Biblioteca
Nuestra Escuela
2023

Cuadernos
para la
enseñanza

Nuestra Escuela
Programa Nacional de Formación Permanente

Colección **Actualizaciones Académicas**

Actualización Académica en enseñar y aprender matemática en la escuela secundaria

Módulo 5: **Enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria**

la educación
nuestra bandera

INFoD
Instituto Nacional de Formación Docente

Ministerio de Educación
Argentina

Nuestra Escuela
Programa Nacional de Formación Permanente

INFoD
Instituto Nacional de Formación Docente

Ministerio de Educación
Argentina

Índice

Clase 1: El álgebra en la escuela secundaria..........3

Clase 2: La transición aritmética - álgebra..........19

Clase 3: La transición aritmética álgebra (parte II)..........32

Clase 4: Las ecuaciones..........45

Clase 1: El álgebra en la escuela secundaria

Presentación del curso e introducción a la clase 1

Bienvenidas y bienvenidos al curso “Enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Escuela Secundaria”. En esta propuesta profundizaremos sobre aspectos centrales del Álgebra escolar, reflexionaremos sobre las propias prácticas docentes y acerca del trabajo que despliegan las y los estudiantes cuando hacen Matemática, en particular, cuando se enfrentan a problemas algebraicos.

Es usual que se vincule el trabajo algebraico escolar con la resolución de ecuaciones, aplicando diferentes técnicas, en las que “el despeje” suele ser la más utilizada. También suele relacionarse con la demostración de la equivalencia entre expresiones algebraicas, con problemas de aplicación de alguna fórmula dada correspondiente a una función en el marco de un problema planteado en un contexto extramatemático. Sin embargo, tomando como base el enfoque didáctico que subyace a los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) y los diferentes documentos curriculares jurisdiccionales, entendemos que “hacer álgebra” implica un trabajo mucho más complejo.

En este curso nos proponemos ampliar los tipos de problemas que podemos llevar al aula y que posibilitan un trabajo algebraico valioso.

ACTIVIDAD 1

Participación en el foro de presentación y bienvenida

Para empezar a conocernos, los invitamos a realizar una breve presentación. Dada la diversidad de lugares y formaciones de los cursantes de este módulo, puede resultar sumamente interesante que compartan algunos detalles sobre su experiencia docente, su lugar de trabajo, en dónde viven y si ya tuvieron experiencia en formación virtual.

También les proponemos que compartan sus impresiones respecto a esta pregunta, que será nuestro hilo conductor a lo largo de todo el recorrido:

¿Qué consideran prioritario en la enseñanza del Álgebra en la Escuela Secundaria? ¿Qué tipos de tareas y problemas proponen para que resuelvan las y los estudiantes?

Con esta mirada, a lo largo de las cuatro clases que componen este curso, las y los invitaremos a resolver diferentes tipos de actividades, algunas obligatorias y otras optativas, con el fin de abordar diferentes aspectos del trabajo algebraico. Las notas que tomen a propósito de todas ellas serán el insumo principal para la elaboración del Trabajo Final.

En esta clase contaremos con dos foros de intercambio. Entendemos que su participación no sólo es necesaria para acreditar el curso; también consideramos que son instancias de intercambio valiosas, al modo de una puesta en común en el aula física.

Uno de los foros será de presentación y el otro, referido al contenido de la clase. Es sumamente importante que participen de este último **luego de leer la clase**, ya que está pensado para que pongan en juego conceptos que se tratan en ella. Es fundamental que su participación no se restrinja al posteo de su respuesta, sino que sugerimos que vuelvan cada uno o dos días para ver "las repercusiones" que trajo su publicación, pues alentamos a que dialoguen entre ustedes tal y como si fuera una puesta en común en el aula de clases. Por eso, verán que la tutora o el tutor hará comentarios individuales, pero también grupales, incluirá nuevas definiciones y contenidos conceptuales, ampliando lo estudiado en la clase. Así, la clase se compone no solo de este material escrito sino también de cada uno de los foros que vamos proponiendo.

Al finalizar el tiempo de participación, la tutora o el tutor cerrará el foro y hará un resumen, basándose en sus discusiones, en la clase escrita, pero también incluyendo conceptos nuevos. **Les recomendamos que tomen nota de estas cuestiones.**

El Álgebra en la Escuela Secundaria

Con la intención de comenzar a caracterizar la práctica algebraica, desarrollaremos diferentes tipos de problemas que implican distintas tareas que son inherentes a ella.

Antes de comenzar con el desarrollo de los ejemplos, nos interesa destacar que todas estas tareas pueden elaborarse y cobrar sentido en la medida en que las y los estudiantes se vean involucrados en la resolución de problemas y reflexionen a propósito de ellos, participando de debates gestionados por la o el docente. En cuanto al enfoque didáctico, los análisis consideran que lo algebraico no se reduce a transformaciones u operatorias rutinarias. En este sentido, y con el objetivo de ampliar la mirada respecto a cómo se concibe habitualmente al trabajo algebraico, recuperamos algunas ideas de una referente en el tema, Carmen Sessa:

> Cuando pensamos el álgebra, a propósito del aprendizaje escolar, la concebimos como un conjunto de prácticas asociadas a un espacio de problemas que se constituyen a partir de un conjunto de conceptos con sus propiedades. Prácticas que se inscriben -y se escriben- en un determinado lenguaje simbólico, con leyes de tratamiento específicas que rigen la configuración de un conjunto de técnicas. Todos estos elementos complejos -problemas, objetos, propiedades, lenguaje simbólico, leyes de transformación de las escrituras, técnicas de resolución- producen un “entramado” que configura el *trabajo algebraico*.
>
> (...)
>
> Hay quienes afirman que estos aspectos del trabajo algebraico son muy difíciles de instalar en la escuela porque necesitan de una *destreza operatoria previa que los alumnos no poseen*.
>
> Por el contrario, nosotros sostenemos que es *a través* de estas prácticas que se va comprendiendo el sentido de la operatoria algebraica y, a medida que éste va siendo atrapado, permite la adquisición de herramientas de control que son imprescindibles para lograr autonomía en el desempeño de los estudiantes. La interrelación entre la actividad modelizadora del álgebra y el aprendizaje y el manejo de las técnicas constituye un punto clave en el dominio del álgebra.
>
> Sessa C. (2005).

A continuación, desarrollaremos tres ejemplos que buscan describir algunos aspectos de la práctica algebraica.

La lectura de expresiones y las ecuaciones

Es habitual en la escuela el trabajo con ecuaciones que se resuelven, en general, mediante manipulaciones algebraicas o con "pasajes de términos".

Por ejemplo, analicemos el siguiente procedimiento para obtener el conjunto solución de la ecuación $\frac{3x+15}{x+5} = 3$

$$\begin{gathered}\frac{3x+15}{x+5} = 3 \\ 3x + 15 = 3 \cdot (x + 5) \\ 3x + 15 = 3x + 15 \\ 3x - 3x = 15 - 15 \\ 0 = 0\end{gathered}$$

Llegado este paso algunos estudiantes determinan que la solución es únicamente el número cero o no saben cómo obtenerla a partir de la última línea del desarrollo, la desorientación viene asociada por no disponer del clásico $x = \ldots\ldots$ que usualmente contribuye para determinar la solución de la ecuación. El ejemplo que estamos estudiando muestra que los procedimientos habituales se muestran insuficientes para resolver este tipo de ecuaciones.

Sin embargo, existen estrategias que pueden resultar convenientes para el trabajo con ecuaciones. Por ejemplo, al intentar leer la información que brinda la ecuación, se puede observar que el numerador es el triple del denominador para cualquier valor de la variable. Por lo cual, en un primer momento, se puede determinar que para cualquier valor posible de la variable el resultado será siempre 3. Este reconocimiento de las expresiones algebraicas involucradas en la ecuación permite anticipar cuál puede ser la solución del problema. Será la/el docente quien recupere o muestre estos razonamientos con el objetivo de promover y oficializar un tipo de trabajo sobre lo simbólico que requiere leer antes de manipular de manera automática. De igual importancia será para una clase dar lugar a la discusión y el debate respecto de los posibles valores que puede tomar la variable en la expresión $\frac{3x+15}{x+5}$ para descartar el valor -5. De esta manera, se podrá afirmar que el numerador es el triple del denominador para todo valor diferente de -5, obteniendo un cociente de 3.

Será interesante también poner en relación distintas estrategias de resolución de este tipo de ecuaciones. A modo de ejemplo mostramos dos procedimientos posibles con el propósito de delinear algunas ideas.

- *Poniendo en juego una simplificación:* $\frac{3x+15}{x+5} = 3 \Leftrightarrow \frac{3(x+5)}{x+5} = 3$. Para poder avanzar en la simplificación de la expresión se debe tener en cuenta que solo es posible siempre que $x \neq -5$, pues no está definida la división por cero. Al simplificar las expresiones obtenemos $3 = 3 \; si \; x \neq -5$. Muchas veces los estudiantes se sienten desorientados al escuchar al docente que afirmar que $3 = 3 \; si \; x \neq -5$ es una ecuación, más aún, una ecuación que tiene el mismo conjunto solución a la inicial (ecuación equivalente) cuya solución está formada por todos los números reales salvo el -5. La poca claridad respecto a la ecuación resultante luego de simplificar puede provenir de pensar que "no hay una letra como variable" involucrada. Será el docente el encargado de abrir el debate respecto a esta ecuación y acompañar a los estudiantes para acordar una significación que sea funcional al problema.
- *Poniendo en juego la propiedad uniforme:* $\frac{3x+15}{x+5} = 3 \Leftrightarrow \frac{3x+15}{x+5} \cdot (x+5) = 3 \cdot (x+5)$ si $x + 5 \neq 0$. Luego, $3x + 15 = 3(x+5) \; si \; x \neq -5$ y $3x + 15 = 3x + 15$ si $x \neq -5$. A partir de la última ecuación se puede leer que para cualquier valor que tome la variable se obtiene el mismo número en ambos lados de la igualdad, por lo tanto, cualquier valor real es solución de la ecuación excepto el -5.

Más allá de los aspectos matemáticos para tener en cuenta (cuándo es posible simplificar o cómo utilizar la propiedad uniforme), nos parece relevante recuperar también en estos dos procedimientos la idea de **detenerse a leer e interpretar las expresiones y la igualdad** que están implicadas para dar una respuesta adecuada al problema.

Por otro lado, la posibilidad de pensar y discutir un problema desde diferentes estrategias de resolución permite avanzar en la idea de que es a través de las prácticas que se van entendiendo las transformaciones algebraicas y se puede conseguir mayor control y autonomía en el quehacer propio del álgebra.

ACTIVIDAD 2 - sin entrega

Teniendo de referencia lo desarrollado a partir de la ecuación $\frac{3x+15}{x+5} = 3$, analicen qué ocurre con las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x+15}{x+5} = 4$

b) $\frac{3x+15}{x+5} = 0$

A partir del ejemplo desarrollado y las ecuaciones propuestas en la actividad 2, nos parece interesante recuperar las palabras de un investigador distinguido en Didáctica de la Matemática que reflexiona en torno a la enseñanza del álgebra escolar.

Esta idea la pone de manifiesto Arcavi (1994) en su artículo "Sentido del símbolo: crear sentido informal en las matemáticas formales". El autor describe determinadas conductas que cree que contribuyen a la construcción del sentido del símbolo. A propósito de una de ellas, "LEER Y MANIPULAR", afirma que *la inspección de los símbolos que se realiza a-priori con la expectativa de poder imaginar y lograr un sentido del problema y de su significado es otro ejemplo del sentido del símbolo".*

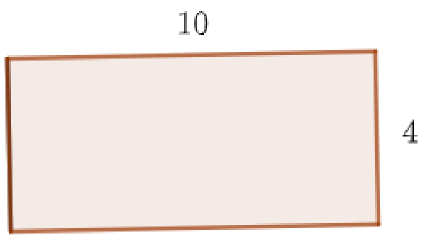
El problema del rectángulo

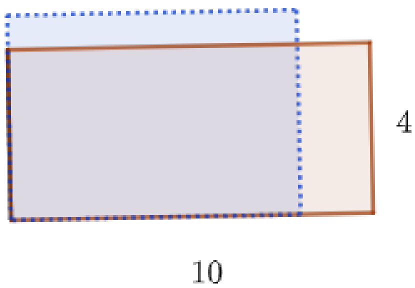
Les proponemos considerar el siguiente problema con el objetivo de analizar otros tipos de prácticas algebraicas.

