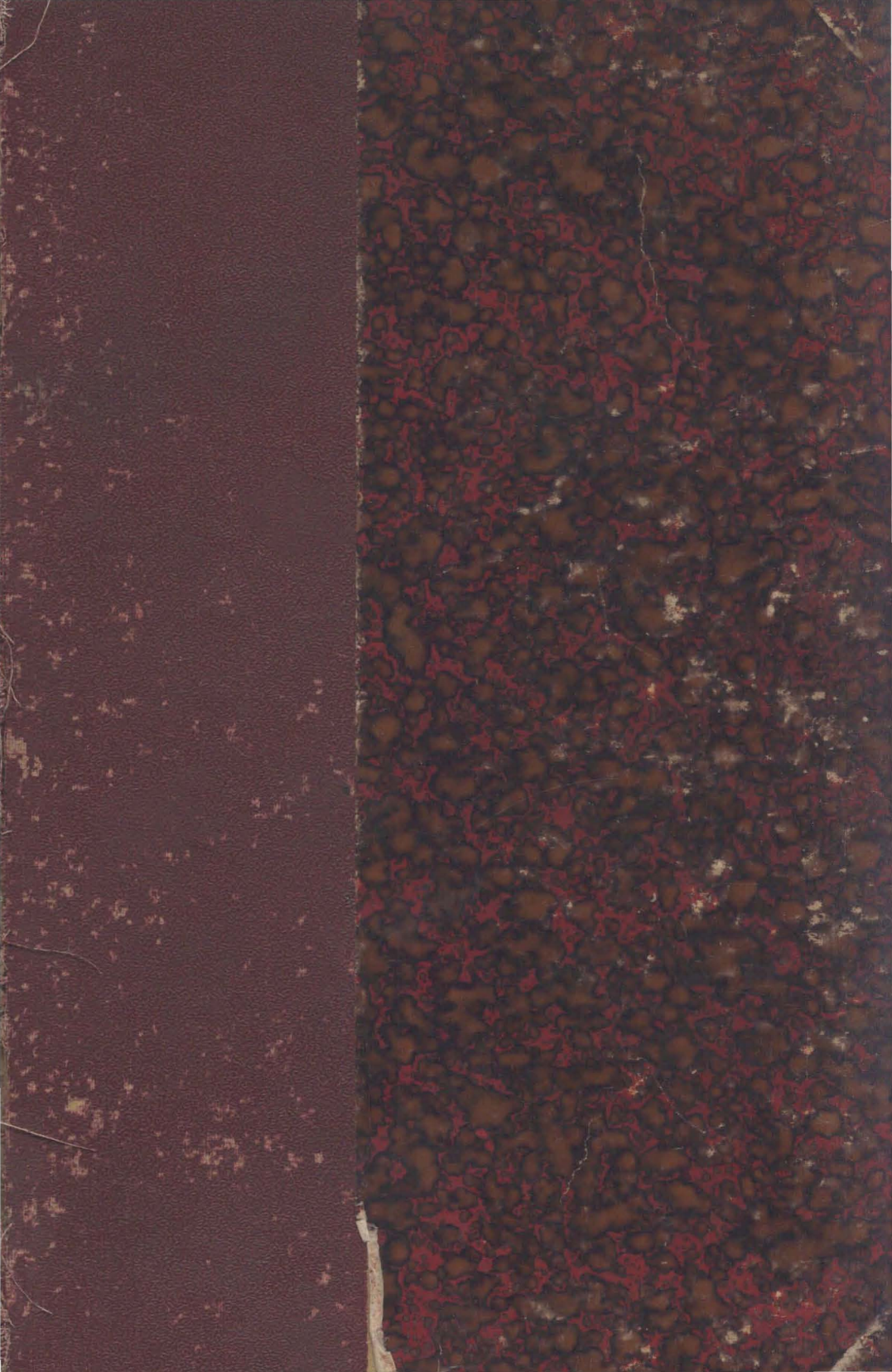




Prestan atención y desprecian de
mirar (o afilar de lojito) que no
van a aprender nada
Ref Un loco. (cuerdo)

Un dicho muy lindo pero no
necesitamos pedagogos —

ELEMENTOS DE ARITMÉTICA

(SEGUNDO CURSO)

26662

ELEMENTOS

DE

ARITMETICA

SEGUNDO CURSO

4
J - 6
36

Texto aprobado por el Ministerio de Instrucción Pública

Ajustado estrictamente al nuevo programa de Matemáticas de Segundo Año
de los Colegios Nacionales

Por los Profesores Diplomados en Matemáticas

Ing. HÉCTOR J. MEDICI

PROFESOR DE LOS COLEGIOS NACIONALES
DGO. F. SARMIENTO, N. AVELLANEDA, DEL
COLEGIO MILITAR DE LA NACIÓN Y DE LA
ESCUELA NORMAL DE PROFESORES M. ACOSTA

Ing. EMANUEL S. CABRERA

PROFESOR
DEL COLEGIO NACIONAL BARTOLOMÉ MITRE
Y DEL
COLEGIO NACIONAL BERNARDINO RIVADAVIA

CUARTA EDICION

LIBRERIA ANACONDA
FLORIDA 508
— BUENOS AIRES —

Libreria de GARCIA SANTOS
MORENO 500
BUENOS AIRES
1930

BIBLIOTECA NACIONAL
DE MAESTROS

OBRAS DE LOS AUTORES

- Elementos de Aritmética, *Primer curso*, 5ª edición
Elementos de Aritmética, *Segundo curso*, 4ª edición
Elementos de Aritmética y Algebra,. *Tercer curso*, 3ª edición
Elementos de Aritmética y Algebra,. *Cuarto curso*
Elementos de Geometría, *Primer curso*, 5ª edición
Elementos de Geometría, *Segundo curso*, 4ª edición
Elementos de Geometría, *Tercer curso*, 3ª edición
Elementos de Geometría del Espacio *Cuarto curso*, 3ª edición
Geometría para Tercer Año de las Escuelas Normales.
-

*Propiedad de los autores.
Queda hecho el depósito
que marca la ley*

CAPITULO I

NUMEROS RACIONALES

PROGRAMA. — *Necesidad de la creación de los números fraccionarios. Números fraccionarios puros. Definiciones. Números racionales. Representación de los números enteros por pares ordenados de números enteros. Pares de denominador cero. Interpretaciones concretas de los números racionales de términos positivos. Igualdad de números racionales. Definición. Caracteres formales. Un número racional no altera si el numerador y el denominador se multiplican o dividen exactamente por un mismo número. Posibilidad de expresar todo número racional por una fracción de denominador positivo. Signo de un número racional. Simplificación de fracciones. Reducción de fracciones a común denominador. Mínimo común denominador. Desigualdad de números racionales. Definición de mayor y menor. De dos fracciones de igual denominador es mayor la que tiene mayor numerador. De dos fracciones de igual numerador es mayor la que tiene menor denominador. Ordenación de los números racionales de denominador 1, 2, 3, 4, ... n en sucesiones crecientes.*

1. Necesidad de la creación de los números fraccionarios. —

Habíamos visto (nº 72, *Arit.* 1ª parte) al tratar la División de números naturales, que la condición de posibilidad de dicha operación era que el dividendo fuese múltiplo del divisor.

Por lo tanto, las expresiones tales como $7:5$ carecen hasta ahora de sentido, pues no hay ningún número entero que multiplicado por 5 dé 7. Para que la división sea posible en todos los casos, los matemáticos han creado una nueva clase de números llamados *fraccionarios puros*, de los cuales los alumnos tienen una idea por haber aprendido a manejarlos en la Escuela Primaria. Son números frac-

cionarios puros: $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{14}{9}$, etc.

2. Definición. — Se llama *número fraccionario puro* o *fracción pura*, a un par de números enteros dados en un cierto orden y tales que el primero no sea múltiplo del segundo y que éste sea distinto de cero.

EJEMPLOS: $(-3, -14)$, $(2, -5)$, $(7, 5)$ son números fraccionarios puros.

3. Definiciones. — El primer número se llama *numerador*, el segundo *denominador*, y ambos *términos* de la fracción.

La fracción del numerador **a** y denominador **b** la representaremos con la siguiente:

4. Notación. $\frac{a}{b}$ que se lee **a** sobre **b** (*).

EJEMPLO: $(-3, -14)$ se representa por $\frac{-3}{-14}$
 $(2, -5)$ » » » $\frac{2}{-5}$

Un estudio análogo al que hemos hecho con los números enteros, podríamos hacer con los fraccionarios puros, pero esto nos llevaría a hacer luego, otro nuevo estudio del conjunto de los números enteros y fraccionarios, pues lo que interesa ver es como estos últimos solucionan el problema de la división de números naturales en el caso de imposibilidad antes señalado.

Teniendo en cuenta esto formaremos una familia de números enteros y fraccionarios. En ella definiremos las relaciones de igualdad y las operaciones aritméticas, demostrando los caracteres de aquéllas y las propiedades de estas últimas, pues si bien sabemos que se cumplen entre los números enteros, no es lícito atribuírselas, sin previa demostración, a los números fraccionarios.

(*) Recuérdese que los números escritos en caracteres más gruesos son números enteros (ver *Arit.* 1.^a parte).

5. Números racionales. — DEFINICION. — Se llama *número racional* a todo número entero o fraccionario puro.

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Números naturales} \\ \text{Números negativos} \\ \text{Números fraccionarios puros} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Números} \\ \text{enteros} \end{array} \left\} \begin{array}{l} \text{Números racionales} \end{array}$$

Con el objeto de unificar la notación de los números racionales, representaremos también a los números enteros por pares ordenados de números. Como en la representación de los números fraccionarios puros, sólo se han empleado aquellos pares en que el numerador no es múltiplo del denominador, quedan disponibles aquellos en que su numerador es múltiplo del denominador y los utilizaremos para la representación de los números enteros de acuerdo con la siguiente:

6. Convención (*). — *Todo número entero se representa por cualquier par ordenado de números enteros tales que el cociente del numerador por el denominador sea, precisamente, el número entero considerado.*

Así, por ejemplo:

$$2 \text{ se representa por } \frac{2}{1}, \text{ o por } \frac{4}{2}, \text{ o por } \frac{-8}{-4}, \text{ etc. o por } \frac{2n}{n}$$

$$\text{puesto que } 2:1 = 4:2 = (-8):(-4) = \dots = 2n:n = 2$$

y en general

$$a \text{ se representa por } \frac{a}{1}, \text{ o por } \frac{2a}{2}, \text{ o por } \frac{3a}{3}, \text{ etc. o por } \frac{na}{n}$$

$$\text{puesto que } a:1 = 2a:2 = 3a:3 = \dots = na:n = a.$$

(*) Parecería extraño que para representar a un mismo número se emplearan notaciones distintas, pero esto es común en la vida corriente. Así, por ejemplo, entre los números, el cinco se representa por el símbolo 5 o por el V según el sistema; en los distintos idiomas un lapiz, p. ej., se representa por dicha palabra o por las palabras: pencil, crayon,

7. Pares de denominador cero. — Podemos observar que todavía no han sido empleados para representar números, los pares de números enteros del denominador cero, tales como:

$$\frac{3}{0}, \frac{-5}{0} \dots \frac{n}{0}.$$

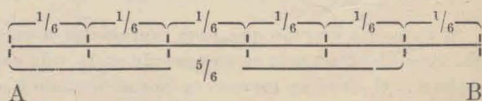
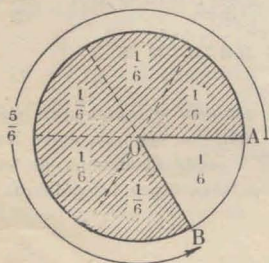
El par $\frac{3}{0}$, p. ej., no representa ningún número fraccionario puro, porque por definición el denominador debe ser distinto de cero; y no representa ningún número entero porque la división por cero carece de sentido.

Como las mismas consideraciones pueden hacerse para cualquiera de los otros pares de denominador cero, deducimos que:

Los pares de denominador cero no representan ningún número racional, ni entero ni fraccionario puro.

8. Interpretación concreta de los números racionales de términos positivos. — Con el objeto de poder inducir ciertas propiedades de los números racionales de términos positivos, y de mostrar la aplicación de la Aritmética a la vida real, recordaremos aquí las interpretaciones concretas de tales números que nos dieran en la Escuela Elemental.

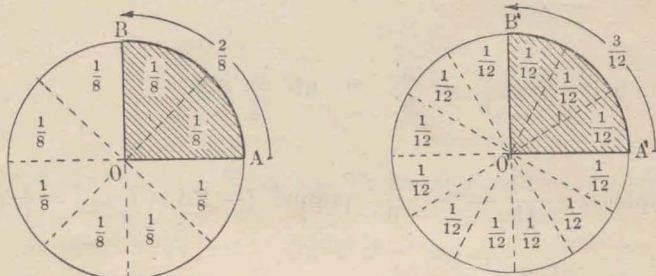
Así, por ejemplo, convendremos en que el número $\frac{5}{6}$ se representa tomando un objeto cualquiera, por ejemplo un segmento material, un círculo material, un rectángulo material... y en general un objeto susceptible de ser dividido en partes iguales, dividiéndolo en 6 partes iguales y tomando 5 partes iguales a una de éstas.



En general la fracción $\frac{m}{n}$ se representará dividiendo a un objeto en n partes iguales y tomando m partes iguales a una de ellas.

IGUALDAD DE NUMEROS RACIONALES

Consideremos dos círculos iguales $C_{(O)}$ y $C_{(O')}$ y dividámoslo en 4 partes iguales.



Por lo dicho anteriormente resulta que $\frac{1}{4}$ está representado por el sector AOB o por el A'O'B' que son iguales.

Si dividimos a $C_{(O)}$ en 8 partes iguales y a $C_{(O')}$ en 12 observamos que el sector AOB representa al número $\frac{2}{8}$ y que el sector A'O'B' representa al número $\frac{3}{12}$ y como

$$\text{sector AOB} = \text{sector A'O'B'}$$

resulta;

$$\frac{2}{8} = \frac{3}{12}.$$

Si multiplicamos el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, o sea 2×12 , y el numerador de la segunda por el denominador de la primera, es decir 3×8 , se ob-

serva que ambos productos son iguales. Esta observación que podría hacerse con cualquier otra interpretación concreta y con cualquier otro par de números racionales, que en dicha interpretación resulten iguales, nos conduce a dar la siguiente:

9. Definición. — Se dice que un *número racional* $\frac{a}{b}$ es igual a otro $\frac{a'}{b'}$ cuando el producto del numerador del primero por el denominador del segundo es igual al producto del numerador del segundo por el denominador del primero.

En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ si $ab' = a'b$

Ejemplos: $\frac{-10}{15} = \frac{4}{-6}$ porque $(-10) \times (-6) = 4 \times 15$

$\frac{2}{-7} = \frac{6}{-21}$ porque $2 \times (-21) = 6 \times (-7)$

Si convenimos en llamar *productos cruzados* de los términos de dos fracciones dadas, a los productos del numerador de una por el denominador de la otra, la definición anterior se puede expresar brevemente diciendo:

Dos números racionales son iguales cuando lo son los productos cruzados de sus términos.

COROLARIOS DE LA DEFINICIÓN. — I. *Si dos números racionales tienen iguales su numerador y su denominador son iguales.*

En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ si $a = a'$ y $b = b'$

II. Si dos números racionales del mismo denominador son iguales, sus numeradores también lo son.

En símbolos: Si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b}$ es $a = a'$

10. **Caracteres formales.** — Para que la definición anterior (nº 9) sea la de una igualdad debe cumplir los caracteres formales de tal relación, que son:

CARÁCTER IDÉNTICO. — **COROLARIO:** *Todo número racional es igual a sí mismo.*

En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

CARÁCTER RECÍPROCO. — **TEOREMA:** *Si un número racional es igual a otro, éste es igual al primero.*

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

TESIS) $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

DEMOST.) Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hipótesis
 es $ad = cb$ por def. de números rac. iguales
 y como $cb = ad$ por carác. recíp. igual núm ent.
 resulta $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ por def. de núm. racion. iguales.

CARÁCTER TRANSITIVO. — **TEOREMA:** *Si un número racional es igual a otro y éste, a su vez, es igual a un tercero, el primero es igual al tercero.*

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} ; \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$

TESIS) $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

DEM.) Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hip. es $ad = cb$ por def. ant. (nº 9)

y siendo $\frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ por hip. es $cn = md$ por def. ant. (nº 9)

multiplicando m. a m. se tiene $adcn = cbmd$ por prop. uniforme de la multiplicación de números enteros.

Dividiendo ambos miembros por cd y simplificando da

$$an = bm$$

o también $an = mb$ por prop. conmut. múlt. nº ent.

luego $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ por def. de núm. racion. iguales

11. Consecuencias. — 1.^a *Dos números racionales iguales a un tercero son iguales entre sí.*

En símbolos: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n} = \frac{c}{d}$ es $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$

2.^a *Si dos igualdades, entre números racionales, tienen sus segundos miembros iguales, sus primeros miembros también son iguales.*

En símbolos: Si $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \end{array} \right.$ y $\frac{c}{d} = \frac{g}{h}$ es $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

12. Teorema. — *Un número racional no altera si el numerador y denominador se multiplican por un mismo número distinto de cero.*

HIP.) $\frac{a}{b}$ número racional

TESIS) $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$

$m \neq 0$

DEMOST.) Para que sea $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$
 debe ser $abm = amb$ por defin. anterior (n° 9)

lo cual es cierto por la propiedad conmutativa del producto de números enteros.

13. Teorema. — *Un número racional no altera si el numerador y denominador se dividen exactamente por un mismo número.*

HIP.) $\frac{a}{b}$ número racional TESIS) $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$
 $a = \dot{n} ; b = \dot{n}$

DEMOST.) Multiplicando ambos términos de $\frac{a:n}{b:n}$ por n resulta

$$\frac{a:n}{b:n} = \frac{(a:n) \cdot n}{(b:n) \cdot n} \text{ por el teorema anterior}$$

simplificando ambos términos del segundo miembro queda

$$\frac{a:n}{b:n} = \frac{a}{b}$$

luego $\frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n}$ por el carácter recíproco

14. Posibilidad de expresar todo número racional como una fracción de denominador positivo. — Siendo los términos de una fracción números enteros puede ocurrir que su denominador sea negativo, por ejemplo:

$$\frac{-5}{-7}, \frac{+3}{-11}, \frac{+a}{-b} \dots$$

Es conveniente, como veremos en seguida, hacer caso omiso del signo del denominador, para lo cual bastaría que fuese positivo.

Para que una fracción de denominador negativo se transforme en otra igual pero de denominador positivo, basta multiplicar ambos términos de la misma por -1 .

Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{-5}{-7} &= \frac{(-5) \times (-1)}{(-7) \times (-1)} = \frac{+5}{+7} = \frac{5}{7} \\ \frac{+3}{-11} &= \frac{(+3) \times (-1)}{(-11) \times (-1)} = \frac{-3}{+11} = \frac{-3}{11} \\ \frac{+a}{-b} &= \frac{(+a) \times (-1)}{(-b) \times (-1)} = \frac{-a}{+b} = \frac{-a}{b} \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN.— Para transformar una fracción de denominador negativo en otra igual, pero de denominador positivo, basta cambiar los signos de sus términos.

15. Signo de un número racional. — Vamos a atribuirle a cada número racional un signo; al hacerlo hay que tener cuidado que dicho signo concuerde con el que se obtendría al aplicar la regla de los signos del cociente exacto de números enteros, cuando el número racional fuese entero. Teniendo en cuenta esto daremos la siguiente:

DEFINICIÓN.— Se llama *signo* de un número racional de denominador positivo al signo de su numerador.

EJEMPLO: $\frac{-a}{b}$ es un número racional de signo $-$
 $\frac{+a}{b}$ es un número racional de signo $+$
 $\frac{-3}{5}$ es un número racional de signo $-$

Con el objeto de hacer notar cuál es el signo que corresponde a un número dado, de acuerdo con la definición anterior, escribiremos

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{b} \text{ en lugar de } \frac{-a}{b} \\ & +\frac{a}{b} \text{ o simplemente } \frac{a}{b} \text{ en lugar de } \frac{+a}{b} \end{aligned}$$

16. Simplificación de fracciones.— DEFINICIÓN.— *Simplificar una fracción* significa encontrar otra igual a la dada, cuyos términos sean respectivamente menores que los de la primera.

Para ello basta dividir ambos términos de la fracción por un factor común, o sea, suprimir dicho factor común.

Sea, por ejemplo, simplificar la fracción $\frac{64}{80}$.

Como 64 y 80 son divisibles por 8 resulta:

$$\frac{64}{80} = \frac{64 : 8}{80 : 8} = \frac{8}{10} \text{ por el teorema anterior}$$

y como 8 y 10 son divisibles por 2, resulta:

$$\frac{64}{80} = \frac{8}{10} = \frac{8 : 2}{10 : 2} = \frac{4}{5} \text{ por el teorema anterior}$$

Como los términos de la fracción $\frac{4}{5}$ son primos entre sí, no tienen factores comunes y por lo tanto no podrá simplificarse, por lo cual se dice que esta fracción es *irreducible*.

Se dice también que $\frac{4}{5}$ es la fracción $\frac{64}{80}$ *reducida a su más simple expresión*.

OBSERVACIÓN. — Dada una fracción para reducirla a su más simple expresión en lugar de dividir sus términos sucesivamente por sus factores comunes basta dividir por el producto de todos ellos, es decir, por su máximo común divisor.

EJEMPLO. — Reducir a su más simple expresión $\frac{1800}{3780}$

1800	2	3780	2
900	2	1890	2
450	2	945	3
225	5	315	3
45	5	105	3
9	3	35	5
3	3	7	7
1		1	

Siendo $1800 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 3^2$ y $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
 es M. C. D. (1800 y 3780) $= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

luego
$$\frac{1800}{3780} = \frac{1800 : 180}{3780 : 180} = \frac{10}{21}$$

Handwritten calculations showing the division of 1800 and 3780 by 180 to reach 10 and 21 respectively.

Handwritten mark resembling a stylized '4' or '9'.

17. Reducción de fracciones a común denominador. — DEFINICION. — *Reducir varias fracciones a común denominador*, es encontrar otras fracciones que siendo respectivamente iguales a las dadas tengan el mismo denominador.

Tratemos de reducir a común denominador las fracciones

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ y } \frac{4}{5}.$$

Un denominador común de dichas fracciones es, por ejemplo, el producto de sus denominadores: 2.3.5.

Para que figure este denominador en una fracción igual a la primera basta multiplicar sus términos por 3.5, así resultaría:

$$\frac{1}{2} = \frac{1.3.5}{2.3.5} = \frac{15}{30};$$

para que figure en una fracción igual a la segunda debemos multiplicar sus términos por 2.5, así tendríamos:

$$\frac{2}{3} = \frac{2.2.5}{3.2.5} = \frac{20}{30};$$

y para que figure en una igual a la tercera debemos multiplicar sus términos por 2.3 y tendríamos:

$$\frac{4}{5} = \frac{4.2.3}{5.2.3} = \frac{24}{30}.$$

Observando que los términos de cada una de las fracciones dadas, se han multiplicado por el producto de los denominadores de las otras, resulta la siguiente:

REGLA. — *Para reducir varias fracciones a común denominador, se multiplican los términos de cada una de ellas por el producto de los denominadores de todas las otras.*

En símbolos:

Dadas $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$ reducidas a común denominador resulta

$$\frac{a}{b} = \frac{adf}{bdf}; \quad \frac{c}{d} = \frac{cbf}{dbf} \text{ y } \frac{e}{f} = \frac{ebd}{fbd}$$

o también:

$$\frac{a}{b} = \frac{adf}{bdf}; \quad \frac{c}{d} = \frac{cbf}{bdf} \text{ y } \frac{e}{f} = \frac{ebd}{bdf}$$

18. Mínimo común denominador. — DEFINICION. — Reducir varias fracciones a *mínimo común denominador*, es encontrar otras fracciones que siendo respectivamente iguales a las dadas, tengan por denominador común al mínimo común múltiplo de sus denominadores.

Sea, por ejemplo, reducir a mínimo común denominador las fracciones:

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{5}{12}.$$

Siendo el M. C. M. (4, 8 y 12) = 24 (ver *Aritmética*, 1ª parte n° 185), para que figure este denominador en una fracción igual a la primera basta multiplicar sus términos por 6, que es el cociente de 24:4, así tendríamos

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{18}{24},$$

para que figure en una fracción igual a la segunda debemos multiplicar sus términos por 3 = 24:8, así:

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{24};$$

y para que figure en una igual a la tercera debemos multiplicar sus términos por 2 = 24:12 y tendríamos así:

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{10}{24}.$$

Observando que el denominador de las fracciones halladas es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las dadas, y que cada numerador es el producto de su numerador por el cociente del mínimo común denominador por su denominador, resulta la siguiente:

REGLA. — *Para reducir fracciones a mínimo común denominador, se multiplican ambos términos de cada una de ellas, por el cociente de dividir el mínimo común múltiplo de sus denominadores por el denominador respectivo.*

En símbolos: Dadas las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$

si el mínimo común denominador es m o sea M. C. M. $(b, d, f) = m$ se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{a (m : b)}{b (m : b)} = \frac{a (m : b)}{m}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{c (m : d)}{d (m : d)} = \frac{c (m : d)}{m}$$

$$\frac{e}{f} = \frac{e (m : f)}{f (m : f)} = \frac{e (m : f)}{m}$$

EJEMPLO: Reducir a mínimo común denominador

$$\frac{2}{15}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{8}{25}, \quad \frac{6}{75}$$

Siendo M. C. M. $(15, 5, 25, 75) = 75$ resulta

$$\frac{2}{15} = \frac{2 (75 : 15)}{75} = \frac{2 \times 5}{75} = \frac{10}{75}$$

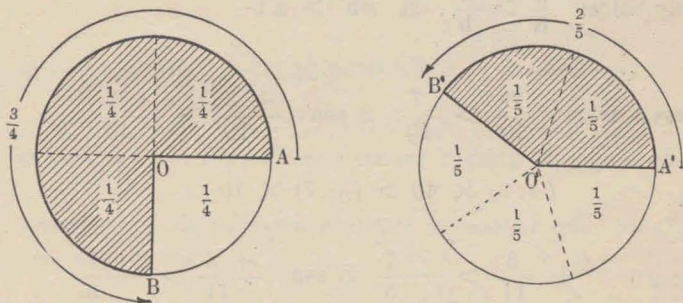
$$\frac{4}{5} = \frac{4 (75 : 5)}{75} = \frac{4 \times 15}{75} = \frac{60}{75}$$

$$\frac{8}{25} = \frac{8 (75 : 25)}{75} = \frac{8 \times 3}{75} = \frac{24}{75}$$

$$\frac{6}{75} = \frac{6 (75 : 75)}{75} = \frac{6 \times 1}{75} = \frac{6}{75}$$

DESIGUALDAD DE NÚMEROS RACIONALES.

Dados dos números racionales cualesquiera, $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$, si los representamos utilizando una de las interpretaciones concretas dadas



anteriormente, por ejemplo, a $\frac{3}{4}$ por el sector rayado AOB y a $\frac{2}{5}$ por el sector rayado A'O'B' de los círculos iguales $C_{(0)}$ y $C_{(0')}$ respectivamente; como el sector AOB resulta mayor que el sector A'O'B' diríamos que $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{2}{5}$.

Si efectuamos los productos cruzados de sus términos, observamos que el primer producto es mayor que el segundo, es decir:

$$3 \times 5 > 2 \times 4.$$

Esta observación, que podría hacerse con cualquier otra interpretación concreta, y con cualquier otro par de números racionales tales que en dichas interpretaciones resulte el primero mayor que el segundo, nos conduce a dar la siguiente:

19. Definición de mayor.—Se dice que un número racional $\frac{a}{b}$ es mayor que otro $\frac{a'}{b'}$ cuando el producto del numerador del primero por el denominador del segundo es mayor que el producto del numerador del segundo por el denominador del primero.

En símbolos: $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$ si $ab' > a'b$

EJEMPLO 1º) $\frac{3}{10} > \frac{7}{40}$ o sea $\frac{+3}{10} > \frac{+7}{40}$

porque $(+3) \times 40 > (+7) \times 10$

EJ.M.: 2º) $+\frac{3}{11} > -\frac{7}{5}$ o sea $\frac{+3}{11} > \frac{-7}{5}$

porque $(+3) \times 5 > (-7) \times 11$

EJ.M.: 3º) $-\frac{3}{4} > -\frac{5}{2}$ porque $(-3) \times 2 > (-5) \times 4$

o sea porque $-6 > -20$

Observaciones análogas a las hechas con los ejemplos que nos llevaron a la definición de mayor, nos conducen a aceptar la siguiente:

20. Definición de menor.—Se dice que un número racional $\frac{a}{b}$ es menor que otro $\frac{a'}{b'}$, cuando el producto del numerador del primero por el denominador del segundo es menor que el producto del numerador del segundo por el denominador del primero.

En símbolo: $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ si $ab' < a'b$.

EJEMPLOS:

$$\frac{3}{5} < \frac{6}{7} \text{ porque } 3 \times 7 < 6 \times 5 \quad \text{o sea} \quad 21 < 30$$

$$\frac{-3}{8} < \frac{-7}{27} \text{ porque } (-3) \times 27 < (-7) \times 8 \text{ o sea } -81 < -56$$

$$\frac{-2}{9} < \frac{7}{5} \text{ porque } (-2) \times 5 < 7 \times 9 \quad \text{o sea } -10 < 63$$

De las definiciones de mayor y menor resulta el siguiente:

COROLARIO. — *Si un número racional es mayor que otro, éste es menor que el primero.*

En símbolos: si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ es $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$.

En ciertos casos particulares, resulta aún más sencillo establecer cuando un número racional es mayor que otro, como lo prueban los siguientes teoremas:

21. Teorema I. — *De dos fracciones de igual denominador es mayor la que tiene mayor numerador.*

HIP.) $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b}$ y $a > a'$ TESIS) $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b}$

DEMOST.) De acuerdo con la definición de mayor sería cierta la tesis si probáramos que $ab > a'b$. Esto se cumple porque

siendo $a > a'$ por hipótesis

es $ab > a'b$ por ley de monot. de la multip. de núm. enteros.

EJEMPLOS: $\frac{3}{5} > \frac{1}{5}$ puesto que $3 > 1$;

$\frac{4}{10} > \frac{-7}{10}$ puesto que $4 > -7$.

COROLARIO. — Si una fracción es mayor que otra y ambas tienen el mismo denominador, el numerador de la primera es mayor que el de la segunda.

En símbolos: si $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b}$ es $a > a'$

En efecto: siendo $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b}$ es $ab > a'b$

Dividiendo por b resulta $a > a'$.

Ejm.: Si $\frac{7}{11} > \frac{-2}{11}$ es $7 > -2$

22. Teorema II. — De dos fracciones positivas de igual numerador, distinto de cero, es mayor la que tiene menor denominador.

HIP.)- $\frac{a}{b} ; \frac{a}{b'} ; b < b'$ TESIS) $\frac{a}{b} > \frac{a}{b'}$
 $a \neq 0$.

DEMOST.) De acuerdo con la definición de mayor, será cierta la tesis si probamos que $ab' > ab$.

Esto se cumple porque

siendo $b < b'$ por hip. es $b' > b$ por una observ. ant. (20)

y mult. ambos miembros por a da $ab' > ab$

EJEMPLO: $\frac{4}{9} > \frac{4}{13}$ puesto que $9 < 13$.

$$\dots -\frac{4}{1} < -\frac{3}{1} < -\frac{2}{1} < -\frac{1}{1} < \frac{0}{1} < \frac{1}{1} < \frac{2}{1} < \frac{3}{1} < \frac{4}{1} < \dots$$

.....

$$\dots -\frac{4}{n} < -\frac{3}{n} < -\frac{2}{n} < -\frac{1}{n} < \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < \frac{4}{n} < \dots$$

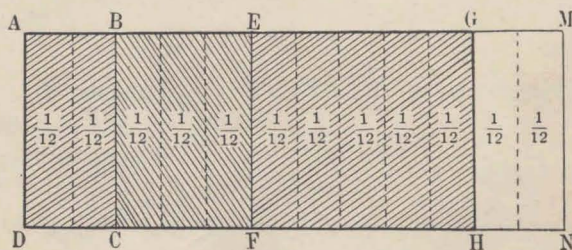
CAPITULO II

SUMA DE NUMEROS RACIONALES

PROGRAMA. — *Definiciones de suma de números racionales de igual y de distinto denominador. Propiedad uniforme: postulado. Propiedades conmutativa y asociativa. Leyes de monotonía. Definición de número mixto. Reducción de un número mixto a fracción impropia y vice-versa. Suma de números mixtos.*

24. Suma de números racionales de igual denominador. —

Inspiraremos las definiciones de suma de números racionales en una de las interpretaciones concretas dadas anteriormente. Así, por ejemplo, si queremos sumar $\frac{2}{12}$ con $\frac{3}{12}$ y con $\frac{5}{12}$, representaremos al primero por el rectángulo ABCD, al segundo por el BEFC y al tercero por el EGHF.



La suma de estos tres rectángulos da el rectángulo AGHD que representa al número $\frac{10}{12}$.

Si observamos que el numerador 10 de esta fracción es la suma

de los numeradores, 2, 3 y 5, de las fracciones dadas y que su denominador 12 es el mismo que el de dichas fracciones, tendríamos:

$$\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{10}{12} = \frac{2 + 3 + 5}{12}$$

Este ejemplo nos conduce a dar la siguiente:

DEFINICIÓN. — I. Se llama *suma de varios números racionales de igual denominador* a otro número racional de ese mismo denominador cuyo numerador es la suma de los numeradores de los números dados.

En símbolos:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \dots + \frac{m}{n} = \frac{a + b + c + \dots + m}{n}$$

EJEMPLOS:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{9}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3 + 2 + 9 + 1}{7} = \frac{15}{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{-3}{11} + \frac{-5}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + \frac{-4}{11} &= \frac{(-3) + (-5) + 2 + 1 + (-4)}{11} \\ &= \frac{-9}{11} = -\frac{9}{11} \end{aligned}$$

25. Suma de números racionales de distinto denominador. —

Tratemos ahora de sumar fracciones de distinto denominador, por ejemplo:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{6} + \frac{5}{12}$$

Reduciendo estas fracciones a común denominador (nº 12) tendríamos:

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12} ; \quad \frac{3}{6} = \frac{6}{12} ; \quad \frac{5}{12} = \frac{5}{12}$$

Si sumar $\frac{1}{4} + \frac{3}{6} + \frac{5}{12}$ fuera lo mismo que sumar las fracciones $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{12}$ y $\frac{5}{12}$ respectivamente iguales a las primeras, dicha operación se podría hacer aplicando la definición primera.

$$\text{Así: } \frac{1}{4} + \frac{3}{6} + \frac{5}{12} = \frac{3}{12} + \frac{6}{12} + \frac{5}{12} = \frac{3+6+5}{12} = \frac{14}{12}$$

Para poder proceder en esta forma aceptamos la siguiente:

DEFINICIÓN II. -- Se llama *suma de varios números racionales de distinto denominador*, a la suma de otros números racionales que siendo respectivamente iguales a los dados, tengan el mismo denominador.

En símbolos:

$$\frac{a}{q} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{a'}{d} + \frac{b'}{d} + \frac{c'}{d} \quad \text{siendo} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a'}{d} = \frac{a}{q} \\ \frac{b'}{d} = \frac{b}{n} \\ \frac{c'}{d} = \frac{c}{p} \end{array} \right.$$

a) *Reduciendo a común denominador*, tendríamos:

$$\frac{a}{q} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{anp}{qnp} + \frac{bqp}{qnp} + \frac{cqn}{qnp} = \frac{anp + bqp + cqn}{qnp}$$

b) *Reduciendo las fracciones a mínimo común denominador*, tendríamos, siendo M. C. M. $(q, n, p) = m$, que:

$$\begin{aligned} \frac{a}{q} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} &= \frac{a(m:q)}{m} + \frac{b(m:n)}{m} + \frac{c(m:p)}{m} = \\ &= \frac{a(m:q) + b(m:n) + c(m:p)}{m} \end{aligned}$$

EJEMPLOS NUMÉRICOS: 1^{er} MÉTODO.

$$\frac{7}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6}$$

$$= \frac{252 + 120 + 90 + 30}{180} = \frac{492}{180} = \frac{41}{15}$$

2º MÉTODO: Siendo 30 = M. C. M. (5, 3, 2, 6).

$$\frac{7}{5} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{7(30:5) + 2(30:3) + 1(30:2) + 1(30:6)}{30}$$

$$= \frac{7 \cdot 6 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 1 \cdot 5}{30} =$$

$$= \frac{42 + 20 + 15 + 5}{30} = \frac{82}{30} = \frac{41}{15}$$

EJEMPLO II:

$$\frac{3}{4} + \frac{-1}{5} + 4 + \frac{-2}{15} + (-3) = \frac{3}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{4}{1} + \frac{-2}{15} + \frac{-3}{1} =$$

$$= \frac{45 + (-12) + 240 + (-8) + (-180)}{60}$$

$$= \frac{85}{60} = \frac{17}{12}$$

PROPIEDADES DE LA SUMA DE NÚMEROS RACIONALES

26. **Propiedad uniforme.** — Veamos si la suma de números racionales goza de las mismas propiedades que la de números enteros.

Considerando las igualdades entre números racionales:

$$\frac{3}{12} = \frac{2}{8} \quad ; \quad \frac{-1}{3} = \frac{-5}{15} \quad ; \quad 5 = \frac{15}{3}$$

Sumando por una parte, los primeros miembros y por otra los segundos y simplificando los resultados obtenidos se tiene:

Suma de los primeros miembros

$$\frac{3}{12} + \frac{-1}{3} + 5 = \frac{3 + (-4) + 60}{12} = \frac{59}{12}$$

Suma de los segundos miembros

$$\frac{2}{8} + \frac{-5}{15} + \frac{15}{3} = \frac{30 + (-40) + 600}{120} = \frac{590}{120} = \frac{59}{12}$$

luego

$$\frac{3}{12} + \frac{-1}{3} + 5 = \frac{2}{8} + \frac{-5}{15} + \frac{15}{3}.$$

Podemos observar, en este ejemplo, que sumando miembro a miembro varias igualdades entre números racionales, resulta otra igualdad. Como esta misma observación puede hacerse en cualquier otro ejemplo, admitiremos el siguiente:

POSTULADO. — PROPIEDAD UNIFORME. — *Si se suman dos o más igualdades de números racionales, miembro a miembro, se obtiene otra igualdad.*

En símbolos:

Si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} ; \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \text{ y } \frac{e}{f} = \frac{e'}{f'}$

es $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} + \frac{e'}{f'}.$

OBSERVACIÓN. — En el primer ejemplo numérico del párrafo anterior, se observa también, que la propiedad uniforme se cumple puesto que empleando dos métodos para encontrar la suma de las fracciones dadas, obtuvimos el mismo resultado.

27. **Propiedad conmutativa.** — TEOREMA. — *Cambiando el orden de los sumandos, no altera la suma.*

HIP.) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ números racionales

TESIS) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{e}{f} + \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \dots$

DEMOST.) Efectuando la suma indicada en el primer miembro de la tesis tenemos, suponiendo que al reducir a común denominador se obtenga:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{m} ; \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{m} \quad \text{y} \quad \frac{e}{f} = \frac{e'}{m}, \text{ que}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{a'}{m} + \frac{c'}{m} + \frac{e'}{m} = \frac{a' + c' + e'}{m} \quad [1] \text{ por def. de suma}$$

Efectuando la suma indicada en el segundo miembro, resulta:

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c'}{m} + \frac{a'}{m} + \frac{e'}{m} = \frac{c' + a' + e'}{m} \quad [2]$$

siendo $a' + c' + e' = c' + a' + e'$ por prop. conmutativa suma números enteros.

y $m = m$ por carácter idéntico, igual números naturales.

es $\frac{a' + c' + e'}{m} = \frac{c' + a' + e'}{m}$ por un corolario anterior

luego de [1] y [2] resulta por la consecuencia II del carácter transitivo de la igualdad

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} + \frac{e}{f}.$$

En la misma forma se demostraría para cualquier otro orden de los sumandos.

