra significativa sea, respectivamente, décimas, centésimas, milésimas, etc.

Teniendo en cuenta que 0,72 está comprendido entre 0,1 y 1 y que

$$\log 0{,}1 = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1 \quad y \quad \log 1 = 0$$

resulta que el logaritmo buscado es negativo y está comprendido entre — 1 y 0, es decir

$$\log 0{,}72 = -1 + \textit{fracción decimal positiva menor que } 1$$

Teniendo en cuenta que 0,056 está comprendido entre 0,01 y 0,1 y que

$$\log 0{,}01 = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2 \quad y \quad \log 0{,}1 = -1$$

resulta que el logaritmo buscado es negativo y está comprendido entre — 2 y — 1, es decir

$$\log 0{,}056 = -2 + \textit{fracción decimal positiva menor que } 1.$$

Estos ejemplos y otros análogos permiten observar que los decimales menores que uno, cuya primer cifra significativa es del orden de los décimos, es decir, que tienen un cero antes de dicha cifra, tienen por característica de su logaritmo al número — 1, que los que tienen dos ceros antes de su primera cifra significativa tienen por característica de su logaritmo a — 2, etc., lo que nos permite dar la siguiente

Regla II. — *La característica del logaritmo de un número decimal con parte entera igual a cero, es negativa y consta de tantas unidades como ceros haya antes de la primera cifra significativa.*

Así:

Característica log 0,004 = — 3, *Característica log* 0,000001 = — 6.

Convención. — La suma entre la característica del logaritmo de un número decimal menor que uno y su mantisa no se efectúa, sino que se deja indicada correspondiendo el signo menos solamente a su característica. Así, por ejemplo, como

$$\log 0{,}07025 = -2 + \textit{una fracción decimal menor que } 1$$

y esa fracción decimal es 0,84665 (como veremos más adelante),

se escribe $\log 0{,}07025 = \bar{2}{,}84665$

en lugar de $\log 0{,}07025 = -2 + 0{,}84665 = -1{,}15335$

El signo menos se coloca encima de la característica para que se tenga bien presente que solamente ella es negativa, siendo, en cambio, positiva la mantisa.

Por ejemplo $\bar{1},53948$ significa $-1 + 0,53948$

49. **Teorema.** — *La mantisa del logaritmo de un número no altera cuando se multiplica o divide al número por la unidad seguida de ceros.*

Hip.) $\log 6934 = 3,84098$

Tesis) *Mantisa log* $(6934 \times 10000) = 0,84098$

Mantisa log $(6934 : 100) = 0,84098$

Demost.) Siendo $\log (6934 \times 10000) = \log 6934 + \log 10000$ por un teor. ant. (n° 42)

como $\log 6934 = 3,84098$ y $\log 10000 = 4$ por definición, resulta

$$\log (6934 \times 10000) = 3,84098 + 4$$

y como 4 es un número entero para efectuar la suma del segundo miembro, se le sumará 4 a 3 con lo cual la parte decimal 84098 quedará inalterada

luego $\log (6934 \times 1000) = (3 + 4), 84098 = 7,84098$

es decir *Mantisa log* 6934 = *mantisa* log $(6934 \times 10000) = 0,84098$

Análogamente se tiene:

$\log (6934 : 100) = \log 6934 - \log 100$ por un teor. ant. (n° 43)

$$= 3,84098 - 2 = (3 - 2), 84098 = 1,84098$$

luego *mantisa log* 6934 = *mantisa log* $(6934 : 100) = 0,84098$

50. **Tablas de los logaritmos.** — Se llaman así los cuadros donde están consignados los logaritmos de los números desde 1 hasta un cierto límite, 10 000 ó 10 800, por ejemplo.

Como en general los logaritmos tienen por mantisa números de infinitas cifras decimales, resulta que las tablas solo dan las primeras de esas cifras, es decir, valores aproximados de esos logaritmos.

A continuación describimos dos Tablas de Logaritmos con cinco cifras decimales una de *simple entrada* y otra de *doble entrada*. Tomamos como ejemplo de la primera la de J. Hoüel y de la segunda la de A. Polidori.

Cada página de la tabla de Hoüel consta de tres columnas: la primera encabezada por la letra **N** inicial de la palabra número, contiene los números desde 1 á 10 800; la segunda columna, encabezada por la palabra **Log**, contiene las cinco primeras cifras de las mantisas de los logaritmos de los números de la primer columna que están a su izquierda. La tercera columna, encabezada por la letra **D**, inicial de la palabra *diferencia*, contiene las diferencias entre cada mantisa y la anterior, razón por la cual esa diferencia está escrita entre las dos mantisas que se han restado, como puede verse a continuación:

N	Log	D
6900	83885	
		6
6901	83891	
		6
6902	83897	
		7
6903	83904	
		6
6904	83910	
		6
6905	83916	

Damos, además, la reproducción de la página 25 de la citada Tabla de Hoüel, que contiene los números desde 6900 a 7200, donde puede observarse que cada página de la tabla consta de cuatro columnas análogas a la que hemos descripto. Esa página puede utilizarse para resolver los ejemplos del párrafo siguiente.

N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	N.	Log.	D	P. pr.
6900	83885	6	6960	84261	6	7020	84634	6	7080	85003	6	7140	85370	6	6
6901	83891	6	6961	84267	6	7021	84640	6	7081	85009	7	7141	85376	6	1 1
6902	83897	7	6962	84273	7	7022	84646	6	7082	85016	6	7142	85382	6	2 1
6903	83904	6	6963	84280	6	7023	84652	6	7083	85022	6	7143	85388	6	3 2
6904	83910	6	6964	84286	6	7024	84658	7	7084	85028	6	7144	85394	6	4 2
6905	83916	7	6965	84292	6	7025	84665	6	7085	85034	6	7145	85400	6	5 3
6906	83923	6	6966	84298	7	7026	84671	6	7086	85040	6	7146	85406	6	6 4
6907	83929	6	6967	84305	6	7027	84677	6	7087	85046	6	7147	85412	6	7 4
6908	83935	7	6968	84311	6	7028	84683	6	7088	85052	6	7148	85418	7	8 5
6909	83942	6	6969	84317	6	7029	84689	7	7089	85058	7	7149	85425	6	9 5
6910	83948	6	6970	84323	7	7030	84696	6	7090	85065	6	7150	85431	6	
6911	83954	6	6971	84330	6	7031	84702	6	7091	85071	6	7151	85437	6	
6912	83960	7	6972	84336	6	7032	84708	6	7092	85077	6	7152	85443	6	
6913	83967	6	6973	84342	6	7033	84714	6	7093	85083	6	7153	85449	6	
6914	83973	6	6974	84348	6	7034	84720	6	7094	85089	6	7154	85455	6	
6915	83979	6	6975	84354	7	7035	84726	7	7095	85095	6	7155	85461	6	
6916	83985	7	6976	84361	6	7036	84733	6	7096	85101	6	7156	85467	6	
6917	83992	6	6977	84367	6	7037	84739	6	7097	85107	7	7157	85473	6	
6918	83998	6	6978	84373	6	7038	84745	6	7098	85114	6	7158	85479	6	
6919	84004	7	6979	84379	7	7039	84751	6	7099	85120	6	7159	85485	6	
6920	84011	6	6980	84386	6	7040	84757	6	7100	85126	6	7160	85491	6	
6921	84017	6	6981	84392	6	7041	84763	7	7101	85132	6	7161	85497	6	
6922	84023	6	6982	84398	6	7042	84770	6	7102	85138	6	7162	85503	6	
6923	84029	7	6983	84404	6	7043	84776	6	7103	85144	6	7163	85509	7	
6924	84036	6	6984	84410	7	7044	84782	6	7104	85150	6	7164	85516	6	
6925	84042	6	6985	84417	6	7045	84788	6	7105	85156	7	7165	85522	6	
6926	84048	7	6986	84423	6	7046	84794	6	7106	85163	6	7166	85528	6	
6927	84055	6	6987	84429	6	7047	84800	7	7107	85169	6	7167	85534	6	
6928	84061	6	6988	84435	7	7048	84807	6	7108	85175	6	7168	85540	6	
6929	84067	6	6989	84442	6	7049	84813	6	7109	85181	6	7169	85546	6	
6930	84073	7	6990	84448	6	7050	84819	6	7110	85187	6	7170	85552	6	
6931	84080	6	6991	84454	6	7051	84825	6	7111	85193	6	7171	85558	6	
6932	84086	6	6992	84460	6	7052	84831	6	7112	85199	6	7172	85564	6	
6933	84092	6	6993	84466	7	7053	84837	7	7113	85205	6	7173	85570	6	
6934	84098	7	6994	84473	6	7054	84844	6	7114	85211	6	7174	85576	6	
6935	84105	6	6995	84479	6	7055	84850	6	7115	85217	7	7175	85582	6	
6936	84111	6	6996	84485	6	7056	84856	6	7116	85224	6	7176	85588	6	
6937	84117	6	6997	84491	6	7057	84862	6	7117	85230	6	7177	85594	6	
6938	84123	7	6998	84497	7	7058	84868	6	7118	85236	6	7178	85600	6	
6939	84130	6	6999	84504	6	7059	84874	6	7119	85242	6	7179	85606	6	
6940	84136	6	7000	84510	6	7060	84880	7	7120	85248	6	7180	85612	6	
6941	84142	6	7001	84516	6	7061	84887	6	7121	85254	6	7181	85618	7	
6942	84148	7	7002	84522	6	7062	84893	6	7122	85260	6	7182	85625	6	
6943	84155	6	7003	84528	7	7063	84899	6	7123	85266	6	7183	85631	6	
6944	84161	6	7004	84535	6	7064	84905	6	7124	85272	6	7184	85637	6	
6945	84167	6	7005	84541	6	7065	84911	6	7125	85278	7	7185	85643	6	
6946	84173	7	7006	84547	6	7066	84917	7	7126	85285	6	7186	85649	6	
6947	84180	6	7007	84553	6	7067	84924	6	7127	85291	6	7187	85655	6	
6948	84186	6	7008	84559	7	7068	84930	6	7128	85297	6	7188	85661	6	
6949	84192	6	7009	84566	6	7069	84936	6	7129	85303	6	7189	85667	6	
6950	84198	7	7010	84572	6	7070	84942	6	7130	85309	6	7190	85673	6	
6951	84205	6	7011	84578	6	7071	84948	6	7131	85315	6	7191	85679	6	
6952	84211	6	7012	84584	6	7072	84954	6	7132	85321	6	7192	85685	6	
6953	84217	6	7013	84590	7	7073	84960	7	7133	85327	6	7193	85691	6	
6954	84223	7	7014	84597	6	7074	84967	6	7134	85333	6	7194	85697	6	
6955	84230	6	7015	84603	6	7075	84973	6	7135	85339	6	7195	85703	6	
6956	84236	6	7016	84609	6	7076	84979	6	7136	85345	7	7196	85709	6	
6957	84242	6	7017	84615	6	7077	84985	6	7137	85352	6	7197	85715	6	
6958	84248	7	7018	84621	7	7078	84991	6	7138	85358	6	7198	85721	6	
6959	84255	6	7019	84628	6	7079	84997	6	7139	85364	6	7199	85727	6	
6960	84261		7020	84634		7080	85003		7140	85370		7200	85733		

N. Log. D N. Log. D N. Log. D N. Log. D N. Log. D P. pr.

Tabla de J. Hoüel

7000-7809

7	
1	0.7
2	1.4
3	2,1
4	2.8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

6	
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3 6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84 510	516	522	528	535	541	547	553	559	566
1	572	578	584	590	597	603	609	615	621	628
2	634	640	646	652	658	665	671	677	683	689
3	696	702	708	714	720	726	733	739	745	751
4	757	763	770	776	782	788	794	800	807	813
5	819	825	831	837	844	850	856	862	868	874
6	880	887	893	899	905	911	917	924	930	936
7	942	948	954	960	967	973	979	985	991	997
8	85 003	009	016	022	028	034	040	046	052	058
9	065	071	077	083	089	095	101	107	114	120
710	126	132	138	144	150	156	163	169	175	181
1	187	193	199	205	211	217	224	230	236	242
2	248	254	260	266	272	278	285	291	297	303
3	309	315	321	327	333	339	345	352	358	364
4	370	376	382	388	394	400	406	412	418	425
5	431	437	443	449	455	461	467	473	479	485
6	491	497	503	509	516	522	528	534	540	546
7	552	558	564	570	576	582	588	594	600	606
8	612	618	625	631	637	643	649	655	661	667
9	673	679	685	691	697	703	709	715	721	727
720	733	739	745	751	757	763	769	775	781	788
1	794	800	806	812	818	824	830	836	842	848
2	854	860	866	872	878	884	890	896	902	908
3	914	920	926	932	938	944	950	956	962	968
4	974	980	986	992	998	•004	•010	•016	•022	•028
5	86 034	040	046	052	058	064	070	076	082	088
6	094	100	106	112	118	124	130	136	141	147
7	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207
8	213	219	225	231	237	243	249	255	261	267
9	273	279	285	291	297	303	308	314	320	326
730	332	338	344	350	356	362	368	374	380	386
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tabla de A. Polidori

En cada una de las páginas de la tabla de A. Polidori figuran once columnas, en la primera de las cuales, encabezada con la letra N, se encuentran las decenas de los números comprendidos entre 1000 y 10000. La cifra de las unidades de esos números figuran en la primera y en la última líneas de cada página. La mantisa del logaritmo de un número se obtiene buscando las cifras que se encuentran en la intersección de la fila que comienza con las decenas de ese número con la columna encabezada por la cifra de sus unidades y anteponiéndoles las dos primeras cifras que se encuentran aisladas en la columna encabezada por 0 en la misma línea en que están las tres halladas o en líneas anteriores. Si el grupo formado por las tres cifras encontradas lleva un asterisco deben anteponérseles las dos primeras cifras del grupo siguiente.

En la página anterior hemos reproducido la página 44 de la tabla de A. Polidori que utilizamos para resolver los ejercicios que siguen, y puede observarse que en ella no figuran las diferencias tabulares, por lo tanto hay que hallarlas, restando de las tres últimas cifras correspondientes a una unidad las correspondientes a la unidad inferior.

51. **Manejo de Tablas de Logaritmos.** — Problema directo. — *Calcular el logaritmo de un número dado.*

La determinación del logaritmo de un número consta de dos partes:

1°) la determinación de su característica;
2°) la de su mantisa.

La primera se calcula fácilmente por las reglas anteriores (n° 48) razón por la cual no figuran en la Tabla de Hoüel ni en la de Polidori.

La mantisa se calcula en la forma que pasamos a explicar

Primer caso. — *Hallar el logaritmo de un número entero de cuatro cifras o de cuatro cifras significativas o no seguidas de ceros, o de un decimal en el que haciendo abstracción de la coma tenga cuatro cifras significativas.*

En este caso la mantisa del logaritmo buscado se encuentra, en las tablas de simple entrada, a la derecha del número dado o del que resulta de suprimir los ceros o la coma, respectivamente.

Ejemplo I: *Hallar* log 6905.

De acuerdo con lo dicho respecto de la característica, se tiene

Característica log 6905 = 3 (Regla I)

y como a la derecha de 6905 se encuentra el número 83916, resulta

mantisa log 6905 = 83916

luego log 6905 = 3,83916.

Ejemplo II: *Hallar el* log 7038000.

De acuerdo con lo dicho respecto de la característica, se tiene:

Característica log 7038000 = 6 (Regla I)

y como a la derecha de 7038 se encuentra el número 84745, resulta

mantisa log 7038 = *mantisa* log (7038 × 1000) = 0,84705

luego log 7038000 = 6,84745.

Ejemplo III: *Hallar* log 0,07029.

De acuerdo con lo dicho respecto de la característica, se tiene:

Característica log 0,07029 = $\bar{2}$ (Regla II)

pero por el teorema anterior (n° 49)

Mantisa log 0,07029 = *mantisa* log 0,07029 × 10 000 = *mantisa* log 7029

y como a la derecha de 7029 se encuentra el número 84689, resulta

mantisa log 0,07029 = 84689

luego log 0,07029 = $\bar{2}$,84689.

Ejemplo IV: *Hallar el* log 8354 *y el* log 7,245

Utilizando la tabla de doble entrada, tendríamos:

1°) *Característica* log 7124 = 3 (Regla I)

Mantisa log 7124 = 85272 pues

en la intersección de la fila que comienza por 712 con la columna encabezada por 4 encontramos 272 y las dos primeras cifras correspondientes son 85

luego log 7124 = 3,85272.

2°) log 7,245 = 0,86004 por la regla I y porque las tres últimas cifras 004 llevan un asterisco.

Segundo caso. — *Hallar el logaritmo de un número entero de más de cuatro cifras, o de un decimal en el que haciendo abstracción de la coma tenga más de cuatro cifras significativas* (*).

Ejemplo I. *Hallar* log 71748.

De acuerdo con lo dicho respecto de la característica, se tiene:

Característica log 71748 = 4 (Regla I)

(*) La explicación que sigue vale para los dos tipos de tablas a que nos hemos referido.

Como el número 71748 es mayor que los límites 10000 y 10800 de las Tablas que utilizamos no encontraremos directamente en ellas la mantisa de su logaritmo.

Pero como

$$\textit{Mantisa} \log 71748 = \textit{mantisa} \log 71748 : 10 = \textit{mantisa} \log 7174{,}8$$

y 7174,8 está comprendido entre los números de la Tabla 7174 y 7175 resulta que la mantisa del logaritmo buscado estará comprendida entre las de estos números. Pero como

$$\left.\begin{array}{l} \textit{mantisa} \log 7175 = 85582 \\ \textit{mantisa} \log 7174 = 85576 \end{array}\right\} D = 6$$

observamos que cuando el número aumenta una unidad la mantisa de su logaritmo aumenta de 6 unidades, luego cuando solo aumente 0,8 de unidad si se admite que dicha mantisa sufre un aumento proporcional δ, se tiene:

$$\frac{1}{6} = \frac{0{,}8}{\delta} \quad \therefore \quad \delta = 6 \times 0{,}8 = 4{,}8 \cong 5$$

luego como para	7174	la mantisa	es	85576
y	» 0,8	»	aumenta de	5
para	7174,8	»	es	85581

luego $\log 71748 = 4{,}85581$

En la práctica, si se emplean las Tablas de Hoüel o de Polidori, no es necesario calcular la parte proporcional δ, pues ellas traen en cada página una columna, encabezada por P. PR. en la primera, donde se encuentran tablitas que contienen los productos aproximados de cada una de las diferencias tabulares que figuran en esa página por 0,1; 0,2,. . . 0,9.

Así como para la diferencia tabular 6, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}1 \times 6 = 0{,}6 \cong 1 \\ 0{,}2 \times 6 = 1{,}2 \cong 1 \\ 0{,}3 \times 6 = 1{,}8 \cong 2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0{,}8 \times 6 = 4{,}8 \cong 5 \\ 0{,}9 \times 6 = 5{,}4 \cong 5 \end{array}\right\} \text{se forma la tablita}$$

	6
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	4
7	4
8	5
9	5

o la

	6
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

El ejemplo tratado se dispone en la práctica así

	Para	7174	—	85576
D = 6	»	8	—	5
	»	71748		85581

log 71748 = 4,85581

Ejemplo II: *Hallar* log 7,00029

Procediendo como en el ejemplo anterior tendríamos

Característica log 7,00029 = 0 (Regla I)

Mantisa log 7,00029 = *mantisa* log 7000,29

pero como		Para	7000	—	84510
y	D = 6	»	2	—	1
		»	9	—	0,5
		Para	700029	—	84511,5 $\backsimeq$ 84512

luego log 7,00029 = 0,84512

Problema inverso. — *Determinar el número que tiene por logaritmo a un número dado.*

La determinación del número correspondiente a un logaritmo dado consta de dos partes:

1°) la determinación de sus cifras significativas;

2°) la del orden de dichas cifras.

La primera parte se resuelve teniendo en cuenta la mantisa en la forma que veremos enseguida, y la segunda teniendo en cuenta las reglas de la determinación de la caractáristica.

Ejemplo I) *Hallar x sabiendo que* log x = 3,83916.

Busquemos entre las mantisas de los logaritmos de los números mayores que 1000 (*) la mantisa dada, guiándonos al principio por las dos primeras cifras 83.

(*) Se busca en esa forma porque la mantisa del logaritmo de cualquier número menor que 1000, por ejemplo 83; es la misma que la de dicho número seguida de uno o

Como en la página 25 de la Tabla se encuentra la mantisa dada, 83916, el número 6905 que está a su izquierda tiene las mismas cifras significativas que el buscado. Por otra parte, de acuerdo con las reglas de determinación de la característica resulta que para que la característica del logaritmo del número buscado sea 3, debe tener:

$$3 + 1 = 4 \text{ cifras enteras.}$$

Luego si $\log x = 3{,}83916$ es $x = 6905$.

Ejemplo II. *Hallar x sabiendo que* $\log x = \bar{2}{,}84689$

Procediendo como en el caso anterior, encontramos en la página 25 de la Tabla que a la mantisa 84689 corresponde el número 7029 que tiene las mismas cifras significativas que el buscado.

Por otra parte, como el número que tiene por característica de su logaritmo a $\bar{2}$, debe ser decimal y tener antes de su primera cifra significativa 2 ceros, resulta que

si $\log x = \bar{2}{,}84689$ es $x = 0{,}07029$.

Ejemplo III. *Hallar x sabiendo que* $\log x = 4{,}85581$

Procediendo como en los ejemplos anteriores no encontramos en la Tabla la mantisa del logaritmo dado, pues entre las mantisas consecutivas de la Tabla 85576 y 85582, está comprendida la dada.

Pero como para 85576 corresponde el número 7174,
y » » 85582 » » » 7175

resulta que las cifras significativas del número x buscado formarán un número comprendido entre 7174 y 7175.

Como la diferencia tabular es 6, observamos que cuando la mantisa aumenta 6 unidades, el número aumenta de 1 unidad, luego cuando solo aumente de 5 unidades (diferencia entre la mantisa dada y la

dos ceros, o sea de 830 ó 8300, pero mientras entre 83 y 84 hay una sola mantisa y entre 830 y 840 hay 10 entre 8300 y 8400 hay 100 mantisas luego será más fácil encontrar entre éstas la de un número que se aproxime a 83.

menor de las que la comprenden en la Tabla), se admite que dicho número sufrirá un aumento proporcional y, es decir:

$$\frac{6}{5} = \frac{1}{y} \quad \therefore \quad y = \frac{5}{6} \cong 0{,}8$$

luego como	para la mantisa	85576	corresp.	el número	7174
y	» un aumento de	5	»	un aumento de	0,8
	para	85581	»	el número	7174,8

Como el número que tiene por característica de su logaritmo a 4 debe tener $4 + 1 = 5$ cifras enteras, resulta que

si $\log x = 4{,}85581$ es $x = 71748$

Este ejemplo se dispone en la práctica, así

	Para	85576	——	7174
D = 6	»	5	——	8
	»	85581		71748

La parte proporcional se obtiene también con ayuda de la tablita marginal correspondiente a la diferencia tabular 6, pues buscando 5 del lado derecho de la tablilla vemos que es la parte proporcional correspondiente a 0,8.

52. **Aplicación de los logaritmos al cálculo de productos y cocientes.** — Como por las propiedades estudiadas para los logaritmos, resulta que la aplicación de éstos a un producto o a un cociente lo transforma en una suma o diferencia, respectivamente, de logaritmos y éstos se obtienen fácilmente con las tablas, resultará práctico calcular productos o cocientes por ese método.

Conviene tener presente que como las Tablas solo dan valores aproximados de los logaritmos, y que dicha aproximación depende del número de cifras que den las mismas, los resultados que se obtengan serán también aproximados y tanto mas exactos cuanto mayor sea el número de dichas cifras.

Problema. — *Calcular la longitud de la circunferencia de una pista circular de 123,85 m. de radio.*

Solucion. — Llamando l a la longitud buscada, se tiene

$$l = 2 \pi r$$

reemplazando valores y tomando para π el valor 3,1416

resulta $$l = 2 \times 3{,}1416 \times 123{,}85$$

Aplicando logaritmos, se tiene

$$\log l = \log 2 + \log 3{,}1416 + \log 123{,}85$$

Cálculos auxiliares

Cálculo de log π

	Para	3141	—	49707
$D = 14$	»	6	—	8
	log	3,1416	=	0.49715

Cálculo de log 123,85

	Para	1238	—	09272
$D = 35$	»	5	—	18
	log	123,85	=	2,09290

Calculo de l

	Para	89104	—	7781
$D = 5$	»	4	—	8
		89108	—	77818

Calculos definitivos

$$\log 2 = 0{,}30103$$

$$(*)\ \log 3{,}1416 = 0{,}49715$$

$$\log 123{,}85 = 2{,}09290$$

sumando da $\log l = 2{,}89108$

$$l = 778{,}18\ m$$

Problema. — *Calcular el alcance x de un proyectil lanzado en el vacío con una velocidad inicial v_0 de 580 $\frac{m}{seg}$ y con un ángulo de tiro $\varphi = 30°$.*

Solucion. — La Física enseña que dicho alcance está dado por la fórmula

$$x = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g},$$ siendo g la aceleración de la gravedad que tomaremos igual a 9,80.

(*) En la tabla de J. Hoüel se encuentra en la página XLVI, directamente

$$\log \pi = 0{,}49715$$

Reemplazando valores se tiene

$$x = \frac{580^2 \text{ sen } (2 \times 30^\circ)}{9{,}80} = \frac{580^2 \text{ sen } 60^\circ}{9{,}80} = \frac{580^2 \times 0{,}866}{9{,}80}$$

pues $$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866$$

Aplicando logaritmos, se tiene

$$\log x = \log 580^2 + \log 0{,}866 - \log 9{,}80$$
$$= 2 \log 580 + \log 0{,}866 - \log 9{,}80$$

Cálculos auxiliares

Cálculo de 2 log 580

$2 \log 580 = 2 \times 2{,}76343 = 5{,}52686$

Cálculo de x

	Para 47305	—	2972
$D = 14$	10	—	7
	47315	—	29727

Cálculos definitivos

$$\begin{aligned} 2 \log \ 580 &= 5{,}52686 \\ + \ \log \ 0{,}866 &= \bar{1}{,}93752 \\ \text{sumando} \quad & \ \ 5{,}46438 \\ \log \ 9{,}80 &= 0{,}99123 \\ \text{restando } \log \ x &= 4{,}47315 \\ x = 29727 \text{ m} &= 29{,}727 \text{ Km.} \end{aligned}$$

Conviene observar que al sumar 2 log 580 con log 0,866 se ha tenido presente que este último tiene mantisa positiva y característica solamente negativa, por eso se han sumado directamente las mantisas y se ha agregado a la característica 5 la unidad que nos llevabamos de dicha suma y luego se le ha sumado — 1.

53. **Cologaritmo.** — Definición. — Se llama *cologaritmo* de un número a la diferencia entre cero y el logaritmo de dicho número.

En símbolos $\quad \text{colog } \alpha = 0 - \log \alpha.$

Ejemplo I. $\quad \text{Colog } 374 = 0 - \log 374$

y como $\log 374 = 2{,}57287$ es $\text{colog } 374 = 0 - 2{,}57287$

Para facilitar la resta en lugar de 0 podemos poner su igual — 1+1, escribir el logaritmo dado como suma de su característica y de su mantisa, y disponer la operación así:

$$\begin{array}{r} -1+1{,}00000 \\ 2+0{,}57287 \\ \hline (-1-2)+0{,}42713 \end{array}$$

o bien $(-2-1)+0{,}42713=-3+0{,}42713=\bar{3}{,}42713$

Ejemplo II. *Hallar el* colog 0,002956

Por definición $\operatorname{colog} 0{,}002956 = 0 - \log 0{,}002956$

y como $\log 0{,}002956 = \bar{3}{,}47070$

es $\operatorname{colog} 0{,}002956 = 0 - \bar{3}{,}47070.$

Procediendo como en el caso anterior, se tiene

$$\begin{array}{r} -1+1{,}00000 \\ -3+0{,}47070 \\ \hline [-1-(-3)]+0{,}52930 \end{array}$$

$$(-1+3)+0{,}52930=(3-1)+0{,}52930=2{,}52930$$

La observación de los ejemplos anteriores y la consideración de que el procedimiento seguido en ellos es general, nos permiten dar la siguiente:

Regla.— *Para hallar el cologaritmo de un número dado:* 1° *se le cambia de signo a la característica del logaritmo de dicho número y se le resta uno obteniéndose la característica del cologaritmo buscado.* 2° *Se escribe la diferencia entre* 10 *y la primera cifra significativa de la derecha de la mantisa del logaritmo, y la diferencia entre* 9 *y cada una de las restantes cifras, obteniéndose la mantisa del cologaritmo buscado.*

COROLARIO. — *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo mas el cologaritmo del divisor.*

En símbolos $\log(\alpha : \beta) = \log \alpha + \operatorname{colog} \beta$

En efecto $\log(\alpha : \beta) = \log \alpha - \log \beta$ por un teor. ant. (nº 43)

o bien $= \log \alpha + 0 - \log \beta$

$= \log \alpha + (0 - \log \beta)$

luego $\log(\alpha : \beta) = \log \alpha + \operatorname{colog} \beta$ por def. de cologaritmo

EJEMPLO: *Hallar cociente* $\dfrac{12{,}37 \times 0{,}836 \times 4500}{929{,}50 \times 0{,}0125}$

Aplicando logaritmos tendríamos, llamando c al cociente:

$$\log c = \log 12{,}37 + \log 0{,}836 + \log 4500 - (\log 929{,}50 + \log 0{,}0125)$$

pero como

$$\begin{array}{rlcrl} \log 12{,}37 = & 1{,}09237 & \text{y} & \log 929{,}50 = & 2{,}96825 \\ \log 0{,}836 = & \bar{1}{,}92221 & & \log 0{,}0125 = & \bar{2}{,}09691 \\ \log 4500 = & 3{,}65321 & & & \overline{1{,}06516} \\ & \overline{4{,}66779} & & & \\ & 1{,}06516 & & & \\ \log c = & \overline{3{,}60263} & \therefore & c = & 4005{,}30 \end{array}$$

Aplicando el cologaritmo tendríamos resuelto el mismo problema

$$\log c = \log 12{,}37 + \log 0{,}836 + \log 4500 + \operatorname{colog} 929{,}50 + \operatorname{colog} 0{,}0125$$

o sea

$$\begin{array}{rl} \log 12{,}37 = & 1{,}09237 \\ \log 0{,}836 = & \bar{1}{,}92221 \\ \log 4500 = & 3{,}65321 \\ \operatorname{colog} 929{,}50 = & \bar{3}{,}03175 \\ \operatorname{colog} 0{,}0125 = & 1{,}90309 \\ \hline \end{array}$$

sumando $\log c = 3{,}60263 \therefore c = 4005{,}30$

Vemos que en este ejemplo es muy conveniente el empleo del cologaritmo pues para hallar el logaritmo del cociente c basta efectuar una suma. En cambio, si no se lo emplea, es necesario sumar primero los logaritmos del numerador luego los del denominador y por último, restarlos, es decir efectuar tres operaciones.

54. **Aplicación de los logaritmos al cálculo de potencias y raíces.**— Problema.— *Calcular el peso de una esfera de plomo de* 0,15 *m. de radio sabiendo que el peso específico* (p. e.) *del plomo es* 11,35.

Solucion: Recordemos que la medida del peso de un cuerpo es igual al producto de la medida de su volumen por su peso específico,

luego $\quad \mathit{Med.}\ \mathrm{P} = \mathit{med}\ \mathrm{V} \times \mathrm{p.\ e.}$

pero $\quad \mathit{med}\ \mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi\,(\mathit{med.}\ r)^3 \quad$ (fórmula volumen esfera)

luego $\quad \mathit{med}\ \mathrm{P} = \frac{4}{3}\pi\,(\mathit{med.}\ r)^3 \times \mathrm{p.\ e.}$

$$= \frac{4}{3} . 3{,}1416 \times 0{,}15^3 \times 11{,}35.$$

Aplicando logaritmos, se tiene

$$\log \mathit{med}\ \mathrm{P} = \log 4 + \log 3{,}1416 + 3 \log 0{,}15 + \log 11{,}35 + \operatorname{colog} 3$$

Cálculos auxiliares

Cálculo de 3 log 0,15

$3 \log 0{,}15 = 3 \times \overline{1},17609 = \overline{3}.52827$

Cálculo de colog 3

$\log 3 = 0{,}47712$

$\operatorname{colog} 3 = \overline{1},52288$

Cálculo de P

	Para	20520	—	1604
$D = 28$	»	16	—	6
250		36	—	16046

Cálculos definitivos

$$\begin{aligned} \log 4 &= 0{,}60206 \\ \log 3{,}1416 &= 0{,}49715 \\ 3 \log 0{,}15 &= \overline{3},52827 \\ \log 11{,}35 &= 1{,}05500 \\ \operatorname{colog} 3 &= \overline{1},52288 \\ \hline \log \mathit{med}\ \mathrm{P} &= \overline{1},20536 \end{aligned}$$

$$\mathit{med}\ \mathrm{P} = 0{,}16046$$

$$\mathrm{P} = 0{,}16046\ \mathrm{t} = 160{,}46\ \mathrm{Kg.}$$

PROBLEMA. — *¿Cuál será el monto de* 20000 $ *colocados al* 3 % *anual al cabo de* 25 *años, capitalizando anualmente?*

SOLUCIÓN: Se estudiará en Algebra Financiera, el próximo año, que un capital C colocado a interés compuesto al r % anual se transforma al cabo de n años en el monto C_n dado por la fórmula:

$$C_n = C\,(1 + i)^n$$

donde i es el tanto por uno es decir la centésima parte del tanto por ciento, o sea $i = \dfrac{r}{100}$.

Luego:

$$C_n = 20000\,(1 + 0{,}03)^{25} = 20000 \times 1{,}03^{25}$$

Como la elevación de 1,03 a la potencia 25ª es un cálculo largo aplicaremos logaritmos

$$\log C_n = \log 20000 + 25 \log 1{,}03$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Cálculo de 25 log 1,03

$$\log 1{,}03 = 0{,}01284$$

$$25 \log 1{,}03 = 0{,}32100$$

Cálculo de Cn

$$\begin{array}{rrcr} & 62201 & - & 4188 \\ D = 10 & 2 & - & 2 \\ \hline & 62203 & & 41882 \end{array}$$

CÁLCULOS DEFINITIVOS

$$\begin{aligned} \log 20000 &= 4{,}30103 \\ 25 \log 1{,}03 &= 0{,}32100 \\ \hline \log C_n &= 4{,}62203 \\ C_n &= 41882 \\ C_n\ \$ &= 41882\ \$ \end{aligned}$$

PROBLEMA. — *¿Cuál será el capital inicial que colocado a interés compuesto al* 2 % *anual durante* 10 *años, produjo un monto de* 1219 $ *al ser capitalizado anualmente?*

SOLUCIÓN. — De la fórmula empleada en el ejercicio anterior deducimos el capital inicial pasando $(1 + i)^n$ al otro miembro, luego:

$$C = \frac{C_n}{(1 + i)^n} = \frac{1219}{1{,}02^{10}}$$

Aplicando logaritmos $\log C = \log 1219 - 10 \log 1{,}02$

CÁLCULOS AUXILIARES	CÁLCULOS DEFINITIVOS
Cálculo de 10 log 1,02	$\log 1219 = 3{,}08600$
$\log 1{,}02 = 0{,}00860$	$10 \log 1{,}02 = 0{,}08600$
$10 \log 1{,}02 = 0{,}08600$	$\log C = 3{,}00000$
	$C\ \$ = 1000\ \$$

PROBLEMA. — *¿Cuál será el tanto por ciento a que ha sido colocado a interés compuesto un capital de* 1000 $ *que al cabo de* 10 *años produjo un monto de* 3814 $ *al ser capitalizado anualmente?*

SOLUCIÓN. — De la fórmula empleada en el ejercicio primero podemos despejar $(1 + i)$ pasando C al primer miembro y extrayendo la raíz enésima de ambos, con lo que resulta:

$$1 + i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C}} = \sqrt[10]{\frac{3814}{1000}}$$

Aplicando logaritmos, se tiene:

$$\log (1 + i) = \frac{\log 3814 - \log 1000}{10} = \frac{3{,}58138 - 3}{10} = \frac{0{,}58138}{10}$$

$$\log (1 + i) = 0{,}053138 \cong 0{,}05314$$

Para 0,05308 — 1130	$1 + i = 1{,}1301$
$D = 38 \quad 6 - 1$	$i = 1{,}1301 - 1 = 0{,}1301$
$\overline{0{,}05314} \quad \overline{11301}$	$r = 0{,}1301 \times 100 \cong 13\ \%$

PROBLEMA. — *¿Cuál será el tiempo durante el cual un capital de* 1000 $ *colocado a interés compuesto al* 2 % *anual, da un monto de* 1219 $ *al ser capitalizado anualmente?*

Solución. — De la fórmula del monto $C_n = C(1+i)^n$ resulta aplicando logaritmos:

$$\log C_n = \log C + n \log (1+i)$$

despejando n se tiene

$$n = \frac{\log C_n - \log C}{\log (1+i)}$$

y reemplazando las letras por sus valores, resulta:

$$n = \frac{\log 1219 - \log 1000}{\log 1{,}02}$$

$$= \frac{3{,}08600 - 3{,}00000}{0{,}00860} = 10$$

luego $\qquad n = 10$ años.

55. **Multiplicación de un logaritmo con característica negativa por un número natural.** — Sea, por ejemplo, multiplicar el

$\log 0{,}07025 = \overline{2}{,}84665$ por el número natural 4.

Recordemos que $\overline{2}{,}84665 = -2 + 0{,}84665$

luego
$$\overline{2}{,}84665 \times 4 = (-2 + 0{,}84665) \times 4$$
$$= -2 \times 4 + 0{,}84665 \times 4$$
$$= -8 + 3{,}38660 = (-8 + 3) + 0{,}38660$$

o sea
$$\overline{2}{,}84665 \times 4 = \overline{5}{,}38660,$$

donde se observa que la multiplicación puede hacerse directamente teniendo presente que las 3 unidades que se llevan al multiplicar la primera cifra, 8, de la mantisa, por 4, son positivas, y en cambio el producto de la característica -2 por el mismo número 4 es negativo.

Ejemplos: $\overline{1}{,}24367 \times 3 = \overline{3}{,}73101$; $\overline{1}{,}24367 \times 6 = \overline{5}{,}46202$.

56. **División de un logaritmo con característica negativa por un número natural.** — Sea, por ejemplo, dividir el

$$\log 0{,}07025 = \bar{2}{,}84665 \text{ por el número natural } 2.$$

Recordemos que $\bar{2}{,}84665 = -2 + 0{,}84665$

luego $(\bar{2}{,}84665) : 2 = (-2 + 0{,}84665) : 2$

$= (-2) : 2 + (0{,}84665) : 2$

o sea $(\bar{2}{,}84665) : 2 = -1 + 0{,}423325 = \bar{1}{,}423325$

en la misma forma puede procederse sin ningun inconveniente, cuando el valor absoluto de la característica séa múltiplo del divisor. Tratemos ahora de dividir el mismo logaritmo, por el número 3. Como 2 no es múltiplo de 3, para poder efectuar la operación como en el ejemplo anterior le sumamos a la característica — 1 para que la suma sea divisible por 3, y le sumamos 1 a la mantisa para que el logaritmo dado no varíe. Luego

como $\bar{2}{,}84665 = -2 + 0{,}84665$

y $0 = -1 + 1$

sumando resulta $\bar{2}{,}84665 = -3 + 1{,}84665$

luego $(\bar{2}{,}84665) : 3 = (-3 + 1{,}84665) : 3$

$= (-3) : 3 + (1{,}84665) : 3 = -1 + 0{,}61555$

o sea $(\bar{2}{,}84665) : 3 = \bar{1}{,}61555$

57. **Cálculo de expresiones en que figuren productos, cocientes, potencias y raíces.** — Hallar el valor de la expresión

$$\frac{327{,}58 \times \sqrt[3]{0{,}29345} \times 602432}{25^4 \times 0{,}0876}$$

Llamando x al valor buscado y aplicando logaritmos, se tiene:

$$\log x = \log 327{,}58 + \frac{1}{3} \log 0{,}29345 + \log 602432 + 4 \operatorname{colog} 25 +$$
$$+ \operatorname{colog} 0{,}0876$$

CÁLCULOS AUXILIARES

Cálculo de log 327,58

	Para	3275	—	51521
$D = 14$	»	8	—	11
	log	327,58	=	2,51532

Cálculo de $\frac{1}{3}$ log 0,29345

	Para	2934	—	46746
$D = 15$		5	—	8
	log	0,29345	=	$\bar{1}$,46754
	$\frac{1}{3}$ log	0,29345	=	$\bar{1}$,82251

Cálculo de log 602432

	Para	6024	—	77988
$D = 8$	»	3	—	2
		2	—	0,2
	log	602432	=	5,77990

Cálculo de 4 colog 25

log 25 = 1,39794

colog 25 = $\bar{2}$,60206

4 colog 25 = $\bar{6}$,40824

Cálculo de colog 0,0876

log 0,0876 = $\bar{2}$,94250

colog 0,0876 = 1,05750

Cálculo de x

	Para	58343	—	3832
$D = 11$	»	4	—	4
		58347		38324

CÁLCULOS DEFINITIVOS

$$\log 327{,}58 = 2{,}51532$$

$$\frac{1}{3}\log 0{,}29345 = \bar{1}{,}82251$$

$$\log 602432 = 5{,}77990$$

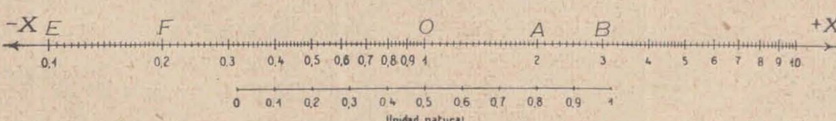
$$4 \operatorname{colog} 25 = \bar{6}.40824$$

$$\operatorname{colog} 0{,}0876 = 1{,}05750$$

$$\log x = 3{,}58347$$

$$x = 3832{,}40$$

58. **Escala logarítmica.** — Consideremos un eje XX′ y representemos sobre él los números 1, 2, 3, . . ., 0,1 ; 0,2, 0,3, . . . por los puntos de ese eje que tienen por abscisa a los logaritmos decimales de esos números.



Tendríamos que, como:

log 1	$= 0$	el número	1	está	represent.	por	el	origen	
» 2	$= 0,30103$	» »	2	»	»	»	»	punto	A
» 3	$= 0,47712$	» »	3	»	»	»	»	»	B
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
» 0,1	$= -1$	» »	0,1	»	»	»	»	»	E
» 0,2	$= \bar{1},30103$	» »	0,2	»	»	»	»	»	F

Se observa que los puntos que representan a 0,1, 0,2, ... 0,9 pueden obtenerse marcando sobre el borde recto de un papel a los que los representan a los números 1, 2, 3, ..., 10, y llevándolo sobre OX′ en forma tal que el punto 10 coincida con el origen. En la misma forma, con ese mismo papel, podrían obtenerse los puntos que representan a los números 10, 20, 30, ..., 100, etc., ó 0,01, 0,02, ..., 0,10, llevándolo sobre $\overrightarrow{OX}$ o $\overrightarrow{OX'}$ a la derecha del punto que representa a 10 ó a 0,1 respectivamente.

El eje así dividido constituye lo que se llama una *escala logarítmica*, pues el logaritmo del número que representa cada uno de sus puntos es la abscisa de ese punto medida con la unidad que se tomó para representar a los números. En la figura adjunta se tomó como unidad a 2,5 cm.

Representando a números comprendidos entre 1 y 2; 2 y 3, ..., por ejemplo 1,1, 1,2, 1,25, 2,1, 2,2, ..., etc., la escala logarítmica constituye una tabla de logaritmos bastante práctica, que se aplica, por ejemplo, en las *reglas de cálculo.*

En el comercio se vende el *papel logarítmico simple*, que son hojas cuadriculadas mediante segmentos paralelos entre sí distanciados de 1 mm., y otros perpendiculares a ellos separados por distancias iguales a los logaritmos de los números 1, 2, ..., como se ve en la figura del párrafo siguiente donde representamos parte de una de esas hojas.

59. **Aplicación de la escala logarítmica.** — Sea por ejemplo representar la función $c_m = (1 + i)^n$, que, como dijimos (nº 54), es el monto de 1 $ al tanto por uno i al cabo de n años.

Aplicando logaritmos se tiene:

$$\log c_m = n \log (1 + i)$$

donde se ve que para un valor dado de i la función anterior es de primer grado con respecto a la variable independiente n, y su representación gráfica en el papel logarítmico simple, es una recta que pasa por el origen.