Supongamos que tenemos un rectángulo. ¿Qué le sucederá a su área si una de sus dimensiones aumenta en un 20% y la otra disminuye en un 20%?

Una primera idea intuitiva que puede surgir por parte de las y los estudiantes es que no se modifica el área a partir de pensar que los cambios de las longitudes se "compensan". Otros podrán pensar que la variación del área depende de cuál es la medida que aumenta y cuál es la que disminuye.

Es posible que, frente a la falta de otras estrategias, algunos estudiantes realicen una primera exploración con casos particulares a partir de la cual observen que el área del rectángulo disminuye. Por ejemplo, si se considera un rectángulo de dimensiones $10\ cm$ y $4\ cm$ con área de $40\ cm^2$, resulta el nuevo rectángulo azul:

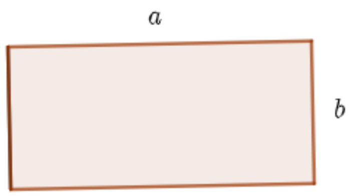




El nuevo rectángulo que resulta de, por ejemplo, aumentar en un 20% la longitud de $4\ cm$ y disminuir la longitud del otro lado, tiene lados de $1{,}2 \cdot 4\ cm = 4{,}8\ cm$ y $0{,}8 \cdot 10\ cm = 8\ cm$ y su área es de $38.4\ cm^2$, que es menor que $40\ cm^2$. De la misma manera se pueden probar con otros casos particulares, pero esto no alcanza para determinar lo que ocurre en el caso general.

El problema plantea la necesidad de buscar otras estrategias que permitan estar seguros de que el área disminuye para cualquier rectángulo de inicio que se considere, y esto solo puede resolverse mediante prácticas vinculadas a lo algebraico. En este caso, la o el docente podrá introducir la posibilidad de utilizar letras para representar de manera general la longitud de los lados del rectángulo.

Si representamos las medidas de los lados mediante las letras a y b, la expresión de su área queda determinada por $a \cdot b$.



Si suponemos que la medida a disminuye en un 20% y que el lado de longitud b aumenta en el mismo porcentaje, queda el nuevo rectángulo con un lado de longitud $0{,}8 \cdot a$ y otro de $1{,}2 \cdot b$.

En este caso, el área queda expresada como $0{,}8 \cdot a \cdot 1{,}2 \cdot b = 0{,}96 \cdot a \cdot b$.

Para poder describir cómo se modifica respecto del área del rectángulo original, será necesario que los estudiantes puedan interpretar o leer de la expresión alguna información, por ejemplo, que el área del nuevo rectángulo es 0,96 la del rectángulo inicial. La lectura y análisis de la relación entre las áreas no necesariamente será inmediata. Seguramente, si el factor que multiplica a $a \cdot b$ hubiese sido 2 o 3, la mayoría de los y las estudiantes no dudaría en decir que el área aumentó y que es el doble o el triple de la anterior. Sin embargo, comprender que el área disminuye implica comprender que al multiplicarla por un número menor a 1 se obtiene un valor menor que el original. Por otro lado, analizar que $0{,}96 \cdot a \cdot b = \frac{96}{100} \cdot a \cdot b$ permite “leer” que el área del segundo rectángulo es un 96% del área del inicial, es decir que su área disminuyó en un 4%.

Otra cuestión que se puede observar de la fórmula obtenida es que este cambio no depende de cuál de las longitudes disminuye y cual aumenta ni de los valores de a y de b. Será necesario un espacio de reflexión sobre estas cuestiones, ya que contradice la primera intuición que anticipamos inicialmente. En este sentido, el trabajo en torno a las expresiones algebraicas que representan el área del rectángulo original y la del nuevo rectángulo brindan la posibilidad de leer e interpretar en ellas información que permite avanzar con el análisis de la situación planteada. Esta idea de lectura o interpretación de expresiones favorece una mirada del Álgebra como herramienta para entender, expresar y comunicar generalizaciones, pero requerirá de un docente que acompañe y diseñe situaciones en donde la lectura de expresiones sea un medio potente para dar respuesta a los problemas y sea legitimado en la clase como un tipo válido de razonamiento.

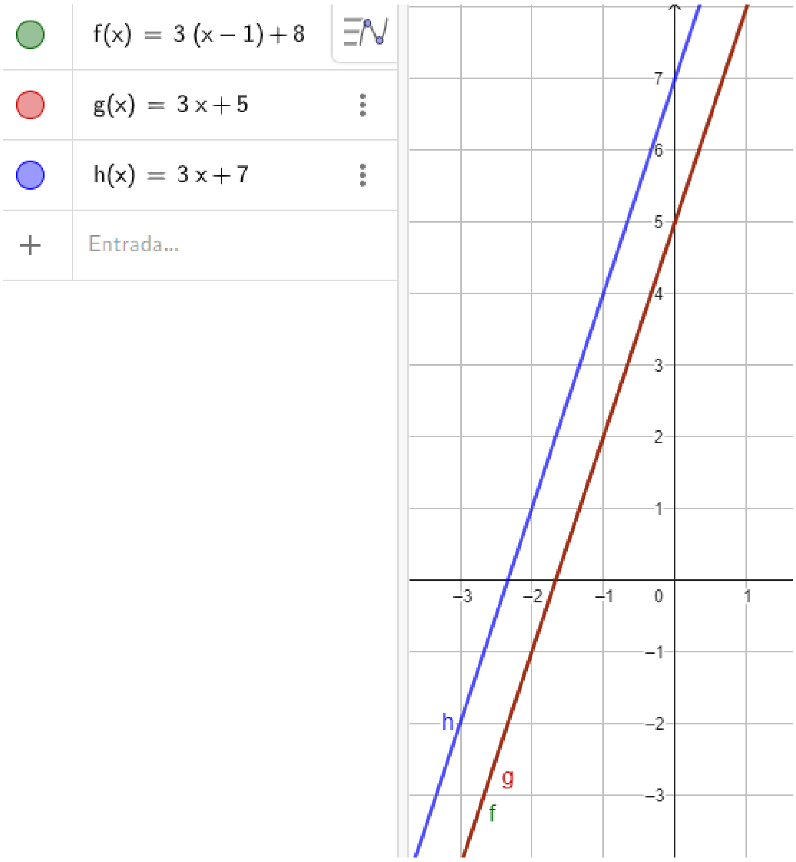
El problema de comparar dos funciones

A continuación, mostramos un ejemplo que ilustra otro tipo de trabajo algebraico que creemos que puede vivir en la Escuela Secundaria. Resulta importante para el análisis contextualizar el problema en función de los conocimientos que supone disponibles en las y los estudiantes. En este caso, lo ubicamos dentro del trabajo con Funciones en General en el Ciclo Básico, donde todavía no se caracterizaron a las funciones elementales, tales como la lineal, la cuadrática, etc.

El enunciado del problema es el siguiente:

> Decidan cuál o cuáles de las siguientes fórmulas definen la misma función con dominio el conjunto de los números reales.
>
> $f(x) = 3(x-1)+8$ $\quad g(x) = 3x+5$ $\quad h(x) = 3x+7$

Una posible estrategia de resolución que se podría anticipar consiste en que las y los estudiantes grafiquen las tres funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos para luego compararlos. En caso de disponer de algún graficador será razonable habilitar su uso, ya que el foco del problema no está puesto en la elaboración de los gráficos.



Al observar los gráficos obtenidos los estudiantes seguramente podrán afirmar que la fórmula de h no define la misma función que f y g porque se “ven distintos”. Por otro lado, parecería que los gráficos de f y g se encuentran superpuestos –o son el mismo–, lo cual da indicios de que se podría tratar de la misma función.

Otra estrategia para considerar puede ser, por ejemplo, la evaluación de las fórmulas para distintos valores de la variable. Por ejemplo, si $x = 0$, resulta que $f(0) = 3(0 - 1) + 8 = 5$; $g(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5$ y $h(0) = 3 \cdot 0 + 7 = 7$. Estos resultados permiten afirmar que la fórmula de h define una función diferente a las dos primeras ya que al evaluarla en cero se obtiene un valor distinto.

Tanto en el abordaje mediante gráficos como en la evaluación de las fórmulas se encuentra implícita la idea de qué significa que dos funciones sean iguales. A partir del trabajo con esta actividad se puede avanzar con esta definición para acordar que dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio y para cada elemento se obtiene la misma imagen a través de cada una de las funciones. A nivel gráfico, esto tiene como consecuencia que sus representaciones deben superponerse en todo el dominio.

Es así como para avanzar en la comparación de las funciones que definen las fórmulas f y g será necesario encontrar argumentos que trasciendan la superposición de los gráficos o la evaluación en algunos valores particulares, ya que estos casos ponen en juego solamente un subconjunto del dominio, razón por la cual surge la necesidad de comparar ambas fórmulas para todo $x \in R$. Para ello, describiremos dos formas posibles que ponen en juego ideas potentes del trabajo algebraico, como el uso de algunas propiedades propias de las operaciones, como la propiedad distributiva.

- A partir de la fórmula de f, aplicando la propiedad distributiva y operando es posible obtener la fórmula de g: $f(x) = 3 \cdot (x - 1) + 8 = 3x - 3 + 8 = 3x + 5 = g(x)$ para todo $x \in R$
- A partir de la fórmula de g también es posible obtener la fórmula de f, aunque se trata de una estrategia un poco más difícil ya que, si bien las manipulaciones puestas en juego son válidas, apelan a cierto dominio del trabajo con transformaciones: $g(x) = 3x + 5 = 3x - 3 + 3 + 5 = 3(x - 1) + 8 = f(x)$ para todo $x \in R$

En este caso, las transformaciones permiten construir la idea de que dos fórmulas son equivalentes si una puede transformarse en la otra a partir del uso de propiedades de las operaciones. A su vez, esta práctica otorga un sentido a la manipulación de expresiones.

Este problema puede ser una oportunidad para oficializar algunos conocimientos que han sido útiles, darles entidad en el trabajo matemático, como, por ejemplo, qué significa que dos funciones sean iguales o reflexionar acerca de que si se suma y resta un mismo número se obtienen fórmulas equivalentes, entre otras.

Muchos estudiantes de la Escuela Secundaria son exitosos en las manipulaciones simbólicas sin embargo es sabido que no siempre logran ver al Álgebra como una herramienta para comprender, comunicar generalizaciones, para relevar estructuras, para establecer relaciones y para formular pruebas matemáticas.
La clase de Matemática debe brindar oportunidades a los estudiantes para poder no solo aprender a trabajar con transformaciones simbólicas sino también poder

evaluar cuando es pertinente recurrir a ellas y cuando no, tener la posibilidad de leer a través de las expresiones, así como abstraer, generalizar y planear diferentes estrategias de resolución para los problemas.

Reflexiones finales

Recapitulando lo realizado en la clase, podemos mencionar que desarrollamos el análisis de tres problemas que buscan robustecer el trabajo en torno a lo algebraico y avanzan en la idea de caracterizar el álgebra escolar más allá de las manipulaciones algebraicas que muchas veces se aprenden de manera rutinaria y desprovistas de problemas que contribuyan a la apropiación con sentido para los estudiantes.

En la siguiente clase ampliaremos un poco más nuestra "caja de herramientas" para trabajar con lo algebraico en el aula. Mientras tanto, los invitamos a participar del foro de debate de la clase 1.