EJ.M.:

$$\frac{5}{6} + \frac{-1}{3} + \frac{7}{8} = \frac{-1}{3} + \frac{7}{8} + \frac{5}{6}$$

28. Propiedad asociativa. — TEOREMA. — *En una suma de varios números racionales pueden reemplazarse algunos de ellos por su suma efectuada.*

HIP.) $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$; $\frac{g}{h}$ números racionales.

TESIS) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) + \frac{g}{h} = \dots$

DEMOST.) Efectuando la suma indicada en el primer miembro de la tesis tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} &= \frac{a'}{m} + \frac{c'}{m} + \frac{e'}{m} + \frac{g'}{m} = \\ &= \frac{a' + c' + e' + g'}{m} \end{aligned} \quad [1]$$

Efectuando la suma indicada en el segundo miembro resulta:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) + \frac{g}{h} &= \frac{a'}{m} + \left(\frac{c'}{m} + \frac{e'}{m}\right) + \frac{g'}{m} = \\ &= \frac{a'}{m} + \frac{c' + e'}{m} + \frac{g'}{m} = \frac{a' + (c' + e') + g'}{m} \end{aligned} \quad [2]$$

siendo $a' + c' + e' + g' = a' + (c' + e') + g'$ por pr. as. suma n^{os} ent.

y $m = m$ por car. idén. ig. n^{os} nat.

es $\frac{a' + c' + e' + g'}{m} = \frac{a' + (c' + e') + g'}{m}$ por un corolario anterior

luego de [1] y [2] resulta por consecuencia II carácter transitivo:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) + \frac{g}{h}.$$

EJ.M.: $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + -\frac{9}{8} + (-5) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} + -\frac{9}{8}\right) + (-5).$

Leyes de monotonía.— TEOREMA I.— *Sumando miembro a miembro una desigualdad y una igualdad de números racionales, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que la dada.*

$$\text{HIP.) } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} ; \quad \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \quad \text{TESIS) } \frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{g}{h}.$$

DEMOST.) Reduciendo las fracciones de la hipótesis a común denominador supongamos que resulte:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{m} ; \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{m} ; \quad \frac{e}{f} = \frac{e'}{m} \quad \text{y} \quad \frac{g}{h} = \frac{g'}{m}.$$

Efectuando la suma indicada en el primer miembro de la Tesis, se tiene:

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{a'}{m} + \frac{e'}{m} = \frac{a' + e'}{m} \quad [1]$$

Efectuando la suma indicada en el segundo miembro de la Tesis, da:

$$\frac{c}{d} + \frac{g}{h} = \frac{c'}{m} + \frac{g'}{m} = \frac{c' + g'}{m} \quad [2]$$

Pero siendo $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ o sea $\frac{a'}{m} > \frac{c'}{m}$ es $a' > c'$ por cor. ant.
y siendo $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ o sea $\frac{e'}{m} = \frac{g'}{m}$ es $e' = g'$ por cor. ant.

Sumando miembro a miembro da $a' + e' > c' + g'$ por ley de monot. de la suma de núm. enteros
y como por carácter idéntico es $m = m$

resulta por un corolario anterior $\frac{a' + e'}{m} > \frac{c' + g'}{m}$

Luego de [1] y [2] tenemos $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{g}{h}$

EJ.M.: Si $\frac{3}{4} > \frac{-8}{3}$ y $\frac{-1}{3} = \frac{-4}{12}$ es $\frac{3}{4} + \frac{-1}{3} > \frac{-8}{3} + \frac{-4}{12}$

TEOREMA II. — *Sumando miembro a miembro dos desigualdades, del mismo sentido, entre números racionales, resulta otra desigualdad de ese mismo sentido.*

$$\text{HIP.) } \frac{a}{b} > \frac{c}{d} ; \frac{e}{f} > \frac{g}{h} \quad \text{TESIS) } \frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{g}{h}.$$

DEMOST.) Procediendo como en el teorema anterior tenemos, efectuando la suma indicada en el primer miembro de la Tesis

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{a'}{m} + \frac{e'}{m} = \frac{a' + e'}{m} \quad [1]$$

Efectuando la suma indicada en el segundo miembro de la Tesis se tiene

$$\frac{c}{d} + \frac{g}{h} = \frac{c'}{m} + \frac{g'}{m} = \frac{c' + g'}{m} \quad [2]$$

Pero siendo $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ o sea $\frac{a'}{m} > \frac{c'}{m}$ es $a' > c'$ por cor. ant.

y siendo $\frac{e}{f} > \frac{g}{h}$ o sea $\frac{e'}{m} > \frac{g'}{m}$ es $e' > g'$ por cor. ant.

Sumando miembro a miembro da $a' + e' > c' + g'$ por ley de monot. de la suma de núm. enteros

y como por carácter idéntico es

$$m = m$$

resulta por corolario anterior

$$\frac{a' + e'}{m} > \frac{c' + g'}{m}$$

Luego de [1] y [2] tenemos

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{g}{h}.$$

DEFINICIÓN I. — Se llama *fracción propia* a todo número racional positivo cuyo numerador es menor que su denominador.

EJEMPLOS: $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{1}{9}$ son fracciones propias.

DEFINICIÓN II. — Se llama *fracción impropia* a todo número racional positivo cuyo numerador sea mayor o igual que su denominador.

EJEMPLOS: $\frac{13}{5}$; $\frac{19}{7}$; $\frac{24}{8}$; $\frac{2}{2}$ son fracciones impropias.

29. **Números mixtos.** — DEFINICION. — Se llama *número mixto* a la suma de un número natural con una fracción propia.

En símbolos:

$a + \frac{b}{c}$ es un número mixto si $\frac{b}{c}$ es propia

EJEMPLOS: $3 + \frac{1}{4}$: $2 + \frac{7}{9}$ son números mixtos.

Con el objeto de simplificar la escritura de los números mixtos, se conviene en omitir el signo $+$ de la operación de sumar, colocado entre el entero y la fracción.

Así por ejemplo se escribe: $3 \frac{1}{4}$ en lugar de $3 + \frac{1}{4}$

$a \frac{b}{c}$ en lugar de $a + \frac{b}{c}$.

30. **Reducción de un número mixto a fracción impropia.** —

Consideremos el número mixto $7 \frac{3}{4}$. De acuerdo con la definición anterior tenemos

$$7 \frac{3}{4} = 7 + \frac{3}{4} = \frac{7}{1} + \frac{3}{4} = \frac{7 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{31}{4}$$

observando la forma como se han obtenido los dos términos de la fracción hallada, se deduce la siguiente:

REGLA. — Para reducir un número mixto a fracción impropia, se pone como numerador el producto del entero por el denominador

de la fracción del número mixto, más su numerador, y por denominador el mismo de esta fracción.

En símbolos: $a \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$.

EJEMPLOS:

$$3 \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{23}{7} ; \quad -5 \frac{3}{8} = -\frac{5 \cdot 8 + 3}{8} = -\frac{43}{8}.$$

31. Reducción de una fracción impropia a número mixto. —

Consideremos la fracción impropia $\frac{20}{3}$ Efectuando la división entera del numerador por el denominador, se tiene:

$$\begin{array}{r} 20 \\ 3 \overline{) 20} \end{array} \left| \begin{array}{l} 6 \\ 2 \end{array} \right. \frac{3}{6} \text{ y por lo tanto } 20 = 6 \cdot 3 + 2$$

luego $\frac{20}{3} = \frac{6 \cdot 3 + 2}{3}$ por un corolario anterior (nº 9)

Pero como $\frac{6 \cdot 3 + 2}{3}$ puede considerarse como la suma de las fracciones $\frac{6 \cdot 3}{3}$ y $\frac{2}{3}$, de acuerdo con la definición primera de suma,

resulta $\frac{20}{3} = \frac{6 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{6 \cdot 3}{3} + \frac{2}{3}$

y simplificando la fracción $\frac{6 \cdot 3}{3}$ da

$$\frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3} = 6 \frac{2}{3}.$$

Observando la forma como se ha obtenido el entero y la fracción propia que forman al número mixto buscado, y teniendo en cuenta que el mismo razonamiento puede hacerse para reducir cualquier otra fracción impropia, se deduce la siguiente:

REGLA. — *Para reducir una fracción impropia a número mixto, se efectúa la división entera del numerador por el denominador; el*

se pone como parte entera del número mixto, el resto como numerador de la fracción propia del mismo y el divisor como denominador de dicha fracción.

En símbolos:

Si $\frac{d}{c}$ es una fracción impropia y $\frac{d}{b} \bigg| \frac{c}{a}$ es $\frac{d}{c} = a \frac{b}{c}$.

EJEMPLOS:

$$\frac{14}{4} = 3 \frac{2}{4} \text{ por ser } (14):4 = 3 \text{ y resto } 2.$$

OBSERVACIÓN I. — Si la división del numerador de una fracción impropia por su denominador, es exacta, la parte fraccionaria del número mixto buscado es nula y por lo tanto la fracción impropia queda reducida a un número entero.

EJEMPLO: $\frac{15}{3} = 5 + \frac{0}{3} = 5 + 0 = 5.$

OBSERVACIÓN II. — Cuando una fracción impropia está precedida por el signo menos basta reducir la fracción impropia a entero o número mixto y afectar del signo menos al resultado obtenido.

En efecto: sea reducir a número mixto $-\frac{19}{7}$.

Como $\frac{19}{7} = 2 \frac{5}{7}$ es $-\frac{19}{7} = -2 \frac{5}{7}.$

32. Suma de números mixtos. — Propongámonos sumar

$$2 \frac{1}{5}, \quad 3 \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad 8 \frac{2}{3}.$$

1^{er} MÉTODO. — Reduciéndolos a fracciones impropias tenemos:

$$2 \frac{1}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{11}{5}; \quad 3 \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4} = \frac{13}{4}; \quad 8 \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{26}{3}$$

luego

$$2 \frac{1}{5} + 3 \frac{1}{4} + 8 \frac{2}{3} = \frac{11}{5} + \frac{13}{4} + \frac{26}{3} = \frac{132 + 195 + 520}{60} = \frac{847}{60}$$

y como $(847) : 60 = 14$ y resto 7

resulta $\frac{847}{60} = 14 \frac{7}{60}$

y por lo tanto $2 \frac{1}{5} + 3 \frac{1}{4} + 8 \frac{2}{3} = 14 \frac{7}{60}$.

De la observación del ejemplo anterior deducimos la siguiente:

REGLA. — *Para sumar números mixtos se los reduce a fracciones impropias y se suman éstas reduciendo a número mixto el resultado.*

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} 4 \frac{1}{5} + \left(-3 \frac{5}{6}\right) + 1 \frac{3}{15} + \left(-6 \frac{2}{3}\right) &= \frac{21}{5} + \frac{-23}{6} + \frac{18}{15} + \frac{-20}{3} \\ &= \frac{126 + (-115) + 36 + (-200)}{30} \\ &= \frac{-153}{30} = -\frac{153}{30} = -5 \frac{3}{30}. \end{aligned}$$

2º MÉTODO. — Teniendo en cuenta la definición de números mixtos podríamos haber procedido, para sumar los números

$2 \frac{1}{5}$, $3 \frac{1}{4}$ y $8 \frac{2}{3}$, así:

$$\begin{aligned} 2 \frac{1}{5} + 3 \frac{1}{4} + 8 \frac{2}{3} &= 2 + \frac{1}{5} + 3 + \frac{1}{4} + 8 + \frac{2}{3} \\ &= (2 + 3 + 8) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) \text{ por propiedades, conmutativa y asociativa de la adición de números racionales} \\ &= 13 + \frac{12 + 15 + 40}{60} = 13 + \frac{67}{60} = 13 + 1 \frac{7}{60} = \\ &= 13 + 1 + \frac{7}{60} = 14 + \frac{7}{60} = 14 \frac{7}{60}. \end{aligned}$$

Observando la forma como se ha obtenido la suma de los números mixtos dados, y teniendo en cuenta que el mismo procedimiento puede seguirse para cualquier otro ejemplo, se deduce la siguiente:

REGLA. — *Para sumar números mixtos se suman por una parte los enteros y por otra parte las fracciones, reduciendo a número mixto la última suma en caso que sea una fracción impropia, y luego se suman ambos resultados.*

APLICACIÓN:

$$\begin{aligned} 3 \frac{2}{5} + 1 \frac{2}{3} + 4 \frac{6}{15} &= (3 + 1 + 4) + \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{6}{15} \\ &= 8 + \frac{6 + 10 + 6}{15} = 8 + \frac{22}{15} \\ &= 8 + 1 \frac{7}{15} = 9 \frac{7}{15} \end{aligned}$$

CAPITULO III

RESTA DE NUMEROS RACIONALES

PROGRAMA. — *Definición. Reglas prácticas para los distintos casos. Propiedad uniforme.*

33. **Definición.** — Se llama *diferencia* entre un número racional $\frac{a}{b}$ (*minuendo*) y otro $\frac{c}{d}$ (*sustraendo*) al número racional $\frac{m}{n}$ que sumado al segundo $\frac{c}{d}$ sea igual al primero $\frac{a}{b}$.

En símbolos: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ tal que $\frac{m}{n} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

EJEMPLO: $\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4}$ puesto que $\frac{2}{4} + \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$

Distinguiremos como en la suma de números racionales, dos casos según que se trate de restar fracciones de igual o de distinto denominador.

1^{er} CASO. — RESTAR FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR. — Sea, por ejemplo, hallar la diferencia entre $\frac{7}{11}$ y $\frac{4}{11}$. Así como para obtener la suma de números racionales del mismo denominador se formaba otro número racional de igual denominador cuyo numerador fuese la suma de los numeradores de los números dados, parece natural que para obtener la diferencia de dos números racionales de

igual denominador, baste formar otro número racional de ese mismo denominador cuyo numerador sea la diferencia entre los numeradores de los números dados. En nuestro caso tendríamos:

$$\frac{7}{11} - \frac{4}{11} = \frac{7-4}{11} = \frac{3}{11}$$

y es $\frac{3}{11}$ la diferencia buscada puesto que $\frac{3}{11} + \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$ que es el minuendo.

Veamos si este procedimiento es general, es decir, si

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Efectivamente es $\frac{a-b}{m}$ la diferencia entre $\frac{a}{m}$ y $\frac{b}{m}$ puesto que

$$\frac{a-b}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a-b+b}{m} = \frac{a}{m} \quad \text{que es el minuendo.}$$

Esta verificación nos permite enunciar la siguiente:

34. Regla I.— *Para restar dos números racionales del mismo denominador, se forma otro número racional de igual denominador, cuyo numerador sea la diferencia entre los numeradores del minuendo y sustraendo.*

APLICACIONES:

$$\frac{7}{12} - \frac{9}{12} = \frac{7-9}{12} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$$

$$\frac{-4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{(-4)-1}{5} = \frac{(-4)+(-1)}{5} = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\frac{-17}{8} - \frac{4}{8} = \frac{(-17)-(-4)}{8} = \frac{(-17)+(4)}{8} = \frac{-13}{8}.$$

2º CASO. — RESTA DE FRACCIONES DE DISTINTO DENOMINADOR. — Tratemos de restar ahora dos fracciones de distinto denominador, por ejemplo, $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$.

Veamos si como en el caso análogo de suma de números racionales, basta reducirlos a común denominador y restarlos, luego, de acuerdo con la regla anterior. En nuestro caso tendríamos:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12} \quad \text{y es } \frac{7}{12} \text{ la diferencia buscada}$$

$$\text{puesto que } \frac{7}{12} + \frac{1}{6} = \frac{7+2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \text{ que es el minuendo.}$$

Verifiquemos si este procedimiento es general, es decir si:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad - cb}{bd}$$

Efectivamente es $\frac{ad - cb}{bd}$ la difer. entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ puesto que

$$\frac{ad - cb}{bd} + \frac{c}{d} = \frac{ad - cb + cb}{bd} = \frac{ad}{bd} = \frac{a}{b} \text{ que es el minuendo.}$$

Esta verificación nos permite enunciar la siguiente

35. Regla II. — *Para restar dos fracciones de distinto denominador, se reducen a común denominador y se procede como en el caso anterior. (Regla I).*

APLICACIONES.—

$$\begin{aligned} \frac{7}{8} - \frac{1}{4} &= \frac{7}{8} - \frac{2}{8} = \frac{5}{8} \\ \frac{7}{5} - \frac{3}{2} &= \frac{14}{10} - \frac{15}{10} = \frac{14-15}{10} = \frac{-1}{10} \\ -\frac{3}{8} - \frac{4}{5} &= \frac{-15}{40} - \frac{32}{40} = \frac{-15-32}{40} = \frac{-47}{40} \end{aligned}$$

$$2 - \frac{7}{8} = \frac{2}{1} - \frac{7}{8} = \frac{16}{8} - \frac{7}{8} = \frac{16-7}{8} = \frac{9}{8}$$

$$-\frac{3}{4} - (-5) = -\frac{3}{4} - \frac{-5}{1} = -\frac{3}{4} - \frac{-20}{4} = \frac{(-3) - (-20)}{4} = \frac{-3+20}{4} = \frac{17}{4}$$

Siendo la Resta de números racionales la operación inversa de la Adición de números racionales, y valiendo para esta última las mismas propiedades de la de números naturales, la Resta de números racionales gozará de las mismas propiedades que la de los números naturales y sus demostraciones podrán hacerse por razonamientos análogos.

Se tendrá, pues, que la Resta goza de las siguientes propiedades:

1º COROLARIO DE LA DEFINICIÓN. — *Un número racional no altera si se le suma otro y al resultado se le resta este último y viceversa.*

En símbolos:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

2º PROPIEDAD UNIFORME. — *Restando miembro a miembro dos igualdades de números racionales, se obtiene otra igualdad.*

En símbolos:

si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ y $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ es $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} - \frac{c'}{d'}$

3º LEY DE MONOTONÍA. — *Si de los miembros de una desigualdad de números racionales, se restan ordenadamente los de una igualdad o los de otra desigualdad de sentido contrario, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido que el de la primera.*

En símbolos:

si $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ y $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$ es $\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} > \frac{c}{d} - \frac{c'}{d'}$

CAPITULO IV

MULTIPLICACION DE NUMEROS RACIONALES

PROGRAMA. — *Definición. Propiedades uniforme, conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la suma y a la resta. Leyes de monotonía. Si los miembros de una desigualdad se multiplican por los de una igualdad entre números negativos . . . Números racionales inversos. El producto de dos números inversos es igual a uno.*

37. Definición. — Se llama *producto* de varios números racionales, a otro número racional que tiene por numerador al producto de los numeradores de los números dados, y por denominador al producto de los denominadores.

En símbolos
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdots \frac{m}{n} = \frac{a \cdot c \cdot e \cdots m}{b \cdot d \cdot f \cdots n}$$

EJEMPLOS:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{10}{7} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 10}{3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{1680}{378} = \frac{40}{9}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{-1}{4} \cdot \frac{-7}{10} \cdot 6 = \frac{3 \cdot (-1) \cdot (-7) \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 1} = \frac{126}{200} = \frac{63}{100}$$

$$-10 \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{-8}{3} \cdot 4 = \frac{(-10)(-3) \cdot 4 \cdot (-8) \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{-3840}{30} = -128$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES.

Los teoremas que siguen prueban que la multiplicación de números racionales, goza de las mismas propiedades que la de números naturales:

38. Propiedad uniforme. — *Si se multiplican dos o más igualdades de números racionales, miembro a miembro se obtiene otra igualdad.*

En símbolos: Si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$; $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$; $\frac{e}{f} = \frac{e'}{f'}$.

es $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} \cdot \frac{e'}{f'}$.

DEMOSTR.) Efectuando el producto indicado en el primer miembro de la Tesis, se tiene:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} \quad [1] \text{ por def. de producto.}$$

Efectuando el producto indicado en el segundo miembro resulta:

$$\frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} \cdot \frac{e'}{f'} = \frac{a' \cdot c' \cdot e'}{b' \cdot d' \cdot f'} \quad [2] \text{ por def. de producto.}$$

Será cierta la Tesis si logramos probar que los segundos miembros de [1] y [2] son iguales, es decir que

$$\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = \frac{a' \cdot c' \cdot e'}{b' \cdot d' \cdot f'} \quad \text{para lo cual debe ser}$$

$(a \cdot c \cdot e) \cdot (b' \cdot d' \cdot f') = (a' \cdot c' \cdot e') \cdot (b \cdot d \cdot f)$ por defin. de números racionales iguales.

Esto se consigue teniendo en cuenta que:

$$\begin{array}{llll} \text{siendo} & \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} & \text{por híp. es} & a.b' = a'.c \quad \text{por def. núm. rac. iguales} \\ & \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} & \text{» » »} & c.d' = c'.d \quad \text{» » » » »} \\ & \frac{e}{f} = \frac{e'}{f'} & \text{» » »} & e.f' = e'.f \quad \text{» » » » »} \end{array}$$

Mult. m. a m. da $a.b'.c.d'.e.f' = a'.b.c'.d.e'.f$ por prop. unif. mult.
o también $(ace)(b'd'f') = (a'c'e')(bdf)$ por propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación.

Luego es cierto que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'} \cdot \frac{e'}{f'}$

39. Propiedad conmutativa. — TEOREMA. — *El producto de varios números racionales no altera si se cambia el orden de los factores.*

HIP.) $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$ números racionales.

TESIS.) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{e}{f} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \dots$

DEMOST.) Efectuando el producto indicado en el primer miembro de la Tesis, tenemos

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} \quad [1] \quad \text{por def. de producto}$$

Efectuando el producto indicado en el segundo miembro, resulta

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c \cdot a \cdot e}{d \cdot b \cdot f} \quad [2] \quad \text{por def. de producto}$$

Pero siendo $a \cdot c \cdot e = c \cdot a \cdot e$ por prop. conmut. mult. nos ent.

y $b \cdot d \cdot f = d \cdot b \cdot f$ por prop. conmut. mult. nos nat

es $\frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f} = \frac{c \cdot a \cdot e}{d \cdot b \cdot f}$ por un corolario anterior

Luego de [1] y [2] resulta:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \text{ por consecuencia II car. trans.}$$

En la misma forma se procedería para cualquier otro orden de los factores.

40. **Propiedad asociativa.** — TEOREMA. — *En un producto de varios números racionales, pueden reemplazarse algunos de ellos por su producto efectuado.*

HIP.) $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$; $\frac{g}{h}$ números racionales

TESIS) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \right) \cdot \frac{g}{h} = \dots$

DEMOST.) Efectuando el producto indicado en el primer miembro de la Tesis tenemos:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{a \cdot c \cdot e \cdot g}{b \cdot d \cdot f \cdot h} \quad [1] \text{ por def. de producto}$$

Efectuando el producto indicado en el segundo miembro, resulta:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \right) \cdot \frac{g}{h} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c \cdot e}{d \cdot f} \right) \cdot \frac{g}{h} = \frac{a \cdot (c \cdot e) \cdot g}{b \cdot (d \cdot f) \cdot h} \quad [2]$$

Pero como $a \cdot c \cdot e \cdot g = a \cdot (c \cdot e) \cdot g$ por pr. as. mult. núm. ent.
 y $b \cdot d \cdot f \cdot h = b \cdot (d \cdot f) \cdot h$ por pr. as. mult. núm. nat.
 es $\frac{a \cdot c \cdot e \cdot g}{b \cdot d \cdot f \cdot h} = \frac{a \cdot (c \cdot e) \cdot g}{b \cdot (d \cdot f) \cdot h}$ por un corolario anterior.

Luego de [1] y [2] resulta:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \right) \cdot \frac{g}{h}.$$

41. Propiedades distributivas.—TEOREMA I.—*El producto de una suma de números racionales por un número racional, es igual a la suma de los productos de cada uno de los sumandos, por dicho número.*

HIP.) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ suma; $\frac{p}{q}$ número cualquiera.

TESIS) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} + \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q}.$

DEMOST.) Reduciendo a común denominador las fracciones $\frac{a}{b}$ y

$\frac{c}{d}$ supongamos que resulte $\frac{a}{b} = \frac{a'}{m}$ y $\frac{c}{d} = \frac{c'}{m}.$

Efectuando las operaciones indicadas en el primer miembro de la Tesis, se tiene:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \frac{p}{q} = \left(\frac{a'}{m} + \frac{c'}{m} \right) \frac{p}{q} = \left(\frac{a' + c'}{m} \right) \frac{p}{q} = \frac{(a' + c') p}{m q} [1]$$

Por otra parte: como $\frac{a}{b} = \frac{a'}{m}$ es $\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a'}{m} \cdot \frac{p}{q}$

y como $\frac{c}{d} = \frac{c'}{m}$ es $\frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q} = \frac{c'}{m} \cdot \frac{p}{q}$

Sumando m. a m. resulta $\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} + \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a'}{m} \cdot \frac{p}{q} + \frac{c'}{m} \cdot \frac{p}{q}$ por pr. unif.

y por def. de prod. y de suma $\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} + \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q} = \frac{a'p}{mq} + \frac{c'p}{mq} = \frac{a'p + c'p}{mq}$ [2]

Pero como $(a' + c')p = a'p + c'p$ por prop. dist. mult. núm. ent.

y $mq = mq$ por prop. unif. mult. núm. nat.

es $\frac{(a' + c')p}{mq} = \frac{a'p + c'p}{mq}$ por un corolario anterior

Luego de [1] y [2] resulta:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} + \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q} \quad \text{por consecuencia II}$$

del carác. transitivo.

Procediendo como en el teorema anterior, se tiene:

TEOREMA II. — *El producto de una diferencia de números racionales, por un número racional, es igual a la diferencia de los productos del minuendo y sustraendo por dicho número.*

HIP.) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ diferencia, $\frac{p}{q}$ número cualquiera.

TESIS) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) \frac{p}{q} = \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} - \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{q}$.

APLICACIONES. —

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{5}\right) \frac{-2}{3} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{-2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{-2}{3} = \frac{-6}{6} + \frac{-2}{15} = \\ &= -1 + \frac{-2}{15} = \frac{-15 + (-2)}{15} = \frac{-17}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} + 3 + \frac{-2}{3}\right) \frac{3}{10} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{3}{10} + \frac{-2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{40} + \frac{9}{10} + \frac{-6}{30} \\ &= \frac{3}{40} + \frac{9}{10} + \frac{-1}{5} = \frac{3 + 36 + (-8)}{40} = \frac{31}{40} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{5} - 20\right) \frac{-2}{5} &= \frac{6}{5} \cdot \frac{-2}{5} - 20 \cdot \frac{-2}{5} = \frac{-12}{25} - \frac{-40}{5} = \frac{-12}{25} - (-8) \\ &= \frac{-12 - (-200)}{25} = \frac{-12 + (+200)}{25} = \frac{188}{25} \end{aligned}$$

42. Ley de monotonía. — TEOREMA. — *Si los miembros de una desigualdad de números racionales, se multiplican por los de una igualdad entre números racionales positivos, se obtiene una desigualdad del mismo sentido que el de la dada.*

HIP.) $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} ; \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$

TESIS) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$

DEMOST.) Siendo $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$ por hip. es $ab' > a'b$ por def. de mayor

y $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ por hip. es $cd' = c'd$ » def. n.º rúc. ig.

multiplicando m. a m. do

$$ab'cd' > a'b'cd \quad \text{por ley de mo-}$$

notonia de la multiplicación de números enteros.

Y por propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación de números enteros se tiene

$$(a c) (b' d') > (a' c') (b d)$$

luego, por def. de mayor

$$\frac{a c}{b d} > \frac{a' c'}{b' d'}$$

y también por def. de producto

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$$

43. Teorema. — Si los miembros de una desigualdad, se multiplican por los de una igualdad entre números negativos se obtiene una desigualdad de sentido contrario al de la dada.

$$\text{HIP.) } \frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} ; \quad \frac{-c}{d} = \frac{-c'}{d'} \quad \text{TESIS) } \frac{a}{b} \cdot \frac{-c}{d} < \frac{a'}{b'} \cdot \frac{-c'}{d'}$$

$$\text{DEMOST.) } \frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \text{ por hip. es } ab' > a'b \text{ por def. de mayor}$$

$$\text{y } \frac{-c}{d} = \frac{-c'}{d'} \text{ por hip. es } (-c) d' = (-c') d \text{ por def. de igual}$$

multiplicando m. a m. da $ab'(-c)d' < a'b(-c')d$ por una propiedad de la multíp. de núms. ent.

y por prop. conmut. y asoc. da $[a(-c)](b'd') < [a'(-c')](bd)$

$$\text{luego, por definición de menor } \frac{a(-c)}{bd} < \frac{a'(-c')}{b'd'}$$

$$\text{o también, por def. prod. } \frac{a}{b} \cdot \frac{-c}{d} < \frac{a'}{b'} \cdot \frac{-c'}{d'}$$

DEFINICIÓN. — Se dice que dos números racionales son *inversos*, cuando el numerador y denominador del uno, son respectivamente el denominador y numerador del otro.

En símbolos: $\frac{+a}{b}$ y $\frac{b}{+a}$; $\frac{-a}{b}$ y $\frac{b}{-a}$ son inversos.

EJEMPLOS: son números inversos.

$$\frac{3}{4} \text{ y } \frac{4}{3} ; \frac{-5}{7} \text{ y } \frac{7}{-5} = \frac{-7}{5} ; -3 \text{ y } \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3}$$

44. **Producto de números inversos.** — Multipliquemos entre sí dos números inversos cualesquiera, por ejemplo:

$$\frac{-5}{7} \cdot \frac{7}{-5} = \frac{(-5)7}{7 \cdot (-5)} = 1 ; 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3} = 1.$$

La propiedad comprobada en los ejemplos anteriores nos conduce a demostrar el siguiente:

COROLARIO. — *El producto de dos números inversos es igual a uno.*

En efecto:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1.$$

CAPITULO V

DIVISION DE NUMEROS RACIONALES

PROGRAMA. — *Definición. Regla práctica. Verificación de la posibilidad de la división, en el campo racional, de números enteros tales que el dividendo no sea múltiplo del divisor. Propiedades uniforme y distributiva con respecto a la suma y a la resta. Ejercicios de las cuatro operaciones fundamentales combinadas con números racionales.*

45. **Definición.** — Se llama *cociente exacto* de un número racional $\frac{a}{b}$ por otro $\frac{c}{d}$ al número racional $\frac{m}{n}$ que multiplicado por el segundo $\frac{c}{d}$ dé por resultado el primero $\frac{a}{b}$.

En símbolos: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ tal que $\frac{m}{n} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

46. **Regla práctica.** — Propongámonos hallar el cociente entre dos números racionales cualesquiera, por ejemplo, $\frac{7}{4}$ y $\frac{5}{8}$, aplicando la regla que nos dieron en la Escuela Primaria y que decía: « para dividir una fracción por otra se multiplica a la primera por la segunda invertida » (inversa de la segunda) tendríamos:

$$\frac{7}{4} : \frac{5}{8} = \frac{7}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{56}{20} = \frac{28}{10} : \text{ y es } \frac{28}{10} \text{ el cociente buscado, puesto que}$$

$$\frac{28}{10} \cdot \frac{5}{8} = \frac{28 \cdot 5}{10 \cdot 8} = \frac{7}{4} \quad \text{que es el dividendo}$$

Veamos si el procedimiento aplicado es general, es decir si:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Efectivamente $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ es el cociente de $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$

puesto que $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}$ que es el dividendo.

Esta verificación nos permite enunciar correctamente la conocida regla práctica, que dice así:

REGLA. — *El cociente entre dos números racionales se obtiene multiplicando al dividendo por el inverso del divisor.*

APLICACIONES:

$$\frac{-3}{5} : \frac{-11}{2} = \frac{-3}{5} \cdot \frac{2}{-11} = \frac{-6}{-55} = \frac{6}{55}$$

$$-7 : \frac{-1}{5} = -7 \times -5 = 35$$

$$\frac{3}{4} : -5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{-5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot (-5)} = \frac{3}{-20} = \frac{-3}{20} = -\frac{3}{20}$$

47. Verificación de la posibilidad de la división, en el campo racional, de números enteros tales que el dividendo no sea múltiplo del divisor. — La regla anterior nos dice que la división entre números racionales se transforma en una multiplicación, y como esta operación es siempre posible, la primera también lo es, vale decir: *dados dos números racionales cualesquiera, existe siempre otro número racional que es el cociente de los dos dados.*

Siendo los números enteros, números racionales (nº 5) la imposibilidad de encontrar el cociente entre dos números enteros cuan-

do el dividendo no es múltiplo del divisor habrá desaparecido con la creación de los números racionales.

Ejemplos: $7 : 5 = \frac{7}{1} : \frac{5}{1} = \frac{7}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{5}$

$-3 : -8 = \frac{-3}{1} : \frac{-8}{1} = \frac{-3}{1} \cdot \frac{-1}{8} = \frac{3}{8}$

OBSERVACION I. — Estos ejemplos nos muestran que: el cociente exacto de dos números enteros, es una fracción que tiene por numerador al dividendo y por denominador al divisor.

Así $a : b = \frac{a}{b}$, ejemplo $-8 : 3 = \frac{-8}{3}$.

OBSERVACION II. — Recíprocamente toda fracción se puede considerar como el cociente exacto de su numerador por su denominador. Así:

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

De la observación I resulta que el cociente de dos números enteros puede escribirse en forma de fracción substituyendo el signo (:) por la raya de fracción. Siendo ventajoso, convendremos en escribir el cociente de dos números racionales cualesquiera en la misma forma. Así, por ejemplo:

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} ; -3 : \frac{1}{2} = \frac{-3}{\frac{1}{2}} \text{ y en general } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Los denominadores b y d de los términos de las fracciones se llaman *denominadores secundarios*.

OBSERVACION III. —

Consideremos la fracción de términos racionales $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$.

$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{7}{5}$

Siendo por obs. II. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ efectuando ésta operación da

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} \quad \text{donde se puede ob-}$$

servar que el denominador secundario de cada término de la fracción dada, se multiplica por el numerador del otro término.

En general
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

APLICACIONES.—

$$\frac{\frac{11}{5}}{\frac{-3}{4}} = \frac{11 \cdot 4}{-3 \cdot 5} = \frac{44}{-15} = -\frac{44}{15};$$

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{-2}{-2}} = \frac{3}{-2 \cdot 5} = \frac{3}{-10} = -\frac{3}{10};$$

$$\frac{\frac{7}{-3}}{\frac{2}{2}} = \frac{7 \cdot 2}{-3} = \frac{14}{-3} = -\frac{14}{3}.$$

48. **Propiedades.** — Siendo la División de números racionales la operación inversa a la Multiplicación, y valiendo para esta última las mismas propiedades de la de los números naturales, la División de números racionales gozará de las mismas propiedades que la de los números naturales y sus demostraciones podrán hacerse por razonamientos análogos.

Se tendrá, pues, que la División goza de las siguientes propiedades:

COROLARIO DE LA DEFINICIÓN. — *Un número racional no altera cuando se lo multiplica por otro y al resultado se lo divide por este último y viceversa.*

En símbolos:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

PROPIEDAD UNIFORME. — *Dividiendo miembro a miembro dos igualdades entre números racionales se obtiene otra igualdad.*

En símbolos:

si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ y $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ es $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} : \frac{c'}{d'}$

PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS (*). — *El cociente de una suma (diferencia) por un número es igual a la suma (diferencia) de los cocientes de cada una de los términos por dicho número.*

En símbolos:

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n} \pm \frac{c}{d} : \frac{m}{n}$$

LEY DE MONOTONÍA. — *Dividiendo miembro a miembro una desigualdad de números racionales por una igualdad, entre números racionales positivos, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.*

En símbolos:

$$\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \quad \text{es} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} : \frac{c'}{d'}.$$

(*) Como ejemplo para que el alumno vea que con el mismo razonamiento hecho al demostrar las propiedades de la división de números naturales, (*Aritmética*, 1ª parte n° 87), puede demostrarse una cualquiera de ellas, la propiedad distributiva de la división con respecto a la adición, por ejemplo, demostraremos que:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n} + \frac{c}{d} : \frac{m}{n}.$$

En efecto:

Para que sea $\frac{a}{b} : \frac{m}{n} + \frac{c}{d} : \frac{m}{n}$ el cociente de $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ por $\frac{m}{n}$

debe ser $\left(\frac{a}{b} : \frac{m}{n} + \frac{c}{d} : \frac{m}{n} \right) \frac{m}{n} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ por definición de cociente

Pero $\left(\frac{a}{b} : \frac{m}{n} + \frac{c}{d} : \frac{m}{n} \right) \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b} : \frac{m}{n} \right) \frac{m}{n} + \left(\frac{c}{d} : \frac{m}{n} \right) \frac{m}{n}$ por prop. distributiva de la multiplicación. Simplificando queda

$$\left(\frac{a}{b} : \frac{m}{n} + \frac{c}{d} : \frac{m}{n} \right) \frac{m}{n} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \quad \text{que es el dividendo}$$

luego $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) : \frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{m}{n} + \frac{c}{d} : \frac{m}{n}.$

CAPÍTULO VI.

POTENCIACION Y RADICACION DE NUMEROS RACIONALES

PROGRAMA. — *Potencia de números racionales con exponente natural. Regla práctica para elevar una fracción a una potencia. Toda potencia de una fracción irreducible es otra fracción irreducible. Potencias con exponente negativo: definición. Verificación de que en las potencias con exponente negativo se conservan las propiedades de las potencias con exponente natural. Extensión de la regla para dividir potencias de igual base al caso en que el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor. Raíz enésima de un número racional. Definición. Raíz cuadrada. Si la raíz cuadrada de un número natural no es un número natural tampoco es un número fraccionario. Raíz cuadrada aproximada de un número con menor error que un enésimo. Regla práctica para obtenerla. Ejercicios.*

49. Potencias de números racionales con exponente natural.

— DEFINICIÓN. — Se llama potencia cero de un número racional cualquiera $\frac{a}{b}$ al número uno.

En símbolos:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1.$$

EJEMPLO:
$$\left(-\frac{3}{4}\right)^0 = 1; \left(\frac{7}{2}\right)^0 = 1.$$

DEFINICIÓN II. — Se llama potencia primera de un número racional $\frac{a}{b}$ al mismo número $\frac{a}{b}$.

En símbolos:
$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

EJEMPLO: $\left(\frac{-8}{3}\right)^1 = \frac{-8}{3} ; \left(\frac{4}{7}\right)^1 = \frac{4}{7}.$

DEFINICIÓN III. — Se llama *potencia enésima* de un número racional cualquiera $\frac{a}{b}$, (siendo n un número natural mayor que uno), al producto de n factores iguales a $\frac{a}{b}$.

En símbolos: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}^n.$

EJEMPLOS:

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^3 = \frac{-3}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{(-3)(-3)(-3)}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-27}{8}$$

$$\left(\frac{-8}{5}\right)^4 = \frac{-8}{5} \cdot \frac{-8}{5} \cdot \frac{-8}{5} \cdot \frac{-8}{5} = \frac{(-8)(-8)(-8)(-8)}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{(-8)^4}{5^4} = \frac{4096}{625}.$$

50. **Regla práctica.** — Los ejemplos anteriores nos hacen sospechar que para elevar a potencia un número fraccionario, basta elevar su numerador y su denominador a dicha potencia.

Veamos si el procedimiento es general, es decir si:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Efectivamente:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}^n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n}{\overbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}^n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Esta verificación nos permite enunciar la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para elevar un número racional a una potencia, se elevan su numerador y su denominador a dicha potencia.*

APLICACIONES. —

$$\left(\frac{10}{3}\right)^7 = \frac{10^7}{3^7}; \left(\frac{-3}{4}\right)^5 = \frac{(-3)^5}{4^5} = \frac{-3^5}{4^5}; \left(\frac{-1}{7}\right)^6 = \frac{(-1)^6}{7^6} = \frac{1^6}{7^6}$$

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS DE NÚMEROS RACIONALES.