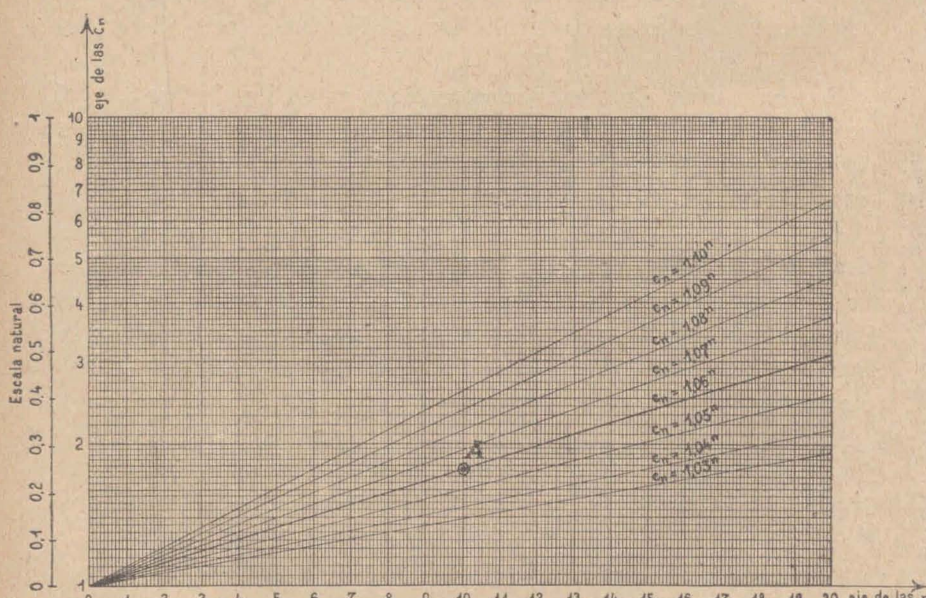
Así, por ejemplo, para $r = 6\ \%$ es $i = 0{,}06$, luego:

$$\log c_m = n \log 1{,}06$$

y la recta que lo representa es la determinada por los puntos cuyos coordenadas hemos calculado a continuación, teniendo en cuenta que:

para $n = 0$ es $\log c_n = 0 \times \log 1{,}06 = 0$
para $n = 10$ es $\log c_n = 10 \log 1{,}06 = 10 \times 0{,}02531 \cong 0{,}25$

El valor 0,25 lo hemos tomado con la unidad que se indica a la izquierda del eje de las íes. Una vez construída la gráfica es fácil calcular el monto para c_n. En la misma forma hemos representada sobre los mismos ejes las gráficas de c_n para n igual a 3, 4, 5, 7, 8, 9 y 10 %.



Aplicaciones. — I) Hallar los logaritmos de los números siguientes:

a) 3,0473 ; *b*) 15358 ; *c*) 1,7942 ; *d*) 0,3584 ; *e*) 143,329 ; *f*) 25,025 ; *g*) 350 958 ; *h*) 0,012682 ; *i*) 673205 ; *j*) 20,0485

II) Hallar x sabiendo que:

a) $\log x = \bar{2},15\,238$; *b*) $\log x = 5,40\,240$; *c*) $\log x = \bar{1},69\,482$; *d*) $\log x = 3,15\,715$; *e*) $\log x = 1,03\,029$; *f*) $\log x = 0,00\,289$; *g*) $\log x = \overline{10},43\,827$; *h*) $\log x = 6,00\,897$.

III) Calcular el logaritmo de: *a*) 30, el de 3000, el de 27, el de 0,003 y el de 0,0081 sabiendo que log 3 = 0,4771; *b*) 4; 8; 20; 200; 0,5; 0,2; 5, sabiendo que log 2 = 0,3010.

IV) Calcular, empleando logaritmos, el resultado de las siguientes operaciones:

a) $3,1416^4 \times 0,51^3$; *b*) $43,891 \times 999432 \times 0,062731$; *c*) $2847,58 \times 3,1416 \times 2,85$

c) $0,004497 : 0,09769$; *d*) $(35,835 \times 54,257) : 96,847$; *e*) $3 : 15,789$

f) $\sqrt[10]{4,21}$; *g*) $\sqrt[4]{1,213} \times \sqrt[5]{0,1934}$; *h*) $(0,057432)^{\frac{3}{4}}$; *i*) $100^{\frac{3}{4}}$; *j*) $\left(\dfrac{13}{25}\right)^7$;

k) $\dfrac{7419 \times (0,0341)^3}{4196 \times (0,234)^2}$; *l*) $\dfrac{3,6274 . \sqrt{218,26}}{0,0925}$; *m*) $\dfrac{8,0196 \sqrt[3]{0,0312}}{9,01875 \sqrt{0,27965}}$

n) $\sqrt[3]{0,35^4 : \sqrt{943214}}$; *p*) $12 \sqrt{3} : 0,4 \sqrt{0,5}$; *q*) $\left(\dfrac{19}{111}\right)^{\frac{5}{6}}$

r) $\dfrac{0,01}{7^{\frac{1}{3}}}$; *s*) $\left(\dfrac{131}{233}\right)^{-\frac{3}{4}}$; *t*) $\sqrt[3]{0,09 \sqrt{\dfrac{11}{23}}}$; *u*) $\sqrt[3]{\dfrac{4,2735 \times 5,879}{15,3 \times (4,1986)^2}}$

V) Calcular, empleando logaritmos, el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $2^x = 8$; *b*) $5^{\frac{2}{x}} = 3$; *c*) $7^{\frac{x}{3}} = 4$; *d*) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 5$; *e*) $\sqrt[x]{3^2} = 5$

f) $31^{\frac{1}{x}} = 4$; *g*) $6^{-\frac{3}{x}} = 36$; *h*) $49^{-\frac{1}{x}} = 7$; *i*) $32^x = \dfrac{1}{128}$; *j*) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x = 8$

VI) Calcular el valor de $(1 + i)$ para los valores de n comprendidos en 1 y 20 e i igual a: *a*) 0,01 ; *b*) 0,015 ; *c*) 0,02 ; *d*) 0,025; *e*) 0,03 *f*) 0,035 ; *g*) 0,04 ; *h*) 0,045 ; *i*) 0,05 ; *j*) 0,055 ; *k*) 0,06.

VII) Calcular el valor de $\frac{1}{(1+i)^n}$ para los mismos valores de n y de i del ejercicio anterior.

VIII) Calcular el monto de: *a*) 2850 $ al 4,5 % al cabo de 10 años; *b*) 1000 $ al 10 % en 20 años; *c*) 3,50 $ al 2,5 % al cabo de 12 años; *d*) 12854,60 $ al 3,5 % al cabo de 4 años; *a*) 50000 $ al 4,5 % al cabo de 15 años, sabiendo que la fórmula correspondiente es $C_n = C\,(1+i)^n$, siendo C el capital que se coloca, i la centésima del tanto por ciento y n el número de años.

IX) Calcular el capital que capitalizado anualmente se transformó: *a*) al 6 % en 5 años en 3000 $; *b*) al 2,5 % en 8 años en 1350 $; *c*) al 4 % en 12 años en 1000 $; *d*) al 6 % en 10 años en 13600,40 $; *e*) al 5 % en 16 años en 1 $; $\left(\text{obsérvese que de la fórmula del monto resulta } C = \frac{C_n}{(1+i)^n}\right)$.

CAPITULO IV

NUMEROS COMPLEJOS

PROGRAMA. — *Números complejos imaginarios: Definición. Interpretaciones concretas. Números imaginarios puros. Unidad imaginaria. Números complejos generales (reales o imaginarios). Igualdad de números complejos. Operaciones con números complejos: Suma y resta de números complejos cualesquiera. Forma binómica. Complejos conjugados. Suma y resta de números complejos conjugados. Suma y resta de números imaginarios puros. Multiplicación de números complejos de forma binómica: Definición del producto de la unidad imaginaria por sí misma. Producto de números complejos cualesquiera y de números complejos conjugados. Producto de números imaginarios puros. Cuadrado de un número complejo. Potencias naturales sucesivas de la unidad imaginaria. Raíz cuadrada de un número complejo. La raíz cuadrada de un número real negativo es igual al producto de más o menos la raíz cuadrada de su valor absoluto por i. La raíz cuadrada de menos uno, como caso particular.*

60. **Necesidad de la creación de nuevos números para hacer posible la extracción de raíces pares y la logaritmación de números negativos.**— Habíamos visto (nº 2) que las raíces pares indicadas de números negativos eran símbolos carentes de significado en el campo real, por lo tanto las expresiones tales como $\sqrt{-4}$ carecen hasta ahora de sentido, pues no hay ningún número real que elevado al cuadrado dé -4. Vimos también (nº 38) que los números negativos no tienen logaritmos en el campo real, por lo tanto símbolos tales como $\log_5 -25$ carecen hasta ahora de significado pues no existe ningún número real que tomado como exponente de 5 nos dé -25.

Para que la radicación y la logaritmación sean posibles en todos los casos, los matemáticos han creado una nueva clase de números llamados *complejos imaginarios* de los cuales daremos la siguiente:

61. **Definición de número complejo imaginario.** — Se llama *número complejo imaginario* a todo par ordenado de números reales α y β de los cuales el segundo β es distinto de cero, que se representa con la siguiente:

NOTACION: $\alpha + \beta i$

El primer número α se llama *componente real* y el segundo β *componente imaginaria* del complejo, y está caracterizada por la letra i que le acompaña, cuyo único objeto es hacer notar que los números α y β desempeñan papeles distintos, como veremos más adelante.

EJEMPLOS: $-2 + 8i$; $15 + \frac{-13}{4} i$; $\frac{4}{3} + \sqrt{2}\, i$ son números complejos imaginarios.

62. **Números imaginarios puros.**— DEFINICION.— Se llama *número imaginario puro* a todo número complejo cuya componente real es cero.

En símbolos $0 + \beta i$ es un número imaginario puro

NOTACION $0 + \beta i$ se representa por βi

EJEMPLO: $-\frac{3}{5} i$; $0{,}7\, i$; $\sqrt{5}\, i$; αi son imaginarios puros

63. **Unidad imaginaria.** — DEFINICION. — Se llama *unidad imaginaria* al número imaginario puro i.

64. **Números complejos generales.**— Un estudio análogo al que hemos hecho con los números reales, podríamos hacer con los complejos imaginarios, pero esto nos llevaría a hacer luego, otro nuevo estudio del conjunto de los números reales e imaginarios, pues lo que interesa ver es como estos últimos solucionan los problemas de la radicación y de la logaritmación en los casos de imposibilidad antes señalados.

Teniendo en cuenta esto formaremos una familia de números reales e imaginarios. En ella definiremos las relaciones de igualdad y las operaciones aritméticas, demostrando los caracteres de aquellas y las propiedades de estas últimas, pues si bien sabemos que se cumplen entre los números reales, no es lícito atribuírselas, sin previa demostración, a los números imaginarios.

DEFINICION. — Se llama número *complejo* a todo número real o imaginario puro.

Luego:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Números naturales}\\ \text{Números negativos}\end{array}\right\}\text{Números enteros}\\ \text{Números fraccionarios puros}\end{array}\right\}\text{Números racionales}\\ \text{Números irracionales}\end{array}\right\}\text{Números reales}\\ \text{Números complejos imaginarios}\end{array}\right\}\text{Números Complejos}$$

65. **Representación de los números reales.** — Con el objeto de unificar la notación de los números complejos, representaremos también a los números reales por pares ordenados de números. Como en la representación de los números complejos imaginarios, sólo se han empleado aquellos pares en que el segundo número era distinto de cero, quedan disponibles aquellos en que el segundo número es cero y los utilizaremos para la representación de los números reales de acuerdo con la siguiente:

CONVENCION: *Todo número real se representa por un par ordenado de números en que el primero es el número que se quiere representar y el segundo el número cero.*

EJEMPLO: El número 5 se representa por $5 + 0\,i$

» » $-1\frac{2}{3}$ » » » $-1\frac{2}{3} + 0\,i$

en general » » a » » » $a + 0\,i$

66. **Igualdad de números complejos.**— DEFINICION.— Se dice que un *número complejo* $(\alpha + \beta i)$ *es igual a otro* $(\alpha' + \beta' i)$ cuando las

componentes del primero son respectivamente iguales a las del segundo.

En símbolos: $\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$ si $\alpha = \alpha'$ y $\beta = \beta'$

67. **Caracteres formales de la igualdad de números complejos.** — Como la definición de números complejos iguales exige la de sus componentes que son números reales y la igualdad de éstos cumple los caracteres formales de tal relación se deduce:

Caracter identico. — *Todo número complejo es igual a sí mismo*

En símbolos: $\alpha + \beta i = \alpha + \beta i$

Caracter reciproco. — *Si un número complejo es igual a otro éste lo es al primero.*

En símbolos: Si $\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$ es $\alpha' + \beta' i = \alpha + \beta i$

Caracter transitivo. — *Si un número complejo es igual a otro y éste a su vez igual a un tercero el primero es igual al tercero.*

En símbolos: Si $\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$ y $\alpha' + \beta' i = \alpha'' + \beta'' i$

es $$\alpha + \beta i = \alpha'' + \beta'' i$$

68. **Suma de números complejos.** — Definicion. — Se llama *suma de dos o más números complejos* a otro número complejo que tiene por componente real a la suma de las componentes reales y por componente imaginaria a la suma de las componentes imaginarias de los sumandos.

En símbolos: $(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') i$

$$(2 + 8 i) + (3 - 6 i) + (-8{,}5 - i) = (2 + 3 - 8{,}5) + (8 - 6 - 1) i =$$
$$= -3{,}5 + i$$

Ejm.: $(3 - 5 i) + \left(\frac{-1}{2} + 4 i\right) = \left(3 + \frac{-1}{2}\right) + (-5 + 4) i = \frac{5}{2} - i$

69. **Representación binómica de los números complejos.** — Teniendo en cuenta que el complejo de componentes α y β se repre-

senta por $\alpha + \beta i$ y que α es un número real y βi un imaginario puro, resulta por definición de suma que:

Todo número complejo es la suma de un número real mas un número imaginario puro.

Es debido a esto que la representación adoptada para los números complejos se llama *representación binómica.*

DEFINICION. — Se dice que dos complejos son *conjugados* cuando solo difieren en el signo de sus componentes imaginarias.

$6 - 3i$ y $6 + 3i$; $\alpha + \beta i$ y $\alpha - \beta i$ son compl. conjugados

Aplicando la definición de suma se obtienen los siguientes corolarios:

70. **Suma de complejos conjugados.** — COROLARIO. — *La suma de dos complejos conjugados es igual al duplo de su componente real.*

En símbolos: $(\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = 2\alpha.$

EJM.: $(6 + 9i) + (6 - 9i) = (6 + 6) + (9 - 9)i = 12$

$$\left(\frac{1}{3} + 5i\right)\left(\frac{1}{3} - 5i\right) = \frac{2}{3} \; ; \; \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3}$$

71. **Suma de imaginarios puros.** — COROLARIO. — *La suma de dos números imaginarios puros es otro número imaginario puro de componente igual a la suma de las de los números dados.*

En símbolos: $\beta i + \beta' i = (\beta + \beta')\, i$

EJM.: $8i + 5i = 13i \; ; \; -3i + \frac{4}{7}i = \left(-3 + \frac{4}{7}\right)i = \frac{-17}{7}i$

72. **Resta de números complejos.** — DEFINICION. — Se llama *diferencia* entre un número complejo $\alpha + \beta i$ (*minuendo*) y otro $\alpha' + \beta' i$ (*sustraendo*) al número complejo $\gamma + \delta i$ que sumado al sustraendo sea igual al minuendo. En símbolos. Es

$$(\alpha + \beta i) - (\alpha' + \beta' i) = \gamma + \delta i \quad \text{si} \quad (\gamma + \delta i) + (\alpha' + \beta' i) = \alpha + \beta i$$

Corolario. — *La diferencia entre dos números complejos tiene por componentes a las diferencias de las componentes reales e imaginarias, respectivamente, del minuendo y sustraendo.*

En símbolos: $(\alpha + \beta i) - (\alpha' + \beta' i) = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta')\, i$

En efecto, sumando la diferencia con el sustraendo da:

$$(\alpha - \alpha') + (\beta - \beta')\, i + \alpha' + \beta' i = (\alpha - \alpha' + \alpha') + (\beta - \beta' + \beta')\, i =$$

$$= \alpha + \beta i \qquad \text{que es el minuendo,}$$

Ejemplo: $(5 - 3\,i) - (-7 + i) = (5+7) + (-3-1)\, i = 12 - 4\, i$

73. **Resta de complejos conjugados.** — Corolario. — *La diferencia entre dos complejos conjugados es un número imaginario puro de componente imaginaria doble de la de los dados.*

En símbolos: $(\alpha + \beta i) - (\alpha - \beta i) = 2\,\beta . i$

En efecto: $(\alpha + \beta i) - (\alpha - \beta i) = (\alpha - \alpha) + (\beta + \beta)\, i = 0 + 2\,\beta i = 2\,\beta i.$

Ejemplo: $\left(4 + \frac{1}{2} i\right) - \left(4 - \frac{1}{2} i\right) = 2 . \frac{1}{2} i = 1 . i = i$

74. **Resta de números imaginarios puros.** — Corolario. — *La diferencia de dos imaginarios puros es otro imaginario puro de componente imaginaria igual a la diferencia de las componentes imaginarias de los números dados.*

En símbolos: $\beta i - \beta' i = (\beta - \beta') i$ lo que es cierto por el corolario de la definición de diferencia.

Ejemplo: $\frac{1}{2} i - \frac{3}{4} i = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) i = \frac{2-3}{4} i = \frac{-1}{4} i$

75. **Multiplicación de números complejos. Producto de la unidad imaginaria por sí misma.**— Definicion.— Se llama *producto de la unidad imaginaria por sí misma* al número menos uno.

En símbolos: $i \times i = -1$

76. **Producto de dos números complejos cualesquiera.** — Definicion. — Se llama *producto de dos números complejos cualesquiera* al número complejo que resulta de multiplicar a los dados como si fuesen sumas de números reales, teniendo presente que $i \times i = -1$.

En símbolos: $(\alpha + \beta i)\,(\alpha' + \beta' i) = \alpha\alpha' + \alpha'\beta i + \alpha\beta' i + \beta\beta' ii$

$$= \alpha\alpha' + \alpha'\beta i + \alpha\beta' i - \beta\beta'$$

$$= (\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha'\beta + \alpha\beta')\,i$$

Observacion. — Puede observarse que *la parte real del producto es el producto de las componentes reales menos el de las componentes imaginarias y que la parte imaginaria es la suma de los productos cruzados de las componentes reales e imaginarias.*

Ejemplo: $(3 + 7\,i)\,(4 + 2\,i) = (3.4 - 7.2) + (3.2 + 7.4)\,i$

$$= (12 - 14) + (6 + 28)\,i = -2 + 34\,i$$

77. **Producto de complejos conjugados.** — Corolario. — *El producto de dos números complejos conjugados es el número real igual a la suma de los cuadrados de los componentes.*

En símbolos: $(\alpha + \beta i)\,(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$

En efecto: por la definición de producto, se tiene:

$$(\alpha + \beta i)\,(\alpha - \beta i) = (\alpha.\alpha + \beta.\beta) + (\alpha\beta - \beta\alpha)\,i$$

luego $(\alpha + \beta i)\,(\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$

78. **Producto de dos imaginarios puros.** — COROLARIO. — *El producto de dos imaginarios puros es el número real formado por el producto de las componentes imaginarias.*

En símbolos: $\beta i \times \beta' i = -\beta\beta'$

En efecto: por definición de producto se tiene:

$$\beta i \times \beta' i = \beta\beta' \,(ii) = \beta\beta' \,(-1) = -\beta\beta'$$

EJEMPLO: $-5\,i \times \frac{3}{10}\,i = -\left[(-5)\,\frac{3}{10}\right] = -\frac{-15}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

79. **División de números complejos.**—DEFINICION.—Se llama *cociente* entre un número complejo $\alpha + \beta i$ (*dividendo*) y otro $\alpha' + \beta' i$ (*divisor*) al número complejo $\gamma + \delta i$ que multiplicado por el segundo sea igual al primero.

En símbolos:

$$\frac{\alpha + \beta i}{\alpha' + \beta' i} = \gamma + \delta i \quad \text{si} \quad (\gamma + \delta i) \times (\alpha' + \beta' i) = \alpha + \beta i.$$

EJEM. $\frac{4 - 5i}{1 - 2i} = 2{,}8 + 0{,}6i$ pues $(2{,}8 + 0{,}6i)\,(1 - 2i) = 4 - 5i$

80. **Potencias naturales sucesivas de la unidad imaginaria-** Siendo las potencias de exponente natural un caso particular de la multiplicación, las potencias sucesivas de la unidad imaginaria i, se pueden calcular en base a esa definición teniendo en cuenta que $i \times i = -1$. Luego:

para $n = 2$ $\quad i^2 = i.i = -1$

» $n = 3$ $\quad i^3 = i.i.i = (i.i)\,i = (-1)\,i = -i$

» $n = 4$ $\quad i^4 = i.i.i.i = (i.i)\,(i.i) = (-1)\,(-1) = 1$

» $n = 5$ $\quad i^5 = i.i.i.i.i = (i.i)\,(i.i)\,i = (-1)\,(-1)\,i = i$

» $n = 6$ $\quad i^6 = i.i.i.i.i.i = (i.i)\,(i.i)\,(i.i) = (-1)\,(-1)\,(-1) = -$

81. **Cuadrado de un número complejo.** — Teorema. — *El cuadrado de un número complejo es igual al cuadrado de su componente real menos el cuadrado de su componente imaginaria más el duplo del producto de ambas.*

Hip.) $\alpha + \beta i$. Tesis) $(\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\,\alpha\beta i$

Demost.) De acuerdo con la definición de potencia de un número complejo resulta que se puede encontrar su cuadrado como si fuera un binomio, es decir

$$(\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + (\beta i)^2 + 2\,\alpha\beta i$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 (-1) + 2\,\alpha\beta i$$

$$(\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\,\alpha\beta i$$

Ejemplo: $\left(2 - \frac{3}{4} i\right)^2 = 2^2 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 2.2.\left(-\frac{3}{4}\right) i$

$$= \left(4 - \frac{9}{16}\right) - 3\,i = \frac{55}{16} - 3\,i$$

82. **Raíz cuadrada de un número real negativo.**— Corolario. — *La raíz cuadrada de un número real negativo es igual al producto de más o menos la raíz cuadrada de su valor absoluto por i.*

En símbolos: $\sqrt{-9} = \pm \sqrt{9}\,.\,i$

En efecto: para que sea $\pm \sqrt{9}\; i$ la raíz cuadrada de -9 debe ser por definición de raíz

$$(\textit{Raíz}\ \pm \sqrt{9}\; i)^2 = \textit{radicando}\ (-9)$$

Veamos si esta condición se cumple.

$(\pm \sqrt{9}\; i)^2 = (\pm \sqrt{9}\,)^2 \,.\, i^2$ por prop. distr.

Simp. da $(\pm \sqrt{9}\; i)^2 = +9\,.\,(-1) = -9$ que es el radicando

Luego es cierto que $\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\,.\,i$

Observacion. — Siendo $|-9| = 9$ y $\sqrt{9} = 3$

es $$\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$$

Ejemplo. $$\sqrt{\frac{-1}{16}} = \pm i\sqrt{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{4}i$$

83. **Raíz cuadrada de menos uno como caso particular.** — Corolario. — *La raíz cuadrada de menos uno es igual a más o menos i.*

En símbolos: $\sqrt{-1} = \pm i.$

Efectivamente: Como $|-1| = 1$ y $\sqrt{1} = 1.$

se tiene: $$\sqrt{-1} = \pm 1.i = \pm i.$$

84. **Posibilidad de la operación en el campo complejo.** — El teorema anterior nos dice que la extracción de raíces cuadradas de números negativos, se transforma en la de números positivos y como esta operación es siempre posible, la primera también lo es, vale decir: *existe siempre un número complejo que sea la raíz cuadrada de otro dado.*

Siendo los números negativos números complejos la imposibilidad de encontrar la raíz cuadrada de un número negativo habrá desaparecido.

Ejemplo: $\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4}\,i = \pm 2i.$

Aplicaciones. — I) Expresar como múltiplos de i:

$$\pm 2\sqrt{-1} \quad ; \quad \sqrt{-36} \quad , \quad \sqrt{4}$$

$$\sqrt{-x^2} \; ; \quad \sqrt{-2} \; ; \quad \sqrt{-5} \; ; \quad \sqrt{6}\cdot\sqrt{-6} \; ; \quad \sqrt{3}\cdot\sqrt{-2}$$

$$\sqrt{7}\cdot\sqrt{-28} \; ; \quad x\sqrt{-y} \; ; \quad \sqrt{-a^2-4a-4} \; ; \quad \sqrt{-x^2-12x-36}$$

II) Sumar o restar los siguientes complejos: $3-(6+6i)$; $(-3-3i)+4i$;

$(1-2i)-(2+6i)$; $(6-2i)+(5+4i)+(7+i)-(7-3i)$;

$3\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}=5\sqrt{-1}=\pm 5i$; $7\sqrt{-1}-\sqrt{-16}$

$(2+3\sqrt{-1})+(5-8\sqrt{-1})$; $\sqrt{-16}+\sqrt{-9}$; $2i-3i$

$\sqrt{-25}+\sqrt{-36}$; $\sqrt{-8}+\sqrt{-32}$; $-3i+5i$

$(5+3i)+(3-2i)$; $(7+5i)-(3-4i)+(-5+2i)+(7+4i)$

$(a^2+b^2i)+(-2ab+a^2i)+(b^2-2abi)$; $(2+3i)-(2-3i)$

$(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)+(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)$; $(-3{,}5+2i)-(3{,}5+0{,}5i)$.

III) Efectuar las siguientes operaciones con números complejos:

$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\,.\,i=-1$; $(2-i)(2+i)$; $(2-i)^2$;

$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5}=\sqrt{3}\,i\times\sqrt{5}\,i=\sqrt{15}\cdot i^2=-\sqrt{15}$; $\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-16}$

$\sqrt{-25}\cdot(-\sqrt{-4})$; $\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-15}$; $3\sqrt{-5}\cdot 5\sqrt{-3}$

$\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}$; $\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{-a-b}$; $(2+3i)(1-i)$;

$(5+3i)(3-2i)$; $(-2+3i)\left(\dfrac{1}{2}+5i\right)$; $(1+3i)(1-i)$

$(4-2i)(3+5i)(4+2i)$; $(2+i)\,2$; $(2+i)\,i$; $-i\times i$

$(2+\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})=2^2-(\sqrt{-1})^2=4+1=5$

$(4+\sqrt{-2})\,.\,(4-\sqrt{-2})$; $(\sqrt{5}+\sqrt{-3})\,.\,(\sqrt{5}-\sqrt{-3})$

$(2+\sqrt{-4})\,.\,(4-\sqrt{-2})$; $(7+\sqrt{-3})\,.\,(5+\sqrt{-6})$

$(5+\sqrt{-1})\,.\,(3-\sqrt{-1})$; $(-1)^4$; $(-1)^5$; $(-1)^6$

$(\sqrt{-2})^7$; $(3\sqrt{-7})^3$; $(2+3i)^3$; $(-1+i)^2$; $(-i)^5$; $(-i)^{10}$

$\sqrt[4]{-16}$; $\sqrt[6]{-64}$; $\sqrt[4]{-\dfrac{1}{81}}$; $\sqrt{-100}$ $\sqrt{-\dfrac{25}{9}}$; $\sqrt[8]{-1}$

$\sqrt{-10\,000}$; $\sqrt[10]{-0{,}0000000001}$; $\sqrt{-0{,}09}$; $\sqrt[4]{-625}$

CAPITULO V

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA

PROGRAMA. — *Definición. Ecuaciones incompletas; resolución de las mismas. Ecuación completa reducida; deducción de la fórmula. Aplicaciones. Ecuación general completa; deducción de la fórmula, aplicaciones. Relaciones que ligan las raíces con los coeficientes de la ecuación de segundo grado: Suma y producto de las raíces. Reconstrucción de la ecuación dadas las raíces. Aplicación de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita a la resolución de problemas de índole comercial.*

87. **Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.** — Recordemos que *el grado de una ecuación entera con una incógnita* está dado por el mayor exponente con que figura dicha incógnita en la ecuación.

Tratemos de encontrar el tipo general de ecuación de segundo grado con una incógnita, como se hace con las de primero.

Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$\sqrt{2}\,x + \frac{3}{2}x^2 + 9 = \frac{\sqrt{2}}{3}x + 4 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{5}$$

Pasando todos los términos del segundo miembro al primero y ordenándolos nos queda la ecuación

$$\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^2 + \sqrt{2}\,x - \frac{\sqrt{2}}{3}x + 9 - 4 + \frac{1}{5} = 0$$

que es equivalente a la dada. Reduciendo los términos semejantes da

$$\frac{2}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{26}{5} = 0.$$

En general, dada una ecuación de segundo grado con una incógnita, se podrá, trasponiendo sus términos y reduciendo los semejantes, obtener una expresión del tipo

[1] $ax^2 + bx + c = 0$ siendo a, b y c números reales.

Conviene observar que para que la expresión [1] sea una ecuación de segundo grado debe ser siempre el coeficiente a de x^2 distinto de cero.

Puede suceder, en cambio, que b y c sean nulos o bien que solo lo sea c o b. En esos casos se obtienen, respectivamente, las ecuaciones

$ax^2 = 0$ [2] por ejemplo $\frac{3}{4}x^2 = 0$

$ax^2 + bx = 0$ [3] » » $-2x^2 + 7x = 0$

$ax^2 + c = 0$ [4] » » $x^2 - \frac{11}{2} = 0$

que se llaman *ecuaciones incompletas* de segundo grado con una incógnita.

88. **Resolución de las ecuaciones incompletas de segundo grado.** — PRIMER CASO. — *Resolver la ecuación $ax^2 = 0$.*

Siendo $a \neq 0$ para que sea el producto $ax^2 = 0$ debe ser $x^2 = 0$, de donde $x = 0$, por definición de producto por 0, luego $x = 0$ es raíz de la ecuación dada.

EJEMPLO: La ecuación $\frac{3}{4}x^2 = 0$ tiene por raíz $x = 0$.

SEGUNDO CASO. — *Resolver la ecuación $ax^2 + bx = 0$* [1]

Sacando x factor común, se tiene la ecuación

$x\ (ax + b) = 0$ [2] que es equivalente a la [1]

Recordando que el producto de un número por cero es igual a cero se tiene que: si $x = 0$ resulta que la [2] se satisface puesto que $0\ (a\ 0 + b) = 0$ luego la [1], que le es equivalente, también se satisface, por lo tanto $x = 0$ es *una raíz* de la ecuación dada.

Si $ax + b = 0$ es decir $x = -\frac{b}{a}$ la ecuación [2] se satisface puesto que $x \times 0 = 0$ luego la [1], que le es equivalente, también se satisface, por lo tanto $x = -\frac{b}{a}$ es la *otra raíz* de la ecuación.

Como el ejemplo tomado es general, podemos afirmar que

Las raíces de la ecuación incompleta del tipo $ax^2 + bx = 0$ *son* $x_1 = 0$ y $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Ejemplos:

Las raíces de $2x^2 - 4x = 0$ son $x_1 = 0$ y $x_2 = -\left(\frac{-4}{2}\right) = 2$

» » » $0{,}7x^2 + \sqrt{2}x = 0$ » $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{0{,}7}$

Tercer caso. — *Resolver la ecuación* $ax^2 + c = 0$ [1].

Procuremos transformar esta ecuación en otra equivalente en la que su primer miembro sea un producto. Dividiendo ambos miembros por a, se tiene

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0$$

o también

$$x^2 - \left(\frac{-c}{a}\right) = 0$$

y como un número no altera si se le extrae la raíz cuadrada y se lo eleva al cuadrado, resulta

$$x^2 - \left(\sqrt{\frac{-c}{a}}\right)^2 = 0$$

Como el primer miembro es una diferencia de cuadrados, se puede descomponer en el producto de la diferencia de las bases por la suma de las mismas, luego

$$\left(x - \sqrt{\frac{-c}{a}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-c}{a}}\right) = 0 \qquad [2]$$

Para que esta igualdad se cumpla, debe ser

$$x - \sqrt{-\frac{c}{a}} = 0 \quad \text{ó} \quad x + \sqrt{\frac{-c}{a}} = 0$$ ecuaciones de primer grado cuyas raíces son:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \text{y} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Luego como el valor de x_1 anula al primer paréntesis de [2] es raíz de esa ecuación y por lo tanto de la dada que le es equivalente. Como lo mismo puede decirse de x_2 resulta que

Las raíces de las ecuaciones incompletas del tipo $ax^2 + c = 0$ *son los números contrarios* $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Ejms.: Las raíces de $-3x^2 + 27 = 0$ son

$$\begin{cases} x_1 = +\sqrt{\dfrac{-27}{-3}} = +\sqrt{9} = +3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Las raíces de $5x^2 - 9 = 0$ son

$$\begin{cases} x_1 = +\sqrt{\dfrac{+9}{5}} = +\sqrt{\dfrac{9}{5}} = +\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} \\ x_2 = -\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Las raíces de

$x^2 + 25 = 0$ son $x_1 = \sqrt{\frac{-25}{1}} = \sqrt{-25} = 5i$ y $x_2 = -5i$

Nota. — La manera de proceder en este ejemplo nos ha evitado verificar las raíces halladas, pues las sucesivas ecuaciones que obteníamos eran equivalentes. Con esta seguridad puede procederse directamente así:

Si $ax^2 + c = 0$ es $ax^2 = -c \therefore x^2 = -\frac{c}{a}$ y

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \therefore x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \; ; \; x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

89. **Resolución de la ecuación completa reducida.** — Para resolver la ecuación

$$x^2 + bx + c = 0$$

que se llama ecuación completa *reducida* porque $a = 1$, procuremos transformarla en otra equivalente cuyo primer miembro sea un producto. Observando que los dos primeros términos del primer miembro

$$x^2 + bx = x^2 + 2x\frac{b}{2}$$

se pueden considerar como los dos primeros del desarrollo de

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2x\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}.$$

Sumando y restando $\frac{b^2}{4}$ al primer miembro de la ecuación, se tiene

$$x^2 + 2x\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

o también $$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4} - c\right) = 0$$

Y como un número no altera si se le extrae la raíz cuadrada y se lo eleva al cuadrado, resulta

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}\right)^2 = 0$$

Como el primer miembro es una diferencia de cuadrados, se puede descomponer en el producto de la diferencia de las bases por la suma de las mismas, (*Arit.* III, n° 34) luego

$$\left(x + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}\right)\left(x + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}\right) = 0 \qquad [2]$$

Para que esta igualdad se cumpla debe ser

$$x + \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = 0 \quad \text{ó} \quad x + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = 0$$

ecuaciones de primer grado cuyas raíces son

$$\boxed{x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}} \;[\mathrm{I}] \text{ y } \boxed{x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}} \;[\mathrm{II}]$$

por lo tanto el valor de x_1 anula el primer paréntesis de la ecuación [2], y el de x_2 al segundo paréntesis, luego x_1 y x_2 son raíces de esa ecuación y por lo tanto de la dada que le es equivalente.

Las fórmulas [1] y [2] que conviene saber de memoria, permiten resolver cualquier ecuación completa reducida con solo reemplazara b y c por los valores particulares que tengan en ella.

Estas fórmulas se expresan así

Las raíces de una ecuación reducida son iguales al semicoeficiente del segundo término cambiado de signo, más o menos la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de dicho semicoeficiente y el tercer término.

Ejemplo I: Resolver la ecuación $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$

$$x_1 = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} - \sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

Ejemplo II: Resolver la ecuación $x^2 - x - 3 = 0$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+12}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$

Ejemplo III: Resolver la ecuación $x^2 - 6x + 25 = 0$

$$x_1 = 3 + \sqrt{9 - 25} = 3 + \sqrt{-16} = 3 + \sqrt{16}\, i = 3 + 4i$$

$$x_2 = 3 - \sqrt{9 - 25} = 3 - \sqrt{-16} = 3 - \sqrt{16}\, i = 3 - 4i$$

90. **Resolución de la ecuación general.** — Para resolver la ecuación general

$$ax^2 + bx + c = 0$$

la transformamos en otra equivalente de la forma reducida, dividiendo ambos miembros por a, que es distinto de cero. Luego nos queda

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Las raíces de esta ecuación reducida son

$$x_1 = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$= \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y $$x_2 = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y como ella es equivalente a la dada resulta que las raíces de la ecuación general de segundo grado son:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \text{y} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Estas fórmulas que conviene saber de memoria se expresan así:

Las raíces de una ecuación general son iguales al coeficiente, b, del segundo término cambiado de signo, mas o menos la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado, b^2, de dicho coeficiente y el cuádruplo, $4\,ac$, del producto de los coeficientes extremos, todo sobre el doble, $2\,a$, del coeficiente del primer término.

EJEMPLO I: Resolver la ecuación $2\,x^2 + 5\,x - 3 = 0$.

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{5^2 - 4.2.(-3)}}{2.2} = \frac{-5 + \sqrt{25 + 24}}{4} =$$

$$= \frac{-5 + \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 - \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

91. **Suma de las raíces.** — TEOREMA. — *La suma de las raíces de una ecuación completa de segundo grado, es igual al cociente del coeficiente, b, del término en x con signo contrario por el coeficiente, a, de x^2.*

HIP.) x_1 y x_2 raíces de la $ax^2 + bx + c = 0$

TESIS) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

DEMOST.) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} + \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,ac} - b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

Reduciendo los términos semejantes, queda $x_1 + x_2 = \dfrac{-2\,b}{2\,a}$

y simplificando, resulta: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

COROLARIO. — *La suma de las raíces de una ecuación reducida de segundo grado es igual al coeficiente del término en x con signo contrario.*

En efecto: por el teorema anterior, se tiene $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$

pero en la ecuación reducida $a = 1$ luego $x_1 + x_2 = -b$

92. **Producto de las raíces.** — Teorema. — *El producto de las raíces de una ecuación completa de segundo grado con una incógnita es igual al cociente del término independiente, c, por el coeficiente, a, de x^2.*

Hip.) x_1 y x_2 raíces de $ax^2 + bx + c = 0$

Tesis) $x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$

Demost.) $$x_1 . x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

Suprimiendo paréntesis y reduciendo los términos semejantes da

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

Simplificando queda $x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$

Corolario. — *El producto de las raíces de una ecuación reducida de segundo grado es igual a su término independiente.*

En efecto: por el teorema anterior se tiene $x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$

y como en la ecuación reducida $a = 1$, resulta $x_1 . x_2 = c$

93. **Reconstrucción de la ecuación dadas las raíces.** — Problema. — *Dadas las raíces de una ecuación de segundo grado con una incógnita encontrar dicha ecuación.*

Datos	Incógnitas
x_1 y x_2	b y c tales que $x^2 + bx + c = 0$ tenga por raíces a x_1 y x_2.

Solución: Teniendo en cuenta los corolarios anteriores resulta

$$x_1 + x_2 = -b \quad \text{de donde} \quad b = -(x_1 + x_2)$$

y como además $\qquad c = x_1 . x_2$

la ecuación buscada es $x^2 + [-(x_1 + x_2)]\, x + x_1 . x_2 = 0$

Ejemplos: Si $x_1 = -\frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{1}{2}$ la ecuación que tiene esas

raíces es $\quad x^2 + \left[-\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)\right] x + \left(-\frac{2}{3} . \frac{1}{2}\right) = 0$

o sea $\quad x^2 + \left[-\left(\frac{-4+3}{6}\right)\right] x + \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$

o bien $\quad x^2 + \left[-\left(-\frac{1}{6}\right)\right] x - \frac{1}{3} = 0$

luego $\quad x^2 + \frac{1}{6}\, x - \frac{1}{3} = 0 \quad$ que es la ecuación buscada

multiplicando por 6 y simplificando nos queda la ecuación general

$6\, x^2 + x - 2 = 0$ equivalente a la anterior y con coeficientes enteros.

El procedimiento seguido, que es general, nos permite dar la siguiente

Regla. — *La ecuación de segundo grado con una incógnita que tiene por raíces a dos números dados, es la ecuación reducida cuyo segundo término tiene por coeficiente a la suma de las raíces con signo contrario, y cuyo término independiente es el producto de las mismas con su propio signo.*

Aplicación. — Escribir la ecuación que tenga por raíces a

$$x_1 = 0{,}5 \qquad x_2 = -1{,}5$$

La ecuación buscada es $x^2 + x - 0{,}75 = 0$

puesto que $-(x_1 + x_2) = -[(0{,}5)+(-1{,}5)] = -[-1] = 1$

y $x_1 . x_2 = 0{,}5 \times -1{,}5 = -0{,}75$

94. **Discusión de las raíces.** — Teniendo en cuenta que las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} = \frac{-b}{2\,a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

y $$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} = \frac{-b}{2\,a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

Veamos, sin resolver la ecuación, en que caso estas raíces pueden ser reales o complejas imaginarias.

Como $\frac{-b}{2\,a}$ es común para ambas y es real, la naturaleza de las raíces dependerá del segundo término.

I) Para que x_1 y x_2 *sean reales* debe ser $\sqrt{b^2 - 4\,ac}$ un número real, para lo cual es necesario que sea $b^2 - 4\,ac \geqq 0$ luego

Las raíces de una ecuación de segundo grado son reales cuando su discriminante $b^2 - 4\,ac$ es positivo o nulo.

II) Para que x_1 y x_2 sean *complejas imaginarias* debe ser $\sqrt{b^2 - 4\,ac}$ un número imaginario, para lo cual es necesario que sea $b^2 - 4\,ac < 0$. Luego

Las raíces de una ecuación de segundo grado con una incógnita son complejas imaginarias cuando su discriminante $b^2 - 4\,ac$ es negativo.

Ejemplos: Averiguar la naturaleza de las raíces de las ecuaciones siguientes

I) $3\,x^2 - 11\,x - 4 = 0$

Como $b^2 - 4\,ac = 11^2 - 4 . 3 . (-4) = 121 + 48 = 169 > 0$ la ecuación dada tiene raíces reales.

II) $16x^2 + 8x + 1 = 0$

Como $b^2 - 4ac = 8^2 - 4.16.1 = 64 - 64 = 0$ la ecuación dada tiene raíces reales.

III) $x^2 - 6x + 15 = 0$

Como $b^2 - 4ac = 6^2 - 4.1.15 = 36 - 60 = -24 < 0$ la ecuación dada tiene raíces complejas imaginarias.

Veamos ahora, sin resolver una ecuación que tenga raíces reales, cuando son ellas del mismo o de distinto signo, y cuales son esos signos.

Como $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ (nº 96) y puede suponerse siempre que $a > 0$ (pues en caso contrario bastaría multiplicar a la ecuación por -1) resulta:

$$\textit{Signo de } \frac{c}{a} = \textit{signo de } c$$

luego si $c > 0$ x_1 y x_2 tienen el *mismo signo*

y si $c < 0$ x_1 y x_2 » *distinto signo* de

acuerdo con la regla de los signos de la multiplicación.

Por otra parte como $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ resulta que si $c > 0$ el signo común para x_1 y x_2 es contrario al de b y si $c < 0$ el signo de la raíz de mayor valor absoluto es contrario al de b en virtud de las definiciones de suma de números enteros, luego:

Las raíces de una ecuación de segundo grado tienen el mismo signo si el término independiente c es positivo, y son positivas o negativas según que el coeficiente b del término en x sea negativo o positivo respectivamente; y tienen distinto signo si c es negativo, y la de mayor *absoluto es positiva o negativa según que b sea negativo o positivo respectivamente.*

Ejemplos: Averiguar los signos de las raíces de las ecuaciones siguientes:

I) $3x^2 - 11x - 4 = 0$

Como $c = -4 < 0$, x_1 y x_2 tienen signos distintos

y como $b = -11$ la raíz de mayor valor absoluto tiene signo +

II) $16x^2 + 8x + 1 = 0$

Como $c = +1 > 0$ x_1 y x_2 tienen signos iguales

y como $b = +8$ x_1 y x_2 tienen signo —.

Aplicaciones. — I) Resolver descomponiendo en producto de dos factores las siguientes ecuaciones

$x^2 - 9 = 0$ Solución: como $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) = 0$ debe se

$x + 3 = 0 \therefore x_1 = -3$ o $x - 3 = 0 \therefore x_2 = 3$

$x^2 - 25 = 0$; $y^2 - 16 = 0$; $y^2 = 1$; $x^2 - 4a^2 = 0$

$9 - x^2 = 0$; $4z^2 - 8 = 0$; $-x^2 + 3 = 0$; $x^2 - \frac{1}{9} = 0$

II) Resolver las siguientes ecuaciones incompletas:

$x^2 = 9$; $y^2 = 5y$; $3z^2 - 4 = 0$; $2x^2 + 1 = 0$; $3r^2 + r = 0$; $6x^2 - 32 = 2x^2 + 4$; $7x^2 + 8 = 57 + 3x^2 + 15$; $3x^2 + 5x = 2x^2 - 11x$; $3x^2 + 7 = 1{,}75x^2 + 35$; $7x^2 - 5 = 5x^2 - 13$.