ACTIVIDAD 3 (OBLIGATORIA)

Participación en el foro de debate de la clase 1

En este foro las y los vamos a invitar a participar con una consigna que puede resultar novedosa para muchos de ustedes. Sabemos que los momentos en los que pueden participar de los foros varían de acuerdo con sus actividades, así que lo dividimos en dos partes: **cuando participen durante la primera semana de la clase deberán respetar la primera consigna; y para cuando lo hagan a partir de la segunda semana de clase deberán responder a la segunda consigna.**

<u>**Consigna para la primera semana**</u>

Consideren el siguiente problema y propongan una resolución que suponen que podrían hacer las y los estudiantes de Escuela Secundaria a propósito de él:

¿Es cierto que siempre que se suman tres números naturales consecutivos se obtiene como resultado un múltiplo de 3? Expliquen su respuesta.

Consigna de participación para la segunda semana

Les proponemos que lean desde la página 60 hasta la 64 del siguiente artículo de Abraham Arcavi del Instituto Weitzman de Israel llamado "El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos".

Disponible en el siguiente enlace:

https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2022/04/ARCAVI-2007.-Revista-UNO.-El-desarrollo-y-el-uso-del-sentido-de-los-simbolos.pdf

Luego elijan una resolución que haya compartido un colega en la primera parte de este foro y pónganla en relación con el abordaje que se hace de ese problema con el texto de Arcavi.

Actividades

ACTIVIDAD 1

Participación en el foro de presentación y bienvenida

Para empezar a conocernos, los invitamos a realizar una breve presentación. Dada la diversidad de lugares y formaciones de los cursantes de este módulo, puede resultar sumamente interesante que compartan algunos detalles sobre su experiencia docente, su lugar de trabajo, en dónde viven y si ya tuvieron experiencia en formación virtual.

También les proponemos que compartan sus impresiones respecto a esta pregunta, que será nuestro hilo conductor a lo largo de todo el recorrido:

¿Qué consideran prioritario en la enseñanza del Álgebra en la Escuela Secundaria? ¿Qué tipos de tareas y problemas proponen para que resuelvan las y los estudiantes?

ACTIVIDAD 2 - sin entrega

Teniendo de referencia lo desarrollado a partir de la ecuación

$\frac{3x+15}{x+5} = 3$, analicen qué ocurre con las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x+15}{x+5} = 4$

b) $\frac{3x+15}{x+5} = 0$

ACTIVIDAD 3 (OBLIGATORIA)

Participación en el foro de debate de la clase 1

En este foro las y los vamos a invitar a participar con una consigna que puede resultar novedosa para muchos de ustedes. Sabemos que los momentos en los que pueden participar de los foros varían de acuerdo con sus actividades, así que lo dividimos en dos partes: **cuando participen durante la primera semana de la clase deberán respetar la primera consigna; y para cuando lo hagan a partir de la segunda semana de clase deberán responder a la segunda consigna.**

Consigna para la primera semana

Consideren el siguiente problema y propongan una resolución que suponen que podrían hacer las y los estudiantes de Escuela Secundaria a propósito de él:

¿Es cierto que siempre que se suman tres números naturales consecutivos se obtiene como resultado un múltiplo de 3? Expliquen su respuesta.

Consigna de participación para la segunda semana

Les proponemos que lean desde la página 60 hasta la 64 del siguiente artículo de Abraham Arcavi del Instituto de Israel llamado “El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos”.

Disponible en el siguiente enlace:

https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2022/04/ARCAVI-2007.-Revista-UNO.-El-desarrollo-y-el-uso-del-sentido-de-los-simbolos.pdf

Luego elijan una resolución que haya compartido un colega en la primera parte de este foro y pongan en relación el abordaje que se hace de ese problema con el texto de Arcavi.

Material de lectura

Materiales de lectura obligatoria

Arcavi, A. (1994). *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics*, 14 (3), 60-64.

Bibliografía de referencia

Arcavi, A. (1994). *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics*, 14 (3).

Barallobres, G. (2000). Algunos elementos de la didáctica del álgebra, UVQ.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.* (7.2), 5-32. Editions La Pensée Sauvage: París, Francia. (Traducido al castellano, "Relación enseñanza - aprendizaje, dialéctica instrumento - objeto y juego de marcos").

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernardz et al. (Eds.), Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Créditos

Autores: Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2023). Clase Nro. 1: El álgebra en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 2: La transición aritmética - álgebra

Introducción a la clase

Durante la primera clase estuvimos desarrollando, a partir de la consideración de algunos ejemplos, aspectos del trabajo algebraico que sirven para enriquecer y ampliar la mirada respecto a su enseñanza. Durante esta segunda clase nos dedicaremos a reflexionar acerca de una entrada al álgebra y cuáles son los aspectos fundamentales que las y los profesores pueden tener en cuenta para acompañar a sus estudiantes en el inicio del trabajo algebraico.

Recordemos que, según los diferentes lineamientos curriculares, la entrada al álgebra está programada para los primeros años de la Escuela Secundaria, aunque muchas veces los y las docentes buscan adelantarla a partir de un trabajo con ecuaciones como una entrada posible, lo que no es recomendado desde los diferentes diseños curriculares de nuestro país. La entrada al mundo algebraico se puede pensar como un proceso que involucra varios años de la escolaridad y requiere atravesar rupturas y muestra continuidades con el trabajo que vienen desarrollando las y los estudiantes en la Escuela Primaria, al mismo tiempo que demanda el trabajo con diferentes tipos de problemas.

Nos parece oportuno apuntar que diversas investigaciones vinculadas a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar identifican que se puede desarrollar un tipo de práctica en torno a la aritmética que se puede constituir como un punto de apoyo para que los estudiantes se inicien en el trabajo algebraico. Ahora bien, nos interesa en esta clase dar algunas precisiones acerca de cuáles son las características que tiene esta práctica que permite avanzar en la iniciación de un tratamiento algebraico de lo numérico y también mostrar cómo recuperarlo a partir de un problema que incluye el uso de letras como variables.

La entrada al álgebra y su enseñanza

En primer lugar, nos parece importante señalar que resulta posible se puede trazar un recorrido de enseñanza que tome como punto de partida a las expresiones numéricas, a las fórmulas trabajadas en la escuela primaria y su producción para promover y hacer avanzar algunas ideas troncales del álgebra. Entre ellas, la noción del signo igual como relación equivalencia y el trabajo con las representaciones o, más precisamente, las diferentes escrituras numéricas. A continuación, ampliaremos estas ideas y estableceremos relaciones con la práctica escolar.

La resignificación del signo igual

En la Aritmética predomina un uso del signo igual como anuncio del resultado de una cuenta, por ejemplo $8 + 7 = 15$. Sin embargo, esta concepción del signo no resulta del todo útil para interpretar y resolver una ecuación como $2x + 3 = 5x - 1$ ni para dar sentido a la escritura $f(x) = 2x + 1$. Aunque la igualdad es una relación de equivalencia (es decir que cumple con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva), no lo es durante su aprendizaje.

Nos resulta interesante destacar estos diferentes usos del signo igual para poder describir una ruptura necesaria de ser transitada para adentrarse en el trabajo algebraico. El signo igual como anuncio de un resultado debe cambiar su "estatus" y evolucionar hacía la idea de equivalencia para dar lugar a la conceptualización de los nuevos objetos del álgebra.

> En adelante, a las escrituras del tipo $8 + 5 \cdot 7$ ó $2 \cdot 17$ las llamaremos **expresiones numéricas** y no cálculos para comenzar a reconocer este tipo de expresiones cómo objeto de estudio y no cómo algo a resolver.

Las expresiones numéricas y el Álgebra

El trabajo con diferentes representaciones numéricas resulta necesario para poder poner de relieve las distintas relaciones que se buscan estudiar. Al expresar el número 102 en su desarrollo decimal queda encubierta, por ejemplo, la propiedad de ser múltiplo de 17, cuestión que no ocurre si representamos a este mismo número como $17 \cdot 6$. Es habitual interpretar este asunto en términos de la información que porta el cálculo, por ejemplo, se puede concebir que el número $17 \cdot 6$ es múltiplo de 17 sin necesidad de resolver el cálculo. Otras representaciones del 102, por ejemplo $34 \cdot 3$ permiten establecer otras características de este número. Nos resulta interesante para avanzar en el tratamiento algebraico, comprender que la cadena de igualdades $17 \cdot 2 \cdot 3 = 17 \cdot 6 = 102$ está asociada a la idea de equivalencia y que el uso de una u otra expresión quede supeditada por la conveniencia según el problema a resolver. Así pues, si el problema consiste en decidir si 102 es o no múltiplo de 17, será relevante expresar que $102 = 17 \cdot 6$. En cambio, si el problema requiere buscar divisores de 102, será más conveniente partir de la expresión $17 \cdot 3 \cdot 2$. Por supuesto que advertir cuál es la escritura más conveniente debería ser un objeto de la enseñanza, y requiere problematizar la cuestión a partir de un conjunto de problemas y debates en torno a ellos.

Resulta entonces necesario que los docentes tengamos presente estos asuntos ya que involucran un trabajo sobre las descomposiciones y la lectura de información en expresiones numéricas, aspecto que podrá estar luego disponible también para interpretar expresiones algebraicas.

Problemas para el inicio al trabajo algebraico en el contexto de la divisibilidad

Diversos documentos curriculares, libros de texto e investigaciones hacen referencia a la potencialidad que presentan las relaciones en el contexto de la divisibilidad entre números naturales para hacer avanzar hacia un tipo de prácticas que pone la mirada en lo estructural, en la información que porta una expresión y en las diferentes expresiones numéricas.

En el inicio de la Escuela Secundaria podemos suponer que los estudiantes poseen saberes en relación con la multiplicación y la división asociadas a un campo de problemas característicos del Nivel Primario. El tipo de problema que queremos ilustrar en este apartado permite recuperar estos saberes y los pone al servicio de las nociones de múltiplo y divisor de un número natural. Se espera realizar un tratamiento de expresiones numéricas con la mirada puesta en la información que se puede extraer de ellas.

ACTIVIDAD OBLIGATORIA

Participación en el foro de la clase 2

El siguiente problema recupera algunas ideas vinculadas con múltiplos y divisores. Al impedir que se realicen los cálculos para responder exige la puesta en marcha de estrategias que no están vinculadas con lo aritmético. Les proponemos resolver el problema y anticipar de qué manera se podría organizar su implementación en el aula de modo que se recuperen conocimientos aritméticos y se promueva un tipo de trabajo característico del ámbito algebraico.

Les proponemos entonces que, además de resolver el problema y anticipar posibles estrategias de resolución que podrían llevar a cabo las y los estudiantes, tomen nota de las consideraciones para el trabajo en el aula sobre las que les sugerimos reflexionar en el párrafo anterior y las compartan en el foro, poniéndolas en relación con las que comparten con sus colegas.

Problema 1

Sin resolver los cálculos, indiquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. $28 \cdot 30 \cdot 11 = 77 \cdot 5 \cdot 12$

b. El resto de dividir 3665 por 7 es 4.

Recuerden que en los foros pueden establecer debates sobre las intervenciones, hacer preguntas a sus colegas y estar atentos a no repetir ideas que ya fueron mencionadas anteriormente. Esto es con la intención de que el diálogo sea lo más fluido posible.

Sobre el problema y el tipo de trabajo que promueve

Como todos ustedes ya saben, la resolución de este tipo de tarea requiere manejar ciertas ideas propias de la Matemática en donde una afirmación es verdadera si se verifica para todo el conjunto de casos implicados y no alcanza con exhibir un caso en donde se cumple para justificar su veracidad. Para argumentar es necesario elaborar una explicación que, en general, ponga en juego propiedades matemáticas. Por el contrario, para justificar que una afirmación es falsa se puede recurrir al uso de relaciones o propiedades matemáticas, pero, además, en ocasiones y dependiendo de la afirmación, alcanza con mostrar un contraejemplo, es decir, un caso particular en donde la afirmación no se cumple.