Siendo las definiciones de potencia con exponente natural de números racionales, las mismas que las de las potencias de números naturales, todas las propiedades de estas últimas basadas en dichas definiciones, seguirán siendo válidas para las primeras, pues sus demostraciones podrían aplicarse sin modificación alguna.

Se tendrá, pues, que la Potenciación gozará de las siguientes propiedades:

PROPIEDAD UNIFORME. — *Si ambos miembros de una igualdad de números racionales, se elevan a una misma potencia, se obtiene otra igualdad.*

En símbolos: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m$

PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS I. — *La potencia emésima de un producto de números racionales, es igual al producto de las potencias emésimas de los factores.*

En símbolos:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m \cdot \left(\frac{e}{f}\right)^m$$

EJEMPLOS:

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{4} \cdot -4\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^3 \cdot (-4)^3 = \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{(-1)^3}{4^3} \cdot -4^3 = \\ = \frac{8}{27} \cdot \frac{-1}{64} \cdot -64 = \frac{8}{27}$$

II) *La potencia emésima de un cociente de números racionales es igual al cociente de las potencias emésimas del dividendo y divisor.*

En símbolos: $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{c}{d}\right)^m$

EJEMPLO:

$$\left(\frac{3}{5} : \frac{-8}{7}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 : \left(\frac{-8}{7}\right)^2 = \frac{9}{25} : \frac{64}{49} = \frac{441}{1600}$$

PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE. — *El producto de potencias de igual base de números racionales es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas.*

En símbolos: $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n+p}$

EJEMPLO:

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{-3}{5}\right)^7 = \left(\frac{-3}{5}\right)^{2+4+7} = \left(\frac{-3}{5}\right)^{13} = \frac{-3^{13}}{5^{13}}$$

COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE. — *El cociente de dos potencias de igual base entre números racionales es otra potencia, de la misma base, cuyo exponente es la diferencia entre los exponentes del dividendo y divisor, (siempre que el exponente del dividendo sea mayor o igual que el del divisor).*

En símbolos :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

EJEMPLO :

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^5 : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{5-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}.$$

POTENCIA DE UNA POTENCIA. — *La potencia de una potencia de un número racional, es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es el producto de los exponentes.*

En símbolos :

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

EJEMPLO :

$$\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^3\right]^2 = \left(-\frac{3}{4}\right)^{3 \cdot 2} = \left(-\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^6}{4^6} = \frac{729}{4096}.$$

51. Potencia de una fracción irreducible. — Consideremos la fracción irreducible $\frac{3}{5}$; elevándola sucesivamente a la 2^{da}, 3^a y 4^a . . . potencia, tendríamos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{9}{25} \quad ; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{27}{125} \quad ;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{81}{625} ; \dots$$

donde se puede observar que las fracciones obtenidas $\frac{9}{25}$, $\frac{27}{125}$,

$\frac{81}{625}$ son también irreducibles, porque no pueden simplificarse pues en el numerador de ellas figura solamente el factor 3 y en el denominador únicamente el factor 5 que son primos entre sí.

Como la misma observación podría hacerse con las potencias de cualquier otra fracción irreducible, resulta que:

Toda potencia de una fracción irreducible, es otra fracción irreducible.

En símbolos: Si $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible también $\left(\frac{a}{b}\right)^m$ es irreducible.

52. Potencias con exponente negativo. — En las potencias estudiadas hasta ahora, el exponente era siempre un número natural. Así tienen significado claro para nosotros las expresiones tales como:

$$3^0 ; (-2)^4 ; \left(-\frac{3}{5}\right)^5 \text{ etc.}$$

Vamos a extender ahora el estudio de las potencias, al caso en que el exponente de éstas sea un número entero negativo.

Como la definición de potencia con exponente natural, no es aceptable en el caso en que el exponente sea negativo, pues no tiene sentido hablar de un producto de un número negativo de factores, daremos una nueva definición. Por razones que después veremos los Matemáticos han preferido la siguiente:

DEFINICIÓN. — Toda *potencia con exponente negativo* de un número racional, significa el cociente del número uno por una potencia de la misma base, con exponente positivo y de igual valor absoluto que el de la dada.

En símbolos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

EJEMPLOS:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} ; (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8} = -\frac{1}{8};$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^5} = \frac{1}{\frac{3^5}{4^5}} = 1 : \frac{3^5}{4^5} = \frac{4^5}{3^5}.$$

En lo que sigue, con el objeto de simplificar la escritura de estas expresiones, representaremos a los números racionales por las letras del alfabeto griego α , β , γ , ...

Así, por ejemplo:

α representa al n.º 5, o al -8 , o al $-\frac{3}{2}$, o al $\frac{4}{5}$...

y en general

α representa al n.º a , o al a , o al $\frac{a}{b}$

54. Verificación de que en las potencias con exponente negativo se conservan las propiedades de las potencias con exponente natural. — La definición de potencia con exponente negativo elegida, que puede parecer arbitraria, tiene la ventaja de que con ella todas las propiedades de las potencias son exponente natural, siguen siendo válidas para estas nuevas potencias lo que se demuestra aplicando la definición.

PROPIEDAD UNIFORME. — *Si ambos miembros de una igualdad, se elevan a una misma potencia de exponente negativo, se obtiene otra igualdad.*

En símbolos: Si $\alpha = \beta$ es $\alpha^{-m} = \beta^{-m}$

DEMOST.) Siendo $\alpha^{-m} = \frac{1}{\alpha^m}$ y $\beta^{-m} = \frac{1}{\beta^m}$ por definición,
demostrar que $\alpha^{-m} = \beta^{-m}$ será equivalente a demostrar que
 $\frac{1}{\alpha^m} = \frac{1}{\beta^m}$ lo que es cierto, pues
si $\alpha = \beta$ por hip. es $\alpha^m = \beta^m$ por prop. uniforme potenciación
luego $\frac{1}{\alpha^m} = \frac{1}{\beta^m}$ por cor. fracciones iguales

PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS. — *La potencia de exponente negativo de un producto, es igual al producto de las potencias de los factores.*

En símbolos: $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{-m} = \alpha^{-m} \cdot \beta^{-m} \cdot \gamma^{-m}$

DEMOST.) Siendo $(\alpha \beta \gamma)^{-m} = \frac{1}{(\alpha \beta \gamma)^m}$ por definición
 y $(\alpha \beta \gamma)_m = \alpha^m \cdot \beta^m \cdot \gamma^m$ por prop. distributiva de la
 potenciación de números racionales con exponente natural
 resulta $(\alpha \beta \gamma)^{-m} = \frac{1}{\alpha^m \beta^m \gamma^m}$
 o también $(\alpha \beta \gamma)^{-m} = \frac{1}{\alpha^m} \cdot \frac{1}{\beta^m} \cdot \frac{1}{\gamma^m}$ por defin. de producto
 de números racionales
 pero como $\frac{1}{\alpha^m} = \alpha^{-m}$, $\frac{1}{\beta^m} = \beta^{-m}$ y $\frac{1}{\gamma^m} = \gamma^{-m}$ por definición,
 se tiene $(\alpha \beta \gamma)^{-m} = \alpha^{-m} \cdot \beta^{-m} \cdot \gamma^{-m}$

EJEMPLOS; $\left(-2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5\right)^{-2} = (-2)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 5^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{5^2}$
 $= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3^2}} \cdot \frac{1}{5^2} = \frac{1}{2^2 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot 5^2} = \frac{1}{\frac{2^2 \cdot 5^2}{3^2}}$
 $= 1 \cdot \frac{3^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{3^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{9}{100}.$

II. — *La potencia con exponente negativo de un cociente, es igual al cociente de las potencias, de igual exponente, del dividendo y divisor.*

En símbolos: $(\alpha : \beta)^{-m} = \alpha^{-m} : \beta^{-m}.$

DEMOST.) Si $\alpha : \beta = \gamma$ es $\alpha = \beta \cdot \gamma$ por definic. de cociente
 y $\alpha^{-m} = (\beta \cdot \gamma)^{-m}$ por prop. unif. potenc.
 y también $\alpha^{-m} = \beta^{-m} \cdot \gamma^{-m}$ por prop. el teor. ant.
 resulta $\alpha^{-m} : \beta^{-m} = \gamma^{-m}$ por defin. de cociente
 y sustituyendo a γ por su igual $\alpha : \beta$ resulta:
 $\alpha^{-m} : \beta^{-m} = (\alpha : \beta)^{-m}$
 luego $(\alpha : \beta)^{-m} = \alpha^{-m} : \beta^{-m}$

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{4} : 8\right)^{-3} &= \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} : 8^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^3} : \frac{1}{8^3} = \frac{1}{-\frac{3^3}{4^3}} : \frac{1}{8^3} \\ &= \frac{4^3}{-3^3} \cdot 8^3 = \frac{4^3 \cdot 8^3}{-3^3} = \frac{64 \cdot 512}{-27} = -\frac{32768}{27} \end{aligned}$$

PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE. — TEOREMA. — *El producto de potencias de igual base y exponente negativo, es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias dadas.*

En símbolos $\alpha^{-m} \cdot \alpha^{-n} \cdot \alpha^{-p} = \alpha^{(-m)+(-n)+(-p)}$

DEMOSTR.) De acuerdo con la definición de potencia con exponente negativo se tiene:

$$1^{\text{er}} \text{ miembro: } \alpha^{-m} \cdot \alpha^{-n} \cdot \alpha^{-p} = \frac{1}{\alpha^m} \cdot \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{\alpha^p} = \frac{1}{\alpha^m \cdot \alpha^n \cdot \alpha^p}$$

y como para multiplicar potencias de igual base de exponente natural, se suman los exponentes, se tiene:

$$\alpha^{-m} \cdot \alpha^{-n} \cdot \alpha^{-p} = \frac{1}{\alpha^{m+n+p}} \quad [1]$$

Por otra parte el 2º miembro da:

$$\alpha^{(-m)+(-n)+(-p)} = \alpha^{-(m+n+p)} \quad \text{por def. suma n}^{\text{os}} \text{ ents.}$$

o bien

$$\alpha^{(-m)+(-n)+(-p)} = \frac{1}{\alpha^{m+n+p}} \quad [2] \quad \text{por def. pot. exp. neg.}$$

Luego de [1] y [2] resulta por consecuencia II del carácter transitivo:

$$\alpha^{-m} \cdot \alpha^{-n} \cdot \alpha^{-p} = \alpha^{(-m)+(-n)+(-p)}$$

APLICACIÓN.—

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{4}\right)^{(-2) + (-4) + (-5)} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-11} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{11}} = \frac{1}{\frac{3^{11}}{4^{11}}} = \frac{4^{11}}{3^{11}}.$$

COCIENTE DE POTENCIAS DE IGUAL BASE. — *El cociente de dos potencias de igual base y exponente negativo, es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es la diferencia entre el exponente del dividendo y el del divisor.*

En símbolos $\alpha^{-m} : \alpha^{-n} = \alpha^{(-m) - (-n)}$

DEMOST.) Para que sea $\alpha^{(-m) - (-n)}$ el cociente de dividir α^{-m} por α^{-n} debe ser por definición de cociente:

Cociente $\alpha^{(-m) - (-n)}$, divisor α^{-n} = dividendo α^{-m}

Efectivamente $\alpha^{(-m) - (-n)} \cdot \alpha^{-n} = \alpha^{(-m) - (-n) + (-n)}$ por el teor. ant.

Simplificando el segundo miembro resulta:

$$\alpha^{(-m) - (-n)} \cdot \alpha^{-n} = \alpha^{-m} \quad \text{que es el dividendo}$$

luego $\alpha^{-m} : \alpha^{-n} = \alpha^{(-m) - (-n)}$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-5} : \left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{7}\right)^{(-5) - (-3)} = \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{7^{-2}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{49}} = \frac{49}{4}$$

POTENCIA DE POTENCIA. — TEOREMA. — *La potencia de exponente negativo de una potencia con exponente negativo, es otra potencia de la misma base cuyo exponente es el producto de los exponentes.*

En símbolos: $(\alpha^{-m})^{-n} = \alpha^{(-m)(-n)}$

DEMOST.)

Siendo $(\alpha^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{\alpha^m}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^m}\right)^n}$ por def. pot. exp. negat.

$$y \quad (\alpha^{-m})^{-n} = \frac{1}{\frac{1}{(\alpha^m)^n}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha^{mn}}} = 1 : \frac{1}{\alpha^{mn}} = \alpha^{mn} \quad [1]$$

Por otra parte $\alpha^{(-m)(-n)} = \alpha^{mn} \quad [2] \quad$ por def. prod. núms. ent.

Luego de [1] y [2] resulta por consec. II carácter transitivo:

$$(\alpha^{-m})^{-n} = \alpha^{(-m)(-n)}$$

APLICACIONES. —

$$\begin{aligned} (-3^2)^{-4} &= -3^2 \cdot (-4) = (-3)^{-8} = \frac{1}{(-3)^8} = \frac{1}{3^8} = \frac{1}{6561} \\ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\right]^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{(-5) \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{\frac{1}{2^{10}}} = 2^{10} = 1024 \\ \left[\left(-\frac{3}{4}\right)^{-4}\right]^{-3} &= \left(-\frac{3}{4}\right)^{(-4) \cdot (-3)} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{12} = \frac{(-3)^{12}}{4^{12}} = \frac{3^{12}}{4^{12}}. \end{aligned}$$

54. Extensión de la regla para dividir potencias de igual base. —

Además de la ventaja que representa el hecho de poder operar con las potencias de exponente negativo, en la misma forma que con las de exponente natural, existe la de poder extender la regla de la división de potencias de igual base, al caso en que el exponente del dividendo sea menor que el del divisor.

207
6 4 6 2

Sea por ejemplo dividir a^5 por a^9 .

Como
$$a^5 : a^9 = \frac{a^5}{a^9}$$

dividiendo ambos términos del segundo miembro por a^5 , resulta:

$$a^5 : a^9 = \frac{1}{a^{9-5}} \quad \text{y por def. pot. exp. negat.}$$

$$a^5 : a^9 = a^{-(9-5)} \quad \text{y como } -(9-5) = 5-9$$

es

$$a^5 : a^9 = a^{5-9}$$

es decir: *para dividir dos potencias de igual base se restan los exponentes.*

EJEM.:
$$3^5 : 3^7 = 3^{5-7} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Nota.—Combinando potencias con exponentes positivos con otras de exponentes negativos, podrán presentarse casos tales como:

$$a^m \cdot a^{-n} \qquad a^m : a^{-n} \qquad (a^m)^{-n}$$

$$a^{-m} \cdot a^n \qquad a^{-m} : a^n \qquad (a^{-m})^n$$

en todos los cuales, son aplicables también las mismas reglas de las potencias con exponente natural o negativo, las que podrán demostrarse por procedimientos análogos a los seguidos en este mismo capítulo.

Así por ejemplo: $a^3 \cdot a^{-5} = a^{3+(-5)} = a^{-2}$

$$2^{-7} \cdot 2^3 = 2^{(-7)+3} = 2^{-4}$$

$$a^4 : a^{-5} = a^{4-(-5)} = a^9 \qquad (a^2)^{-7} = a^{2 \cdot (-7)} = a^{-14}$$

$$(-5)^{-3} : (-5)^8 = 5^{(-3)-8} = 5^{-11}; \quad \left[\left(\frac{7}{4} \right)^{-3} \right]^5 = \left(\frac{7}{4} \right)^{-3 \cdot 5} = \left(\frac{7}{4} \right)^{-15}$$

8

55. **Raíz enésima de un número decimal.** — DEFINICION. — Se llama *raíz enésima* de un número racional $\frac{a}{b}$, siendo n un número natural, al número racional $\frac{x}{y}$, que elevado a la potencia enésima sea igual a $\frac{a}{b}$.

En símbolos:
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} \quad \text{si} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{a}{b}.$$

El número $\frac{a}{b}$ se llama *radicando* y el n *índice*.

EJEMPLOS:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} \quad \text{puesto que} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} = \frac{-1}{2} \quad \text{puesto que} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{32}$$

56. **Definición.** — Cuando el índice n es 2 la raíz se llama *cuadrada* y se indica con el signo $\sqrt{}$ sin índice.

EJEMPLO:
$$\sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{9}{5} \quad \text{puesto que} \quad \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$$

57. **Raíz cuadrada de los números que no son cuadrados perfectos.** — Tratemos de ver si la raíz cuadrada exacta de un número natural que no es cuadrado perfecto, puede ser un número fraccionario puro. Consideremos, por ejemplo, el número 5.

Sabemos que $\sqrt{(5)} = 2$ o sea que $2^2 < 5 < 3^2$.

Esto puede hacer suponer que la raíz cuadrada exacta de 5 sea

un número fraccionario puro comprendido entre 2 y 3, por ejemplo: el $2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}$.

Pero $\left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{169}{36} = 4\frac{25}{36} < 5$ luego $\frac{13}{6}$ no es la $\sqrt{5}$

en cambio $\left(\frac{14}{6}\right)^2 = \frac{196}{36} = 5\frac{16}{36} > 5$ luego $\frac{14}{6}$ no es la $\sqrt{5}$

Si ensayáramos con otros números fraccionarios, no encontraríamos ninguno que fuese la $\sqrt{5}$ pues si suponemos que $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ siendo $\frac{a}{b}$ irreducible, sería:

$$5 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ absurdo}$$

puesto que $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ es también irreducible y por lo tanto no puede ser igual a un número entero.

Como la misma observación puede hacerse con cualquier otro número natural que no sea cuadrado perfecto podemos deducir que: *Si la raíz cuadrada de un número natural no es un número entero tampoco es un número fraccionario.*

58. Raíz cuadrada aproximada. — Ya que en el caso en que la raíz cuadrada de un número natural no es otro número natural tampoco es fraccionario, convendrá hallar una raíz aproximada, es decir, un número tal que su cuadrado difiera del radicando en menos de $\frac{1}{2}$, o $\frac{1}{3}$, o $\frac{1}{4}$, etc. . . Con ese objeto damos la siguiente:

DEFINICIÓN. — Se llama *raíz cuadrada aproximada* de un número que no es cuadrado perfecto, *con menor error que un enésimo*, a la mayor fracción de denominador n cuyo cuadrado es menor que el número dado.

NOTACIÓN.—

$\sqrt[n]{a}$ se lee: *raíz cuadrada de a con menor error que un enésimo.*
 $\varepsilon < \frac{1}{n}$

En símbolos: Es $\sqrt[n]{a} = \frac{x}{n}$ si $\left(\frac{x}{n}\right)^2 < a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2$
 $\varepsilon < \frac{1}{n}$

Procuremos hallar, por ejemplo, la $\sqrt{6}$.
 $\varepsilon < \frac{1}{5}$

Siendo $\sqrt{6} = 2$, pues $2^2 < 6 < 3^2$, su raíz cuadrada aproximada con menor error que $\frac{1}{5}$ tendrá que ser: $2\frac{1}{5}$, o $2\frac{2}{5}$, o $2\frac{3}{5}$, o $2\frac{4}{5}$; pero como

$$\left(2\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25} = 4\frac{21}{25} < 6$$

$$\left(2\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} = 5\frac{19}{25} < 6$$

y
$$\left(2\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{169}{25} = 6\frac{19}{25} > 6$$

es
$$\sqrt{6} = \frac{12}{5} \text{ pues } \left(\frac{12}{5}\right)^2 < 6 < \left(\frac{13}{5}\right)^2.$$

 $\varepsilon < \frac{1}{5}$

El teorema que sigue, nos permite calcular la raíz cuadrada aproximada de un número con menor error que un enésimo, sin necesidad de hacer pruebas inútiles.

59. Teorema.—*La raíz cuadrada de un número con menor error que un enésimo, es una fracción de denominador n , cuyo numerador es la raíz cuadrada entera del producto del número dado por el cuadrado de n .*

HIP.) a no es cuad. perfecto. TESIS) $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{(a \cdot n^2)}}{n}$
 $\varepsilon < \frac{1}{n}$

DEMOST.) Sea, por ejemplo, probar que $\sqrt{6} = \frac{\sqrt{(6 \cdot 5^2)}}{5}$
 $\varepsilon < \frac{1}{5}$

Si $\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{x}{5}$ [1] es $\left(\frac{x}{5}\right)^2 < 6 < \left(\frac{x+1}{5}\right)^2$ por definición
 $\varepsilon < \frac{1}{5}$

o sea $\frac{x^2}{5^2} < 6 < \frac{(x+1)^2}{5^2}$

mult. por 5^2 y simpl. da $x^2 < 6 \cdot 5^2 < (x+1)^2$

lo que nos dice que x es la raíz cuadrada entera de 6×5^2 pues x es el mayor número que elevado al cuadrado es $\leq$ que el radicando

luego $\sqrt{(6 \cdot 5^2)} = x$

Sustituyendo x en [1] resulta:

$$\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{(6 \cdot 5^2)}}{5}$$

$$\varepsilon < \frac{1}{5}$$

y en general

$$\sqrt{\frac{a}{n}} = \frac{\sqrt{(a \cdot n^2)}}{n}$$

$$\varepsilon < \frac{1}{n}$$

APLICACIONES. — EJEMPLO I:

$$\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{(6 \cdot 5^2)}}{5} = \frac{\sqrt{(6 \cdot 25)}}{5} = \frac{\sqrt{(150)}}{5}$$

$$\varepsilon < \frac{1}{5}$$

y como $\sqrt{\frac{150}{1}}$ resulta $\sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$

1	12
50	22
44	2
6	

$$\varepsilon < \frac{1}{5}$$

EJEMPLO II:

$$\sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{(2 \cdot 100^2)}}{100} = \frac{\sqrt{(2 \cdot 10000)}}{100} = \frac{\sqrt{(20\,000)}}{100}$$

$$\varepsilon < \frac{1}{100}$$

y como $\sqrt{\frac{20\,000}{1}}$ resulta: $\sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{141}{100} = 1 \frac{41}{100}$

1	141
10 0	24
96	4
4 00	281
2 81	1
1 19	

$$\varepsilon < \frac{1}{100}$$

EJEMPLO III:

$$\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{(7 \cdot 3^2)}}{3} = \frac{\sqrt{(7 \cdot 9)}}{3} = \frac{\sqrt{(63)}}{3}$$

$$\varepsilon < \frac{1}{3}$$

y como $\sqrt{63} = 7$ resulta $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3} = 2 \frac{1}{3}$

$$\varepsilon < \frac{1}{3}$$

CAPITULO VII

FRACCIONES DECIMALES

PROGRAMA. — *Definición. Relaciones entre las unidades decimales de los diversos órdenes. Descomposición de fracciones decimales propias e impropias en unidades de diversos órdenes. Escritura de las fracciones decimales en forma entera. División de un número entero por la unidad seguida de ceros. Multiplicación y división de un número decimal por la unidad seguida de ceros. Un número decimal no altera si se agregan ceros a la derecha de su última cifra decimal.*

60. Fracciones decimales — Entre los números fraccionarios vamos a hacer un estudio especial de aquellos cuyos denominadores son 10, 100, 1000, pues las particularidades que presentan, permiten operar con ellos, como veremos en seguida, en forma análoga a la que se hizo con los números naturales en Primer Año. (Ver *Aritmética*, 1ª parte, Cap. XIV).

Estos números son ya conocidos desde la Escuela Primaria por los alumnos, pues se trata de los «*Números decimales*» de los cuales daremos la siguiente:

DEFINICIÓN. — Se llama *fracción decimal* a toda fracción cuyo numerador es un número entero y cuyo denominador es la unidad seguida de un *determinado* número de ceros, es decir una potencia de diez.

En símbolos: $\frac{a}{10}$; $\frac{a}{100}$; . . . $\frac{a}{10^n}$ son fracciones decimales.

EJEMPLOS: Son fracciones decimales:

$$\frac{3}{10} \quad ; \quad \frac{-5}{100} \quad ; \quad \frac{18}{10\,000} \quad ; \quad \frac{189}{1\,000\,000}$$

En forma análoga a la hecha en el Sistema de Numeración Decimal, se definen para las fracciones decimales las unidades de los distintos órdenes, de acuerdo con las siguientes:

DEFINICIONES. — La fracción:

$$\frac{1}{10} \quad \text{se llama} \quad \textit{un décimo} \quad \text{o} \quad \text{unidad de 1}^{\text{er}} \text{ orden decimal}$$

$$\frac{2}{10} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \textit{dos décimos}$$

.....

$$\frac{a}{10} \quad \text{»} \quad \textit{a décimos}$$

$$\frac{1}{100} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \textit{un centésimo} \quad \text{o} \quad \text{unidad de 2}^{\text{o}} \text{ orden decimal}$$

$$\frac{2}{100} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \textit{dos centésimos}$$

.....

$$\frac{n}{100} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \textit{n centésimos}$$

$$\frac{1}{1000} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \textit{un milésimo} \quad \text{o} \quad \text{unidad de 3}^{\text{er}} \text{ orden decimal}$$

.....

OBSERVACIÓN. — Siendo $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$; $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$;

$\frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$. . . se nota que el orden de las unidades decimales, está dado por el exponente de la potencia de diez que figura en su denominador.

61. Relaciones entre las unidades decimales de los diversos órdenes.— Verificaremos aquí, las relaciones existentes entre las unidades decimales de diversas órdenes, que los alumnos conocen desde la Escuela Primaria.

$$\text{Siendo } 1 = \frac{10}{10} = \frac{100}{100} = \frac{1000}{1000} = \dots \text{ por una conv. ant. (nº 6)}$$

resulta

$$1 \text{ unid. simple} = 10 \text{ décimos} = 100 \text{ centésimos} = 1000 \text{ milésimos} \dots$$

$$\text{Siendo } \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = \frac{100}{1000} = \dots \text{ por un teor. ant. (nº 12)}$$

$$\text{resulta } 1 \text{ décimo} = 10 \text{ centésimos} = 100 \text{ milésimos} = \dots$$

En la misma forma se tiene

$$\frac{1}{100} = \frac{10}{1000} = \frac{100}{10\,000} = \dots \text{ por lo tanto}$$

$$1 \text{ centésimo} = 10 \text{ milésimos} = 100 \text{ diez milésimos} = \dots$$

todo lo cual nos dice que: *Cada unidad decimal de un cierto orden es igual a diez unidades del orden inmediato (superior)? superior*

62. Descomposición de fracciones decimales en unidades de diversos órdenes.— Para efectuar dicha descomposición consideraremos dos casos, según que las fracciones sean propias o impropias.

$$1.^{\text{er}} \text{ CASO. — Sea la fracción propia } \frac{523}{1000}.$$

Descomponiendo el numerador en forma polinómica, se tiene:

$$523 = 5.100 + 2.10 + 3$$

luego $\frac{523}{1000} = \frac{5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 3}{1000}$ por un corolario de la relación de igualdad.

Descomponiendo la fracción del 2º miembro en otras tres que tengan por numeradores a los sumandos del numerador, tendremos, de acuerdo con la definición I de suma:

$$\frac{523}{1000} = \frac{5 \cdot 100}{1000} + \frac{2 \cdot 10}{1000} + \frac{3}{1000}$$

y simplificando queda

$$\frac{523}{1000} = \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} \quad \text{lo que nos}$$

dice que la fracción dada es la suma de cinco décimos, más dos centésimos, más tres milésimos.

Consideremos ahora un nuevo ejemplo, y sea éste descomponer la fracción $\frac{24}{1000}$ en unidades de los diversos órdenes. Procediendo como en el caso anterior tendríamos:

$$\frac{24}{10\,000} = \frac{2 \cdot 10 + 4}{10\,000} = \frac{2 \cdot 10}{10\,000} + \frac{4}{10\,000} = \frac{2}{1000} + \frac{4}{10\,000}$$

Si queremos que figuren todas las unidades decimales anteriores a los milésimos, escribimos

$$\frac{24}{10\,000} = \frac{0}{10} + \frac{0}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{4}{10\,000}$$

lo que nos dice que la fracción dada es igual a la suma de cero décimos, más cero centésimos, más dos milésimos, más cuatro diez milésimos, o sea el desarrollo de la fracción.

$$\frac{0024}{10\,000}$$

Observando los ejemplos tratados, y considerando que en la misma forma se podrá proceder con cualquier otra fracción decimal, deducimos la siguiente:

REGLA. — *Para descomponer una fracción decimal propia en sus unidades de diversos órdenes, se consideran separadas en el numerador de derecha a izquierda, tantas cifras como ceros acompañan a la unidad en el denominador, completando el número de cifras del numerador con ceros colocados a la izquierda de la última cifra, si fuese necesario. Se escribe el número dado, como suma de fracciones decimales, cuyos numeradores son sus cifras consideradas a partir de la izquierda teniendo presente que la primera representa décimos, la segunda centésimos, etc.*

APLICACIÓN. —

$$\frac{2508}{100\ 000} = \frac{02508}{100\ 000} = \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{0}{10\ 000} + \frac{8}{100\ 000}.$$

2.º CASO. — Sea descomponer la fracción impropia $\frac{21845}{1000}$. Escribiendo su numerador en forma polinómica y procediendo como en el 1.º caso tendríamos:

$$\begin{aligned} \frac{21\ 845}{1\ 000} &= \frac{2 \cdot 10\ 000 + 1 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5}{1000} \\ &= \frac{2 \cdot 10\ 000}{1000} + \frac{1 \cdot 1000}{1000} + \frac{8 \cdot 100}{1000} + \frac{4 \cdot 10}{1000} + \frac{5}{1000} \\ &= 2 \cdot 10 + 1 + \frac{8}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000} \\ &= 21 + \frac{8}{10} + \frac{4}{100} + \frac{5}{1000}, \end{aligned} \quad \text{lo que}$$

nos dice que la fracción dada es la suma de veintiuna unidades

simples, más ocho décimos, más cuatro centésimos, más cinco milésimos.

El ejemplo considerado y todos los que pudieran presentarse nos conducen a dar la siguiente:

REGLA. — *Para descomponer una fracción decimal impropia en sus unidades de los diversos órdenes, se separan en el numerador, con una coma, de derecha a izquierda, tantas cifras como ceros acompañan a la unidad en el denominador. Se escribe el número dado, como suma del número entero formado por las cifras significativas colocadas a la izquierda de la coma, más una serie de fracciones decimales, cuyos numeradores son las cifras de su numerador, consideradas a partir de la coma de izquierda a derecha, teniendo presente que la primera representa décimos, la segunda centésimos, etc.*

APLICACIÓN.
$$\frac{1403}{100} = \frac{14'03}{100} = 14 + \frac{0}{10} + \frac{3}{100}.$$

63. Escritura de las fracciones decimales en forma entera. —

De acuerdo con las reglas anteriores, dada una fracción decimal cualquiera, se la puede descomponer en sus unidades decimales de los diversos órdenes y se nota en esa descomposición, gran analogía con la descomposición de un número natural en forma polinómica.

Como esta última descomposición permitía escribir en forma fácil un número natural cualquiera, la correspondiente a las fracciones decimales nos permitirá, como veremos en seguida, escribir dichas fracciones en forma entera sin más que hacer la siguiente:

CONVENCIÓN. — *Una fracción decimal cualquiera, descompuesta en sus unidades decimales de diversos órdenes, se representa en forma entera escribiendo a la derecha de la parte entera (que podrá ser cero), las cifras representativas de las unidades de cada orden, de izquierda a derecha, de manera que el primer lugar lo ocupen los décimos, el segundo los centésimos, el tercero los milésimos, etc., y separando mediante una coma la parte entera de la decimal.*

EJEMPLOS :

$$1^{\circ}) \quad \frac{1403}{100} = \frac{14'03}{100} = 14 + \frac{0}{10} + \frac{3}{100} \quad \text{se escribirá } 14,03$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{2508}{100\,000} = \frac{02508}{100\,000} = \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{0}{10\,000} + \\ + \frac{8}{100\,000} \quad \text{se escribirá } 0,02508.$$

OBSERVACIÓN. — La convención anterior, suele aplicarse también en sentido contrario, para pasar de la forma entera a la fracción ordinaria. Así:

$$14,03 = 14 + \frac{0}{10} + \frac{3}{100} = \frac{1403}{100}.$$

De modo, pues, que *toda fracción decimal escrita en forma entera, representa una fracción ordinaria cuyo numerador es el número entero obtenido al suprimir la coma decimal y cuyo denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción dada.*

64. División de un entero por la unidad seguida de ceros. — Sea, por ejemplo, dividir el número, 25 432 por 1 000.

$$\text{Siendo } 25\,432 : 1000 = \frac{25\,432}{1\,000} \quad \text{por división n}^{\text{os}} \text{ racionales (n}^{\circ} 47)$$

$$\text{y} \quad \frac{25\,432}{1\,000} = \frac{25'432}{1\,000} = 25,432 \quad \text{por la conv. anterior}$$

$$\text{resulta } 25\,432 : 1000 = 25,432.$$

Análogamente se tendría.

$$27 : 10\,000 = \frac{27}{10\,000} = \frac{0027}{10\,000} = 0,0027.$$

Este razonamiento es general y por lo tanto puede aplicarse a cualquier ejemplo.

La observación de que el cociente de un número natural por la unidad seguida de ceros, da un número decimal formado por las mismas cifras que el primero, y la de que el número de cifras decimales es igual al número de ceros que figuran en el divisor, nos conduce a dar la siguiente:

REGLA. — *Para dividir un número entero por la unidad seguida de ceros, se separan por medio de una coma (coma decimal), a partir de la derecha, tantas cifras como ceros acompañen a la unidad, completando con ceros dicho número, si fuese necesario; las cifras que quedan a la izquierda constituyen la parte entera y las que quedan a la derecha, la parte decimal.*

APLICACIONES. $573\ 291 : 10\ 000 = 57,3291$

$$3\ 274 : 1\ 000\ 000 = 0,003274.$$

55. Multiplicación de un número decimal por la unidad seguida de ceros. — Sea, por ejemplo, multiplicar 23,557 por 100.

Siendo $23,557 = \frac{23\ 557}{1000}$ por la convención anterior

es $23,557 \cdot 100 = \frac{23\ 557}{1000} \times 100. \gg \gg$ prop. unif. multipl.

Efectuando el producto en el 2º miembro se tiene

$$23,557 \cdot 100 = \frac{2\ 355\ 700}{1000}$$

simplicando queda

$$23,557 \cdot 100 = \frac{23\ 557}{10}$$

y aplicando la regla para dividir un entero por la unidad seguida de ceros

$$23,557 \cdot 100 = 2355,7.$$

Sea ahora multiplicar 89,65 por 10 000. Procediendo como en el caso anterior se tiene:

$$89,65 \cdot 10\,000 = \frac{8965}{100} \cdot 10\,000 = \frac{8\,965\,0000}{100} = 896\,500$$

Observando los ejemplos anteriores, y considerando que el procedimiento puede aplicarse para multiplicar un número decimal cualquiera por la unidad seguida de ceros, se deduce la siguiente:

REGLA. — Para multiplicar una fracción decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma decimal tantos lugares hacia la derecha como ceros acompañan a la unidad, completando con ceros si faltaran cifras.

APLICACIONES. $3,784 \cdot 100 = 378,4$ $0,0671 \times 1000 = 67,1.$

66. División de un número decimal por la unidad seguida de ceros. — Sea, por ejemplo, dividir 113,745 por 100.

Siendo $113,745 = \frac{113\,745}{1000}$ por la convención anterior
es $113,745 : 100 = \frac{113\,745}{1000} : 100.$

Efectuando la división en el 2º miembro se tiene

$$113,745 : 100 = \frac{113\,745}{1000} \cdot \frac{1}{100} = \frac{113\,745}{100\,000} \quad \text{lo que}$$

da, aplicando la regla para dividir un entero por la unidad seguida de ceros:

$$113,745 : 100 = 1,13745 \quad \text{que es el cociente buscado.}$$

Sea ahora dividir 2,27 por 1000. Procediendo en forma análoga a la del caso anterior se tiene

$$2,27 : 1000 = \frac{227}{100} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{227}{100\,000} = 0,00227$$

La observación del procedimiento seguido en los ejemplos desarrollados nos permiten dar la siguiente:

REGLA. — *Para dividir una fracción decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma decimal tantos lugares a la izquierda, como ceros acompañan a la unidad, completando con ceros los lugares si fuese necesario.*

APLICACIONES. —

$$48,5 : 100 = 0,485 \qquad 48,5 : 10\,000 = 0,00485.$$

67. Teorema. — *Un número decimal no altera si se le agregan ceros a la derecha de su última cifra.*

$$\text{HIP.) } 91,325 \qquad \text{TESIS) } 91,325 = 91,3250 = 91,32500 = \dots$$

DEMOST.)

$$\text{Siendo } 91,325 = \frac{91\,325}{1000} \qquad \text{por una convención anterior}$$

$$\text{y } \frac{91\,325}{1000} = \frac{91\,325 \cdot 10}{1\,000 \cdot 10} = \frac{91\,325 \cdot 100}{1\,000 \cdot 100} = \dots \text{ por un teorema anterior (nº 12)}$$

$$\text{o sea } \frac{91\,325}{1000} = \frac{913\,250}{10\,000} = \frac{9\,132\,500}{100\,000} = \dots$$

$$\text{es } 91,325 = 91,3250 = 91,32500 = \dots \qquad \text{por la convención anterior.}$$

CAPITULO VIII.

SUMA DE NUMEROS DECIMALES

PROGRAMA.— *Deducción de la regla práctica para sumar decimales basada en la suma de fracciones ordinarias.*

68. **Suma de números decimales.** — Sea por ejemplo, sumar los números decimales $7,14 + 10,24 + 0,18$ que tienen igual número de cifras decimales. Escribiendo estos números en forma fraccionaria tendríamos:

$$7,14 + 10,24 + 0,18 = \frac{714}{100} + \frac{1024}{100} + \frac{18}{100} \quad \text{por conv. ant.}$$

Aplicando en el 2º miembro la definición 1ª de suma de números fraccionarios, resulta

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 714 \\ 1024 \\ 18 \\ \hline 1756 \end{array} & \begin{array}{l} 7,14 + 10,24 + 0,18 = \frac{714 + 1024 + 18}{100} \\ 7,14 + 10,24 + 0,18 = \frac{1756}{100} = 17,56 \end{array} \end{array}$$

donde se puede observar que la suma buscada 17,56 se ha obtenido sumando los números dados, como si fuesen enteros, y separando en el resultado tantas cifras decimales como tienen los sumandos.

Sea ahora sumar los números decimales, de distinto número de cifras decimales: $0,741 + 2,8 + 3,25$.

Podemos reducir este caso al anterior, recordando que un número

decimal no altera si se le agregan ceros a la derecha de su última cifra. Tendríamos así:

$$0,741 + 2,8 + 3,25 = 0,741 + 2,800 + 3,250 \quad \text{y procediendo}$$

como en el caso anterior resulta:

$$\begin{aligned} 0,741 + 2,8 + 3,25 &= \frac{741}{1000} + \frac{2800}{1000} + \frac{3250}{1000} = \frac{741 + 2800 + 3250}{1000} \\ &= \frac{6791}{1000} = 6,791 \quad \text{donde se puede} \end{aligned}$$

observar que la suma buscada se ha obtenido igualando con ceros colocados a la derecha el número de cifras decimales de los números dados, sumando los números así obtenidos como si fuesen enteros y separando en el resultado tantas cifras decimales como tiene cualquiera de los sumandos.

En la práctica la operación se dispone como se indica en a)

$$\begin{array}{rcl} & 0,741 & \\ a) & + 2,800 & \\ & \hline & 3,250 & \\ & \hline & 6,791 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & 0,741 & \\ b) & + 2,8 & \\ & \hline & 3,25 & \\ & \hline & 6,791 & \end{array}$$

y como $1 + 0 + 0 = 1$ y $4 + 0 + 5 = 4 + 5 = 9$ resulta que

se pueden suprimir los ceros agregados para igualar el número de cifras decimales, siempre que se tenga la precaución de escribir los sumandos dados, uno debajo de otro de modo que queden en columna las comas decimales como se indica en b).