III) Resolver las ecuaciones completas reducidas aplicando las fórmulas del n° 89

$x^2 - 2x - 15 = 0$; $x^3 + x - 1 = 0$; $x^2 + 7x + 1 = 0$

$x = x^2 - 1$; $x^2 - 5x - 5 = 0$; $x^2 - 5{,}5x + 7{,}36 = 0$

$x^2 - x + 0{,}24 = 0$; $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$; $x^2 - 2x + 6 = 0$

$x^2 + 2x = 63$; $x^2 + 6x = 91$; $x^2 + 2x = 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$; $x^2 - 2x + 5 = 0$; $x^2 - 2x + 2 = 0$

$x^2 + 6x + 5 = 0$; $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$; $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$

$x^2 - \frac{x}{3} = 8$; $x^2 + \frac{x}{7} = 50$; $x^2 + 6x - 27 = 0$

$x^2 - 40x + 111 = 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x^2 - 10x + 25 = 0$

$x^2 - \frac{x}{2} = 14$; $x^2 - \frac{1}{20}x = \frac{1}{10}$; $x^2 - \frac{7}{12}x + \frac{1}{12} = 0$

$x^2 + ax + 2 = 0$; $y^2 + y - 1 = 0$; $y^2 - y - 1 = 0$

$x^2 + 2mx = -m^2$; $x^2 - 2ax = -6a + 9$; $x^2 - (n+1)x = n$

$x^2 - m^2nx + mn^2x = m^3n^3$; $x^2 - 4ax - 10x = -40a$

IV) Resolver las ecuaciones generales

$2x^2 + 5x - 1 = 0$; $4x^2 - 8x - 1 = 0$

$9x^2 - 42x + 38 = 0$; $0{,}09\,x^2 - 0{,}21\,x + 0{,}1 = 0$

$3x^2 - 12{,}3\,x + 7{,}8 = 0$; $0{,}51\,x^2 + 0{,}73\,x + 0{,}16 = 0$

$\frac{x^2}{100} = x - 24$; $3x^2 - 2x = 65$

$x^2 + \frac{7}{2}x + 8 = 10$; $622x = 15x^2 + 6384$

$3x^2 - 17x = -10$; $5x^2 + 17x = 12$

$6 + 23x = 18x^2$; $10 - 37x = -30x^2$

$2x^2 + 5x - 7 = 0$; $6x^2 + 7x - 3 = 0$

$4x^2 - 20x + 25 = 0$; $2x^2 - 28 = 26x$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$; $2x^2 + x - 1 = 0.$

$\frac{x}{3} - \frac{40}{3} - x^2 + 2x = 45 - 3x^2 + 4x$; $y^2 - (a+b)y + ab = 0$

$(x-6)(x-5) + (x-7)(x-4) = 2$; $mnx^2 - (m+n)x + 1 = 0$

$4 - x^2 = 4(2-x)^2$; $(m+n)x^2 - 2mx + (m-n) = 0$

$13x + 26 - (x+2)\{x - 1 - 6(x-9)\} = 0$; $mx^2 - (m+n)x + n = 0$

$(x-5)(x-3)+(x-5)(8x-5)-(x-7)(x-5)=0$; $mx^2-(m-n)x-n=0$

$x^2=2ax+a^2-b^2=0$; $ax^2-(a^2+1)x+a=0$

$abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$ $(a-x)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$

$ax^2-(ab-1)x-b=0$; $(m^2-n^2)x^2-2mx+1=0$

$(a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)x+ab=0$; $4x^2-4ax+a^2-b^2=0$

V) Quitar denominadores y resolver las ecuaciones siguientes:

$$\frac{x-1}{x}=\frac{x-1}{6}\,; \qquad \frac{x^2+3x-5}{x^2-3x+5}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{3x-2}{x-1}-\frac{2x-1}{x+1}=0\,; \qquad \frac{4y}{y^2-4}+\frac{2}{y-2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2x-1{,}2}=\frac{3{,}63}{x}\,; \qquad \frac{7}{3(x-2)}=\frac{4}{x+3}$$

$$\frac{x+11}{x}=7-\frac{9+4x}{x^2}\,; \qquad \frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}$$

$$\frac{x}{x-6}-\frac{13}{2-4x}=0\,; \qquad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

VI) Reconstruir las ecuaciones que tienen por raíces a

$x_1=-2 \quad x_2=\frac{3}{4}$; $\quad x_1=\frac{1}{3} \quad x_2=3$; $\quad x_1=a+b \quad x_2=a-b$

$x_1=4i \quad x_2=-4i$; $\quad x_1=1-2i \quad x_1=1+2i$; $\quad x_1=\frac{1}{a+b} \quad x_1=\frac{1}{a-b}$

$x_1=3+\sqrt{5} \quad x_2=3-\sqrt{5}$; $\quad x_1=1+\sqrt{2}-\sqrt{3} \quad x_2=1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$x_1=+1 \quad x_2=-1$; $\quad x_1=-1 \quad x_2=0$; $\quad x_1=\frac{2}{3} \quad x_2=\frac{3}{4}$

$x_1=2 \quad x_2=-\frac{1}{2}$; $\quad x_1=-\frac{2}{3} \quad x_2=-\frac{3}{4}$; $\quad x_1=\sqrt{2} \quad x_2=-\sqrt{2}$

$x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3} \quad x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$; $\quad x_1=1+\sqrt{2} \quad x_2=1-\sqrt{2}$

$x_1=a \quad x_2=b$; $\quad x_1=a^2+b^2 \quad x_2=-2ab$; $\quad x_1=\sqrt{a} \quad x_2=\sqrt{a}$

VII) Hallar, sin resolver la ecuación, la otra raíz de: a) $x^2 + 5x + 4 = 0$ sabiendo que $x_1 = -1$; b) $x^2 - 4x - 21 = 0$ sabiendo que $x_2 = 7$; c) $5x^2 + 15x - 50 = 0$ sabiendo que $x_2 = -5$; d) $x^2 - 3x + 2 = 0$ sabiendo que $x_1 = 1$; e) $x^2 - x - 12 = 0$ sabiendo que $x_1 = 4$.

VIII) Hallar el número q tal que haga que una de las raíces de la ecuación: a) $x^2 - 7x + q = 0$ sea $x_1 = 3$; b) $x^2 + qx + 6 = 0$ sea $x_2 = 1$; c) $3x^2 + 24x + q = 0$ sea $x_1 = -1$; d) $x^2 - 6x + q = 0$ sea $x_1 = x_2$; e) $x^2 - qx + 12 = 0$ sea $x_1 = \frac{x_2}{3}$.

IX) Hallar dos números tales que: a) su producto sea 8 y su suma 6; b) su producto 18 y su suma -15; c) su producto $\frac{4}{25}$ y su suma 1; d) su producto 1 y su suma 2,5; e) su producto 8 y su suma -6; f) su producto -15 y su suma 2; g) su suma a y su producto 1; h) su suma 1 y su producto a; i) su suma 0 y su producto 9; j) su producto m^2 y su suma 0.

X) Averiguar la naturaleza y el signo de las raíces de las siguientes ecuaciones (sin resolverlas):

$x^2 + 9x + 14 = 0$;	$x^2 + 2x - 15 = 0$;	$x^2 - 6x + 9 = 0$
$4x^2 - 9x + 2 = 0$;	$x^2 - 6x + 11 = 0$;	$2x^2 + 16x + 34 = 0$
$6x^2 - 8x + 6 = 0$;	$2x^2 - 12x + 18 = 0$;	$x^2 + 7x + 10 = 0$
$5x^2 + 2x + 1 = 0$;	$7x^2 + 7x = 0$;	$4y^2 - 6y + 5 = 0$
$x^2 + x - 2 = 0$;	$x^2 + x + 2 = 0$;	$x^2 = 8x - 16$.

95. **Resolución de problemas numéricos de segundo grado con una incógnita.** — Ciertas cuestiones o problemas que se presentan en la práctica, pueden ser resueltos por medio de ecuaciones.

Cuando el problema a resolver tiene por objeto la determinación de un número, que cumpla ciertas condiciones que permitan ser expresadas por una igualdad, dicho problema puede resolverse mediante una ecuación en la cual la incógnita es el número buscado.

En este capítulo nos ocuparemos solamente de los problemas que conducen a *ecuaciones de segundo grado con una incógnita.*

Todo problema consta de tres partes:

I) *El planteo,* que consiste en precisar bien qué es lo que se busca, en representar al ente buscado por una letra, y en escribir la ecuación que traduzca las condiciones que dicho ente debe cumplir.

II) *Resolución* de la ecuación obtenida, es decir, cálculo de sus raíces.

III) *Discusión* del resultado, es decir, interpretación concreta del mismo para ver si tiene sentido.

Sea por ejemplo resolver el siguiente:

PROBLEMA. — *Encontrar un número tal que su triplo mas la mitad de su cuadrado, sea igual al cuádruplo del mismo mas cuatro.*

PLANTEO. — Llamando x al número buscado, resulta que $3\,x$ es su triplo, $\frac{x^2}{2}$ la mitad de su cuadrado y $4\,x$ su cuádruplo, luego por las condiciones del problema tendremos

$$3\,x + \frac{x^2}{2} = 4\,x + 4$$

RESOLUCIÓN. — Dando a esta ecuación la forma general, se tiene

$$\frac{x^2}{2} + 3\,x - 4\,x - 4 = 0$$

o sea
$$\frac{1}{2}\,x^2 - x - 4 = 0$$

resolviéndola, da $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+8}}{2\dfrac{1}{2}} = 1+\sqrt{9} = 1+3 = 4$

$$x_2 = 1-\sqrt{9} = 1-3 = -2$$

Comprobación. Es $x_1 = 4$ el número buscado puesto que:

Su triplo es $= 12$ }
La mitad de su cuadrado es $= 8$ } *y el triplo + mitad de su cuadrado* $= 20$

su cuádruplo es $= 16$ *y el cuádruplo* $+ 4 = 20$

Es también $x_2 = -2$ una solución del problema puesto que

$$3(-2) + \frac{(-2)^2}{2} = 4(-2) + 4$$

96. **Aplicaciones a la resolución de problemas de índole comercial.** — Problema I. — *Una persona posee dos documentos de* 6030 $ *cada uno, que vencerán a los* 30 *días. Si los descuenta a la misma tasa a uno con descuento comercial y al otro con descuento racional, obtiene una diferencia de* 0,15 $. *¿Cual es la tasa aplicada?*

Datos.

$N_1 = N_2 = 6030$ $ son los valores nominales de los documentos.
$n''_1 = n''_2 = 30$ días son las fechas de los vencimientos de los documentos.

$D_c - D_r = 0{,}15$ $ es la diferencia de los descuentos comercial y racional de N_1 menos N_2.

Incógnita. — $r\ \% = x\ \%$ es la tasa común de los descuentos.

Solución. — Recordando que las fórmulas del descuento comercial y del racional son

$$D_c = \frac{N \cdot n'' r}{36\,000} \qquad D_r = \frac{N \cdot n'' \cdot r}{36\,000 + r\,n''}$$

y que la diferencia de los mismos es 0,15 $, se tiene

$$\frac{6030 \,.\, 30 \,.\, x}{36\,000} - \frac{6030 \,.\, 30 \,.\, x}{36\,000 + 30\,x} = 0{,}15$$

Simplificando ambas fracciones, se tiene

$$\frac{201\,x}{40} - \frac{6030\,x}{1200 + x} = 0{,}15$$

Sacando denominadores, resulta

$$201\,x\,(1200 + x) - 6030\,x \,.\, 40 = 0{,}15 \,.\, 40\,(1200 + x)$$

$$241200\,x + 201\,x^2 - 241200\,x - 7200 - 6\,x = 0$$

$$201\,x^2 - 6\,x - 7200 = 0$$

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{36 + 4 \,.\, 201 \,.\, 7200}}{2 \,.\, 201} = \frac{6 + \sqrt{5788836}}{402} =$$

$$= \frac{6 + 2406}{402} = \frac{2412}{402} = 6 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{6 - 2406}{402} = -5\,\frac{55}{67}$$

Luego la tasa de los descuentos era del 6 %, pues la otra solución no tiene sentido, desde que una tasa no puede ser negativa.

PROBLEMA II. — *Una persona tiene* 20000 $ *en títulos hipotecarios. Al fin del primer año retira el monto y lo invierte en otros títulos que le dan una tasa superior en* 1 % *a la primera, obteniendo* 1149,50 $ *al final del segundo año. ¿Cuál es la tasa primitiva?*

SOLUCIÓN. — Llamando r a la tasa buscada, al final del primer año obtiene un monto de

$$\frac{20\,000 \,.\, r}{100} + 20\,000$$

y como la nueva tasa es $(r + 1)$ %, al final del segundo año tiene

$$\left(\frac{20\,000\,r}{100} + 20\,000\right)\frac{r + 1}{100} = 1149{,}50.$$

Simplificando, sacando denominadores y pasando todos los términos al primer miembro, da:

$$r^2 + 101\,r - 57375 = 0$$

que es una ecuación cuya raíz positiva $r_1 = 4\,{}^1/_2$ % es la tasa buscada.

PROBLEMA III. — *Vendiendo un objeto en \$ 22,75 se pierde un tanto por ciento igual al costo. ¿Cuánto costó?*

PLANTEO. — Llamando x al costo buscado, se tiene:

$$\frac{x}{x - 22{,}75} = \frac{100}{x}$$

siendo $x_1 = 65$ y $x_2 = 35$ las raíces de la ecuación de segundo grado que resulta al quitar los denominadores y efectuar las operaciones, que expresadas en \$ dan los costos que puede tener el objeto.

PROBLEMA IV. — *Un hacendado compró un lote de carneros por 672 \$. Si cada animal le hubiera costado 4 \$ menos hubiera podido comprar tres animales más. ¿Cuántos ha comprado, y a qué precio?*

PLANTEO. — Llamando x \$ al costo buscado resulta que con 672 \$ se compran $\frac{672}{x}$ carneros, y a $(x - 4)$ \$ se compran $\frac{672}{x - 4}$; luego, de acuerdo a las condiciones del problema, se tiene:

$$\frac{672}{x} = \frac{672}{x - 4} - 3$$

La raíz positiva $x_1 = 32$ de la ecuación que resulta al quitar denominadores y efectuar operaciones da el costo de cada carnero y el cociente $672 : 32 = 21$, el número de los mismos.

97. Aplicaciones a la Física. — Problema. — *Calcular al cabo de cuanto tiempo t una bala de cañón lanzada en el vacío, verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $v_0 \frac{m}{seg}$ alcanzará una altura h.*

Datos	Incognita
Velocidad inicial $= v_0$	Tiempo $t = x$
altura $= h$	
Aceleración de la gravedad $= g$	

Planteo. — La Física enseña que el movimiento de un cuerpo lanzado, en el vacío, verticalmente hacia arriba es uniformemente retardado y que la ley de los espacios en ese movimiento es

$$[1] \qquad h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

siendo h el espacio, v_0 la velocidad inicial, t el tiempo, y g la aceleración de la gravedad.

Resolucion. — Dando a la [1] la forma general de ecuación de segundo grado, se tiene: $\frac{1}{2} gt^2 - v_0 t + h = 0$

mult. por 2 da $\qquad gt^2 - 2 v_0 t + 2 h = 0$

$$\text{luego } t_1 = \frac{2 v_0 + \sqrt{4 v_0^2 - 4 . g . 2 h}}{2 g} = \frac{2 v_0 + \sqrt{4 (v_0^2 - 2 gh)}}{2 g}$$

$$\text{simplificando queda } \quad t_1 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2 gh}}{g}$$

$$\text{y} \qquad t_2 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2 gh}}{g}$$

Discusion. — Para que el problema tenga interpretación Física es necesario que las raíces t_1 y t_2 sean reales, lo que exige que $v_0^2 - 2 gh \geqq 0$ para lo cual debe ser $v_0^2 \geqq 2 gh$, es decir, $\frac{v_0^2}{2 g} \geqq h$.

Esta condición está de acuerdo con la Física pues la altura máxima que puede alcanzar un móvil lanzado verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0 es $\frac{v_0^2}{2g}$.

Las raíces t_1 y t_2 pueden interpretarse físicamente así

Primer caso: $v_0^2 > 2gh$ por lo tanto $\sqrt{v_0^2 - 2gh} = t_\varepsilon$ es real.

luego para t_1 se tiene $t_1 = \frac{v_0 + t_\varepsilon}{g} = \frac{v_0}{g} + \frac{t_\varepsilon}{g}$

y para $t_2 = \frac{v_0}{g} - \frac{t_\varepsilon}{g}$.

Como estos valores son números reales se interpretan diciendo que la bala alcanza la altura h al cabo de t_2 segundos sigue hasta la altura máxima $\left(\text{que alcanza en el tiempo } \frac{v_0}{g}\right)$ después de lo cual cae para pasar nuevamente por la altura h al cabo de t_1 segundos después de la salida del cañón.

Segundo caso: $v_0 = 2gh$ por lo tanto $\sqrt{v_0^2 - 2gh} = 0$

luego $t_1 = t_2 = \frac{v_0}{g}$ es decir la bala ha sido lanzada con la velocidad necesaria para alcanzar la altura máxima.

Aplicaciones I. — ¿ Cuál es el número cuyo cuadrado más su triplo es igual a 40 ? R.: $x_1 = 5$ y $x_2 = -8$.

II. — ¿ Cuál es el número tal que la mitad de su cuadrado es igual al duplo del mismo más 6 ? R.: $x_1 = -2$ y $x_2 = 6$.

III. — ¿ Cuáles son los dos números naturales consecutivos cuyo producto es 812 ? R.: 28 y 29.

IV. — Hallar el valor positivo de x tal que haga que el producto de $x - 3$ por $x + 3$ sea igual a 12 veces su diferencia. R.: $x = 9$.

V. — ¿Cuál es el número que sumado a su recíproco de $2\frac{1}{6}$?

R.: $x_1 = \frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{2}{3}$.

VI. — Hallar tres números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea igual a 434. R.: $x_1 = 11$; $x_2 = -13$.

VII. — Encontrar dos números cuya diferencia es 7 sabiendo que la diferencia de sus cubos es 1267 R.: ± 4; ± 11.

VIII. — Calcular el tanto por ciento a que fué colocada la suma de 2000 $ sabiendo que al cabo del primer año se capitalizaron los intereses y se le agregaron 900 $ y que al finalizar el segundo año se obtuvieron 3150 $. R.: 5 %.

IX. — Un número de dos cifras es tal que la suma de las mismas es 10, y si al producto de esas cifras se le suma 40 se obtiene el número que resulta de invertir las cifras en el dado, ¿ cuál es el número dado ? R.: $x = 46$.

X. — Un comerciante vendió mercaderías por 22,75 $ y perdió un tanto por ciento igual al costo de las mismas. ¿Cuál era éste? R.: 65 $ y 35 $.

XI. — Un comerciante vendió mercaderías por 50,69 $ y ganó un tanto por ciento igual al costo de la misma. ¿Cuál era éste? R.: 37 $.

XII. — Un comerciante compró una bordalesa de vino por 45 $. Bebió 3 litros y vendió el resto a 1,50 $ por encima del precio de costo y obtuvo en la venta una ganancia del 33 $^1/_3$ %. ¿Cuántos litros contenía la bordalesa? R.: 18 l.

XIII. — Una persona colocó 5000 $ en caja de ahorros a un cierto tanto por ciento de interés. Al finalizar el primer año retiró 75 $ y dejó el resto al mismo interés. Al cabo de otro año el monto era de 5278,50 $. ¿ A qué tanto por ciento colocó el dinero? R.: 3 $^1/_2$ %.

XIV. — Dos hombres fueron ocupados para hacer cierto trabajo. El primero recibió 48 $, y el segundo, que trabajó 6 días menos, recibió 27 $. Si el segundo hubiese trabajado todo el tiempo y el primero 6 días menos, hubiesen recibido la misma suma. ¿Cuántos días trabajó cada uno, y cuánto recibió por día ?

XV. — Hallar la base y la altura de un rectángulo sabiendo que su diagonal es de 50 m. y que la base es 10 m. más larga que la altura.
R.: $b = 40$ m y $h = 30$ m.

XVI. — Hallar las longitudes de las aristas de dos cubos sabiendo que ellas difieren de 2 cm. y sus volúmenes de 98 cm^3? R.: 3 cm. y 5 m.

XVII. — Calcular la base y la altura de un triángulo sabiendo que la primera es 4 m. mayor que la segunda y que la superficie del triángulo es de 16 m^2.
R.: $b = 4$ m y $h = 8$ m.

XVIII. — Calcular las longitudes de las bases de un trapecio sabiendo que su superficie es de 45 m^2, que una de las bases es el doble de la altura y la otra es 17 m. más larga que la altura. R.: $b = \frac{61}{3}$ y $b' = \frac{20}{3}$

XIX. — Con una hoja de cartón de forma cuadrada se quiere construir una caja sin tapa, para lo cual se sacan de cada ángulo de dicha hoja un cuadrado de 2,5 cm. de lado. Calcular la longitud del lado de la hoja sabiendo que la caja construída tiene un volumen de 90 cm^3. R.: $x = 11$ cm.

XX. — Si a un sector circular de radio r se lo hace girar alrededor de la bisectriz de su ángulo central, después de un giro completo engendra una superficie cónica seguida de un casquete esférico. Calcular el radio de la base de este último sabiendo que la superficie lateral del cono es igual a la superficie del casquete. R.: $x = \frac{4}{5}\,r$.

XXI. — Dos móviles parten simultáneamente del vértice de un ángulo recto y recorren los lados del ángulo con movimiento uniforme, uno con una velocidad de 1,5 m/seg. y el otro con velocidad de 2,5 m/seg. Se desea saber al cabo de cuanto tiempo se hallarán separados por una distancia de 500 m.

R.: $t = \frac{11}{17}$ seg.

CAPITULO VI

ECUACIONES QUE SE REDUCEN A LAS DE SEGUNDO GRADO

PROGRAMA. — *Ecuaciones trinomias, en particular bicuadradas. Ecuaciones recíprocas de tercero y cuarto grado que se reducen a las de segundo por factoreo o mediante una incógnita auxiliar. Ejercicios.*

98. **Ecuaciones trinomias.** — DEFINICIÓN. — Se llaman *ecuaciones trinomias* a aquellas que constan de tres términos, uno independiente y los otros dos contienen a la incógnita elevada a una potencia que tiene en uno de ellos el exponente doble del de la otra.

EJEMPLOS:

$$4x^4 - 2x^2 + 5 = 0$$

$$x^6 - \frac{1}{2}x^3 + 0{,}5 = 0$$

$$\frac{2}{3}x^8 + 0{,}5x^4 + 1 = 0$$

son ecuaciones trinomias.

En general: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ es una ecuación trinomia, siendo a, b y c números reales distintos de cero.

99. **Ecuaciones bicuadradas.** — Las ecuaciones trinomias de cuarto grado se llaman *ecuaciones bicuadradas.*

Luego son ecuaciones bicuadradas, las del siguiente tipo:

[1] $ax^4 + bx^2 + c = 0$ siendo a, b, y c números reales distintos de cero.

Las raíces de estas ecuaciones pueden hallarse empleando las fórmulas de resolución de las de segundo grado, pues si se tiene en cuenta que $x^4 = (x^2)^2$ y que $x^2 = (x^2)^1$ resulta que la [1] puede escribirse así

$$a\,(x^2)^2 + b\,(x^2) + c = 0$$

es decir como una ecuación de segundo grado, si se considera a x^2 como incógnita. Resolviendo esta ecuación, se tiene:

$x_1^2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$ de donde extrayendo las raíces cuadradas de ambos miem., se tiene

$$\begin{cases} x_1' = \sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}} & [2] \\[2ex] x_1'' = -\sqrt{\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}} & [3] \end{cases}$$

$x_2^2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$ de donde extrayendo las raíces cuadradas de ambos miem., se tiene

$$\begin{cases} x_2' = \sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}} & [4] \\[2ex] x_2'' = -\sqrt{\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}} & [5] \end{cases}$$

Las fórmulas [2], [3], [4] y [5], que conviene saber de memoria, *permiten resolver cualquier ecuación bicuadrada, con solo reemplazar a, b y c por los valores particulares que tengan en ella.*

Ejemplo I. — Resolver la ecuación $x^4 - 10\,x^2 + 9 = 0$.

Teniendo en cuenta las fórmulas [2], [3], [4] y [5] resulta

$$x_1' = \sqrt{\frac{10 + \sqrt{10^2 - 4.1.9}}{2.1}} = \sqrt{\frac{10 + \sqrt{100 - 36}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{10 + \sqrt{64}}{2}} = \sqrt{\frac{10 + 8}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$x_1'' = -3$

$$x_2' = \sqrt{\frac{10 - \sqrt{64}}{2}} = \sqrt{\frac{10 - 8}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_2'' = -1$$

Ejemplo II. — Resolver la ecuación $6\,x^4 - 11\,x^2 - 35 = 0$

$$x_1' = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{11^2 + 4.6.35}}{12}} = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{121 + 840}}{12}} =$$

$$= \sqrt{\frac{42}{12}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$x_1'' = -\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$x_2' = \sqrt{\frac{11 - \sqrt{121 + 840}}{12}} = \sqrt{\frac{11 - 31}{12}} = \sqrt{-\frac{20}{12}} = \sqrt{\frac{5}{3}}\,i$$

$$x_2'' = -\sqrt{\frac{5}{3}}\,i$$

De manera análoga se pueden resolver las ecuaciones trinomias de grado superior al cuarto.

Aplicaciones. I — Resolver las ecuaciones

$(x^2 + 7\,x + 8)\,(x^2 - 4) = 0$; $(x^2 - 5\,x + 6)\,(x - 4) = 0$

$x^4 - 6\,x^2 + 8 = 0$; $x^4 + 4\,x^2 = 5$; $x^4 - 21\,x^2 = 100$

$16\,x^4 - 32\,x^2 + 15 = 0$; $10\,x^4 - 21 = x^2$; $x^4 - 74\,x^2 = -1225$

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{4}{x^2} = 5\,\dfrac{7}{9}$; $\dfrac{a}{x^4} - \dfrac{2\,b^2}{x^2} = \dfrac{3\,b^2}{a}$; $(y^2 - 4)^2 = 25$

$x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0$; $9\,x^4 - 32\,x^2 - 16 = 0$; $2z^4 - 11z^2 + 12 = 0$

$(x^2 - 3\,x + 1)^2 + x^2 - 3\,x = 1$; $(x^2 - 1)^2 - 4\,(x^2 - 1) + 3 = 0$

$y^4 - 5\,y^2 + 4 = 0$; $(z^2 + 5\,z)^2 + 10\,(z^2 + 5\,z) + 24 = 0$ (*)

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 4 = 0$; $7\,\sqrt{x^2 + 3\,x} - 2\,x^2 - 6\,x = 6$

(*) Tómese como incógnita a $z^2 + 5\,z$.

100. Ecuaciones recíprocas de tercer grado. — DEFINICIÓN. — Se llaman *ecuaciones recíprocas de tercer grado* a las ecuaciones completas de ese grado que ordenadas tienen los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos, iguales o simétricos. Luego son de este tipo

$$a\,x^3 + b\,x^2 + b\,x + a = 0 \qquad [1]$$

$$a\,x^3 + b\,x^2 - b\,x - a = 0 \qquad [2]$$

EJEMPLOS. — $2\,x^3 + 7\,x^2 + 7\,x + 2 = 0;$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{11}x^2 + \frac{7}{11}x - \frac{1}{3} = 0; \quad 0{,}6\,x^3 + 5{,}4\,x^2 + 5{,}4\,x + 0{,}6 = 0$$

RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL TIPO [1]. — Sea la ecuación

$$2\,x^3 + 7\,x^2 + 7\,x + 2 = 0.$$

Esta ecuación admite la raíz $x_1 = -1$, pues

$$2\,(-1)^3 + 7\,(-1)^2 + 7\,(-1) + 2 = -2 + 7 - 7 + 2 = 0$$

Por lo tanto el primer miembro de la ecuación dada

$$2\,x^3 + 7\,x^2 + 7\,x + 2$$

es divisible por $(x + 1)$, pues el resto de esa división, que se obtiene reemplazando en el dividendo a x por 1 cambiado de signo, es cero.

Efectuando la división de acuerdo con la regla de Ruffini, resulta:

$$(2\,x^3 + 7\,x^2 + 7\,x + 2) : (x + 1) = 2\,x^2 + 5\,x + 2$$

luego $\quad 2\,x^3 + 7\,x^2 + 7\,x + 2 = (2\,x^2 + 5\,x + 2)\,(x + 1)$

y la ecuación dada puede escribirse así:

$$(2\,x^2 + 5\,x + 2)\,(x + 1) = 0$$

Como el producto de dos factores es igual a cero si lo es uno de los factores, resulta que la ecuación anterior se satisface si

$$2\,x^2 + 5\,x + 2 = 0,$$

o sea para las raíces x_2 y x_3 de esta ecuación, es decir

$$x_2 = \frac{-5+\sqrt{5^2-4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5+\sqrt{9}}{4} = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$x_3 = \frac{-5-3}{4} = -2.$$

Luego las raíces de $2x^3+7x^2+7x+2=0$ son: $x_1=-1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$ y $x_3=-2$.

Resolución de las ecuaciones del tipo [2]. — Sea la ecuación

$$x^3+3x^2-3x-1=0.$$

Esta ecuación admite la raíz

$$x_1 = 1, \quad \text{pues} \quad (1)^3+3(1)^2-3(1)-1 = 1+3-3-1=0$$

por lo tanto el primer miembro de la ecuación dada es divisible por $(x-1)$, y como

$$(x^3+3x^2-3x-1):(x-1) = x^2+4x+1 \quad \text{por teor. Ruffini;}$$

es
$$x^3+3x^2-3x-1 = (x^2+4x+1)(x-1),$$

y la ecuación dada puede escribirse así:

$$(x^2+4x+1)(x-1)=0,$$

de donde resultan las dos nuevas raíces x_2 y x_3, que anulan al primer factor, es decir

$$x_2 = -2+\sqrt{4-1} = -2+\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x_3 = -2-\sqrt{3},$$

que junto con $x_1 = 1$ son las tres raíces de la ecuación dada.

101. **Ecuaciones recíprocas de cuarto grado.** — Definiciones. — Se llaman *ecuaciones recíprocas de cuarto grado* a las ecuaciones completas de este grado que ordenadas tienen los coeficientes

de los términos equidistantes de los extremos iguales o simétricos. Luego las ecuaciones recíprocas de cuarto grado tienen las formas siguientes:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \qquad [1]$$

$$ax^4 + bx^3 \qquad - bx - a = 0 \qquad [2]$$

en esta última falta el término en x^2, pues el único número igual a su simétrico es 0.

Resolución de las ecuaciones recíprocas de cuarto grado del tipo [1]. — Sea la ecuación

$$6\,x^4 + 5\,x^3 - 38\,x^2 + 5\,x + 6 = 0$$

Dividiendo por x^2 se tiene:

$$6\,x^2 + 5\,x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

Agrupando los términos equidistantes de los extremos y sacando factor común en cada grupo resulta:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0 \qquad [1]$$

Haciendo $\quad x + \dfrac{1}{x} = y \quad [2] \qquad$ resulta $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = y^2$

o sea $\quad x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 \quad$ de donde $\quad x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2 \qquad [3]$

Reemplazando [2] y [3] en [1], se tiene:

$$6\,(y^2 - 2) + 5y - 38 = 0$$

o bien

$$6\,y^2 - 12 + 5\,y - 38 = 0$$

$$6\,y^2 + 5\,y - 50 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado en y. Resolviendo da:

$$y_1 = \frac{-5 + \sqrt{25 + 1200}}{12} = \frac{-5 + 35}{12} = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

$$y_2 = \frac{-5 - 35}{12} = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3}$$

Reemplazando y_1 e y_2 en [2] se tiene:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \quad \therefore \quad x^2 + 1 = \frac{5}{2}x \quad \therefore \quad x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \qquad [4]$$

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \quad \therefore \quad x^2 + 1 = -\frac{10}{3}x \quad \therefore \quad x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0 \qquad [5]$$

De la [4] resultan:

$$x_1 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2; \quad x_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

De la [5] resultan:

$$x_3 = -\frac{10}{6} + \sqrt{\frac{100}{36} - 1} = -\frac{10}{6} + \frac{8}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3};$$

$$x_4 = -\frac{10}{6} - \frac{8}{6} = -3$$

Segundo caso. — Sea la ecuación

$$x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = 0$$

Esta ecuación admite la raíz

$$x_1 = 1, \text{ pues } 1^4 + 3 \,.\, 1^3 - 3 \,.\, 1 - 1 = 1 + 3 - 3 - 1 = 0,$$

por lo tanto la ecuación puede escribirse

$$x^4 + 3x^3 - 3x - 1 = (x^3 + 4x^2 + 4x + 1)(x - 1) = 0$$

por el teorema de Ruffini, de donde resulta que las raíces de esa ecuación son las que anulan al primer factor del segundo miembro, o sea las de la ecuación recíproca

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

Esta ecuación admite la raíz

$$x_2 = -1,$$

pues

$$(-1)^3 + 4(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1 + 4 - 4 + 1 = 0$$

luego puede escribirse así:

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (x^2 + 3x + 1)(x + 1) = 0 \text{ por teor. Ruffini}$$

y por lo tanto las otras dos raíces de la ecuación dada son las que anulan al primer paréntesis del segundo miembro, o sea

$$x_3 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

y

$$x_4 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

Luego las raíces de $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ son

$$x_1 = 1 \ ; \ x_2 = -1 \ ; \ x_3 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{y} \quad x_4 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$

Aplicaciones. — *Resolver las ecuaciones siguientes:*

$3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0$; $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
$1/3\,x^3 - 7/11\,x^2 + 7/11\,x - 1/3 = 0$; $0{,}6\,x^3 + 5{,}4\,x^2 + 5{,}4\,x + 0{,}6 = 0$
$x^3 - 7/2\,x^2 + 7/2\,x - 1 = 0$;
$m\,n\,x^3 + (m\,n - m^2 - n^2)\,x^2 + (m\,n - m^2 - n^2)\,x + m\,n = 0$
$2x^4 + 5x^3 - 5x + 2 = 0$; $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$
$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$; $4x^4 - 17x^3 + 17x - 4 = 0.$

CAPITULO VII

FUNCIONES ALGEBRAICAS MAS USUALES DE UNA VARIABLE

PROGRAMA. — *Trinomio de segundo grado: Definición. Descomposición del trinomio de segundo grado en factores de primer grado. Aplicaciones a la simplificación de fracciones. Representación gráfica del trinomio de segundo grado. Resolución gráfica de una ecuación de segundo grado y de una ecuación de grado superior al segundo, preferentemente de la forma* $ax^m + bx + c = 0$, *por aproximaciones sucesivas. Reconocimiento de las curvas más usuales: Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, por el tipo de su ecuación. Verificación mediante la representación gráfica. Resolución analítica y gráfica de un sistema de ecuaciones constituído por una de segundo grado y otra de primero. Resolución gráfica del sistema formado por las eucaciones de la cirucnferencia e hipérbola equilátera. Ejercicios.*

103. **Trinomio de segundo grado.** — DEFINICIÓN. — Recordemos (*Arit.* III nº 93) que se dice que una variable y es *función* de otra variable x, llamada *argumento*, cuando a cada valor de la segunda x corresponden uno o varios valores de la primera y, y que se representa simbólicamente así:

$$y = f(x) \quad \text{siendc } f(x) \text{ un polinomio en } x.$$

EJEMPLO: $$y = 3x^5 + 4x^4 - x^3 + 8.$$

104. **Descomposición del trinomio de 2º grado.** — Nos ocuparemos de las funciones llamadas *trinomios de segundo grado*, que son aquellas en que el polinomio en que figura la variable independiente es un trinomio de segundo grado, es decir de la función

$$y = ax^2 + bx + c$$

EJEMPLOS: $y = 3x^2 + 8x - 6 \quad ; \quad y = x^2 - x - 1.$

Sacando a como factor común del trinomio anterior, se tiene

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Recordando (*Arit.* III nº 32) que todo trinomio de segundo grado de la forma $x^2 + px + q$ es igual al producto de dos factores binomios de la forma $x + m$ y $x + n$, siendo m y n números tales que su suma sea igual a p y su producto igual a q, tendríamos

$$y = a\,[(x + m)\,(x + n)]$$

siendo $\qquad m + n = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad m.n = \frac{c}{a}$

Por otra parte, teniendo en cuenta que para

$$y = 0 \quad \text{es} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

una ecuación de segundo grado, cuyas raíces x_1 y x_2 cumplen las condiciones

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

resulta que en la descomposición del trinomio en producto, podremos reemplazar a m por $-x_1$, y a n por $-x_2$, con lo que nos queda

$y = a\,[(x - x_1)\,(x - x_2)]$ siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación que resulta para el valor $y = 0$.

El procedimiento seguido que es general nos permite enunciar la siguiente

REGLA. — *Toda función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ puede descomponerse en el producto de tres factores de los cuales uno es el coeficiente a del término en x^2, y los otros dos son las diferencias entre la variable x y las raíces de la ecuación de segundo grado que resulta cuando la función y vale cero.*

Ejemplo. — *Descomponer en factores la función*

$$y = 3x^2 + 3x - 18$$

Como para $y = 0$ es $3x^2 + 3x - 18 = 0$

y $$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 216}}{6} = \frac{-3 + \sqrt{225}}{6} = \frac{-3 + 15}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-3 - 15}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

resulta $$y = 3(x - 2)\left[x - (-3)\right] = 3(x - 2)(x + 3)$$

105. **Aplicación a la simplificación de fracciones.** — Sea la fracción $\frac{4x^2 - 17x - 15}{8x^2 + 38x + 6}$ cuyo numerador y denominador son trinomios de segundo grado. Descomponiéndolos en factores de primer grado, de acuerdo con la regla anterior, se tiene:

$$\frac{4x^2 - 17x - 15}{8x^2 + 38x + 24} = \frac{4(x - 5)\left(x + \frac{3}{4}\right)}{8(x + 4)\left(x + \frac{3}{4}\right)}$$

y simplificando por 4 y por $\left(x + \frac{3}{4}\right)$

$$\frac{4x^2 - 17x - 15}{8x^2 + 38x + 24} = \frac{x - 5}{2(x + 4)}$$

El procedimiento seguido en este ejemplo es general y sólo se utiliza cuando la descomposición de un trinomio en producto no es fácil de hacer mentalmente, como se ha visto en el curso anterior (*Arit. y Alg.*, 3er curso, nº 32).

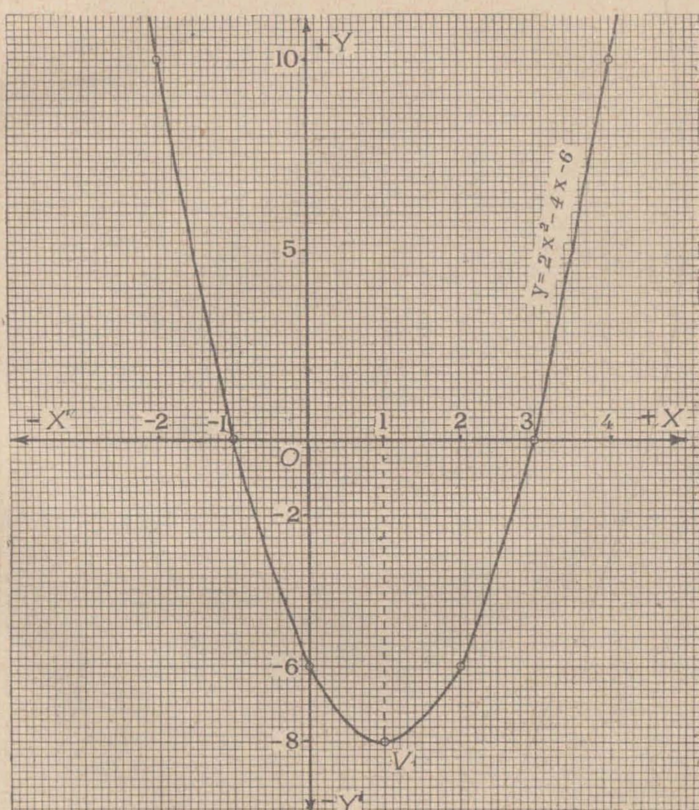
106. **Representación gráfica del trinomio de segundo grado.** — Ejemplo I. — *Representar gráficamente la función*

$$y = 2x^2 - 4x - 6.$$

Dando valores a x y hallando los correspondientes a y se obtiene el siguiente cuadro de valores

x	0	1	2	3	4	-1	-2
y	-6	-8	-6	0	10	0	10

que nos permitió dibujar la gráfica que sigue, donde se ha **tomado** para las abscisas una unidad doble que para las ordenadas.



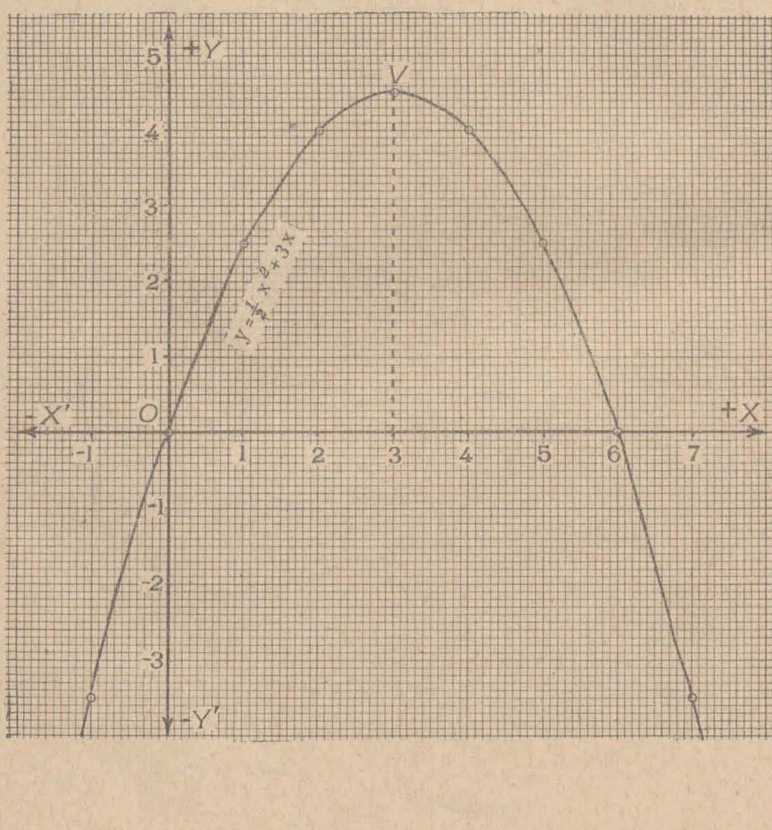
EJEMPLO II. — *Representar gráficamente la función*

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x.$$

Dando valores a x y hallando los correspondientes de y se obtiene el siguiente cuadro de valores

x	0	1	2	3	4	5	6	7	-1	-2
y	0	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	4	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	-8

que nos permite dibujar la gráfica que sigue:



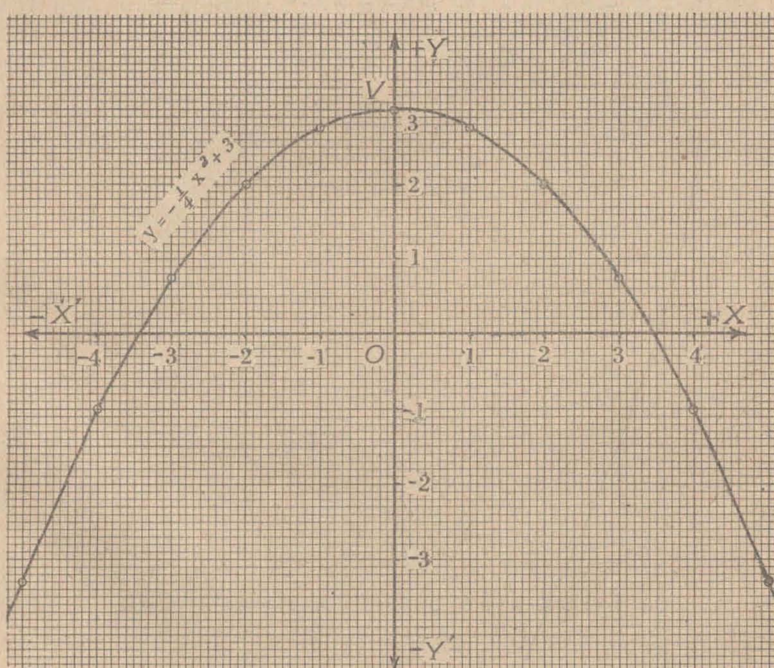
EJEMPLO III. — *Representar gráficamente la función*

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3.$$

Dando valores a x y hallando los correspondientes de y se obtiene el siguiente cuadro de valores

x	0	1	2	3	4	5	6	-1	-2	-3	-4
y	3	$\frac{11}{4}$	2	$\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{13}{4}$	-6	$\frac{11}{4}$	2	$\frac{3}{4}$	-1

que nos permite dibujar la gráfica que sigue

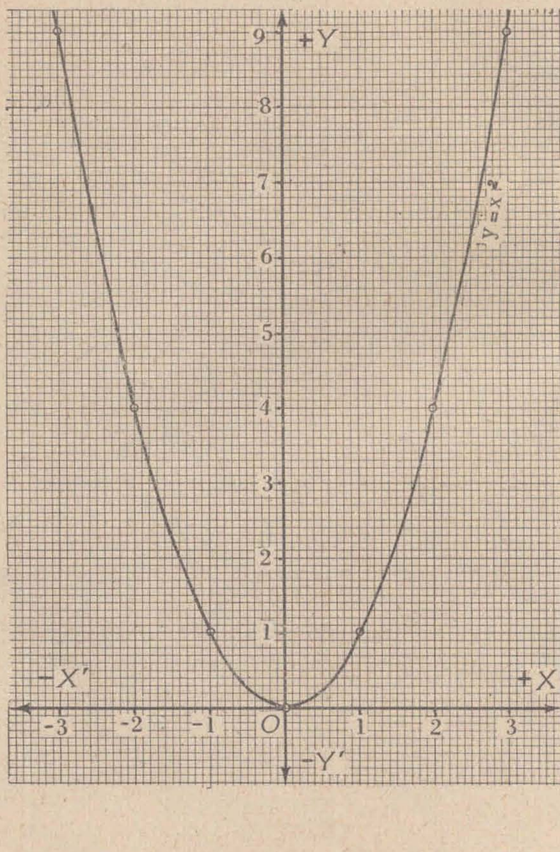


EJEMPLO IV. — *Representar gráficamente la función* $y = x^2$.

