Biblioteca **Nuestra Escuela** 2023 | Cuadernos para la enseñanza

Nuestra Escuela
Programa Nacional de Formación Permanente

Colección **Actualizaciones Académicas**

Actualización Académica en enseñar y aprender matemática en la escuela secundaria

Módulo 4: **Enseñanza y aprendizaje de las funciones en la escuela secundaria**

la educación nuestra bandera
INFoD Instituto Nacional de Formación Docente
Ministerio de Educación Argentina

Índice

Clase 1: El inicio del trabajo con funciones en la escuela secundaria

Presentación

Les damos la bienvenida a "Enseñanza y aprendizaje de las Funciones en la escuela secundaria". Este módulo consta de 4 clases, durante las cuales les propondremos reflexionar sobre la enseñanza de las funciones, poniendo el foco en los primeros años de la Escuela Secundaria. Debido a que este tema no se trabaja de manera específica en el Nivel Primario, una de nuestras intenciones será identificar los contenidos del nivel que se podrían retomar desde la enseñanza para tratar con problemas sobre funciones en el aula. A su vez, se considerarán los conocimientos que los estudiantes poseen al comenzar el Nivel Secundario para analizar de qué manera les permitirían abordar los problemas y lograr nuevos aprendizajes vinculados con el ámbito funcional.

Desde la mirada didáctica que sostiene el Ministerio de Educación de la Nación, explicitada en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP), la clase de Matemática toma como referencia los modos de trabajo de la Matemática como disciplina científica, entendida como un producto cultural y social. Cultural, porque sus producciones están condicionadas y permeadas por las concepciones de la sociedad en la que emergen; y social, porque surgen de la interacción entre personas de una misma comunidad (Sadovsky, 2005). Resulta así imprescindible la consideración del uso de tecnología como parte de la actividad matemática dentro de las aulas, tanto porque forma parte de la disciplina científica como por su presencia en la cotidianidad social.

El enfoque didáctico desde el cual proponemos estas clases asume que para que un estudiante aprenda Matemática en la Escuela Secundaria es necesario que la propuesta de enseñanza lo involucre en una actividad de producción de conocimiento matemático. Para ello es necesario que los docentes propongan la resolución de problemas que desafíen a los estudiantes y les permitan explorar, elaborar conjeturas, analizar diferentes formas de resolución, etc. Sin embargo, la resolución de problemas no es suficiente. Hacer matemática incluye también la interacción con otros, durante y luego de la resolución, para discutir sobre la validez de los procedimientos, reflexionar sobre lo realizado, argumentar, validar, etc. Todas estas acciones no se dan de manera espontánea, por lo que debe ser el docente quien gestione momentos de la clase destinados a fomentar estas interacciones.

Esperamos que este módulo les brinde recursos para pensar sobre sus prácticas de enseñanza y sobre el proceso de aprendizaje de sus estudiantes con respecto a diversas cuestiones vinculadas con las funciones, en un ámbito de producción, intercambio, argumentación y validación de ideas matemáticas.

Antes de interiorizarnos con los contenidos del módulo, les proponemos que participen de la primera actividad obligatoria:

ACTIVIDAD 1 (obligatoria)

Foro de presentación.

Para empezar a conocernos, los invitamos a realizar una breve presentación. Dada la diversidad de lugares y formaciones de los cursantes de este módulo, resulta interesante que compartan algunos detalles sobre su experiencia docente, su lugar de trabajo, en dónde viven y si ya tuvieron experiencia en formación virtual.

También les proponemos que **escriban una pequeña reflexión acerca de cómo ustedes consideran, a partir de su formación matemática y experiencia docente, con qué tipos de problemas se podría comenzar el trabajo con funciones** en la Escuela Secundaria.