Los ejemplos considerados y todos los que pudieran presentarse, conducen a la siguiente:

REGLA PRÁCTICA.— *Para sumar números decimales, se colocan unos debajo de otros, de modo que las comas queden en columna; se suman como si fueran enteros y se coloca una coma en el resultado, debajo de la coma de los sumandos.*

CAPITULO IX

RESTA DE NUMEROS DECIMALES

PROGRAMA. — *Deducción de la regla práctica basada en la resta de fracciones ordinarias.*

69. Resta de números decimales. — Sea restar de 17,38, 5,8724
Procediendo como en la suma de números decimales, igualamos con
ceros el número de cifras decimales del minuendo y sustraendo, con
lo que se tiene:

$$\begin{aligned} 17,38 - 5,8724 &= 17,3800 - 5,8724 = \frac{173\,800}{10\,000} - \frac{58\,724}{10\,000} \\ &= \frac{173\,800 - 58\,724}{10\,000} = \frac{115\,076}{10\,000} = 11,5076 \end{aligned}$$

donde puede observarse que la diferencia buscada se ha obtenido
igualando con ceros, colocados a la derecha, el número de cifras
decimales de los números dados, restando los números así obtenidos
como si fueran enteros y separando en el resultado tantas cifras de-
cimales como tiene cualquiera de los términos.

En la práctica la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 17,3800 \\ - 5,8724 \\ \hline 11,5076 \end{array}$$

El ejemplo tratado y otros análogos nos conducen a dar la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para restar dos números decimales, se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las comas queden en columna; se iguala con ceros el número de cifras decimales, se restan los números así obtenidos como si fueran enteros y se coloca una coma en el resultado, debajo de la coma de los términos.*

CAPITULO X

MULTIPLICACION DE NUMEROS DECIMALES

PROGRAMA. — *Multiplicación de un decimal por un entero y multiplicación de dos decimales entre sí. Deducción de las reglas prácticas basada en la multiplicación de fracciones ordinarias.*

70. Multiplicación de un decimal por un entero. — Sea, por ejemplo, multiplicar el número decimal 18,743 por el entero 13. Escribiendo el primero en forma fraccionaria tendríamos:

$$18,743.13 = \frac{18\,743}{1000} \times 13 \quad \text{por una conv. ant.}$$

Efectuando el producto indicado en el 2º miembro da

$\begin{array}{r} 18\,743 \\ \times \quad 13 \\ \hline 56\,229 \\ 187\,43 \\ \hline 243\,659 \end{array}$	$\begin{aligned} 18,743.13 &= \frac{18\,743.13}{1000} = \\ &= \frac{243\,659}{1000} = 243,659 \end{aligned}$
---	--

donde puede observarse que el producto buscado se ha obtenido multiplicando los números dados como si fuesen enteros y separando en el resultado tantas cifras decimales como tenga el factor decimal.

La disposición práctica es la misma que la empleada en la multiplicación de números naturales o sea

$$\begin{array}{r} 18,743 \\ \times \quad 13 \\ \hline 56\,229 \\ 187\,43 \\ \hline 243,659 \end{array}$$

La observación del ejemplo tratado y la de otros análogos nos llevan a dar la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para multiplicar un número decimal por un entero, se multiplican como si fueran enteros y se separan en el resultado, mediante una coma, tantas cifras decimales como tenga el factor decimal.*

71. Multiplicación de dos decimales entre sí. — Sea, por ejemplo, multiplicar los números decimales 87,31 por 3,4. Escribiendo estos números en forma fraccionaria tendríamos:

$$87,31 \cdot 3,4 = \frac{8731}{100} \cdot \frac{34}{10} \quad \text{por una convención anterior}$$

Efectuando el producto indicado en el 2º miembro da:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 8\,731 \\ \times \quad 34 \\ \hline 34\,924 \\ 261\,93 \\ \hline 296\,854 \end{array} & \begin{array}{l} 87,31 \cdot 3,4 = \frac{8731 \cdot 34}{100 \cdot 10} = \\ = \frac{296\,854}{1000} = 296,854 \end{array} \end{array}$$

donde puede observarse que el producto buscado se ha obtenido multiplicando los números dados como si fueran enteros y separando en el resultado tantas cifras decimales como tengan los dos facto-

res. La disposición práctica es la misma que la empleada en la multiplicación de números naturales, o sea:

$$\begin{array}{r} 87,31 \\ \times 3,4 \\ \hline 34\ 924 \\ 261\ 93 \\ \hline 296,854 \end{array}$$

El ejemplo tratado y otros análogos nos llevan a dar la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para multiplicar dos números decimales, se multiplican como si fueran enteros y se separan en el resultado, mediante una coma, tantas cifras decimales como tengan los dos factores.*

CAPITULO XI

DIVISION DE NUMEROS DECIMALES

PROGRAMA. — *Cociente de dos números enteros con menor error que un décimo, un centésimo, un milésimo, etc. Definición y ejemplos. División de un decimal por un entero. Regla práctica para obtener el cociente con menor error que una unidad del orden de la última cifra decimal del dividendo. División de un número entero o decimal por un número decimal.*

72. Cociente de dos números enteros con menor error que un décimo, un centésimo, etc. — DEFINICION. — Se llama *cociente aproximado de un número entero a por otro b , con menor error que un décimo, un centésimo, un milésimo, etc.*, al mayor número decimal de denominador diez, cien, mil, etc., respectivamente, que multiplicado por el segundo b dé un resultado menor o igual que el primero a .

NOTACIÓN:

$$\begin{array}{l} a : b = \frac{x}{10} \quad ; \quad a : b = \frac{x}{100} \quad ; \quad a : b = \frac{x}{1000} \quad \text{se leen } \textit{cociente} \\ \varepsilon < 0,1 \quad \quad \quad \varepsilon < 0,01 \quad \quad \quad \varepsilon < 0,001 \end{array}$$

aproximado de a por b con menor error que un décimo, un centésimo, un milésimo, etc., respectivamente.

La definición anterior equivale a decir que:

$$\text{es } a : b = \frac{x}{10} \quad \text{si} \quad \frac{x}{10} \cdot b \leq a < \frac{x+1}{10} \cdot b \\ \varepsilon < 0,1$$

$$a : b = \frac{x}{100} \quad \text{si} \quad \frac{x}{100} \cdot b \leq a < \frac{x+1}{100} \cdot b \\ \varepsilon < 0,01$$

$$a : b = \frac{x}{1000} \quad \text{si} \quad \frac{x}{1000} \cdot b \leq a < \frac{x+1}{1000} \cdot b \\ \varepsilon < 0,001$$

.....

OBSERVACIÓN. — Es, por ejemplo: $a : b = \frac{x}{100}$, pues $\frac{x}{100}$ es el mayor número decimal que multiplicando por b da un resultado menor o igual que a pues el número decimal $\frac{x+1}{100}$ ya no cumple dicha condición, desde que $\frac{x+1}{100} \cdot b > a$.

EJEMPLO: Procuremos hallar el $9 : 4$.
 $\varepsilon < 0,1$

Siendo $(9) : 4 = 2$ el coc. entero o sea $2.4 < 9 < 3.4$, el cociente aproximado con menor error que un décimo tendrá que ser

$$2, \text{ o } 2 \frac{1}{10}, \text{ o } 2 \frac{2}{10}, \text{ o } 2 \frac{3}{10}, \text{ o } 2 \frac{4}{10}, \dots, \text{ o } 2 \frac{9}{10}$$

$$\text{Pero como } 2 \frac{1}{10} \cdot 4 = 2,1 \cdot 4 = 8,4 < 9$$

$$2 \frac{2}{10} \cdot 4 = 2,2 \cdot 4 = 8,8 < 9$$

$$2 \frac{3}{10} \cdot 4 = 2,3 \cdot 4 = 9,2 > 9$$

$$\text{resulta: } 9 : 4 = \frac{22}{10} = 2,2 \quad \text{puesto que } \frac{22}{10} \cdot 4 < 9 < \frac{23}{10} \cdot 4 \\ \varepsilon < 0,1$$

El teorema que sigue nos permite calcular el cociente aproximado entre dos números enteros con menor error que un décimo, un centésimo, etc., sin necesidad de hacer pruebas inútiles.

73. Teorema. — *El cociente aproximado de dos números enteros con menor error que un décimo, un centésimo, un milésimo, . . . es una fracción de denominador, 10, 100, 1000, . . . y cuyo numerador es el cociente entero del dividendo seguido de 1, 2, 3, . . . ceros, por el divisor.*

HIP.) 9 y 7 núm. ent.

$$\text{TESIS.) } 9:7 = \frac{(9000):7}{1000} \\ \varepsilon < 0,001$$

$$\text{DEMOST.) Si } 9:7 = \frac{x}{1000} \quad [1] \quad \text{es } \frac{x}{1000} \cdot 7 \leq 9 < \frac{x+1}{1000} \cdot 7$$

Mult. por 1000 y simpl. da

$$x \cdot 7 \leq 9000 < (x+1) \cdot 7$$

lo que nos dice que x es el cociente entero de 9000 dividido 7 o sea

$$(9000):7 = x.$$

Sustituyendo el valor de x en [1] resulta:

$$9:7 = \frac{(9000):7}{1000} \\ \varepsilon < 0,001$$

APLICACIONES:

9000 7 20 1285 60 40 5	$\begin{aligned} 9:7 &= \frac{(90):7}{10} = \frac{(90):7}{10} = \frac{12}{10} = 1,2 \\ \varepsilon &< 0,1 \\ \\ 9:7 &= \frac{(900):7}{100} = \frac{128}{100} = 1,28 \\ \varepsilon &< 0,01 \\ \\ 9:7 &= \frac{(9000):7}{1000} = \frac{1285}{1000} = 1,285 \\ \varepsilon &< 0,001 \end{aligned}$
---	--

Puede observarse que la parte entera, 1, de los cocientes aproximados es el cociente entero de los números dados.

En la práctica la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ 20 & 1,285 \\ 60 & \\ 40 & \\ 5 & \end{array}$$

es decir, se omite la escritura de los ceros en el dividendo.

La observación de estos ejemplos nos conduce a dar la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para hallar el cociente aproximado de dos números enteros, con menor error que un décimo, un centésimo, etc., se halla el cociente entero de los números dados y se coloca a la derecha la coma decimal. Se continúa la operación agregando al resto un cero si la aproximación buscada es con menor error que 0,1. A la derecha del segundo resto se agrega otro cero si el error deseado es menor que 0,01 y así se continúa hasta hallar en el cociente la cifra decimal del mismo orden que el error fijado.*

EJEMPLO I: Hallar

$$\begin{array}{l} 3 : 17 \\ \varepsilon < 0,001 \end{array}$$

Como

$$\begin{array}{r|l} 30 & 17 \\ 130 & 0,176 \\ 110 & \\ 8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{resulta} \quad 3 : 17 = 0,176 \\ \varepsilon < 0,001 \end{array}$$

EJEMPLO II: Hallar

$$\begin{array}{l} 25 : 8 \\ \varepsilon < 0,0001 \end{array}$$

y como

$$\begin{array}{r|l} 25 & 8 \\ 10 & 3,1250 \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{resulta} \quad 25 : 8 = 3,1250 \\ \varepsilon < 0,0001 \end{array}$$

74. **División de un decimal por un entero.** — Sea, por ejemplo, dividir 31,84 por el entero 7.

Escribiendo 31,84 en forma fraccionaria, tendríamos:

$$31,84 : 7 = \frac{3184}{100} : 7 \quad \text{por def. de frac. decimal}$$

Efectuando la división indicada en el 2º miembro da

$$31,84 : 7 = \frac{3184}{100} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3184}{700}$$

Observamos que el resultado no es un número decimal. Como en la práctica suele ser conveniente obtener un cociente decimal aun cuando no sea más que aproximado, por ejemplo con menor error que una unidad del orden decimal de la última cifra del dividendo, hallemos el valor de

$$\begin{aligned} & 3184 : 700. \\ & \varepsilon < 0,01 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior tendremos

$$\begin{aligned} 3184 : 700 &= \frac{(318400) : 700}{100} & [1] \\ \varepsilon &< 0,01 \end{aligned}$$

pero $(318400) : 700 = (3184) : 7$ por un teor. ant. (*Art. Iª, nº 93*)

Sustituyendo en [1] tendremos

$$\begin{array}{r|l} 3184 & 7 \\ 38 & 454 \\ 34 & \\ 6 & \end{array} \quad \left| \quad \begin{aligned} 3184 : 700 &= \frac{(3184) : 7}{100} = \frac{454}{100} = 4,54 \\ \varepsilon &< 0,01 \end{aligned} \right.$$

donde puede observarse que el cociente buscado se ha obtenido dividiendo los números dados, como si fueran enteros y separando en el resultado tantas cifras decimales como tenga el dividendo.

La disposición práctica de la operación es la misma que la empleada en la división de números naturales, o sea

$$\begin{array}{r|l} 31,84 & 7 \\ 38 & 4,54 \\ \hline 34 & \\ 6 & \end{array}$$

donde se ve que se ha colocado la coma decimal en el cociente al considerar la primera cifra decimal del dividendo.

REGLA PRÁCTICA. — *Para hallar el cociente aproximado de un decimal por un entero, con menor error que una unidad del orden de la última cifra decimal del dividendo, se dividen dichos números como si fueran enteros colocando en el cociente la coma decimal al considerar la primera cifra decimal del dividendo.*

75. División de un número entero o decimal por un decimal.

— Sea por ejemplo, dividir el número entero 37 por el decimal 6,45.

Escribiendo el segundo en forma fraccionaria tendríamos:

$$37 : 6,45 = 37 : \frac{645}{100} = 37 \cdot \frac{100}{645} = \frac{3700}{645}$$

donde puede observarse que el cociente buscado, queda reducido a hallar el de los números enteros que resultan de multiplicar a los dados, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor. Este cociente podrá hallarse con la aproximación que se desee.

Sea ahora dividir el decimal 14,32 por 0,185.

Teniendo en cuenta la observación hecha en el caso anterior tendríamos:

$$14,32 : 0,185 = (14,32 \cdot 1000) : (0,185 \cdot 1000) = 14320 : 185 \quad \text{donde}$$

se puede observar que también el cociente buscado se reduce a hallar el de dos números enteros.

Sea por último dividir el decimal 8,5743 por 2,03.

Procediendo como en los casos anteriores se tendrá

$$8,5743 : 2,03 = (8,5743 \cdot 100) : (2,03 \cdot 100) = 857,43 : 203 \quad \text{donde se}$$

puede observar que el cociente buscado ha quedado reducido a hallar el de un decimal por un entero.

Así, en el ejemplo primero tendríamos:

$$\begin{array}{r} 37 : 6,45 \text{ es el cociente de } 3700 \quad | \quad 645 \\ 4750 \quad 5,73 \\ \hline 2350 \\ 415 \end{array}$$

Los ejemplos anteriores y otros análogos nos conducen a dar la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para dividir un entero por un decimal, o dos decimales entre sí, se multiplica dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor, con lo cual queda reducida la operación a dividir dos números enteros, o un decimal por un entero. Esta última operación se efectúa con la aproximación que se desee.*

CAPITULO XII

CONVERSION DE FRACCIONES ORDINARIAS EN DECIMALES Y VICEVERSA

PROGRAMA. — Condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria sea reducible a decimal. Una expresión numérica con infinitas cifras decimales, por convención, se llamará fracción decimal inexacta. Fracciones decimales inexactas periódicas puras y mixtas. Reducción de una fracción ordinaria a decimal. Reducción de una fracción decimal exacta a ordinaria. Reducción de una fracción decimal periódica pura a ordinaria. Reducción de una fracción decimal periódica mixta a ordinaria. Significado de las fracciones decimales periódicas puras o mixtas cuyo período es nueve.

76. Condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria sea reducible a decimal. — Sean las fracciones irreducibles:

$$\frac{7}{5}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{11}{40}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{4}{7} \text{ y } \frac{11}{6}$$

que trataremos de convertir en fracciones decimales, es decir, en otras cuyo denominador sea la unidad seguida de un determinado número de ceros.

Para que figure en el denominador de una fracción igual a $\frac{7}{5}$ la unidad seguida de ceros, basta multiplicar los términos de esta última por 2, puesto que $2 \times 5 = 10$ y se tiene:

$$\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{14}{10} = 1,4$$

Para que figure en el denominador de una fracción igual a $\frac{3}{4}$ la unidad seguida de ceros, basta multiplicar a los términos de esta última por $5^2=25$, puesto que $4.25=2^2.5^2=100$ y se tendrá:

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{75}{100} = 0,75.$$

Para que figure en el del denominador de una fracción igual a $\frac{11}{40}$ la unidad seguida de ceros, basta multiplicar los términos de esta última por $5^2=25$, puesto que $40.25=2^3 \cdot 5 \cdot 5^2=1000$ y se tendrá;

$$\frac{11}{40} = \frac{11}{2^3 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{275}{1000} = 0,275$$

En cambio en las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{7}$ y $\frac{11}{6}$ como ni 10, ni 100, ni 1000, etc., son múltiplos de los denominadores 3, 7 y 6, no existe ningún número que multiplicado por 3, 7 ó 6 dé por resultado la unidad seguida de ceros o sea no habrán fracciones decimales que sean iguales a las dadas.

Observando los denominadores de las fracciones dadas que son reducibles a decimal se deduce el siguiente:

X **Teorema.**— *La condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria irreducible sea igual a una fracción decimal, es que figuren únicamente en su denominador los factores 2 y 5 o uno de ellos solamente.*

LA CONDICIÓN ES NECESARIA, es decir, si una fracción ordinaria irreducible es igual a una fracción decimal dicha fracción contiene en su denominador únicamente a los factores 2 y 5 o a uno de ellos solamente.

HIP.) $\frac{a}{b} = 0,042$ siendo $\frac{a}{b}$ irreducible

TESIS) $b = 2^m \cdot 5^p$

DEMOST.) Siendo $\frac{a}{b} = 0,042$ por hipótesis
 mult. por 1000 da $\frac{a \cdot 1000}{b} = 42$
 y como $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ es $\frac{a \cdot 2^3 \cdot 5^3}{b} = 42$ y como a y b son

primos, pues por hipótesis $\frac{a}{b}$ es irreducible, la condición para que el numerador sea divisible por b es que b , contenga a los factores 2 y 5 con exponentes menores o iguales,

es decir $b = 2^m \cdot 5^p$ siendo m y $p \leq 3$

2º LA CONDICIÓN ES SUFICIENTE, es decir, si una fracción contiene en su denominador únicamente a los factores 2 y 5 o a uno de ellos solamente, dicha fracción es reducible a decimal.

HIP.) $\frac{11}{2^3 \cdot 5^7}$ frac. ordinaria TESIS) $\frac{11}{2^3 \cdot 5^7} = \frac{x}{10^n}$

DEMOST.) Para que el denominador $2^3 \cdot 5^7$ se convierta en la unidad seguida de ceros, basta igualar los exponentes de 2 y 5, es decir, multiplicar, en este caso, por 2^4 pues

$$2^3 \cdot 5^7 \times 2^4 = 2^7 \cdot 5^7 = 10^7 = 10\,000\,000$$

luego
$$\frac{11}{2^3 \cdot 5^7} = \frac{11 \cdot 2^4}{2^3 \cdot 5^7 \cdot 2^4} = \frac{11 \cdot 16}{2^7 \cdot 5^7} = \frac{176}{10^7}$$

o sea
$$\frac{11}{2^3 \cdot 5^7} = \frac{176}{10\,000\,000} = 0,0000176$$

77. Expresiones numéricas con infinitas cifras decimales. —
 Habíamos visto, en el teorema anterior, que una fracción tal como $\frac{7}{22}$ no es reducible a decimal, pues su denominador $22 = 2 \cdot 11$ contiene un factor, 11, distinto de 2 y 5

No siendo reducible tratemos de hallar números decimales que sean sus valores aproximados con menor error que una determinada unidad decimal.

Si recordamos que toda fracción es el cociente del numerador por su denominador, dichos números aproximados se pueden encontrar hallando ese cociente con menor error que un décimo, un centésimo, etc.

Ahora bien, no siendo la fracción $\frac{7}{22}$ reducible a decimal no pueden aparecer en esas divisiones restos iguales a cero. Además como los restos de una división deben ser menores que el divisor, 22 en nuestro caso, habrá a lo sumo 21 restos distintos que podrán ser los números 1, 2, ... 21, y por lo tanto se ha de caer después de un determinado número de divisiones en uno de los restos anteriores. Así efectuando la división aproximada de 7 por 22,

$$\begin{array}{r} 7'0 \\ - 40 \\ \hline 180 \\ 40 \\ \hline 180 \\ 4 \\ \hline \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 22 \\ \hline 0,31818 \dots \end{array}$$

se ve que en la tercera división parcial se repite el resto 4.

Como cada dividendo parcial, se forma agregando un cero a la derecha del resto anterior, al agregar el cero al primer resto que se repite, 4 en nuestro caso, aparecerá, en el cociente la misma cifra 1, que al obtener por primera vez dicho resto. Continuando la operación, aparecerán en el mismo orden y sucesivamente en el cociente, las cifras que se obtuvieron a partir del resto que se ha repetido. Por lo tanto, encontrado un resto igual a uno de los anteriores no es necesario proseguir la operación, pues ya se conocen las sucesivas cifras que irán apareciendo en el cociente.

Lo que acabamos de ver nos revela que si quisiéramos representar en forma decimal fracciones tales como $\frac{7}{22}$, serían necesarias expresiones de infinitas cifras decimales.

Así $\frac{7}{22}$ se representaría por 0,3181818... donde los puntos suspensivos indican que siguen infinitas cifras decimales.

Expresiones de infinitas cifras decimales como 0,31818..., *no son fracciones decimales*, puesto que por definición, éstas deben tener por denominador la unidad seguida de una *determinado número de ceros* y en cambio, si quisiéramos escribir la expresión 0,31818..., por ejemplo, en forma de fracción ordinaria sería necesario escribir por denominador la unidad seguida de infinitos ceros.

Así 0,31818... se escribiría $\frac{31818 \dots}{100000 \dots}$ expresión que carece de significado, pues no sabemos operar con números de infinitas cifras.

Sin embargo como se escriben de la misma manera que las decimales, se acostumbra llamarlas *fracciones decimales inexactas* para distinguirlas de las verdaderas fracciones decimales. Nosotros haremos lo mismo, de acuerdo con la siguiente:

CONVENCIÓN. — Llamaremos *fracciones decimales inexactas*, a las expresiones numéricas de infinitas cifras decimales. Aceptaremos además que una expresión decimal inexacta con parte entera, significa la suma de la parte entera más la parte decimal.

Así 14,4724... es una fracción decimal inexacta y además significa $14 + 0,4724 \dots$

78. Fracciones decimales inexactas, periódicas, puras y mixtas.— Entre las fracciones decimales inexactas hay algunas en que una o varias de sus cifras se repiten en el mismo orden, periódicamente. La cifra o grupo de cifras que se repiten se llama *período*, razón por la cual esas fracciones inexactas se llaman *periódicas*.

Ejemplos: 0,666...; 0,818181...; 1,8333...; 2,64545...

Podemos observar que en las dos primeras, el período comienza a partir de la coma decimal, mientras que en las dos últimas eso no sucede. Teniendo en cuenta estas observaciones se clasifican a las fracciones decimales inexactas en dos clases, de acuerdo con la siguiente:

DEFINICIÓN. — Se llama *fracción decimal periódica pura* a toda fracción inexacta en la que el período comienza inmediatamente después de la coma decimal, y *fracción decimal periódica mixta* a aquella en que sucede lo contrario.

El grupo de cifras decimales que preceden al primer período en las fracciones periódicas mixtas se llama *parte no periódica*.

79. Reducción de una fracción ordinaria a decimal. — **DEFINICIÓN.** — *Reducir una fracción ordinaria a decimal* significa hallar una fracción decimal exacta o inexacta que sea igual a la dada.

EJEMPLO 1º — Sea, reducir $\frac{11}{8}$ a decimal.

Como el denominador 8 es igual a 2^3 la fracción dada será igual a un número decimal exacto, y como además una fracción es el cociente del numerador por su denominador, dicho número será casualmente este cociente. Luego si se halla el cociente aproximado con error menor que 0,1, 0,01, 0,001, etc., se debe encontrar un resto cero, con lo cual se da por terminada la operación.

Así	$\begin{array}{r} 11 \\ 30 \\ 60 \\ 40 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ \hline 1,375 \end{array}$	luego	$\frac{11}{8} = 1,375.$
-----	--	--	-------	-------------------------

EJEMPLO 2º — Sea, por ejemplo, reducir $\frac{9}{11}$ a decimal.

Como el denominador 11 no contiene al factor 2, ni al 5, la fracción dada será igual a un número decimal inexacto periódico, y co-

mo además una fracción es el cociente del numerador por su denominador, dicho número será casualmente este cociente:

$$\begin{array}{r} \text{Así} \quad 9'0 \quad | \quad 11 \\ \quad 20 \quad 0,8181 \dots \\ \quad 9 \quad \dots \end{array} \quad \text{luego} \quad \frac{9}{11} = 0,8181 \dots$$

Los ejemplos anteriores y otros análogos nos permiten dar la siguiente:

REGLA. — *Para reducir una fracción ordinaria a decimal se halla el cociente del numerador por su denominador con menor error que 0, 1; 0, 01, ... etc., dando por terminada la operación si da un resto cero o cuando aparece un resto igual a los anteriores o al dividendo. En el primer caso la fracción es decimal exacta y en el segundo inexacta periódica.*

APLICACIONES. — 1.^a Reducir $\frac{43}{400}$ a decimal.

$$\begin{array}{r} \text{Siendo} \quad 43'0 \quad | \quad 400 \\ \quad 3 \ 000 \quad 0,1075 \\ \quad 2000 \\ \quad 0 \end{array} \quad \text{es} \quad \frac{43}{400} = 0,1075.$$

2.^a Reducir $\frac{3}{7}$ a decimal.

$$\begin{array}{r} \text{Siendo} \quad 3'0 \quad | \quad 7 \\ \quad 20 \quad 0,428571 \ 428571 \dots \\ \quad 60 \\ \quad 40 \\ \quad 50 \\ \quad 10 \\ \quad 3 \\ \quad \dots \end{array}$$

$$\text{es} \quad \frac{3}{7} = 0,428571428571428 \dots$$

80. Reducción de una fracción decimal exacta a ordinaria. —

En el párrafo anterior hemos reducido fracciones ordinarias a decimales, vamos a tratar ahora el problema recíproco, es decir; dada una fracción decimal exacta tratar de encontrar una fracción ordinaria igual a ella, o como suele decirse la *fracción generatriz* de la dada.

Sea, por ejemplo, reducir la fracción decimal 0,0125 a ordinaria.

Siendo $0,0125 = \frac{125}{10000}$ por una convención anterior

simplific. da $0,0125 = \frac{1}{80}$ que es la frac generatriz buscada

La observación del ejemplo tratado y la consideración de que en la misma forma se hubiese podido proceder en cualquier otro caso, nos permiten dar la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para reducir una fracción decimal exacta a ordinaria, se forma una fracción cuyo numerador sea el número entero que resulta de suprimir la coma decimal del número dado, y cuyo denominador sea la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga dicho número dado. Se simplifica la fracción así obtenida cuando es posible.*

APLICACIONES. $0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; $2,008 = \frac{2008}{1000} = \frac{251}{125}$.

81. Reducción de una fracción decimal periódica pura a ordinaria. —

Sea, por ejemplo, reducir la fracción decimal periódica 0,4545 ... a fracción ordinaria, es decir, encontrar la fracción

ordinaria $\frac{a}{b}$ tal que al dividir su numerador por su denominador, se

obtenga como cociente la fracción decimal dada.

En este ejemplo el cociente de a por b debe tener, como parte entera a 0, como primera cifra decimal a 4, dando un cierto resto que llamaremos x . Agregando un cero a x y prosiguiendo la división debe obtenerse 5 en el cociente, y un cierto resto a igual al dividen-

do de manera de obtener nuevamente, en el cociente, las cifras 4 y 5 del período, es decir, se tendría :

$$\begin{array}{rcl}
 [1] & a'0 & | \quad b \\
 & x0 & | \quad 0,4545 \\
 & a0 & \\
 & x0 & \\
 & a & \\
 & \dots &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 [2] & a00 & | \quad b \\
 & x0 & | \quad 45 \\
 & a &
 \end{array}$$

En la expresión [1] puede observarse que para obtener las cifras 4 y 5 del cociente, ha sido necesario agregar dos ceros a la derecha de a , luego si multiplicamos a a por 100 y dividimos al producto por b obtenemos el cociente entero 45 y el resto a , como indica la expresión [2]. Siendo el dividendo, $a00 = a \times 100 = 100a$ igual al producto del divisor b por el cociente 45 más el resto a , resulta:

$$\begin{array}{lcl}
 & 100a = 45.b + a, \text{ y restando } a \text{ a ambos miembros} \\
 \text{se tiene} & 100.a - a = 45.b \\
 \text{o bien} & 99a = 45.b
 \end{array}$$

Dividiendo por $99.b$ y simplificando resulta

$$\frac{a}{b} = \frac{45}{99} \qquad \text{que es la fracción buscada.}$$

Se observa que la fracción generatriz de $0,4545 \dots$, tiene por numerador su período y por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tiene el período.

Como el mismo razonamiento podría hacerse con cualquier otra fracción decimal periódica pura sin parte entera, resulta que el procedimiento seguido es general y conduce a la siguiente:

REGLA. — *Para obtener la fracción generatriz de una decimal periódica pura, cuya parte entera es igual a cero, se forma una fracción que tenga por numerador el período, y por denominador al número formado por tantos nueves como cifras tenga dicho período.*

mucho más

APLICACIONES. — Reducir a fracciones ordinarias:

$$0,333 \dots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad ; \quad 0,2121 \dots = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$$

$$0,4972 \, 4972 \dots = \frac{4972}{9999} = \frac{452}{909}.$$

82. Reducción de una fracción decimal periódica mixta a ordinaria. — Sea, por ejemplo, reducir la fracción decimal periódica $0,54242 \dots$ a fracción ordinaria.

Llamando $\frac{a}{b}$ a la fracción buscada, el cociente de a por b debe tener como parte entera a 0 y como primera cifra decimal a 5, dando un cierto resto que llamaremos x . Agregando un cero a x , y prosiguiendo la división debe obtenerse 4 en el cociente y un cierto resto que llamaremos y . Agregando un cero a y y prosiguiendo la división debe obtenerse 2 en el cociente, y como resto al número x de manera de obtener nuevamente en el cociente, al proseguir la división, las cifras 4 y 2 del período. Es decir, se tendría:

[1] $a'0 \quad \left \begin{array}{c} b \\ 0,54242 \dots \end{array} \right.$ $x0$ $y0$ $x0$ $y0$ x $\dots$	[2] $a000 \quad \left \begin{array}{c} b \\ x0 \end{array} \right. \quad 542$ $y0$ x	[3] $a0 \quad \left \begin{array}{c} b \\ x \end{array} \right. \quad 5$
--	---	---

En la expresión [1] puede observarse que para obtener las cifras 5, 4 y 2 del cociente, ha sido necesario agregar tres ceros a la derecha de a ; mientras que solo es necesario agregar un cero para obtener la cifra 5. Luego si multiplicamos a a por 1000 y dividimos el producto por b , obtenemos el cociente 542 y el resto x , como lo indica la expresión [2]; si en cambio multiplicamos a a por 10 y dividimos el producto por b obtenemos el cociente entero 5 y el resto x como indica la expresión [3].

Siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente más al resto, se tiene:

de [2] $a.1000 = b.542 + x$

de [3] $a.10 = b.5 + x$

Rest. m. a m. da $a.1000 - a.10 = b.542 - b.5$

o sea $a(1000 - 10) = b(542 - 5)$

o también $a.990 = b(542 - 5)$ lo que nos dice que

$$\frac{a}{b} = \frac{542 - 5}{990} \text{ por def. de frac. igual.}$$

Luego $\frac{542 - 5}{990}$ es la fracción generatriz buscada.

Se observa que la fracción generatriz de 0,54242 ... tiene por numerador la diferencia entre el número formado por su parte no periódica, seguida del período, y la parte no periódica, y por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

Como el mismo razonamiento podría hacerse con cualquier otra fracción decimal periódica mixta, sin parte entera, resulta que el procedimiento seguido es general y conduce a la siguiente:

REGLA. — Para obtener la fracción generatriz de una decimal periódica mixta, cuya parte entera sea igual a cero, se forma una fracción que tenga por numerador la diferencia entre el número formado por la parte no periódica seguida del período, y la parte no periódica, y por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tenga el período seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

APLICACIONES — Reducir a fracciones ordinarias:

$$I) \quad 0,18333 \dots = \frac{183 - 18}{900} = \frac{165}{900} = \frac{11}{60}$$

$$II) \quad 0,48254254 \dots = \frac{48254 - 48}{99900} = \frac{48206}{99900} = \frac{24103}{49950}.$$

REDUCCION DE FRACCIONES PERIODICAS CON PARTE ENTERA.—Sea por ejemplo, reducir a fracción ordinaria la periódica pura $12,3333 \dots$

Siendo $12,333 \dots = 12 + 0,333 \dots$ por convencion ant. (n.º 77)

$$y \quad 0,333 \dots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{por una regla ant. (81)}$$

$$\text{es} \quad 12,333 \dots = 12 + \frac{1}{3} = 12 \frac{1}{3}.$$

Sea, por ejemplo, reducir a fracción ordinaria la periódica mixta $9,4666 \dots$

Siendo $9,4666 \dots = 9 + 0,4666 \dots$ por convención ant. (n.º 77)

$$y \quad 0,4666 \dots = \frac{46 - 4}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15} \quad \text{por la regla anter.}$$

$$\text{es} \quad 9,4666 \dots = 9 + \frac{7}{15} = 9 \frac{7}{15}.$$

La observación de estos ejemplos y de otros análogos, nos conduce a dar la siguiente:

REGLA. — *Para reducir una fracción decimal periódica pura o mixta con parte entera, a ordinaria, basta formar un número mixto cuya parte entera sea la de la fracción dada y cuya parte fraccionaria sea la fracción generatriz de la fracción periódica que resulta de hacer igual a cero la parte entera de la fracción dada.*

APLICACIONES. — Reducir a fracciones ordinarias:

$$I) \quad 27,4545 \dots = 27 \frac{45}{99} = 27 \frac{5}{11}.$$

$$II) \quad 120,58333 \dots = 120 \frac{583 - 58}{900} = 120 \frac{525}{900} = 120 \frac{105}{180} = \\ = 120 \frac{21}{36} = 120 \frac{7}{12}.$$

83. Significado de las fracciones decimales periódicas puras o mixtas cuyo período es nueve.— Sea, por ejemplo, la fracción decimal periódica pura $0,9999 \dots$. Aplicando la regla para encontrar su fracción generatriz tendríamos:

$$0,9999 \dots = \frac{9}{9} = \frac{1}{1}$$

pero puede observarse que $\frac{1}{1}$ no es la fracción generatriz buscada puesto que $1:1$ no reproduce al número decimal $0,999 \dots$ dado. Ello no obstante, con el fin de que toda fracción decimal, pueda representarse en forma racional se acepta la siguiente:

CONVENCIÓN. — *La fracción decimal periódica pura $0,999 \dots$ representa al número uno.*

En símbolos: $0,9999 \dots = 1.$

Análogamente dada una fracción decimal periódica mixta cuyo período es 9, por ejemplo, $0,52999 \dots$ aplicando la regla para encontrar su fracción generatriz, tendríamos:

$$0,52999 \dots = \frac{529 - 52}{900} = \frac{477}{900} = \frac{53}{100}$$

donde puede observarse que $\frac{53}{100}$ no es la fracción generatriz buscada, pues el cociente de su numerador por su denominador no re-

produce el número decimal 0,52 999 ... dado, sino que da la fracción decimal exacta 0,53. Ello no obstante con el fin de que toda fracción decimal periódica mixta pueda representarse en forma racional se acepta la siguiente:

CONVENCIÓN. — *Una fracción decimal periódica mixta, cuyo período es nueve, representa la fracción decimal exacta que resulta de suprimir los nueves y aumentar en una unidad, la última cifra de su parte no periódica.*

Así $0,52\ 999\ \dots = 0,53$; $0,83\ 499\ \dots = 0,835$.

CAPITULO XIII

IDEA DE NUMERO IRRACIONAL

PROGRAMA. — *Raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto, aproximada con menor error que un décimo, un centésimo, etc., definición y regla práctica para obtenerla. Ejercicios. Necesidad de la creación de nuevos números para hacer posible la extracción de raíces exactas de los números positivos que no son potencias perfectas del grado que indica el índice. Números irracionales. Su representación por expresiones decimales inexactas no periódicas. Ejemplo: raíz cuadrada de 2, 3, 5, etc. e $y \pi$.*

84. **Raíz cuadrada aproximada de un número.** — Habíamos estudiado anteriormente (nº 59) las raíces cuadradas aproximadas de un número entero, con menor error que $\frac{1}{n}$. Vamos a ocuparnos ahora del caso en que n sea una potencia cualquiera de 10, es decir, $\frac{1}{n} = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \dots \frac{1}{10^n} \dots$ o lo que es lo mismo, vamos a estudiar las raíces cuadradas aproximadas con menor error que 0,1, 0,01, 0,001, etc.

La definición general de raíz cuadrada aproximada se traduce en este caso particular, en la siguiente forma:

DEFINICIÓN. — Se llama *raíz cuadrada aproximada* de un número entero, que no es cuadrado perfecto, *con menor error que un décimo, un centésimo, etc.* al mayor número decimal, cuya última cifra sea del orden de los décimos, centésimos, etc. ... y que elevado al cuadrado sea menor que el número dado.

0085

En símbolos:

$$\sqrt{a} = \frac{x}{10} \quad \text{tal que} \quad \left(\frac{x}{10}\right)^2 < a < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2$$

$\varepsilon < 0,1$

$$\sqrt{a} = \frac{x}{100} \quad \text{tal que} \quad \left(\frac{x}{100}\right)^2 < a < \left(\frac{x+1}{100}\right)^2$$

$\varepsilon < 0,01$

.....

$$\sqrt{a} = \frac{x}{10^n} \quad \text{tal que} \quad \left(\frac{x}{10^n}\right)^2 < a < \left(\frac{x+1}{10^n}\right)^2$$

$\varepsilon < 0,00 \dots 01$
— n —

Procuremos, por ejemplo, hallar la $\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; ...
 $\varepsilon < 0,1$ $\varepsilon < 0,01$ $\varepsilon < 0,001$

Siendo $0,01 = \frac{1}{100}$, procediendo de acuerdo con la regla general para hallar la raíz cuadrada aproximada de un número (nº 59) con menor error que $\frac{1}{n}$ se tiene que:

$\sqrt{7'00'00'00}$	2,645	$\sqrt{7} = \sqrt{7} = \frac{\sqrt{(7 \cdot 10^2)}}{10} = \frac{\sqrt{(700)}}{10} = \frac{26}{10} = 2,6$
4		$\varepsilon < 0,1 \quad \varepsilon < \frac{1}{10}$
30'0	46	
27 6	6	$\sqrt{7} = \sqrt{7} = \frac{\sqrt{(7 \cdot 100^2)}}{100} = \frac{\sqrt{(70000)}}{100} = \frac{264}{100} = 2,64$
240'0	524	$\varepsilon < 0,01 \quad \varepsilon < \frac{1}{100}$
209 6	4	
30 40'0	5285	$\sqrt{7} = \sqrt{7} = \frac{\sqrt{(7 \cdot 1000^2)}}{1000} = \frac{2645}{1000} = 2,645$
26'45 5	5	$\varepsilon < 0,001 \quad \varepsilon < \frac{1}{1000}$
3 97 5		

Puede observarse en los ejemplos anteriores que la parte entera, 2, de las raíces aproximadas es la raíz entera del número 7 dado.