Dando valores a x y hallando los correspondientes de y, se obtiene el siguiente cuadro de valores

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	1	4	9	1	4	9

que nos permite dibujar la gráfica que sigue



Los ejemplos tratados que comprenden todos los tipos de funciones racionales enteras de segundo grado, no muestran que la gráfica de dicha función es una curva característica. Dicha curva se llama *parábola de segundo grado.*

107. **Resolución gráfica de una ecuación de segundo grado.** — Consideremos la ecuación reducida de segundo grado

$$x^2 + bx + c = 0 \qquad [1]$$

que puede escribirse también así $x^2 = -bx - c$ [2]

Considerando aisladamente a cada miembro como una función de variable independiente x, se tiene el sistema $\begin{cases} y = x^2 & [3] \\ y = -bx - c & [4] \end{cases}$

cuyas raíces son soluciones de la ecuación [2] porque para esos valores se tiene x^2 igual a $-bx - c$, y por lo tanto son también raíces de la ecuación dada [1].

Tratemos de hallar gráficamente esas raíces.

Procediendo en forma análoga a la empleada para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado (*Arit.* III, nº 100), representemos sobre un mismo par de ejes cartesianos las funciones [3] y [4] obtenidas.

Observando que la gráfica de la primera función es una parábola (pág. 126) y que la de la segunda es una recta (*Arit.* III, nº 98), las abscisas de los puntos de intersección de ambas gráficas (si se cortan) serán las raíces de la ecuación dada pues para cada uno de tales puntos los valores de y son iguales.

Como el razonamiento seguido es general, podemos enunciar la siguiente

Regla. — *Para resolver gráficamente una ecuación de segundo grado con una incógnita* $x^2 + bx + c = 0$.

1º) *Se construye sobre un par de ejes coordenados cartesianos la parábola* $y = x^2$

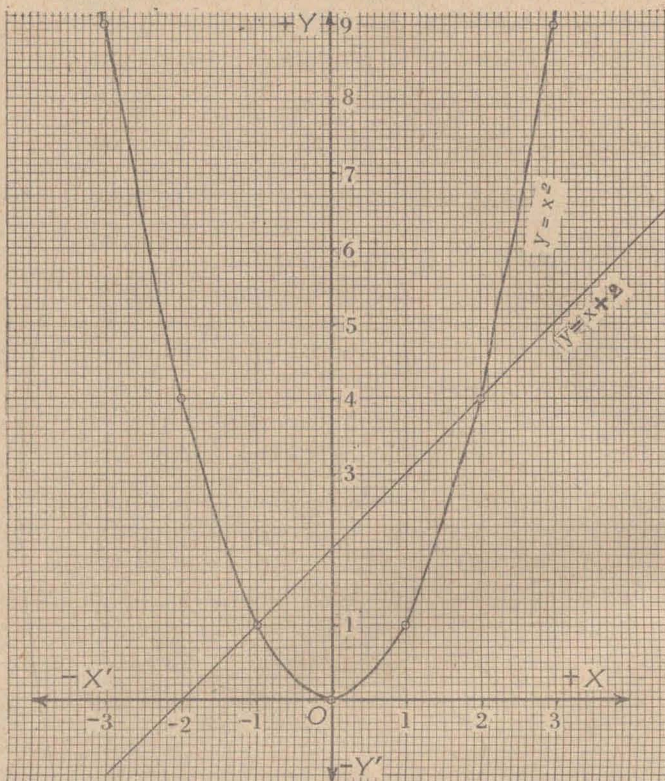
2º) *Se construye sobre los mismos ejes la recta* $y = -bx - c$

3º) *Si la recta corta a la parábola las abscisas de los puntos de intersección nos dan los valores* x_1 *y* x_2 *de las raíces de la ecuación* $x^2 + bx + c = 0$ *dada.*

APLICACIONES. — *Resolver gráficamente la ecuación* $x^2 - x - 2 = 0$.

Representando gráficamente y sobre los mismos ejes las funciones

$$y = x^2 \quad \text{e} \quad y = x + 2$$



vemos que la recta obtenida corta a la parábola en los puntos (—1|1) y (2|4) luego las raíces de la ecuación dada son $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

OBSERVACION I.— Como todas las ecuaciones reducidas tienen por primer término a x^2, resulta que una vez representada la parábola $y = x^2$, puede resolverse con ella cualquier ecuación reducida con solo representar la recta $y = -bx - c$, como se vé a continuación.

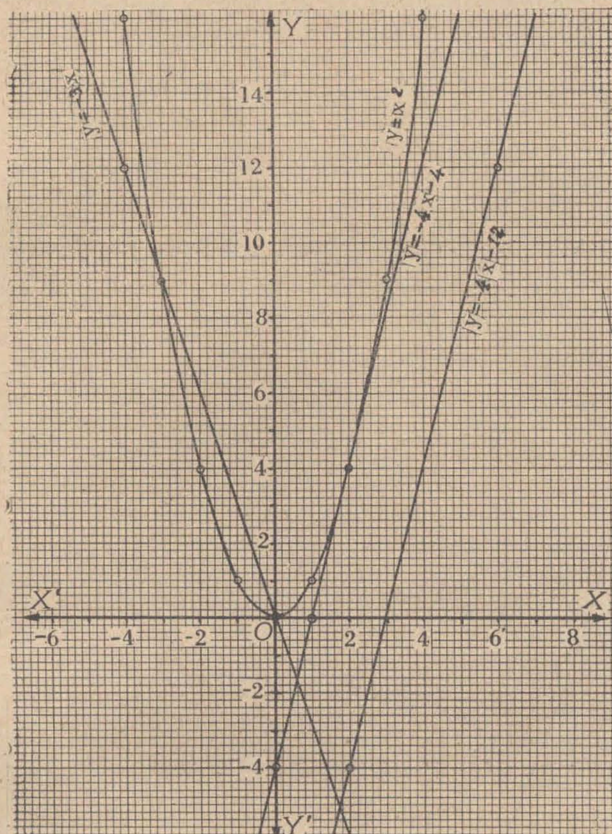
EJEMPLO. — *Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones*

[1] $$x^2 + 3x = 0$$

[2] $$x^2 - 4x + 4 = 0$$

[3] $$x^2 - 4x + 12 = 0$$

Dibujando la parábola $y = x^2$



y luego la recta $y = -3x$ como ésta corta a la primera en los puntos $(0|0)$ $(-3|9)$ resulta que las raíces de la [1] son $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$.

Como la recta $y = 4x - 4$ es *tangente* a la parábola en el punto (2|4) y puede demostrarse que una ecuación de segundo grado tiene siempre dos raíces reales o dos raíces imaginarias, se interpreta este caso de tangencia diciendo que *las raíces son iguales*, es decir, que $x_1 = x_2 = 2$.

Por último como la recta $y = 4x - 12$ *no corta* a la parábola, se interpreta este caso diciendo que las raíces de la ecuación dada son *complejas imaginarias*. Puede, en efecto, comprobarse (resolviendo la ecuación) que las raíces son: $x_1 = 2 + i\sqrt{8}$ y $x_2 = 2 - i\sqrt{8}$.

Observacion II. — Para resolver la cuación general $ax^2+bx+c=0$ basta dividir a ambos miembros de la ecuación por a, pues entonces se tiene una ecuación reducida y se puede proceder como en el caso anterior.

108. **Resolución gráfica de una ecuación de grado superior al segundo de la forma** $ax^m + bx + c = 0$. — Procediendo en foranáloga a la indicada para la resolución gráfica de la ecuación de segundo grado, tendríamos que las raíces de la ecuación

$$ax^m + bx + c = 0$$

son las del sistema

$$\begin{cases} y = ax^m \\ y = -bx - c \end{cases}$$

o sea las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de $y = ax^m$, que se llama *parábola de grado m*, con la recta $y = -bx - c$ si se cortan.

Apliquemos ese procedimiento a la resolución de los ejemplos siguientes:

Ejemplo I. — *Resolver gráficamente la ecuación* $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Para representar gráficamente sobre los mismos ejes las funciones

$$y = x^3 \quad \text{e} \quad y = 7x - 6$$

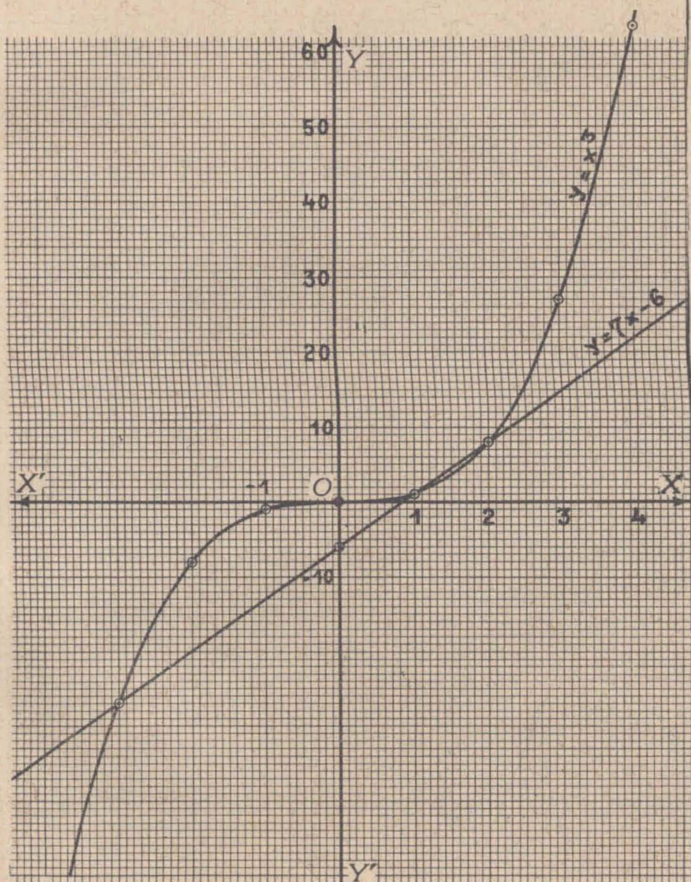
formamos los siguientes cuadros de valores, para $y = x^3$

x	0	1	2	3	4	— 1	— 2	— 3	— 4
y	0	1	8	27	64	— 1	— 8	— 27	— 64

para $y = 7x - 6$

x	0	1
y	— 6	1

y tomamos una unidad para las ordenadas 10 veces menor que para las abscisas, como se ve en la figura.



Las abscisas de los puntos en que se ve claramente, en este caso, que la recta corta a la parábola cúbica, son las raíces $x_1 = -3$; $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$, de la ecuación dada.

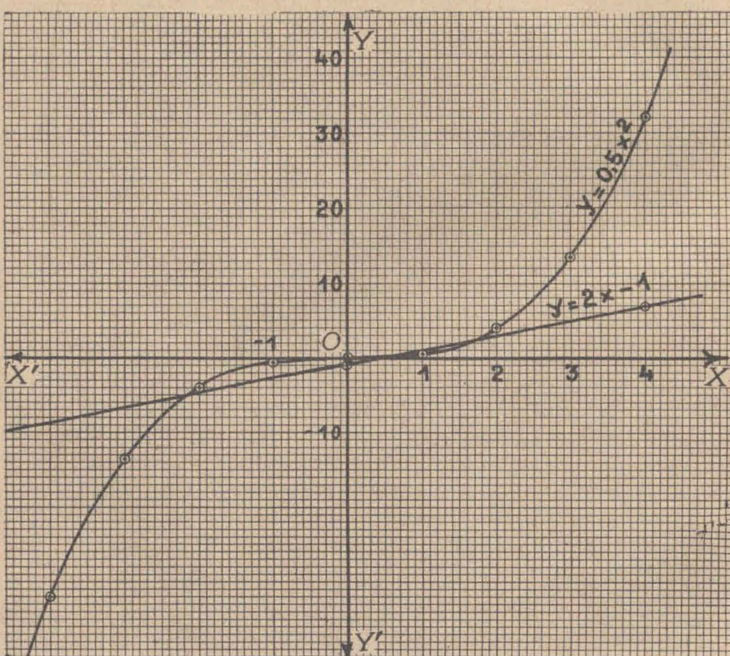
EJEMPLO II. — *Resolver la ecuación* $0{,}5\,x^3 - 2\,x + 1 = 0$.

Para representar gráficamente sobre los mismos ejes las funciones

$$y = 0{,}5\,x^3$$

$$y = 2\,x - 1$$

formamos los siguientes cuadros de valores y tomamos una unidad para las ordenadas 10 veces menor que para las abscisas, como se ve en la figura.



$$y = 0,5\,x^3$$

x	0	1	2	3	4	—1	—2	—3	—4
y	0	0,5	4	13,5	32	—0,5	—4	—13,5	—32

para $y = 2\,x - 1$

x	0	4
y	—1	7

Las abscisas de los puntos en que la recta corta a la parábola cúbica parecen ser $x_1 = -2{,}25$; $x_2 = 0{,}6$ y $x_3 = 1{,}7$ que pueden tomarse como valores aproximados de las raíces de la ecuación, pues se ve en el cuadro siguiente que para esos valores de x las ordenadas de la parábola cúbica y de la recta difieren poco.

x	—2,25	0,6	1,7
$0{,}5\,x^3$	—5,6953	0,108	2,4565
$2\,x - 1$	—5,5	0,2	2,4

Si se desea mayor aproximación ensayaríamos otros valores próximos a los encontrados, por ejemplo, 1,71, 1,69, 1,68 y 1,67 para la tercera raíz, y se obtienen los resultados que se indican en el cuadro que sigue:

x	1,71	1,69	1,68	1,67
x^3	2,5001	2,2561	2,3708	2,3232
$2\,x - 1$	2,42	2,38	2,36	2,34

lo que nos lleva a tomar como valor más aproximado de la tercera raíz el $x_3' = 1{,}675$. Análogamente por tanteos sucesivos obtendríamos estos otros valores más aproximados para la primera y segunda raíz $x_1' = -2{,}215$ y $x_2' = 0{,}54$.

Aplicaciones. — I. — Descomponer en factores los trinomios siguientes:

a) $y = x^2 - x - 2$; *b)* $y = x^2 - 100\,x + 2400$; *c)* $y = 2\,x^2 + 7\,x - 4$;

d) $y = 3\,x^2 + 2\,ax + a^2 + b^2$; *e)* $y = 10\,ax - b - 5x^2$; *f)* $y = x^2 + 5\,x + 6$.

II. — Simplificar las fracciones siguientes:

$$\frac{3\,(x+1)}{x^2+2\,x+1}\;;\quad \frac{x^2-6\,x+9}{x^2-x-12}\;;\quad \frac{6\,x^2+x-1}{3\,x^2-4\,x+1}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2-6\,x+5}\;;\quad \frac{2\,x^3-6\,x^2-8\,x}{2\,x^2+5\,x-12}\;;\quad \frac{x^2-x-20}{5\,x^2+24\,x-5}.$$

III. — Representar gráficamente y utilizando los mismos ejes las funciones siguientes: *a)* $y = x^2 + x + 2$; $y = x^2 + 2\,x - 5$; $y = 4\,x^2 - 3\,x + 1$;
b) $y = x^2$; $y = x^2 + 2\,x$; $y = x^2 + 2\,x - 5$; $2\,x + 3\,y - 6 = 0$.

IV. — Representar gráficamente la ley del movimiento de caída de los cuerpos en el vacío, sabiendo que dicha ley está expresada por la fórmula $e = 1/2\;gt^2$, siendo e el espacio medido en metros, t el tiempo medido en segundos y g la aceleración de la gravedad. (Tómese $g = 9{,}80$ m/seg²).

V. — Encontrar graficamente el valor máximo o mínimo que adquieren las siguientes funciones: *a)* $y = x^2 + 2\,x$; *b)* $y = x^2 + 5\,x + 6$;

c) $y = -\frac{1}{2}\,x^2 + 3\,x$; *d)* $y = -\frac{1}{4}\,x^2 + 3$; *e)* $y = -x^2 + 2\,x - 4$.

VI. — Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones:

$$x^2 + 5\,x + 6 = 0\;;\quad x^2 - 6\,x + 8 = 0\;;\quad x^2 - 2\,x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2\,x = 0\;;\quad x^2 - 4 = 0\;;\quad 3\,x^2 + 5\,x - 6 = 0$$

$$4\,x^2 + 4\,x - 3 = 0\;;\quad 2\,x^2 + x - 15 = 0\;;\quad 2\,x^2 + 7 = 0$$

$$x^3 - 19\,x + 30 = 0\;;\; 4\,x^3 - 3\,x + 1 = 0\;;\; x^3 + x - 4 = 0\;;\; x^5 - 5\,x + 1 = 0.$$

RECONOCIMIENTO DE LAS CURVAS MAS USUALES

109. **Reconocimiento de una elípse. Su verificación gráfica.** — Representemos gráficamente una ecuación del tipo

$$m^2 x^2 + n^2 y^2 = m^2 n^2$$

Tomando para m el valor 6 y para n el $\frac{5}{2}$ tendríamos la ecuación

$$6^2 . x^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 y^2 = 6^2 . \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

o sea
$$36\, x^2 + \frac{25}{4} y^2 = 225$$

Formemos una tabla de valores tomando a x como argumento y hallando los valores correspondientes de y.

Luego tendríamos

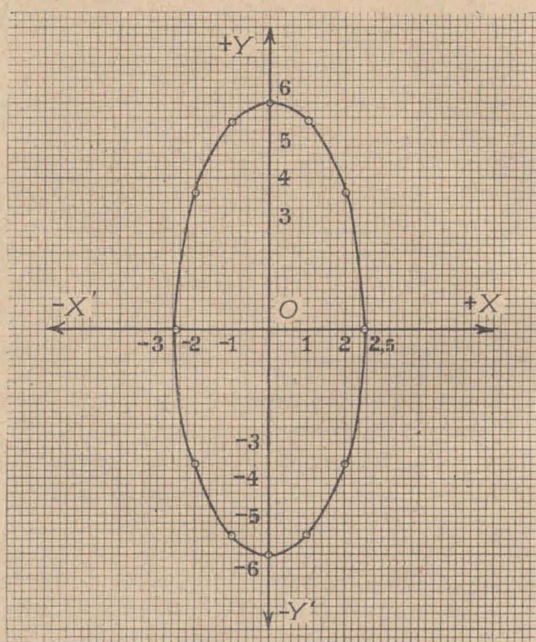
x	0	± 1	± 2	$\pm 2,5$	± 3	si x crece
y	± 6	$\pm 5,5$	$\pm 3,6$	0	imag.	y es imag.

El doble signo de los números que figuran en el cuadro significa que para cada valor de x corresponden dos de y, iguales en valor absoluto y de signos contrarios, y recíprocamente para cada valor de y corresponden dos de x. Así, por ejemplo, de los valores correspondientes de la segunda casilla se sacan los siguientes cuatro puntos $(1|5,5)$; $(1|-5,5)$; $(-1|5,5)$ $(-1|-5,5)$.

Por otra parte puede también observarse que para todo valor de x mayor que 2,5 o menor que — 2,5 los correspondientes de y son números imaginarios, razón por la cual esos pares de valores no nos dan puntos de la gráfica, por lo que no figuran en el cuadro.

Teniendo en cuenta la tabla de valores obtenida se construye la gráfica de la figura donde pueden comprobarse mas claramente las observaciones hechas.

Así por ejemplo, el hecho de que dicha gráfica sea simétrica respecto de los dos ejes, es consecuencia de que para cada valor de x corresponden dos de y iguales en valor absoluto y de signos contrarios y recíprocamente, y el hecho de que la curva no se extienda fuera de ciertos límites ($x = \pm 2{,}5$ e $y = \pm 6$) comprueba la segunda observación.



Como los valores tomados para m y n eran cualesquiera puede afirmarse que las gráficas de las ecuaciones del tipo $m^2x^2 + n^2y^2 = m^2n^2$ tendrán las mismas características que la que se acaba de dibujar y es por eso que se les da a esas curvas un nombre común que es el de *elípse*.

110. **Reconocimiento de una circunferencia. Su verificación gráfica.** — Representemos gráficamente una ecuación del tipo $x^2 + y^2 = r^2$. Puede considerarse a esta ecuación como un caso particular de las del tipo anterior, pues si en éstas se tiene $m = n = r$ resulta

$$r^2x^2 + r^2y^2 = r^2 . r^2$$

luego dividiendo ambos miembros por r^2 y simplificando da

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Tomando para r el valor 6 tendríamos la ecuación

$$x^2 + y^2 = 6^2 \quad \text{o sea} \quad x^2 + y^2 = 36$$

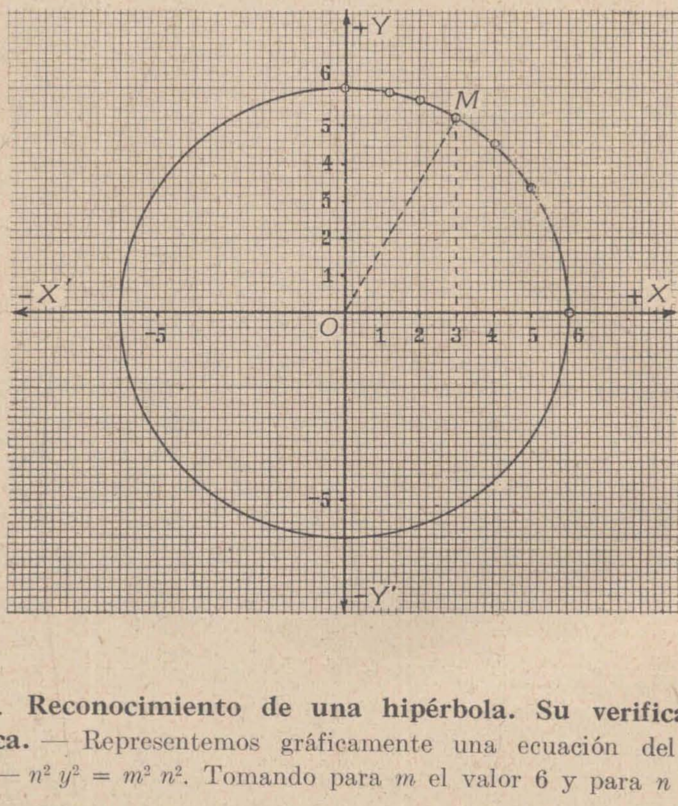
Formemos una tabla de valores tomando a x como argumento y hallando los valores correspondientes de y. Luego tendríamos

x	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	x crece
y	± 6	$\pm$	$\pm 5{,}66$	$\pm 5{,}2$	$\pm 4{,}47$	$\pm 3{,}32$	0	imag.	y es imág.

Trazando la gráfica de la función dada puede notarse a simple vista que parece ser una circunferencia cuyo centro es el origen de los ejes y cuyo radio vale 6.

Puede probarse que efectivamente la gráfica de la función $x^2 + y^2 = 36$ es una circunferencia. En efecto: como para cualquier punto M de coordenadas x y y se verifica que el cuadrado de su abscisa mas el cuadrado de su ordenada dá el cuadrado de la distancia del punto al orígen, en virtud del Teorema de Pitágoras, y ésta siempre debe valer 36, resulta que los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación dada equidistan de dicho orígen luego pertenecen a la circunferencia de centro O y radio $r = \sqrt{36} = 6$, y recíprocamente.

En general las gráficas de las ecuaciones del tipo $x^2 + y^2 = r^2$ son las *circunferencias* de centro O y radio r, siendo por lo tanto innecesario formar cuadros de valores para representarlas.



111. **Reconocimiento de una hipérbola. Su verificación gráfica.** — Representemos gráficamente una ecuación del tipo $m^2 x^2 - n^2 y^2 = m^2 n^2$. Tomando para m el valor 6 y para n el de $\frac{5}{2}$ tendríamos la ecuación:

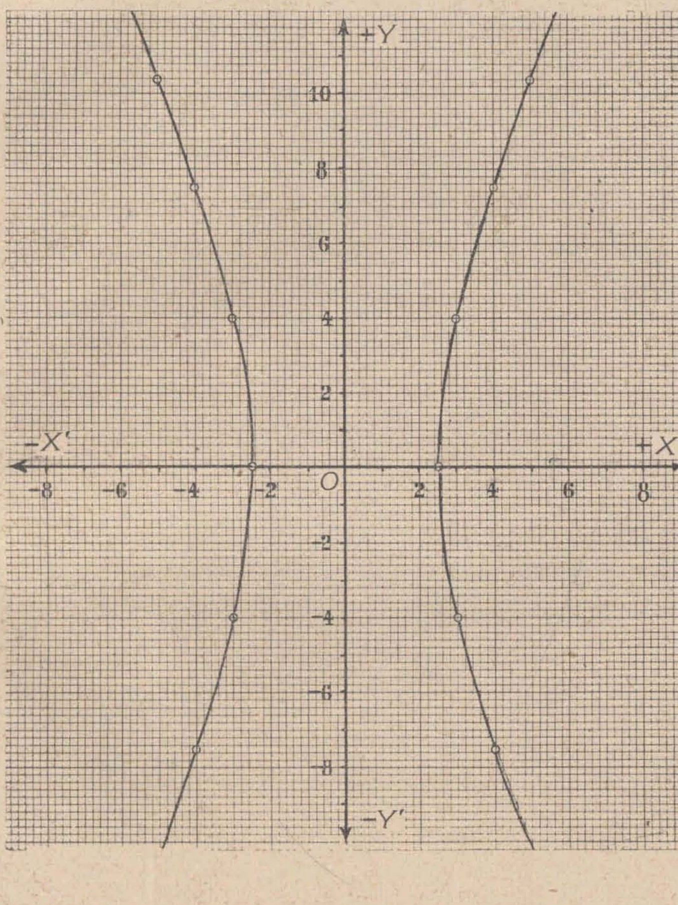
$$6^2 x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 y^2 = 6^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

o sea
$$36\, x^2 - \frac{25}{4}\, y^2 = 225$$

Formemos una tabla de valores tomando a x como argumento y hallando los valores correspondientes de y. Luego tendremos

x	0	± 1	± 2	$\pm 2{,}5$	± 3	± 4	± 5	± 6	si x crece
y	*imág.*	*imág.*	*imág.*	0	$\pm 3{,}98...$	$\pm 7{,}50...$	$\pm 10{,}39...$	$\pm 13{,}09$	y crece

El doble signo de los números que figuran en el cuadro significa que para cada valor de x corresponden dos de y, iguales en valor absoluto y de signo contrario, y recíprocamente para cada valor de y corresponden dos de x.



Por otra parte puede observarse que para todo valor de x comprendido entre — 2,5 y 2,5 los correspondientes de y son números imaginarios, razón por la cual esos pares de valores no dan puntos de la gráfica, por lo que no se han calculado esos valores de y.

Teniendo en cuenta los pares de valores reales de esa tabla se construye la gráfica de la figura adjunta en la cual se comprueban las observaciones que se acaban de hacer.

Así el hecho de que dicha gráfica sea simétrica respecto de los dos ejes es consecuencia de que a cada valor de x corresponden dos de y iguales en valor absoluto y de signos contrarios y recíprocamente; y el hecho de que no existan puntos de la gráfica en el intervalo comprendido entre los puntos $(+2{,}5|0)$ y $(-2{,}5|0)$ es consecuencia de lo segundo.

Como los valores tomados para m y n eran cualesquiera, puede afirmarse que las gráficas de las ecuaciones del tipo $m^2x^2 - n^2y^2 = m^2n^2$ tendrán las mismas características que la que se acaba de dibujar y es por eso que se les dá a esas curvas un nombre común que es el de *hipérbola*.

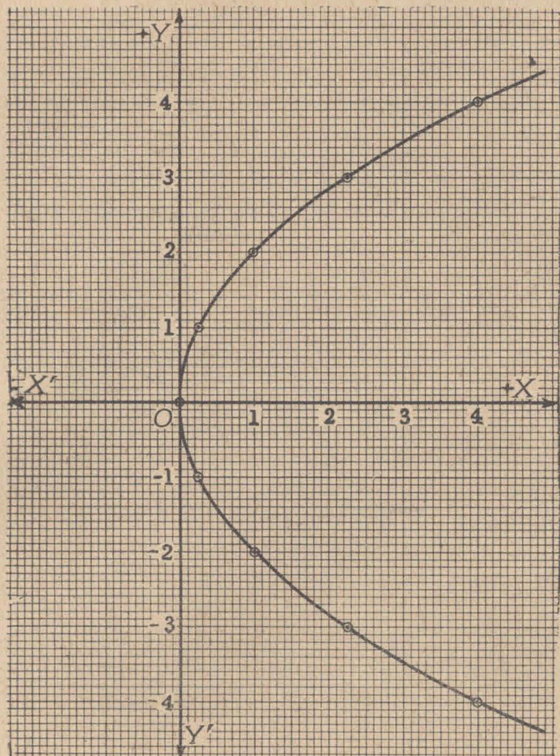
112. **Reconocimiento de la parábola por el tipo de su ecuación** — Habíamos dicho anteriormente (nº 106) que las gráficas de las ecuaciones del tipo $y = ax^2 + bx + c$ tales como las

$$y = 2x^2 - 4x - 6 \; ; \; y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x \; ; \; y = -\frac{1}{4}x^2 + 3 \; ;$$

$y = x^2$, eran *parábolas de segundo grado.*

Procediendo en forma análoga a la indicada en el mencionado párrafo puede comprobarse que las gráficas de las ecuaciones del tipo $y^2 = 2px$ son parábolas simétricas con respecto al eje de las *equis* y cuyo vértice es el origen de los ejes, como se ve en el ejemplo que damos a continuación al representar gráficamente la ecuación $y^2 = 4x$.

x	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4
y	0	± 1	± 2	± 3	± 4

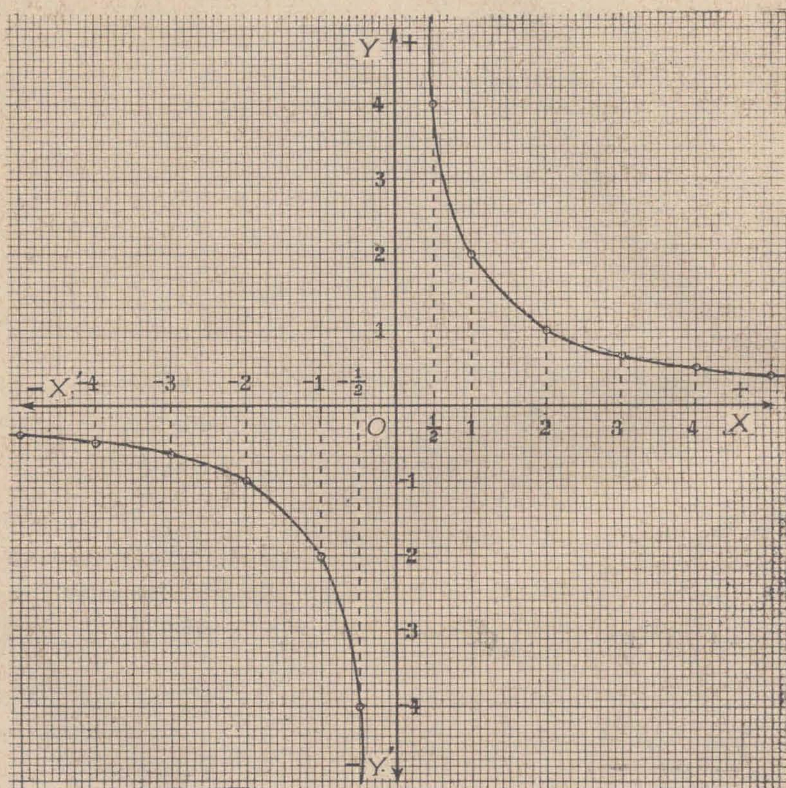


113. Representación gráfica de las ecuaciones del tipo xy = k. — Teniendo en cuenta que si $xy = k$ es $y = \dfrac{k}{x}$ resulta que esta última función ya ha sido representada en el curso anterior. Así, por ejemplo, para $k = 2$, se tiene $y = \dfrac{2}{x}$ que nos permite calcular el cuadro de valores que sigue

x	$\ldots -5$	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	$5 \ldots$
y	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	no existe	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5} \ldots$

Observando el cuadro de valores se ve que para cada valor positivo o negativo de x corresponde un solo valor positivo o negativo, respectivamente, de y; que para el valor 0 de x no existe valor correspondiente de y; y que a medida que x crece en valor absoluto y decrece.

Teniendo en cuenta los pares de valores de esa tabla se construye la gráfica adjunta en la cual se comprueban las observaciones que se acaban de hacer.



Asi el hecho de que dicha gráfica esté en el primero y en tercer cuadrante es consecuencia de que a cada valor de x corresponde uno solo de y del mismo signo y recíprocamente; y el hecho de que no tenga ningún punto sobre el eje de las y es consecuencia de lo segundo, y por último el que la curva se acerque a los ejes sin llegar a cortarlos es consecuencia de la tercera observación.

Como el valor tomado para k era cualquiera, puede afirmarse que las gráficas de las ecuaciones del tipo $xy = k$ tendrán las mismas características que la que se acaba de dibujar, y es por eso que se les dá a esas curvas un nombre común que es el de *hipérbola equilátera.*

RESOLUCION ANALITICA Y GRAFICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES CONSTITUIDO POR UNA DE 2º GRADO Y OTRA DE PRIMERO

114. **Resolución analítica y gráfica de los sistemas del tipo.**

$$\begin{cases} m^2x^2 + n^2y^2 = m^2n^2 \\ ax + by = c \end{cases}$$

Supongamos para fijar ideas que $m = 6$, $n = \frac{5}{2}$, $a = 18$, $b = -10$ y $c = 0$, con lo que resulta el sistema

$$\begin{cases} 36\,x^2 + \frac{25}{4}\,y^2 = 225 & [1] \\ 18\,x - 10\,y = 0 & [2] \end{cases}$$

que trataremos de resolver aplicando uno de los métodos estudiados en tercer año, el de sustitución, por ejemplo (*Arit.* III, nº 67).

1º) Suponiendo conocido el valor de x en la ecuación [2] y resolviéndola con respecto a y, se tiene

$$-10\,y = -18\,x \quad \text{luego} \quad y = \frac{-18\,x}{-10} = \frac{9}{5}\,x \qquad [3]$$

2º) Sustituyendo en [1] este valor de y, resulta

$$36\,x^2 + \frac{25}{4}\left(\frac{9}{5}\,x\right)^2 = 225$$

$$36\,x^2 + \frac{25}{4}\cdot\frac{81}{25}\,x^2 = 225$$

$$36\,x^2 + \frac{81}{4}\,x^2 = 225$$

Trasponiendo términos y reduciendo los semejantes da

$\frac{225}{4} x^2 - 225 = 0$ que es una ecuación de segundo grado con una incógnita

3°) Resolviéndola, se tiene

$$x_1 = + \sqrt{\frac{225}{\frac{225}{4}}} = \sqrt{\frac{225 . 4}{225}} = \sqrt{4} = 2 \quad \text{y} \quad x_2 = -2$$

4°) Sustituyendo los valores de x_1 y x_2 en [3], resulta

$$y_1 = \frac{9}{5} . 2 = \frac{18}{5} = 3{,}6 \qquad y_2 = \frac{9}{5} (-2) = \frac{-18}{5} = -3{,}6.$$

Veamos si el par de valores $x_1 = 2$; $y_1 = 3{,}6$ y el par $x_2 = -2$; $y_2 = -3{,}6$ son raíces del sistema.

Sustituyendo en las ecuaciones [1] y [2] estos valores, se tiene

1ª *ecuación* $36 \, (2)^2 + \frac{25}{4} . \left(\frac{18}{5}\right)^2 = 225$ la ecuación [1] se satisface

2ª *ecuación* $18 \, (2) - 10 . \frac{18}{5} = 0$ la ecuación [2] se satisface

luego el par $x_1 = 2$ y $y_1 = 3{,}6$ es raíz del sistema dado.

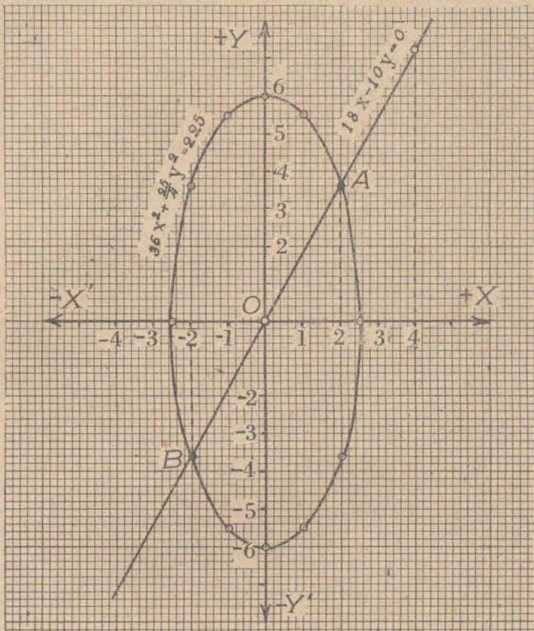
En la misma forma puede comprobarse que también lo es el par $x_2 = -2$, e $y_2 = -3{,}6$.

Tratemos ahora de ver si el método gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (*Arit.* III n° 100), es también aplicable a la resolución del sistema propuesto.

Representando sobre un mismo par de ejes cartesianos a las ecuaciones dadas utilizando para la primera $36 \, x^2 + \frac{25}{4} y^2 = 225$ el cuadro de valores de la página 135 y para la $18 \, x - 10 \, y = 0$ el cuadro

x	0	4
y	0	7,2

se observa que las gráficas de dichas ecuaciones se cortan en los puntos A (2|3,6) y B (— 2|— 3,6). El par de valores $x_1 = 2$ $y_1 = 3{,}6$, y el par $x_2 = -2$; $y_2 = -3{,}6$ son raíces del sistema dado.



En efecto: por pertenecer el punto A a la elipse que es la gráfica de la ecuación $36\,x^2 + \dfrac{25}{4}\,y^2 = 225$, sus coordenadas satisfacen a la ecuación considerada. Pero A pertenece también a la recta, que es la gráfica de la ecuación $18\,x - 10\,y = 0$, luego sus coordenadas satisfacen a dicha ecuación. El mismo razonamiento puede hacerse con las coordenadas del punto B.

La observación de este ejemplo que es general, nos permite enunciar la siguiente

REGLA. — *Para resolver gráficamente un sistema de segundo grado con dos incógnitas.*

1°) *Se construyen, sobre un mismo par de ejes coordenados cartesianos, las gráficas de las ecuaciones dadas.*

2°) *Se hallan las coordenadas de los puntos de intersección, que son las raíces del sistema.*

OBSERVACION. — Si la curva que representa a la ecuación de segundo grado y la recta que representa a la de primero son tangentes, se dice que las dos raíces del sistema se confunden en una, y si la recta es exterior a la curva que el sistema no tiene raíces reales.

EJERCICIO. — Resolver analítica y gráficamente el sistema $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$

115. Resolución analítica y gráfica de los sistemas de la forma

$$\begin{cases} m^2x^2 - n^2y^2 = m^2n^2 \\ ax + by = c \end{cases}$$

Supongamos para fijar ideas que $m = 6$, $n = \frac{5}{2}$, $a = 0$, $b = 3$ y $c = 9$, con lo que resulta el sistema

$$\begin{cases} 36\,x^2 - \frac{25}{4}\,y^2 = 225 & [1] \\ 0x + 3\ y = 9 & [2] \end{cases}$$

Para resolverlo usaremos el método de sustitución, luego

1°) Despejando el valor de y en la ecuación [2] da $y = 3$ [3]

2°) Sustituyendo en [1] se tiene

$$36\,x^2 - \frac{25}{4}\,.\,3^2 = 225$$

luego $$36\,x^2 - \frac{25}{4}\,.\,3^2 - 225 = 0$$

Multiplicando por 4 y dividiendo por 3^2 se tiene

$$16\,x^2 - 25 - 100 = 0$$

o sea $16\,x^2 - 125 = 0$ ecuación de segundo grado.

Resolviéndola se tiene

$$x_1 = + \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{+\sqrt{125}}{4} \cong \frac{11,18}{4} \cong 2,795$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{125}}{4} \cong -2,795$$

Como la ecuación $y = 3$ solo se satisface para el valor 3 resultan $y_1 = y_2 = 3$

Veamos si el par de valores $x_1 = \frac{\sqrt{125}}{4}$, $y_1 = 3$ y el par $x_2 = -\frac{\sqrt{125}}{4}$ y $y_2 = 3$ son raíces del sistema.

Sustituyendo en las ecuaciones [1] y [2] estos valores, se tiene

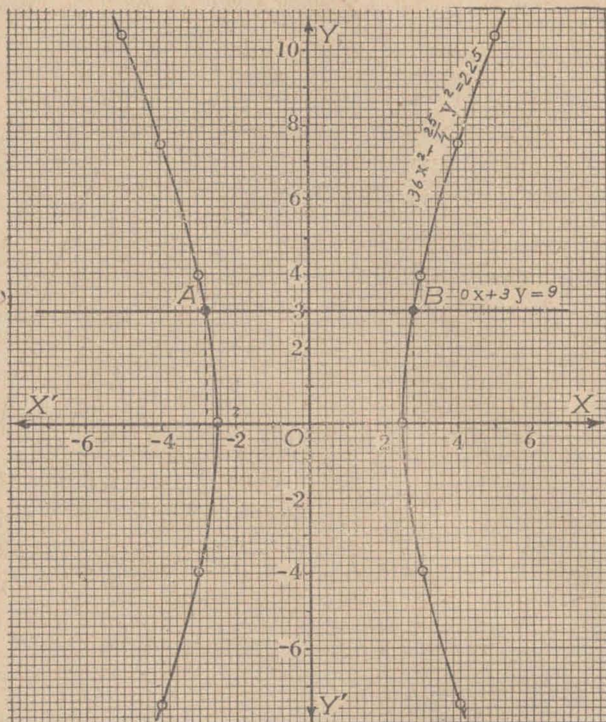
1ª *ecuación* $36\left(\frac{\sqrt{125}}{4}\right)^2 - \frac{25}{4} \cdot 3^2 = 225$ la ec. [1] se satisface

2ª *ecuación* $0 \cdot \frac{\sqrt{125}}{4} + 3 \cdot 3 = 9$ la ec. [2] se satisface

luego el par $x_1 = \frac{\sqrt{125}}{4}$ y $y_2 = 3$ es raíz del sistema dado. En la misma forma puede comprobarse que también lo es el par $x_2 = -\frac{\sqrt{125}}{4}$ y $y_2 = 3$.