La consigna del problema incorpora una variable didáctica propia del tipo de trabajo que se espera desplegar "Sin resolver los cálculos". Esta cuestión es bastante antinatural para los estudiantes y en consecuencia en un primer momento se resisten a esta condición: las estrategias que eran válidas ya no lo son. Es así como aceptar esta indicación de la consigna les exige transitar una ruptura necesaria para adentrarse en la práctica algebraica. Por ejemplo, para decidir si $4 \cdot 26 = 8 \cdot 13$ es una afirmación verdadera o falsa utilizando cálculos alcanza con resolver a cada lado del igual y comparar los resultados. No obstante, si respetamos la restricción de la consigna esta estrategia queda inhibida y será necesario que se activen otros razonamientos para argumentar. Una estrategia posible puede ser explicitar que como 4 es la mitad de 8 y 26 el doble de 13 esta cuestión hace que las dos expresiones refieren al mismo número. Otra posibilidad puede ser manipulando ambas expresiones $4 \cdot 26 = 4 \cdot 2 \cdot 13$ y por otro lado $8 \cdot 13 = 4 \cdot 2 \cdot 13$ como ambas expresiones son equivalentes la misma expresión, por propiedad transitiva, son equivalentes entre sí. Nos resulta interesante también mencionar una estrategia ligada a la descomposición de número primos que ponen en juego el Teorema Fundamental de la Aritmética, es decir que todo número entero se puede descomponer de manera única como potencias de números primos. En este caso, si los estudiantes descomponen cada una de las expresiones numéricas en factores primos, y resultan equivalentes, entonces se trata del mismo número. Esta última estrategia, aunque correcta, resulta más hermética puesto que los estudiantes no tienen que analizar qué transformación es conviene usar o cuál es la expresión numérica más adecuada para comparar. Es así como la toma de decisiones se reduce al trabajo de factorizar en primos e identificar si se llega o no a la misma descomposición.

Las manipulaciones o transformaciones de las expresiones en este tipo de problemas, en general, están atravesadas por un proyecto o plan del estudiante, es decir, en el ejemplo anterior las transformaciones sirven para estudiar si dos expresiones son equivalentes entre sí. Asimismo, es importante que las y los estudiantes tengan conciencia o puedan verbalizar el objetivo, ya que puede ser un punto de apoyo para orientar las transformaciones y la toma de decisiones. Esta es una diferencia notoria con respecto a la enseñanza tradicional en donde se les propone a los estudiantes aprender las transformaciones como un conjunto de reglas rutinarias y desprovistas de un problema que permita atribuirles sentido.

Para **el primer ítem** los estudiantes podrían estar tentados de resolver los cálculos, aunque el enunciado lo inhiba, y detectar que no dan el mismo resultado, aspecto por el cuál podrán definir que la afirmación es falsa. Sin embargo, se espera que, como parte del contrato de la clase, no se acepten justificaciones ancladas en los cálculos y se promueva la búsqueda de otro tipo de razonamientos que den sustento a la falsedad de la afirmación. Una opción es descomponer ambas expresiones y compararlas y otra puede ser tomar una de las expresiones y transformarla hasta obtener una expresión comparable con la otra. Veamos como resulta en este último caso. Tomando la expresión de la derecha, se tiene que $28 \cdot 30 \cdot 11 = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 11$ y la de la izquierda $77 \cdot 5 \cdot 12 = 7 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ Estas descomposiciones permiten detectar factores en común (4, 5, 11 y 7) y factores que no son comunes, en la derecha 6 y en la izquierda 3. Una alternativa puede ser argumentar, por ejemplo, que el término de la izquierda es el doble que el de la derecha teniendo en cuenta los factores no comunes. Para la segunda estrategia propuesta, tenemos que $28 \cdot 30 \cdot 11 = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 11 = 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 = 154 \cdot 5 \cdot 12$. Esta última expresión se puede comparar fácilmente con la de la izquierda ya que tiene los dos últimos factores (5 y 12) iguales y el primero diferente (154 y 77), por lo cual se puede afirmar que los resultados de esas multiplicaciones difieren. De esta última estrategia se puede visualizar que las transformaciones llevadas a cabo en la expresión $28 \cdot 30 \cdot 11$ fueron desarrolladas con el propósito de obtener los factores comunes y no comunes de manera que permita comparar ambas expresiones.

Finalmente, con respecto **al ítem b)** los estudiantes podrán optar por buscar el múltiplo de 7 más cercano a 3665, en este caso se puede ir aproximando con multiplicaciones hasta identificar que el múltiplo menor más próximo a 3665 que es $7 \cdot 523 = 3361$. Es decir que es conveniente expresar a 3665 como $7 \cdot 523 + 4$ estructura que se vincula con el algoritmo de la división y permite interpretar que 4 es el resto de la división de 3665 por 7, asunto que permitirá argumentar que la afirmación es verdadera. A diferencia con el ítem anterior, si los estudiantes resuelven la división entre 3665 y 7 mediante el algoritmo tradicional, podrán encontrar que el resto es 4 y esto les servirá para decidir que la afirmación es verdadera. Sin embargo, para argumentar tendrán que organizar un discurso a partir de sus conocimientos sobre cálculo. Por ejemplo, para construir una validación adecuada pueden recurrir a su repertorio de cálculo para aproximar al 3665 por múltiplos de 7 que sean parte de su repertorio, una posibilidad es $3500 + 140 + 21 + 4$ en donde se puede ver que los tres primeros sumandos son múltiplos de 7 y el último no, al tratarse este último un número menor a 7 se puede afirmar que es el resto de la división por 7. Una posibilidad es seguir trabajando con esta descomposición de forma de poner en relación con la estrategia antes mencionada y de esa manera profundizar las relaciones que se esperan analizar y otorgarle así un sentido a las transformaciones , es posible por ejemplo, $3500 + 140 + 21 + 4 = 7 \cdot 500 + 7 \cdot 20 + 7 \cdot 3 + 4 = 7 \cdot 523 + 4$ en donde la última transformación se puede apoyar en la idea de cantidad de veces, es decir, si tenemos $7 \cdot 500$ podemos pensar que tenemos 500 veces 7 y $7 \cdot 20$ serían 20 veces 7 por lo cual $7 \cdot 500 + 7 \cdot 20$ serían en total 520 veces 7 que se puede representar con $7 \cdot 520$. Es esencial que los docentes focalicemos en las escrituras y lectura de expresiones numéricas para que los estudiantes puedan decidir qué transformaciones son convenientes para resolver, puedan comunicar las relaciones que están poniendo en juego y usarlas para producir argumentaciones. De este modo, el tipo de práctica que se promueve no queda reducido a identificar el valor de verdad de la afirmación.

El problema que hemos analizado busca ilustrar un espacio de trabajo fértil para que las y los estudiantes pongan la mirada en las expresiones numéricas para validar o argumentar acerca de diferentes asuntos matemáticos vinculados con la idea de ser múltiplo o divisor de un cierto número.

En este sentido se inicia un proceso en donde la lectura y escritura de este tipo de expresiones numéricas cumple un rol fundamental, al mismo tiempo que lo son el trabajo con diversas expresiones numéricas para que construyan diferentes niveles de lectura de las expresiones numéricas que luego estarán disponibles para el trabajo con expresiones algebraicas.

Es necesario también realizar un trabajo planificado para comenzar a incluir a la letra como variable. En lo que sigue, mostraremos un problema que lo aborda y se adentra también en el trabajo con expresiones que involucran variables.

Nos detenemos a pensar un problema

A diferencia de la actividad anterior, en donde les solicitamos que participen en un foro de análisis didáctico del Problema 1, en este apartado les vamos a proponer que resuelvan y reflexionen en torno a cuestiones didácticas que estuvimos estudiando en el transcurso de estas primeras dos clases, pero esta vez teniendo en cuenta el Problema 2, que compartimos a continuación.

No esperamos que compartan sus resoluciones y opiniones en un foro, sino que tomen apuntes de aquellas cuestiones que consideren importantes a propósito de estos asuntos. Esta actividad no debe ser entregada a los tutores y la intención es que les sirva como insumo para la elaboración del Trabajo Final.

Problema 2

Si n representa un número natural, indicá si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: $13n + 27$ tiene resto 1 al ser dividido por 13.

Sobre el problema y el tipo de trabajo que promueve

Para resolver este problema, es habitual que los estudiantes reemplacen la letra por diferentes valores para estudiar la expresión numérica que se obtiene. Por ejemplo, si n toma el valor 50, la expresión que hay que estudiar es $13 \cdot 50 + 27$. Podrán resolver el cálculo y estudiar su resto en la división por 13 para verificar que efectivamente es 1 y repetir esta idea para diferentes valores de n. Sin embargo, sea cuál fuera el conjunto de valores de n explorados, no alcanza para decidir que la afirmación es verdadera para *cualquier* valor de n . Es por esta razón que resulta conveniente trabajar con las expresiones numéricas recuperando las ideas tratadas en el problema anterior. Por ejemplo, para explicar por qué $13 \cdot 50 + 27$ tiene resto 1 en la división por 13, puede ser útil transformar la expresión en $13 \cdot 50 + 13 + 13 + 1$ nuevamente se presenta una descomposición aditiva de múltiplos de 13 y al final un 1, es decir, un número menor a 13. Aquí, como ya mencionamos antes, se puede deducir que 1 es el resto en la división por 13. Este ejemplo también puede ser una oportunidad para avanzar en el trabajo con transformaciones en el contexto del problema, es decir $13 \cdot 50 + 13 + 13 + 1 = 13 \cdot 52 + 1$ en donde la última expresión permite se puede vincular con el algoritmo de la división. Es así como el cociente de dividir $13 \cdot 52 + 1$ por 13 es 52 y el resto es 1. Nos resulta esencial mencionar que el razonamiento descripto en este caso para $n = 50$ es válido para cualquier valor que tome la variable, razón por la cual permite ser generalizado. En este sentido, podría ser que las y los alumnos estudien un caso para convencerse de que vale para cualquier otro. Podría ser que lo repitan para otros valores y afirmen "y así siguiendo" o que logren hacer una formulación de manera general, $13n + 27 = 13n + 26 + 1 = 13 \cdot (n + 2) + 1$ y analicen que esta descomposición tiene un sumando menor a 13 y los otros sumando son múltiplos de 13 para cualquier valor de la variable, por lo cual el resto es 1 para cualquier valor de n.

Otra alternativa puede ser explorar el cociente y el resto para diferentes valores de n y elaborar alguna conjetura que luego deberá ser validada para cualquier valor de n.

¿Qué concepciones del signo igual creen que aparecen en las diferentes estrategias que se fueron desplegando en los análisis de los problemas?

Actividad 2 - Lectura obligatoria - Actividad sin entrega

Para comenzar a pensar en torno a la entrada al álgebra en relación con la aritmética, les proponemos la lectura de las páginas 15 a 23 del artículo: "Una entrada al álgebra en vínculo con la aritmética. Grupo Lunes. Revista Urania. Número 12. (pág. 15 - 23)". Disponible en Material de estudio

Este artículo resulta interesante para poner en relación con lo que se estuvo tratando en la clase y para avanzar hacia cuestiones que abordaremos en las próximas. Nuevamente, recomendamos la toma de apuntes para ir recopilando citas que pueden agilizar la elaboración del Trabajo Práctico Final.

También consideramos que es enriquecedor vincularlo con los relatos que hacen los participantes en la actividad de profundización que presentamos a continuación.

Para profundizar - Actividad sin entrega

Les sugerimos, con la intención de seguir adentrándonos en los temas trabajados a lo largo de esta clase, que miren el siguiente video.

En él, “El grupo de los lunes”, un grupo colaborativo conformado por diversos autores (docentes en ejercicio, investigadores y autores) se reúnen para pensar cuestiones relacionadas con la Didáctica de la Matemática y sus problemáticas. En este caso particular, la presentación se realizó en el marco de jornadas de la Universidad Universidad Pedagógica Nacional y Carmen Sessa es quien realiza una introducción para luego realizar dar paso a la presentación de los participantes. El tema es justamente el que nos interpela (e interpelará) en esta y en la próxima clase: el vínculo entre el Álgebra y la Aritmética.

https://youtu.be/lZL4vl_rusg

Reflexiones finales

A modo de cierre de esta clase nos interesa destacar la importancia del rol de las y los profesores para que las y los estudiantes puedan construir nuevos sentidos de las expresiones numéricas para luego ser un soporte que permita avanzar en el trabajo con expresiones algebraicas. Buscamos mostrar cómo se pone de manifiesto este vínculo a partir del análisis de dos problemas, en donde el último de ellos incluye una letra como variable y su resolución se apoya en la práctica ejemplificada en el problema anterior.