En la práctica la operación se dispone así:

$\sqrt{7}$	2,645
4	
30'0	46
27 6	6
2 40'0	524
2 09 6	4
30 40'0	5285
26 42 5	5
3 97 5	

es decir se omite la escritura de los pares de ceros en el radicando.

Como el mismo razonamiento puede hacerse para cualquier otro ejemplo, el procedimiento seguido anteriormente es general, lo que nos permite dar la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para extraer la raíz cuadrada aproximada de un número, que no es cuadrado perfecto, con menor error que un décimo, un centésimo, etc., se extrae la raíz entera del número dado y se coloca a su derecha la coma decimal.*

Se continúa la operación agregando al resto un par de ceros si la aproximación buscada es con menor error que 0,1. A la derecha del segundo resto se agrega otro par de ceros si el error es menor que 0,01 y así se continúa hasta hallar en la raíz la cifra decimal del mismo orden que el error fijado.

APLICACIONES. — Calcular las raíces aproximadas:

$\sqrt{13} = \sqrt{13}$	3,605	y	$\sqrt{234} = \sqrt{2'34}$	15,29
$\varepsilon < 0,001$	9		$\varepsilon < 0,01$	1
40'0	66		13'4	25
39 6	6		12 5	5
4000'0	7205		90'0	302
3602 5	5		60 4	2
397 5			29 60'0	3049
			27 44 1	9
			2 15 9	

$$\sqrt{5,025} = \sqrt{50 \over 2} \over 2,2$$

$$\varepsilon < 0,1$$

4	2,2
10'2	4 2
8 4	2
1 8	

85. Necesidad de la creación de nuevos números para hacer posible la extracción de raíces exactas de los números positivos que no son potencias perfectas del grado que indica el índice. — Habíamos visto (nº 57) que si la raíz cuadrada exacta de un número natural, no es otro número natural, tampoco puede ser un número fraccionario puro (fracción ordinaria o decimal). Así por ejemplo la $\sqrt{2}$ no existe en el campo de los números racionales, pues por lo dicho anteriormente, ningún número racional elevado al cuadrado es igual a 2.

86. Números irracionales: su representación por expresiones decimales inexactas no periódicas. — Como se ha hecho en el caso de la Resta de números naturales, que dió origen a los números negativos y con la División de los números enteros que dió origen a los números fraccionarios puros, en el caso de las raíces cuadradas de los números que no son cuadrados perfectos, se hace también necesaria la creación de nuevos números que expresen su valor exacto y que son los que los Matemáticos han convenido en llamar *números irracionales* y en representarlos por fracciones inexactas no periódicas.

Así, por ejemplo, el número 3,14159 ... que expresa la relación de la circunferencia al diámetro, es un número irracional del que solo se han escrito las cinco primeras cifras decimales, indicando con puntos suspensivos que éstas siguen indefinidamente.

Hemos dicho que, creados los números irracionales, la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto existirá y tendrá un valor exacto. Veámoslo con un ejemplo como $\sqrt{2}$, para lo cual

hallemos su raíz cuadrada entera y sus raíces aproximadas con menor error que 0,1; 0,01; 0,001; etc., o sea

$\sqrt{2}$	1,414...	$\sqrt{(2)} = 1$	$\therefore 1^2 < 2 < 2^2$
$\frac{1}{10'0}$	24	$\sqrt{2} = 1,4$	$\therefore (1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$
9 6	4	$\varepsilon < 0,1$	
40'0	281	$\sqrt{2} = 1,41$	$\therefore (1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$
28 1	1	$\varepsilon < 0,01$	
11 90'0	2824	$\sqrt{2} = 1,414$	$\therefore (1,414)^2 < 2 < (1,415)^2$
11 29 6	4	$\varepsilon < 0,001$	
60 4			
....			

Los matemáticos demuestran que el número irracional que es la raíz cuadrada exacta de 2, es mayor que cualquiera de sus raíces cuadradas aproximadas por defecto y menor que cualquiera de sus raíces aproximadas por exceso. En el ejemplo considerado, se tendría, pues, que:

$\sqrt{2} > 1$; que 1,4; que 1,41; que 1,414; que 1,4142; etc. . . .
y $\sqrt{2} < 2$; que 1,5; que 1,42; que 1,415; que 1,4143; etc. . . .
o bien

$$1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < \dots < \sqrt{2} < \dots < 1,415 < 1,42 < 1,5 < 2$$

lo que nos revela que para expresar el número irracional $\sqrt{2}$, mediante una representación decimal exacta, se necesitan infinitas cifras. Como esto no es posible se escriben solamente las primeras y se ponen puntos suspensivos.

Así por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,4142 \dots\dots\dots \\ \sqrt{3} &= 1,73205 \dots\dots\dots \\ \sqrt{5} &= 2,2360 \dots\dots\dots \\ \sqrt{7} &= 2,6457 \dots\dots\dots\end{aligned}$$

Suele expresarse frecuentemente el valor exacto de los números irracionales por letras griegas con el objeto de abreviar su escritura. Así si representamos por α la raíz cuadrada exacta de 2, tendríamos:

$$\sqrt{2} = \alpha, \text{ siendo } \alpha \text{ tal que } \alpha^2 = 2.$$

Análogamente si $\sqrt{7} = \gamma$, es γ tal que $\gamma^2 = 7$, etc.

El número 3,14159 ... que dimos como ejemplo de número irracional se representa siempre por la letra π , que se lee « pi », o sea

$$\pi = 3,14159 \dots$$

Debemos advertir que no todos los números que se representan por infinitas cifras decimales son irracionales, pues, como hemos visto en el capítulo anterior, las fracciones decimales inexactas periódicas que tienen infinitas cifras decimales, son números *racionales*, por ejemplo $0,333 \dots = \frac{1}{3}$; $0,4545 \dots = \frac{5}{11}$ etc., de donde resulta que: *Las expresiones de infinitas cifras decimales que representan a un número irracional, no pueden ser periódicas.*

Podría creerse que solamente las raíces cuadradas exactas de los números que no son cuadrados perfectos, son números irracionales, sin embargo, también lo son las raíces exactas de todos los números positivos que no son potencias perfectas del grado que indica su índice como

$$\sqrt[3]{4} = 1,5874 \dots \quad \sqrt[4]{15} = 1,967 \dots$$

Existen además otros números irracionales que no son resultados de la extracción de ninguna raíz como, por ejemplo, el citado número π y el número, designado con e , base de los logaritmos inventados por Neper, que los alumnos conocerán en el Cuarto año de estudios.

El valor del número e es $e = 2,71828828459 \dots$

NOTA. — No debe suprimirse, al escribir un número irracional en forma decimal, los puntos suspensivos, pues ello haría creer que la fracción decimal es exacta, lo que sería absurdo. Así, por ejemplo,

$$\sqrt{2} = 1,4142 \dots \text{ y en cambio } 1,4142 = \sqrt{2} \\ \varepsilon < 0,0001$$

$$\pi = 3,141592653 \dots \text{ y en cambio } 3,1416 \neq \pi$$

pues 3,1416 es un valor aproximado por exceso de π con menor error que un diez milésimo y es, por lo tanto, mayor que π .

86. **Números reales.** — Procediendo en forma análoga a la que se hizo al hablar de la creación de los números negativos y luego de la de los fraccionarios puros, formaremos con los números irracionales y los racionales una nueva familia: la de los *números reales* de acuerdo con la siguiente:

DEFINICIÓN. — Se llama *número real* a todo número racional o irracional.

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Números naturales} \\ \text{Números negativos} \\ \text{Números fraccionarios puros} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Números} \\ \text{enteros} \\ \text{Números irracionales} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{Números} \\ \text{racionales} \end{array} \right\} \text{Números reales}$$

EJEMPLOS: $2, -5, -\frac{1}{3}, \sqrt{2}$ son números reales.

En cursos superiores se demuestra que la igualdad, desigualdad y las operaciones entre números reales gozan de los mismos caracteres y propiedades que la de los números racionales.

CAPITULO XIV

MAGNITUDES

PROGRAMA. — *Cantidades: definición y ejemplos. Cantidades homogéneas. La magnitud como cualidad abstracta con respecto a la cual las cantidades homogéneas se pueden considerar como iguales o desiguales. Ejemplos: longitud, superficie, volumen. Cantidades comparables. Comparación de cantidades homogéneas: distintos casos. Producto y cociente de una cantidad por un número. Dadas dos cantidades existe siempre un número y sólo uno, tal que la primera es igual al producto de dicho número por la otra y recíprocamente. Ejemplos. Razón de dos cantidades. Medida de una cantidad. Ejemplos. Valor de una cantidad con respecto a una unidad. Números concretos. La razón de dos cantidades es igual a la de sus medidas respecto de una misma unidad: (simplificación). El producto de la razón de una cantidad a otra por la razón de esta última a una tercera es igual a la razón de la primera a la tercera. Medidas de tiempo. Sistema cronométrico. Cálculos de reducción.*

87. Definición de cantidades. — Se llama cantidad a cada uno de los elementos de un conjunto de entes entre los cuales está definida la igualdad y la suma.

NOTACIÓN. — Las cantidades se representan por letras mayúsculas de imprenta A, B, C ...

Decir que entre los elementos de un conjunto está definida la igualdad, significa que existe entre ellos una relación, que se indica con el signo =, caracterizada por las siguientes relaciones:

- I) CARÁCTER IDÉNTICO. — $A = A$
- II) CARÁCTER RECÍPROCO. — Si $A = B$ es $B = A$
- III) CARÁCTER TRANSITIVO. — Si $A = B$ y $B = C$ es $A = C$.

Decir que entre los elementos de un conjunto está definida la *suma*, significa que tiene sentido entre ellos una operación, que se indica con el signo $+$, y que está caracterizada por las propiedades siguientes:

I) PROPIEDAD UNIFORME. — Si $A = A'$; $B = B'$; ... ; $N = N'$

es
$$A + B + \dots + N = A' + B' + \dots + N'.$$

II) PROPIEDAD CONMUTATIVA. —

$$A + B + C + \dots + N = C + N + A + \dots + B = \dots$$

III) PROPIEDAD ASOCIATIVA. —

$$A + B + C + \dots + N = A + (B + C) + \dots + N = \dots$$

IV). Existe una cantidad, representada por 0, tal que sumada a otra cualquiera da por resultado esta última. Dicha cantidad se llama *cantidad nula o módulo de la suma*:

Si
$$A + 0 = A \text{ es } 0 \text{ el módulo.}$$

EJEMPLOS. — Son cantidades los números naturales, los enteros, los racionales, los segmentos, los ángulos, los arcos de una misma circunferencia, los sectores de un mismo círculo ... pues al estudiar esos entes hemos definido entre ellos la igualdad y la suma, y demostrado que cumplen sus caracteres y propiedades, respectivamente.

Se verá más adelante, en Geometría, que las superficies y volúmenes son también cantidades.

88. Cantidades homogéneas. — DEFINICION. — Se llaman *cantidades homogéneas* a las que pertenecen a uno de esos conjuntos entre cuyos elementos está definida la igualdad y la suma.

EJEMPLO: $7, \frac{18}{3}, -14$ son cantidades homogéneas

$\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{M}$ » » »

$7, \widehat{B}, \overline{AB}$ no son cantidades homogéneas

89. Definición de magnitud. — La Lógica enseña que cuando, una relación entre elementos cumple los caracteres idéntico, recíproco y transitivo, dichos elementos tienen *algo igual*, o como también se dice, una *cualidad común*.

Así, por ejemplo, la cualidad común que tienen todos los segmentos iguales se llama *longitud*.

La cualidad común que tienen los ángulos iguales se llama *amplitud o abertura*.

La cualidad común que tienen las figuras equivalentes se llama *superficie*.

La cualidad común que tienen los cuerpos equivalentes se llama *volumen*.

La *longitud*, la *amplitud*, la *superficie*, el *volumen*, etc., se llaman en general *magnitudes*. Estas últimas pueden definirse así:

DEFINICIÓN. — Se llama *magnitud* a la cualidad abstracta con respecto a la cual las cantidades homogéneas se pueden considerar como iguales o desiguales.

90. Cantidades comparables. — Para poder establecer la comparación entre dos cantidades se requiere, en primer término, que éstas sean homogéneas, pues no tiene sentido decir, por ejemplo, que un número es menor que un ángulo, que un ángulo es mayor que un segmento, etc.

Pero eso no basta, pues hay cantidades homogéneas que no son comparables, así, por ejemplo, entre las fuerzas desarrolladas sepa-

radamente por dos caballos que actúan sobre un mismo vehículo no se puede saber cuál es la mayor de ellas, pues según la dirección y el sentido en que actúen será distinta su eficacia.

Para que dos cantidades homogéneas sean comparables deben satisfacer las condiciones que se indican en la siguiente:

DEFINICIÓN. — Se llaman *cantidades comparables* a las cantidades homogéneas entre las cuales están definidas las relaciones de *mayor* y de *menor*, y que satisfacen además los *Postulados de Arquímedes y de la Divisibilidad*.

Decir que entre cantidades homogéneas están definidas las relaciones de mayor y menor, significa que existen entre ellas dos relaciones que se indican con los signos $>$ y $<$, respectivamente, y que están caracterizadas por las propiedades siguientes:

$$\text{I)} \quad \text{Si } A > B \quad \text{resulta que} \quad B \nless A$$

$$\text{Si } A < B \quad \text{resulta que} \quad B \nless A$$

$$\text{II)} \quad \text{Si } A > B \quad \text{y} \quad B > C \quad \text{es} \quad A > C$$

$$\text{Si } A < B \quad \text{y} \quad B < C \quad \text{es} \quad A < C$$

$$\text{III)} \quad \text{Si } A < B \quad \text{es} \quad B > A$$

$$\text{IV)} \quad \text{Dadas } A \text{ y } B \text{ es } A > B \text{ o } A = B \text{ o } A < B.$$

Decir que cumplen el Postulado de Arquímedes, significa que: *Dadas dos cantidades A y B tales que A sea menor que B, es siempre posible, sumando cantidades iguales a A, obtener una suma mayor que B, o sea:*

$$\text{Si} \quad A < B \quad \text{es} \quad \overbrace{A + A + \dots + A}^m > B.$$

$$\text{NOTACIÓN: } \overbrace{A + A + \dots + A}^m \text{ se indica por } A.m \text{ o } m.A$$

Decir que cumplen el Postulado de Divisibilidad significa que: *Dada una cantidad A y un número natural cualquiera m, existe y es única, la cantidad B, llamada emésima parte de A o parte alicuota de A, tal que la suma de m sumandos iguales a B dé por resultado a A.*

NOTACIÓN: $\frac{A}{m}$ o $\frac{1}{m} A$ representan la emésima parte de A.

En símbolos: Es $B = \frac{A}{m} = \frac{1}{m} A$ si $A = \overbrace{B + B + \dots + B}^m$

EJEMPLOS DE CANTIDADES COMPARABLES. — Son cantidades comparables los segmentos entre sí (ver *Geometría 1^{er} curso*) los arcos de una misma circunferencia, los números racionales entre sí, etc., pues cumplen las condiciones que caracterizan a tales cantidades.

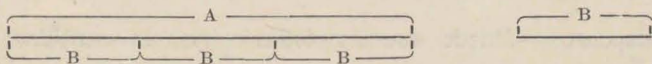
Los números enteros, en cambio, no son cantidades comparables entre sí, pues ellos no satisfacen al Postulado de divisibilidad.

91. Comparación de dos cantidades homogéneas. — Consideremos dos cantidades homogéneas cualesquiera, por ejemplo, los segmentos A y B. Si los comparamos puede suceder:

PRIMER CASO. — Que A contenga exactamente m veces a B, es decir que A sea igual a la suma de m sumandos iguales a B.

o sea $A = \overbrace{B + B + \dots + B}^m$

Por ejemplo: Seg. $A = \text{seg. } B + \text{seg. } B + \text{seg. } B = 3.\text{seg. } B$.

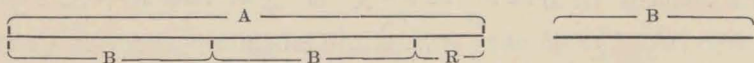


SEGUNDO CASO. — Que A no contenga exactamente a B sino que sea igual a m sumandos B más un resto, pero que contenga en cambio a una parte alicuota de B.

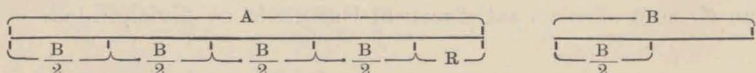
$$A = \overbrace{B + B + \dots + B}^m + R \quad \text{siendo} \quad R < B.$$

Por ejemplo:

$$\text{Seg. } A = \text{seg. } B + \text{seg. } B + \text{seg. } R \text{ siendo } \text{seg. } R < \text{seg. } B.$$

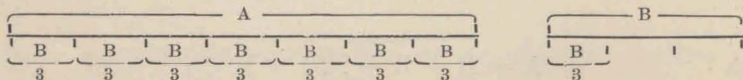


Probamos entonces si A contiene a una parte alicuota de B, por ejemplo a la mitad de B, y vemos que tampoco está contenida exactamente sino que



$$\text{seg. } A = \text{seg. } \frac{B}{2} + \text{seg. } \frac{B}{2} + \text{seg. } \frac{B}{2} + \text{seg. } \frac{B}{2} + R.$$

Probamos entonces si contiene la tercera parte de B, y vemos que en efecto la contiene 7 veces, es decir que:



$$A = \frac{B}{3} + \frac{B}{3} + \frac{B}{3} + \frac{B}{3} + \frac{B}{3} + \frac{B}{3} + \frac{B}{3} + R = 7 \cdot \frac{B}{3} + R$$

TERCER CASO. — Puede suceder todavía que la cantidad A no contenga exactamente a la segunda B, ni a su mitad $\frac{B}{2}$, ni a la

tercera parte $\frac{B}{3}$, ... ni a su enésima parte $\frac{B}{n}$... es decir a ninguna parte alicuota de B, pues siempre sobra un resto. Así si

$$A = B + \dots + B + R \quad \text{siendo} \quad R < B$$

$$A = \frac{B}{2} + \frac{B}{2} + \dots + \frac{B}{2} + R_1 \quad \gg \quad R_1 < \frac{B}{2}$$

$$A = \frac{B}{3} + \frac{B}{3} + \dots + \frac{B}{3} + R_2 \quad \gg \quad R_2 < \frac{B}{3}$$

.....

$$A = \frac{B}{n} + \frac{B}{n} + \dots + \frac{B}{n} + R_n \quad \gg \quad R_n < \frac{B}{n}$$

.....

es decir que la primera cantidad no contiene a la segunda, ni a ninguna parte alicuota de ésta un número entero de veces.

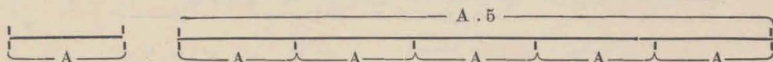
92. Producto de una cantidad por un número. — DEFINICIÓN II. — Se llama *producto de una cantidad A por un número natural m* a la suma de *m* sumandos iguales a A.

El producto de una cantidad A por un número natural *m* se indica indistintamente por $A \cdot m$ o $m \cdot A$

Luego $A \cdot m = m \cdot A = \overbrace{A + A + \dots + A}^m$.

EJEMPLO:

$$\text{Seg. } A \times 5 = \text{seg. } A + \text{seg. } A + \text{seg. } A + \text{seg. } A + \text{seg. } A$$



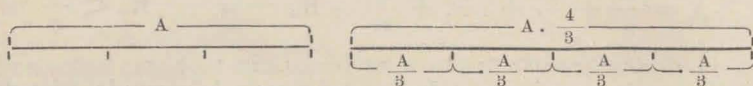
DEFINICIÓN II. — Se llama *producto de una cantidad A por un número racional positivo $\frac{m}{n}$* a la suma de *m* sumandos iguales a $\frac{A}{n}$.

El producto de una cantidad A por un número racional $\frac{m}{n}$ se indica indistintamente por $A \frac{m}{n}$ o $\frac{m}{n} A$ o por $\frac{mA}{n}$.

Luego: $A \frac{m}{n} = \frac{m}{n} A = \overbrace{\frac{A}{n} + \frac{A}{n} + \dots + \frac{A}{n}}^m$.

EJEMPLO:

Seg. $A \cdot \frac{4}{3} = \frac{\text{seg. } A}{3} + \frac{\text{seg. } A}{3} + \frac{\text{seg. } A}{3} + \frac{\text{seg. } A}{3}$.

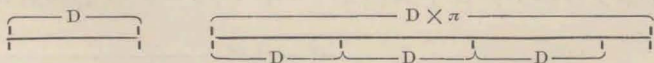


DEFINICIÓN III) Se llama *producto de una cantidad B por un número irracional* $n, \underline{a b c d} \dots$ a una cantidad A tal que

$$A = nB + \frac{a}{10} B + \frac{b}{100} B + \frac{c}{1000} B + \dots$$

EJEMPLO. — Sea multiplicar el segmento D por el número irracional $\pi = 3,14159 \dots$ De acuerdo con la definición tendríamos:

$$\text{seg. } D \times 3,14159 \dots = 3 \text{ seg. } D + \frac{1}{10} \text{ seg. } D + \frac{4}{100} \text{ seg. } D + \frac{1}{1000} \text{ seg. } D + \dots$$



93. Cociente de una cantidad por un número. — DEFINICIÓN. — Se llama *cociente de una cantidad A por un número entero, fraccionario o irracional, positivos, a otra cantidad B* que multiplicada por dicho número sea igual a la primera cantidad A .

En símbolos: $\frac{A}{m} = B$ si $B \cdot m = A$

$$\frac{\frac{A}{m}}{n} = B \quad \text{si} \quad B \cdot \frac{m}{n} = A$$

en general: $\frac{A}{\alpha} = B$ si $B \cdot \alpha = A$.

94. Postulado.— *Dadas dos cantidades existe siempre un número (entero, fraccionario o irracional), y sólo uno, tal que la primera es igual al producto de dicho número por la otra y, recíprocamente, dada una cantidad y un número, existe siempre otra cantidad cuyo producto por dicho número es igual a la primera.*

En símbolos: dadas A y B existe siempre un solo número α tal que:

$$A = \alpha \times B$$

recíprocamente: dados A y α existe siempre la cantidad B tal que:

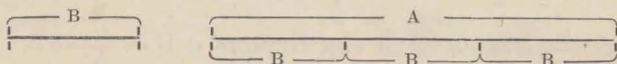
$$B \times \alpha = A.$$

95. Razón de dos cantidades.— DEFINICION.— Se llama *razón entre dos cantidades* A y B, al número (entero fraccionario o irracional) que multiplicado por la segunda B sea igual a la primera A.

NOTACIÓN: $\frac{A}{B}$ expresa la razón entre A y B.

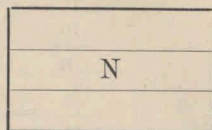
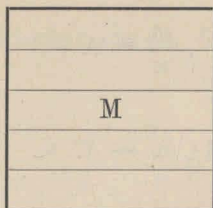
En símbolos: $\frac{A}{B} = \alpha$ si $A = B \cdot \alpha$.

EJEMPLO I.— Dados los segmentos A y B hallar su razón.



Es $\frac{\text{seg. } A}{\text{seg. } B} = 3$ puesto que $\text{seg. } A = 3 \text{ seg. } B$.

EJEMPLO II. — Dados dos rectángulos M y N hallar su razón



$$\frac{\text{rect. M}}{\text{rect. N}} = \frac{5}{3} \quad \text{puesto que} \quad \text{rect. M} = \frac{5}{3} \text{ rect. N}$$

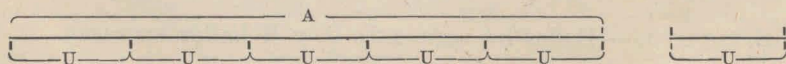
DEFINICIÓN. — La razón entre las cantidades B y A se dice que es la *inversa* de la razón entre A y B.

En símbolos: $\frac{B}{A}$ es la razón inversa de $\frac{A}{B}$.

96. **Medida de una cantidad.** — Dadas varias cantidades comparables se elige una cualquiera de ellas, que se llama *unidad*, con el objeto de hallar la razón entre cada una de las primeras y dicha unidad.

Así, por ejemplo, entre todos los segmentos se toma como unidad uno llamado *metro*, entre todos los ángulos se toma como unidad uno llamado *grado*, etc.

DEFINICIÓN. — Se llama *medida* de una cantidad A con respecto a la unidad U, a la razón $\frac{A}{U}$ entre dicha cantidad y esa unidad.



EJEMPLO. — *Medida de A con respecto a U* $= \frac{U}{A} = 5$.

OBSERVACIÓN. — La medida de una cantidad es siempre un número.

97. Valor de una cantidad con respecto a una unidad. — DEFINICIÓN. — Se llama *valor de una cantidad A con respecto a una unidad U*, al producto de dicha unidad U por la medida *a* de la cantidad A con respecto a esa unidad.

En simb.: *Valor de A respecto de U* = (*med. de A resp. U*) $\times$ U
 y como *Medida de A respecto de U* = $\frac{A}{U} = a$
 resulta *Valor de A respecto de U* = $a \times U$

98. Números concretos. — Como veremos más adelante para poder operar con cantidades, se opera con sus valores respecto a la misma unidad, en forma análoga a la hecha con los números, razón por la cual se suele llamar también *número concreto* al valor de una cantidad respecto de una unidad.

EJEMPLO: 37 m.; 8 Kg.; 12 m² etc. son números concretos.

99. Teorema. — *La razón entre dos cantidades, es igual a la de sus medidas respecto de una misma unidad.*

HIP.) A y B cantidades TESIS) $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$

$$\text{med. A} = \frac{A}{U} = a$$

$$\text{med. B} = \frac{B}{U} = b.$$

DEMOST.) Siendo por hipótesis:

$$\frac{A}{U} = a \text{ es } A = aU \text{ luego } U = \frac{A}{a} \text{ por def. de cociente}$$

$$\frac{B}{U} = b \text{ es } B = bU \text{ luego } U = \frac{B}{b} \text{ por igual razón}$$

$$\text{por lo tanto} \quad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} \text{ por consec. carácter trans.}$$

$$\text{y por definición de cociente} \quad A = \frac{a}{b} B$$

$$\text{luego} \quad \frac{A}{B} = \frac{a}{b} \text{ por definición de razón}$$

SIMPLIFICACIÓN. — Sabiendo que $A = aU$ y que $B = bU$ resulta:

$$\frac{A}{B} = \frac{aU}{bU} = \frac{a}{b} \quad \text{donde}$$

se observa que se ha pasado del segundo al tercer miembro, suprimiendo la U , es decir, como si se hubiese « *simplificado* » por U . Siendo A , B y U cantidades cualesquiera, resulta que la observación hecha se puede expresar en la siguiente:

REGLA PRÁCTICA. — *Para hallar la razón entre dos cantidades se reemplazan éstas por sus valores con respecto a una misma unidad y se suprime dicha unidad.*

EJEMPLO: Si $M = 35 \text{ cm.}$ y $N = 17 \text{ cm.}$ es $\frac{M}{N} = \frac{35 \text{ cm}}{17 \text{ cm}} = \frac{35}{17}.$

100. **Teorema.** — *El producto de la razón de una cantidad a otra por la razón de esta última a una tercera es igual a la razón de la primera a la tercera.*

HIP.) A, B y C cantidades. TESIS) $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$

DEMOST.) Sea U una cantidad que se elige como unidad, y a, b y c las medidas correspondientes a A, B y C respecto de U . Se tendría entonces

$$A = a \cdot U \quad [1] \quad B = b \cdot U \quad [2] \quad \text{y} \quad C = c \cdot U \quad [3].$$

De [1] y [2] se tiene $\frac{A}{B} = \frac{aU}{bU} = \frac{a}{b}$ por la regla ant.

De [2] y [3] se tiene $\frac{B}{C} = \frac{bU}{cU} = \frac{b}{c}$ por la regla ant.

$$\text{Mult. m. a m. da} \quad \frac{\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C}}{\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C}} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \quad [4]$$

Por otra parte, de [1] y [3] resulta:

$$[5] \quad \frac{A}{C} = \frac{aU}{cU} = \frac{a}{c} \quad \text{por la regla ant.}$$

luego de [4] y [5] $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$ por consec. II carác. trans.

OBSERVACIÓN. — Considerando la tesis del teorema anterior

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C} \quad \text{se observa}$$

que se ha pasado del primer miembro al segundo suprimiendo las B, o como suele decirse « *simplificando la B que multiplica con la B que divide* ».

101. Sistema cronométrico.—Siendo los intervalos de tiempo cantidades comparables, se ha elegido como unidad para medirlos al *día solar medio* (*). El día solar medio se divide en 24 partes iguales llamadas *horas solares* y cada hora se divide en 60 partes iguales llamadas *minutos solares*, cada minuto en 60 partes llamadas *segundos solares*. Estas horas, minutos y segundos son los intervalos de tiempo que marcan los relojes comunes.

El conjunto de unidades y de las relaciones entre las mismas, que permiten medir cualquier intervalo de tiempo, constituyen el *Sistema cronométrico*.

NOTACIÓN. 20 d. 8 h. 40 min. 10 seg. se lee veinte días, ocho horas, cuarenta minutos, diez segundos.

(*) Este se define, como se verá en el 5º Año de estudios, como el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos de un astro ficticio, llamado Sol medio, por el meridiano superior de un lugar.

102. **Cálculos de reducción.**—PROBLEMA I.—*Reducir 8 d 5 h 20 min 6 seg a la unidad más pequeña, o sea a segundos.*

Siendo $1 \text{ d} = 24 \text{ h}$
 $8 \text{ d} = 24 \text{ h} \times 8 = 192 \text{ h}$
 sumándole las 5 h se tienen 197 h
 siendo $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$
 $197 \text{ h} = 60 \text{ min} \times 197 = 11\,820 \text{ min}$
 sumándole los 20 min se tienen 11 840 min
 y como $1 \text{ min} = 60 \text{ seg}$
 $11\,840 \text{ min} = 60 \text{ seg} \times 11\,840 = 710\,400 \text{ seg}$
 sumándole los 6 seg se tienen 710 406 seg
 luego $8 \text{ d } 5 \text{ h } 20 \text{ min } 6 \text{ seg} = 710\,406 \text{ seg.}$

	24
×	8
	192
+	5
	197
×	60
	11 820
+	20
	11 840
×	60
	710 400
+	6
	710 406

PROB. II.—*Reducir 710 406 seg. a días, horas, minutos y segundos.*

Siendo $60 \text{ seg} = 1 \text{ min}$
 en $710\,406 \text{ seg}$ hay $(710\,406) : 60 = 11\,840 \text{ min}$ y restan 6 seg
 siendo $60 \text{ min} = 1 \text{ h}$
 en $11\,840 \text{ min}$ hay $(11\,840) : 60 = 197 \text{ h}$ y restan 20 min
 siendo $24 \text{ h} = 1 \text{ d}$
 en 197 h hay $(197) : 24 = 8 \text{ d}$ y restan 5 h
 luego $710\,406 \text{ seg} = 8 \text{ d } 5 \text{ h } 20 \text{ min } 6 \text{ seg.}$

En la práctica operación se hace así:

710 406	60		
110	11 840	60	
504	5 84	197	24
240	440	5	8
006	20		

Bolilla anterior no terminada
pag 1431 *25/2/532*

CAPITULO XV

SISTEMA METRICO DECIMAL

PROGRAMA. — *Historia. Ventajas del sistema métrico decimal sobre los demás sistemas. Medidas de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso. Correspondencia entre las unidades de volumen y peso. Peso específico. Ejercicios y problemas.*

103. **Historia del sistema métrico decimal.** — Hasta fines del siglo XVIII, todos los países, sin excepción, empleaban para sus mediciones, sistemas particulares distintos y en los cuales sus unidades no guardaban relaciones determinadas.

Así, por ejemplo, para medir las longitudes se empleaba en Inglaterra la *yarda*, en España la *vara*, y en Francia la *toesa*.

Esta diversidad de unidades, que aun dentro de un mismo país, variaba de una provincia o ciudad a otra, traía como consecuencia errores y fraudes y hacía además complicado el cálculo a que daban lugar ciertas operaciones comerciales.

Con el propósito de uniformar y facilitar las mediciones, la Asamblea Constituyente reunida en París a principios del año 1790 decretó la supresión de las viejas unidades de medida y la creación de un nuevo sistema, misión esta última que confió a la Academia de Ciencias, quien a su vez designó a los sabios Berthollet, Borda, Lagrange, Delambre, Laplace, Mechain y Prony, para tal objeto.

Esta comisión resolvió, que la unidad de longitud del nuevo sistema, fuera sacada de las dimensiones del globo terrestre, para lo cual dos de los mencionados sabios, Delambre y Mechain, midieron en toesas el arco de meridiano comprendido entre Dunkerque

y Barcelona. Esta medición, con otras ya efectuadas anteriormente, permitió calcular la longitud del cuarto de meridiano terrestre, supuesta esférica la Tierra. Este cálculo dió por resultado 5 130 740 toesas de París.

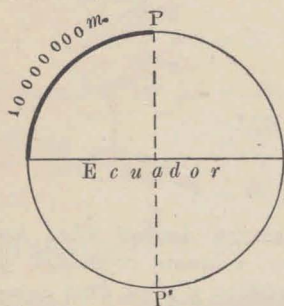


Fig. 5.

Las diez millonésima parte de la longitud del cuarto de meridiano, o sea 0,5130740 toesas (poco más de media toesa), fué adoptada como unidad de longitud del nuevo sistema y designada con el nombre de *metro*.

Para poder reproducir la unidad y utilizarla en los diversos países, se construyó una barra de platino iridiado, que a la temperatura del hielo en fusión, tenía la longitud de un metro. Dicha barra fué depositada en los Archivos Nacionales de Francia en el año 1790 y se conoce con el nombre *metro patrón*.

NOTA. — Mediciones más precisas han probado que el metro no es exactamente la diez millonésima parte del cuarto de meridiano terrestre sino algo menor; de manera que *el metro se define diciendo que es la longitud del metro patrón*.

104. Ventajas del sistema métrico decimal sobre los demás sistemas. — Se llama *Sistema métrico decimal* al que tiene por *unidad fundamental* al *metro* que es la unidad principal de *longitud*. Dicho sistema comprende además las unidades de *superficie*, *volumen*, *capacidad* y *peso*, todas las cuales están relacionadas con la unidad principal de longitud. Así: la unidad principal de superficie es el *metro cuadrado* que es la superficie de un cuadrado cuyo lado tiene un metro de longitud; la unidad principal de volumen es el *metro cúbico* que es el volumen de un cubo cuya arista tiene un metro de longitud.

La unidad principal de capacidad es el *litro*, que es el volumen de un cubo cuya arista tiene una longitud igual a la décima parte del metro. Además de las unidades principales que acabamos de

definir, se consideran dentro de cada magnitud, otras unidades, llamadas *secundarias*, que son múltiplos o submúltiplos de las primeras, según potencias del número 10.

Para designar a estas unidades, basta anteponer al nombre de la unidad principal los prefijos:

MÚLTIPLOS				SUBMÚLTIPLOS			
<i>Deca</i>	que significa	10		<i>deci</i>	que significa	0,1	
<i>Hecto</i>	»	»	100	<i>centi</i>	»	»	0,01
<i>Kilo</i>	»	»	1000	<i>mili</i>	»	»	0,001
<i>Miria</i>	»	»	10000				

Así, por ejemplo, el metro lineal que se representa por m, se divide en 10 partes iguales, cada una de las cuales se llama *decímetro* y se representa por dm; el decímetro se divide en 10 partes iguales, cada una de las cuales se llama *centímetro* y se representa por cm., y éste se divide en 10 partes iguales, cada una de las cuales se llama *milímetro*, y se representa por mm.

Por otra parte la suma de 10 metros se llama *Decámetro* y se representa por Dm; la suma de diez Decámetros se llama *Hectómetro* y se representa por Hm; la suma de 10 Hectómetros se llama *Kilómetro* y se representa por Km.

En la práctica suele darse preferencia, en ciertas mediciones, a determinadas unidades secundarias. Así, por ejemplo, para medir la distancia entre dos ciudades se emplea el Kilómetro, en cambio se emplea el centímetro para medir un segmento.

El empleo de las diversas unidades secundarias, para medir las cantidades de una misma magnitud, nos conduce al problema de expresar o *reducir* unidades de un orden a las de otro.

EJEMPLO I. — Sea, por ejemplo, reducir a centímetros 3 Dm.

Siendo $1 \text{ Dm} = 10 \text{ m}$; $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$ y $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$
 es $1 \text{ Dm} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ cm} = 1000 \text{ cm}$ luego $3 \text{ Dm} = 3000 \text{ cm}$

EJEMPLO II. — Hallar cuantos metros hay en 7 dm.

Siendo $1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$ es $7 \text{ dm} = 0,1 \text{ m} \cdot 7 = 0,7 \text{ m}$

104'. Comparación del sistema métrico con el cronométrico.—

Una de las ventajas que representa el Sistema métrico decimal sobre los demás sistemas, el cronométrico por ejemplo, es la facilidad con que se pueden efectuar las operaciones con las mediciones hechas utilizando sus unidades.

Vamos a mostrar con dos ejemplos de reducción, uno entre unidades del sistema cronométrico y otro entre unidades de longitud, las mencionadas ventajas.

EJEMPLO I. — Reducir 5 h. 07 min. 09 seg. a segundos.

Procediendo como en el párrafo n° 102 se tiene:

$$\begin{array}{r}
 60 \\
 \times \quad 5 \\
 \hline
 300 \\
 + \quad 07 \\
 \hline
 307 \\
 \times \quad 60 \\
 \hline
 18420 \\
 + \quad 09 \\
 \hline
 18429
 \end{array}$$

luego $5 \text{ h } 07 \text{ min. } 09 \text{ seg.} = 18\,429 \text{ seg.}$

Como puede observarse, este cálculo es difícil de hacer mentalmente.

EJEMPLO II. — Reducir 5 m 7 dm 9 cm a centímetros:

Siendo $5 \text{ m} = 500$; $7 \text{ dm} = 70 \text{ cm}$

es $5 \text{ m } 7 \text{ dm } 9 \text{ cm} = (500 + 70 + 9) \text{ cm} = 579 \text{ cm}$

Donde puede observarse que por su sencillez este cálculo es fácil de hacer mentalmente. En la práctica se simplifica aun más este cálculo, pues, teniendo en cuenta que entre los múltiplos y submúltiplos de la unidad, existen las mismas relaciones que entre las uni-

dades de los diversos órdenes decimales, resulta que una cantidad expresada con múltiplos y submúltiplos de la unidad, se escribe en la misma forma que un número decimal.

Así por ejemplo; $5 \text{ m } 7 \text{ dm } 9 \text{ cm} = 579 \text{ cm}$

En resumen; el Sistema métrico decimal presenta sobre los demás sistemas las siguientes ventajas:

1º) *Siendo casi universalmente adoptado, elimina la diversidad de unidades existentes en los distintos países.*

2º) *Las relaciones entre las diversas unidades principales son, por definición, muy sencillas, lo que facilita su control.*

3º) *La sencillez de los cálculos con las mediciones efectuadas en dicho sistema, pues son aplicables a ella las reglas del cálculo estudiadas para los números decimales.*

105. **Medidas de longitud.** — Hemos visto que la unidad principal de longitud es el metro (m). Las unidades secundarias son

Múltiplos	{	Decámetro (Dm) =	= 10 m
		Hectómetro (Hm) = 10 Dm =	100 m
		Kilómetro (Km) = 10 Hm =	1000 m
		Miriámetro (Mm) = 10 Km =	10 000 m
Submúltiplos	{	decímetro (dm) =	= 0,1 m
		centímetro (cm) = 0,1 dm =	0,01 m
		milímetro (mm) = 0,1 cm =	0,001 m

Se emplea además para mediciones de gran precisión el micrómetro = 0,000 001 m y que se representa por la letra griega μ (mu).