Aplicando la regla para la resolución gráfica, dada en el párrafo anterior, y utilizando para representar la ecuación $36\,x^2 - \frac{25}{4}y^2 = 225$ el cuadro de valores de la página 139, y teniendo en cuenta, que siendo $0\,x + 3\,y = 9$ para cualquier valor de x, y vale 3, resulta que su gráfica es la paralela al eje de las x trazadas a la distancia 3. Como esta recta corta a la hipérbola en los puntos B $(2,8|3)$ y A $(-2,795|3)$ resulta que las raíces del sistema son $x_1 = 2,8$ $y_1 = 3$; $x_2 = -2,795$ $y_2 = 3$.

Ejercicio. — Resolver analítica y gráficamente el sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$



116. Resolución analítica y gráfica de los sistemas de la forma

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ ax + by = c \end{cases}$$

Supongamos para fijar ideas que sea $r = 6$, $a = 3$, $b = 4$ y $c = 0$ con lo que resulta el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 & [1] \\ 3x + 4y = 0 & [2] \end{cases}$$

que trataremos de resolver aplicando otro de los métodos estudiados en Tercer Año, el de igualación (*Arit.* III nº 68).

1°) Suponiendo conocido el valor de x en ambas ecuaciones y despejando el valor de y, se tiene

De la [1] $$y = \pm \sqrt{36 - x^2} \qquad [3]$$

De la [2] $$y = -\frac{3}{4}x \qquad [4]$$

2°) Igualando los segundos miembros de [3] y [4], resulta

$$\pm \sqrt{36 - x^2} = -\frac{3}{4}x$$ que es una ecuación irracional.

3°) Elevando ambos miembros al cuadrado, se tiene

$$(\pm \sqrt{36 - x^2})^2 = \left(-\frac{3}{4}x\right)^2$$

$$36 - x^2 = \frac{9}{16}x^2$$

o sea $$\frac{9}{16}x^2 + x^2 - 36 = 0$$

luego $$\frac{25}{16}x^2 - 36 =$$

de donde $$x_1 = \sqrt{\frac{36.16}{25}} = \frac{6.4}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{36.16}{25}} = -4{,}8$$

4°) Sustituyendo estos valores de x en la ecuación [4], se tiene

$$y_1 = -\frac{3}{4} \cdot 4{,}8 = -3{,}6; \quad y_2 = -\frac{3}{4} \cdot (-4{,}8) = 3{,}6$$

5°) Veamos si el par de valores $x_1 = 4{,}8$, $y_1 = -3{,}6$ y el par $x_2 = -4\ 8$, $y_2 = 3{,}6$ son raíces del sistema

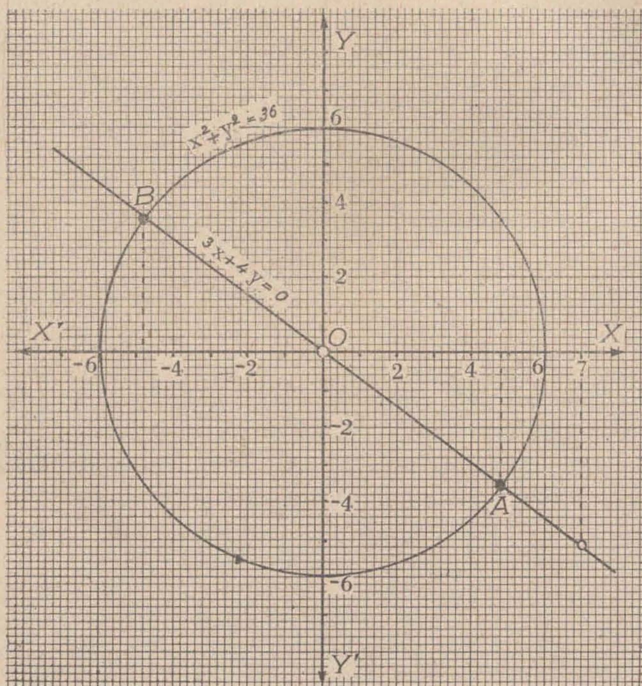
Sustituyendo en las ecuaciones [1] y [2] estos valores, se tiene

1ª *ecuación* $(4{,}8)^2 + (-3{,}6)^2 = 36$ la ecuación [1] se satisface
2ª *ecuación* $3 \,.\, 4{,}8 + 4 \,.\, (-3{,}6) = 0$ la ecuación [2] se satisface

luego el par $x_1 = 4{,}8$ y $y_1 = -3{,}6$ es raíz del sistema dado. **En** la misma forma puede comprobarse que también lo es el par $x_2 = -4{,}8$ y $y_2 = 3{,}6$.

Aplicaremos la regla dada para resolver gráficamente un sistema, teniendo en cuenta que la gráfica de la primera ecuación es la circunferencia de centro en el orígen de los ejes y radio $r = 6$, y que la de la segunda es una recta que puede representarse con los valores del siguiente cuadro

x	0	7
y	0	5,25



Como esta recta corta a la circunferencia en dos puntos A (4,8|— 3,6) y B (— 4,8|3,6) resulta que las raíces del sistema son

$$x_1 = 4{,}8 \qquad y_1 = -3{,}6 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -4{,}8 \qquad y_2 = 3{,}6$$

Ejercicio. — Resolver analítica y gráficamente el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x = -10 \end{cases}$

117. Resolución analítica y gráfica de los sistemas de la forma

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ mx + ny = p \end{cases}$$

Supongamos para fijar ideas que sea $a = -2$. $b = 4$, $c = 6$ $m = 2$, $n = -1$, $p = -2$, con lo que resulta el sistema

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 4x + 6 & [1] \\ 2x - y = -2 & [2] \end{cases}$$

que resolveremos por el método de igualación.

1°) Despejando el valor de y en la [2], se tiene

$$y = 2x + 2 \qquad [3]$$

2°) Igualando los segundos miembros de [1] y [3], dá

$$-2x^2 + 4x + 6 = 2x + 2.$$

o sea $\quad -2x^2 + 2x + 4 = 0$ ecuación de segundo grado.

3°) Resolviéndola resulta

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{4 + 32}}{-2.2} = \frac{-2 + \sqrt{36}}{-4} = \frac{-2 + 6}{-4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{4 + 32}}{-2.2} = \frac{-2 - 6}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

4°) Sustituyendo estos valores en la ecuación [3], se tiene

$$y_1 = 2.(-1) + 2 = -2 + 2 = 0; \quad y_2 = 2.2 + 2 = 6$$

5°) *Verificación.* — Para el par de valores $x_1 = -1$, $y_1 = 0$ se tiene

1ª *ecuación* $\quad 0 = -2.(-1)^2 + 4(-1) + 6 \quad$ la ecuac. [1] se satisf.
2ª *ecuación* $\quad 2.(-1) - 0 = -2 \quad$ la ecuac. [2] se satisf.

luego el par $x_1 = -1$ $y_1 = 0$ es raíz del sistema dado. En la misma forma puede comprobarse que también lo es el par $x_2 = 2$, $y_2 = 6$.

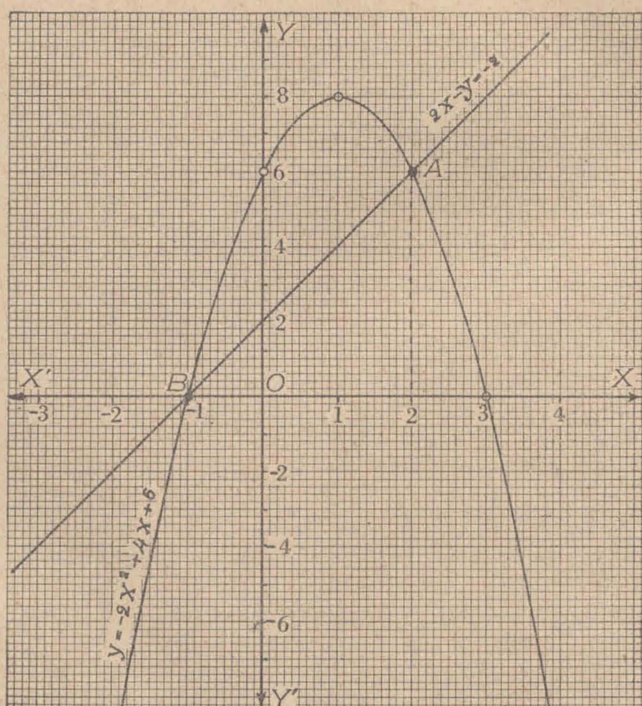
Apliquemos la regla para la resolución gráfica utilizando para representar la parábola $y = -2x^2 + 4x + 6$ el cuadro de valores

x	0	1	2	3	4	-1	-2
y	6	8	6	0	-10	0	-10

y para la recta $2x - y = -2$ el

x	0	-1
y	2	0

y tomando para las abcisas una unidad doble que para las ordenadas



Como esta recta corta a la parábola en los puntos B $(-1|0)$ y A $(2|6)$ resulta que las raíces del sistema son $x_1 = -1$; $y_1 = 0$ y $x_2 = 2$ y $y_2 = 6$.

EJERCICIO. — Resolver analítica y gráficamente el sistema $\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{3}y^2 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

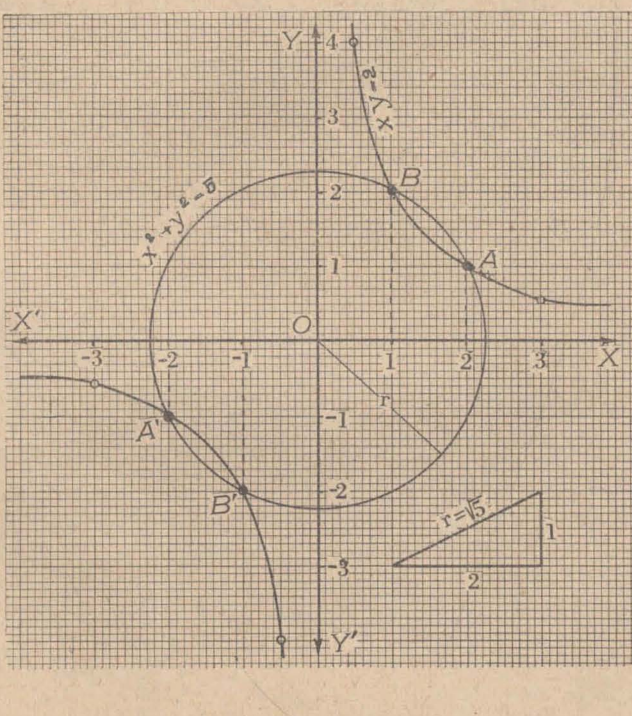
118. Resolución gráfica del sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia e hipérbola equilátera.

Tratemos de resolver un sistema del tipo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ xy = k \end{cases}$$

Supongamos para fijar ideas que sea $r = \sqrt{5}$ y $k = 2$, con lo que resulta el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & [1] \\ xy = 2 & [2] \end{cases}$$



Para aplicar la regla de la resolución gráfica tengamos en cuenta que la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 5$ es una circunferencia cuyo centro es el orígen de los ejes y cuyo radio es $r = \sqrt{5}$ que se obtiene como medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 2 y 1 como indica la figura, y que la gráfica de la ecuación $xy = 2$ es la del ejemplo del n° 113.

Como esta última corta a la circunferencia en los puntos A (2|1), A' (— 2|— 1), B (1|2) y B' (— 1|— 2), resulta que sus coordenadas son las raíces del sistema dado.

Ejercicio. — Resolver analítica y gráficamente el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases}$

Aplicaciones. I. — *Indicar, sin representarlas previamente, qué curvas representan las ecuaciones:*

$$a)\ \frac{x^2}{4} + \frac{x_2}{9} = 1\ ;\ b)\ x^2 + y^2 - 25 = 0\ ;\ c)\ x^2 - y^2 = 1\ ;\ d)\ \frac{1}{4}\,x = \frac{1}{y}\ ;$$

$$e)\ 4x^2 + 4y^2 = 16\ ;\ f)\ 2y^2 = 6x\ ;\ g)\ x^2 = y - 2x + 6\ ;\ h)\ x + y - 6 = 0\,.$$

II. — *Resolver analítica y gráficamente los sistemas siguientes:*

$$a)\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = -3 \end{cases};\ b)\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ x - y = -8 \end{cases};\ c)\begin{cases} xy = -28 \\ x - y = 11 \end{cases};\ d)\begin{cases} x^2 - y^2 = 25 \\ y^2 - x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases};\ f)\begin{cases} xy = 9 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases};\ g)\begin{cases} y^2 = 9x \\ 2x + y = 6 \end{cases};\ h)\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ xy = 4 \end{cases}$$

CAPITULO VIII

ANALISIS COMBINATORIO

PROGRAMA. — *Definición. Formación y número de arreglos que se obtienen con m elementos tomados de n en n, siendo n menor que m: Fórmula correspondiente. Número de arreglos en el caso que $n = m$. Permutaciones de n elementos: Definiciones. Fórmula correspondiente: Formas usuales para expresar el número de permutaciones de n elementos. Combinaciones: Definición. Formación y número de combinaciones que se obtienen con m elementos tomados de n en n, siendo n menor que m: Fórmula correspondiente. Combinaciones complementarias. Ejercicios. — Producto de factores binomiales que tienen un término común. Fórmula correspondiente. Binomio de Newton: Deducción de la fórmula para el desarrollo del mismo. Desarrollo del binomio diferencia. Propiedades de los coeficientes. Aplicaciones: Caso en que los términos del binomio sean cualesquiera y caso en que uno de ellos sea la unidad. Término general del desarrollo del binomio. Aplicación del desarrollo del binomio para obtener el número «e». Generalización de la ley del desarrollo del binomio para exponente negativo y fraccionario, en los casos posibles, (postularla). Aplicaciones a los binomios de tipo* $(1+i)^n$ *y* $(1+i)^{\frac{m}{n}}$ *Probabilidades: Probabilidad simple: casos favorables y casos posibles; frecuencia. Definiciones. Consideraciones y aplicaciones sencillas a problemas conocidos de probabilidad simple y probabilidad complementaria o contraria. Probabilidad total y probabilidad compuesta. Ejercicios y problemas.*

118. **Arreglos.** — DEFINICIÓN. — Se llaman *arreglos* de m objetos, tomados de n en n, a todos los grupos ordenados de n objetos cada uno, tomados entre los m dados, de modo que dos grupos cualesquiera difieran almenos en un objeto, o bien en el orden en que están agrupados.

Los arreglos de los objetos tomados de 1 en 1 se llaman de *primer orden*; los de dos en dos, de *segundo orden*, los de 3 en 3 de *tercer orden*, etc.

Ejemplo. — Considerando las tres letras A, B, C, tendríamos que los arreglos de segundo orden de las mismas son los seis siguientes:

AB, AC, BA, BC, CA y CB.

119. **Formación y número de los arreglos.** — Formación. — Designemos los m objetos con m letras distintas. De acuerdo con la definición resulta que los arreglos de *primer orden* de cuatro objetos, por ejemplo, designados por las letras A, B, C, D son:

$$\overbrace{A, B, C, D}^{4},$$

o sea hay 4 arreglos de primer orden.

Los arreglos de *segundo orden* se obtienen agrupando cada uno de los cuatro objetos con cada uno de los 4 — 1 = 3 objetos restantes, con lo que se obtiene:

$$4-1=3\left\{\overbrace{\begin{array}{cccc} AB & BA & CA & DA\\ AC & BC & CB & DB\\ AD & BD & CD & DC\end{array}}^{4}\right.$$

o sea hay 4 $\times$ 3 arreglos de segundo orden.

Los arreglos de *tercer orden* se obtienen agrupando cada uno de los 4 $\times$ 3 arreglos de segundo orden, con cada uno de los 4 — 2 = 2 objetos que no figuran en él, con lo que se obtienen:

$$4-2=2\left\{\overbrace{\begin{array}{cccccccccccc} ABC & ACB & ADB & BAC & BCA & BDA & CAB & CBA & CDA & DAB & DBA & DCA\\ ABD & ACD & ADC & BAD & BCD & BDC & CAD & CBD & CDB & DAC & DBC & DCB\end{array}}^{4\times 3}\right.$$

o sea hay 4 $\times$ 3 $\times$ 2 arreglos de tercer orden.

Por último los arreglos de *cuarto orden* resultan agregando a cada uno de los de tercer orden cada uno de los 4 — 3 = 1 objetos que o figuran en él, o sea:

$$4-3=1\left\{\overbrace{ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, \ldots DBCA, DCAB, DCBA}^{4\times 3\times 2}\right.$$

luego hay 4 $\times$ 3 $\times$ 2 $\times$ 1 arreglos de cuarto orden.

Si hubiéramos considerado más de cuatro objetos hubiésemos podido formar arreglos de quinto, sexto... orden.

Notación. — $\mathcal{A}_{m,n}$ significa *número de arreglos de* m objetos tomados de n en n o sea de orden n.

Del ejemplo anterior resultan:

$$\mathcal{A}_{4,1} = 4 \;;\; \mathcal{A}_{4,2} = 4 \times 3 \;;\; \mathcal{A}_{4,3} = 4 \times 3 \times 2 \;;$$
$$\mathcal{A}_{4,4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

En general, dados m objetos

$$\overbrace{\text{A, B, C, ... L, M}}^{m}$$

cada uno de ellos constituye un arreglo de primer orden, luego hay m, o sea

$$\mathcal{A}_{m,1} = m.$$

Los arreglos de segundo orden se obtienen agrupando cada uno de los m objetos con los $m - 1$ objetos restantes, es decir

$$m-1\left\{\overbrace{\begin{array}{lllll} \text{AB} & \text{BA} & \text{CA...LA} & \text{MA} \\ \text{AC} & \text{BC} & \text{CB...LB} & \text{MB} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{AL} & \text{BL} & \text{CL...LK} & \text{MK} \\ \text{AM} & \text{BM} & \text{CM...LM} & \text{ML} \end{array}}^{m}\right.$$

luego $$\mathcal{A}_{m,2} = m\,(m - 1).$$

Así siguiendo formaríamos los arreglos de orden h, agregando a continuación de cada uno de los arreglos de orden $(h - 1)$ cada uno de los $m - (h - 1) = m - h + 1$ objetos que no figuran en él, por lo tanto cada arreglo de orden $(h - 1)$ da lugar $m - h + 1$ arreglos de orden h.

Los arreglos así obtenidos son distintos y son todos los que se pueden formar con los objetos dados.

La formación de arreglos se facilita observando que si los objetos se representan por letras y se las ordena según el orden alfabético, esas letras figuraran en cada grupo en ese mismo orden, como en las palabras de un diccionario.

Número. — Observando que el número de arreglos que pueden hacerse con objetos tomados de 2 en 2, de 3 en 3 y de 4 en 4 respectivamente, está dado por un producto de 2, 3 ó 4 factores, consecutivos decrecientes, el primero de los cuales es 4, y que esto también se cumple para m objetos tomados de 2 en 2, de 3 en 3, etc., resulta que:

El número de arreglos de m objetos tomados de h en h es igual al producto de h factores consecutivos decrecientes, el primero de los cuales es m.

En símbolos: $\boxed{\mathcal{A}_{m,h} = m\,(m-1)\,(m-2)\,...\,(m-h+1)}$

Ejemplo:

$$\mathcal{A}_{6,4} = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 = 360$$

$$\mathcal{A}_{10,5} = 10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 = 30240$$

$$\mathcal{A}_{50,2} = 50 \,.\, 49 = 2450$$

120. **Permutaciones.** — Definición. — Se llaman *permutaciones* de m objetos a los arreglos de orden m de esos mismos objetos.

Observación. — Como en las permutaciones de m objetos intervienen todos ellos, dos permutaciones *sólo pueden diferir en el orden* en que están agrupados.

Ejemplo. — Las permutaciones de las letras A, B, C son

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

121. **Fórmula.** — Designando con $\mathcal{P}_m$ al número de permutaciones de m objetos tendríamos:

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{A}_{m,m}$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{P}_5 = \mathcal{A}_{5,5} = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{A}_{3,3} = 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

Luego $\mathcal{P}_m$ se obtiene multiplicando los m primeros números naturales consecutivos decrecientes, el primero de los cuales es m, y por lo tanto el último es 1, o sea

$$\boxed{\mathcal{P}_m = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}$$

122. **Formas usuales para expresar el número de permutaciones.** — El producto de los m primeros números naturales distintos de cero se llama *factorial de m*, y se lo representa por $m!$ o por $\underline{|m}$, luego la fórmula que da el número de permutaciones de m objetos se puede escribir así:

$$\boxed{\mathcal{P}_m = m\,! = \underline{|m} = 1 \times 2 \times 3 \ldots (m-1)\,m}$$

Ejemplos:

$\mathcal{P}_5 = 5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$; $\mathcal{P}_3 = 3! = 3\,.\,2\,.\,1 = 6$

$\mathcal{P}_8 = 8\,! = 8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,,2\,.\,1 = 40320$

123. **Combinaciones.** Definicion — Se llaman *combinaciones* de m objetos, tomados de n en n, a todos los grupos de n objetos tomados entre los m dados, de modo que dos grupos cualesquiera difieran en un objeto por lo menos.

Observación. — En las combinaciones sólo se tiene en cuenta los objetos que intervienen en ellas y no el *orden en que están agrupados* en las mismas.

124. **Formación de las combinaciones.** — Consideremos, por ejemplo, cuatro objetos designémolos con las letras A, B, C y D en el orden en que las escribimos. Cada una de esas letras constituyen las combinaciones de *primer orden* de los mismos.

Las combinaciones de *segundo orden* se pueden obtener agregando a la derecha de cada una de las de primer orden, cada uno de los objetos que *le siguen*, con lo que resultan las

AB, AC, AD, BC, BD, CD

Las combinaciones de *tercer orden* se obtienen agregando a la derecha de cada una de las de segundo orden cada uno de los objetos dados que siguen al último de los que figuran en ella, así se obtienen:

ABC, ABD, ACD, BCD

Notación. — $\mathcal{C}_{m,n}$ significa *número de combinaciones* de m objetos tomados de n en n, o sea de orden n. Del ejemplo anterior resultan

$$\mathcal{C}_{4,1} = 4 \quad ; \quad \mathcal{C}_{4,2} = 6 \quad ; \quad \mathcal{C}_{4,3} = 4.$$

125. **Número de combinaciones.** — Fórmula. — Si consideramos las combinaciones de tercer orden, por ejemplo, de las letras A, B, C y D, y escribimos debajo de cada una de ellas todas las permutaciones que pueden hacerse con sus elementos, obtenemos todos los *arreglos* de tercer orden de esas mismas letras.

$$\begin{array}{c} \\ \mathcal{P}_3 \end{array} \begin{array}{l} \overbrace{}^{C_{4,3}} \\ \left\{\begin{array}{cccc} \text{ABC} & \text{ABD} & \text{ACD} & \text{BCD} \\ \text{ACB} & \text{ADB} & \text{ADC} & \text{BDC} \\ \text{BAC} & \text{BAD} & \text{CAD} & \text{CBD} \\ \text{BCA} & \text{BDA} & \text{CDA} & \text{CDB} \\ \text{CAB} & \text{DAB} & \text{DAC} & \text{DBC} \\ \text{CBA} & \text{DBA} & \text{DCA} & \text{DCB} \end{array}\right. \end{array}$$

luego $$\mathcal{A}_{4,3} = \mathcal{C}_{4,3} \times \mathcal{P}_3 = 4 \times 6 = 24.$$

Como esta observación de que se obtienen los arreglos de m objetos tomados de n en n, permutando de todas las $\mathcal{P}_n$ maneras posibles los elementos de cada una de las $C_{m,n}$ combinaciones de m objetos tomados de n en n es general, resulta:

$$\mathcal{A}_{m,n} = \mathcal{C}_{m,n} \times \mathcal{P}_n$$

de donde $$\boxed{\mathcal{C}_{m,n} = \frac{\mathcal{A}_{m,n}}{\mathcal{P}_n}}$$ lo que nos dice que:

El número de combinaciones de m objetos tomados de n en n es igual al cociente entre el número de arreglos de m objetos tomados de n en n y el número de permutaciones de n objetos.

EJEMPLOS: $$\mathcal{C}_{4,3} = \frac{\mathcal{A}_{4,3}}{\mathcal{P}_3} = \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 2}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 4$$

$$\mathcal{C}_{9,5} = \frac{9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5}{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 126 \quad ; \quad \mathcal{C}_{10,2} = \frac{10 \,.\, 9}{2 \,.\, 1} = 45$$

126. **Combinaciones complementarias.** — DEFINICIÓN. — Se dice que las combinaciones del mismo número de objetos son *complementarias* cuando la suma de sus órdenes es igual al número de objetos.

EJEMPLO. — Las combinaciones de tercero y segundo orden de cinco objetos son complementarias, o sea

$$\mathcal{C}_{5,3} \text{ y } \mathcal{C}_{5,2} \text{ son complementarias pues } 3 + 2 = 5$$

PROPIEDAD. — *Los números de dos combinaciones complementarias son iguales.*

EJEMPLO: $$\mathcal{C}_{7,5} = \mathcal{C}_{7,2}$$

En efecto: Siendo $$\mathcal{C}_{7,5} = \frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3}{5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}$$

y

$$\mathcal{C}_{7,2} = \frac{7 \,.\, 6}{2 \,.\, 1}$$

multiplicando ambos términos de esta última fracción por el producto de los números naturales comprendidos entre el menor del numerador y el mayor del denominador, se tiene:

$$\mathcal{C}_{7,2} = \frac{7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3}{2 \,.\, 1 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3} = \mathcal{C}_{7,5}$$

En general, procediendo de idéntica manera, se demuestra que:

$$\mathcal{C}_{m,n} = \mathcal{C}_{m;m-n}.$$

Aplicación. — Esta propiedad simplifica en muchos casos el cálculo del número de combinaciones. Así, por ejemplo, para calcular $\mathcal{C}_{100,98}$ basta calcular

$$\mathcal{C}_{100,2} = \frac{100 \,.\, 99}{2 \,.\, 1} = 50 \,.\, 99 = 4950$$

en lugar de

$$\mathcal{C}_{100,98} = \frac{\overbrace{100 \,.\, 99 \,.\, 98 \,\ldots\, 3}^{97}}{\underbrace{98 \,.\, 97 \,.\, 96 \,\ldots\, 1}_{98}}$$

Aplicaciones. I. — *Cuatro personas entran en un coche de ferrocarril en el que hay 6 asientos disponibles, ¿de cuántas maneras distintas pueden ocuparlos?*

II. — *¿Cuántos números distintos de 5 cifras diferentes pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9?*

III. — *¿Cuántos con las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9? (Téngase en cuenta que el cero no puede ocupar el primer lugar de la izquierda).*

IV. — *Se tienen 7 libros de Algebra y 3 de Geometría, ¿de cuántas maneras pueden colocarse en un estante 4 libros de Algebra y uno de Geometría colocando este último en el medio de aquellos?*

V. — *¿Cuántos pares, cuántas ternas y cuántas cuaternas pueden formarse con 50 números?*

VI. — *¿De cuántas maneras puede ser descompuesta la suma $m + n + p + q + r + s$ en sumas parciales tres sumandos cada una?*

VII. — *¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 5 personas en 8 sillas?*

VIII. — *Hallar el número n sabiendo que el cuádruplo del número de variaciones ternarias de n objetos es igual al quíntuplo del número de variaciones ternarias de $n - 1$ objetos.*

IX. — *¿De cuántas maneras distintas pueden alinearse 9 personas? ¿Cuánto tiempo tardarían en ocupar esas posiciones si para cada una de ellas emplean 30 segundos?*

X. — *¿Cuántos números pueden obtenerse escribiendo una a continuación de la otra de todas las maneras posibles las 9 cifras significativas?*

XI. — *¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de la palabra madre? ¿Cuántas hay que empiezan por m? ¿Cuántas hay que empiezan por ma?*

XII. — *Determinar el número m sabiendo que el número de arreglos de m objetos tomados de 3 en 3 es igual a 240 veces el número m.*

XIII. — *Con las letras M, N, P, m, n, p, ¿cuántas permutaciones pueden formarse? ¿Cuántas comienzan con mayúscula? ¿Cuántas empiezan y terminan con mayúscula?*

XIV. — *¿Cuántos números de cinco cifras diferentes a 19325 y diferentes entre sí pueden formarse con las cifras de este número?*

XV. — *¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse al mismo tiempo 5 personas en un banco?*

XVI. — *Para probar las aptitudes que tienen los 11 jugadores de un team de football, para los diversos puestos de juego, combinan en jugar cada domingo en puestos distintos, ¿cuánto tiempo necesitan para agotar todas las distribuciones posibles de los 11 jugadores en los 11 puestos?*

XVII. — *Un depósito de agua tiene 5 caños de desagüe que arrojan 1, 3, 5, 10 y 20 litros por minuto. Abriendo indistintamente cuatro de esos caños, ¿en cuántos tiempos distintos se puede desagotar el depósito?*

XVIII. — *Dados en el espacio n puntos ($n \geqq 3$) tales que entre ellos no figure ninguna terna de puntos alineados, ¿cuántas rectas determinan?*

XIX. — *Dados en el espacio n puntos ($n \geqq 4$) tales que entre ellos no figure ninguna terna de puntos alineados, ¿cuántos planos determinan?*

XX. — *¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?*

XXI. — *¿Cuál es el polígono en el cual el número de diagonales es: a) igual al de lados; b) es el duplo del número de lados?*

XXII. — *¿Cuántas sumas diferentes de dos sumandos cada una pueden formarse con los números 7, 8, 9, 11, 15, 18 y 23?*

XXIII. — *¿Cuántos productos diferentes de tres factores cada uno, pueden formarse con esos mismos números?*

XXIV. — *Con ocho pesas distintas, ¿cuántas pesadas diferentes pueden efectuarse tomando a esas pesas de 4 en 4?*

XXV. — *¿Cuántas combinaciones pueden hacerse con las letras m, n, p, q, r, s, tomadas de 4 en 4, entrando m en todas ellas?*

BINOMIO DE NEWTON

127. **Productos de factores binomiales que tienen un término común.** — Consideremos un cierto número de binomios que tengan un término común a, por ejemplo los cinco siguientes:

$$(a + b_1)(a + b_2)(a + b_3)(a + b_4)(a + b_5)$$

y hallemos su producto, aplicando la regla para multiplicar varias sumas, para lo cual debemos multiplicar cada término de una de ellas por cada término de las demás. Por esa razón cada término del desarrollo es un producto de cinco factores que pertenecen uno a cada uno de los binomios dados.

Tomemos como primer término del desarrollo al que no tenga ninguna b, o sea al $aaaaa = a^5$. A continuación formemos los términos en los que figura una sola b, que son:

$$aaaab_1\ aaaab_2, \ldots, aaaab_5 \quad \text{o sea} \quad a^4 b_1 \;;\; a^4 b_2; \ldots ; a^4 b_5 \qquad [1]$$

es decir, los que se forman tomando una b y multiplicándola por las aes de las sumas en que no figura esa b, luego hay tantos de esos términos como b: en nuestro ejemplo 5.

A continuación los términos en que figuran dos b, que son:

$$aaab_1 b_2;\ aaab_1 b_3;\ aaab_1 b_4;\ aaab_1 b_5 \;;\ldots;\ aaab_4 b_5$$

es decir, que se forman tomando dos b y multiplicándolas por las aes de las sumas en que no figuran esas b, luego hay tantos de esos términos como combinaciones binarias puedan hacerse con las b.

$$\text{o sea} \quad a^3 b_1 b_2;\ a^3 b_1 b_3;\ a^3 b_1 b_4;\ a^3 b_1 b_5 \;;\ a^3 b_2 b_3; \ldots ;\ a^3 b_4 b_5 \qquad [2]$$

En forma análoga se obtienen los términos en que figuran tres b, cuatro b, y, por último, el término en que figuran las *cinco* b, o sea:

$$a^2 b_1 b_2 b_3;\ a^2 b_1 b_2 b_4;\ a^2 b_1 b_2 b_5;\ \ldots;\ a^2 b_3 b_4 b_5 \qquad [3]$$

$$a b_1 b_2 b_3 b_4;\ a b_1 b_2 b_3 b_5;\ a b_1 b_2 b_4 b_5;\ \ldots;\ a b_2 b_3 b_4 b_5 \qquad [4]$$

$$\text{y} \qquad b_1 b_2 b_3 b_4 b_5.$$

luego $\quad (a + b_1)(a + b_2)(a + b_3)(a + b_4)(a + b_5) =$

$$a^5 + a^4b_1 + a^4b_2 + \ldots + a^4b_5 + a^3b_1b_2 + a^3b_1b_3 + \ldots + a^3b_4b_5 +$$
$$+ a^2b_1b_2b_3 + \ldots + a^2b_3b_4b_5 + ab_1b_2b_3b_4 + \ldots + ab_2b_3b_4b_5 + b_1b_2b_3b_4b_5$$

Ejemplo:

$$(a + 3)(a + 6)(a + 2)(a + 9) = a^4 + a^3(3 + 6 + 2 + 9) +$$
$$+ a^2(3 . 6 + 3 . 2 + 3 . 9 + 6 . 2 + 6 . 9 + 2 . 9) +$$
$$+ a(3 . 6 . 2 + 3 . 6 . 9 + 6 . 2 . 9) + 3 . 6 . 2 . 9 =$$
$$= a^4 + 20\,a^3 + 135\,a^2 + 306\,a + 324.$$

128. **Binomio de Newton.** — Deducción de la fórmula. — Consideremos el caso particular en que todas las b del ejemplo primero sean iguales, o sea el producto

$$\overbrace{(a + b)(a + b) \ldots (a + b)}^{5}$$

De acuerdo con lo observado en el caso anterior, se tiene:

$$\overbrace{(a + b)(a + b) \ldots (a + b)}^{5} = a^5 + a^4\,\overbrace{(b + \ldots + b)}^{C_{5,1}}$$

$$a^2\,\overbrace{(b^2 + \ldots + b^2)}^{C_{5,2}} + a^2\,\overbrace{(b^3 \ldots + b^3)}^{C_{5,3}} + a\,\overbrace{(b^4 + \ldots + b^4)}^{C_{5,4}} + b^5$$

o bien $\quad (a + b)^5 = a^5 + C_{5,1}\,a^4 b + C_{5,2}\,a^3 b^2 + C_{5,3}\,a^2 b^3 + C_{5,4}\,a\,b^4 + b^5$

y en general

$$\boxed{(a + b)^m = a^m + C_{m,1}\,a^{m-1}b + C_{m,2}\,a^{m-2}b^2 + \ldots + C_{m,m-1}\,a\,b^{m-1} + b^m}$$

Esta expresión se conoce con el nombre de *binomio de Newton*, y nos dice que:

La potencia emésima del binomio $(a + b)$ *es un polinomio completo, homogéneo de grado m, ordenado con respecto a a en sentido decreciente, y, por lo tanto, a b en sentido creciente, que tiene por coeficientes del primero y último términos al número* 1, *y en los restantes términos al número de combinaciones de m objetos tomados de uno en* *uno, dos en dos, tres en tres, etc., o sea el número de combinaciones de orden igual al exponente de b en ese término.*

Ejemplos: $(a+b)^7 = a^7 + \mathcal{C}_{7,1}\, a^6 b + \mathcal{C}_{7,2}\, a^5 b^2 + \mathcal{C}_{7,3}\, a^4 b^3 +$

$$+ \mathcal{C}_{7,4}\, a^3 b^4 + \mathcal{C}_{7,5}\, a^2 b^5 + \mathcal{C}_{7,6}\, a b^6 + b^7 = a^7 + 7\, a^6 b +$$

$$+ \frac{7\,.\,6}{1\,.\,2}\, a^5 b^2 + \frac{7\,.\,6\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}\, a^4 b^3 + \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\, a^3 b^4 +$$

$$+ \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\, a^2 b^5 + \frac{7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\, ab^6 + b^7 = a^7 + 7\,a^6 b +$$

$$+ 21\, a^5 b^2 + 35\, a^4 b^3 + 35\, a^3 b^4 + 21\, a^2 b^5 + 7\, ab^6 + b^7.$$

$$(a+b)^4 = a^4 + \mathcal{C}_{4,1}\, a^3 b + \mathcal{C}_{4,2}\, a^2 b^2 + \mathcal{C}_{4,3}\, a b^3 + b^4$$

$$= a^4 + 4\, a^3 b + \mathcal{C} a^2 b^2 + 4\, a b^3 + b^4.$$

129. **Propiedades de los coeficientes.** — De la observación de los ejemplos tratados y de la expresión general de la potencia emésima de un binomio resulta:

1°) *Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.*

En efecto: son números de combinaciones complementarias (n°126).

Consecuencias. I. — *Sólo es necesario calcular los coeficientes de los primeros términos hasta encontrar uno igual a los anteriores a partir del cual se repiten en orden inverso.*

2°) *El coeficiente del segundo y del penúltimo términos son iguales al exponente m de la potencia a que se eleva el bimonio.*

3°) *El coeficiente de un término es igual al coeficiente anterior multiplicado por el exponente de* a *en ese término y dividido por el de b aumentado en* 1.

Ejemplo. — Los coeficientes de los términos de $(a+b)^7$ son

$$1,\ 7,\ \frac{7\,.\,6}{2} = 21\ ;\quad \frac{21\,.\,5}{3} = 35\ ;\quad \frac{35\,.\,4}{4} = 35\ ;\quad 21,\ 7,\ 1.$$

Ejemplos. — *Calcular directamente* $(a + b)^{10}$

$$(a + b)^{10} = a^{10} + 10\, a^9 b + 45\, a^8 b^2 + 120\, a^7 b^3 + 210\, a^6 b^4 +$$

$$+ 252\, a^5 b^5 + 210\, a^4 b^6 + 120\, a^3 b^7 + 45\, a^2 b^8 + 10\, ab^9 + b^{10}$$

130. **Término general del desarrollo del binomio.**— Como el exponente de b en cada término es igual al número de orden de ese término menos 1, el de a es la diferencia entre m y ese exponente de b, y el coeficiente es el número de combinaciones de m objetos y de orden igual al exponente de b; se puede escribir directamente cualquier término del desarrollo prescindiendo de los restantes. Así, por ejemplo, el 5° término del desarrollo de $(a+b)^{10}$ tiene por exponente de b a 4, luego dicho término es

$$\mathcal{C}_{10,4}\, a^{10-4} b^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\, a^6 b^4 = 420\, a^6 b^4$$

Cálcular el término a) 201° *de* $(a+b)^{203}$; b) 15° *de* $(a+b)^{40}$; c) 9° *de* $(a+b)^{12}$

131. **Desarrollo del binomio diferencia.** — Sea, por ejemplo, desarrollar $(a + b)^m$. Como en la deducción del desarrollo del binomio de Newton suponíamos que a y b eran números cualesquiera, resulta que: siendo $a - b = a + (-b)$ se tiene:

$$(a - b)^m = [a + (-b)]^m = a^m + m\, a^{m-1} (-b) +$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2}\, a^{m-2} (-b)^2 + \ldots + \frac{m(m-1)}{2}\, a\, (-b)^{m-1} + (-b)^m$$

y como las potencias enésimas de $-b$ son $+b^m$ o $-b^m$ según que su exponente sea, respectivamente, par o impar, resulta:

$$(a - b)^m = a^m - m\, a^{m-2}\, b + \frac{m(m-1)}{2}\, a^{m-1} b^2 - \ldots \pm$$

$$\pm \frac{m(m-1)}{2}\, ab^{m-1} \pm b^m$$

Figura el doble signo de los dos últimos términos pues si m es par es $m - 1$ impar, luego $(-b)^{m-1} = -b^{m-1}$) y $(-b)^m = b^m$, y si, en cambio, m es impar es $m - 1$ par, y por lo tanto $(-b)^{m-1} = b^{m-1}$ y $(-b)^m = -b^m$, como se ve en los ejemplos que siguen:

$$(a - b)^5 = a^5 - 5\,a^4 b + 10\,a^3 b^2 - 10\,a^2 b^3 + 5\,ab^4 - b^5$$

$$(a - b)^8 = a^8 - 8\,a^7 b + 28\,a^6 b^2 - 56\,a^5 b^3 + 56\,a^4 b^4 - \ldots - 8\,ab^7 + b^8$$

132. **Aplicaciones.** — CASO EN QUE LOS TÉRMINOS SEAN CUALESQUIERA. — EJEMPLO I. — *Hallar* $\left(\frac{3}{4} + a^2\right)^5$

$$\left(\frac{3}{4} + a^2\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 + 5\left(\frac{3}{4}\right)^4 a^2 + 10\left(\frac{3}{4}\right)^3 (a^2)^2 + 10\left(\frac{3}{4}\right)^2 (a^2)^3 +$$

$$+ 5\left(\frac{3}{4}\right)(a^2)^4 + a^{10} = \frac{243}{1024} + 5\,.\,\frac{81}{256}\,.\,a^2 + 10\,.\,\frac{27}{64}\,a^4 +$$

$$+ 10\,.\,\frac{9}{4}\,a^6 + 5\,.\,\frac{3}{4}\,a^8 + a^{10} \quad ;$$

$$= \frac{243}{1024} + \frac{405}{256}\,a^2 + \frac{125}{32}\,a^4 + \frac{45}{2}\,a^6 + \frac{15}{4}\,a^8 + a^{10}$$

EJEMPLO II:

$$(2x^3 - 3\,y^4)^4 = (2\,x^3)^4 - 4\,(2\,x^3)^3\,3\,y^4 + 6\,(2\,x^3)^2\,(3\,y^4)^2 - 4\,(2\,x^3)\,(3\,y^4)^3 +$$

$$+ (3\,y^4)^4 = 16\,x^{12} - 96\,x^9\,y^4 + 216\,x^6\,y^8 - 216\,x^3\,y^{12} + 81\,y^{16}.$$

EJEMPLO III:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right)^9 = \left(\frac{x}{a}\right)^9 + 9\left(\frac{x}{a}\right)^8 \frac{a}{x} + 36\left(\frac{x}{a}\right)^7\left(\frac{a}{x}\right)^2 +$$

$$+ 84\left(\frac{x}{a}\right)^6\left(\frac{a}{x}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{a}{x}\right)^9 = \frac{x^9}{a^9} + 9\,\frac{x^7}{a^7} + 36\,\frac{x^5}{a^5} +$$

$$+ 84\,\frac{x^3}{a^3} + \ldots + \frac{a^9}{x^9}$$

Caso en que uno de los términos del binomio es la unidad. — Ejemplo IV:

$$(1+b)^m = 1^m + m\,1^{m-1}\,b + \frac{m\,(m-1)}{2}\,1^{m-2}\,b^2 + \ldots + b^m$$

y como todas las potencias de 1 son iguales a 1, se tiene:

$$(1+b)^m = 1 + m\,b + \frac{m\,(m-1)}{2}\,b^2 + \ldots + \frac{m\,(m-1)}{2}\,b^{m-1} + b^m.$$

Ejemplo V: $(1+a)^5 = 1 + 5\,a + 10\,a^2 + 10\,a^3 + 5\,a^4 + a^5$

Ejemplo VI: $(1-a)^7 = 1 - 7\,a + 21\,a^2 - 35\,a^3 + 35\,a^4 - 21\,a^5 + 7a^6 - a^7$

Ejemplo VII. — En Algebra Financiera se presentan frecuentemente las potencias del binomio $(1+i)^n$, donde i representa el *tanto por uno* y n el número de periodos (años). Por ejemolo:

$$(1+i)^7 = 1 + 7\,i + 21\,i^2 + 35\,i^3 + 35\,i^4 + 21\,i^5 + 7\,i^6 + i^7.$$

Habíamos visto (nº 54) que estas potencias se calculaban empleando logaritmos, pues era muy largo su cálculo directo. El desarrollo anterior permite encontrar valores aproximados de las mismas sin emplear logaritmos, tomando los primeros términos de ese desarrollo, pues como i es pequeño (en general no alcanza a 0,1) sus potencias son más pequeñas todavía, y como van disminuyendo al aumentar el exponente de las mismas, suelen despreciarse a partir de una de ellas, que depende de la aproximación que se desee.

Ejemplo. — *Calcular el monto, aproximado, de* 1 $ *colocado a interés compuesto al* 4 % *capitalizando anualmente durante* 10 *años.*

Recordemos que ese monto está dado por la fórmula $(1+i)^n$; luego para $a = 4\ \%$ es $i = 0{,}04$ y $n = 10$, resulta:

$$(1+0{,}04)^{10} = 1 + 10\,.\,0{,}04 + 45\,.\,0{,}04^2 + 120\,.\,0{,}04^3 + 210\,.\,0{,}04^4 +$$
$$+ 252\,.\,0{,}04^5 + \ldots + 0{,}04^{10} = 1 + 0{,}4 + 45\,.\,0{,}0016 +$$
$$+ 120\,.\,0{,}000064 + 210\,.\,0{,}00000256 + \ldots = 1 + 0{,}4 + 0{,}072 +$$
$$+ 0{,}00768 + 0{,}0005376 + \ldots \cong 1{,}4802176$$

luego el monto buscado es de $ 1,4802176

Aplicación del binomio para obtener el número e. — El desarrollo del binomio de Newton permite definir y calcular uno de los números más importantes de la Matemática, el número llamado e.