Actividades

ACTIVIDAD OBLIGATORIA

Participación en el foro de la clase 2

El siguiente problema recupera algunas ideas vinculadas con múltiplos y divisores. Al impedir que se realicen los cálculos para responder exige la puesta en marcha de estrategias que no están vinculadas con lo aritmético. Les proponemos resolver el problema y anticipar de qué manera se podría organizar su implementación en el aula de modo que se recuperen conocimientos aritméticos y se promueva un tipo de trabajo característico del ámbito algebraico.

Les proponemos entonces que, además de resolver el problema y anticipar posibles estrategias de resolución que podrían llevar a cabo las y los estudiantes, tomen nota de las consideraciones para el trabajo en el aula sobre las que les sugerimos reflexionar en el párrafo anterior y las compartan en el foro, poniéndolas en relación con las que comparten con sus colegas.

Problema 1

Sin resolver los cálculos, indiquen si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

c. $28 \cdot 30 \cdot 11 = 77 \cdot 5 \cdot 12$

d. El resto de dividir 3665 por 7 es 4.

LECTURA OBLIGATORIA

Actividad 2 - Sin entrega

Para comenzar a pensar en torno a la entrada al álgebra en relación con la aritmética, les proponemos la lectura de las páginas 15 a 23 del artículo: "Una entrada al álgebra en vínculo con la aritmética. Grupo Lunes. Revista Urania. Número 12. (pp. 15 - 23)". Disponible en Material de estudio

Este artículo resulta interesante para poner en relación con lo que se estuvo tratando en la clase y para avanzar hacia cuestiones que abordaremos en las próximas. Nuevamente, recomendamos la toma de apuntes para ir recopilando citas que pueden agilizar la elaboración del TP Final. También consideramos que es enriquecedor vincularlo con los relatos que hacen los participantes en la actividad de profundización que presentamos a continuación.

Material de lectura

Materiales de lectura obligatoria

Una entrada al álgebra en vínculo con la aritmética. Grupo Lunes. Revista Urania. Número 12. (pp. 15 - 23) disponible en Material de estudio

Bibliografía de referencia

Arcavi, A. (1994). *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. For the Learning of Mathematics*, 14 (3).

Barallobres, G. (2000). Algunos elementos de la didáctica del álgebra, UVQ.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.* (7.2). 5-32. Editions La Pensée Sauvage: París, Francia. (Traducido al castellano, “Relación enseñanza - aprendizaje, dialéctica instrumento - objeto y juego de marcos”).

Mason, J. (1996). *Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernardz et al. (Eds.), Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.*

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Créditos

Autores: Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2023). Clase Nro. 2: La transición aritmética - álgebra. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 3: La transición aritmética álgebra (parte II)

Introducción

Durante las dos primeras clases de este curso estudiamos algunos problemas matemáticos intentando ilustrar algunas características de la práctica algebraica.

En la clase 1 tratamos con problemas que permiten pensar a la actividad algebraica en términos de modelización matemática; en particular, a partir de modelos que exigen de la lectura de expresiones o fórmulas y que, en simultáneo, habilitan un trabajo con las transformaciones algebraicas. En la clase 2 presentamos algunas ideas con relación a continuidades y rupturas que son necesarias atravesar para entrar en el juego algebraico. En ese sentido, las expresiones numéricas toman un rol protagónico, así como la gestión del docente para promover la reflexión en torno a ellas.

En esta tercera clase profundizaremos el análisis en torno a un problema particular, que puede interpretarse como representante de un conjunto de situaciones que apuntan al trabajo con fórmulas para contar colecciones y posibilitarían discutir en clase, por ejemplo, acerca de la noción de fórmulas equivalentes, entre otras cuestiones.

Problemas de conteo de colecciones

El trabajo en torno a problemas que esperamos mostrar en este apartado se asocia con el análisis de regularidades y generalizaciones, poniendo el foco en aquellos que involucran el conteo de elementos en colecciones dadas, entre otras tareas que iremos desarrollando a medida que avancemos en la lectura.

En la Escuela Primaria es habitual trabajar con este tipo de problemas, por ejemplo, el siguiente problema propone el conteo de elementos organizados en configuraciones rectangulares, donde la multiplicación resulta una estrategia destacada para determinar la cantidad de elementos que la constituyen.

Un fotógrafo armó un póster con fotos de los alumnos de la escuela. Las organizó en 16 filas de 24 fotos cada una ¿Cuántas fotos tiene el póster?

En la Escuela Secundaria, suele tratarse con un tipo de problema particular y paradigmático: el conteo de elementos de una colección dada, pero en este caso las configuraciones suelen ser un poco más complejas que las rectangulares. Esto hace que cada caso requiera buscar distintas estrategias de conteo, porque la estrategia de multiplicar puede no resultar efectiva.

Otro punto de quiebre respecto a la Escuela Primaria con este tipo de problemas es que en la Escuela Secundaria se presenta como desafío central la necesidad de encontrar una fórmula que permita encontrar la cantidad de elementos en cualquier lugar de la colección, es decir, en la posición n . Por ejemplo:

Actividad 1 - sin entrega

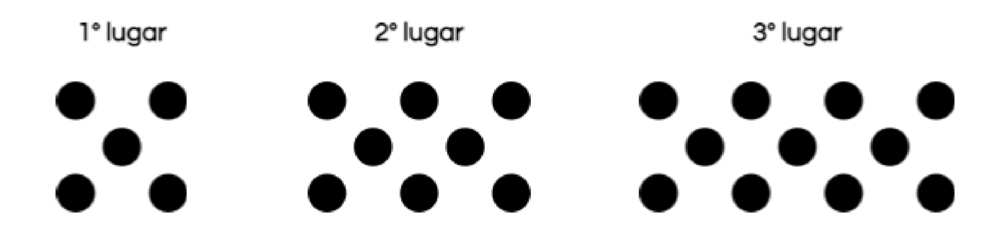
El trabajo con el siguiente problema permite la construcción de fórmulas equivalentes para contar la cantidad de puntos para el lugar *n* de una sucesión de figuras.

Les proponemos resolver el problema de, al menos, dos formas diferentes. Luego, anticipen de qué manera se podría organizar su implementación en el aula, de modo que habilite la discusión en torno a la equivalencia entre las fórmulas correctas obtenidas.

Tomen nota de estas observaciones, pues en la siguiente sección podrán relacionarlas, completarlas y ampliarlas con el análisis didáctico que compartiremos con ustedes.

Problema

A continuación, se presenta una secuencia de figuras formadas por puntos. Para formar la figura de un lugar determinado, se agregan puntos a la figura del lugar anterior.



a) Dibujen la figura que ocupa el cuarto lugar en la secuencia.

b) ¿Cuál es la cantidad de puntos que hay en la figura que está en el sexto lugar de la secuencia? ¿Cómo se dieron cuenta?

c) Calculen la cantidad total de puntos que hay en la figura que está en el lugar 45 de la secuencia. Escriban los cálculos que hicieron.

d) Escriban una fórmula que permita encontrar la cantidad total de puntos que tiene la figura que se encuentra en el lugar *n* de la secuencia.

Una estrategia de resolución que las y los estudiantes suelen proponer para este tipo de problema consiste en la construcción iterativa de alguna fórmula, según un proceso que guarda cierta regularidad, pero no es necesariamente la única forma de abordar este desafío, dado que existen variadas formas de considerar la regularidad, que llevan a la producción de diferentes fórmulas asociadas a ellas.

Esta diversidad puede permitir que las y los docentes organicen debates y discusiones colectivas y, de esta manera, se sostengan, por ejemplo, ideas vinculadas con qué significa que dos o más fórmulas sean equivalentes, o incluso determinar por qué no lo son.

Según Carmen Sessa (2005, p.75) "La producción de la fórmula es un punto de apoyo para abordar cuestiones constitutivas del lenguaje algebraico", así como la noción de generalidad.

En este sentido, destacamos la implementación de este tipo de problema como parte de un proyecto de enseñanza en el que se planifique y reflexione respecto del desarrollo de prácticas algebraicas.

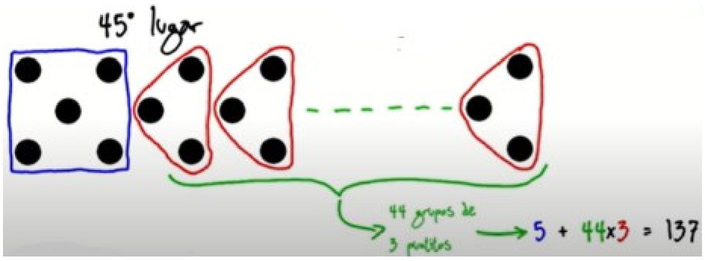
Nos resulta sumamente interesante el aprovechamiento del trabajo colectivo que se puede desplegar en el aula y la práctica matemática asociada. Es decir, estas situaciones brindan la posibilidad de habilitar un espacio de diálogo en torno a las formas de contar y sobre las fórmulas que surgen a partir de ellas. Comprender la fórmula construida por otro y relacionarla con la propia, y analizar ventajas y desventajas de cada una, también son actividades que pueden formar parte de la puesta en común

La intencionalidad didáctica del problema

Con respecto a los dos primeros ítems del problema, nos interesa destacar que su objetivo es que las y los estudiantes se familiaricen con la secuencia de puntos y puedan analizar cómo se puede construir la figura de cada posición en función de las anteriores.

En este sentido, el ítem a), que solicita que dibujen la figura siguiente, puede colaborar a esta finalidad; pero, además, la o el docente puede agregar algunas preguntas cuyo propósito sea que las y los estudiantes expliciten relaciones entre las disposiciones de los puntos en las configuraciones sucesivas. Es decir, que compartan diferentes formas de continuar la colección.

La intención de los ítems b) y c) es que las y los estudiantes comiencen a sentir la necesidad de renunciar al esquema gráfico de los puntos y el conteo; ya sea porque les resulta costoso o porque lo consideran innecesario. Sin embargo, es probable que, en el ítem b), al tratarse del sexto lugar, algunas o algunos estudiantes aún necesiten apoyarse en un soporte gráfico. En cambio, para el ítem c), la decisión de preguntar por la cantidad de puntos en el lugar 45 puede generar la necesidad de que las y los estudiantes cambien la estrategia del soporte gráfico y de la resolución iterativa para establecer nuevas relaciones entre los elementos, ya que la estrategia de conteo uno a uno de los puntos puede resultarles costosa. Si este es el caso, la búsqueda de la respuesta puede exigir un mayor nivel de generalización, que las y los estudiantes podrán lograr, por ejemplo, analizando cuántos puntos se agregan a medida que se avanza en la posición de la figura o apoyándose en algún esquema gráfico que describa cierta generalidad. A continuación, mostramos uno que puede servir para pensar la cantidad de puntos en el lugar 45, en donde se utilizan unas “rayitas” para indicar la progresión hasta ese lugar.



Si bien el esquema de la figura anterior está asociado a una forma particular de contar, la idea de mostrarlo es que las y los estudiantes puedan visualizar que existen soportes gráficos que pueden ser útiles para avanzar en la construcción de ciertas ideas más generales.

El trabajo con el lugar 45 es una oportunidad para que las y los estudiantes elaboren una explicación acerca de cómo contar los puntos en calidad de representante de un lugar determinado. Si bien se trata de un lugar particular, para una forma de contar particular, puede permitir describir ciertas características o estructuras que luego pueden servir como punto de apoyo para la construcción de una fórmula.

Es así que estos dos primeros ítems posibilitan la emergencia de diferentes estrategias que luego podrán ser debatidas en un espacio colectivo para analizar su conveniencia.

Finalmente, se propone en el problema la construcción de una fórmula que permita contar la cantidad de puntos en un lugar variable.

Con la intención de aclarar las ideas desarrolladas hasta el momento y mostrar una posible solución del problema, les compartimos el siguiente video.

En el este video se muestra una estrategia posible de resolución para el problema antes planteado.

Antes de avanzar con el estudio de la equivalencia de las fórmulas, nos resulta necesario señalar algunos asuntos en relación con el rol docente durante la gestión de problemas de producción de fórmulas.