Para considerar la aprobación de esta clase, los invitamos a realizar dos intervenciones.
La primera, en el Foro de presentación.
La segunda intervención, deberán realizarla a partir del debate propuesto en lo que denominamos "Foro de Cierre"

Introducción

La enseñanza de Funciones es un contenido central de la Escuela Secundaria actual, ya que permite abordar y resolver una gran variedad de situaciones y de problemas. Además, se constituye como uno de los contenidos "nuevos" con respecto a los de la Escuela Primaria, debido a que no se realiza un trabajo estrictamente vinculado a las funciones en ese nivel. Sin embargo, los estudiantes que ingresan a la Escuela Secundaria disponen de nociones, prácticas, técnicas, abordajes y otros conocimientos relacionados con el trabajo funcional que fueron construidos durante su escolaridad previa. Desde nuestro posicionamiento consideramos que los docentes debemos generar condiciones para que los estudiantes construyan conocimiento, a partir de otros que tengan disponibles y por medio de la resolución de problemas. En este sentido, se torna necesario entonces identificar cuáles de esos conocimientos se pueden constituir como insumos y puntos de apoyo para el aprendizaje de las funciones, pues debería incidir al momento de tomar decisiones sobre cómo organizar el estudio en el ámbito funcional.

> Les proponemos algunos interrogantes con respecto al comienzo del trabajo funcional en la Escuela Secundaria.
>
> - ¿De qué manera se puede comenzar el estudio de funciones en la escuela secundaria?
> - ¿Se comienza con un tipo de función específica o con "funciones en general"?
>
> ¿Se comienza con una aproximación a partir de gráficos de funciones, de tablas o utilizando fórmulas?

En esta clase analizaremos de qué manera se podría **comenzar el trabajo sobre funciones en la escuela secundaria a partir de conocimientos sobre proporcionalidad** que los estudiantes hayan construido durante la Escuela Primaria. Recordemos que este contenido se trabaja de manera recurrente, en forma implícita y explícita, durante la mayoría de los años en este nivel. Sin embargo, nos parece oportuno aclarar que se trata solamente de una posible "entrada" al trabajo funcional, ya que existen otras, una de las cuales analizaremos en la próxima clase.

Dos nociones centrales con respecto a las funciones

Para comenzar nos parece necesario identificar algunas nociones centrales relacionadas con las funciones que nos guíen al momento de pensar una propuesta de enseñanza. Deberemos tenerlas en cuenta tanto para ponerlas en relación con los conocimientos disponibles por parte de los estudiantes como para establecer en qué dirección estos conocimientos podrían avanzar. Estas son las nociones de dependencia y variabilidad, que se ponen en juego al momento de resolver problemas relacionados con la proporcionalidad, razón por la cual se pueden constituir como un buen punto de apoyo para el estudio de las funciones.

Iniciar el trabajo con funciones a partir de la proporcionalidad

Durante el paso por la Escuela Primaria los estudiantes se enfrentan a variados problemas y situaciones que involucran la noción de proporcionalidad, aunque no siempre de manera explícita. Por ejemplo, muchos de los problemas del nivel ponen en juego conocimientos aritméticos del campo multiplicativo, que tratan con algunos aspectos del modelo proporcional. Es también habitual que se utilicen tablas en el contexto de situaciones de proporcionalidad directa para organizar la información, establecer relaciones entre magnitudes, poner en funcionamiento propiedades, establecer razones por medio de comparaciones, etc.

¿Qué aspectos de la proporcionalidad que funcionaban en la escuela primaria son retomados en la escuela media para dar continuidad a este concepto? ¿Qué rupturas hay que introducir para hacer avanzar esta relación? Estas y otras preguntas demandan un tratamiento un poco más exhaustivo que colabore en la configuración de recorridos que permitan a los alumnos estrechar lazos entre sentidos, representaciones y técnicas asociadas a un mismo concepto, pero que a sus ojos aparecen muy lejanos porque el tratamiento en instituciones tan diferentes les impide encontrar los vínculos entre unos y otros.