Daremos una idea de como queda determinado este *número irracional*, es decir, de infinitas cifras decimales no periódicas, cuyas 24 primeras cifras son las siguientes:

$$e = 2{,}7182\ 8182\ 8459\ 0452\ 2526\ 0287\ldots\ .$$

Consideremos para ello el caso particular del binomio en que el primer término es 1 y el segundo $1/m$, siendo m un número natural mayor que 1. Elevando dicho binomio a esa potencia m tendríamos:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m.\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$
$$\frac{1}{m^3} + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p}\cdot\frac{1}{m^p} +$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(m-2)]}{1.2.3\ldots m-1}\cdot\frac{1}{m^{m-1}} + \frac{1}{m^m}$$

Y dividiendo cada factor del numerador por cada m del divisor, se tiene:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{m} + \frac{\frac{m}{m}\ \frac{m-1}{m}}{1.2} + \frac{\frac{m}{m}\ \frac{m-1}{m}\ \frac{(m-2)}{m}}{1.2.3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\ldots\left(1-\frac{m-2}{m}\right)}{1.2.3\ldots m-1} + \frac{1}{m^m}$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \ldots$$
$$+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{m-2}{m}\right)}{1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{1}{m^m}$$

Es claro que cuando m se hace muy grande las fracciones $\frac{1}{m}$, $\frac{2}{m}$ . . . se hacen cada vez más pequeñas y, por consiguiente como pueden hacerse más pequeñas que cualquier número prefijado, esas fracciones se pueden considerar nulas al aumentar m, en cuyo caso la expresión dada se escribe simbólicamente así:

$$* \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 . 2} + \frac{1}{1 . 2 . 3} + \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4} + \ldots \quad [1]$$

o también:

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Se demuestra, además, que la suma de esas infinitas fracciones *tiende* hacia un número perfectamente determinado, de infinitas cifras decimales no periódicas, comprendido entre 2,5 y 3, que se llama el número e. En la práctica se toman valores aproximados de e, por ejemplo, con las 4 primeras cifras decimales, es decir $e \simeq 2{,}7183$.

Para obtener este valor aproximado basta tomar los 7 primeros términos de la [1]

$$\begin{aligned}
1 + 1 &= 2 \\
+ \frac{1}{1 . 2} &= 0{,}5 \\
+ \frac{1}{1 . 2 . 3} &\simeq 0{,}166666 \\
+ \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4} &\simeq 0{,}041666 \\
+ \frac{1}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} &\simeq 0{,}008333 \\
+ \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots 6} &\simeq 0{,}001388 \\
+ \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots 7} &\simeq 0{,}000199 \\
\hline
&\simeq 2{,}718252 \simeq 2{,}7183.
\end{aligned}$$

(*) $\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ se lee: límite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ para m tendiendo a infinito.

133. Generalización de la ley del desarrollo del binomio. — Los matemáticos demuestran que la ley del desarrollo del binomio de Newton $(a + b)^m$ que habíamos obtenido para el caso en que el exponente m era un número natural, es decir, entero positivo, y a y b números cualesquiera, sigue siendo válida cuando dicho exponente m es entero o fraccionario positivo o negativo y $|a| > |b|$. Los coeficientes del desarrollo correspondiente se forman con la misma ley que en el caso del exponente natural como se ve en los ejemplos que siguen.

Ejemplo I. — *Hallar el desarrollo de* $(a + b)^{-5}$ siendo $|a|>|b|$

$$(a+b)^{-5} = a^{-5} + (-5)\, a^{-5-1}\, b + \frac{(-5)\,(-5-1)}{2}\, a^{-5-1-1}\, b^2 +$$
$$+ \frac{-5\,(-5-1)\,(-5-2)}{2\,.\,3}\, a^{-5-3}\, b^3 + \ldots$$
$$= a^{-5} - 5\, a^{-6}\, b + 15\, a^{-7}\, b^2 - 35\, a^{-8}\, b^3 + 70\, a^{-9}\, b^4 - \ldots$$

Observación. — Como el exponente m es negativo las potencias de exponente $m - 1$, $m - 2$, $m - 3$, ... de los sucesivos términos van aumentando en valor absoluto, y por lo tanto, no existe un último término del desarrollo, pues ninguna de esas diferencias es igual a cero. Los puntos suspensivos escritos a la derecha del quinto término indican que siguen infinitos otros.

Ejemplo II:

$$(a+b)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}\, a^{\frac{3}{4}-1}\, b + \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)}{2}\, a^{\frac{3}{4}-2}\, b^2 +$$
$$+ \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{2\,.\,3}\, a^{\frac{3}{4}-3}\, b^3 + \ldots = a^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}\, a^{-\frac{1}{4}}\, b +$$
$$+ \frac{3}{32}\, a^{-\frac{5}{4}}\, b^2 + \frac{5}{128}\, a^{-\frac{9}{4}}\, b^3 + \ldots$$

Ejemplo III:

$$(a+b)^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}\, a^{-\frac{2}{3}-1}\, b + \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2}\, a^{-\frac{2}{3}-2}\, b^2 + \ldots =$$
$$= a^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} a^{-\frac{5}{3}}\, b - \frac{1}{9} a^{-\frac{8}{3}}\, b^2 + \ldots$$

134. **Aplicaciones a los binomios del tipo** $(1 + i)^{-n}$ **y** $(1 + i)^{\frac{m}{n}}$. — En Algebra Financiera se presentan frecuentemente las potencias de $(1 + i)^{-n}$ y de $(1 + i)^{\frac{m}{n}}$ que nos dan, respectivamente, el número de centavos que es necesario colocar a interés compuesto para obtener 1 \$ al cabo de n períodos (*valor actual*), y el monto de 1 \$ a interés compuesto al cabo de m/n períodos. Siendo $0 < i < 1$, a esas potencias les es aplicable el binomio de Newton, que nos permite obtener valores aproximados de las mismas sin emplear logaritmos, tomando los primeros términos de los desarrollos correspondientes.

Ejemplo I. — *Calcular el valor actual, aproximado, de* 1 \$ *colocado a interés compuesto al* 4 % *capitalizándose anualmente durante* 5 *años.*

Para $r = 4$ % es $i = 0{,}04$, y como $n = 5$, se tiene:

$$(1 + 0{,}04)^{-5} = 1 - 5 \,.\, 0{,}04 + 15 \,.\, 0{,}04^2 - 35 \,.\, 0{,}04^3 + 70 \,.\, 0{,}04^4 + \ldots$$
$$= 1 - 0{,}2 + 15 \times 0{,}0016 - 35 \times 0{,}000064 + 70 \,.\, 0{,}00000256$$
$$= 1 - 0{,}2 + 0{,}024 - 0{,}00224 + 0{,}0001792 - 0{,}0000129024 + \ldots$$
$$\cong 0{,}8119262976 \cong 0{,}81193.$$

Ejemplo II. — *Calcular la suma que es necesario colocar al* 4 % *de interés compuesto para obtener* 10 000 \$ *al cabo de* 5 *años al capitalizar anualmente.*

Utilizando los resultados del ejemplo anterior se tiene que:

Como se necesitan \$ 0,81193 para obtener 1 \$ al cabo de 5 años al 4 %, se necesitarán \$ 0,81193 × 10 000 para obtener 10 000 \$ al cabo de 5 años al 4 %.

Luego 8119,30 \$ es la suma buscada.

Ejemplo III. — *¿Cual es el monto, aproximado, de* 1 \$ *al* 3 %, *al cabo de* 3 *años,* 9 *meses, capitalizandose anualmente?*

Como para $r = 3$ % es $i = 0{,}03$ y $n = 3 + \frac{9}{12} = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$, se tiene:

$$(1 + 0{,}03)^{\frac{15}{4}} = 1 + \frac{15}{4} \,.\, 0{,}03 + \frac{165}{32} \,.\, 0{,}03^2 + \frac{385}{128} \,.\, 0{,}03^3 +$$
$$\frac{1155}{2048} \,.\, 1{,}03 + \ldots = 1 + 0{,}1125 + 0{,}00013921873 +$$
$$+ 0{,}000008121093 \ldots \cong 1{,}112647339823 \cong 1{,}11265.$$

Aplicaciones. I. — *Hallar directamente los productos:* a) $(a+1)(a+2)(a+3)$; b) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x-3)(x+1)$; c) $(2-m)\left(\frac{3}{2}+m\right)\left(\frac{1}{4}-m\right)$.

II. — *Hallar las potencias siguientes:* $(a+b)^{15}$; $(a+2b)^4$; $(2a+b)^5$; $(2a+3b)^6$; $(a^2+b^2)^7$; $(1-x)^{10}$; $\left(a^2+\frac{1}{2}\right)^9$; $\left(a+\frac{2}{a}\right)^7$; $\left(a^3+\frac{2a^2}{b^2}\right)^4$; $\left(\frac{1}{2}-a\right)^5$; $\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^6$; $(1-2a)^8$; $\left(2+\frac{x}{2}\right)^6$; $\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}b\right)^4$; $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$.

III. — *Hallar el término:* a) 15° de $(6ab-2a^4b^3)^{23}$; b) 3° de $\left(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{7}a^5\right)^9$; c) 100° de $(a+2b)^{200}$; d) 10° de $(2a-b)^{19}$; e) 12° de $\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)^{20}$.

IV. — *Hallar el término del medio del desarrollo de:* a) $(1+x)^8$; b) $\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)^{10}$; c) $\left(\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}\right)^{14}$; d) $(a^2-2x^4)^{20}$; e) $\left(x^4-\frac{1}{2}\right)^4$; f) $\left(2x+\frac{3}{x}\right)^{20}$.

V. — *Hallar los términos del medio del desarrollo de:* a) $(1+x)^{21}$; b) $(3x-2y)^5$; c) $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^7$; d) $(9x^2+5y^3)^{11}$; e) $\left(\frac{a^2}{4}-4\right)^9$.

VI. — *Desarrollar hasta el sexto término las potencias siguientes:* a) $(a+b)^{-3}$; b) $(a+x)^{\frac{1}{2}}$; c) $(1-x)^{\frac{5}{3}}$; d) $\left(x^{-\frac{2}{3}}-2y\right)^{\frac{5}{2}}$; e) $\left(m^{-2}+n^{-\frac{1}{6}}\right)^{-4}$

VII. — *Hallar el término:* a) 6° de $(a+x)^{\frac{4}{3}}$; b) 5° de $(a+b)^{\frac{1}{5}}$; c) 12° de $(a+b)^{-\frac{1}{5}}$; d) 9° de $(a+2x)^{\frac{7}{2}}$; e) el 9° de $\left(a^4-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{8}{3}}$.

VIII. — *Calcular aproximadamente las raíces siguientes:* a) $\sqrt{1{,}02}$; b) $\sqrt[3]{1{,}3}$; c) $\sqrt[4]{2{,}85}$; d) $\sqrt[5]{1{,}001}$; e) $\sqrt[3]{0{,}9}$. (*Téngase presente para el ejemplo* a) *que* $\sqrt{1{,}02}=(1+0{,}2)^{\frac{1}{2}}$.

IX. — *Calcular aproximadamente el monto de 3.000 \$ colocados a interés compuesto:* a) *al 2,5 %, en 5 años;* b) *al 4 %, en 10 años;* c) *al 5 %, en 2 años;* d) *al 1 %, en 20 años;* e) *al 6 %, en 4 años; capitalizando anualmente.*

X. — *Calcular aproximadamente la suma que es necesario colocar a interés compuesto, capitalizando anualmente, para obtener 1.000 \$:* a) *al 4 % en 7 años;* b) *al 2 % en 10 años;* c) *al 6 % en 5 años;* d) *al 10 % en 10 años;* e) *al 3 % en 15 años.*

PROBABILIDADES

135. **Probabilidad simple.** — Cuando en la realización de un suceso interviene el azar en el sentido de que puede verificarse en ciertos casos, llamados *favorables*, y dejar de verificarse en otros, denominados *desfavorables*, se dice que ese suceso es *probable*. Los casos favorables y los desfavorables se llaman *posibles*, y se consideran todos *igualmente posibles*.

Así, por ejemplo, si en una clase de 20 alumnos, 13 han preparado su lección, el hecho de que un alumno interrogado sepa su lección es un suceso *probable*, pues hay, sobre 20 casos posibles, 13 favorables y 20 — 13 = 7 desfavorables. En matemática se fija este concepto intuitivo de probabilidad por medio de la siguiente definición:

Definición. — Se llama *probabilidad matemática* de un suceso a la fracción que tiene por numerador al número de casos favorables, y por denominador al número de casos posibles.

Ejemplo. — En el ejemplo anterior, la probabiliad de interrogar a un alumno que sepa la lección, es la fracción $\frac{13}{20}$.

En general: Si entre p sucesos «igualmente posibles» hay f casos favorables y $d = p - f$ desfavorables, la probabilidad P es igual

$$P = \frac{f}{p} = \frac{f}{f+d}.$$

136. **Aplicaciones.** — I. *¿Cuál es la probabilidad de sacar un cinco al tirar un dado?*

Como las caras de un dado son seis y sólo una tiene el número pedido, o sea

$$p = 6 \quad ; \quad f = 1, \quad \text{es} \quad P = \frac{1}{6}.$$

II. — *Si el programa de* 5º *año de matemáticas tiene* 11 *bolillas y un alumno sólo sabe* 3 *de ellas, ¿cuál es la probabilidad* *de que le toque en el examen escrito una de las bolillas que sabe?*

$$P = \frac{f}{p} = \frac{3}{11}.$$

III. — *Al arrojar una moneda, ¿cuál es la probabilidad de sacar cara?*

$$P = \frac{1}{2}.$$

IV. — *Si un bolillero contiene 7 bolillas negras, 5 rojas y 3 azules, ¿cuál es la probabilidad de sacar: a) una bolilla negra; b) una roja; c) una azul?*

$$a)\ P = \frac{7}{15} \quad ; \quad b)\ P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad ; \quad c)\ P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

137. **Frecuencia.** — La definición de probabilidad matemática halla su justificación en el hecho de que en la práctica al efectuar un gran número de experiencias u observaciones de un suceso en que intervenga el azar en las mismas condiciones dentro de lo posible, y contar los casos favorables, el cociente entre el número de éstos y el total de las experiencias realizadas, que es lo que se denomina *frecuencia del suceso*, se aproxima a la probabilidad matemática del mismo, que se calcula de antemano sin necesidad de efectuar experiencias u observaciones efectivas.

Así, por ejemplo, si al arrojar seis mil veces un dado sacamos 1003 veces el número 5, la frecuencia con que aparece este número es

$$Frecuencia = \frac{1003}{6000}, \text{ que se aproxima a } P = \frac{1}{6} = \frac{1000}{6000}, \text{ y}$$

que habíamos calculado en el ejemplo I sin hacer ninguna experiencia.

La frecuencia de este suceso varía, en general, con el número de las pruebas, y varía también si se repite una segunda vez el mismo número de pruebas, pues interviene en ellas el azar, pero se observa en la práctica que con el aumento del número de experiencias la frecuencia se aproxima cada vez más a la probabilidad. Por esa razón suele tomarse prácticamente la *frecuencia* como valor de la probabilidad, siempre que el número de casos observados o pruebas realizadas sea muy grande y en igualdad de condiciones, dentro de lo posible.

De la definición de probabilidad se deduce el siguiente:

COROLARIO. — *La probabilidad de un suceso es un número positivo menor o igual que uno.*

En efecto: Cuando hay casos favorables y desfavorables a la producción del suceso, el numerador del número que da la probabilidad matemática es menor que el denominador del mismo.

Cuando todos los casos posibles son favorables, el numerador es igual al denominador, la probabilidad es igual a 1 y se denomina *certeza*.

Si no existe ningún caso favorable, la probabilidad es cero, y se dice que el suceso es *imposible*.

138. **Probabilidad complementaria o contraria.** — DEFINICIÓN. — Se dice que *dos probabilidades son complementarias* cuando su suma es igual a uno.

Así en el ejemplo del dado:

la probabilidad de sacar el nº 5 en una tirada es $P = \frac{1}{6}$

y » » » no » » » 5 » » » » $P' = \frac{5}{6}$

luego P y P' son complementarias, pues $P + P' = 1$.

EJERCICIOS. — Encontrar las probabilidades complementarias en los ejemplos anteriores.

139. **Probabilidad total.** — Puede suceder que la realización de un suceso dependa de dos o más sucesos distintos y que éstos se excluyan entre sí, vale decir, que si se verifica uno de ellos no pueden verificarse al mismo tiempo los restantes. La probabilidad que tiene la verificación tal suceso se llama *probabilidad total*.

Ejemplo. — *Si en un bolillero hay 10 bolillas verdes, 6 rojas y 5 blancas, ¿cuál es la probabilidad para sacar una bolilla de color ¿*

Como la extracción de una bolilla de color depende de que al hacer esa operación se obtenga una bolilla verde o roja y no una blanca, y esas dos posibilidades se excluyen, la probabilidad buscada es total.

Teniendo en cuenta que el número de casos favorables es 10 + 6, y el de casos posibles es 10 + 6 + 5 la probabilidad de sacar una bolilla de color es:

$$P_t = \frac{10 + 6}{10 + 6 + 5} = \frac{16}{21}$$

140. **Propiedad de la probabilidad total.** — El resultado del ejemplo anterior puede escribirse también así:

$$P_t = \frac{10 + 6}{21} = \frac{10}{21} + \frac{6}{21}$$

y como $\frac{10}{21} = P'_1$ es la probabilidad de sacar una bolilla verde

y $\frac{6}{21} = P_2$ » » » » » » » roja

se tiene $\boxed{P_t = P_1 + P_2}$

Lo observado en este ejemplo es general, y se enuncia diciendo: *La probabilidad total de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos del que depende el primero.*

Ejemplo. — *Si de un talonario de 20 hojas numeradas de 1 a 20 se saca al azar una hoja, ¿qué probabilidad hay para que el número de la misma sea múltiplo de 3 o de 7?*

Como entre los números 1, 2... 20 no hay ninguno que sea múltiplo de 3 y de 7 simultáneamente, los casos favorables se excluyen y por lo tanto la probabilidad buscada es total.

Por otra parte, como $\overbrace{3, 6, 9, 12, 15 \text{ y } 18}^{6}$ son los múltiplos de $3 < 20$, y 7 y 14 son los múltiplos de $7 < 20$, resulta, llamando P_1 y P_2 a las probabilidades para sacar una hoja numerada con un múltiplo de 3 ó de 7, respectivamente, se tiene:

$$P_t = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

141. **Probabilidad compuesta.** — Puede suceder que la realización de un suceso dependa de dos o más sucesos distintos independientes entre sí, vale decir, que la verificación de uno de ellos no altera la probabilidad que tienen los otros de verificarse. La probabilidad de tal suceso se llama *probabilidad compuesta.*

Ejemplo. — *Si un bolillero contiene* 5 *bolillas rojas y* 6 *blancas, y otro contiene* 10 *negras y* 8 *blancas, ¿cuál es la probabilidad de sacar dos bolillas blancas, una de cada bolillero?*

Como la extracción de una bolilla blanca de cada bolillero son hechos independientes entre sí pero ambos intervienen en la producción del que nos interesa, la probabilidad buscada es compuesta.

Teniendo en cuenta que el primer bolillero contiene 11 bolillas y el segundo 18, el número de casos posibles es el número de pares formados por cada bolilla del primero con cada una del segundo, es decir, el producto 11×18. Análogamente el número de casos favorables es el de pares de bolillas blancas que pueden formarse de manera análoga, o sea el producto 6×8; luego, la probabilidad buscada es:

$$P_c = \frac{6 \times 8}{11 \times 18} = \frac{8}{33}$$

142. **Propiedad de la probabilidad compuesta.** — El resultado del ejemplo anterior puede también escribirse así:

$$P_c = \frac{6 \times 8}{11 \times 18} = \frac{6}{11} \times \frac{8}{18}$$

y como $\dfrac{6}{11} = P_1$ es la probabilidad de sacar una bolilla blanca del primer bolillero,

y $\dfrac{8}{18} = P_2$ es la probabilidad de sacar una bolilla blanca del segundo bolillero.

se tiene $$\boxed{P_c = P_1 \times P_2}$$

Lo observado en este ejemplo es general, y se enuncia diciendo: *La probabilidad compuesta de un suceso es igual al producto de las probabilidades de cada uno de los sucesos de que depende el primero.*

Ejemplo. — *¿Cuál es la probabilidad de obtener dos 6 al arrojar dos dados juntos?*

Se trata de un caso de probabilidad compuesta, pues el obtener un 6 en un dado no influye para que se obtenga ese mismo número en el otro, y como

$$P_1 = P_2 = \frac{1}{6} \text{ (n}^\circ \quad \text{)}.$$

resulta $$P_c = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Aplicaciones I. — *¿Cuál es la probabilidad para obtener 8 al arrojar dos dados?* (Justifíquese que hay 5 casos favorables y 36 posibles).

II. — *Un tipógrafo emplea, para componer, una caja de 28 letras, y no conoce la situación de cada letra en las divisiones de la caja. ¿Cuál es la probabilidad de que al azar tome una vocal?*

III. — *¿Qué probabilidad tiene ese tipógrafo de que, al azar, componga la palabra madre en cinco extracciones consecutivas de divisiones distintas?* (El número de casos posibles es el de arreglos de 28 objetos tomados. . .).

IV. — *Si en una clase de 25 alumnos 15 saben su lección, ¿qué probabilidad hay de interrogar a un alumno que no la sepa?*

V. — *Un candado está compuesto por cuatro cilindros giratorios de cinco letras cada uno. ¿Cuál es la probabilidad para obtener la disposición que abre el candado?* (Número de casos posibles $5 \times 5 \times 5 \times 5$).

VI. — *En un saco hay 7 bolillas blancas, 5 negras y 4 rojas. ¿Cuál es la posibilidad para que, al sacar 3 bolillas al azar, resulten ser blancas?* (Número de casos posibles es el de combinaciones de 16 objetos de 3 en 3).

VII. — *¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de puntos mayor que 5 al arrojar dos dados juntos?* (Obsérvese que la probabilidad es total y dedúzcase que las probabilidades para obtener 2, 3 y 4 son, respectivamente, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{18}$ y $\frac{1}{12}$).

VIII. — *¿Cuál es la probabilidad que, entre 10 personas que se sientan al azar alrededor de una mesa, dos dadas resulten sentadas una al lado de otra?*

IX. — *¿Qué probabilidad hay de extraer 3 bolillas azules seguidas de un bolillero donde hay 5 bolillas azules, 9 rojas y 2 blancas, sin reponer las bolillas que se extraen?* (Probabilidad para extraer la primera bolilla azul $\frac{5}{16}$, la segunda $\frac{4}{15}$..., y como la probabilidad buscada es compuesta...).

X. — *¿Qué probabilidad se tiene de sacar un as solamente al tirar dos veces el mismo dado?* (La probabilidad de obtener un as en la primera tirada es $1/6$; la de no obtenerlo en la segunda es $\frac{5}{6}$, y como la probabilidad buscada es compuesta...).

CAPITULO IX

PROGRESIONES ARITMETICAS

PROGRAMA. — *Definiciones. Deducción de la fórmula fundamental para obtener el último término. Fórmulas que se deducen de la fundamental: Del primer término, de la razón y del número de términos. Suma de dos términos equidistantes de los extremos de una progresión aritmética. Suma de los términos de una progresión aritmética. Interpolación de medios aritméticos. Definición. Razón de la interpolación. Media aritmética. Aplicaciones: Dadas tres de las cantidades: Primer término, último término, número de términos, suma de los términos y la razón, determinar las otras dos. Imposiciones a interés simple como suma de términos de una progresión aritmética de razón positiva. Amortizaciones a interés simple, como suma de términos de una progresión aritmética de razón positiva. Amortizaciones e interés simple, como suma de términos de una progresión aritmética de razón negativa. Ejercicios y problemas.*

144. **Definiciones.** — Se dice que una sucesión de números es una *progresión aritmética* cuando la diferencia entre dos números consecutivos cualesquiera es constante.

En símbolos: $a, b, c, d, \ldots m \ldots$ es una progresión aritmética, si

$$b - a = r \; , \quad c - b = r \; , \quad \ldots \; m - l = r \; \ldots$$

Los números $a, b, c, \ldots$ se llaman *términos*, y la diferencia r entre dos consecutivos *razón* de la progresión (*).

EJEMPLO. — Los números pares

$$0, \; 2, \; 4, \; 6, \; 8, \; 10, \; \ldots\ldots$$

(*) Suele indicarse que $a, b, c, \ldots h, k, l$, forman una progresión aritmética escribiendo: $\div \; a. \, b. \, c. \ldots h \;\, k. \, l.$ que se lee: *como a es aritméticamente* a b, a c....

forman una progresión aritmética cuya razón es

$$2 - 0 = 4 - 2 = 6 - 4 = \ldots = 2.$$

Observacion.— De acuerdo con la definición, si se quiere formar una progresión aritmética, basta fijar un número como uno de sus términos y tomar otro como razón. Los términos que siguen al fijado se obtendrán sumando a éste la razón, al resultado la razón, etc., y los que le preceden restando al fijado la razón, al resultado también la razón...

Así, fijados un término $h = 9$ y la razón $r = 1{,}50$, se tiene

$$\ldots\ -1{,}50,\ 0,\ 1{,}50,\ 3,\ 4{,}50,\ 6,\ 7{,}50,\ 9,\ 10{,}50,\ 12,\ 13{,}50,\ 15\ \ldots$$

Nota. — Cuando solo se consideran algunos términos consecutivos de una progresión comprendidos entre dos de ellos se dice que se obtiene una *progresión finita.*

145. **Deducción de la fórmula fundamental.** — Teorema. — *En toda progresión aritmética finita, el último término es igual a la suma del primero mas el producto del número de términos de la misma menos uno por la razón.*

Hip.) $\overbrace{a, b, c, \ldots, h, k, l}^{n}$ prog. aritmética de razón r.

Tesis) $l = a + (n - 1)\, r.$

Demost.) De acuerdo con la definición de progresión aritmética, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} b - a = r \\ c - b = r \\ d - c = r \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l - k = r \end{array}\right\} n - 1$$

Sum. m. a m. dá $b - a + c - b + d - c + \ldots + l - k = \underbrace{r + r + r + \ldots + r}_{n-1}$

Simplificando b que suma y resta y en la misma forma c, d,... k (los contrarios de estos números tienen que figurar entre los términos que no se han escrito) queda

$$-a + l = r(n - 1)$$

luego $$\boxed{l = a + (n - 1)r}$$

146. **Fórmulas del primer término, de la razón y número de términos de una progresión aritmética.** — Puede suceder que la incógnita sea el primer término, o la razón, o el número de términos y que se conozcan los restantes números. En tales casos la igualdad anterior $l = a + (n - 1)r$ nos permitirá despejar esa incógnita.

Así, pasando $(n - 1)r$ al otro miembro, resulta

[II] $$\boxed{a = l - (n - 1)r}$$

Por otra parte, pasando a al primer miembro y dividiendo por $n - 1$, resulta

[III] $$\boxed{r = \frac{l - a}{n - 1}}$$

y por último pasando a al primer miembro y dividiendo por r, da

[IV] $$\frac{l - a}{r} = n - 1 \quad \text{luego} \quad \boxed{n = \frac{l - a}{r} + 1}$$

fórmulas estas que se expresan así

En toda progresión aritmética finita:

El primer término es igual a la diferencia entre el último y el producto del número de términos menos uno por la razón (fórmula II).

La razón es igual a la diferencia entre el último y el primer términos dividida por el número de términos de la progresión menos uno (fór. III).

El número de términos es igual al cociente de la diferencia entre el último término y el primero dividido por la razón, todo mas uno (fórm. IV).

PROBLEMA. — *¿Cuál será el último término de una progresión aritmética de* 10 *términos si el primero es* — 3 *y su razón es igual a* $\frac{1}{2}$?

SOLUCIÓN. — Siendo $l = a + (n - 1)\, r$

es
$$l = -3 + (10 - 1)\frac{1}{2} = -3 + \frac{9}{2} = \frac{3}{2}.$$

COMPROBACIÓN. — Formando la progresión dada por el enunciado del problema, se tiene

$$-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$$

donde puede verse que efectivamente es $\frac{3}{2}$ el último término.

PROBLEMA. — *¿Cuál será el primer término de una progresión aritmética de* 7 *términos si el último es* 0 *y la razón es* $\frac{1}{2}$?

SOLUCIÓN. — Siendo $a = l - (n - 1)\, r$

es
$$a = 0 - (7 - 1)\frac{1}{2} = -6 \,.\, \frac{1}{2} = -3$$

lo que puede observarse en la progresión anterior.

PROBLEMA. — *¿Cuál es la razón de una progresión aritmética de* 7 *términos si el primero es* $-\frac{3}{2}$ *y el último* $\frac{3}{2}$?

SOLUCIÓN. — Siendo $r = \dfrac{l - a}{n - 1}$

es
$$r = \frac{\frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)}{7 - 1} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{6} = \frac{\frac{6}{2}}{6} = \frac{1}{2}$$

lo que también puede observarse en la progresión anterior.

PROBLEMA. — *¿Cuál es el número de términos de una progresión aritmética si el primer término es — 2 el último es 1 y la razón es* $\frac{1}{2}$?

SOLUCIÓN. — Siendo $n = \frac{l - a}{r} + 1$

es $n = \frac{1 - (-2)}{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1 + 2}{\frac{1}{2}} + 1 = \frac{3}{\frac{1}{2}} + 1 = 6 + 1 = 7$

lo cual también puede observarse en la progresión del primer problema.

147. **Suma de los términos equidistantes de los extremos.** — LEMA. — *La suma de los términos equidistantes de los extremos de una progresión aritmética finita es igual a la de los extremos.*

HIP.) $a, b, c, \ldots, j, k, l,$ prog. arit. de razón r.

TESIS) $b + k = a + l$; $c + j = a + l$; ......

DEMOST.) De acuerdo con la definición de progresión aritmética, se tiene

$b = a + r$ y que $l = k + r$.

luego $k = l - r$ por definición de diferencia.

Sum. m. a m. dá $b + k = a + r + l - r$

Simplificando queda $b + k = a + l$ [1]

Por otra parte en la progresión que empieza por b y termina por k. tendríamos por las mismas razones

$c + j = b + k$ y como por [1] $b + k = a + l$

resulta $c + j = a + l$ por carac. trans. iguald.

Este lema nos permite hallar rápidamente la

148. **Suma de los términos consecutivos.** — TEOREMA. — *En toda progresión aritmética finita la suma de todos los términos es igual al producto de la suma de los extremos por el número de términos de la misma dividido por dos.*

HIP.) $\overbrace{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l}^{n}$. prog. arit.

TESIS) $S = (a + l) \cdot \frac{n}{2}$

DEMOST.) Llamando S a la suma de todos los términos, se tiene:

$$S = \overbrace{a + b + c + \dots + j + k + l}^{n}$$

y como $S = \overbrace{l + k + j + \dots + c + b + a}^{n}$ por prop. com. ad.

Sum. m. a m. y
por colum. $2S = \overbrace{(a+l)+(b+k)+(c+j)+\dots+(j+c)+(k+b)+(l+a)}^{n}$

por propiedad uniforme, conmutativa y asociativa de la adición y teniendo en cuenta el lema anterior, resulta

$$2S = \overbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+\dots(a+l)+(a+l)+(a+l)}^{n}$$

o bien $2S = (a + l)\, n$ por definición de producto

luego $\boxed{S = (a + l)\,\frac{n}{2}}$

PROBLEMA. — *¿Cuál será la suma de los términos de una progresión aritmética de* 10 *términos si el primero es* — 3 *y el último* $\frac{3}{2}$?

SOLUCIÓN. — Siendo $S = (a + l)\,\frac{n}{2}$.

es $S = \left(-3 + \frac{3}{2}\right)\frac{10}{2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{10}{2} = \frac{-30}{4} = \frac{-15}{2} = -7{,}5.$

149. **Interpolación de medios aritméticos.** — DEFINICIÓN. — *Interpolar* uno o más números llamados *medios aritméticos*, entre dos dados a y b, significa hallar los términos que faltan en una progresión aritmética de la cual a es el primer término y b el último.

Razón de la interpolación. — Si se desean interpolar m medios entre los números a y b, debemos calcular, previamente, la razón de la progresión que van a formar esos números con los dados, pues una vez obtenida, para escribir esos términos basta proceder como indicamos en la observación del nº 144. Teniendo en cuenta que esa progresión tiene entonces $m + 2$ términos resulta, de acuerdo con la fórmula III de la razón:

$$r = \frac{l - a}{n - 1}$$

que como $l = b$ y $n = m + 2$, se tiene:

$$r = \frac{b - a}{m + 2 - 1} = \frac{b - a}{m + 1}$$

lo que nos dice que: *cuando se desean interpolar m medios aritméticos entre dos números dados a y b la razón de interpolación se obtiene dividiendo la diferencia entre el último y el primero de los números dados por el número de términos a interpolar mas 1.*

EJEMPLO I. — *Interpolar tres medios aritméticos entre — 9 y 11.*

Siendo la razón de interpolación

$$r = \frac{11 - (-9)}{3 + 1} = \frac{11 + 9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

los medios buscados son:

$$-9 + 5 = -4 \quad ; \quad -4 + 5 = 1 \text{ y } 1 + 5 = 6$$

y la progresión que ellos forman con los dados:

$$\mathbf{-9, -4, 1, 6, 11.}$$

EJEMPLO II. — *Escribir los términos que faltan en la progresión aritmética de* 11 *términos, sabiendo que el primero es* 0,6 *y el último* 8.

Siendo la razón de interpolación $r = \dfrac{b - a}{m + 1}$

es
$$r = \frac{8 - 0{,}6}{9 + 1} = \frac{7{,}4}{10} = 0{,}74$$

luego los nueve términos que siguen al primero a son

$$b = 0{,}6 + 0{,}74 = 1{,}34 \quad ; \quad c = 1{,}34 + 0{,}74 = 2{,}08$$
$$d = 2{,}08 + 0{,}74 = 2{,}82 \quad ; \quad e = 2{,}82 + 0{,}74 = 3{,}56$$
$$f = 3{,}56 + 0{,}74 = 4{,}30 \quad ; \quad g = 4{,}30 + 0{,}74 = 5{,}04$$
$$h = 5{,}04 + 0{,}74 = 5{,}78 \quad ; \quad i = 5{,}78 + 0{,}74 = 6{,}52$$
$$j = 6{,}52 + 0{,}74 = 7{,}26$$ y la progresión es;

0,6 , 1,34 , 2,08 , 2,82 , 3,56 , 4,30 , 5,04 , 5,78 , 6,52 , 7,26 , **8**

MEDIA ARITMÉTICA. — Sea interpolar un medio entre dos números dados a y b. La razón de interpolación sería

$r = \dfrac{b - a}{2}$ y el medio buscado $a + \dfrac{b - a}{2} = \dfrac{2a + b - a}{2} = \dfrac{a + b}{2}$

o sea la *semisuma, promedio* o *media aritmética* de los números dados.

150. **Anualidades a interés simple.**—DEFINICIÓN. — Se llaman *anualidades* a las sumas de dinero, generalmente iguales, que se depositan periódicamente (año, semestre, trimestre, etc.) en una institución de crédito, con el objeto de *formar un capital* o *pagar una deuda*. En el primer caso las sumas mencionadas se llaman *imposiciones*, y en el segundo, *amortizaciones*.

Vamos a resolver el siguiente:

PROBLEMA. — *¿Qué capital se logra formar con n imposiciones de A $ colocadas al comienzo de cada año a interés simple a un tanto por uno igual a i?*

Solución. — Recordando que un capital C colocado al i por uno gana al cabo de n años un interés C . n . i, tenemos que:

1 $ de la 1ª anualidad	importan al cabo de				n	años	$1 + n\,i$
1 » » » 2ª	»	»	»	»	» $n - 1$	»	$1 + (n -)i$
1 » » » 3ª	»	»	»	»	» $n - 2$	»	$1 + (n - 2)i$
. . . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . . . .
1 » » » penúlt.	»	»	»	»	» 2	»	$1 + 2\,i$
1 » » » última	»	»	»	»	» 1	»	$1 + i$

luego las n anualidades de 1 $ importan

$$s_n = \left(\overbrace{1 + 1 + \ldots + 1 + 1}^{n}\right) +$$

$$+ \left[n\,i + (n - 1)\,i + (n - 2)\,i + \ldots + 2\,i + i\right]$$

Observando que el primer paréntesis vale n y el segundo es una progresión aritmética decreciente de razón $-i$, y que la suma de sus términos es igual al primero más el último por el número de términos sobre 2, se tiene:

$$s_n = n + (n\,i + i)\,\frac{n}{2} = \frac{2\,n + i\,(n + 1)\,n}{2}$$

luego si n anualidades de $ 1 importan $s_n = \dfrac{2\,n + i\,(n + 1)\,n}{2}$

n » » A » importarán $\boxed{S_n = A\,\dfrac{2\,n + i\,(n + 1)\,n}{2}}$

Ejemplo. — *¿Cuántos pesos se ahorrarán al cabo de 10 años colocando al comienzo de cada uno de ellos 1200 $ al 4 % anual?*

Solución. —

$$S_n = 1200 \frac{2 \,.\, 10 + 0{,}04\,(10 + 1)\,10}{2}$$

$$= 1200\,(10 + 0{,}02 \,.\, 11 \,.\, 10) = 1200\,(10 + 2{,}2) = 14640.$$

Luego se ahorran al cabo de 10 años 14640 \$.

151. **Aplicaciones.** — Las fórmulas que dan el valor del último término y de la suma de los términos de una progresión aritmética, nos van a permitir resolver los problemas siguientes:

Dadas tres de las siguientes cantidades: primer término, último término, razón, número de términos y suma de los términos, hallar las otras dos, mediante el sistema de ecuaciones que se obtenga reemplazando en las fómulas mencionadas las incógnitas por x e y y los datos por sus valores, como puede verse en los problemas que siguen.

Problema. — *Conociendo el primer término,* $a = \frac{3}{2}$, *el último,* $l = 14{,}5$, *y el número de términos,* $n = 14$, *de una progresión aritmética determinar la razón y suma de los términos de dicha progresión.*

Datos	Incognitas
$a = \frac{3}{2}$	$r = x$
$l = 14{,}5$	$S = y$
$n = 14$	

Solucion. — Siendo $l = a + (n - 1)\,r$ y $S = (a + l)\frac{n}{2}$ reemplazando los datos por sus valores, r por x y S por y, se tiene el sistema

$$\begin{cases} 14{,}5 = \dfrac{3}{2} + (14 - 1)\,x & [1] \\[2ex] y = \left(\dfrac{3}{2} + 14{,}5\right)\dfrac{14}{2} & [2] \end{cases}$$

Como cada una de estas ecuaciones tiene una sola incógnita, el valor de ellas se obtiene resolviendo aisladamente cada ecuación. Así:

de la [1] $\qquad 14{,}5 = \frac{3}{2} + 13\,x$ luego $13\,x = 14{,}5 - \frac{3}{2} = 13$

o bien $\qquad x = \frac{13}{13} = 1$

de la [2] $\qquad y = \frac{3 + 29}{2} \cdot \frac{14}{2} = 16 \times 7 = 112$

luego la razón es $\quad r = 1$ y la suma es $S = 112$

Problema. — *Conociendo el primer término $a = 0$, la razón, $r = -2$, y el número de términos, $n = 13$, de una progresión aritmética, determinar el último término y la suma de todos los términos de dicha progresión.*

Datos	Incógnitas
$a = 0$	$l = x$
$r = -2$	$S = y$
$n = 13$	

Solución. — Siendo $l = a + (n - 1)\,r$ y $S = (a + l)\frac{n}{2}$ reemplazando los datos por sus valores, r por x y S por y se tiene el sistema

$$\begin{cases} x = 0 + (13 - 1)(-2) \\ y = (0 + x)\dfrac{13}{2} \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = -24 & [1] \\ y = \dfrac{13}{2}\,x & [2] \end{cases}$$

Como el valor de x está dado por la [1] reemplazando en la [2], se tiene

$$y = \frac{13}{2} \times (-24) = 13\,(-12) = -156$$

luego el último término es $l = -24$ y la suma es $S = -156$.

PROBLEMA. — *Conociendo el primer término,* $a = -2$, *el número de términos,* $n = 10$, *y la suma,* $S = 50$ *de los términos de una progresión aritmética, determinar el último término y la razón de dicha progresión.*

DATOS	INCÓGNITAS
$a = -2$	$l = x$
$n = 10$	$r = y$
$S = 50$	

SOLUCIÓN. — Siendo $l = a + (n - 1)\,r$ y $S = (a + l)\,\frac{n}{2}$ reemplazando los datos por sus valores, l por x y r por y, se tiene el sistema

$$\begin{cases} x = -2 + (10-1)\,y \\ 50 = (-2 + x)\,\frac{10}{2} \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = -2 + 9\,y & [1] \\ 50 = -10 + 5\,x & [2] \end{cases}$$

Despejando el valor de x en la [2], se tiene

$$5\,x = 50 + 10 \quad \text{luego} \quad x = \frac{60}{5} = 12$$

Sustituyendo este valor en [1], resulta

$$12 = -2 + 9\,y \quad \text{luego} \quad y = \frac{12 + 2}{9} = \frac{14}{9}$$

luego el último término es $l = 12$ y la razón es $r = \frac{14}{9}$.

PROBLEMA. — *Conociendo el último término,* $l = 8\sqrt{2}$, *la razón,* $r = \sqrt{2}$, *y el número de términos,* $n = 5$, *de una progresión aritmética determinar el primer término y la suma de todos los términos de dicha progresión.*

DATOS	INCÓGNITAS
$l = 8\sqrt{2}$	$a = x$
$r = \sqrt{2}$	$S = y$
$n = 5$	

Solución. — Siendo $l = a + (n - 1) r$ y $S = (a + l)\frac{n}{2}$ reemplazando los datos por sus valores, a por x y S por y, se t'ene

$$\left\{\begin{array}{l} 8\sqrt{2} = x + (5 - 1)\sqrt{2} \\ y = (x + 8\sqrt{2})\frac{5}{2} \end{array}\right. \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{array}{ll} 8\sqrt{2} = x + 4\sqrt{2} & [1] \\ y = \frac{5}{2}x + 20\sqrt{2} & [2] \end{array}\right.$$

Despejando el valor de x en la [1], se tiene:

$$x = 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Sustituyendo este valor en [2], resulta

$$y = \frac{5}{2} \times 4\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$$

luego el primer término es $a = 4\sqrt{2}$ y la suma $S = 30\sqrt{2}$.

Problema. — *Conociendo el último término,* $l = 199$, *el número de términos,* $n = 100$, *y la suma,* $S = 10000$, *de todos los términos de una progresión aritmética, determinar el primer término y la razón de dicha progresión.*

Datos	Incógnitas
$l = 199$	$a = x$
$n = 100$	$r = y$
$S = 10000$	

Solución. — Siendo $l = a + (n - 1) r$ y $S = (a + l)\frac{n}{2}$ reemplazando los datos por sus valores, a por x y r por y, se tiene el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 199 = x + (100 - 1) y \\ 10000 = (x + 199)\frac{100}{2} \end{array}\right. \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{array}{ll} 199 = x + 99 y & [1] \\ 200 = x + 199 & [2] \end{array}\right.$$

Despejando el valor de x en la [2], se tiene

$$x = 200 - 199 = 1$$

Sustituyendo este valor en [1], resulta

$$199 = 1 + 99\,y \quad \text{luego} \quad y = \frac{199-1}{99} = 2$$

por lo tanto el primer término es $a = 1$ y la razón es $r = 2$.