DEFINICIÓN. — Se llaman *unidades reales o efectivas*, aquellas unidades de medida que se construyen materialmente, para efectuar prácticamente las mediciones.

Las *medidas efectivas de longitud* son el doble decímetro y el doble decámetro (cadena).

106. **Medidas de superficie.** — Una unidad principal es el *metro cuadrado* (m^2). Las unidades secundarias son las superficies de cuadrados que tienen por lados los múltiplos y submúltiplos del metro. Así por ejemplo el *Decámetro cuadrado* es la superficie de un cuadrado de 10 m de lado, y que se compone de 100 cuadrados de 1 m de lado; por lo tanto $1 \text{ Dm}^2 = 100 \text{ m}^2$. (Figura 6).

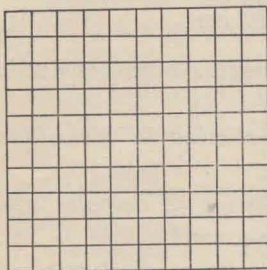


Fig. 6.

Análogamente el *Hectómetro cuadrado* es igual a 100 Dm^2 y en general, cada unidad es igual a cien unidades del orden inmediato inferior.

Múltiplos	{	<i>Decámetro cuadrado</i> (Dm^2) = $(10 \text{ m})^2 = 100 \text{ m}^2$
		<i>Hectómetro cuadrado</i> (Hm^2) = $(10 \text{ Dm})^2 = 10\,000 \text{ m}^2$
		<i>Kilómetro cuadrado</i> (Km^2) = $(10 \text{ Hm})^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$
		<i>Miriámetro cuadrado</i> (Mm^2) = $(10 \text{ Km})^2 = 100\,000\,000 \text{ m}^2$
Submúlt.	{	<i>decímetro cuadrado</i> (dm^2) = $(0,1 \text{ m})^2 = 0,01 \text{ m}^2$
		<i>centímetro cuadrado</i> (cm^2) = $(0,1 \text{ dm})^2 = 0,0001 \text{ m}^2$
		<i>milímetro cuadrado</i> (mm^2) = $(0,1 \text{ cm})^2 = 0,000001 \text{ m}^2$

OBSERVACIÓN. — Las expresiones de la forma $(5 \text{ m})^2$; $(10 \text{ m})^2$; $(0,02 \text{ Dm})^2$; etc., se tratan en el cálculo como potencias de monomios. Así:

$$(5 \text{ m})^2 = 25 \text{ m}^2 ; (10 \text{ cm})^2 = 100 \text{ cm}^2 ; (0,02 \text{ Dm})^2 = 0,0004 \text{ Dm}^2.$$

Igualmente productos de la forma $8 \text{ m} \times 3 \text{ m}$; $9 \text{ cm} \times 0,2 \text{ cm}$; etc. se efectúan como productos de monomios. Así:

$$8 \text{ m} \times 3 \text{ m} = 24 \text{ m}^2 ; 9 \text{ cm} \times 0,2 \text{ cm} = 1,8 \text{ cm}^2.$$

Es corriente expresar la superficie de los campos, utilizando como unidades al Hm^2 , al Dm^2 y m^2 con los nombres *Hectárea*, *Area* y *Centiárea* respectivamente. Es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hectárea (Ha)} = \text{Hm}^2 \\ \text{Area (a)} = \text{Dm}^2 \\ \text{Centiárea (ca)} = \text{m}^2 \end{array} \right.$$

OBSERVACIÓN. — No se construyen medidas efectivas de superficie pues éstas no se miden directamente. Así, por ejemplo, la superficie de un rectángulo se determina conociendo las longitudes de la base y de la altura, y en general la superficie de una figura cualquiera, se halla midiendo las longitudes de ciertas líneas que pertenecen a ella, y procediendo como indica en cada caso la Geometría.

107. **Medidas de volumen.** — La unidad principal es el metro cúbico (m^3). Las unidades secundarias son los volúmenes de cubos que tienen por lados los múltiplos y submúltiplos del metro. Así por ejemplo, el *Decámetro cúbico* es el volumen de un cubo de 10 m lado, y que se compone de 1000 cubos de 1 m lado; por lo tanto $1 \text{ Dm}^3 = 1000 \text{ m}^3$. (Figura 7).

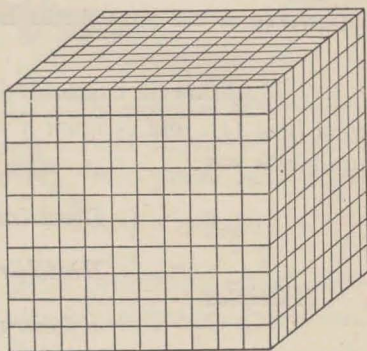


Fig. 7.

Análogamente el *Hectómetro cúbico* es igual a 1000 Dm^3 , y en general cada unidad es igual a 1000 unidades del orden inmediato inferior.

$$\text{Múltiplos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Decámetro cúbico (Dm}^3\text{)} = (10 \text{ m})^3 = 1000 \text{ m}^3 \\ \text{Hectómetro cúbico (Hm}^3\text{)} = (10 \text{ Dm})^3 = 1000 \text{ 000 m}^3 \\ \text{Kilómetro cúbico (Km}^3\text{)} = (10 \text{ Hm})^3 = 1000 \text{ 000 000 m}^3 \\ \text{Miriámetro cúbico (Mm}^3\text{)} = (10 \text{ Km})^3 = 1000 \text{ 000 000 000 m}^3 \end{array} \right.$$

$$\text{Sub-} \left\{ \begin{array}{l} \text{decímetro cúbico} \quad (\text{dm}^3) = (0,1 \text{ m})^3 = 0,001 \text{ m}^3 \\ \text{centímetro cúbico} \quad (\text{cm}^3) = (0,1 \text{ dm})^3 = 0,000 \, 001 \text{ m}^3 \\ \text{milímetro cúbico} \quad (\text{mm}^3) = (0,1 \text{ cm})^3 = 0,000 \, 000 \, 001 \text{ m}^3 \end{array} \right. \text{múlt.}$$

OBSERVACIÓN. — Las expresiones de la forma $(3 \text{ m})^3$; $(10 \text{ cm})^3$; $(1,2 \text{ Km})^3$; etc. se tratan en el cálculo como potencias de monomios. Así:

$$(3 \text{ m})^3 = 27 \text{ m}^3; \quad (10 \text{ cm})^3 = 1000 \text{ cm}^3; \quad (1,2 \text{ Km})^3 = 1,728 \text{ Km}^3$$

Igualmente productos de la forma $2 \text{ m} \times 0,5 \text{ m} \times 6 \text{ m}$; $2 \text{ m}^2 \times 0,8 \text{ m}$; etc., se efectúan como productos de monomios. Así:

$$2 \text{ m} \times 0,5 \text{ m} \times 6 \text{ m} = 6 \text{ m}^3; \quad 2 \text{ m}^2 \times 0,8 \text{ m} = 1,6 \text{ m}^3$$

La única medida efectiva de volumen, es el m^3 que con el nombre de *estereo* se usa para medir la leña.

108. **Medidas de capacidad.** — La unidad principal de capacidad es el *litro* (l), que es igual a un decímetro cúbico. Las unidades secundarias son:

$$\begin{array}{l} \text{Múltiplos} \left\{ \begin{array}{l} \text{Decálitro} \quad (\text{Dl}) = \quad \quad = 10 \text{ l} \\ \text{Hectólitro} \quad (\text{Hl}) = 10 \text{ Dl} = 100 \text{ l} \\ \text{Kilólitro} \quad (\text{Kl}) = 10 \text{ Hl} = 1000 \text{ l} \\ \text{Miriálitro} \quad (\text{Ml}) = 10 \text{ Kl} = 10 \, 000 \text{ l} \end{array} \right. \\ \\ \text{Submúltiplos} \left\{ \begin{array}{l} \text{decilitro} \quad (\text{dl}) = \quad \quad = 0,1 \text{ l} \\ \text{centilitro} \quad (\text{cl}) = 0,1 \text{ dl} = 0,01 \text{ l} \\ \text{mililitro} \quad (\text{ml}) = 0,1 \text{ cl} = 0,001 \text{ l} \end{array} \right. \end{array}$$

Estas unidades se construyen de metal o de vidrio para los líquidos y de madera para los áridos.

109. Unidades de peso. — La unidad principal es el *gramo* (gr), que es el peso, en el vacío y en un lugar determinado, de 1 cm³ de agua destilada y a la temperatura de 4°. Las unidades secundarias son:

Múltiplos.	<i>Decágramo</i> (Dg) =	= 10 gr	
	<i>Hectógramo</i> (Hg) = 10 Dg =	100 gr	
	<i>Kilógramo</i> (Kg) = 10 Hg =	1000 gr	= 1 Kg
	<i>Miriágramo</i> (Mg) = 10 Kg =	10 000 gr	= 10 Kg
	<i>Quintal</i> (q) = 10 Mg =	100 000 gr	= 100 Kg
	<i>Tonelada</i> (t) = 10 q =	1000 000 gr	= 1000 Kg
Submúltip.	<i>decígramo</i> (dg) =	= 0,1 gr	
	<i>centígramo</i> (cg) = 0,1 dg =	0,01 gr	
	<i>milígramo</i> (mg) = 0,1 cg =	0,001 gr	

Siendo el gramo una unidad pequeña, en la práctica se toma como unidad el Kilogramo y se agregan además dos múltiplos: el *quintal métrico* (q) y la *tonelada métrica* (t), como puede verse en el cuadro de los múltiplos.

MEDIDAS EFECTIVAS. — Se emplean en la práctica, medidas efectivas iguales a los múltiplos y submúltiplos del kilogramo, a su duplo y a su mitad. Los pesos efectivos más grandes se construyen de hierro fundido, los otros de bronce y los más pequeños de plata o de platino.

110. Correspondencia entre las unidades de volumen y peso. — Al definir las unidades de volumen y de peso vimos que *un gramo* era el peso de un *centímetro cúbico* de agua destilada a 4°C de temperatura. Por esa razón las unidades *gramo* y *centímetro cúbico* y sus múltiplos se llaman *unidades correspondientes*.

A continuación damos un cuadro en el que se consignan las unidades correspondientes más usadas:

Unidades de peso	gr	Kg	t
Unidades de Volumen	cm ³	dm ³	m ³

110. **Peso específico.**— DEFINICION.— Se llama *peso específico* de una substancia, en un lugar determinado, al cociente de la medida del peso de un cierto volumen de la misma, en ese lugar, por la medida de dicho volumen tomada con respecto a unidades correspondientes.

Indicando con P el peso de un volumen V de un cuerpo, y suponiendo que peso y volumen han sido medidos en unidades correspondientes, se tiene:

$$p. e. = \frac{\text{med. } P}{\text{med. } V} \quad [1] \quad \text{donde } p. e. \text{ se lee peso específico.}$$

Tratemos de hallar, por ejemplo, el peso específico del aluminio. Tomando un volumen $V = 4 \text{ cm}^3$, su peso expresado en gr, que es la unidad correspondiente al cm^3 , es $P = 10,4 \text{ gr}$, luego:

$$p. e. = \frac{\text{med. } 10,4 \text{ gr}}{\text{med. } 4 \text{ cm}^3} = \frac{10,4}{4} = 2,6$$

EJEMPLO II) *Hallar el peso específico del agua destilada.*

Siendo por definición 1 gr el peso de 1 cm^3 de agua destilada a 4°C resulta

$$p. e. = \frac{\text{med. } 1 \text{ gr}}{\text{med. } 1 \text{ cm}^3} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{es decir}$$

El peso específico del agua es igual a 1.

OBSERVACIÓN.— De los ejemplos anteriores resulta que:

Decir que el peso específico de un cuerpo, por ejemplo el aluminio, es $p. e. = 2,6$ significa que un determinado volumen de esa substancia pesa 2,6 veces más que el mismo volumen de agua.

Así, por ejemplo, si el peso específico del mercurio es $p. e. = 13,6$, eso significa que 1 cm^3 de mercurio pesa 13,6 veces más que 1 cm^3 de agua, es decir 13,6 gr.

Análogamente, si el peso específico del corcho es 0,24 eso significa que 1 cm^3 de corcho pesa 0,24 de lo que pesa 1 cm^3 de agua, es decir 0,24 gr puesto que 1 cm^3 de agua pesa 1 gr.

De la fórmula [1] que da el peso específico, resulta:

$$\text{med. } P = p. e. \times \text{med. } V \quad [2] \quad \text{y} \quad \text{med. } V = \frac{\text{med. } P}{p. e.} \quad [3]$$

que expresan respectivamente:

El peso de un cuerpo tiene por medida al producto de su peso específico por la medida de su volumen tomados con unidades correspondientes.

El volumen de un cuerpo tiene por medida al cociente de la medida de su peso, tomado con la unidad correspondiente a la del volumen, por su peso específico.

APLICACIONES. — ¿Cuál será el peso de 4 m^3 de acero si su peso específico es 7,5?

Sabemos que: $\text{med. } P = p. e. \times \text{med. } V$

luego en nuestro caso es $\text{med. } P = 7,5 \times \text{med. } 4 \text{ m}^3$.

Adoptando como unidad de medida para el volumen 4 m^3 el m^3 , y su unidad correspondiente la tonelada t para el peso P , tendremos:

$$\text{med. } P = \frac{P}{t} \quad \text{y} \quad \text{med. } 4 \text{ m}^3 = \frac{4 \text{ m}^3}{\text{m}^3} = 4$$

y por lo tanto
$$\frac{P}{t} = 7,5 \times 4$$

de donde $P = 7,5 \times 4 t = 30 t$ es el peso de los 4 m^3 de acero.

X

EJEMPLO II) ¿Cuál es el volumen de una barra de bronce cuyo peso es de 110 Kg si el peso específico del bronce es 8,8?

Sabemos que: $\text{med. } V = \frac{\text{med. } P}{p. e.}$

luego en nuestro caso es $\text{med. } V = \frac{\text{med. } 110 \text{ Kg.}}{8,8}$

Adoptando como unidad de medida para el peso 110 Kg el Kg, y su unidad correspondiente el decímetro cúbico para el volumen V, tendremos

$$\text{med. } V = \frac{V}{\text{dm}^3} \quad \text{y} \quad \text{med. } 110 \text{ Kg.} = \frac{110 \text{ Kg}}{\text{Kg}} = 110$$

y por lo tanto $\frac{V}{\text{dm}^3} = \frac{110}{8,8}$

de donde $V = \frac{110 \text{ dm}^3}{8,8} = 12,5 \text{ dm}^3$ es el volumen

de los 110 Kg de bronce.

SISTEMA ANTIGUO DE PESAS Y MEDIDAS USADO EN LA REPÚBLICA ARGENTINA. — Antes que nuestro País adoptara el Sistema métrico decimal, estaba en uso el sistema empleado en España en aquella época.

Algunas de las unidades de este sistema se usan todavía, razón por la cual las damos a continuación.

Las unidades de longitud son:

La legua = 40 cuabras

La cuadra = 150 varas

La vara = 3 pies

El pié = 12 pulgadas

La pulgada = 12 líneas

La línea = 12 puntos

9866

Como la longitud de la vara, expresada en metros, es igual a 0,866 m resulta fácil reducir cualquiera de las otras unidades a metros. Así por ejemplo:

$$1 \text{ cuadra} = 150 \text{ varas} = 0,866 \text{ m} \times 150 = 129,90 \text{ m} \cong 130 \text{ m}$$

Además se emplean todavía las siguientes unidades de superficie:

$$\text{La legua cuadrada} = (40 \text{ cuabras})^2 = 1600 \text{ cuabras cuadradas}$$

$$\text{La cuadra cuadrada o manzana} = (150 \text{ varas})^2 = 22\,500 \text{ varas cuadradas}$$

$$\text{La vara cuadrada} = (3 \text{ pies})^2 = 9 \text{ pies cuadrados}$$

Como una vara = 0,866 m resulta

$$\text{Una vara cuadrada} = (0,866 \text{ m})^2 \cong 0,750 \text{ m}^2$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad \text{una manzana} &= 22\,500 \text{ varas cuadradas} \\ &= 22\,500 \times 0,75 \text{ m}^2 = 16\,875 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

a medio estudio 26 - manuscrito

CAPITULO XVI

RAZONES Y PROPORCIONES NUMERICAS

PROGRAMA. — *Definiciones. Proporción continua. Teorema fundamental de las proporciones. Recíproco. Caso particular en que la proporción es continua. Cálculo de un extremo o de un medio desconocido en una proporción ordinaria o continua. Las siete nuevas proporciones deducidas de una dada. Nuevas proporciones deducidas de una dada por adición o sustracción de sus términos. Series de razones iguales. Propiedad fundamental.*

111. Definición I. — Se llama *razón* entre dos números reales distintos de cero, dados en un cierto orden, al cociente exacto del primero por el segundo. El primero se llama *antecedente* y el segundo *consecuente*.

En símbolos: la razón entre a y b es $\frac{a}{b} = a : b$ siendo a y b números reales.

EJEMPLOS:

La razón entre 8 y -4 es $\frac{8}{-4} = -2$

» » » 0,3 y 6 es $\frac{0,3}{6} = 0,05$

2
1
» » » $\sqrt{8}$ y $\sqrt{2}$ es $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

DEFINICIÓN II. — Dados en un cierto orden cuatro números reales distintos de cero, se dice que forman una *proporción*, cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos.

En símbolos: Dados a, b, c , y d si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a, b, c y d forman una proporción y se lee « a es a b como c es a d ».

EJEMPLOS:

$$\frac{-1}{0,5} = \frac{-8}{4} \text{ es una proporción pues } \frac{-1}{0,5} = -2 \text{ y } \frac{-8}{4} = -2$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{9}} \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{9}{10} \text{ y } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{10}$$

DEFINICIÓN III. — Los números dados se llaman *términos* de la proporción, el antecedente de la primera y el consecuente de la segunda razón se llaman *extremos* y el consecuente de la primera razón y el antecedente de la segunda se llaman *medios*.

Así en $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a y d son *extremos* y b y c *medios*.

NOTA. — Estas denominaciones provienen de la forma en que se acostumbra también a escribir las proporciones.

$$a : b :: c : d \quad [1]$$

OBSERVACIÓN. — La definición de proporción puede enunciarse brevemente diciendo: *proporción es la igualdad de dos razones*.

112. Proporción continua. — DEFINICION. — Se dice que una proporción es *continua* cuando sus medios son iguales.

En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ es una proporción continua.

EJ.M.: $\frac{7}{11} = \frac{11}{17 \frac{2}{7}}$ y $\frac{5}{0,8} = \frac{0,8}{0,128}$ son prop. continuas.

En cada proporción continua se dice que el medio b es *medio proporcional* entre los extremos a y c , y que el extremo c es *tercero proporcional* al medio b y al otro extremo a .

113. Teorema fundamental. — Consideremos la proporción entre números enteros $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$.

Como cada razón es un número racional y además son éstos iguales, los productos cruzados de sus términos también lo son, es decir, $3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$ de acuerdo con la definición de números racionales iguales. Pero como los factores del primer producto son los extremos de la proporción, y los factores del segundo los medios de la misma, se tendrá que en la proporción considerada: *el producto de los extremos es igual al producto de los medios*.

El teorema que sigue prueba que esta propiedad es válida, cuando los términos de la proporción son enteros, fraccionarios o irracionales, es decir, números reales cualesquiera.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS PROPORCIONES. — *En toda proporción el producto de los extremos es igual al de los medios.* •

$$\text{HIP.) } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\text{TESIS) } a \cdot d = c \cdot b$$

DEMOST.) Puesto que en la igualdad de la Tesis, no hay divisores, para llegar a ella partiendo de la Hipótesis procuremos hacerlos desaparecer en ésta. Para que desaparezca el divisor b en la pri-

mera razón, basta multiplicarla por b , y a fin de que subsista la igualdad, habrá que multiplicar a la segunda razón por b ; para que desaparezca el divisor d en la segunda razón, basta multiplicarla por d y a fin de que subsista la igualdad habrá que multiplicar la primera razón por d . Por lo tanto para que desaparezcan los dos divisores de la igualdad de la Hipótesis basta multiplicar ambos miembros por $b.d$ y simplificar.

Tenemos pues que

siendo	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	por hipótesis
y	$bd = bd$	por carácter idéntico
Múltipl. m. a m.	$\frac{a}{b} . bd = \frac{c}{d} . bd$	por prop. unif. de multiplic.
simplificando queda	$a . d = c . b$	con lo que el teorema resulta demostrado

114. Teorema recíproco. — *Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos (siendo todos ellos distintos de cero) se puede formar con ellos una proporción siendo extremos los factores de un producto y medios los del otro.*

HIP.) $a.d = c.b$

TESIS) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a, b, c y d distintos de cero.

DEMOST.) Siendo, por hip., $a.d = c.b$ y además distinto de cero el producto $bd = bd$

Dividiendo m. a m. da $\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd}$ por prop. unif. división.

Simplificando queda $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

115. Teorema fundamental de las proporciones continuas. —

En toda proporción continua el producto de los extremos es igual al cuadrado del medio.

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

TESIS) $a \cdot c = b^2$

DEMOST.) Aplicando el teorema fundamental a la proporción de la hipótesis, se tiene:

$$a \cdot c = b \cdot b$$

o sea

$$a \cdot c = b^2$$

con lo que el teorema queda demostrado.

TEOREMA RECÍPROCO. — *Si el producto de dos números es igual al cuadrado de un tercero, se puede formar con ellos una proporción continua siendo extremos los factores del primer producto y medios el tercer número.*

HIP.) $a \cdot c = b^2$

TESIS) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

DEMOST.) Siendo, por hip.,

$$a \cdot c = b^2$$

$$b \cdot c = b \cdot c$$

por carácter idéntico

Dividiendo m. a m. da

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{b^2}{b \cdot c}$$

Simplificando, queda

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

116. Cálculo de un extremo desconocido en una proporción ordinaria o continua. — PROBLEMA I. — *Calcular el extremo desconocido en la proporción*

la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Siendo en la proporción ant. $a \cdot x = c \cdot b$ por teorema fundam.

dividiendo por a y simpl. da $x = \frac{c \cdot b}{a}$ lo que nos dice que:

Un extremo desconocido es igual al producto de los medios dividido por el medio conocido.

extremo

APLICACIONES. — Calcular x en la proporción $\frac{6}{3} = \frac{8}{x}$

$$x = \frac{8 \cdot 3}{6} = \frac{24}{6} = 4.$$

Calcular x en la proporción $\frac{\frac{3}{4}}{0,5} = \frac{8}{x}$

$$x = \frac{8 \cdot 0,5}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{4 \cdot 4}{3} = \frac{16}{3}.$$

PROBLEMA II. — Calcular el extremo desconocido en la proporción continua $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.

Siendo en la proporción dada $a \cdot x = b^2$ por el teorema fundamental de las proporciones continuas

dividiendo por a y simplif. da $x = \frac{b^2}{a}$ lo que nos dice que:

Un extremo desconocido en una proporción continua es igual al cuadrado del medio dividido por el extremo conocido.

APLICACIONES. — Calcular x en la proporción $\frac{-4}{8} = \frac{8}{x}$

$$x = \frac{8^2}{-4} = \frac{64}{-4} = -16$$

Calcular x en la proporción $\frac{0,3}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{x}$

$$x = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{0,3} = \frac{\frac{1}{4}}{0,3} = \frac{1}{1,2}.$$

117. Cálculo de un medio desconocido en una proporción ordinaria o continua. — PROBLEMA III. — *Calcular el medio desconocido en la proporción* $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$.

Siendo en la proporción dada $a \cdot d = c \cdot x$

Dividiendo por c y simplif. da $x = \frac{a \cdot d}{c}$ lo que nos dice que

Un medio desconocido es igual al producto de los extremos dividido por el medio conocido.

APLICACIONES. — Calcular x en la proporción $\frac{12}{x} = \frac{-6}{-5}$

$$x = \frac{12 \cdot (-5)}{-6} = \frac{-60}{-6} = 10$$

Calcular x en la proporción $\frac{0,8}{+4} = \frac{x}{0,5}$

$$x = \frac{0,8 \cdot 0,5}{+4} = \frac{0,4}{+4} = \frac{0,1}{+1} = +0,1.$$

PROBLEMA IV. — *Calcular el medio desconocido en la proporción continua* $\frac{a}{x} = \frac{x}{c}$.

Siendo en la proporción dada $a \cdot c = x^2$

extrayendo la raíz cuadrada $x = \sqrt{a \cdot c}$ lo que nos dice que:

El medio desconocido en una proporción continua es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

APLICACIONES. — Calcular x en la proporción $\frac{3}{x} = \frac{x}{27}$

$$x = \sqrt{3 \cdot 27} = \sqrt{81} = 9.$$

Calcular x en la proporción $\frac{8}{x} = \frac{x}{\frac{2}{9}}$

$$x = \sqrt[4]{8 \cdot \frac{2}{9}} = \sqrt[4]{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

188. Las siete nuevas proporciones deducidas de una dada.—

COROLARIO I. — *Si en una proporción se invierten sus razones, se obtiene otra proporción.*

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

En efecto: Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hip. es $a \cdot d = c \cdot b$ por teor. fund.

o bien $b \cdot c = d \cdot a$ por. car. recíp. y prop. conmut. mult.

luego $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ por el teor. recíproco del fundam.

COROLARIO II. — *Si en una proporción se permutan los extremos, se obtiene otra proporción.*

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

En efecto: Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hip. es $a \cdot d = c \cdot b$ por teor. fund.

o bien $d \cdot a = c \cdot b$ por prop. conmutativa de multipl.

luego $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ por el teor. recíproco del fundam.

COROLARIO III. — *Si en una proporción se permutan los medios se obtiene otra proporción.*

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

En efecto: Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hip. es $a \cdot d = c \cdot b$ por teor. fund.
 o bien $a \cdot d = b \cdot c$ por prop. conmutativa de multipl.
 luego $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ por teorema recíproco del fundam.

COROLARIO IV. — *Si en una proporción, se permutan las razones, se obtiene otra proporción.*

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

En efecto: Es cierto por el carácter recíproco de la igualdad de números reales.

LAS OCHO FORMAS DE ESCRIBIR UNA PROPORCIÓN. — Los cuatro corolarios anteriores nos permiten deducir de una proporción dada otras siete proporciones:

- 1ª) Así de: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ resultan las siguientes:
 2ª) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ que se obtiene invirtiendo las razones en la 1ª
 3ª) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ que se obtiene permutando los extremos en la 1ª
 4ª) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ que se obtiene permutando los medios en la 1ª

Permutando las razones de las proporciones 1ª, 2ª, 3ª y 4ª se obtienen respectivamente

- 5ª) $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ permutando las razones en la 1ª
 6ª) $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ » » » » 2ª
 7ª) $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ » » » » 3ª
 8ª) $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$ » » » » 4ª

118. Nuevas proporciones deducidas de una dada por adición o sustracción de sus términos. — TEOREMA I. — *En toda proporción la suma de antecedente y consecuente de la primera razón, es a su consecuente, como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

TESIS) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

DEMOST.) Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hipótesis, sumando 1 a ambos miembros da $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$ por prop. unifor. de la suma o sea $\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$ luego $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ por la recíproca de la propiedad distributiva de la división con respecto a la adición.

TEOREMA II. — *En toda proporción la diferencia de antecedente y consecuente de la primera razón, es a su consecuente, como la diferencia entre antecedente y consecuente de la segunda razón es a su consecuente.*

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

TESIS) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

DEMOST.) Siendo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por hip., rest. 1 a ambos miembros resulta $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$ o sea $\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d}$ luego $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ por la recíproca de la propiedad distributiva de la división con respecto a la resta.

119. Serie de razones iguales. — DEFINICIÓN. — Se llama *serie de razones iguales*, a la igualdad de dos o más razones.

En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{m}{n}$ es una serie de razones iguales,

EJEMPLOS: $\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$; $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{5}{15}$

OBSERVACIÓN. — Como puede verse en el primer ejemplo, una proporción es un caso particular de una serie de razones iguales.

120. Propiedad fundamental de la serie de razones iguales. — TEOREMA. — *En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes, es a la suma de los consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.*

HIP.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{m}{n}$

TESIS) $\frac{a + c + e + \dots + m}{b + d + f + \dots + n} = \frac{a}{b}$.

DEMOST.) Representando el valor de la razón $\frac{a}{b}$ por q , como las razones $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \dots, \frac{m}{n}$ son iguales por hipótesis, son también

$$\frac{c}{d} = q, \quad \frac{e}{f} = q, \quad \dots, \quad \frac{m}{n} = q.$$

Siendo $\frac{a}{b} = q$ es $a = b.q$ por def. de razón y de cociente

» $\frac{c}{d} = q$ » $c = d.q$ » » » » » » »

» $\frac{e}{f} = q$ » $e = f.q$ » » » » » » »

» $\dots \dots \dots$

» $\frac{m}{n} = q$ » $m = n.q$ » » » » » » »

Sumando m. a m. y sacando factor común q en el 2º miembro

se tiene $a + c + e + \dots + m = (b + d + f + \dots + n) q$

luego $\frac{a + c + e + \dots + m}{b + d + f + \dots + n} = q$

y reemplazando a q por su igual $\frac{a}{b}$ resulta

$$\frac{a + c + e + \dots + m}{b + d + f + \dots + n} = \frac{a}{b}.$$

NOTA. — Aplicando este teorema a la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{resulta} \quad \frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b}.$$

EJEMPLOS: En $\frac{8}{4} = \frac{2}{1}$ es $\frac{8 + 2}{4 + 1} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

En $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{5}{15}$ es $\frac{1 + 2 + 3 + 5}{3 + 6 + 9 + 15} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$

CAPITULO XVII

MAGNITUDES PROPORCIONALES

PROGRAMA. — *Definición y ejemplos. Si dos magnitudes son proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde, etc. Si dos magnitudes son proporcionales, al cociente de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde, etc. Magnitudes inversamente proporcionales. Definición y ejemplos. Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde, etc. y recíprocamente. Magnitud proporcional a varias otras. Definición y ejemplos.*

Siendo conveniente para el estudio que vamos a hacer sobre las magnitudes, dar una representación sencilla de ellas, convendremos en escribir las cantidades de cada magnitud con una misma letra mayúscula, diferenciándolas por sub-índices; y en representar a dicha magnitud por la misma letra encerrada entre paréntesis.

Así si $A_1, A_2, A_3 \dots A_n \dots$ son cantidades homogéneas, representamos a la magnitud por (A) .

NOTACIÓN: $(A) \equiv A_1, A_2, A_3, \dots A_n \dots$

$(B) \equiv B_1, B_2, B_3, \dots B_n \dots$

$(N) \equiv N_1, N_2, N_3, \dots N_m \dots$

indican cuales son algunas de las cantidades de (A) , (B) y (N) .

102. Definición de magnitudes proporcionales. — Se dice que *dos magnitudes son proporcionales*, cuando entre sus cantidades existe una correspondencia tal que a cada cantidad de una de ellas le corresponde una cantidad, y sola una, de la otra y en forma tal que la razón entre dos cantidades cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de las cantidades correspondientes de la otra.

NOTACIÓN. $(A) \overline{\propto} (B)$ significa que (A) y (B) son proporcionales.

El signo $\overline{\propto}$ se lee « *es proporcional a* » (*). En símbolos:

Si $(A) \overline{\propto} (B)$

$$y \left\{ \begin{array}{l} a \ A_1 \text{ corresponde } B_1 \\ A_2 \quad \quad \quad \gg \quad B_2 \\ A_3 \quad \quad \quad \gg \quad B_3 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ n \quad \quad \quad \gg \quad B_n \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_p \quad \quad \quad \gg \quad B_p \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \right. \quad \text{es} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \\ \frac{A_2}{A_5} = \frac{B_2}{B_5} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{A_n}{A_p} = \frac{B_n}{B_p} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \right.$$

EJEMPLO. — La Física enseña que, *los volúmenes de un cuerpo homogéneo son proporcionales a sus pesos*.

Así por ejemplo como

2	dm ³	de azúcar	pesan	3	Kg.
4	»	»	»	»	6
10	»	»	»	»	15
5	»	»	»	»	7,5
6	»	»	»	»	9

(*) No se confunda el signo $\overline{\propto}$ de proporcionalidad, con el signo $\propto$ de coordinación.

$$\begin{array}{lcl} \text{resulta:} & \frac{4 \text{ dm}^3}{2 \text{ dm}^3} = \frac{6 \text{ Kg}}{3 \text{ Kg}} & \text{puesto que } \frac{4}{2} = \frac{6}{3} \\ & \frac{5 \text{ dm}^3}{2 \text{ dm}^3} = \frac{7,5 \text{ Kg}}{3 \text{ Kg}} & \text{puesto que } \frac{5}{2} = \frac{7,5}{3} \\ & \frac{6 \text{ dm}^3}{10 \text{ dm}^3} = \frac{9 \text{ Kg}}{15 \text{ Kg}} & \text{puesto que } \frac{6}{10} = \frac{9}{15} \end{array}$$

121. **Propiedad de las magnitudes proporcionales.** — En el ejemplo anterior, puede observarse que siendo 6 dm^3 el producto de $2 \text{ dm}^3 \times 3$ es también su peso correspondiente 9 Kg el producto del correspondiente de 2 dm^3 por 3 ; que siendo 10 dm^3 el producto de $5 \text{ dm}^3 \times 2$, su peso correspondiente 15 Kg , es también el producto de $7,5 \text{ Kg} \times 2$.

Como la misma observación, puede hacerse con las cantidades de dos magnitudes proporcionales cualesquiera, vamos a demostrar que la propiedad comprobada es general por medio del

TEOREMA. — *Si dos magnitudes son proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número le corresponde el producto de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.*

HIP.) (A) $\propto$ (B) TESIS) $X = B_n \cdot k$.

a A_1 corresponde B_1

A_2 » B_2

.....

A_n » B_n

$A_n \cdot k$ » X

DEMOST.) Siendo (A) $\propto$ (B) por hipótesis

es $\frac{A_n \cdot k}{A_n} = \frac{X}{B_n}$ por definic. de mag. prop.

y como al simplificar por A_n resulta $\frac{A_n \cdot k}{A_n} = k$

se tiene $k = \frac{X}{B_n}$
 luego $X = B_n \cdot k$ por definición de razón
 es decir a $A_n k$ le corresponde $B_n k$.

COROLARIO.—*Si dos magnitudes son proporcionales, al cociente de una cantidad de una de ellas por un número le corresponde el cociente de la correspondiente de dicha cantidad por el mismo número.*

En efecto; Siendo $(A) \overline{\propto} (B)$ por hipótesis
 y como $A_n \text{ ————— } B_n$
 mult. por $\frac{1}{k}$ se tiene: $A_n \cdot \frac{1}{k} \text{ ————— } B_n \cdot \frac{1}{k}$
 es decir a $\frac{A_n}{k}$ le corresponde $\frac{B_n}{k}$.

123. Definición de magnitudes inversamente proporcionales (*).— Se dice que *dos magnitudes son inversamente proporcionales*, cuando entre sus cantidades existe una correspondencia tal, que a cada cantidad de una de ellas, le corresponda una cantidad, y solo una, de la otra, y en forma tal que la razón entre dos cantidades cualesquiera de una de ellas es igual a la razón inversa de las cantidades correspondientes de la otra.

NOTACIÓN. $(A) \propto (B)$ significa que (A) y (B) son inversamente proporcionales. El signo $\propto$ se lee « *es inversamente proporcional a* ».

(*) Las magnitudes proporcionales se llaman también magnitudes *directamente proporcionales*.

En símbolos:

Si

$$(A) \propto (B)$$

$$y \left\{ \begin{array}{l} \text{a } A_1 \text{ corresponde } B_1 \\ A_2 \quad \quad \quad \gg \quad B_2 \\ A_3 \quad \quad \quad \gg \quad B_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_n \quad \quad \quad \gg \quad B_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_p \quad \quad \quad \gg \quad B_p \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \quad \text{es} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_2}{B_1} \\ \frac{A_2}{A_5} = \frac{B_5}{B_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{A_n}{A_p} = \frac{B_p}{B_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

EJEMPLO. — Para medir el trabajo manual producido por obreros en una determinada obra, se toma como unidad, el trabajo que un obrero ideal produciría en cierto intervalo de tiempo, por ejemplo un día, trabajando de manera que en tiempos iguales produciese trabajos iguales. Esto equivale a convenir que *el trabajo producido por varios obreros es proporcional al número de éstos*.

Si en cambio relacionamos el número de obreros, con el tiempo necesario para efectuar un trabajo, y observamos que si empleamos el doble de obreros el tiempo se reduce a la mitad, que si empleamos el triple, el tiempo se reduce a la tercera parte, etc., podemos aceptar, como se hace en la práctica, que *el tiempo empleado en realizar una obra es inversamente proporcional al número de obreros*.

Así por ejemplo, como para realizar cierta obra,

2	obreros emplean	30 días
3	»	» 20 »
4	»	» 15 »
5	»	» 12 »
6	»	» 10 »
10	»	» 6 »
.....		

resulta	$\frac{2 \text{ obreros}}{4 \text{ obreros}} = \frac{15 \text{ días}}{30 \text{ días}}$	puesto que	$\frac{2}{4} = \frac{15}{30}$
	$\frac{3 \text{ obreros}}{2 \text{ obreros}} = \frac{30 \text{ días}}{20 \text{ días}}$	puesto que	$\frac{3}{2} = \frac{30}{20}$
	$\frac{10 \text{ obreros}}{3 \text{ obreros}} = \frac{20 \text{ días}}{6 \text{ días}}$	puesto que	$\frac{10}{3} = \frac{20}{6}$
.			

123. Propiedad de las magnitudes inversamente proporcionales. — En el ejemplo anterior, puede observarse que, siendo 4 obreros el producto de 2 obreros $\times$ 2, el tiempo correspondiente de 4 obreros, que es 15 días, es el cociente por 2, del correspondiente a 2 obreros que es 30 días y que recíprocamente, siendo 3 obreros el cociente de (6 obreros : 2) el tiempo correspondiente de 3 obreros, que es 20 días, es el producto por 2 del correspondiente de 6 obreros, que 10 es días. Como la misma observación puede hacerse con las cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales cualesquiera, vamos a demostrar que la propiedad comprobada es general.

TEOREMA. — *Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, al producto de una cantidad de una de ellas por un número, le corresponde, el cociente de la correspondiente de dicha cantidad por dicho número y recíprocamente.*

HIP.)	(A) $\propto$ (B)	TESIS)	$X = \frac{B_n}{k}$
a	A_1 corresponde B_1		$Y = B_n \cdot m$
	A_2 » B_2		
			
	A_n » B_n		
	$A_n \cdot k$ » X		
	$\frac{A_n}{m}$ » Y		

DEMOST.) Siendo $(A) \propto (B)$ por hipótesis
 es $\frac{A_n}{A_n \cdot k} = \frac{X}{B_n}$ por def. mag. inv. props.

y como al simplificar por A_n resulta $\frac{A_n}{A_n \cdot k} = \frac{1}{k}$

se tiene $\frac{1}{k} = \frac{X}{B_n}$

luego $X = B_n \frac{1}{k} = \frac{B_n}{k}$ por def. de razón.

es decir a $A_n \cdot k$ le corresponde $\frac{B_n}{k}$

Además por lo demostrado resulta que:

a $\frac{A_n}{m} = A_n \frac{1}{m}$ le corresponde $\frac{B_n}{\frac{1}{m}} = B_n \cdot m$

es decir $\frac{A_n}{m} \gg B_n \cdot m$

124. Magnitud proporcional a varias otras. — DEFINICION. — Se dice que una magnitud (A) es proporcional a varias otras (B), (C) (D) si es directa o inversamente proporcional a cada una de ellas cuando las cantidades de las demás permanecen constantes.