Es fundamental para este tipo de problemas que la o el docente pueda indagar acerca de las formas de contar de las y los estudiantes y no poner el foco únicamente en la cantidad total de objetos obtenida. Es decir, una tarea central de la o del docente es acompañar a las y los estudiantes para que puedan explicitar o describir las formas de contar poniendo el acento en los cálculos o procedimientos que se pusieron en juego y no en el resultado final.

Este tipo de problema permite discutir ejemplos particulares, como la cantidad de puntos del lugar 45, poniendo en juego ideas generales que luego pueden ser consideradas para pensar la fórmula para el lugar *n*. En este caso, es posible apoyarse en lo particular para luego pensar la construcción de lo general; y es así que podemos afirmar que lo particular aporta a la construcción del sentido de los símbolos que forman la fórmula general.

Finalmente, este tipo de problema provee una idea de equivalencia que no necesariamente puede resultar familiar para las y los estudiantes y que consiste en “dos formas diferentes de contar la misma colección”. Esta idea puede resultar un punto de apoyo interesante para avanzar hacia la noción de fórmulas equivalentes: para todo lugar, la cantidad de puntos debe ser la misma independientemente de la forma de contar. Esto se puede interpretar como que para todo $n \in N$, todas las fórmulas deben brindar la misma cantidad de puntos, asunto que profundizaremos en el siguiente apartado.

Fórmulas equivalentes

En este siguiente apartado vamos a desarrollar un posible tratamiento a propósito del problema anterior, que permite adentrarse en la idea de fórmulas equivalentes. Para ello, será necesario poner en juego diferentes fórmulas que cuentan la misma configuración. Es razonable pensar que dentro de una clase que trabaja en pequeños grupos o de manera individual surja una variedad de fórmulas, asunto que vamos a explotar didácticamente.

Para empezar, consideremos a la primera fórmula que se desarrolla en el video: $5 + (n - 1) \times 3$.

Para pensar en una segunda fórmula se puede tomar como invariante dos puntos en lugar de los cinco del primer lugar. De esta manera, se suma un grupo de 3 puntos por cada lugar, por lo que, para la posición n, se obtiene la fórmula $2 + n \times 3$ para la cantidad de puntitos.

Las y los estudiantes que se apoyen en que la cantidad de puntos del centro coincide con la posición de la figura, podrán construir otra fórmula: $n + 2 \times (n + 1)$.

En este caso, n cuenta los puntos del centro para cada lugar, marcados en la figura con púrpura, y $2 \times (n + 1)$ indica la cantidad de puntos fucsias para cada lugar. El 2 indica que hay dos grupos de puntos (los de la parte superior y los de la parte inferior), cada uno con un punto más que la posición, es decir, $n + 1$.

Se obtienen así tres fórmulas diferentes que cuentan la cantidad de puntos de la configuración en el lugar n:

Primera fórmula: $5+(n-1)\times 3$

Segunda fórmula: $2+n\times 3$

Tercera fórmula: $n+2\times(n+1)$

El problema, que originalmente proponía la producción de una fórmula, a partir de este momento se transforma en otro donde el foco está en el análisis de la equivalencia de fórmulas.

Todas las fórmulas propuestas cuentan la misma colección de puntos, por lo cual resulta razonable pensar que, como están asociadas a diferentes formas correctas de contar, entonces deben coincidir en la cantidad de puntos para cada lugar determinado. Una primera indagación para explorar si esto se cumple que las y los estudiantes suelen ensayar, es usarlas para encontrar la cantidad de puntos para un determinado lugar, por ejemplo, el lugar 70.

Primera fórmula en el lugar 70: $5+(70-1)\times 3=5+69\times 3=212$

Segunda fórmula en el lugar 70: $2+70\times 3=212$

Tercera fórmula en el lugar 70: $70+2\times(70+1)=212$

Que todas las fórmulas otorguen la misma cantidad de puntos para el lugar 70 es evidencia a favor de que pueden ser equivalentes. Es decir, en caso de que alguna dé otro resultado, habrá que revisar la construcción de la fórmula o el cálculo porque se sabe que esto no puede ocurrir.

Para avanzar en la validación de la equivalencia de las fórmulas, será necesario argumentar por qué para cualquier valor de $n\in N$ las fórmulas coinciden.

Una opción puede ser recurrir a la idea de multiplicación entre números naturales asociada a la noción de “cantidad de veces que se suma un mismo número” para avanzar en manipulaciones de las fórmulas de forma que permita ponerlas en relación. Por ejemplo, expresando que $(n-1)\times 3$ es lo mismo que sumar 3 veces $n-1$ se puede avanzar en las siguientes cadenas de operaciones $5+(n-1)\times 3=5+(n-1)+(n-1)+(n-1)=5+3n-3=2+3n$

Como la última expresión coincide con la segunda fórmula, entonces darán la misma cantidad de puntos para cualquier valor de $n\in N$.

Para el trabajo con la tercera fórmula también se puede recurrir al sentido de la multiplicación entre naturales como la suma reiterada de un mismo número para tratar con la fórmula: $n + 2 \times (n + 1) = n + (n + 1) + (n + 1) = 3n + 2$

Los grupos de estudiantes que estén familiarizados con la propiedad distributiva podrán ponerla en uso para comparar las fórmulas. También puede ser una buena oportunidad para presentar o recuperar esta propiedad, en el contexto de la comparación de las fórmulas, para oficializarla a toda la clase.

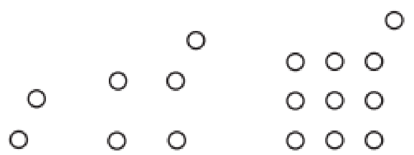
Finalmente nos parece importante terminar este apartado recuperando algunos comentarios acerca del trabajo con este problema y la equivalencia de fórmulas.

- Por un lado, resulta necesario explicitar y plantear a la clase que este tipo de problemas puede resolverse mediante distintos procedimientos.
- La respuesta al último ítem es una fórmula que puede ser un objeto nuevo para las y los estudiantes. El trabajo de producción de fórmulas es una tarea novedosa en la iniciación al Álgebra y necesita ser desarrollada mediante diferentes actividades.
- La búsqueda de relaciones entre las diferentes fórmulas es un asunto que tendrá que impulsar la o el docente en la gestión, ya que no siempre es una práctica espontánea de las y los estudiantes, así como tampoco se asume tan naturalmente que el problema admite una pluralidad de respuestas.
- El trabajo con la equivalencia de fórmulas permite plantear diferentes aspectos, como ser: partir del hecho de que las distintas fórmulas tienen que dar el mismo valor para cualquier posición debido a que todas cuentan “lo mismo” y, luego, apoyarse en las propiedades de los números y de las operaciones para asegurarlo para todo valor de $n \in N$.

En varios documentos curriculares figuran este tipo de situaciones. A continuación, mostramos un ejemplo.

Actividad 2 - Obligatoria: participación en el foro de la clase 3

A continuación, les presentamos un problema extraído del Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires correspondiente al segundo año de Escuela Secundaria, en donde se explicita la intención de profundizar el contenido que estudiamos en esta clase: el trabajo de producción de fórmulas como tarea que permite tratar con la noción de expresiones equivalentes.



Dibujar el esquema que sigue en la secuencia.
Construir una tabla con el número de esquema y su número total de puntos.
¿Cuántos puntos tendrá el esquema número ocho? ¿Y el veinte?
¿Qué forma tendrá el de 101 puntos?

La participación en el foro de esta clase contemplará dos consignas.

1. Compartan en el foro de la clase 3 alguna forma de contar la cantidad de puntos de un esquema cualquiera de esta secuencia.
   Recuerden, antes de publicar, leer los posteos de sus colegas para no repetir estrategias.

Piensen cómo gestionarían en sus clases una puesta en común cuya finalidad sea trabajar la equivalencia entre las distintas formas de contar (ya sea expresadas coloquialmente, en términos de un cálculo para un valor "genérico" o como fórmulas) que surjan del intercambio en este foro. ¿Cómo validarían la equivalencia? ¿A qué conclusiones llegarían? ¿Qué dejarían escrito en el pizarrón?

Actividades

Actividad 1 - sin entrega

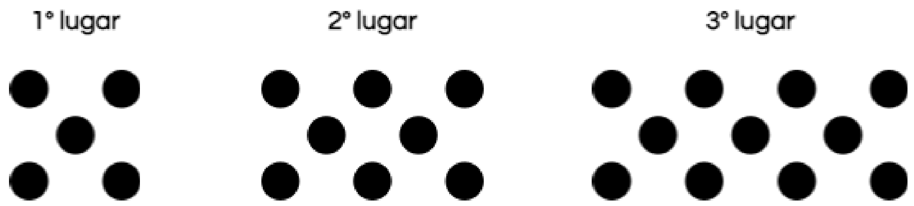
El trabajo con el siguiente problema permite la construcción de fórmulas equivalentes para contar la cantidad de puntos para el lugar *n de una sucesión*.

Les proponemos resolver el problema de al menos dos formas diferentes. Y luego, anticipar de qué manera se podría organizar su implementación en el aula de modo que habilite la discusión de la equivalencia entre las fórmulas correctas obtenidas.

Tomen nota de estas observaciones, pues en la siguiente sección podrán relacionarlas, completarlas y ampliarlas con el análisis didáctico que compartiremos con ustedes.

Problema

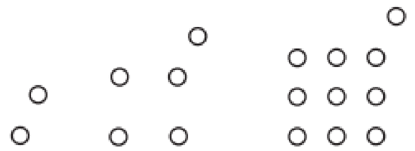
A continuación, se presenta una secuencia de figuras formadas por puntos. Para formar la figura de un lugar determinado, se agregan puntos a la figura del lugar anterior.



e) Dibujen la figura que ocupa el cuarto lugar en la secuencia.
f) ¿Cuál es la cantidad de puntos que hay en la figura que está en el sexto lugar de la secuencia? ¿Cómo se dieron cuenta?
g) Calculen la cantidad total de puntos que hay en la figura que está en el lugar 45 de la secuencia. Escriban los cálculos que hicieron.
h) Escriban una fórmula que permita encontrar la cantidad total de puntos que tiene la figura que se encuentra en el lugar *n* de la secuencia.

Actividad 2 - Obligatoria: participación en el foro de la clase 3

A continuación, les presentamos un problema extraído del Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires correspondiente al segundo año de Escuela Secundaria, en donde se explicita la intención de profundizar el contenido que estudiamos en esta clase: el trabajo de producción de fórmulas como tarea que permite tratar con la noción de expresiones equivalentes.



Dibujar el esquema que sigue en la secuencia.
Construir una tabla con el número de esquema y su número total de puntos.
¿Cuántos puntos tendrá el esquema número ocho? ¿Y el veinte?
¿Qué forma tendrá el de 101 puntos?

La participación en el foro de esta clase contemplará dos consignas.

1. Compartan en el foro de la clase 3 alguna forma de contar la cantidad de puntos de un esquema cualquiera de esta secuencia.
   Recuerden, antes de publicar, leer los posteos de sus colegas para no repetir estrategias.

Piensen cómo gestionarían en sus clases una puesta en común cuya finalidad sea trabajar la equivalencia entre las distintas formas de contar (ya sea expresadas coloquialmente, en términos de un cálculo para un valor "genérico" o como fórmulas) que surjan del intercambio en este foro. ¿Cómo validarían la equivalencia? ¿A qué conclusiones llegarían? ¿Qué dejarían escrito en el pizarrón?

Bibliografía de referencia

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernardz et al. (Eds.), Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sadovsky, P. (2004). Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas (Tesis doctoral). FFyL, UBA, Buenos Aires.

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Créditos

Autores: Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2023). Clase Nro. 3: La transición aritmética álgebra (parte II). Enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 4: Las ecuaciones

Introducción

En la tercera clase trabajamos con un tipo de problema particular, que puede interpretarse como paradigmático: la producción de fórmulas vinculadas al conteo de elementos de una colección dada. Allí señalamos que se puede identificar cierta continuidad en el estudio de este tipo de tareas con la Escuela Primaria, en donde también se cuentan elementos de colecciones, pero no necesariamente se solicita la producción de fórmulas. Es así que podemos afirmar que se trata de un "buen tipo de problema" que permite una entrada al Álgebra, articulando contenidos de la Escuela Primaria y la Secundaria.