PROBLEMA. — *Conociendo el número de términos, $n = 10$, la suma, $S = 0$, y la razón, $r = \frac{1}{3}$, de una progresión aritmética, determinar el primero y el último término de dicha progresión.*

DATOS	INCÓGNITA
$n = 10$	$a = x$
$S = 0$	$l = y$
$r = \frac{1}{3}$	

SOLUCIÓN. — Siendo $l = a + (n-1)\,r$ y $S = (a + l)\frac{n}{2}$ reemplazando los datos por sus valores, a por x y l por y se tiene el sistema

$$\begin{cases} y = x + (10-1)\frac{1}{3} \\ 0 = (x+y)\,\frac{10}{2} \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} y = x + 3 & [1] \\ 0 = 5\,x + 5\,y & [2] \end{cases}$$

Dándole la forma general y multiplicando a la primera ecuación por 5, se tiene

$$\begin{cases} 5\,x - 5\,y = -15 \\ 5\,x + 5\,y = 0 \end{cases}$$

Sumando dá $\quad 10\,x \quad = -15 \quad$ luego $\quad x = \frac{-15}{10} = -1{,}5$

Restando da $\quad -10\,y = -15 \quad$ luego $\quad y = \frac{-15}{-10} = 1{,}5$

luego el primer término es $a = -1{,}5$ y el último es $l = 1{,}5$.

Aplicaciones. I. — *¿Cuál es el centésimo término de una progresión aritmética si su primer término es 7 y su razón es 5?* *R.*: $l = 502$.

II. — *¿Cuál es el 14º término de la progresión 8, 6, 4, ...?* *R.*: $l = -18$.

III. — *El 7º término y el 17º término de una progresión son 10 y 50 respectivamente. Hallar la razón de la progresión y escribir los términos comprendidos entre las dos.*

IV. — *Calcular la suma de los 20 primeros términos de la progresión 2, 2,2, 2,4, ...*

V. — *Calcular la suma de los diez primeros términos de la progresión* $(3 + \sqrt{2})$ 3, $(3 - \sqrt{2})$, ...

VI. — *Hallar la suma de los 10.000 primeros números naturales (excluído el 0).*

VII. — *Idem de los n primeros números naturales.*

VIII. — *Hallar la suma de los 40 primeros múltiplos de 3 distintos de cero.*

IX. — *Idem de los n términos de la progresión 3 c, c, — c, ...*

X. — *Hallar la suma de los n primeros números pares distintos de cero.*

R.: $S = n\ (n + 1)$.

XI. — *Hallar la suma de los n primeros números impares.* *R.*: $S = n^2$.

XII. — *Interpolar cuatro medios entre 100 y 200; diez entre 11 y 99; dos entre 16 y 60; tres entre 30 y 400; dos entre a y c; uno entre x y — x y uno entre a + b y a — b.*

XIII. — *Hallar la media aritmética entre a) 18 y 60; b) 30 y 400; c) x* y $x - 2y$; *d)* x y $-x$; *e)* $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{2}$; *f)* $8{,}5$ y $-3{,}5$; *g)* $2 + \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3}$.

XIV. — *Conociendo el número de términos* $n = 22$, *la razón* $r = \frac{5}{7}$ *y el último término* $l = 24$ *de una progresión aritmética, determinar el primer término y la suma de todos los términos de dicha progresión.* *R.*: $a = 0$, $S = 363$.

XV. — *Conociendo el primer término* $a = 0$, *la razón* $r = \frac{3}{5}$ *y el número de términos* $n = 13$ *de una progresiva aritmética determinar la razón y la suma de los términos de dicha progresiva.*

R.: $r = \frac{1}{3}$, $S = 91$.

XVI. — *Conociendo el primer término $a = 0$, la razón $r = \frac{3}{5}$ y el número de términos $n = 6$ de una progresión aritmética, determinar el último término y la suma de todos los términos de dicha progresión.* R.: $l = 3$, $S = 9$.

XVII. — *Calcular los ángulos del pentágono ABCDE sabiendo que A es recto y que dichos ángulos están en progresión aritmética.*
R.: $B = 99°$; $C = 108°$; $D = 117°$; $E = 126°$.

XVIII. — *Calcular los lados de un triángulo rectángulo BAC sabiendo que están en progresión aritmética y que la superficie del mismo es de 54 cm^2.*
$a = 15$ cm; $b = 12$ cm; $c = 9$ cm.

XIX. — *Hallar el primer término y la razón de una progresión aritmética sabiendo que la suma del segundo término con el séptimo es 35 y que el producto de los mismos es 250.* R.: $a = 7$; $r = 3$ ó $a = 28$ y $r = -3$.

XX. — *¿Cuántos términos hay que sumar en la proporción a) 1, 5, 9, ... para obtener 630; b) en la 15, 12, 5,10, .. para obtener 150?*

XXI. — *Conociendo el primer término $a = -45$, la suma $S = 0$ y el número de términos de una progresión aritmética, determinar la razón y el último término.*
R.: $r = 3$; $l = 45$.

XXII. — *Conociendo el último término $l = 11\ 2/3$, la suma $S = 209\ 2/3$ y el número de términos $n = 37$ de una progresión aritmética, determinar el primer término, y la razón.* R.: $a = -1/3$; $r = 1/3$.

XXIII. — *Conociendo el número de términos $n = 33$, la suma de los mismos $S = -33$ y la razón $r = -3/4$ de una progresión aritmética, falta determinar el primero y el último términos.* R.: $a = 11$; $l = -13$.

XXIV. — *Conociendo el primer término $a = 56$, la razón $d = -3$ y el número de términos $n = 11$ de una progresión aritmética, hallar el último término y la suma de todos los términos.* R.: $l = 26$; $S = 451$.

XXV. — *¿Qué suma se lograría formar colocando 150 \$ al comienzo de cada año a interés simple: a) al 3 % en 12 años; b) al 5 % en 25 años; c) al 1,5 % en 20 años; d) al 6 % en 6 años; e) al 4 % en 25 años.*

CAPITULO X

PROGRESIONES GEOMETRICAS

PROGRAMA. — *Definición. Progresión geométrica creciente y decreciente. Deducción de la fórmula fundamental para obtener el último término. Fórmulas que se deducen de la fundamental: Del primer término, de la razón y del número de términos. Producto de dos términos equidistantes de los extremos de una progresión geométrica. Producto de varios términos consecutivos. Suma de los términos de una progresión geométrica creciente. Caso en que la progresión es decreciente; límite de esta suma, cuando el número de términos crece indefinidamente. Interpolación de medios proporcionales: Definiciones. Razón de interpolación. Media geométrica. Aplicaciones: Dadas tres de las cantidades: Primer término, último término, número de términos, suma de los términos y la razón, determinar los otros dos. Problemas y ejercicios entre los cuales aparezcan términos de forma binomial.*

152. **Definiciones.** — Se dice que una sucesión de números es una *progresión geométrica*, cuando el cociente entre dos números consecutivos cualesquiera es constante.

En símbolos: $a, b, c, \ldots, m, \ldots$ es una progresión geométrica si

$$\frac{b}{a} = q \; ; \; \frac{c}{b} = q \ldots \; \frac{m}{l} = q \ldots$$

los números $a, b, c, \ldots,$ se llaman *términos* y el cociente q entre dos números consecutivos *razón* de la progresión (*).

EJEMPLO: Los números

$1, \; 2, \; 4, \; 8, \; 16, \; 32, \; \ldots\ldots$ forman una progresión geométrica cuya razón es $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \ldots = 2.$

(*) Suele indicarse que $a, b, c, \ldots, h, k, l,$ forman una progresión geométrica escribiendo

$\dot{\div}\; a : b : c : \ldots : h : h : l$ que se lee: *como a es geométricamente a b a c, ...*

Observación. — De acuerdo con la definición, si se quiere formar una progresión geométrica, basta fijar un número cualquiera como uno de sus términos y tomar otro (distinto de cero) como razón. Los términos que siguen al fijado se obtendrán multiplicando a éste por la razón, al resultado por la razón, etc., y los que le preceden dividiendo al fijado por la razón, al resultado también por la razón. Así, fijado el término $h = 9$ y la razón $q = 2$ se tiene

$$\ldots,\ 1{,}125\ ,\ 2{,}25\ ,\ 4{,}5\ ,\ \mathbf{9}\ ,\ 18\ ,\ 36\ ,\ 72\ ,\ldots.$$

Nota. — Cuando solo se consideran algunos términos consecutivos de una progresión geométrica comprendidos entre dos de ellos, se dice que se obtiene una *progresión finita.*

153. **Deducción de la fórmula fundamental.** — Teorema. — *En una progresión geométrica, el último término es igual al producto del primero por la razón elevada a una potencia de exponente igual al número de términos menos uno.*

Hip.) $\overbrace{a,\ b,\ c,\ \ldots,\ h,\ k,\ l}^{n}$ prog. geom. de razón q

Tesis) $l = a.q^{n-1}$.

Demost.) De acuerdo con la definición de progresión geométrica

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{a} = q \\[2ex] \dfrac{c}{b} = q \\[2ex] \dfrac{d}{c} = q \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{l}{k} = q \end{array}\right\} n-1$$

Mult. m. a m. da $\dfrac{b}{a} . \dfrac{c}{b} . \dfrac{d}{c} \ldots \dfrac{l}{k} = \underbrace{q\ .\ q\ .\ q\ \ldots\ q}_{n-1}$

Simplificando b que multiplica y divide y en la misma forma d... k, (los inversos de estos números tienen que figurar entre los términos que no se han escrito) queda

$$\frac{l}{a} = q^{n-1}$$

luego $$\boxed{l = a.q^{n-1}}$$

154. **Fórmulas del primer término, de la razón y del número de términos de una progresión geométrica.** — Puede suceder que la incógnita sea el primer término, o la razón, o el número de términos y que se conozcan los restantes números. En tales casos la igualdad anterior $l = aq^{n-1}$ nos permitirá despejar esa incógnita.

Así, pasando q^{n-1} al otro miembro, resulta

$$\boxed{a = \frac{l}{q^{n-1}}} \qquad [II]$$

Por otra parte pasando a al primer miembro y extrayendo la raíz $n - 1$ de ambos miembros resulta

$$\boxed{q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}} \qquad [III]$$

y por último pasando a al primer miembro, se tiene

$$q^{n-1} = \frac{l}{a}$$

y tomando los logaritmos de ambos miembros da

$$(n - 1) \log q = \log l - \log a$$

luego $$n - 1 = \frac{\log l - \log a}{\log q}$$

y por lo tanto $$\boxed{n = \frac{\log l - \log a}{\log q} + 1} \qquad [IV]$$

Fórmulas éstas que se expresan así

En toda progresión geométrica finita:

El primer término es igual al cociente entre el último y la potencia $n-1$ de la razón (fórmula II).

La razón es igual a la raíz $n-1$ del cociente entre el último término y el primero (fórmula III).

El número de términos es igual a la diferencia de los logaritmos del último y primer término dividida por el logaritmo de la razón y al resultado mas uno.

PROBLEMA. — *¿Cuál será el último término de una progresión geométrica de 10 términos si el primero es 64 y su razón es* $\frac{1}{2}$?

SOLUCIÓN. — Siendo $l = a.q^{n-1}$

es
$$l = 64.\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{9} = 64\,\frac{1}{2^9}$$

$$l = 64.\frac{1}{512} = \frac{64}{512} = \frac{1}{8}$$

COMPROBACIÓN. — Formando la progresión dada por el enunciado del problema, se tiene

$$64\ ,\ 32,\ 16\ ,\ 8\ ,\ 4\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}$$

donde puede verse que efectivamente es $\frac{1}{8}$ el último término.

PROBLEMA. — *¿Cuál será el primer término de una progresión geométrica de 7 términos si el último es 1 y la razón es* $\frac{1}{2}$?

SOLUCIÓN. — Siendo $a = \frac{l}{q^{n-1}}$

es
$$a = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{7}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2^6}} = 2^6 = 64$$

lo que puede observarse en la progresión anterior.

Problema. — *¿Cuál es la razón de una progresión geométrica de 7 términos si el primero es 8 y el último es* $\frac{1}{8}$?

Solución. — Siendo $q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$

es
$$q = \sqrt[7-1]{\frac{\frac{1}{8}}{8}} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$$

lo que también puede observarse en la progresión anterior.

Problema. — *¿Cuál es el número de términos de una progresión geométrica si el primer término es 16 y el último es* $\frac{1}{4}$ *y la razón es* $\frac{1}{2}$?

Solución. — Siendo $n = \frac{\log l - \log a}{\log q} + 1$

es
$$n = \frac{\log \frac{1}{4} - \log 16}{\log \frac{1}{2}} + 1$$

$$n = \frac{\bar{1},39794 - 3,20413}{\bar{1},69897} + 1 = 6 + 1 = 7$$

lo cual puede también observarse en la progresión del primer problema.

Nota. — Como las tablas de logaritmos dan valores aproximados de los mismos, podría suceder que al aplicar la fórmula (IV) no resultase n un número natural, como tiene que ser pues indica el número de términos de la progresión. En tal caso se tomará para n el número natural mas aproximado.

155. **Producto de los términos equidistantes de los extremos.** — Lema. — *El producto de los términos equidistantes de los extremos de una progresión geométrica finita es igual al de los extremos.*

Hip.) $a, b, c, \ldots j, k, l$ prog. geom. de razón q

Tesis) $b \times k = a \times l$; $c \times j = a \times l$; ...

Demost.) De acuerdo con la def. de prog. geom. se tiene

$$b = a.q \quad \text{y que} \quad l = k.q$$

luego $\qquad k = \dfrac{l}{q}$ por def. de cociente

Mult. m. a m. da $\quad b.k = a \,.\, q \,.\, \dfrac{l}{q}$

Simpl. queda $\quad b.k = a.l \quad [1]$

Por otra parte en la progresión que empieza por b y termina por k, tendríamos por las mismas razones

$c.j = b.k$ y como por [1] $b.k = a.l$ resulta

$c.j = a.l$ por caracter transitivo de la igualdad.

Este lema nos permite hallar rápidamente el

156. **Producto de varios términos consecutivos.** — Teorema. — *En toda progresión geométrica finita de n términos el producto de los mismos es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos elevado a la potencia enésima.*

Hip.) $\overbrace{a, b, c, \ldots\ldots\ldots i, j, k, l}^{n}$ prog. geom.

Tesis) $P = \sqrt{(a.l)^n}$.

Demost.) Llamando P al producto de todos los términos, tendríamos

$$P = \overbrace{a.b.c. \ldots .j.k.l}^{n}$$

y como $$P = \overbrace{l.k.j. \ldots .c.b.a}^{n}$$ por prop. conm. mult.

Mult. m. a m. y por colum. da $P^2 = (a.l)(b.k)(c.j)\ldots(j.c)(k.b)(l.a)$ por propiedad uniforme conmutativa y asociativa de la multiplicación.

Teniendo en cuenta el lema anterior, resulta:

$$P^2 = \overbrace{(a.l)(a.l)(a.l)\ldots(a.l)(a.l)(a.l)}^{n}$$

o bien $$P^2 = (a.l)^n$$

Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros queda;

$$P = \sqrt{(a.l)^n}.$$

Problema. — *¿Cuál será el producto de todos los términos de una pogresión geométrica de 8 términos si el primero es 16 y el último $\frac{1}{8}$?*

Solución. — Siendo $P = \sqrt{(a.l)^n}$

es $$P = \sqrt{\left(16.\frac{1}{8}\right)^8} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16.$$

157. **Interpolación de medios proporcionales.** — Definición. — *Interpolar* uno o más números, llamados *medios proporcionales*, entre otros dos dados a y b significa hallar los términos que faltan en una progresión geométrica de la cual a es el primer término y b el último.

Razón de interpolación. — Si se desea interpolar m medios proporcionales entre los números a y b debemos calcular la razón de la progresión que van a formar esos números con los dados. Teniendo en cuenta que esa progresión tiene $m + 2$ términos resulta, de acuerdo con la fórmula de la razón

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$

que como $\qquad l = b \quad$ y $\quad n = m + 2$

se tiene: $$q = \sqrt[m+2-1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

lo que nos dice que: *Cuando se desean interpolar m medios proporcionales entre dos números dados a y b, la razón de interpolación se obtiene extrayendo la raíz de grado $m + 1$ del cociente entre el segundo y el primero de los números dados.*

Ejemplo I. — *Interpolar cuatro medios proporcionales entre* $\frac{1}{128}$ y 8.

Siendo la razón de interpolación:

$$q = \sqrt[4+1]{\frac{8}{\frac{1}{128}}} = \sqrt[5]{8 \,.\, 128} = \sqrt[5]{2^3 \,.\, 2^7} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$$

luego los medios buscados son:

$$\frac{1}{128} \,.\, 4 = \frac{1}{32}\,;\ \frac{1}{32} \,.\, 4 = \frac{1}{8}\,;\ \frac{1}{8} \,.\, 4 = \frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2} \,.\, 4 = 2 \ \text{ y } \ 2 \,.\, 4 = 8$$

y la proporción que ellos forman con los dados

$$\frac{1}{128}\,;\ \frac{1}{32}\,;\ \frac{1}{8}\,;\ \frac{1}{2}\,;\ 2 \text{ y } 8.$$

Problema. — *Escribir los términos que faltan en una progresión geométrica de 5 términos sabiendo que el primero es 0,5 y el último 8.*

Solución. — Siendo la razón de interpolación

$$q = \sqrt[3+1]{\frac{8}{0,5}} = \sqrt[4]{\frac{8}{0,5}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

luego por la observación del párrafo 127 resulta que los 3 términos que siguen al primero son

$$b = 0,5 \times 2 = 1 \quad ; \quad c = 1 \times 2 = 2 \quad ; \quad d = 2 \times 2 = 4$$

y la progresión es **0,5 , 1 , 2 , 4 , 8**.

158. **Suma de los términos de una progresión creciente.** — Teorema. — *En toda progresión geométrica finita de n términos, la suma de todos ellos es igual al primer término por la diferencia entre la potencia enésima de la razón y uno, dividido por la diferencia entre la razón y uno.*

Hip.) $a, b, c, \ldots, l$ prog. geom.

Tesis) $S = \dfrac{a(q^n - 1)}{q - 1}$.

Demost.) Siendo por definición

$$b = aq, \; c = bq = aq^2, \text{ etc. y } l = aq^{n-1} \qquad \text{es}$$

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} \qquad [1]$$

Multiplicando ambos miembros por q se tiene

$$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n \qquad [2]$$

Observando que si en la [1] se pasa a al primer miembro y que si en la [2] se hace lo propio con aq^n los segundos miembros resultan iguales, se tiene:

$$S - a = Sq - aq^n.$$

Trasponiendo los términos que contienen a S a un miembro y los restantes al otro, resulta.

$$Sq - S = aq^n - a$$

luego

$$S(q-1) = a(q^n - 1)$$

o bien

$$\boxed{S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Problema. — *¿Cuál será la suma de los términos de una progresión g ométrica de 7 términos si el primero es 8 y la razón es* $\frac{1}{2}$?

Solución. — Siendo $S = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

es

$$S = 8\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 8\frac{\frac{1}{2^7} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 8\frac{\frac{1}{128} - 1}{-\frac{1}{2}}$$

luego

$$S = 8\frac{-\frac{127}{128}}{-\frac{1}{2}} = 16\frac{127}{128} = \frac{127}{8} = 15\frac{7}{8}.$$

159. **Suma de los términos en el caso en que la progresión es decreciente.** — Si consideramos que en la progresión geométrica

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots\ aq^{n-1},\ aq^n$$

la razón q es en valor absoluto menor que 1, como sus potencias sucesivas q^2, q^3, . . . , q^n van disminuyendo, lo mismo sucede con los términos a, aq, aq^2, . . . , aq^n de la misma, razón por la cual se dice que la progresión es decreciente.

Ejemplo. — Si $a = 1$ y $q = \frac{1}{2}$ se tiene la progresión decreciente

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{1}{2^n},\ \ldots$$

Habíamos demostrado en general, que la suma S de los n primeros términos de una progresión geométrica era

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

y como $q < 1$ ambos términos de la fracción son negativos, conviene escribirla de esta otra manera:

$$S = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

160. **Límite de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente.** — La fórmula anterior puede escribirse así:

$$S = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q}\,q^n$$

Aplicándola para calcular la suma de los 5, 10, 15, 20 primeros términos de la progresión

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{1}{2^n}$$

tendríamos:

$$S_5 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 2 - \frac{1}{16}$$

$$S_{10} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 2 - \frac{1}{512}$$

$$S_{15} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{15}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{14} = 2 - \frac{1}{16384}$$

$$S_{20} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = 2 - \frac{1}{524277}$$

Puede observarse que las sumas obtenidas son iguales a una parte constante, 2 menos una fracción, que es tanto menor cuanto mayor es el número de términos que se consideran.

Análogamente, si tomamos la progresión

$$a\,,\ aq\,,\ aq^2\,,\ \ldots\,,\ aq^{n-1}\,,\ aq^n \quad \text{siendo} \quad |\,q\,| < 1\,,$$

cuya suma es $\quad S = \dfrac{a}{1 - a} - \dfrac{a}{1 - q}\, q^n$

Puede observarse que como $q < 1$, al ir aumentando el valor de n la fracción $\dfrac{a}{1 - q}$ no varía, pues en ella no figura n, y en cambio q^n se hace cada vez más pequeño y por lo tanto lo mismo sucede con el producto $\dfrac{a}{1 - q}\, q^n$ que podemos hacer tan próximo a cero como deseemos con tal de tomar a n suficientemente grande, con lo que resultaría que S y $\dfrac{a}{1 - q}$ diferirían tan poco como uno quisiera. Esto se expresa diciendo que $\dfrac{a}{1 - q}$ es el *límite de* S cuando n aumenta indefinidamente, es decir que:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots = \frac{a}{1 - q} = S$$

En el ejemplo anterior se tendría

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

y en el ejemplo siguiente:

$$S = 6 + 4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \ldots = \frac{6}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18$$

161. **Aplicaciones.**— Las fórmulas que dan el valor del último término y de la suma de los términos de una progresión geométrica, nos van a permitir resolver los problemas siguientes:

Dadas tres de las siguientes cantidades: primer término, último término, razón, número de términos, hallar las otras dos, mediante el sistema de ecuaciones que se obtenga reemplazando en las fórmulas mencionadas las incógnitas por x e y y los datos por sus valores, como puede verse en los problemas que siguen:

PROBLEMA. — *Dados el primer término, $a = 5$, el último, $l = 1280$ y el número de términos, $n = 9$, de una progresión geométrica, determinar la razón y la suma de los términos de dicha progresión.*

DATOS	INCÓGNITAS
$a = 5$	$q = x$
$l = 1280$	$S = y$
$n = 9$	

SOLUCIÓN. — Siendo $l = aq^{n-1}$ y $S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$ reemplazando los datos por sus valores, q por x y S por y se tiene el sistema

$$\begin{cases} 1280 = 5\,x^{9-1} & [1] \\ y = 5\,\dfrac{x^9 - 1}{x - 1} & [2] \end{cases}$$

Despejando el valor de x de la [1], se tiene:

$$1280 = 5\,x^8 \quad .·. \quad x^8 = \frac{1280}{5} = 256 \text{ luego } x = \sqrt[8]{256} = ?$$

sustituyendo este valor en la [2], resulta

$$y = 5\,\frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 5\,\frac{512 - 1}{1} = 5 \times 511 = 25$$

luego la razón es $q = 2$ y la suma es $S = 2555$.

Problema. — *Dados el primer término, $a = 2$, la razón, $q = 3$, y el número de términos, $n = 5$, de una progresión geométrica, determinar el último término y la suma de los mismos en dicha progresión.*

Datos	Incógnitas
$a = 2$	$l = x$
$q = 3$	$S = y$
$n = 5$	

Solución. — Siendo $l = aq^{n-1}$ y $S = a\,\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ reemplazando los datos por sus valores, l por x, y S por y, se tiene el sistema

$$\begin{cases} x = 2.3^{5-1} & [1] \\[2ex] y = 2\,\dfrac{3^5 - 1}{3 - 1} & [2] \end{cases}$$

Como cada una de estas ecuaciones tiene una sola incógnita, el valor de ellas se obtiene resolviendo aisladamente cada ecuación Así, resulta

$$x = 2.3^4 = 2.81 = 162$$

$$y = 2\,\frac{243 - 1}{2} = 242$$

luego el último término es $l = 162$ y la suma $y = 242$.

Problema. — *Dados el último término, $l = 256$, la razón, $q = 2$, y el número de términos $n = 7$ de una progresión geométrica, determinar el primer término y la suma de los términos de dicha progresión.*

Datos	Incógnitas
$l = 256$	$a = x$
$q = 2$	$S = y$
$n = 7$	

Solución. — Siendo $l = aq^{n-1}$ y $S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$ reemplazando los datos por sus valores, a por x y S por y se tiene el sistema

$$\begin{cases} 256 = x\,2^{7-1} \\ y = x\dfrac{2^7 - 1}{2 - 1} \end{cases} \quad \text{o sea} \quad \begin{cases} 256 = 64\,x & [1] \\ y = 127\,x & [2] \end{cases}$$

Despejando el valor de x de la [1], se tiene

$$x = \frac{256}{64} = 4$$

sustituyendo este valor en la [2], resulta

$$y = 127 \times 4 = 508$$

luego el primer término es $a = 4$ y la suma es $S = 508$.

Problema. — *Dados el número de términos, $n = 6$, la suma, $S = 630$ y la razón, $q = \frac{1}{2}$, de una progresión geométrica, determinar el primero y el último término de dicha progresión.*

Datos	Incógnitas
$n = 6$	$a = x$
$S = 630$	$l = y$
$q = \frac{1}{2}$	

Solución. — Siendo $l = aq^{n-1}$ y $S = a\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ reemplazando los datos por sus valores, a por x y l por y, se tiene el sistema

$$\begin{cases} y = x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{6-1} \\ 630 = x\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 - 1}{\dfrac{1}{2} - 1} \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} y = x\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32}x & [1] \\ 630 = x\dfrac{\dfrac{1}{64} - 1}{-\dfrac{1}{2}} & [2] \end{cases}$$

Despejando el valor de x de la [2] se tiene

$$630 = x\dfrac{-\dfrac{63}{64}}{-\dfrac{1}{2}} = x\dfrac{126}{64} \quad \text{luego} \quad x = \dfrac{630 \times 64}{126}$$

o sea $$x = 320$$

sustituyendo este valor en la [1], resulta

$$y = \dfrac{1}{32} \times 320 = \dfrac{320}{32} = 10.$$

luego el primer término es $a = 320$ y el último $l = 10$.

Aplicaciones. I.— *¿Cuál es la razón de una progresión geométrica de 9 términos si el primero es 5 y el último 1280* R.: $q = 2$.

II. — *¿Cuál es el primer término de una progresión geométrica de 8 términos si el último es 384 y la razón es 2* R.: $a = 3$.

III. — *¿Cuál será el último término de una progresión geométrica de 5 términos si el primero es — 1 y la razón es — 3* R.: $l = -81$.

IV. — *¿Cuántos términos tiene una progresión geométrica cuyo primer término es 5, el último 1280 y la razón es 2* R.: $n = 9$.

V. — *Hallar: a) el 8° término de la progresión 1, 1/3, 1/9,...; b) el 7° de la 1/4* $\sqrt{2}$*, 1/2, 1/2* $\sqrt{2}$*,...; c) el n° de la a, a (1 + x) ...; d) el n° de la x, (x + 1), ... d) el 5° de 1/2, 1/3, 2/9 ...; e) el 10° de la 2, — 4, 8,...*

VI. — *Hallar la suma y el producto de: a) los 8 primeros términos de la progresión 2, 6, 18...; b) los 12 primeros de la 1,* $\sqrt{3}$*, 3...; c) los 6 primeros de — 2, 2 1/2, — 3 1/8..., d) los 8 primeros de la 80, 40, 20...; e) los 4 primeros de 2* $\sqrt{2}$*, — 4, 4* $\sqrt{2}$*...; f) los 9 primeros de la 3, 6, 12....*

VII. — *El segundo y el tercer término de una progresión geométrica son m y n, respectivamente. ¿Cuál es el primero?* *R.*: m^2/n.

IX. — *Se sabe que bajo ciertas condiciones el número de bacterias que contiene la leche se duplica cada tres horas. Calcular el número por el cual es necesario multiplicar al mencionado en primer término para obtener el número de bacterias al cabo de un día.* *R.*: *256.*

X. — *Interpolar 4 medios proporcionales entre 1 y 243; 3 entre — 3 y — 112; 2 entre 19 y 152; 1 entre m y n; 2 entre m y n; 3 entre 2 1/4 y 9/4; 6 entre 14 y — 7/64.*

XI. — *Hallar la media proporcional entre: a) 9 y 4; b) 5 y 5/9; c) 25 y 4; d)* $-x$ *y* $-1/x$*; e)* $2 + \sqrt{3}$ *y* $2 - \sqrt{3}$*; f)* $(a + b)^3$ *y* $\dfrac{1}{a + b}$*; g) 0,05 · y 8.*

XII. — *Hallar los límites de las sumas de las progresiones: a)* $3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}\ldots$*; b) 0,45, 0,015, 0,005...; c) 3,* $\sqrt{3}$*, 1...; d) 8/5, — 1, 5/8 ...; e) 4; 0,8; 0,16...*

XIII. — *Conociendo: a)* $n = 6$, $a = 13$, $q = 1/10$ *hallar l y S; b)* $a = 7$, $l = 3584$ *y* $n = 10$*, hallar q y S; c)* $n = 11$, $l = 29296875$, $q = 5$*, hallar a y S; d)* $n = 6$ $q = 1/2$ *y* $S = 19\ 11/16$*, hallar a y l; e)* $a = 3$, $l = 192\sqrt{2}$ *y* $n = 14$*, hallar q y S.*

XIV. — *Un mendigo pide hospitalidad a un avaro, quien no quiere acordársela gratuitamente. El mendigo le hace entonces la siguiente proposición: yo pagaré 1 $ por el primer día, 2 $ por el segundo, 3 $ por el tercero y así siguiendo; en cambio usted me dará 1/1000 de centavos el primer día, 2/1000 de centavo el segundo día, 4/1000 el tercero y así siguiendo. El avaro consideró esa proposición como un buen negocio y consintió en ese arreglo por 30 días. Liquidar la cuenta al fin de ese tiempo.*

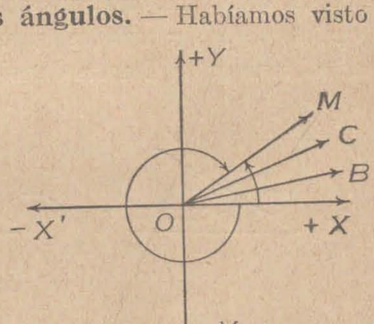
R.: *El avaro* debe 1073742 $
» *mendigo* » 465 »

CAPITULO XI

NOCIONES ELEMENTALES DE TRIGONOMETRIA

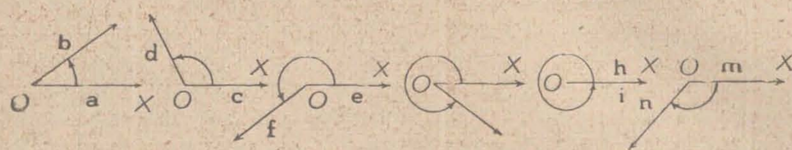
PROGRAMA. — *Generación de ángulos y signos de los mismos. Medida de los ángulos: Sistema sexagesimal y circular. Valor y signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes. Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo: Fórmulas fundamentales. Conociendo el seno, el coseno o la tangente de un ángulo, hallar las demás funciones trigonométricas. Seno y coseno de la suma de dos ángulos. Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos. Seno y coseno del duplo de un ángulo. Area de un triángulo. Descripción y uso de las tablas de los logaritmos de las funciones trigonométricas. Ejercicios.*

162. **Generación y signo de los ángulos.** — Habíamos visto al dar las primeras nociones de Trigonometría (*Geom. Com.*, II curso, n° 118) que un ángulo cualquiera $\widehat{XOM} = \widehat{\alpha}$ se consideraba siempre teniendo como primer lado al semieje positivo $\overrightarrow{OX}$ de las abscisas y de manera que el otro lado $\overrightarrow{OM}$ perteneciera al primero, segundo, tercero o cuarto cuadrantes, según que dicho ángulo $\widehat{XOM} = \widehat{\alpha}$ estuviera comprendido entre 0° y 90°, 90° y 180°, 180° y 270°

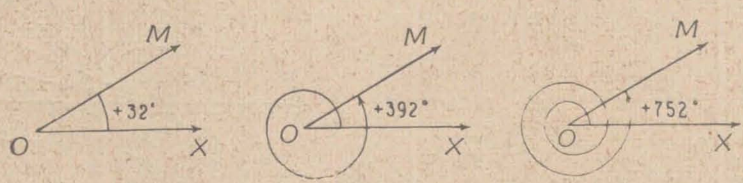


y 270° y 360°, respectivamente. Se amplía este concepto de ángulo atribuyéndole a cada uno un signo de acuerdo con la siguiente:

Convención. — Se considera a los ángulos como engendrados por la rotación de la semirrecta $\overrightarrow{OX}$ alrededor del origen al pasar de la posición $\overrightarrow{OX}$ a la $\overrightarrow{OM}$ pasando por todas las posiciones intermedias. Si ese movimiento se hace en el sentido contrario al de las agujas de un reloj, como en la figura, se le asigna el signo +, y en caso contrario el —. De acuerdo con esto resulta que el ángulo convexo $\widehat{XOM}$ es positivo y el cóncavo $\widehat{XOM}$ es negativo, por esa razón hemos indicado el sentido poniéndole un arco que comienza en el primer lado y termina con una flecha en el último, como se vé en las figuras que siguen.



163. **Ampliación del concepto de ángulo.** — Esta forma de considerar generados a los ángulos, permite ampliar ese concepto, admitiendo que el lado OX puede pasar a la posición $\overrightarrow{OM}$ directamente, como en los casos anteriores, o después de dar 1, 2, 3, etc. vueltas o giros completos, en sentido positivo o negativo. Los ángulos así obtenidos se llaman *ángulos de más de un giro*. En las figuras



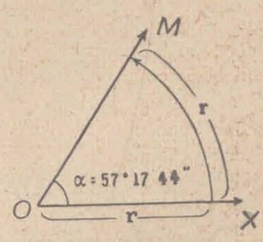
siguientes se indican: un ángulo convexo de 32°, uno de un giro más 32° o sea de 392° y un tercero de dos giros más 32° o sea de 752°, siendo los tres positivos.

Como los lados de estos ángulos coinciden al llevar uno sobre otro, aun cuando no son iguales pues difieren en uno o dos giros, se llaman *congruentes respecto de un giro.*

164. **Medida de los ángulos.** — SISTEMA SEXAGESIMAL. — Recuérdese que para medir las cantidades de una magnitud se elige una de ellas como *unidad.* Así, por ejemplo, para medir los ángulos en el sistema llamado *sexagesimal,* ya estudiado, se toma como unidad al *ángulo de un grado sexagesimal,* que es la noventa ava parte de un ángulo recto y a sus submúltiplos, que son el *ángulo de un minuto,* y el de *un segundo,* que guardan entre sí las relaciones siguientes:

$$1^\circ = \frac{1\,\widehat{R}}{90} \quad ; \quad 1' = \frac{1^\circ}{60} \quad ; \quad 1'' = \frac{1'}{60}$$

165. **Sistema circular.** — Habíamos visto que en la práctica los ángulos se miden empleando transportadores cuyo borde circular estaba dividido en arcos de un grado, por ejemplo, utilizando la propiedad que la *medida de un ángulo es igual a la del arco del cual es un ángulo central correspondiente y recíprocamente.*



Vamos a estudiar ahora un sistema para medir ángulos, llamado *circular,* que toma como unidad al ángulo denominado *radián,* que es tal que si con centro en su vértice se traza un arco de cualquier radio, cuyos extremos estén sobre los lados del ángulo dado, la longitud de ese arco es igual a su radio.

166. **Equivalencia entre el sistema círcular y el sexagesimal.** — Considerando a una circunferencia como a un arco cuyo ángulo central correspondiente es de 360°, y teniendo en cuenta que los arcos de una misma circunferencia son proporcionales a sus ángulos centrales, y que la longitud de la circunferencia de radio r es $2\pi r$, se tiene:

que a un ángulo de 360° corresponde un arco de 2π radianes

y » » » » 1° » » » » $\frac{2\pi}{360°}$ »

» » » » » $\alpha°$ » » » » $\frac{2\pi\alpha°}{360°} = \frac{\pi\,\alpha°}{180°}$

luego el valor en radianes del ángulo $\alpha°$ es $\alpha_r = \frac{\pi\,\alpha°}{180°}$ [1]

EJEMPLOS. — *Expresar en radianes los ángulos de* 90°, 180°, 270°, 360, 450°, 2 *giros, etc.*

Siendo $\hat{\alpha} = 90°$ es $\hat{\alpha}_r = \frac{\pi . 90°}{180°} = \frac{\pi}{2}$ radianes.

Análogamente resulta $\hat{\alpha}_r = \frac{\pi . 180°}{180°} = \pi$ radianes;

$\hat{\alpha}_r = \frac{\pi . 270°}{180°} = \frac{3\pi}{2}$ radianes; $\alpha_r = \frac{\pi\, 360°}{180°} = 2\pi$ radianes;

$\hat{\alpha}_r = \frac{\pi . 720°}{180°} = 4\pi$ radianes.

De la fórmula [1] resulta la $\hat{\alpha}° = \frac{180°\,\alpha_r}{\pi}$ que nos permite obtener el valor en grados de un ángulo cuando se conoce su valor en radianes.

EJEMPLOS. — *Expresar en grados, minutos y segundos los ángulos de* $\frac{\pi}{4}$ *radianes,* $\frac{\pi}{12}$ *radianes,* 1 *radian,* $\frac{7\pi}{4}$ *radianes,* 5 *radianes.*

Siendo $\alpha_r = \frac{\pi}{4}$ es $\alpha = \frac{180°. \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{180°}{4} = 45°.$

Análogamente: para $\alpha_r = \dfrac{\pi}{12}$ es $\alpha = \dfrac{180°.\frac{\pi}{12}}{\pi} = \dfrac{180°}{12} = 15°$;

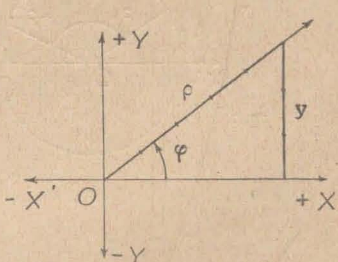
para $\alpha_r = 1$ es $\alpha = \dfrac{180°.1}{\pi} = \dfrac{180°}{\pi} \cong 57°\,17'\,44'' \cong 57°,3$;

para $\alpha_r = \dfrac{7\pi}{4}$ es $\alpha = \dfrac{180°.\frac{7}{4}\pi}{\pi} = \dfrac{180°.7}{4} = 315°$;

para $\alpha_r = 5$ es $\alpha = \dfrac{180°.5}{\pi}$

VALOR Y SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS EN LOS CUATRO CUADRANTES

167. **Seno.** — Definición. — Recordemos (*Geom. Cóm.*, II Año, nº 120) que se llama *seno de un ángulo* a la razón entre la ordenada de un punto que tenga a dicho ángulo como argumento, y al radio vector correspondiente a ese punto.



En símbolos:

$$\text{sen } \varphi = \frac{\textit{ordenada}}{\textit{radio vector}} = \frac{y}{\rho}$$

Ejemplo. — En la figura se tiene sen $\varphi = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$

Valor y signo del seno en los cuatro cuadrantes.—Como la abscisa, la ordenada y el radio vector son medidas de segmentos que forman (en general) un triángulo rectángulo del cual el radio vector es la hipotenusa, resulta:

$y < \rho$ y $x < \rho$, y como en algunos casos particulares (90° y 270°) es $\rho = y$, y en otros (0° y 180°) es $\rho = x$, se tiene:

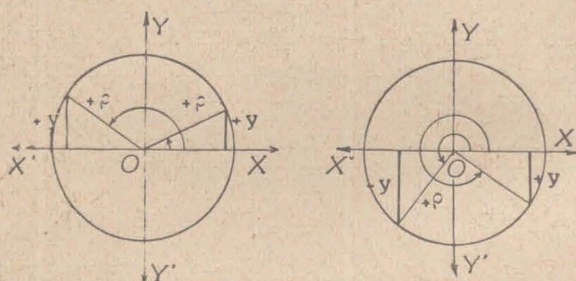
$$\boxed{y \leqq \rho} \quad \text{y que} \quad \boxed{x \leqq \rho.}$$

y por lo tanto

$$\boxed{\operatorname{sen} \varphi = \frac{y}{\rho} \leqq 1} \quad \text{es decir}$$

El seno de un ángulo es en valor absoluto menor que uno.

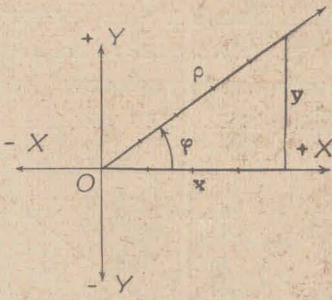
Teniendo en cuenta que el radio vector se considera siempre positivo y que la ordenada y es positiva en el primero y segundo cuadrantes y negativa en el tercero y el cuarto, resulta:



Signo del seno	1^er. cuad.	2°. cuad.	3^er. cuad.	4°. cuad.
	+	+	—	—

168. **Coseno.** — Definición. — Se llama *coseno de un ángulo* a la razón entre la abscisa de un punto que tenga a dicho ángulo como argumento y el radio vector correspondiente a ese punto.

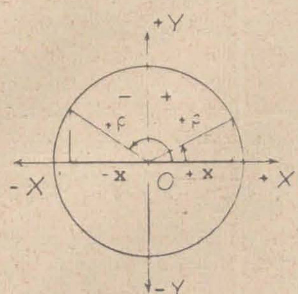
En símbolos:

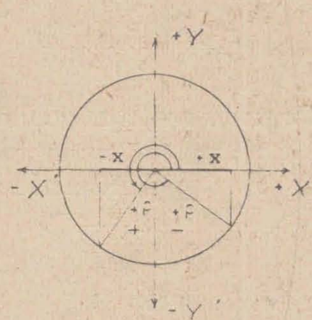


$$\cos \varphi = \frac{abscisa}{radio\ vector} = \frac{x}{\rho}$$

En la figura: $\cos \varphi = \frac{4}{5} = 0{,}8$

VALOR Y SIGNO DEL COSENO. — Teniendo en cuenta que la abscisa de un punto es *positiva* en el primero y cuarto cuadrantes y *negativa* en el segundo y tercero y que el radio vector se considera siempre positivo, resulta:





Signo del coseno	1er. cuad.	2o. cuad.	3er. cuad.	4o. cuad.
	+	—	—	+

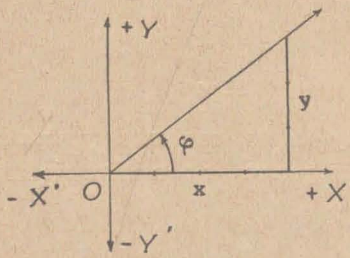
Por otra parte, como $x \leq \rho$,

resulta $\boxed{\cos \varphi = \frac{x}{\rho} \leqq 1}$ o sea que:

El coseno de un ángulo es en valor absoluto menor que 1.

169. **Tangente.** — Definición. — Se llama *tangente de un ángulo* a la razón entre la ordenada y la abscisa de un punto que tenga a ese ángulo como argumento.

En símbolos:

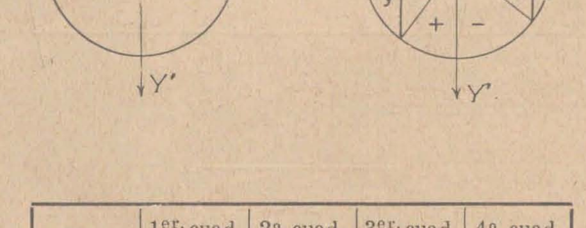


$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\textit{ordenada}}{\textit{abscisa}} = \frac{y}{x}$$

Ejemplo. — En la figura

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Valor y signo de la tangente. — Teniendo en cuenta que la abscisa y la ordenada tienen los *mismos signos* en el primer y tercer cuadrante y *signos contrarios* en el segundo y cuarto, resulta



Signo de la tangente	1er. cuad.	2º. cuad.	3er. cuad.	4º. cuad.
	+	—	+	—

Por otra parte como un cateto de un triángulo rectángulo puede ser mayor, igual o menor que el otro lo mismo sucede con las medidas de los mismos, o sea:

$\boxed{y \gtreqless x}$ y por lo tanto $\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{y}{x} \gtreqless 1}$ o sea:

La tangente de un ángulo es en valor absoluto mayor, igual o menor que 1, es decir, *puede tomar cualquier valor.*

170. **Cotangente.** — DEFINICIÓN. — Se llama *cotangente* de un ángulo a la razón entre la abscisa y la ordenada de un punto que tiene a dicho ángulo como argumento.