(Itzcovich H, Grimaldi V, 2013)

El trabajo con tablas y todas las tareas asociadas se pueden constituir como un recurso fértil para iniciar el tratamiento de lo funcional, con el propósito de centrar la atención en el estudio de la dependencia y de la variabilidad. Para avanzar resulta necesario poner el foco en las ideas de cambio y de cantidades variables, reflexionando respecto de la relación entre magnitudes que varían, asociando elementos de dos conjuntos, en donde los cambios en la primera variable provocan cambios en la segunda. De esta manera, comenzar a concebir **el trabajo funcional asociado a procesos de cambio entre variables será parte de los desafíos para la Escuela Secundaria.**

A su vez, emergen algunas rupturas. En el ámbito de las funciones, la tabla es solo una representación posible que recupera algunos valores del proceso de cambio a estudiar, pero no la única. Se torna necesario incluir y organizar el trabajo del aula con nuevas representaciones además de las tablas, como los gráficos o las fórmulas. Además, el trabajo con problemas asociados a las ideas de proporcionalidad en el ámbito de las funciones necesariamente pondrá en marcha la búsqueda de nuevos argumentos y habilitará nuevas formas de validación.

Con la intención de seguir revisando las ideas de proporcionalidad del Nivel Primario, los invitamos a realizar la lectura obligatoria correspondiente a esta clase: un fragmento del texto de Ana Lía Crippa, Verónica Grimaldi y María Valeria Machiunas (2004) "La proporcionalidad".

ACTIVIDAD 2 (LECTURA OBLIGATORIA)

Les proponemos que lean desde la página 50 hasta la 59 del Capítulo 3 del libro "La proporcionalidad" de Ana Lía Crippa, Verónica Grimaldi y María Valeria Machiunas.

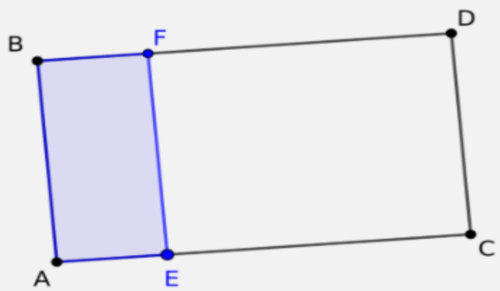
ACTIVIDAD 3

A continuación, les proponemos analizar un problema particular con el objetivo de identificar y reconocer de qué manera se pueden retomar conocimientos sobre proporcionalidad y avanzar en el estudio de la dependencia y de la variabilidad.

El siguiente problema trata de una situación definida a partir de un rectángulo en la que se estudian distintas áreas en función de la longitud de los lados.

Enunciado del Problema

En la siguiente figura, ACDB es un rectángulo de 7 cm de altura que tiene un área de 84 cm². Sobre el segmento AC se marca un punto E y se construye el rectángulo AEFB.



a) Completen la tabla que representa el área del rectángulo AEFB a medida que cambia la longitud del segmento AE.

Longitud del segmento AE (cm)	1	2	3	6	6,5		
Área del rectángulo AEFB (cm^2)							84

b) Escriban una fórmula que les permita calcular el área del rectángulo AEFB para una longitud cualquiera del segmento AE. ¿Cuáles son los posibles valores que puede tomar la variable x?

Foro de cierre de la clase 01

Imaginen que llevan este problema al aula de Ciclo Básico, ¿qué resoluciones esperan que surjan? Compartan una de ellas (puede ser correcta, incorrecta, incompleta). Y recuerden leer las que proponen sus colegas en publicaciones previas no solo para no repetir ideas ni resoluciones sino porque es una buena oportunidad para vincularlas, compararlas, enriquecerlas.

Relacionen la resolución propuesta con lo estudiado a lo largo de esta primera clase, en particular con los conceptos de variabilidad y dependencia. Incluyan citas de la clase y de la bibliografía para fortalecer sus argumentos.