En esta cuarta y última clase, pondremos el foco en una variedad de situaciones que involucran el trabajo con ecuaciones. Presentaremos ejemplos que amplían la típica actividad de resolver ecuaciones mediante despejes, para ampliar el sentido de estos objetos entendiéndolos como funciones proposicionales. Los analizaremos recuperando nociones trabajadas en clases anteriores y veremos cómo se asocian con este objetivo de profundizar el estudio de las ecuaciones.

Las ecuaciones

En la Escuela Secundaria resulta habitual que circulen diferentes nociones del objeto ecuación; una de las más arraigadas implica interpretarlas como igualdades en las que intervienen incógnitas, y la tarea que se suele solicitar a las y los estudiantes consiste en resolverlas. Por ejemplo, podemos encontrarnos con enunciados del tipo "Sabiendo que x es un número Real, hallá su valor en la ecuación $2x + 1 = 10$".

La noción de incógnita en este tipo de problema, que no es un sinónimo de *variable*, refiere a una letra que representa un número desconocido, que existe y que es único. En otras palabras, si se trabajan en clase solo este tipo de actividades, las ecuaciones pueden ser interpretadas como expresiones en donde la letra “tapa” a un valor, y las y los estudiantes tienen la tarea de encontrarlo poniendo en juego diferentes técnicas.

Como consecuencia, se corre el riesgo de que las y los estudiantes terminen construyendo una concepción restringida del objeto ecuación, entendiéndolo como una expresión que involucra letras, que representan valores predeterminados y que es necesario encontrar bajo la utilización de diferentes técnicas. Este abordaje deja de lado la idea de la letra como variable y, con ella, la verdadera esencia del objeto ecuación.

Por ejemplo: la resolución de ecuaciones del tipo $x + 1 = x$ o $x + 2 = 1 + x + 1$ suele ser difícil de abordar en clase, si solo se hizo un tratamiento como el descripto en los párrafos anteriores. **Esta concepción deja, entonces, fuera el trabajo con ecuaciones con infinitas soluciones o sin solución, cuestión que resulta sustancial para repensar las propuestas de enseñanza.**

Otra cuestión que resulta importante analizar es **la idea de igualdad asociada a las ecuaciones**, en donde la noción de variable comienza a tomar relevancia. Por ejemplo, ¿es posible afirmar que $2x - 3 = 7$ es una igualdad? Sabemos que si x vale 5, la expresión $2x - 7 = 3$ se transforma en $3 = 3$, mientras que si x vale 3 la, expresión se transforma en $-1 = 3$. Entonces, hay valores que puede tomar x de modo que la ecuación se transforma en una afirmación o proposición –una igualdad– falsa; pero también, hay un valor de x para el que la ecuación se transforma en una proposición verdadera, $x = 5$. **De esta manera, la expresión se transforma en una igualdad que puede ser falsa o verdadera dependiendo del valor que tome x.**

Vale decir, entonces, que una ecuación puede definirse como una **función proposicional:** al reemplazar **sus variables** por números, se transforma en una proposición, que por lo tanto puede ser **verdadera o falsa**. Los valores que hacen que la proposición sea verdadera constituyen su **conjunto solución**.

Organizaremos, en lo que sigue, el desarrollo de la clase considerando a las ecuaciones como **funciones proposicionales** y, por lo tanto**,** a la letra como una **variable** y no como una incógnita.

De este modo, ampliaremos el tipo de tareas que se pueden realizar en torno a las ecuaciones para recuperar la idea que "resolver una ecuación consiste en identificar el conjunto de todos los valores para los cuales la igualdad se transforma en una proposición verdadera".

A lo largo de la clase iremos desarrollando diferentes argumentos a favor de este posicionamiento, que se apoyan tanto en razones matemáticas como didácticas. Los siguientes ejemplos, extraídos en forma textual de las páginas 8 y 9 del documento elaborado por Andrea Novembre para el Ministerio de Educación de la Nación, "Las letras, las ecuaciones y las funciones: reflexiones sobre su enseñanza y análisis del trabajo de los estudiantes en las evaluaciones nacionales" (2005), ilustran lo descrito en párrafos anteriores. Si se desea profundizar en esta temática, les recomendamos que hagan la lectura completa del documento mencionado que compartimos a continuación.

"Las letras, las ecuaciones y las funciones: reflexiones sobre su enseñanza y análisis del trabajo de los estudiantes en las evaluaciones nacionales".
https://www.mendoza.edu.ar/wp-content/uploads/2016/04/Las-letras-las-ecuaciones-y-las-funciones.pdf

• $5x - 4 = 16$ no es una igualdad. ¿Cómo saber si $5x - 4$ será igual a 16 sin reemplazar a x por un número? Al hacerlo, la expresión se transformará en una igualdad que puede ser verdadera (si se obtiene 16) o falsa (si no se obtiene 16). Los valores de x para los que la expresión se convierte en una igualdad verdadera constituyen su conjunto solución. En este caso particular, el conjunto solución de esta ecuación tiene un solo elemento, $x = 4$.

• $5x - 4 = 5x + 2$ es una expresión que, para cualquier valor de x , se transforma en una igualdad falsa. Se trata de una ecuación cuyo conjunto solución es vacío. Esta conclusión puede obtenerse a partir de analizar la expresión, “leerla”, o transformando la ecuación en otra equivalente donde se vea más fácilmente que no hay solución. Por ejemplo: $5x - 4 = 5x + 2$ es equivalente a $5x - 5x - 4 = 2$ y a $0 \cdot x = 6$. La última ecuación dice que se busca un número que multiplicado por 0 da 6 por resultado, lo cual es imposible. Si esta ecuación no tiene solución (no hay ningún valor de x que la satisfaga), tampoco tendrá solución ninguna de las ecuaciones equivalentes a ella.

• $5x - 4 = 5x - 2 - 2$ se convierte en una igualdad verdadera para todo valor de la variable. El conjunto solución de la ecuación son todos los números.

(Novembre, 2005, pp. 8, 9)

Actividad 1 (Lectura obligatoria) - sin entrega

Lean las páginas 5 a 21 del texto de Andrea Novembre con el que estuvimos trabajando hasta el momento.

¿Qué ideas y nociones aparecen allí que antes no hubieran considerado?

¿Qué reflexiones les genera a propósito del trabajo a realizar en sus clases a propósito de la enseñanza de las ecuaciones?

Dominio de una ecuación

Otro aspecto para tener en cuenta es el conjunto de posibles valores para la variable. En el ejemplo descripto anteriormente, $2x - 7 = 3$, al afirmar que la igualdad se transforma en falsa para $x \in R - \{5\}$ estamos asumiendo que la variable pertenece al conjunto de los Números Reales, es decir, puede tomar cualquier valor que sea Real. En este caso, diremos que el dominio de la ecuación es el conjunto de todos los Números Reales.

En muchas oportunidades, el dominio de la ecuación está determinado por la situación o problema del cual emerge, ya sea por el contexto considerado o por la propia actividad propuesta, aunque es usual que permanezca implícito, tal como sucedió en el ejemplo.

Es decir, **una ecuación es una condición sobre la variable en un dominio determinado**. Así, si consideramos $2x = 1$ con $x \in N$, la ecuación tiene como conjunto solución al conjunto vacío, ya que no existe ningún número Natural que multiplicado por 2 dé por resultado 1. En cambio, si $2x = 1$ con $x \in Q$, el conjunto solución es $\{\frac{1}{2}\}$, ya que el único número Racional que multiplicado por 2 da como resultado 1 es $\frac{1}{2}$.

Pensar a la enseñanza desde esta perspectiva permite acceder a un conjunto de problemas en donde los y las estudiantes tienen la posibilidad de tratar con ecuaciones con conjuntos solución cuentan con una cantidad finita de elementos, ninguno o infinitos.

Por otra parte, promover el trabajo con ecuaciones a partir de considerarlas como funciones proposicionales apuesta a la autonomía de los y las estudiantes, ya que les permite identificar si un cierto número es o no solución independientemente de los procedimientos o técnicas que desarrollen para obtener las soluciones.

Para cerrar, nos interesa enfatizar que, desde nuestro enfoque didáctico, en donde los conocimientos se construyen, resulta esencial la idea de organizar la enseñanza recuperando saberes disponibles. De esta manera, el tipo de práctica que se desarrolla en la entrada al Álgebra, como la lectura de información a partir de expresiones algebraicas, la producción de fórmulas, entre otras, pueden ser herramientas para resolver ecuaciones, lo cual refuerza la necesidad de trabajar con variables y no con incógnitas, recuperando lo estudiado en las clases anteriores.

Tareas que involucran tratar con ecuaciones

A continuación, describiremos y analizaremos didácticamente algunas tareas que pueden aportar a la construcción de diferentes aspectos vinculados a las ecuaciones en la clase de Matemática.

Actividad 2 - sin entrega

Previamente a la lectura de los análisis de cada uno de los ejemplos presentados a continuación, los invitamos a leer sus enunciados y a anticipar posibles resoluciones de las y los estudiantes para cada uno de ellos. ¿Cómo los gestionarían en sus clases?

Como todas las actividades en este curso, recomendamos que tomen notas y apuntes de sus reflexiones porque pueden colaborar en la elaboración del TP Final.

La noción de solución de una ecuación

Ejemplo 1

Decidan si $x = -2$ es solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 1 = -2$; b) $\frac{x-4}{6} = -1$; c) $x + 1 = 5 + 5x$

Para resolver este tipo de problema, se espera que las y los estudiantes reemplacen el valor dado de la variable x en cada una de las ecuaciones para establecer si la igualdad que resulta es verdadera o falsa. Este aspecto determinará si el valor reemplazado es o no solución.

Al recuperar la noción de solución de una ecuación en el contexto de otros problemas, se puede lograr que las y los estudiantes comiencen a construir **mecanismos de control** para determinar si un valor hallado es o no solución de una ecuación.

Los **mecanismos de control** son herramientas que van construyendo las y los estudiantes para poder darse cuenta si están resolviendo correctamente un problema o no, a medida que van explorando y desarrollando su resolución. Generalmente suelen darse de forma implícita y las y los docentes pueden colaborar para hacerlos visibles.

Con el paso del tiempo y una práctica constante y sostenida, estos mecanismos podrán consolidarse y posibilitar que las y los estudiantes puedan tomar decisiones de manera autónoma.

Por esta razón resulta importante que sean las y los estudiantes quienes intenten resolver los problemas, en una primera instancia, por sí solos y que no sea la o el docente quien indique los pasos a seguir o las técnicas que les permitan llegar al resultado de un problema.

Resulta habitual que las y los estudiantes depositen en la o el docente la responsabilidad de determinar la validez de sus respuestas a los problemas. En este sentido, una gestión docente adecuada lleva a que sean los propios estudiantes quienes comiencen a discernir acerca de la validez de sus soluciones, independientemente del procedimiento o técnica que desarrollaron.

En suma, este tipo de tareas desplaza la atención de las y los estudiantes en las técnicas de resolución de ecuaciones, poniendo el foco en dos cuestiones: qué significa que un valor determinado sea solución (o no) de una ecuación; y qué significa que un determinado conjunto sea el conjunto solución de una ecuación. Estas ideas pueden luego constituirse y consolidarse en mecanismos de control que persigan la autonomía en el trato con ecuaciones.

Ejemplo 2

Decidan si $\{-1,2\}$ es el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones, en donde x representa un número Real. Luego de hallar la respuesta, expliquen cómo llegaron a dicha conclusión:

a) $x + 1 = 0$

b) $x + 2 = -1$

c) $(x + 1) \cdot (x - 2) = 0$

d) $(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 6) = 0$

En este caso, además de la noción de solución, al resolver el problema, también se pone en juego una idea central: que para que cierto conjunto sea solución, todos los valores que lo conforman deben ser solución, pero, además, no debe faltar ninguno. Es decir:

El **conjunto solución de una ecuación** está formado por *todos* los valores que transforman a la igualdad en una proposición verdadera.