En símbolos:

Si $\overbrace{(A) \quad (B) \quad (C) \quad (D)}^{\propto}$

y sus cantidades correspondientes son:

A_1	B_1	C_1	$D_1 \dots$
A_2	B_2	C_2	$D_2 \dots$
A_3	B_3	C_3	$D_3 \dots$
.....			

resulta que:

si las cantidades de (B) y (C) son constantes es (A) $\bar{\propto}$ (D)
 » » » » (B) y (D) » » » (A) $\underline{\propto}$ (C)
 » » » » (C) y (D) » » » (A) $\bar{\propto}$ (B)

EJEMPLO. — Se ha convenido en que el tiempo empleado para hacer una excavación, es directamente proporcional al volumen de tierra extraída e inversamente proporcional al trabajo de los hombres empleados, es decir

$$\begin{array}{ccccc} \text{-----} & \bar{\propto} & \text{-----} & & \\ \text{(Tiempo)} & & \text{(Volumen)} & & \text{(Hombres)} \\ & \underline{\propto} & & & \end{array}$$

Esto puede verse observando las cantidades que siguen:

9 días	300 m ³	15 hombres
45 »	300 »	3 »
3 »	300 »	45 »
1 »	100 »	45 »
4 »	400 »	45 »
15 »	700 »	21 »
.....		
.....		

En efecto: observando la primera, segunda y tercera fila vemos que siendo constantes las cantidades de la magnitud (Volumen) las magnitudes (Tiempo) y (Hombres) son inversamente proporcionales.

Análogamente observando las filas tercera, cuarta y quinta vemos que mientras las cantidades de la magnitud (Hombres) son constantes, las magnitudes (Tiempo) y (Volumen) son directamente proporcionales, etc.

CAPÍTULO XVIII.

REGLA DE TRES SIMPLE Y COMPUESTA

PROGRAMA. — *Regla de tres simple: su objeto. Resolución de problemas de regla de tres simple con números enteros, fraccionarios o decimales, por el método de reducción a la unidad y por proporciones. Regla de tres compuesta: su objeto. Regla de tres compuesta directa, inversa o mixta. Resolución de problema con números enteros, fraccionarios o decimales, por el método de reducción a la unidad y por proporciones.*

125. Regla de tres simple: su objeto. — Se llama *Regla de tres simple*, al procedimiento de cálculo mediante el cual se resuelven problemas del tipo siguiente:

Sabiendo que una magnitud es directa o inversamente proporcional a otra, y conociendo una cantidad de la primera, correspondiente a una cantidad de la segunda, hallar la cantidad de la segunda que corresponde a otra cantidad dada de la primera.

126. Resolución de problemas de regla de tres simple por el método de reducción a la unidad. — Este método consiste, en calcular la cantidad de la segunda magnitud, correspondiente a la unidad de la primera, y en base a ella la cantidad de la segunda magnitud correspondiente a la segunda cantidad de la primera.

PROBLEMA I. — *El precio de una tela es proporcional a su longitud. Si 30 m. de esa tela cuestan 180 \$; ¿cuál será el precio de 55 m. de la misma?*

PLANTEO: 30 m ————— 180 \$

55 m ————— x \$

SOLUCIÓN: Si 30 m ————— 180 \$

1 m ————— $\frac{180}{30}$ \$ por ser magnitudes

proporcionales (nº 122)

y 55 m ————— $\frac{180 \cdot 55}{30}$ \$ = 330 \$

luego x \$ = 330 \$

PROBLEMA II. — *Siendo los espacios recorridos por un móvil animado de movimiento uniforme, proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlos, si un automóvil recorre 125 Km. en $1 \frac{3}{4}$ horas, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer $200 \frac{7}{5}$ Km?*

PLANTEO: 125 Km ————— $1 \frac{3}{4}$ h = $\frac{7}{4}$ h

$200 \frac{7}{5} = \frac{1007}{5}$ Km ————— x h

SOLUCIÓN:

Si 125 Km ————— $\frac{7}{4}$ h

1 » ————— $\frac{7}{125}$

$\frac{1007}{5}$ » ————— $7 \cdot \frac{1007}{5} = \frac{7 \times 1007}{500 \times 5} = \frac{7049}{2500}$ h

= 2 h 49 min 10 seg 55

PROBLEMA III. — *El tiempo empleado en construir una obra es inversamente proporcional al número de obreros utilizados. Si 28 obreros tardan 90 días para hacer una casa ¿cuánto tiempo tardarán en hacerla 7 obreros?*

PLANTEO: 28 ob. ————— 90 días

7 » ————— x »

SOLUCIÓN: 28 ob. ————— 90 días

1 » ————— 90×28 por inv. prop. (nº 123)

7 » ————— $\frac{90 \times 28}{7}$ días = 360 días

luego

x días = 360 días

PROBLEMA IV. — *El tiempo que tarda un móvil en recorrer cierta distancia es inversamente proporcional a su velocidad. Si un aeroplano, que marcha a 180 Km. por hora, ha tardado 5 horas en recorrer cierta distancia, ¿con qué velocidad marchará otro aeroplano que recorre la misma distancia en $3 \frac{1}{2}$ horas?*

PLANTEO:

5 h ————— 180 Km/h

$3 \frac{1}{2}$ h ————— x Km/h

SOLUCIÓN:

5 h ————— 180 Km/h

1 h ————— 180.5 Km/h

$3 \frac{1}{2}$ h = $\frac{7}{2}$ h ————— $\frac{180 \cdot 5}{\frac{7}{2}}$ Km/h = $\frac{180 \cdot 5 \cdot 2}{7} = \frac{1800}{7}$
 = 257,14 Km/h

Damos a continuación el esquema general de un problema de Regla de tres simple:

PROBLEMA. — *Sabiendo que la magnitud (A) es directamente (inversamente) proporcional a otra (B), y que a la cantidad $a_1 U$ de (A) le corresponde la cantidad $b_1 U'$ de (B) ¿Cuál será la cantidad $x U'$ de (B) correspondiente a la $a_2 U$ de (A)?*

$$\begin{array}{lcl} \text{PLANTEO:} & a_1 U & \text{—————} b_1 U' \\ & a_2 U & \text{—————} x U' \end{array}$$

SOLUCIÓN: PRIMER CASO: (A) $\overline{\propto}$ (B)

Si a $a_1 \cdot U$ le corresponde $b_1 U'$ a U (que resulta de dividir $a_1 \cdot U$ por a_1) le corresponderá, según un teorema anterior (nº 122) el cociente de dividir $b_1 U'$ por a_1 , es decir, $\frac{b_1 U'}{a_1}$

Si a U le corresponde $\frac{b_1 U'}{a_1}$, a $a_2 U$ (que resulta de multiplicar U por a_2) le corresponderá según un teorema anterior (nº 121) el producto de $\frac{b_1 U'}{a_1}$ por a_2 , es decir, $\frac{b_1 U' \times a_2}{a_1}$ o bien $\frac{b_1 \cdot a_2}{a_1} U'$.

En la práctica se dispone la cuestión, esquemáticamente, así:

PLANTEO: (A) $\overline{\propto}$ (B)

$$\begin{array}{lcl} a_1 U & \text{—————} & b_1 U' \\ a_2 U & \text{—————} & x U' \end{array}$$

SOLUCIÓN: Si

$$\begin{array}{lcl} a_1 U & \text{—————} & b_1 U' \\ U & \text{—————} & \frac{b_1 U'}{a_1} \\ a_2 U & \text{—————} & \frac{b_1 \cdot a_2}{a_1} U' \end{array}$$

luego
$$x U' = \frac{b_1 \cdot a_2}{a_1} U'$$

SEGUNDO CASO:

$$(A) \underline{\underline{=}} (B)$$

Si a $a_1 U$ le corresponde $b_1 U'$ a U (que resulta de dividir $a_1 U$ por a_1) le corresponderá, según un teorema anterior (123) el producto de $b_1 U'$ por a_1 es decir, $b_1 U' \cdot a_1$. Si a U le corresponde $b_1 \cdot U' \cdot a_1$, a $a_2 U$ (que resulta de multiplicar U por a_2) le corresponderá, según un teorema anterior (123) el cociente de $b_1 \cdot U' \cdot a_1$ por a_2 , es decir, $\frac{b_1 \cdot U' \cdot a_1}{a_2}$ o bien $\frac{b_1 \cdot a_1}{a_2} U'$.

En la práctica se dispone la cuestión, esquemáticamente, así:

PLANTEO:

$$(A) \underline{\underline{=}} (B)$$

$$a_1 U \text{ ————— } b_1 U'$$

$$a_2 U \text{ ————— } x U'$$

SOLUCIÓN:

$$a_1 U \text{ ————— } b_1 U'$$

$$U \text{ ————— } b_1 \cdot a_1 U'$$

$$a_2 U \text{ ————— } \frac{b_1 \cdot a_1}{a_2} U'$$

luego

$$x U' = \frac{b_1 \cdot a_1}{a_2} U'$$

127. Resolución de problemas de regla de tres simple por el método de las proporciones. — Este método consiste en obtener una proporción en que la incógnita es uno de sus términos y luego despejarla.

PROBLEMA. — *El tiempo empleado en excavar una zanja es inversamente proporcional al número de obreros utilizados. Si 3 obreros excavan la zanja necesaria para colocar el tubo de aspiración de una bomba, en 5 días, ¿cuántos obreros se tendrán que emplear para terminar el mismo trabajo en $1 \frac{1}{2}$ días?*

PLANTEO:

$$5 \text{ días ————— } 3 \text{ obreros}$$

$$1 \frac{1}{2} \text{ días ————— } x \text{ obreros}$$

SOLUCIÓN: $\frac{1 \frac{1}{2} \text{ días}}{5 \text{ días}} = \frac{3 \text{ obreros}}{x \text{ obreros}}$ de donde $\frac{1 \frac{1}{2}}{5} = \frac{3}{x}$

y $x = \frac{5 \cdot 3}{1 \frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{3}{2}} = \frac{30}{3} = 10$

luego $x \text{ obreros} = 10 \text{ obreros.}$

Damos a continuación el esquema general de un problema de tres simple:

PROBLEMA. — *Sabiendo que la magnitud (A) es directamente (inversamente) proporcional a otra (B) y que a la cantidad $a_1 U$ de (A) le corresponde la cantidad $b_1 U'$ de (B) ¿Cual será la cantidad $x U'$ de (B) correspondiente a $a_2 U$ de (A)?*

PLANTEO: $a_1 U \text{ ————— } b_1 U'$
 $a_2 U \text{ ————— } x U'$

PRIMER CASO: $(A) \propto (B)$

SOLUCIÓN. — Siendo $(A) \propto (B)$ se tendrá que la razón entre dos cantidades cualesquiera de (A) será igual a la razón de las cantidades correspondientes de (B) por definición de magnitudes directamente proporcionales.

luego $\frac{a_1 U}{a_2 U} = \frac{b_1 U'}{x U'}$

y simplificando la primera razón por U y la segunda por U' resulta

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{x} \text{ que es una proporción numérica}$$

luego el extremo $x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}.$

y $a_2 U \text{ le corresponde } x U' = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1} U'$

En la práctica la cuestión se dispone, esquemáticamente, así.

PLANTEO:

$$(A) \propto (B)$$

$$a_1 U \text{ ————— } b_1 U'$$

$$a_2 U \text{ ————— } x U'$$

SOLUCIÓN: $\frac{a_1 U}{a_2 U} = \frac{b_1 U}{x U'}$ de donde $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{x}$ y $x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}$

Luego a $a_2 U$ le corresponde $x U' = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1} U'$

SEGUNDO CASO:

$$(A) \propto (B)$$

SOLUCIÓN. — Siendo $(A) \propto (B)$ se tendrá que la razón entre dos cantidades cualesquiera de (A) será igual a la razón inversa de las cantidades correspondientes de (B), por definición de magnitudes inversamente proporcionales

luego

$$\frac{a_2 U}{a_1 U} = \frac{b_1 U'}{x U'}$$

y simplificando la primera razón por U y la segunda por U' resulta

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_1}{x} \quad \text{que es una proporción numérica.}$$

luego el extremo

$$x = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2}$$

y

$$a_2 U \text{ le corresponde } x U' = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2} U'$$

En la práctica la cuestión se dispone, esquemáticamente, así:

PLANTEO

$$(A) \propto (B)$$

$$a_1 U \text{ ————— } b_1 U'$$

$$a_2 U \text{ ————— } x U'$$

SOLUCIÓN: $\frac{a_2 U}{a_1 U} = \frac{b_1 U'}{x U'}$ de donde $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_1}{x}$ y $x = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2}$.

Luego a $a_2 U$ le corresponde $x U' = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2} U'$.

128. Regla de tres compuesta: su objeto. — Se llama *Regla de tres compuesta* el procedimiento de cálculo mediante el cual se resuelven problemas del tipo siguiente:

Sabiendo que una magnitud es *directamente proporcional* a algunas magnitudes e *inversamente proporcional* a otras, y conociendo una cantidad de la primera correspondiente a cantidades dadas de esas otras, hallar la cantidad de la primera que corresponde a cantidades, también dadas de las otras.

129. Resolución de problemas de Regla de tres compuesta por el método de reducción a la unidad. — Este método consiste en descomponer el problema de Regla de tres compuesta, en problema de Regla de tres simple, y resolver a éstos por el método de reducción a la unidad, en la forma como se indica a continuación al resolver un problema general de Reglas de tres compuesta mixta.

PROBLEMA. — *Sabiendo que la magnitud (M) es directamente proporcional a la magnitud (A) e inversamente proporcional a la magnitud (B) y que a las cantidades $a_1 U$, $b_1 U'$ de las magnitudes (A) y (B) respectivamente, le corresponde la cantidad $m_1 U''$ de (M), ¿cuál será la cantidad $x U''$ de (M) correspondiente a las $a_2 U$, $b_2 U'$, de (A) y (B) ?*

PLANTEO: $\overbrace{(A) \quad (B) \quad (M)}^{\overline{\lambda}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{\underline{\nu}}}$

$$a_1 U \text{ ————— } b_1 U' \text{ ————— } m_1 U''$$

$$a_2 U \text{ ————— } b_2 U' \text{ ————— } x U''$$

SOLUCIÓN. — *Primer problema parcial.* — Siendo (M) proporcional a (A) y (B) y en particular directamente proporcional a (A), como a $c_1 U$ le corresponde $m_1 U''$, si dividimos a $a_1 U$ por a_1 y dejamos constante a la cantidad correspondiente de (B) obtendremos como correspondiente de U en (M) el cociente de $m_1 U''$ por a_1 , es decir, $\frac{m_1 U''}{a_1}$ en virtud de un teorema (nº 122).

Si multiplicamos a U por a_2 y dejamos constante la cantidad correspondiente de (B), obtendremos como correspondiente de $a_2 U$ en (M) el producto de $\frac{m_1 U''}{a_1}$ por a_2 , es decir, $\frac{m_1 \cdot a_2 U''}{a_1}$ en virtud de un teorema anterior (nº 121). Esto se dispone esquemáticamente así:

$$\begin{array}{rcl} a_1 U & \text{-----} & b_1 U' & \text{-----} & m_1 U'' \\ U & \text{-----} & b_1 U' & \text{-----} & \frac{m_1 U''}{a_1} \\ a_2 U & \text{-----} & b_1 U' & \text{-----} & \frac{m_1 \cdot a_2 \cdot U''}{a_1} \end{array}$$

Segundo problema parcial. — Siendo (M) proporcional a (A) y (B) y en particular inversamente proporcional a (B), como a $\frac{m_1 \cdot a_2}{a_1} U''$ le corresponde $b_1 U'$, si dividimos a $b_1 U'$ por b_1 y dejamos constante a la cantidad correspondiente de (A), obtendremos como correspondiente de U' en (M) el producto de $\frac{m_1 \cdot a_2}{a_1} U''$ por b_1 , es decir, $\frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1} U''$ en virtud de un teorema anterior (nº 123).

Si multiplicamos a U' por b_2 , y dejamos constante la cantidad correspondiente de (A), obtendremos como correspondiente de $b_2 U'$ en (M) el cociente de $\frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1} U''$ por b_2 , es decir, $\frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} U''$ en virtud de un teorema anterior (nº 123). Esto se dispone esquemáticamente así:

$$\begin{array}{rcl} a_2 U & \text{-----} & b_1 U' & \text{-----} & \frac{m_1 \cdot a_2}{a_1} U'' \\ a_2 U & \text{-----} & U' & \text{-----} & \frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1} U'' \\ a_2 U & \text{-----} & b_2 U' & \text{-----} & \frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} U'' \end{array}$$

En la práctica este mismo problema se resuelve directamente como se indica en el esquema que sigue:

PLATEO: $\overbrace{(A) \quad (B) \quad (M)}^{\overline{\lambda}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{\lambda}}$

$$a_1 U \text{ ————— } b_1 U' \text{ ————— } m_1 U''$$

$$a_2 U \text{ ————— } b_2 U' \text{ ————— } x U''$$

SOLUCIÓN:

$$a_1 U \text{ ————— } b_1 U' \text{ ————— } m_1 U''$$

$$U \text{ ————— } b_1 U' \text{ ————— } \frac{m_1}{a_1} U''$$

$$a_2 U \text{ ————— } b_1 U' \text{ ————— } \frac{m_1 \cdot a_2}{a_1} U''$$

$$a_2 U \text{ ————— } U' \text{ ————— } \frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1} U''$$

$$a_2 U \text{ ————— } b_2 U' \text{ ————— } \frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} U''$$

luego
$$x U'' = \frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} U''$$

PROBLEMA. — *La longitud de una pieza de tela es directamente proporcional al peso de hilo empleado para tejerla e inversamente proporcional al ancho de la misma. Si para tejer una pieza de 35 m. de largo y 0,95 m. de ancho, se emplearon 17,900 Kg. de hilo ¿qué longitud tendrá una tela de 0,65 m. de ancho si se tejió con 14,5 Kg. del mismo hilo?*

PLANTEO:

$$17,9 \text{ Kg} \text{ ————— } 0,95 \text{ m} \text{ ————— } 35 \text{ m}$$

$$14,5 \text{ Kg} \text{ ————— } 0,65 \text{ m} \text{ ————— } x \text{ m}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{rclcl}
 17,9 \text{ Kg} & \text{—————} & 0,95 \text{ m} & \text{—————} & 35 \text{ m} \\
 1 \text{ Kg} & \text{—————} & 0,95 \text{ m} & \text{—————} & \frac{35}{17,9} \text{ m} \\
 14,5 \text{ Kg} & \text{—————} & 0,95 \text{ m} & \text{—————} & \frac{35 \cdot 14,5}{17,9} \text{ m} \\
 14,5 \text{ Kg} & \text{—————} & 1 \text{ m} & \text{—————} & \frac{35 \cdot 14,5 \cdot 0,95}{17,9} \text{ m} \\
 14,5 \text{ Kg} & \text{—————} & 0,65 \text{ m} & \text{—————} & \frac{35 \cdot 14,5 \cdot 0,95 \cdot 0,65}{17,9 \cdot 0,65} \text{ m} = 41,43 \text{ m} \\
 \text{luego} & & & & x \text{ m} = 41,43 \text{ m.}
 \end{array}$$

121. Resolución de problemas de Regla de tres compuesta por el método de las proporciones. — Este método consiste en descomponer el problema de Regla de tres compuesta, en problemas de Regla de tres simple, y resolver a éstos por el método de las proporciones, en la forma como se indica a continuación al resolver el problema general de Regla de tres compuesta mixta enunciado en el párrafo anterior (nº 129), cuyo planteo era

$$\begin{array}{rcccl}
 & & \overbrace{\hspace{10em}} & \overline{\lambda} & \\
 \text{PLANTEO:} & (A) & (B) & & (M) \\
 & & \underbrace{\hspace{10em}} & \underline{\vee} & \\
 a_1 U & \text{—————} & b_1 U' & \text{—————} & m_1 U'' \\
 a_2 U & \text{—————} & b_2 U' & \text{—————} & x U''
 \end{array}$$

SOLUCIÓN. — Para resolver este problema, consideremos constantes, primero las cantidades de las magnitudes (B) y luego las de (A) como se indica en el cuadro siguiente:

$$\begin{array}{lll}
 \text{I)} & a_1 U & \text{—————} & b_1 U' & \text{—————} & m_1 U'' \\
 \text{II)} & a_2 U & \text{—————} & b_1 U' & \text{—————} & y U'' \\
 \text{III)} & a_2 U & \text{—————} & b_2 U' & \text{—————} & x U''
 \end{array}$$

Además como no se conoce la cantidad de la magnitud (M) correspondiente a las cantidades de (A) y (B) indicadas en II las presentaremos por $y U''$, reservando la $x U''$ para la incógnita buscada.

Pasemos ahora a considerar los problemas de Regla de tres simples que se pueden formar del cuadro anterior.

Conviene siempre escribir las proporciones que resultan en cada problema parcial de regla de tres simple, en forma tal que la incógnita de cada uno de estos problemas figure como cuarto término.

Primer problema parcial. — Consideremos las cantidades correspondientes de las filas I y II. Como las cantidades de (B) son constantes se puede hacer caso omiso de ellas. Además, siendo (A) $\propto$ (M), se tiene:

$$\begin{array}{l} a_1 U \text{ ————— } m_1 U'' \\ a_2 U \text{ ————— } y U'' \end{array} \quad \text{de donde} \quad \frac{a_1 U}{a_2 U} = \frac{m_1 U''}{y U''} \quad \text{y} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{y} \quad [1]$$

Segundo problema parcial. — Consideremos las cantidades correspondientes de la fila II. Como las cantidades de (A) son constantes se tendría, siendo (B) $\propto$ (M) que:

$$\begin{array}{l} b_1 U' \text{ ————— } y U'' \\ b_2 U' \text{ ————— } x U'' \end{array} \quad \text{de donde} \quad \frac{b_2 U'}{b_1 U'} = \frac{y U''}{x U''} \quad \text{y} \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{y}{x} \quad [2]$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades [1] y [2] se tiene:

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} = \frac{m_1}{y} \cdot \frac{y}{x}$$

y efectuando las operaciones y simplificando el segundo miembro resulta:

$$\frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1} = \frac{m_1}{x} \quad \text{que es una proporción numérica.}$$

Luego x que es un extremo, será igual al producto de los medios $a_2 b_1$ y m_1 dividido por el otro extremo $a_1 b_2$, es decir:

$$x = \frac{a_2 \cdot b_1 \cdot m_1}{a_1 \cdot b_2}$$

por lo tanto

$$x U'' = \frac{a_2 \cdot b_1 \cdot m_1}{a_1 \cdot b_2} U''$$

En la práctica la cuestión se dispone esquemáticamente así:

$$\begin{array}{c} \text{PLANTEO:} \quad \overbrace{\begin{array}{ccc} (A) & & (B) \end{array}}^{\overline{\lambda}} \quad \overbrace{\begin{array}{c} (M) \end{array}}^{\underline{\lambda}} \\ \\ a_1 U \text{ ————— } b_1 U' \text{ ————— } m_1 U'' \\ a_2 U \text{ ————— } b_2 U' \text{ ————— } x U'' \end{array}$$

SOLUCIÓN:

$$\left\{ \begin{array}{lll} a_1 U \text{ ————— } b_1 U' \text{ ————— } m_1 U'' \\ a_2 U \text{ ————— } b_1 U' \text{ ————— } y U'' \\ a_2 U \text{ ————— } b_2 U' \text{ ————— } x U'' \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 1^\circ \left\{ \begin{array}{ll} a_1 U \text{ ————— } m_1 U'' \\ a_2 U \text{ ————— } y U'' \end{array} \right. \\ \text{de donde } \frac{a_1 U}{a_2 U} = \frac{m_1 U''}{y U''} \quad y \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{y} \end{array} \quad [1]$$

$$\begin{array}{l} 2^\circ \left\{ \begin{array}{ll} b_1 U' \text{ ————— } y U'' \\ b_2 U' \text{ ————— } x U'' \end{array} \right. \\ \text{de donde } \frac{b_2 U'}{b_1 U'} = \frac{y U''}{x U''} \quad y \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{y}{x} \end{array} \quad [2]$$

$$\text{Mult. m. a m. [1] y [2] da} \quad \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_2}{b_1} = \frac{m_1}{y} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\text{Efectuando la operac. y simp. queda} \quad \frac{a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot b_1} = \frac{m_1}{x}$$

$$\text{Despejando el extremo } x \text{ se tiene} \quad x = \frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2}$$

$$\text{luego} \quad x U'' = \frac{m_1 \cdot a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2} U''$$

PROBLEMA. — *Para construir un canal de 200 m. de largo, 120 obreros trabajando 8 h. por día han precisado 20 días. ¿Cuántos días emplearán para construir un canal de 140 m. de largo, 80 obreros trabajando 7 horas diarias?*

PLANTEO:

$$\begin{array}{llll} 200 \text{ m} & \text{—————} & 120 \text{ ob.} & \text{—————} & 8 \text{ h} & \text{—————} & 20 \text{ días} \\ 140 \text{ m} & \text{—————} & 80 \text{ ob.} & \text{—————} & 7 \text{ h} & \text{—————} & x \text{ días} \end{array}$$

SOLUCIÓN:

$$1^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} 200 \text{ m} \text{ ————— } 20 \text{ días} \\ 140 \text{ m} \text{ ————— } y \text{ días} \end{array} \right.$$

de donde $\frac{200 \text{ m}}{140 \text{ m}} = \frac{20 \text{ días}}{y \text{ días}} \quad \text{y} \quad \frac{200}{140} = \frac{20}{y} \quad [1]$

$$2^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} 120 \text{ ob.} \text{ ————— } y \text{ días} \\ 80 \text{ ob.} \text{ ————— } z \text{ días} \end{array} \right.$$

de donde $\frac{80 \text{ ob.}}{120 \text{ ob.}} = \frac{y \text{ días}}{z \text{ días}} \quad \text{y} \quad \frac{80}{120} = \frac{y}{z} \quad [2]$

$$3^{\circ} \quad \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ h} \text{ ————— } z \text{ días} \\ 7 \text{ h} \text{ ————— } x \text{ días} \end{array} \right.$$

de donde $\frac{7 \text{ h}}{8 \text{ h}} = \frac{z \text{ días}}{x \text{ días}} \quad \text{y} \quad \frac{7}{8} = \frac{z}{x} \quad [3]$

Multip. m. a m. [1], [2] y [3] da $\frac{200}{140} \cdot \frac{80}{120} \cdot \frac{7}{8} = \frac{20}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}$

Efec. las operaciones y simp. queda $\frac{200 \cdot 80 \cdot 7}{140 \cdot 120 \cdot 8} = \frac{20}{x}$

luego $x \text{ días} = \frac{140 \cdot 120 \cdot 8 \cdot 20}{200 \cdot 80 \cdot 7} \text{ días} = 24 \text{ días}$

19.2
CAPÍTULO XIX.

CUESTIONES DE ARITMETICA COMERCIAL

PROGRAMA. — *Interés simple: deducción de las fórmulas y aplicación de las mismas. Descuento comercial: fórmulas y aplicaciones. Repartición proporcional. Regla de compañía. Regla de aligación: Problemas directo e inverso.*

130. **Interés simple: deducción de las fórmulas y aplicación de las mismas.** — DEFINICION. — El *préstamo a interés* es una operación comercial que consiste en *prestar* una cantidad de dinero llamada *capital*, por un cierto tiempo, con la condición de que el *deudor* pague al *prestador*, al cabo de dicho tiempo, una cierta cantidad llamada *interés del capital*.

Este *interés*, es fijado por la ganancia de 100 pesos en la unidad de tiempo, por lo cual se llama *tanto por ciento* y se indica con el signo $\%$. Comunmente se toma como unidad de tiempo el año y el *tanto por ciento* se llama *anual*, en cambio se llama *mensual* cuando la unidad es el mes.

DEFINICIÓN. — Se llama *interés simple* a la ganancia producida por un capital constante, e *interés compuesto* a la producida por un capital que aumenta por la acumulación de las ganancias en cada unidad de tiempo.

Solo nos ocuparemos del interés simple, dejando para cursos superiores el estudio del compuesto, razón por la cual, cuando se hable de interés se sobreentenderá que se trata de interés simple.

En las operaciones de préstamo a interés son tres las magnitudes que intervienen: *Capital*, *Tiempo* e *Interés*. Se considera justo que un capital doble, triple, etc., de otro, produzca un interés doble, triple, etc. del que produce este último, respectivamente, así como también que siendo doble, triple, etc., el tiempo que ha permanecido el primer capital sea doble, triple, etc., respectivamente, el interés que produce. Es por eso que se acepta la siguiente

CONVENCIÓN. — *El Interés es directamente proporcional al Capital y al Tiempo, o sea:*

$$\overbrace{(Capital)} \quad \overbrace{(Tiempo)} \quad \overline{\overline{\lambda}} \quad \overbrace{(Interés)}$$

Los problemas a que da lugar el préstamo a interés son, pues, problemas de regla de tres compuesta.

Damós a continuación el esquema de esos problemas.

PROBLEMA. — *Si 100 \$ en 1 año producen r \$, ¿cuál será el interés i \$ correspondiente a c \$ en t años?*

$$\begin{array}{lcl} \text{PLANTEO:} & 100 \$ & \text{—————} 1 \text{ año} \text{ —————} r \$ \\ & c \$ & \text{—————} t \text{ años} \text{ —————} i \$ \end{array}$$

SOLUCIÓN: PRIMER MÉTODO. — *Por reducción a la unidad.*

$$\begin{array}{lcl} 100 \$ & \text{—————} 1 \text{ año} \text{ —————} & r \$ \\ 1 \$ & \text{—————} 1 \text{ año} \text{ —————} & \frac{r}{100} \$ \\ c \$ & \text{—————} 1 \text{ año} \text{ —————} & \frac{r \cdot c}{100} \$ \\ c \$ & \text{—————} t \text{ años} \text{ —————} & \frac{r \cdot c \cdot t}{100} \$ \end{array}$$

$$\text{luego} \quad i \$ = \frac{c \cdot t \cdot r}{100} \$$$

o bien

$$i = \frac{c \cdot t \cdot r}{100}$$

[I]

SEGUNDO MÉTODO. — *Por proporciones.*

$$\text{I) Para 1 año} \quad \left\{ \begin{array}{l} 100 \$ \text{ ————— } r \$ \\ c \$ \text{ ————— } x \$ \end{array} \right.$$

de donde $\frac{100 \$}{c \$} = \frac{r \$}{x \$}$ y $\frac{100}{c} = \frac{r}{x}$

$$\text{II) Para } c \$ \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ año ————— } x \$ \\ t \text{ años ————— } i \$ \end{array} \right.$$

de donde $\frac{1 \text{ año}}{t \text{ años}} = \frac{x \$}{i \$}$ y $\frac{1}{t} = \frac{x}{i}$

Multiplicando m. a m. queda

$$\frac{100}{c} \cdot \frac{1}{t} = \frac{r}{x} \cdot \frac{x}{i}$$

Efectuando las operaciones y simp. da:

$$\frac{100}{c \cdot t} = \frac{r}{i}$$

Despejando el extremo i , se tiene:

$$i = \frac{c \cdot t \cdot r}{100}$$

[I]

Como se ve, por uno u otro método se llega a la fórmula [I], la que nos dice que: *la medida del interés, que producen c \$ en t años al r % anual, es igual producto de la medida del capital, por la medida del tiempo, por la medida del tanto por ciento, dividido por 100.*

En la práctica se sobreentiende la palabra *medida* y se expresa la fórmula I diciendo:

El interés es igual, al capital, por el tanto por ciento, por el tiempo sobre 100.

Conviene saber de memoria la fórmula que da el valor del interés, o la regla que la traduce en palabras, para evitar de hacer su deducción en las aplicaciones.

Puede suceder que la incógnita sea el capital, o el tanto por ciento, o el tiempo y que se conozcan las restantes cantidades. En tales casos, la fórmula [I] nos permitirá, encontrar la medida de dichas cantidades, así:

Multiplicando ambos miembros de la igualdad [I] por 100 y simplificando se tiene:

$$i.100 = c.t.r$$

o también $c.t.r = i.100$ por carácter recíproco

luego:

$$\boxed{c = \frac{100 \cdot i}{r \cdot t}} \quad [\text{II}] ; \quad \boxed{r = \frac{100 \cdot i}{c \cdot t}} \quad [\text{III}] \text{ y } \quad \boxed{t = \frac{100 \cdot i}{c \cdot r}} \quad [\text{IV}]$$

fórmulas estas que (con omisión de la palabra medida), se expresan así:

El capital es igual a cien por interés sobre tanto por ciento por tiempo.

El tanto por ciento es igual a cien por interés sobre capital por tiempo.

El tiempo es igual a cien por interés sobre el capital por el tanto por ciento.

Se observa en las tres últimas fórmulas que el numerador es siempre 100.i y el denominador el producto de los dos datos restantes.

PROBLEMA. — ¿Cuál será el interés producido por 4700 \$ colocado al 7 % anual durante $3 \frac{1}{2}$ años?

SOLUCIÓN:

$$c = 4700 \$$$

$$r \% = 7 \%$$

$$t = 3 \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ años}$$

$$i = x \$$$

$$\text{Fórmula: } i = \frac{c \cdot t \cdot r}{100}$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{4700 \cdot \frac{7}{2} \cdot 7}{100} = \frac{4700 \cdot 7 \cdot 7}{2 \cdot 100} \\ &= \frac{4700 \cdot 7 \cdot 7}{100 \cdot 2} = \frac{47 \cdot 7 \cdot 7}{2} = 1151,50 \end{aligned}$$

luego

$$i \$ = 1151,50 \$$$

PROBLEMA. — ¿Cuál será el tiempo durante el cual un capital de 120 \$ colocado al $8 \frac{1}{3} \%$ anual produzca 6,25 \$ de interés?

SOLUCIÓN:

$$c = 120 \$$$

$$i = 6,25 \$$$

$$\begin{aligned} r \% &= 8 \frac{1}{3} = \frac{25}{3} \% \\ &= x \text{ años} \end{aligned}$$

$$\text{Fórmula; } t = \frac{100 \cdot i}{c \cdot r}$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{100 \cdot 6,25}{120 \cdot \frac{25}{3}} = \frac{625 \cdot 3}{120 \cdot 25} \\ &= \frac{25 \cdot 3}{120 \cdot 1} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

luego

$$t \text{ años} = \frac{5}{8} \text{ años} = 7 \frac{1}{2} \text{ meses.}$$

En el problema general que se acaba de resolver, el tiempo está dado en años lo mismo que el tanto por ciento, pero pasa frecuentemente que aunque el tanto por ciento sea anual el tiempo está dado en meses o en días.

Supongamos que el capital haya permanecido un tiempo $t = t'$ meses. Como t' meses son iguales a $\frac{t'}{12}$ años, las fórmulas serán aho-

ra las siguientes, que se deducen reemplazando a t por su igual $\frac{t'}{12}$ en las fórmulas I, II, III y IV. Así se obtienen:

de la [I]
$$i = \frac{c \cdot \frac{t'}{12} \cdot r}{100} = \frac{c \cdot t' \cdot r}{100 \times 12}$$

luego
$$\boxed{i = \frac{c \cdot t' \cdot r}{1200}} \quad [I']$$

de la [II]
$$c = \frac{100 \cdot i}{r \cdot \frac{t'}{12}} = \frac{100 \cdot i}{r \cdot t' / 12} = \frac{100 \cdot i \cdot 12}{r \cdot t'}$$

luego
$$\boxed{c = \frac{1200 \cdot i}{r \cdot t'}} \quad [II']$$

de la [III]
$$r = \frac{100 \cdot i}{c \cdot \frac{t'}{12}} = \frac{100 \cdot i}{c \cdot t' / 12} = \frac{100 \cdot i \cdot 12}{c \cdot t'}$$

luego
$$\boxed{r = \frac{1200 \cdot i}{c \cdot t'}} \quad [III']$$

de la [IV]
$$\frac{t'}{12} = \frac{100 \cdot i}{c \cdot r}$$

luego
$$\boxed{t' = \frac{1200 \cdot i}{c \cdot r}} \quad [IV']$$

Donde puede observarse que *cuando el tiempo está dado en meses*

y el tanto por ciento es anual, basta substituir en las fórmulas generales a 100 por 1200.

PROBLEMA. — ¿Cuál será el capital que colocado al 5 % anual produjo al cabo de 6 meses 135,40 \$ de interés?

SOLUCIÓN:

$$i = 135,40 \text{ \$}$$

$$r \% = 5 \%$$

$$t' = 6 \text{ meses}$$

$$c = x \text{ \$}$$

$$\text{Fórmula: } c = \frac{1200 \cdot i}{t' \cdot r}$$

$$c = \frac{1200 \cdot 135,40}{6 \cdot 5} = \frac{200 \cdot 135,40}{1 \cdot 5}$$

$$= \frac{40 \cdot 135,40}{1 \cdot 1} = 5416,00$$

$$c \$ = 5416,00 \text{ \$}$$

Supongamos que el capital haya permanecido un tiempo $t = t''$ días. Como t'' días son iguales a $\frac{t''}{360}$ años, (*) las fórmulas serán ahora las siguientes, que se obtienen reemplazando a t por su igual $\frac{t''}{360}$ en las fórmulas I, II, III y IV. Así se obtienen

$$\text{de la [I]} \quad i = \frac{c \cdot \frac{t''}{360} \cdot r}{100} = \frac{c \cdot t'' \cdot r}{360 \cdot 100} = \frac{c \cdot t'' \cdot r}{360 \cdot 100}$$

luego

$$i = \frac{c \cdot t'' \cdot r}{36000}$$

[I'']

(*) El año comercial se considera de 360 días.

$$\text{de la [II]} \quad c = \frac{100 \cdot i}{r \cdot \frac{t''}{360}} = \frac{100 \cdot i}{r \cdot \frac{t''}{360}} = \frac{100 \cdot i \cdot 360}{r \cdot t''}$$

$$\text{luego} \quad \boxed{c = \frac{36\,000 \cdot i}{r \cdot t''}} \quad [\text{II}']$$

$$\text{de la [III]} \quad r = \frac{100 \cdot i}{c \cdot \frac{t''}{360}} = \frac{100 \cdot i}{\frac{c \cdot t''}{360}} = \frac{100 \cdot i \cdot 360}{c \cdot t''}$$

$$\text{luego} \quad \boxed{r = \frac{36\,000 \cdot i}{c \cdot t''}} \quad [\text{III}']$$

$$\text{de la [IV]} \quad \frac{t''}{360} = \frac{100 \cdot i}{c \cdot r} \quad \text{de donde} \quad t'' = \frac{100 \cdot i \cdot 360}{c \cdot r}$$

$$\text{luego} \quad \boxed{t'' = \frac{36\,000 \cdot i}{c \cdot r}} \quad [\text{IV}']$$

Donde puede observarse, que cuando el tiempo está dado en días y el tanto por ciento es anual, basta sustituir, en las fórmulas generales, a 100 por 36 000.

PROBLEMA. — ¿Cuál será el tanto por ciento a que ha sido colocado un capital de 12 680 \$ que al cabo de 45 días produjo 126,80\$ de interés?

SOLUCIÓN:

$$c = 12\,680 \$$$

$$i = 126,80 \$$$

$$t'' = 45 \text{ días.}$$

$$r \% = x \%$$

$$\text{Fórmula: } r = \frac{36\,000 \cdot i}{c \cdot t''}$$

$$r = \frac{36\,000 \cdot 126,80}{12\,680 \cdot 45} = \frac{36\,000 \cdot 1}{100 \cdot 45}$$

$$r = \frac{360}{45} = 8$$

$$r \% = 8 \%$$

Si el tiempo t estuviese expresado en años, meses y días, se reduce todo a días y se aplican las fórmulas últimamente obtenidas.