En símbolos: $\operatorname{cotg} \varphi = \dfrac{abscisa}{ordenada} = \dfrac{x}{y}$

EJEMPLO. — En la 1ª figura del párrafo anterior $\operatorname{cotg} \varphi = \dfrac{4}{3}$

VALOR Y SIGNO. — Como la abscisa y la ordenada de un punto tienen el *mismo signo* en el primer y tercer cuadrantes y *signos contrarios* en el segundo y cuarto, resulta (ver figura anterior) que:

Signo de la cotangente	1er. cuad.	2o. cuad.	3er. cuad.	4o. cuad.
	+	—	+	—

Por otra parte, como $y \gtreqless x$ es $\boxed{\operatorname{cotg} \varphi = \dfrac{x}{y} \lesseqgtr 1}$ o sea

La cotangente de un ángulo es en valor absoluto menor, igual o mayor que 1, es decir, *puede tomar cualquier valor.*

171. **Secante.** — Definición. — Se llama *secante* de un ángulo a la razón entre el radio vector de un punto que tenga a ese ángulo como argumento, y la abscisa correspondiente a ese punto.

En símbolos: $sec\ \varphi = \dfrac{radio\ vector}{abscisa} = \dfrac{\rho}{x}$

Ejemplo. — En la primera figura del nº 168 es $\sec \varphi = \dfrac{5}{4}$

Valor y signo. — Como la abscisa de un punto es *positiva* en el primero y cuarto cuadrante y *negativa* en el segundo y tercero, se tiene (ver figura segunda del nº 168):

Signo de la secante	1er. cuad.	2º. cuad.	3er. cuad.	4º. cuad.
	+	—	—	+

Por otra parte, como $x \leqq \rho$ es $\boxed{\sec \varphi = \dfrac{\rho}{x} \geqq 1}$ o sea:

La secante de un ángulo es en valor absoluto mayor o igual que 1.

172. **Cosecante.** — Definicion. — Se lama *cosecante* de un ángulo a la razón entre el radio vector de un punto que tenga a ese ángulo como argumento, y la ordenada correspondiente a ese punto.

En símbolos: $cosec\ \varphi = \dfrac{radio\ vector}{ordenada} = \dfrac{\rho}{y}$

Ejemplo.—En la primera figura del nº 167 es $\text{cosec}\ \varphi = \dfrac{5}{3} \cong 1{,}66$

Valor y signo. — Como la ordenada de un punto es positiva en el primero y segundo cuadrantes y negativa en el tercero y cuarto, se tiene (ver figura segunda del nº 167):

Signo de la cosecante	1er. cuad.	2º. cuad.	3er. cuad.	4º. cuad.
	+	+	—	—

Por otro parte, como $y \leq \rho$ es $\boxed{cosec\,\varphi = \frac{\rho}{y} \geqq 1}$ o sea:

La cosecante de un ángulo es en valor absoluto mayor o igual que 1.

173. **Relaciones fundamentales que ligan a las funciones trigonométricas de un mismo ángulo.** — Corolario. — *La secante de un ángulo es igual a la inversa de su coseno.*

En efecto: Siendo $sec\,\varphi = \frac{\rho}{x}$ por defin de secante

y $cos\,\varphi = \frac{x}{\rho}$ por definic. de coseno

como los números $\frac{\rho}{x}$ y $\frac{x}{\rho}$ son inversos

resulta $\boxed{sec\,\varphi = \frac{1}{cos\,\varphi}}$ por def. de núm. inver.

Corolario. — *La cosecante de un ángulo es igual a la inversa de su seno.*

Siendo $cosec\,\varphi = \frac{\rho}{y}$ por defin, de cosecante

y $sen\,\varphi = \frac{y}{\rho}$ por definición de seno

como los números $\frac{\rho}{y}$ y $\frac{y}{\rho}$ son inversos

resulta $\boxed{cosec\,\varphi = \frac{1}{sen\,\varphi}}$ por def. núms. inversos

COROLARIO. — *La tangente de un ángulo es igual al cociente del seno por el coseno del mismo*

En efecto: Siendo $sen\ \varphi = \dfrac{y}{\rho}$ por definición de seno

y $cos\ \varphi = \dfrac{x}{\rho}$ por definic. de coseno

es $\dfrac{sen\ \varphi}{cos\ \varphi} = \dfrac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \dfrac{y}{\rho} \cdot \dfrac{\rho}{x}$ por prop. unif. de div.

Simplific. queda $\dfrac{sen\ \varphi}{cos\ \varphi} = \dfrac{y}{x}$ y como $\dfrac{y}{x} = tg\ \varphi$

por definición de tangente

resulta $\boxed{tg\ \varphi = \dfrac{sen\ \varphi}{cos\ \varphi}}$

COROLARIO. — *La cotangente de un ángulo es igual al cociente del coseno por el seno del mismo.*

En efecto: Siendo $cos\ \varphi = \dfrac{x}{\rho}$ por definic. de coseno

$sen\ \varphi = \dfrac{y}{\rho}$ por definición de seno

es $\dfrac{cos\ \varphi}{sen\ \varphi} = \dfrac{\frac{x}{\rho}}{\frac{y}{\rho}} = \dfrac{x}{\rho} \cdot \dfrac{\rho}{y}$ por prop. unif. de div.

Simplific. queda $\dfrac{cos\ \varphi}{sen\ \varphi} = \dfrac{x}{y}$ y como $\dfrac{x}{y} = cotg\ \varphi$

resulta $\boxed{cotg\ \varphi = \dfrac{cos\ \varphi}{sen\ \varphi}}$

Consecuencia. — De los dos últimos corolarios resulta que:

La tangente y la cotangente de un ángulo son números inversos.

En símbolos: $tg\ \varphi = \dfrac{1}{cotg\ \varphi}$; $cotg\ \varphi = \dfrac{1}{tg\ \varphi}$

Además de estas relaciones se verifica entre las funciones trigonométricas de un ángulo la siguiente llamada:

Relación pitagórica. — *El cuadrado del seno de un ángulo más el cuadrado de su coseno es igual a uno.*

En símbolos: $\boxed{sen^2\ \varphi + cos^2\ \varphi = 1}$ (*)

En efecto: Siendo $sen\ \varphi = \dfrac{y}{\rho}$ es $sen^2\ \varphi = \dfrac{y^2}{\rho^2}$

y $cos\ \varphi = \dfrac{x}{\rho}$ es $cos^2\ \varphi = \dfrac{x^2}{\rho^2}$

Sumando m. a m. da $sen^2\ \varphi + cos^2\ \varphi = \dfrac{y^2 + x^2}{\rho^2}$

y como $y^2 + x^2 = \rho^2$ por el Teorema de Pitágoras, se tiene

$$sen^2\ \varphi + cos^2\ \varphi = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

174. **Hallar las funciones trigonométricas de un ángulo conociendo una de ellas.** — Problema I. — *Calcular las funciones trigonométricas de un ángulo conociendo el seno del mismo.*

Dato: sen φ Incógnitas: cos φ, tg φ, cotg φ, sec φ, cosec φ.

(*) $sen^2\ \varphi$ y $cos^2\ \varphi$ significan respectivamette $(sen\ \varphi)^2$ y $(cos\ \varphi)^2$

Ejms. Si $sen\ \varphi = 0{,}6$ y $cos\ \delta = \dfrac{1}{2}$ es $sen^2\ \varphi = 0.6^2 = 0.36$ y $cos^2\ \delta = \dfrac{1}{4}$

Solución. — Siendo $\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ es $\boxed{\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi}}$

y como $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$ resulta $\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \pm\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi}}}$

pero $\operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$ luego $\boxed{\operatorname{cotg}\varphi = \pm\dfrac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi}}{\operatorname{sen}\varphi}}$

$\sec\varphi = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ » $\boxed{\sec\varphi = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi}}}$

$$\boxed{\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}}$$

Ejemplo. — Si $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{2}{3}$ es

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{2}{3}}{\pm\frac{\sqrt{5}}{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad ; \quad \operatorname{cotg}\varphi = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sec\varphi = \frac{1}{\pm\frac{\sqrt{5}}{3}} = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{5} \quad ; \quad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{3}{2}$$

Problema II. — *Calcular las funciones trigonométricas de un ángulo conociendo el coseno del mismo.*

Dato: $\cos\varphi$ Incógnitas: $\operatorname{sen}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{cotg}\varphi$, $\sec\varphi$, $\operatorname{cosec}\varphi$.

Solución. — Siendo la secante de un ángulo la inversa de su coseno, se tiene:

$$\boxed{\sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}}$$

Además, como $\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, es $\boxed{\operatorname{sen} \varphi = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}$

y como $\operatorname{cosec} \varphi = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \varphi}$ es $\boxed{\operatorname{cosec} \varphi = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}}$

y $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}$ es $\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \pm \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi}}$

$\operatorname{cotg} \varphi = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$ es $\boxed{\operatorname{cotg} \varphi = \pm \dfrac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}}$

Ejemplo. — Si $\cos \varphi = \dfrac{3}{4}$ es $\sec \varphi = \dfrac{4}{3}$

$$\operatorname{sen} \varphi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \pm \sqrt{\frac{7}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \; ;$$

$$\operatorname{cosec} \varphi = \pm \frac{4}{\sqrt{7}} = \pm \frac{4\sqrt{7}}{7} \; ; \; \operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\operatorname{cotg} \varphi = \pm \frac{3}{\sqrt{7}} = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Problema III. — *Calcular las funciones trignonométricas de un ángulo conociendo la tangente del mismo.*

Dato: $\operatorname{tg} \varphi$ Incógnitas: $\operatorname{sen} \varphi$, $\cos \varphi$, $\operatorname{cotg} \varphi$, $\sec \varphi$, $\operatorname{cosec} \varphi$.

Solución. — Por una relación anterior, se tiene $\boxed{\operatorname{cotg} \varphi = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \varphi}}$

Además siendo $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}$ es $\operatorname{tg}^2 \varphi = \dfrac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$

y sumando 1 a ambos miembros da

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

y como $\operatorname{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ resulta $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \dfrac{1}{\cos^2 \varphi}$

de donde $\cos^2 \varphi = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$

luego $$\boxed{\cos \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}}$$

Como $\sec \varphi = \dfrac{1}{\cos \varphi}$ es $\boxed{\sec \varphi = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$

Por otra parte, siendo $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}$ es $\operatorname{sen} \varphi = \cos \varphi \operatorname{tg} \varphi$,

luego $$\boxed{\operatorname{sen} \varphi = \pm \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}}$$

y como $\operatorname{cosec} \varphi = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \varphi}$ es $\boxed{\operatorname{cosec} \varphi = \pm \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\operatorname{tg} \varphi}}$

Ejemplo. — Si $\operatorname{tg} \varphi = 2$ es $\operatorname{cotg} \varphi = \dfrac{1}{2}$; $\cos \varphi = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2^2}} =$

$= \pm \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; $\sec \varphi = \sqrt{5}$; $\operatorname{sen} \varphi = \pm \dfrac{2}{\sqrt{1 + 2^2}} =$

$= \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \pm \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{cosec} \varphi = \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

175. **Seno y coseno de la suma de dos ángulos.** — Puede demostrarse que: *El seno de la suma de dos ángulos es igual al seno del primero por el coseno del segundo más el coseno del primero por el seno del segundo.*

En símbolos: $\boxed{\text{sen}\,(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}$ donde α y β son ángulos cualesquiera.

Ejemplos. — $\text{Sen}\,(30° + 45°) = \text{sen}\,30° \cos 45° + \cos 30°\,\text{sen}\,45°$

$$\text{sen}\,(120° + 210°) = \text{sen}\,120° \cos 210° + \cos 120°\,\text{sen}\,210°$$

También puede demostrarse que: *El coseno de la suma de dos ángulos es igual al producto de los cosenos de los sumandos menos el producto de los senos de los mismos.*

En símbolos: $\boxed{\cos\,(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$ siendo α y β ángulos cualesquiera.

Ejemplos: $\cos\,(90° + 60°) = \cos 90° \cos 60° - \text{sen}\,90° \cos 60°$

$$\cos\,(450° + 30°) = \cos 450° \cos 30° - \text{sen}\,450°\,\text{sen}\,30°$$

176. **Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos.** — Tratemos de hallar el $\text{sen}\,(\alpha - \beta)$. Como $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ y la expresión del seno de la suma de dos ángulos es válida para cualesquiera que sean los ángulos α y β, se tiene:

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,[\alpha + (-\beta)] = \text{sen}\,\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha\,\text{sen}\,(-\beta)$$

Por otra parte es fácil observar que los cosenos de dos ángulos iguales en valor absoluto y de signo contrario son iguales y que los senos de esos ángulos son números contrarios, resulta

$\cos(-\beta) = \cos\beta$ $\qquad$ $\text{sen}\,(-\beta) = -\text{sen}\,\beta,$ $\qquad$ luego:

$$\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta + \cos\alpha\,(-\text{sen}\,\beta)$$

$\boxed{\text{sen}\,(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}$ o sea que:

El seno de la diferencia de dos ángulos es igual al seno del primero por el coseno del segundo menos el coseno del primero por el seno del segundo.

EJEMPLOS: $\text{sen}\,(80° - 39°) = \text{sen}\,80° \cos 39° - \cos 80° \,\text{sen}\,39°$

$\text{sen}\,(90° - 190°) = \text{sen}\,90° \cos 190° - \cos 90° \,\text{sen}\,190°$

Análogamente resulta

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha \cos(-\beta) - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,(-\beta),$$

y teniendo en cuenta lo dicho respecto del seno y del coseno de dos ángulos iguales en valor absoluto y de signo contrario, se tiene:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,(-\text{sen}\,\beta)$$

luego $\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$ o sea que:

El coseno de la diferencia de dos ángulos es igual al producto de los cosenos de los mismos más el producto de los senos.

EJEMPLOS: $\cos(50° - 10°) = \cos 50° \cos 10° + \text{sen}\,50°\,\text{sen}\,10°$

$\cos(840° - 1000°) = \cos 840° \cos 1000° + \text{sen}\,840°\,\text{sen}\,1000°$

177. **Seno y coseno del duplo de un ángulo.** — Tratemos de hallar el seno y el coseno del duplo de un ángulo α, por ejemplo.

Siendo $2\alpha = \alpha + \alpha$

es $\text{sen}\,2\alpha = \text{sen}\,(\alpha + \alpha) = \text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha.$

luego $\boxed{\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$ o sea que:

El seno del duplo de un ángulo es igual al duplo del producto del seno de ese ángulo por el coseno del mismo.

EJEMPLOS: $\text{sen}\,2.80° = 2\,\text{sen}\,80° \cos 80°$

$\text{sen}\;\;60° = \text{sen}\,2.30° = 2\,\text{sen}\,30° \cos 30°.$

Análogamente se tiene:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha$$

o sea que:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

El coseno del duplo de un ángulo es igual a la diferencia entre el cuadrado del coseno y el del seno de ese ángulo.

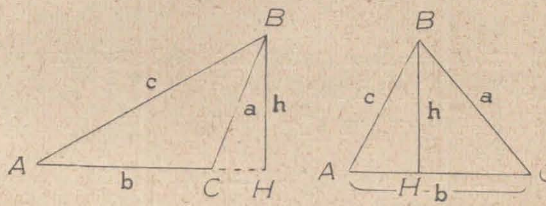
EJEMPLOS: $\cos(2 \,.\, 103^\circ) = \cos^2 103^\circ - \operatorname{sen}^2 103^\circ$

$\cos 320^\circ = \cos(2 \,.\, 160^\circ) = \cos^2 160^\circ - \operatorname{sen}^2 160^\circ.$

178. **Area de un triángulo.** — Tratemos de encontrar la superficie de un triángulo cualquiera ABC.

Siendo $$Sup\ \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2}\, b \,.\, h \qquad [1]$$

tratemos de hallar el valor de h en función de los elementos del triángulo dado.



Como h es el cateto $\overline{BM}$ opuesto al ángulo $\hat{A}$ en el $\overset{\triangle}{BHA}$, y *un cateto es igual a la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al mismo* (*Geom. Comerc.*, II año, nº 124), se tiene:

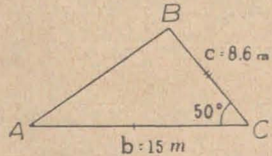
$$h = c \,.\, \operatorname{sen} \hat{A}$$

y reemplazando en [1] resulta:

$$\boxed{Sup.\ \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2}\, b \,.\, c \operatorname{sen} \hat{A}}$$

donde podemos observar que A es el ángulo comprendido entre los lados b y c. Puede demostrarse que esta fórmula es completamente general y se expresa diciendo:

La superficie de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.



Ejemplo. — *Calcular con los datos del croquis la superficie del triángulo ABC.*

$$Sup.\ \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2} \,.\, 15 \text{ m} .\, 8{,}60 \text{ m} .\, \text{sen } 50^\circ,$$

y como sen $50^\circ \simeq 0{,}766$

resulta $Sup.\ \overset{\triangle}{ABC} \simeq \dfrac{1}{2} \,.\, 15 \text{ m } 8{,}60 \text{ m } 0{,}766 = 49{,}4070 \text{ m}^2.$

Caso particular. — Si el triángulo es rectángulo en A como sen A = sen 90° = 1, se tiene:

$Sup.\ \overset{\triangle}{ABC} = \dfrac{1}{2}\, b \,.\, c \,.\, \text{sen } 90^\circ = \dfrac{1}{2}\, b\, c \,.\, 1 = \dfrac{1}{2}\, b\, c$ que es la misma fórmula que nos da la Geometría plana.

179. **Descripción de las tablas de los logarítmos de las funciones trigonométricas de un ángulo.** — Se llaman tablas *logarítmico trigonométricas* a los cuadros donde están consignados los logaritmos de las funciones trigonométricas de los ángulos desde 0° hasta 90°.

Como, en general, los logaritmos de esas funciones tienen infinitas cifras decimales, las tablas sólo dan las primeras de esas cifras, es decir, valores aproximados de las mismas. A continuación descri-

23 deg.

'	Sinus	D	Coséc.	Tang.	D	Cot.	Séc.	D	Cosin.	'
0	9,59188	30	0,40812	9,62785	35	0,37215	0,03597	6	9,96403	60
1	9,59218	29	0,40782	9,62820	35	0,37180	0,03603	5	9,96397	59
2	9,59247	30	0,40753	9,62855	35	0,37145	0,03608	5	9,96392	58
3	9,59277	30	0,40723	9,62890	36	0,37110	0,03613	6	9,96387	57
4	9,59307	29	0,40693	9,62926	35	0,37074	0,03619	5	9,96381	56
5	9,59336	30	0,40664	9,62961	35	0,37039	0,03624	6	9,96376	55
6	9,59366	30	0,40634	9,62996	35	0,37004	0,03630	5	9,96370	54
7	9,59396	29	0,40604	9,63031	35	0,36969	0,03635	5	9,96365	53
8	9,59425	30	0,40575	9,63066	35	0,36934	0,03640	6	9,96360	52
9	9,59455	29	0,40545	9,63101	34	0,36899	0,03646	5	9,96354	51
10	9,59484	30	0,40516	9,63135	35	0,36865	0,03651	6	9,96349	50
11	9,59514	29	0,40486	9,63170	35	0,36830	0,03657	5	9,96343	49
12	9,59543	30	0,40457	9,63205	35	0,36795	0,03662	5	9,96338	48
13	9,59573	29	0,40427	9,63240	35	0,36760	0,03667	6	9,96333	47
14	9,59602	30	0,40398	9,63275	35	0,36725	0,03673	5	9,96327	46
15	9,59632	29	0,40368	9,63310	35	0,36690	0,03678	6	9,96322	45
16	9,59661	29	0,40339	9,63345	34	0,36655	0,03684	5	9,96316	44
17	9,59690	30	0,40310	9,63379	35	0,36621	0,03689	6	9,96311	43
18	9,59720	29	0,40280	9,63414	35	0,36586	0,03695	5	9,96305	42
19	9,59749	29	0,40251	9,63449	35	0,36551	0,03700	6	9,96300	41
20	9,59778	30	0,40222	9,63484	35	0,36516	0,03706	5	9,96294	40
21	9,59808	29	0,40192	9,63519	34	0,36481	0,03711	5	9,96289	39
22	9,59837	29	0,40163	9,63553	35	0,36447	0,03716	6	9,96284	38
23	9,59866	29	0,40134	9,63588	35	0,36412	0,03722	5	9,96278	37
24	9,59895	29	0,40105	9,63623	34	0,36377	0,03727	6	9,96273	36
25	9,59924	30	0,40076	9,63657	35	0,36343	0,03733	5	9,96267	35
26	9,59954	29	0,40046	9,63692	34	0,36308	0,03738	6	9,96262	34
27	9,59983	29	0,40017	9,63726	35	0,36274	0,03744	5	9,96256	33
28	9,60012	29	0,39988	9,63761	35	0,36239	0,03749	6	9,96251	32
29	9,60041	29	0,39959	9,63796	34	0,36204	0,03755	5	9,96245	31
30	9,60070	29	0,39930	9,63830	35	0,36170	0,03760	6	9,96240	30
31	9,60099	29	0,39901	9,63865	34	0,36135	0,03766	5	9,96234	29
32	9,60128	29	0,39872	9,63899	35	0,36101	0,03771	6	9,96229	28
33	9,60157	29	0,39843	9,63934	34	0,36066	0,03777	5	9,96223	27
34	9,60186	29	0,39814	9,63968	35	0,36032	0,03782	6	9,96218	26
35	9,60215	29	0,39785	9,64003	34	0,35997	0,03788	5	9,96212	25
36	9,60244	29	0,39756	9,64037	35	0,35963	0,03793	6	9,96207	24
37	9,60273	29	0,39727	9,64072	34	0,35928	0,03799	5	9,96201	23
38	9,60302	29	0,39698	9,64106	34	0,35894	0,03804	6	9,96196	22
39	9,60331	28	0,39669	9,64140	35	0,35860	0,03810	5	9,96190	21
40	9,60359	29	0,39641	9,64175	34	0,35825	0,03815	6	9,96185	20
41	9,60388	29	0,39612	9,64209	34	0,35791	0,03821	5	9,96179	19
42	9,60417	29	0,39583	9,64243	35	0,35757	0,03826	6	9,96174	18
43	9,60446	28	0,39554	9,64278	34	0,35722	0,03832	6	9,96168	17
44	9,60474	29	0,39526	9,64312	34	0,35688	0,03838	5	9,96162	16
45	9,60503	29	0,39497	9,64346	35	0,35654	0,03843	6	9,96157	15
46	9,60532	29	0,39468	9,64381	34	0,35619	0,03849	5	9,96151	14
47	9,60561	28	0,39439	9,64415	34	0,35585	0,03854	6	9,96146	13
48	9,60589	29	0,39411	9,64449	34	0,35551	0,03860	5	9,96140	12
49	9,60618	28	0,39382	9,64483	34	0,35517	0,03865	6	9,96135	11
50	9,60646	29	0,39354	9,64517	35	0,35483	0,03871	6	9,96129	10
51	9,60675	29	0,39325	9,64552	34	0,35448	0,03877	5	9,96123	9
52	9,60704	28	0,39296	9,64586	34	0,35414	0,03882	6	9,96118	8
53	9,60732	29	0,39268	9,64620	34	0,35380	0,03888	5	9,96112	7
54	9,60761	28	0,39239	9,64654	34	0,35346	0,03893	6	9,96107	6
55	9,60789	29	0,39211	9,64688	34	0,35312	0,03899	6	9,96101	5
56	9,60818	28	0,39182	9,64722	34	0,35278	0,03905	5	9,96095	4
57	9,60846	29	0,39154	9,64756	34	0,35244	0,03910	6	9,96090	3
58	9,60875	28	0,39125	9,64790	34	0,35210	0,03916	5	9,96084	2
59	9,60903	28	0,39097	9,64824	34	0,35176	0,03921	6	9,96079	1
60	9,60931		0,39069	9,64858		0,35142	0,03927		9,96073	0
	Cosin.	D	Séc.	Cot.	D	Tang.	Coséc.	D	Sinus.	'

Part. prop.

″	30	35	5
6	3	4	1
7	4	4	1
8	4	5	1
9	5	5	1
10	5	6	1
20	10	12	2
30	15	18	3
40	20	23	3
50	25	29	4

″	29	34	6
6	3	3	1
7	3	4	1
8	4	5	1
9	4	5	1
10	5	6	1
20	10	11	2
30	15	17	3
40	19	23	4
50	24	28	5

Part. prop.

66 deg.

bimos la tabla nº II de J. Hoüel, que da esos logaritmos con su característica y la mantisa con cinco decimales.

La tabla consta de 45 páginas. En la primera figuran los logaritmos de las funciones trigonométricas de 0° a 1° y de 81° a 90°; en la segunda página los de 1° a 2° y de 88° a 89°, etc., y en la última los de 44° a 45° y de 45° a 46° variando en la misma forma. Cada página consta de 11 columnas; en la primera de la izquierda están escritos los minutos, desde 0 a 60, que se agregan al número de grado que figura en la parte superior de las mismas y en la última de la derecha los números de minutos, de 60 a 0, que es necesario agregar al número de grados que se indica en la parte inferior.

En las columnas restantes figuran los logaritmos de las seis funciones trigonométricas de esos ángulos y las diferencias entre dos consecutivos de cada columna.

Las columnas llevan en la parte superior el nombre de una función o de una cofunción, y en la parte inferior el de la respectiva cofunción. Así en la página que reproducimos se observa que en la columna que arriba dice *sin* (pues en francés el seno se escribe sinus) debajo dice *cosin*, etc.; donde dice *cosec*, debajo dice *sec*. Además las columnas que dan las diferencias que están indicadas con la letra D, se refieren indistintamente a las diferencias de los logaritmos de las funciones indicadas en las columnas que están a su izquierda y a su derecha.

Como, en general, los senos y cosenos de un ángulo son números menores que uno, lo mismo que las tangentes de los ángulos menores que 45° y las cotangentes de los mayores que 45°, las características de sus logaritmos son negativas, pero, por razones tipográficas, se ha omitido la escritura del signo menos que tendría que colocarse encima de esa característica, aumentando a esos logaritmos en 10 unidades. Por eso en la práctica se deberán reemplazar las características 9, 8, 7 y 6 de las columnas, *sin*, *cosin*, *tang* y *cot* por $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ y $\overline{4}$ respectivamente.

Así en lugar de log sen 23° 15′ = 9,59632 escribiremos $\overline{1}$,59632.

180. **Uso de las tablas.** — PROBLEMA DIRECTO. — *Calcular el loritmo de una de las funciones trigonométricas de un ángulo dado.*

Primer caso. — *El ángulo está comprendido entre 0° y 90° y consta de un número entero de grados y minutos.*

El logaritmo de una de las funciones trigonométricas de un ángulo menor que 45°, se encuentra en la intersección de la columna encabezada por el nombre de la función cuyo valor se busca, con la fila que comienza con el número de minutos de dicho ángulo.

Ejemplos. — *Log sen* $23° 24' = \overline{1},59895$; *log cotg* $23° 52' = 0{,}35414$.

Si el ángulo es mayor que 45° el logaritmo de una de sus funciones trigonométricas se encuentra como en el caso anterior buscando el nombre de la función en la parte inferior de las columnas y el número de minutos en la de la derecha.

Ejemplos. — *Log sen* $66° 39' = \overline{1},96289$; *log sec* $66° 08' = 0{,}39296$.

Segundo caso. — *El ángulo está comprendido entre 0° y 90° y consta de un número entero de grados, minutos y segundos.*

En este caso debe hacerse una *interpolación* análoga a la enseñada al tratar el segundo caso del manejo de la tabla de los logaritmos de los números (pág. 58), teniendo en cuenta que la diferencia entre dos ángulos consecutivos es de $1' = 60''$ y que es necesario *restar la parte proporcional correspondiente a los segundos cuando se trata de un coseno, de una cotangente o de una cosecante*, pues estas cofunciones *disminuyen* al *aumentar* el ángulo de 0° a 90°. En los ejemplos que siguen adoptamos la misma disposición práctica utilizada para los logaritmos de los números.

Ejemplo I. — *Hallar el log tg* $23° 17' 40''$.

$60'' \text{ ——— } 35$

$40'' \text{ ——— } x$

$x = \frac{40 \cdot 35}{60} = 23$

para tg	$23° 17'$		1,63379
D =	35	$40''$	+ 23
log tg	$23° 17' 40''$	=	1,63402

Ejemplo II. — *Hallar el log cosec* $66° 20' 10''$

$60 \text{ ——— } 6$

$10 \text{ ——— } x$

$x = \frac{61.0}{60} = 1$

para	$66° 20'$		0,03815
D = 6		$10''$	— 1
log cosec	$60° 20' 10''$	=	0,03814

Puede evitarse el cálculo de la parte proporcional x utilizando las tablas marginales que figuran en la columna encabezada por *Part. prop.* que se manejan como se ha indicado al tratar el manejo de las tablas de los logaritmos de los números (pág. 58).

PROBLEMA INVERSO. — *Calcular un ángulo conociendo el logaritmo de una de sus funciones trigonométricas.*

EJEMPLO I. — *Hallar el ángulo X sabiendo $\log \operatorname{sen} X = \overline{1},60302$.*

Teniendo en cuenta que en la tabla de Hoüel el $\overline{1}$ se transforma en 9, buscando en la columna que dice *sin* en la parte superior encontramos que 9,60302 es el log sen 23° 38′; luego resulta que el ángulo buscado es $X = 23°\ 38'$.

EJEMPLO II. — *Hallar X sabiendo $\log tg\ X = 0,35585$.*

Como este valor figura en columna que dice *tg* en la parte inferior, leemos el número de grados en esa misma parte y el de minutos en la columna de la derecha y obtenemos que el ángulo buscado es

$$X = 66°\ 13'.$$

EJEMPLO III. — *Hallar X sabiendo que $\log \sec X = 0,03764$.*

Buscando en las columnas de la *sec* no encontramos el valor dado, pues está comprendido entre dos consecutivos, 0,03760 y 0,03766, por lo tanto, para hallar el ángulo buscado, interpolaremos de manera análoga a la explicada (ejemplos I y II del 2° caso) planteando la proporción en sentido inverso. Adoptando la disposición práctica conocida tenemos

$$\begin{array}{l|l} 6 \text{ ——— } 60'' & \textit{para } 0,03760 \text{ — } \quad 23°\ 30' \\ 4 \text{ ——— } x & D = 6 \quad 4 \text{ — } \qquad + 40'' \\ x = \dfrac{4.60}{6} = 40'' & \textit{para } 0,03764 \text{ — } \quad 23°\ 30'\ 40'' = X \end{array}$$

EJEMPLO IV. — *Hallar X sabiendo que $\log \cot X = \overline{1},64203$.*

Procediendo como en el ejemplo anterior tendríamos

$$\begin{array}{l|l} 34 \text{ ——— } 60'' & \textit{para } \overline{1},64175 \text{ — } \quad 66°\ 20' \\ 28 \text{ ——— } x & D = 34 \quad 28 \text{ — } \qquad - 49'' \\ x = \dfrac{28.60''}{34} = 49'' & \overline{1},64203 \text{ — } \quad 66°\ 19'\ 11'' = X \end{array}$$

OBSERVACIONES. I. — La tabla explicada sirve para calcular el logaritmo del valor absoluto de las funciones trigonométricas de ángulos mayores que 90°, pues puede demostrarse que: *dado un ángulo cualquiera existe otro positivo y menor que 90° cuyas funciones trigonométricas son, en valor absoluto, iguales a las del dado.*

II. — Cuando determinamos a un ángulo por medio del logaritmo de una de sus funciones trigonométricas, hemos supuesto que pertenece al primer cuadrante, pues hay otros ángulos distintos que tienen esa misma función trigonométrica.

Aplicaciones. — I. — *Dibujar los ángulos siguientes: a) 5 R; b) 7 R; c) 9 R; d) — 3 R; e) 11 R.*

II. — *¿Qué ángulo describe el minutero de un reloj: a) en 30 min.; b) en 1 h 10 min; c) en 3 h; d) al pasar de las 12 h 40 min a las 13 h 15 min; e) en 24 h.*

III. — *Expresar en radianes los ángulos de: a) 30°; b) 50°; c) 75°; d) 135°; e) 420°; f) 540°; g) 1080°; h) — 270°; i) — 210°.*

IV. — *Expresar en grados, minutos y segundos los ángulos de: a)* $\frac{\pi}{6}$ *radianes; b)* $4\,\frac{\pi}{3}$ *radianes; c)* $\frac{\pi}{9}$ *radianes; d)* $6\,\pi$ *radianes; e)* $\frac{9\,\pi}{5}$ *radianes; f) 22 radianes.*

V. — *Calcular aproximadamente, empleando la regla graduada y el transportador, las funciones trigonométricas de los ángulos de: a) 78°; b) 145°; c) 218°; d) 320°; e) 120°; f) — 405°; g) — 180°.*

VI. — *Dibujar un ángulo sabiendo que: a) su seno es 3/5; b) su coseno 2/3; c) su tangente 1/2; d) su cotangente 2; e) su secante 3/2; f) su cosecante es 4/3.*

VII. — *Calcular las funciones trigonométricas de un ángulo x sabiendo que: a)* $\operatorname{sen} x = 1/2$; *b)* $\cos x = 2/3$; *c)* $\operatorname{tg} x = 3/5$; *d)* $\operatorname{cotg} x = -3/2$; *e)* $\sec x = 15/8$; *f)* $\operatorname{cosec} x = -\sqrt{2}$.

VIII. — *¿Cuál es el signo de: a) sen 120°; b) cos — 45°; c) tg 208°; d) cotg 415°; e) sec 220°; f) cosec — 345°.*

IX. — *Hallar* $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, *sabiendo que: a)* $\operatorname{sen} \alpha = 1/2$, $\cos \beta = 3/4$; *b)* $\operatorname{sen} \alpha = 2/5$, $\operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\operatorname{sen} \alpha = 5/6$, $\cos \beta = 1/3$; *d)* $\operatorname{sen} \alpha = 0$, $\cos \beta = 1$; *e)* $\cos \alpha = 1/4$, $\cos \beta = 3/5$.

X. — *Hallar las funciones trigonométricas de los ángulos de 75° y de 15° sabiendo que:* $sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *y* $cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

XI. — *Hallar las funciones trigonométricas de: a) 60°, sabiendo que sen 30° = 1/2, b) las de 90°, sabiendo que* $cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *c) de 120°, sabiendo que cos 60° = 1/2.*

XII. — *Calcular, empleando logaritmos, el área del triángulo ABC sabiendo que: a)* $b = 181\ m$, $c = 205\ m$, $\alpha = 50°\ 45'\ 20''$; *b)* $a = 508{,}47\ m$, $b = 602{,}64\ m$, $\gamma = 82°\ 40'\ 50''$; *c)* $a = b = 146\ m$, $\gamma = 49°\ 50'\ 42''$; *d)* $a = 82{,}64\ Km$, $c = 1285{,}6\ Dm$, $\beta = 56°\ 40'$; *e)* $a = 1848{,}64\ m$, $b = 2046{,}58\ m$, $\gamma = 60°\ 12'\ 40''$.

XIII. — *Hallar los logaritmos de las siguientes funciones trigonométricas: a) sen 28° 30′ 12″; b) cos 76° 40′ 28″; c) tg 39° 59′ 41″; d) cotg 50° 41′ 56″; d) sec 40° 12′ 18″; e) cosec 59° 59′ 10″.*

XIV. — *Hallar un ángulo x sabiendo que: a)* $\log sen\ x = \bar{1},63497$; *b)* $\log cos\ x = \bar{1},37498$; *c)* $\log tg\ x = 0,49198$; *d)* $cotg\ x = \bar{1},63991$; *e)* $\log sec\ x = 0,18486$; *f)* $\log cosec\ x = 0,61145$.

XV. — *Calcular la superficie de: a) un paralelogramo sabiendo que dos de sus lados tienen 15 m y 45 m de longitud, y el ángulo comprendido es de 50° 26′ 40″; b) de un rombo de 56 cm de lado y un ángulo de 70°.*

INDICE

CAPÍTULO I. — **Radicales** . . . . de pág. 5 a 32

Definición de la radicación. Regla de los signos. Valor absoluto de la raíz. Valor aritmético de los radicales: Raíz de un producto, de un cociente, de una potencia y de una raíz. Recíproca de las mismas. El valor de un radical no altera si se multiplican o dividen exactamente por un mismo número el índice y el exponente. Simplificación de radicales: Reducción a común índice; mínimo común índice. Extracción de factores fuera del radical. Introducción de factores dentro del radical. Operaciones con radicales. Radicales semejantes: Definición. Suma y resta de radicales semejantes de radicales cualesquiera. Multiplicación y división de radicales, de igual índice y de índice distinto. Racionalización de denominadores: Definición. Caso en que el denominador es radical cuadrático o un radical cualquiera. Caso en que el denominador es un binomio con un término racional y el otro irracional cuadrático, o ambos irracionales cuadráticos. Ejercicios.

CAPÍTULO II. — **Potencias de exponente fraccionario** . . . . de pág. 33 a 40

Definición de potencia exponente fraccionario y positivo. Las potencias de exponente fraccionario y positivo tienen las mismas propiedades fundamentales que las potencias de exponente entero. Definición de potencia de exponente fraccionario y negativo. Propiedades fundamentales, (las mismas que para las potencias de exponente entero). Función exponencial. Definición. Gráfico de la función exponencial.

CAPÍTULO III. — **Logaritmos** . . . . de pág. 41 a 76

Definición. Logaritmo de la base, de uno, y de una potencia de la base. Función logarítmica: Su representación gráfica. Relacionar la función logarítmica con la exponencial. Propiedades de los logaritmos. Propiedad uniforme; no distributiva con respecto a la suma, resta, multiplicación y división. Logaritmo de un producto, de un cociente, de una potencia y de una raíz. Logaritmos decimales: Definición. Característica y mantisa. Deducción de las reglas para la determinación de la característica. La mantisa del logaritmo decimal de un número, no altera cuando se multiplica o divide el número por la unidad seguida de ceros. Tablas de logaritmos: Descripción de una tabla de logaritmos de simple entrada y de doble entrada. Manejo de las mismas. Aplicación de los logaritmos al cálculo de productos, cocientes, potencias y raíces. Cologaritmo: Definición. Aplicación del cologaritmo al cálculo de cocientes. Multiplicación y división de un logaritmo con característica positiva o negativa por un número natural. Cálculo de expresiones en que figuren productos, cocientes, potencias y raíces. Escalas logarítmicas: Aplicación de las mismas para la confección de gráficos. Ejercicios y problemas.

CAPÍTULO IV. — **Números complejos** . . . . de pág. 77 a 87

Números complejos imaginarios: Definición. Interpretaciones concretas. Números imaginarios puros. Unidad imaginaria. Números complejos generales (reales o imaginarios). Igualdad de números complejos. Operaciones con números complejos: Suma y resta de números complejos cualesquiera. Forma binómica. Complejos conjugados. Suma y resta de números complejos conjugados. Suma y resta de números imaginarios puros. Multiplicación de números complejos de forma binómica: Definición del producto de la unidad imaginaria por sí misma. Producto de números complejos cualesquiera, y de números complejos conjugados. Producto de números imaginarios puros. Cuadrado de un número complejo. Potencias naturales sucesivas de la unidad imaginaria. Raíz cuadrada de un número complejo. La raíz cuadrada de un número real negativo es igual al producto de más o menos la raíz cuadrada de su valor absoluto por i. La raíz cuadrada de menos uno, como caso particular.

CAPÍTULO V. — **Ecuaciones de segundo grado con una incógnita** . de pág. 88 a 111

Definición. Ecuaciones incompletas; resolución de las mismas. Ecuación completa reducida; deducción de la fórmula. Aplicaciones. Ecuación general completa; deducción de la fórmula, aplicaciones. Relaciones que ligan las raíces con los coeficientes de la ecuación de segundo grado: Suma y producto de las raíces. Reconstrucción de la ecuación dadas las raíces. Aplicación de las ecuaciones de segundo grado con una incógnita a la resolución de problemas de índole comercial.

CAPÍTULO VI. — **Ecuaciones que se reducen a las de segundo grado** pág. 112 a 119

Ecuaciones trinomias, en particular bicuadradas. Ecuaciones recíprocas de tercero y cuarto grado que se reducen a las de segundo por factoreo o mediante una incógnita auxiliar. Ejercicios.

CAPÍTULO VII. — **Funciones algebraicas más usuales de una variable** pág. 120 a 154

Trinomio de segundo grado: Definición. Descomposición del trinomio de segundo grado en factores de primer grado. Aplicaciones a la simplificación de fracciones. Representación gráfica del trinomio de segundo grado. Resolución gráfica de una ecuación de segundo grado y de una ecuación de grado superior al segundo, preferentemente de la forma $ax^m + bx + c = 0$

Aproximaciones sucesivas por simple interpolación. Reconocimiento de las curvas más usuales: Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, por el tipo de su ecuación. Verificación mediante la representación gráfica. Resolución analítica y gráfica de un sistema de ecuaciones constituído por una de segundo grado y otra de primero. Resolución gráfica del sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia o hipérbola equilátera. Ejercicios.

CAPÍTULO VIII. — **Análisis combinatorio** . . . . de pág. 155 a 181

Definición. Formación y número de arreglos que se obtienen con *m* elementos tomados de *n* en *n*. Fórmula correspondiente. Número de arreglos en el caso que $n = m$. Permutaciones de *n* elementos: Definiciones. Fórmula correspondiente: Fórmulas usuales para expresar el número de permutaciones de *n* elementos. Combinaciones: Definición. Formación y número de combinaciones que se obtienen con *m* elementos tomados de *n* en *n*. Fórmula correspondiente. Combinaciones complementarias. Ejercicios. — Producto de factores binomiales que tienen un término común. Fórmula correspondiente. Binomio de Newton: Deducción de la fórmula para el desarrollo del mismo. Desarrollo del binomio diferencia. Propiedades de los coeficientes. Aplicaciones: Caso en que los términos del binomio sean cualesquiera y caso en que uno de ellos sea la unidad. Término general del desarrollo del binomio. Aplicación del desarrollo del binomio para obtener el número. Generalización de la ley del desarrollo del binomio para exponente negativo y fraccionario, en los casos posibles, (postularla). Aplicaciones a los binomios de tipo $(1 + i)^{-m}$ y $(1 + i)^{\frac{m}{n}}$. Probabilidades: Probabilidad simple; casos favorables y casos posibles; frecuencia. Definiciones. Consideraciones y aplicaciones sencillas a problemas conocidos de: Probabilidad simple, complementaria o contraria; probabilidad total y probabilidad compuesta. Ejercicios y problemas.

CAPÍTULO IX. — **Progresiones aritméticas** . . . . de pág. 182 a 197

Definiciones. Deducción de la fórmula fundamental para obtener el último término. Fórmulas que se deducen de la fundamental: Del primer término, de la razón y del número de término. Suma de dos términos equidistantes de los extremos de una progresión aritmética. Suma de los términos de una progresión aritmética. Interpolación de medios aritméticos. Definición. Razón de la interpolación. Media aritmética. Aplicaciones: Dadas tres de las cantidades: Primer término, último término, número de términos, suma de los términos y la razón, determinar las otras dos. Imposiciones a interés simple como suma de términos de una progresión aritmética de razón positiva. Amortizaciones a interés simple, como suma de términos de una progresión aritmética de razón negativa. Ejercicios y problemas.

CAPÍTULO X. — **Progresiones geométricas** . . . . de pág. 198 a 212

Definición. Progresión geométrica creciente y decreciente. Deducción de la fórmula fundamental para obtener el último término. Fórmulas que se deducen de la fundamental: Del primer término, de la razón y del número de térmi-

nos. Producto de dos términos equidistantes de los extremos de una progresión geométrica. Producto de varios términos consecutivos. Suma de los términos de una progresión geométrica creciente. Caso en que la progresión es decreciente; límite de esta suma, cuando el número de términos crece indefinidamente. Interpolación de medios proporcionales: Definiciones. Razón de interpolación. Media geométrica. Aplicaciones: Dadas tres de las cantidades: Primer término, último término, número de términos, suma de los términos y la razón, determinar los otros dos. Problemas y ejercicios entre los cuales aparezcan términos de forma binomial.

CAPÍTULO XI. — **Nociones elementales de trigonometría** . . . . . de pág. 215 a 240

Generación de ángulos y signos de los mismos. Medida de los ángulos: Sistema sexagesimal y circular. Valor y signo de las funciones trigonométricas en los cuadtro cuadrantes. Relaciones entre las funciones trigonométricas de un mismo ángulo: Fórmulas fundamentales. Conociendo el seno, el coseno o la tangente de un ángulo, hallar las demás funciones trigonométricas. Seno y coseno de la suma de dos ángulos. Seno y coseno del duplo de un ángulo. Area de un triángulo. Descripción y uso de las tablas de los logaritmos de las funciones trigonométricas. Ejercicios.

Este libro se terminó de imprimir el 22 de Agosto de 1938,
en los Talleres Gráficos "TOMÁS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Bs. As