Para descartar que $\{-1{,}2\}$ es el conjunto solución de la ecuación $x + 1 = 0$, los estudiantes tendrán que detectar que 2 no es una solución, ya que al al sustituir el valor de la variable por 2 en la ecuación, la igualdad se transforma en $3 = 0$, es decir, se trata de una igualdad falsa.

Las y los estudiantes que se apresuren y elaboren conclusiones teniendo en cuenta solo el valor -1, pues está a la derecha del signo igual y puede ocurrir que lo interpreten como "resultado" (retomando las clases anteriores, con una concepción aritmética del signo igual) obtendrán una respuesta errónea: que $\{-1{,}2\}$ es el conjunto solución de la ecuación $x + 1 = 0$. Es importante que la o el docente ponga el foco en la necesidad de analizar o probar con **todos** los valores que conforman el conjunto al que pertenece la variable. Por ejemplo, a partir de la lectura de la ecuación, es posible afirmar que: si x es un número positivo, entonces al sumarle 1 no podrá obtenerse 0 como resultado.

Para las y los estudiantes que, en lugar de reemplazar los valores involucrados, elijan utilizar "técnicas de despeje" para obtener el conjunto solución de cada ecuación y luego compararlo con $\{-1{,}2\}$, la o el docente puede proponer analizar ambos procedimientos. De esta manera, se pueden elaborar conclusiones respecto de diferentes aspectos, por ejemplo, cuál es la estrategia más conveniente en términos de economía en el tiempo resolución del problema, cuál resulta más sencilla de resolver de acuerdo a las herramientas matemáticas con las que se cuentan, el rol que juegan los números involucrados en cada ecuación para determinar la estrategia a utilizar, y en cuáles de estos casos la calculadora podría ser una aliada para su resolución, etcétera

La ecuación del ítem d) permite abrir una nueva discusión: al reemplazar la variable con los valores -1 y 2 en la ecuación $(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 6) = 0$, se obtienen dos proposiciones que son verdaderas. Pero este hecho no alcanza para afirmar que el conjunto solución de la ecuación es $\{-1{,}2\}$. Es decir, si bien ambos valores son soluciones de la ecuación, no son **todas** las soluciones. En este caso, la o el docente puede poner en discusión si efectivamente esas son todas las soluciones de la ecuación, debatiendo acerca de maneras de asegurarse de que sea o no así. El objetivo es nuevamente crear condiciones en el aula para desentrañar qué ideas matemáticas aparecen involucradas en el cuantificador "todos" implicado en la noción de conjunto solución.

Resulta interesante señalar que en este problema se propuso la ecuación $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+6)=0$, que generalmente se estudia en el Ciclo Orientado vinculado al trabajo con funciones polinómicas. Es importante remarcar que "no está prohibido" trabajar con objetos matemáticos que figuran en los diseños curriculares correspondientes a años posteriores, lo notable no es el objeto en sí mismo, sino las tareas que se pueden realizar a propósito de él.

En este caso, resulta provechoso trabajar con ecuaciones formadas por un producto igualado a cero tempranamente, ya que es posible poner en juego la propiedad: $a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ o $b = 0$, con $a, b \in R$. Al pensar el conjunto solución de la ecuación analizando cada uno de los factores implicados, surge una estrategia diferente al pasaje de términos, que se apoya en lecturas de la expresión y propiedades de las operaciones involucradas en ella.

Analizar posibles procedimientos

Ejemplo 3

A continuación, se muestran tres procedimientos para determinar el conjunto solución de la ecuación $5+3x=86$.

Les proponemos que analicen si son correctos o no y que elijan cuál les parece más conveniente y por qué.

Procedimiento 1

$$5+3x=86$$

Para que $5+3x$ dé por resultado 86, $3x$ debe ser 81 y como $3\cdot 27=81$, entonces $\{27\}$ es el conjunto solución.

Procedimiento 2

$$5+3x=86$$

$$5 + 3x - 5 = 86 - 5$$
$$3x = 81$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{81}{3}$$
$$x = 27$$

Entonces $\{27\}$ es el conjunto solución.

Procedimiento 3

$$5 + 3x = 86$$
$$5 + 3x - 3x = 86 - 3x$$
$$5 = 86 - 3x$$
$$5 - 86 = -3x$$
$$-81 = -3x$$

Sabiendo que $-3 \cdot 27 = -81$, entonces $\{27\}$ es el conjunto solución.

La tarea propuesta no tiene por objetivo que los estudiantes resuelvan la ecuación, sino que analicen diferentes maneras de hacerlo.

Este problema permite mostrar y poner en cuestión procedimientos que pueden convertirse en fuente para avanzar en el trabajo sobre las técnicas de resolución. Discutir en clase sobre diferentes estrategias para hallar las soluciones de una misma ecuación, puede colaborar en que las y los estudiantes construyan la idea de que no hay un único procedimiento posible. Además de analizar por separado cada procedimiento, la tarea propone compararlos y posicionarse en favor de uno de ellos, dando argumentos que respalden la elección. De esta manera, se espera promover un espacio de trabajo en donde las y los estudiantes puedan tomar decisiones sobre la conveniencia en función de la ecuación a resolver y de sus conocimientos disponibles.

Ecuaciones que habilitan la lectura de expresiones algebraicas para encontrar soluciones

Ejemplo 4

Las siguientes ecuaciones tienen conjunto solución vacío, es decir, no hay ningún valor de $x \in R$ que transforme a la expresión en una igualdad verdadera. Expliquen por qué.

a) $0 \cdot x = 1$ b) $x = x + 1$ c) $x^2 = -1$ d) $\sqrt{x} = -2$

Una posibilidad es que las y los estudiantes exploren cada ecuación asignándole valores a x para asegurarse de que se obtienen proposiciones siempre falsas, ya que no se cumple la igualdad. Es fundamental que las y los profesores señalen que no alcanza con mostrar que la ecuación se transforma en una igualdad falsa para un conjunto finito de valores de x, sino que es necesario dar argumentos matemáticos que permitan generalizar.

Por otro lado, la mayoría de estas ecuaciones no admiten resoluciones basadas en despejes que se traten en la Escuela Secundaria, lo cual posibilita que las y los estudiantes pongan en juego otros tipos de razonamientos. Para el ítem a), por ejemplo, podrán afirmar que para cualquier valor que tome la variable, al multiplicarla por cero se obtiene como resultado cero, por lo cual, se puede afirmar que $0 \cdot x = 0$ para todo $x \in R$. La lectura de la expresión y las propiedades de las operaciones posibilitan afirmar que no hay ningún valor que haga que la proposición sea verdadera.

En el ítem b) se puede interpretar a la expresión $x + 1$ apelando a una noción proveniente de los números enteros, “el número siguiente”. Las y los alumnos, en general, no entran en conflicto con la idea ningún número x coincide con su siguiente, $x + 1$. Si el dominio de la ecuación es el conjunto de números reales, un tratamiento posible puede sostenerse desde la aritmética y las propiedades de las operaciones, es decir, si a un número cualquiera x le sumanos 1 se obtiene un número mayor, $x + 1$, por lo cual nunca podrán coincidir.

Actividad 3 - sin entrega

Les dejamos para pensar en una tarea similar a la analizada anteriormente. ¿Qué razonamientos podrían desplegar los y las estudiantes para resolverla?

1) Las siguientes ecuaciones tienen como conjunto solución todos los números reales, es decir, cualquier valor de x transforma a la proposición en una igualdad verdadera. Expliquen por qué.

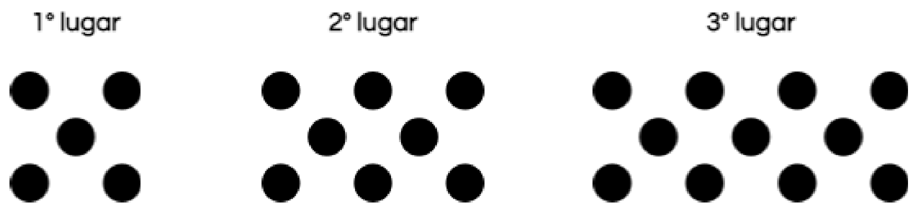
   a) $0 \cdot x = 0$ b) $x = x$

   c) $2x - 7 = x - 7 + x$ d) $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

2) En la primera clase de este curso desarrollamos un ejemplo en donde se podía poner en juego una práctica de lectura de expresiones para resolver la ecuación $\frac{3x+15}{x+5} = 3$. Les sugerimos recuperar ese apartado de la clase y enmarcarlo como un ejemplo posible de este tipo de tareas.

Ecuaciones que emergen de contextos de modelización matemática

En la tercera clase de este curso hemos desarrollado el análisis de un problema de producción de fórmulas a partir de la siguiente secuencia formada por puntos:



En el contexto de esta situación se podrían incluir preguntas como las siguientes:

¿Existirá algún lugar de la secuencia que tenga 461 puntos? ¿y un lugar que tenga 1002 puntos?

En este caso, el trabajo se podrá apoyar en las diferentes fórmulas que se hayan construido en los ítems previos, o bien en el contexto del problema. Por ejemplo, para responder a la primera pregunta se puede dar lugar a los siguientes planteos.

- Plantear una ecuación a partir de la fórmula $2 + n \cdot 3 = 461$
- Recuperar las ideas puestas en juego para hacer la fórmula e ir “para atrás”. Una posibilidad puede ser comenzar quitando los primeros dos puntos $461 - 2 = 459$ y considerar que los puntos restantes se fueron agregando en grupos de a tres. El cálculo $459 \div 3 = 153$ permite averiguar la cantidad de grupos de tres puntos que se agregaron, que coincide con la posición de la figura.

El contexto del problema determina de manera implícita el dominio de la ecuación $2 + n \cdot 3 = 461$, ya que al representar un “lugar” de la secuencia, los valores para n son todos los números naturales. Este último asunto se pone de relevancia al pensar en la segunda pregunta, en donde al resolver la ecuación resulta que $n = \frac{1000}{3} = 333{,}333\ldots$ Es importante que el docente ponga en discusión que, en casos como estos, es posible hallar una solución de la ecuación que no lo es del problema, ya que tiene que ser un número natural.

Cierre de la clase

En esta cuarta y última clase del curso propusimos problemas que involucran ecuaciones que ponen de relevancia su definición como función proposicional. Las estrategias que pueden surgir para resolverlos implican cuestiones que estuvimos estudiando en clases anteriores, como, por ejemplo, la lectura de información que porta una expresión que incluye variables y/o un cálculo.

Pero, además, a lo largo de esta cuarta clase, fuimos analizando formas alternativas de resolución al “clásico” despeje de ecuaciones con el objetivo de comenzar a analizar otros tipos de abordajes, ampliando la caja de herramientas con la que cuentan las y los estudiantes para resolver problemas que involucran tratar con estos objetos.

Por otro lado, analizamos ejemplos de problemas que, al incluirlos como parte de la propuesta didáctica, pueden colaborar en construir autonomía por parte de las y los estudiantes

Finalizando este recorrido, podemos reconocer y poner en relevancia el rol del docente al gestionar una clase en donde la diversidad de resoluciones dé lugar a la discusión y al debate colectivo. Esta cuestión no es menor, pues si las y los estudiantes se sienten capaces de dar su voz, argumentar y defender una idea, estamos construyendo una clase más inclusiva y democrática.

Bibliografía de referencia

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernardz et al. (Eds.), Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sadovsky, P. (2004). Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas (Tesis doctoral). FFyL, UBA, Buenos Aires.

Sessa, C. (2005). Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Novembre, A. (2005). Las letras, las ecuaciones y las funciones: Reflexiones sobre su enseñanza y análisis del trabajo de los estudiantes en las evaluaciones nacionales. Ministerio de Educación de la Nación. Informe de Actividades Abiertas. ONE 2005. Disponible: https://www.mendoza.edu.ar/wp-content/uploads/2016/04/Las-letras-las-ecuaciones-y-las-funciones.pdf

Créditos

Autores: Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2023). Clase Nro. 4: Las ecuaciones. Enseñanza y aprendizaje del álgebra en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.