PROBLEMA. — ¿Cuál será el interés producido por 10 600 \$ colocados al 4,5 % anual en 8 meses 20 días?

SOLUCIÓN:

$$c = 10\,600 \$$$

$$r\% = 4,5\%$$

$$t'' = 8 \text{ meses } 20 \text{ días} \\ = 260 \text{ días}$$

$$i = x$$

$$\text{Fórmula } i = \frac{c \cdot t'' \cdot r}{36\,000}$$

$$i = \frac{10\,600 \cdot 260 \cdot 4,5}{36\,000} = \frac{106 \cdot 26 \cdot 4,5}{36}$$

$$= \frac{53 \cdot 13 \cdot 4,5}{9} = 53 \cdot 13 \cdot 0,5 = 344,50$$

$$i \$ = 344,50 \$$$

131. Descuento comercial: fórmulas y aplicaciones. — En el comercio los préstamos de dinero se hacen mediante documentos, que estipulan las condiciones en que éstos se realizan, como son el plazo acordado y la suma a devolver. Entre estos documentos el más común es el llamado pagaré del cual damos el modelo que sigue:

	Nº 374	Por \$ 300.	089400
	Buenos Aires 1.º de Enero de 1927.		
	A los noventa días de la fecha pagaré		
	al Señor A. B. o a su orden		
	la cantidad de trescientos pesos moneda nacional		
por igual valor recibido en efectivo a mi entera satisfacción			
Calle Lanús N.º 3041		N. N.	

Fig. 8.

El día en que el deudor N. N. debe pagar, se llama *vencimiento del documento*, en nuestro caso es el 1º de Abril de 1927, y la cantidad de dinero a pagar, que es la que se indica en el documento se llama *valor nominal* del mismo. Así cuando el deudor se compromete a abonar el valor nominal, en realidad no ha recibido esa cantidad, sino la que resulta después de restarle el interés que se cobra por anticipado. Así por ejemplo, si el tanto por ciento convenido, es el 6 %/o, en el caso considerado el interés es, según la fórmula [I], 4,5 \$ y el firmante del pagaré habrá recibido en realidad 300 \$ — 4,5 \$ = 295,5 \$, no obstante lo cual se compromete a pagar a los noventa días 300 \$.

Puede suceder que el deudor N. N. desee pagar antes del vencimiento, por ejemplo el 1º de Marzo, es decir, 30 días antes del mismo. En este caso el deudor deberá abonar menos de los 300 \$; pues durante los 30 días que se ha anticipado, el capital producirá intereses que ya se han cobrado. Este nuevo valor del documento, que depende del número de días que faltan para el vencimiento, se llama *valor efectivo o actual del documento* y se obtiene restando al *valor nominal* una cantidad que se llama *descuento*.

Representando al *valor nominal* por n \$, al *valor efectivo* por e \$ y por d \$ al *descuento*, se tiene:

$$n \$ - d \$ = e \$ \quad \text{y por lo tanto} \quad n - d = e$$

CONVENCIÓN. — En el Comercio se ha convenido que: *El descuento que debe hacerse a un documento, sea igual al interés simple del valor nominal del mismo producido en el tiempo que falte para pagar el vencimiento, y tomando un tanto por ciento convenido que se llama tanto por ciento de descuento.*

Luego de acuerdo con esta convención, de las fórmulas que se acaban de estudiar se podrán obtener las de descuento sustituyendo en las primeras el

capital c	por	valor nominal n
interés i	»	descuento d

con lo cual se obtienen las siguientes fórmulas:

$$\text{de } i = \frac{c \cdot r \cdot t}{100} \qquad \text{la } d = \frac{n \cdot r \cdot t}{100} \qquad [\text{I}]$$

$$\text{de } c = \frac{100 \cdot i}{r \cdot t} \qquad \text{la } n = \frac{100 \cdot d}{r \cdot t} \qquad [\text{II}]$$

$$\text{de } r = \frac{100 \cdot i}{c \cdot t} \qquad \text{la } r = \frac{100 \cdot d}{n \cdot t} \qquad [\text{III}]$$

$$\text{de } t = \frac{100 \cdot i}{c \cdot r} \qquad \text{la } t = \frac{100 \cdot d}{n \cdot r} \qquad [\text{IV}]$$

$$\text{que con la fórmula ya establecida} \qquad e = n - d \qquad [\text{V}]$$

constituyen las fórmulas fundamentales del descuento. En las aplicaciones suelen emplearse una de las cuatro primeras y la [V].

Como se hizo al estudiar el Interés, se pueden obtener las fórmulas que resuelven las cuestiones relativas al descuento, cuando el tiempo está expresado en meses o en días, reemplazando en las fórmulas [I], [II], [III] y [IV] a 100 por 1200 o 36 000, respectivamente.

PROBLEMA. — *¿Cuál será el descuento que sufrirá un pagaré de 4750 \$ que es descontado al 5 %, 45 días antes de su vencimiento?*

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} r \% &= 5 \% & \text{Fórmula: } d &= \frac{n \cdot t'' \cdot r}{36\,000} \\ n &= 4750 \$ \\ t &= 45 \text{ días} & d &= \frac{4750 \cdot 45 \cdot 5}{36\,000} \\ d &= x \$ & &= \frac{475 \cdot 45 \cdot 5}{3600} = \frac{475 \cdot 1 \cdot 5}{80} \\ & & &= \frac{475 \cdot 1 \cdot 1}{16} = \frac{475}{16} = 29,68 \\ & & d\$ &= 29,68 \$ \end{aligned}$$

PROBLEMA. — ¿Cuál será el valor efectivo de un pagaré que, descontado al $6\frac{1}{2}\%$, 12 días antes de su vencimiento, sufrió un descuento de 1,52 \$?

SOLUCIÓN:

$$d = 1,52 \$$$

$$r \% = 6\frac{1}{2} = \frac{13}{2} \%$$

$$t'' = 12 \text{ días.}$$

$$e = x \$$$

$$\text{Fórmulas: } n = \frac{36\,000 \cdot d}{t'' \cdot r} ; e = n - d$$

$$n = \frac{36\,000 \cdot 1,52}{12 \cdot \frac{13}{2}} = \frac{36\,000 \cdot 1,52 \cdot 2}{12 \cdot 13}$$

$$= \frac{3\,000 \cdot 1,52 \cdot 2}{1 \cdot 13} = \frac{9\,120}{13} = 701,54$$

$$n \$ = 701,54 \$$$

$$e = 701,54 - 1,52 = 700,02$$

luego

$$e \$ = 700,02 \$$$

PROBLEMA. — ¿Cuánto tiempo antes de su vencimiento fué descontado un pagaré de 2342 \$ al 5 %, que sufrió un descuento de 42 \$?

SOLUCIÓN:

$$n = 2342 \$$$

$$d = 42 \$$$

$$r \% = 5 \%$$

$$t'' = x \text{ días}$$

$$\text{Fórmula: } t'' = \frac{36\,000 \cdot d}{n \cdot r}$$

$$= \frac{36\,000 \cdot 42}{2342 \cdot 5} = \frac{7\,200 \cdot 42}{2\,342 \cdot 1}$$

$$= \frac{3600 \cdot 42}{1171} = 129 \text{ días.}$$

$$t'' \text{ días} = 129 \text{ días} = 4 \text{ meses } 9 \text{ días.}$$

132. Repartición proporcional. — DEFINICION. — *Repartir un número n en partes proporcionales a otros números dados $a, b, c, \dots h$, es de componerlo en sumandos $x, y, z, \dots w$, tales que las razones formadas por cada uno de éstos y los números dados sean iguales.*

En símbolos: Repartir n en partes proporcionales a

$a, b, c \dots h$ es hallar los números $x, y, z \dots w$

tales que
$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \dots = \frac{w}{h}$$

siendo
$$x + y + z + \dots + w = n$$

Damos a continuación el esquema general de un problema de repartición proporcional.

PROBLEMA. — *Repartir el número n en partes proporcionales a los números $a, b, c \dots h$.*

PLANTEO:

$$n \left\{ \begin{array}{ll} a & \text{—————} x \\ b & \text{—————} y \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ n & \text{—————} w \end{array} \right. \quad x + y + \dots + w = n$$

SOLUCIÓN. — Siendo $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \dots = \frac{w}{h}$ por definición, aplicando la propiedad fundamental de la serie de razones iguales (nº 120) resulta

$$\frac{x + y + z + \dots + w}{a + b + c + \dots + h} = \frac{x}{a} \quad [1]$$

$$\frac{x + y + z + \dots + w}{a + b + c + \dots + h} = \frac{y}{b} \quad [2]$$

.....

$$\frac{x + y + z + \dots + w}{a + b + c + \dots + h} = \frac{w}{h} \quad [m]$$

Pero como $x + y + z + \dots + w = n$ por definición, substituyendo a los antecedentes de la primera razón de las igualdades [1], [2]... [m], por su igual n , y teniendo en cuenta que un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio, resulta:

$$\frac{n}{a + b + c + \dots + h} = \frac{x}{a} \text{ y también } x = \frac{n \cdot a}{a + b + c + \dots + h}$$

$$\frac{n}{a + b + c + \dots + h} = \frac{y}{b} \text{ y también } y = \frac{n \cdot b}{a + b + c + \dots + h}$$

$$\frac{n}{a + b + c + \dots + h} = \frac{w}{h} \text{ y también } w = \frac{n \cdot h}{a + b + c + \dots + h}$$

Observando las expresiones que nos dan los valores de los números buscados $x, y, z, \dots, w$ resulta la siguiente:

REGLA. — *Para dividir un número en partes proporcionales a varios otros, se multiplica dicho número por cada uno de los números a los cuales deben ser proporcionales los buscados, y se divide el producto por la suma de los números dados.*

PROBLEMA. — *Repartir el número 840 en partes proporcionales a 8, 10 y 12.*

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{l} 840 \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ ————— } x \\ 10 \text{ ————— } y \\ 12 \text{ ————— } z \end{array} \right. \\ x + y + z = 840 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = \frac{840 \cdot 8}{8 + 10 + 12} = \frac{840 \cdot 8}{30} = 224 \\ y = \frac{840 \cdot 10}{8 + 10 + 12} = \frac{840 \cdot 10}{30} = 280 \\ z = \frac{840 \cdot 12}{8 + 10 + 12} = \frac{840 \cdot 12}{30} = 336 \end{array}$$

DEFINICIÓN. — *Repartir una cantidad N , en partes proporcionales a otras cantidades dadas $A_1, A_2, \dots, A_n$, es descomponerla en sumandos $X_1, X_2, \dots, X_n$, tales que sus medidas $x_1, x_2, \dots, x_n$ sean los nú-*

meros que resultan de descomponer la medida n de N , en partes proporcionales a las medidas $a_1, a_2, \dots a_n$ de las cantidades dadas $A_1, A_2, \dots, A_n$.

EJEMPLO. — Repartir 5000 \$ en partes proporcionales a 8 años, 5 años y 7 años significa encontrar las cantidades x \$, y \$ y z \$ tales que sus medidas x, y y z sean los números que resultan de repartir el número 5000, en partes proporcionales a los números 8, 5 y 7, o sea

$$\begin{array}{lcl}
 5000 \left\{ \begin{array}{l} 8 \text{ ————— } x \\ 5 \text{ ————— } y \\ 7 \text{ ————— } z \end{array} \right. & \begin{array}{l} x = \frac{5000 \cdot 8}{8 + 5 + 7} = \frac{5000 \cdot 8}{20} = 2000 \\ y = \frac{5000 \cdot 5}{8 + 5 + 7} = \frac{5000 \cdot 5}{20} = 1250 \\ z = \frac{5000 \cdot 7}{8 + 5 + 7} = \frac{5000 \cdot 7}{20} = 1750 \end{array}
 \end{array}$$

Luego x \$ = 2000 \$, y \$ = 1250 \$ y z \$ = 1750 \$ son las can-

tidades que resultan de dividir a 5000 \$ en partes proporcionales a 8 años, 5 años y 7 años.

133. Regla de compañía. — En el Comercio es frecuente, que el capital invertido en un negocio cualquiera, pertenezca a varias personas que forman lo que se llama una *Compañía* o *Sociedad*. Esta compañía suele, con el tiempo, reforzarse con nuevos *asociados* cuyos capitales van a aumentar el capital común. Supongamos que los asociados en un negocio formado en esas condiciones, quieran liquidar las ganancias o conocer las pérdidas correspondientes a cada uno de ellos. Esto da lugar a un problema que se resuelve por la aplicación de la *Regla de Compañía* de la cual daremos la siguiente

DEFINICIÓN. — Se llama *Regla de Compañía*, al procedimiento de cálculo mediante el cual se obtienen las ganancias o las pérdidas correspondientes a cada uno de los miembros de una sociedad que han colocado sus capitales, durante cierto tiempo.

Para la resolución de los distintos problemas, se consideran tres casos, según que:

1º *Los tiempos que han permanecido los capitales en la sociedad, sean iguales.*

2º *Los capitales sean iguales.*

3º *Los capitales sean distintos, así como también los tiempos durante los cuales han sido colocados.*

PRIMER CASO. — Se considera justo que si un capital, ha sido colocado en una sociedad y produce una cierta ganancia o una pérdida al cabo de cierto tiempo, otro capital doble, triple, etc. del primero, produce, en el mismo tiempo, una ganancia o pérdida doble, triple, etc. respectivamente. Por esta razón se acepta la siguiente

CONVENCIÓN. — *Las ganancias o las pérdidas de varios capitales, que han estado el mismo tiempo en una sociedad, son proporcionales a dichos capitales.*

PROBLEMA. — *A, B y C formaron una compañía. A puso 5000 \$, B puso 6000 \$ y C puso 4000 \$ dejando dichos capitales durante el mismo tiempo. Habiéndose obtenido al cabo de ese tiempo una ganancia de 1500 \$, ¿cuánto le corresponde a cada uno?*

PLANTEO:

$$\left. \begin{array}{llll} \text{A puso} & c' \$ = 5000 \$ & \text{-----} & g' \$ = x \$ \\ \text{B puso} & c'' \$ = 6000 \$ & \text{-----} & g'' \$ = y \$ \\ \text{C puso} & c''' \$ = 4000 \$ & \text{-----} & g''' \$ = z \$ \end{array} \right\} g = 1500 \$$$

SOLUCIÓN. — De acuerdo con el convenio anterior el problema se reduce a repartir la ganancia g y en partes proporcionales a los capitales c' c'' y c''' .

Aplicando la regla de repartición proporcional resulta:

$$g' \$ = \frac{1500 \cdot 5000}{5000 + 6000 + 4000} = \frac{7\,500\,000}{15\,000} = \frac{7500}{15} = 500 \$$$

$$g'' \$ = \frac{1500 \cdot 6000}{5000 + 6000 + 4000} = \frac{9\,000\,000}{15\,000} = \frac{9000}{15} = 600 \$$$

$$g''' \$ = \frac{1500 \cdot 4000}{5000 + 6000 + 4000} = \frac{6\,000\,000}{15\,000} = \frac{6000}{15} = 400 \$$$

Luego a A le corresponden 500 \$, a B 600 \$ y a C 400 \$.

SEGUNDO CASO. — Se considera justo que si un capital ha sido colocado en una sociedad y produce una ganancia o una pérdida al cabo de cierto tiempo, otro capital igual al primero en un tiempo doble, triple, etc. que el primero, produce una ganancia o pérdida doble, triple, etc. respectivamente. Por esta razón se acepta la siguiente

CONVENCIÓN. — *Las ganancias o las pérdidas de varios capitales iguales que han estado distintos tiempos en una sociedad, son proporcionales a dichos tiempos.*

PROBLEMA. — *A y B formaron una compañía colocando capitales iguales. A lo dejó $3\frac{1}{2}$ años y B $2\frac{1}{3}$ años. Habiéndose obtenido una ganancia de 5400 \$, ¿cuánto le corresponde a cada uno?*

PLANTEO:

$$\left. \begin{array}{l} \text{A dejó su capital } t' \text{ años} = 3\frac{1}{2} \text{ años} = \frac{7}{2} \text{ años} \\ \text{B } \gg \gg \gg t'' \text{ años} = 2\frac{1}{3} \text{ años} = \frac{7}{3} \text{ años} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ganancia} \\ g \$ = 5400 \$ \end{array}$$

SOLUCIÓN. — De acuerdo con el convenio anterior el problema se reduce a repartir la ganancia g en partes proporcionales a los tiempos t' y t'' .

Aplicando la regla de repartición proporcional resulta:

$$g' \$ = \frac{5400 \cdot \frac{7}{2}}{\frac{7}{2} + \frac{7}{3}} = \frac{5400 \cdot 7}{\frac{21}{6} + \frac{14}{6}} = \frac{5400 \cdot 7 \cdot 6}{35 \cdot 2} = 3240 \$$$

$$g'' \$ = \frac{5400 \cdot \frac{7}{3}}{\frac{7}{2} + \frac{7}{3}} = \frac{5400 \cdot 7}{\frac{35}{6}} = \frac{5400 \cdot 7 \cdot 6}{35 \cdot 3} = 2160 \$$$

Luego a A le corresponden 3240 \$ y a B 2160 \$.

TERCER CASO. — Se considera justo que si un capital de 2000 \$ ha estado colocado 5 años en una sociedad y otro de 3500 \$ ha estado 2 años, las ganancias obtenidas por dichos capitales son las mismas que las producidas, en 1 año, por un capital de 2000 \$. 5 y de 3500 \$. 2 respectivamente, es decir, que:

2000 \$ en 5 años producen tanto como \$ 2000.5 en 1 año

3500 \$ » 2 años » » » \$ 3500.2 » » »

Por esta razón se acepta la siguiente:

CONVENCIÓN. — *Las ganancias o pérdidas de varios capitales distintos que han estado diferentes tiempos en una sociedad, son proporcionales a los productos de dichos capitales por el número de años, meses o días que han estado colocado esos capitales.*

PROBLEMA. — *A, B, C y D formaron una compañía. A puso 500 \$ por 6 años, B puso 3000 \$ por 5 años, C puso 1200 \$ por 3 años y D puso 4000 \$ por 2 años. Habiéndose obtenido una pérdida de 2500 \$, ¿cuánto perdió cada uno?*

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ puso } c' = 500 \$ \text{ ————— } t' = 6 \text{ años} \\ B \text{ » } c'' = 3000 \$ \text{ ————— } t'' = 5 \text{ años} \\ C \text{ » } c''' = 1200 \$ \text{ ————— } t''' = 3 \text{ años} \\ D \text{ » } c'''' = 4000 \$ \text{ ————— } t'''' = 2 \text{ años} \end{array} \right\} \text{pérdida} = \$ 2500$$

SOLUCIÓN. — De acuerdo con el convenio anterior el problema se reduce a repartir la ganancia g en partes proporcionales a los productos de los capitales por el número de años $c' \times t'$, $c'' \times t''$, $c''' \times t'''$ y $c'''' \times t''''$.

Aplicando la regla de repartición proporcional resulta:

$$\begin{aligned} g' \$ &= \frac{2500 \cdot 500 \cdot 6}{500 \cdot 6 + 3000 \cdot 5 + 1200 \cdot 3 + 4000 \cdot 2} = \\ &= \frac{2500 \cdot 500 \cdot 6}{29\ 600} \cong \$ 253,37 \end{aligned}$$

$$q'' = \frac{2500 \cdot 3000 \cdot 5}{3000 + 15000 + 3600 + 8000} =$$

$$= \frac{2500 \cdot 3000 \cdot 5}{29600} \cong \$ 1266,89$$

$$g''' = \frac{2500 \cdot 1200 \cdot 3}{3000 + 15000 + 3600 + 8000} =$$

$$= \frac{2500 \cdot 1200 \cdot 3}{29600} \cong \$ 304,05$$

$$g''' = \frac{2500 \cdot 4000 \cdot 2}{3000 + 15000 + 3600 + 8000} =$$

$$= \frac{2500 \cdot 4000 \cdot 2}{29600} \cong \$ 675,67$$

Luego a A le corresponde \$ 253,37, a B \$ 1266,89, a C \$ 304,05 y a D \$ 675,67.

135. Regla de aligación. — Problema directo. — Otro de los problemas que se presentan en el Comercio, es el que se refiere a la determinación del precio de una mezcla de una misma o de varias substancias de calidades diferentes, conociendo el precio y las cantidades de cada uno de los componentes. Este problema se resuelve por la aplicación de la llamada *Regla de aligación directa*, de la cual daremos la siguiente:

DEFINICIÓN. — Se llama *Regla de aligación directa* al procedimiento de cálculo, mediante el cual se obtiene el precio unitario (*) de una mezcla, cuando se conocen los precios unitarios de las substancias mezcladas y los valores de las cantidades componentes respecto de las unidades a que se refieren los precios.

Damos a continuación el esquema general de un problema de aligación directa:

PROBLEMA. — *Se han mezclado s_1 Kg. de una sustancia de p_1 \$ el Kg., con s_2 Kg. de p_2 \$ el Kg. y con s_3 Kg. de p_3 \$ el Kg. ¿Cuánto vale el Kg. de la mezcla?*

(*) Por precio unitario de una sustancia se entiende el precio de cada unidad de la misma, por ejemplo de cada Kg. o de cada litro. etc.

PLANTEO :

Se han mezclado s_1 Kg ————— p_1 \$ el Kg
 s_2 Kg ————— p_2 \$ » »
 s_3 Kg ————— p_3 \$ » »
 $(s_1 + s_2 + s_3)$ Kg ————— x \$ » »

SOLUCIÓN :

Si 1 Kg de la 1.^a sust. cuesta p_1 \$, s_1 Kg cuestan $p_1 s_1$ \$
 » » » 2.^a » » p_2 \$, s_2 Kg » $p_2 s_2$ \$
 » » » 3.^a » » p_3 \$, s_3 Kg » $p_3 s_3$ \$

Luego s_1 Kg + s_2 Kg + s_3 Kg cuestan $p_1 s_1$ \$ + $p_2 s_2$ \$ + $p_3 s_3$ \$
 es decir $(s_1 + s_2 + s_3)$ Kg » $(p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3)$ \$
 y por lo tanto 1 Kg cuesta $\frac{(p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3) \$}{s_1 + s_2 + s_3}$
 luego 1 Kg de la mezcla cuesta $x \$ = \frac{p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3}{s_1 + s_2 + s_3}$

Observando el numerador y el denominador del segundo miembro de la última igualdad, se deduce la siguiente

REGLA. — *Para hallar el precio de una mezcla se suman los productos de las medidas de las cantidades de las sustancias mezcladas, por sus precios unitarios, y se divide este resultado por la suma de las medidas de dichas cantidades.*

PROBLEMA. — *Se han mezclado 20 Kg. de yerba de \$ 1,60 el Kg., con 30 Kg. de \$ 1,30, con 35 Kg. de \$ 0,90 el Kg. y con 50 Kg. de \$ 1,10 el Kg. ¿Cuánto vale el Kilo de la mezcla?*

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= 20 ; p_1 = 1,60 \\
 s_2 &= 30 ; p_2 = 1,30 \\
 s_3 &= 35 ; p_3 = 0,90 \\
 s_4 &= 50 ; p_4 = 1,10
 \end{aligned}$$

Fórmula: $p = \frac{p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + p_4 s_4}{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}$

$$p = \frac{1,60.20 + 1,30.30 + 0,90.35 + 1,10.50}{20 + 30 + 35 + 50}$$

$$p = x \quad p = \frac{32 + 39 + 31,5 + 55}{135} = 1,166 \dots \cong 1,17$$

Luego el Kg de la mezcla vale \$ 1,17.

Problema inverso. — Recíprocamente: cuando se conocen los precios de una misma o de varias sustancias de distintas calidades, se fija el precio unitario de la mezcla y se trata de encontrar las cantidades de cada una de estas sustancias, se obtiene un problema llamado de *Regla de aligación inversa*, de la cual daremos la siguiente:

DEFINICIÓN. — Se llama *Regla de aligación inversa* al procedimiento de cálculo, mediante el cual se obtienen las cantidades de las diversas sustancias, que deben emplearse para obtener una mezcla de precio dado, conociendo el precio unitario de cada una de ellas.

Nos ocuparemos primero de resolver problemas en los que se refieran a mezclas de dos sustancias. El esquema general de uno de esos problemas es el siguiente:

PROBLEMA. — *Se desea mezclar una sustancia de p_1 \$ el Kg. con otra de p_2 \$ el Kg. de modo que el precio del Kg. de mezcla resulte a p \$, ¿cuántos Kg. de cada una de las sustancias deben mezclarse?*

PLANTEO:

Se han mezclado x Kg ————— p_1 \$ el Kg
 y Kg ————— p_2 \$ » »
 $(x + y)$ Kg ————— p \$ » »

SOLUCIÓN. — Supongamos que el precio unitario de la primera sustancia p_1 sea mayor que p_2 . El precio p de la mezcla debe estar comprendido entre los precios de las sustancias mezcladas, es decir

$$p_1 > p > p_2$$

Al vender la mezcla a p \$ el Kg, por cada Kg

de la 1ª sustancia se pierde $(p_1 - p)$ \$ y por x Kg, $(p_1 - p) x$ \$

» » 2ª » » gana $(p - p_2)$ \$ » » y Kg, $(p - p_2) y$ \$

y como las ganancias deben compensarse con las pérdidas, debemos tener

$$(p - p_2) y \$ = (p_1 - p) x \$$$

luego $(p - p_2) y = (p_1 - p) x$

por lo tanto $\frac{y}{x} = \frac{p_1 - p}{p - p_2}$

Esta igualdad nos indica que una solución del problema sería

$$y = p_1 - p \quad \text{y} \quad x = p - p_2$$

puesto que la razón entre y y x debe ser igual a la razón entre $(p_1 - p)$ y $(p - p_2)$, luego

$$x \text{ Kg} = (p - p_2) \text{ Kg} \quad ; \quad y \text{ Kg} = (p_1 - p) \text{ Kg}.$$

Pero si tomamos $x = m (p - p_2)$, e $y = m (p_1 - p)$, siendo m un número racional positivo, como en este caso es también

$$\frac{y}{x} = \frac{m (p_1 - p)}{m (p - p_2)} = \frac{p_1 - p}{p - p_2} \quad \text{resulta}$$

que estos valores de x e y son también soluciones del problema, es decir,

$$x \text{ Kg} = m(p_1 - p) \text{ Kg} \quad ; \quad y \text{ Kg} = m(p_2 - p) \text{ Kg}$$

Observando los valores obtenidos para x e y se deduce la siguiente

REGLA. — *Para hallar las cantidades de una mezcla de dos sustancias de precios conocidos y fijado el precio de la mezcla, basta tomar tantas unidades de cada sustancia como indique la diferencia entre el precio unitario de la mezcla y el precio de la otra sustancia, en el único sentido posible o un múltiplo o submúltiplo de dichas cantidades.*

En la práctica el problema se resuelve directamente así:

$$p \text{ \$} \left\{ \begin{array}{l} p_1 \text{ \$} \mid p_1 - p \mid \\ p_2 \text{ \$} \mid p - p_2 \mid \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x \text{ Kg} = (p - p_2) \text{ Kg} \text{ o } m(p - p_2) \text{ Kg} \\ y \text{ Kg} = (p_1 - p) \text{ Kg} \text{ o } m(p_1 - p) \text{ Kg} \end{array}$$

PROBLEMA. — *Un almacenero desea mezclar vino de \$ 0,90 el litro con otro de clase inferior de \$ 0,55 el litro, de modo que el precio de la mezcla resulte de \$ 0,70 el litro. ¿Cuántos litros de cada una de las clases de vino deben mezclarse?*

PLANTEO:

$$\begin{array}{l} \text{De \$ 0,90} \text{ ————— } x.l \\ \text{» \$ 0,55} \text{ ————— } y.l \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{De \$ 0,90} \\ \text{» \$ 0,55} \end{array}} \right\} (x + y).l \text{ ————— } \$ 0,70 \text{ el}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{array}{l} \$ 0,70 \left\{ \begin{array}{l} \$ 0,90 \mid 0,90 - 0,70 = 0,20 \mid x.l = 0,15.l \text{ ó } 15.l \text{ ó } 30.l \dots \\ \$ 0,55 \mid 0,70 - 0,55 = 0,15 \mid y.l = 0,20.l \text{ ó } 20.l \text{ ó } 40.l \dots \end{array} \right. \end{array}$$

Luego pueden mezclarse 15.l de \$ 0.90 con 20.l de \$ 0.55 el litro.

Consideremos ahora el caso de más de dos sustancias. Haciendo mezclas parciales de dos sustancias tales que el precio de una de ellas sea mayor que el precio fijado y el de la otra menor, en la

forma indicada en el caso anterior, hasta que figuren todas las sustancias componentes y reuniendo todas esas mezclas parciales que han resultado todas al precio dado, la nueva mezcla será de este mismo precio. Con este criterio resolveremos el siguiente problema:

PROBLEMA. — *Se desea mezclar café de 1,40 \$, 2,00 \$, 3,20 \$ y 2,50 \$ el Kilogramo de modo que el precio de la mezcla resulte de a 2,40 \$ el Kg. ¿Cuántos Kilogramos de cada una de las sustancias deben mezclarse?*

PLANTEO:

$$\left. \begin{array}{l} \text{De 1,40 \$} \text{ ————— } x \text{ Kg} \\ \text{» 2,00 \$} \text{ ————— } y \text{ Kg} \\ \text{» 3,20 \$} \text{ ————— } z \text{ Kg} \\ \text{» 2,50 \$} \text{ ————— } w \text{ Kg} \end{array} \right\} (x + y + z + w) \text{ Kg} = 2,40 \text{ el Kg}$$

SOLUCIÓN: *Primer problema parcial.* — Mezclando el de \$ 1,40 con el de \$ 3,20 el Kg, se tiene:

$$\begin{array}{l} \$ 2,40 \left\{ \begin{array}{l} \$ 1,40 \quad | \quad 2,40 - 1,40 = 1,00 \\ \$ 3,20 \quad | \quad 3,20 - 2,40 = 0,80 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} x \text{ Kg} = 0,80 \text{ Kg} \\ z \text{ Kg} = 1,00 \text{ Kg} \end{array}$$

Segundo problema parcial. — Mezclando el de \$ 2,50 con el de \$ 2,00 el Kg, se tiene:

$$\begin{array}{l} \$ 2,40 \left\{ \begin{array}{l} \$ 2,00 \quad | \quad 2,40 - 2,00 = 0,40 \\ \$ 2,50 \quad | \quad 2,50 - 2,40 = 0,10 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} y \text{ Kg} = 0,10 \text{ Kg} \\ w \text{ Kg} = 0,40 \text{ Kg} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Luego} \\ \text{deben} \\ \text{mezclar-} \\ \text{se} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{de \$ 1,40 ————— } 0,8 \text{ Kg} \text{ o } 8 \text{ Kg o } 80 \text{ Kg} \dots \\ \text{» \$ 2,00 ————— } 0,10 \text{ Kg} \text{ o } 1 \text{ Kg o } 10 \text{ Kg} \dots \\ \text{» \$ 3,20 ————— } 1,00 \text{ Kg} \text{ o } 10 \text{ Kg o } 100 \text{ Kg} \dots \\ \text{» \$ 2,50 ————— } 0,40 \text{ Kg} \text{ o } 4 \text{ Kg o } 40 \text{ Kg} \dots \end{array} \right.$$





ÍNDICE

CAPÍTULO I. — Números racionales de pág. 5 a 23

Necesidad de la creación de los números fraccionarios (pág. 5). Números fraccionarios puros, definiciones (pág. 6). Números racionales (pág. 7). Representación de los números enteros por pares ordenados de números enteros (pág. 7). Pares de denominador cero (pág. 8). Interpretaciones concretas de los números racionales de términos positivos (pág. 8). Igualdad de números racionales (pág. 9). Caracteres formales (pág. 11). Consecuencias (pág. 12). Un número racional no altera si se multiplican o se dividen... (pág. 13). Posibilidad de expresar todo número racional como fracción de denominador positivo (pág. 14). Signo de un número racional (pág. 14). Simplificación de fracciones (pág. 15). Reducción de fracciones a común denominador (pág. 16). Mínimo común denominador (pág. 17). Desigualdad de números racionales (pág. 19). Definición de mayor (pág. 20) y menor (pág. 21). De dos fracciones de igual denominador... (pág. 22). De dos fracciones positivas de igual numerador... (pág. 22). Ordenación de los números racionales (pág. 23).

CAPÍTULO II. — Suma de números racionales de pág. 24 a 37

Definiciones de suma de números racionales de igual (pág. 24), y de distinto denominador (pág. 25). Propiedad uniforme, postulado, (pág. 27). Propiedades conmutativa (pág. 29) y asociativa (pág. 30). Leyes de monotonía (pág. 31). Números mixtos. Reducción de un número mixto a fracción impropia (pág. 33) y viceversa (pág. 34). Suma de números mixtos (pág. 35).

CAPÍTULO III. — Resta de números racionales de pág. 38 a 41

Definición (pág. 38). Regla práctica para los distintos casos (pág. 39). Propiedades (pág. 41).

CAPÍTULO IV. — Multiplicación de números racionales de pág. 42 a 50

Definición (pág. 42). Propiedades: uniforme (pág. 43), conmutativa (pág. 44), asociativa (pág. 45) y distributivas (pág. 46). Leyes de monotonía (pág. 49). Números racionales inversos. Producto de dos números inversos (pág. 50).

CAPÍTULO V. — División de números racionalesde pág. 51 a 56
Definición (pág. 51). Regla práctica (pág. 52). Verificación de la posibilidad de la división en el campo racional (pág. 52). Propiedades (pág. 54).

CAPÍTULO VI. — Potenciación y radicación de números racionalesde pág. 57 a 73
potencia de números racionales con exponente natural (pág. 57). Regla práctica (pág. 58). Propiedades (pág. 59). Potencia de una fracción irreducible (pág. 61). Potencia con exponente negativo: definición (pág. 62). Verificación de que en las potencias con exponente negativo se conservan las propiedades (pág. 63). Raíz enésima de un número racional; definición (pág. 69). Si la raíz cuadrada de un número natural no es un número natural... (pág. 69). Raíz cuadrada aproximada de un número con menor error que un enésimo (pág. 70). Regla práctica (pág. 72).

CAPÍTULO VII. — Fracciones decimalesde pág. 74 a 83
Definición (pág. 74). Relaciones entre las unidades decimales (pág. 76). Descomposición de las fracciones decimales en unidades de los diversos órdenes (pág. 76). Escritura de las fracciones decimales en forma entera (pág. 79). División de un número entero por la unidad seguida de ceros (pág. 80). Multiplicación (pág. 81) y división (pág. 82) de un número decimal por la unidad seguida de ceros. Un número decimal no altera si se le agregan ceros a la derecha de su última cifra decimal (pág. 83).

CAPÍTULO VIII. — Suma de números decimalesde pág. 84 a 85
Deducción de la regla práctica para sumar decimales basada en la suma de fracciones ordinarias (pág. 84).

CAPÍTULO IX. — Resta de números decimalesde pág. 86 a 87
Deducción de la regla práctica basada en la resta de fracciones ordinarias (pág. 86).

CAPÍTULO X. — Multiplicación de números decimalesde pág. 88 a 90
Multiplicación de un decimal por un entero (pág. 88) y multiplicación de dos decimales entre sí (pág. 89). Reglas prácticas.

CAPÍTULO XI. — División de números decimalesde pág. 91 a 97
Cociente de dos números enteros con menor error que 0,1, 0,01... definición (pág. 91) y modo de hallarla (pág. 93). División de un decimal por un entero (pág. 95). Regla práctica. División de un número entero o decimal por un decimal (pág. 96).

CAPÍTULO XII. — Conversión de fracciones ordinarias en decimales y viceversa . pág. 98 a 111
Condición necesaria y suficiente para que una fracción ordinaria sea reducida a decimal (pág. 99). Expresiones numéricas con infinitas cifras deci-

males (pág. 100). Fracciones decimales inexactas, periódicas, puras y mixtas (pág. 102). Reducción de una fracción ordinaria a decimal (pág. 103). Reducción de una fracción decimal exacta a ordinaria (pág. 105). Reducción de una fracción decimal periódica pura (pág. 105) o mixta (pág. 107) a ordinaria. Significado de las fracciones periódicas, cuyo periodo es 9. (pág. 110).

CAPÍTULO XIII. — Idea de número irracional de pág. 112 a 118

Raíz cuadrada aproximada de un número... Definición (pág. 112) regla práctica para obtenerla (pág. 114). Necesidad de la creación de los números irracionales: su representación (pág. 115). Ejemplos: raíz cuadrada de 2, 3, 5, etc., e y π (pág. 116). Números reales (pág. 119).

CAPÍTULO XIV. — Magnitudes de pág. 119 a 132

Cantidades: definición (pág. 119). Cantidades homogéneas. Magnitud (pág. 121). Cantidades comparables (pág. 121). Comparación de dos cantidades homogéneas (pág. 123). Producto (pág. 125) y cociente (pág. 126) de una cantidad por un número. Postulado (pág. 127). Razón de dos cantidades (pág. 127). Medida de una cantidad (pág. 128). Valor de una cantidad. Números concretos (pág. 129). La razón entre dos cantidades es igual a las de sus medidas (pág. 129). El producto de la razón de una cantidad a otra por la razón de esta última a una tercera... (pág. 130). Sistema cronométrico (pág. 131). Cálculos de reducción (pág. 132).

CAPÍTULO XV. — Sistema métrico decimal de pág. 133 a 145

Historia (pág. 133). Ventajas del sistema métrico decimal sobre los demás sistemas (pág. 134). Comparación del sistema métrico con el cronométrico (pág. 136). Medidas de longitud (pág. 137), superficie (pág. 138), volumen (pág. 139), capacidad (pág. 140) y peso (pág. 141). Correspondencia entre las unidades de volumen y peso. Peso específico (pág. 142).

CAPÍTULO XVI. — Razones y proporciones numéricas de pág. 146 a 157

Definiciones (pág. 146). Proporción continua (pág. 148). Teorema fundamental (pág. 148). Recíproco (pág. 149). Caso particular en que la proporción es continua (pág. 150). Cálculo de un extremo (pág. 151) o de un medio (pág. 152) desconocido en una proporción ordinaria o continua. Las siete nuevas proporciones deducidas de una dada (pág. 153). Nuevas proporciones deducidas de una dada por adición o sustracción de sus términos (pág. 155). Serie de razones iguales (pág. 156). Propiedad fundamental (pág. 156).

CAPÍTULO XVII. — Magnitudes proporcionales de pág. 158 a 165

Definición y ejemplos (pág. 159). Propiedades de las magnitudes proporcionales (pág. 160). Magnitudes inversamente proporcionales. Definición y

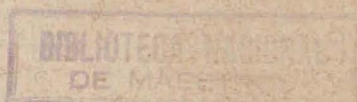
ejemplos (pág. 161). Propiedad de las magnitudes inversamente proporcionales (pág. 163). Magnitud proporcional a varias otras. Definición y ejemplos (pág. 164).

CAPÍTULO XVIII. — Regla de tres simple y compuesta de pág. 166 a 179

Regla de tres simple: su objeto (pág. 166). Resolución de problemas de regla de tres simple, por el método de reducción a la unidad (pág. 166) y por proporciones (pág. 170). Regla de tres compuesta; su objeto (pág. 173). Resolución de problemas de regla de tres compuesta con números racionales por el método de reducción a la unidad (pág. 173) y por proporciones (pág. 176).

CAPÍTULO XIX. — Cuestiones de Aritmética Comercial de pág. 180 a 203

Interés simple; deducción de las fórmulas y aplicación de las mismas (pág. 180). Descuento comercial: fórmulas y aplicaciones (pág. 188). Repartición proporcional (pág. 192). Regla de compañía (pág. 194). Regla de aligación. Problema directo (pág. 198) e inverso (pág. 200).



mt. 26662

ARITMETICA