Síntesis y reflexiones finales

Durante esta clase intentamos exponer y analizar una de las formas en las que es posible iniciar el trabajo con funciones en la escuela secundaria: a partir de la proporcionalidad. En una primera instancia identificamos a las nociones de dependencia y variabilidad como dos características principales del abordaje funcional, para luego analizar de qué manera es posible que los estudiantes trabajen sobre estas nociones a partir de sus conocimientos sobre la proporcionalidad. El análisis didáctico sobre un problema particular, que propusimos a modo de ejemplo, nos permitió describir cómo es posible avanzar sobre las nociones de dependencia y variabilidad a partir del trabajo con tablas, cálculos y fórmulas asociados a la proporcionalidad y a otros conocimientos de la Escuela Primaria. También nos permitió identificar otros conocimientos asociados a las funciones que es posible estudiar durante el trabajo con un problema como el propuesto: cuestiones de notación, dominio de una función, continuidad de un proceso, densidad de un conjunto numérico, etc.

Consideramos que la proporcionalidad es un buen punto de apoyo para comenzar el trabajo sobre funciones en la escuela secundaria debido a diferentes factores. Por un lado, la puesta en juego de algunas de sus propiedades permite avanzar sobre el estudio de nociones asociadas a las funciones, como las de dependencia y variabilidad. Además, los cálculos que los estudiantes emplean para resolver problemas de este estilo pueden constituirse como insumo para realizar generalizaciones que permitan desarrollar un tratamiento de tipo algebraico. Otro factor importante es el uso de la tabla como representación de las relaciones entre las variables, que puede constituirse como un punto de apoyo para estudiar gráficos de funciones, tema que trataremos en la próxima clase.

Material de lectura

Crippa, A., Grimaldi, V. y Machiunas, M. (2004). Vínculos entre la proporcionalidad y diferentes contenidos del área (pp. 50-58). En *La proporcionalidad. Documento de apoyo para la capacitación*. Buenos Aires: DGCyE, Subsecretaría de Educación de PBA.

Bibliografía de referencia

Crippa, A., Grimaldi, V. y Machiunas, M. (2004). La proporcionalidad. Documento de apoyo para la capacitación. Buenos Aires: DGCyE, Subsecretaría de Educación de PBA.

Itzcovich H. y Grimaldi V. (2013). Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de Matemática. En Broitman, C. (Comp.) *Matemática en la escuela primaria: saberes y conocimientos de niños y adolescentes*. Buenos Aires: Paidós.

Sadovsky, P. (2005). Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Créditos

Autores: Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto: Novembre, Andrea (coord.) Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula. (2022). Módulo 4. Clase Nro. 1: El inicio del trabajo con funciones en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 2: Iniciar el estudio de funciones a partir del trabajo con gráficos cartesianos

Introducción

Como mencionamos en la presentación del curso, en estas primeras dos clases nos ocuparemos en analizar distintas maneras de comenzar el trabajo con Funciones en la Escuela Secundaria. En la primera clase presentamos un problema en el contexto de áreas de rectángulos que tenía el propósito de recuperar conocimientos de los estudiantes referidos a la proporcionalidad, con el objetivo de hacerlos avanzar hacia el estudio de nociones funcionales como las de dependencia y variabilidad. La propuesta contemplaba el trabajo con tablas, cálculos y fórmulas. En esta clase les propondremos incorporar el trabajo con gráficos cartesianos.

Este tipo de representación y el trabajo en torno a ella se destaca en los núcleos de aprendizaje prioritarios (NAP). Durante el Ciclo Básico de la Escuela Secundaria se busca promover la interpretación de información a partir de gráficos y su relación con otras formas de representación, como tablas, textos, fórmulas, etcétera. En este sentido, desde los diferentes ámbitos de conocimiento matemático, como el Álgebra y las Funciones, resulta importante ofrecer problemas que propongan el análisis de gráficos para estudiar diferentes situaciones.

Para comenzar esta clase, les propondremos retomar el problema con el que trabajamos en la clase anterior, al cual le incorporaremos un nuevo ítem relacionado con la representación gráfica. Luego continuaremos analizando otras situaciones que incluyen gráficos cartesianos y que podrían utilizarse para iniciar el trabajo con Funciones en las aulas.

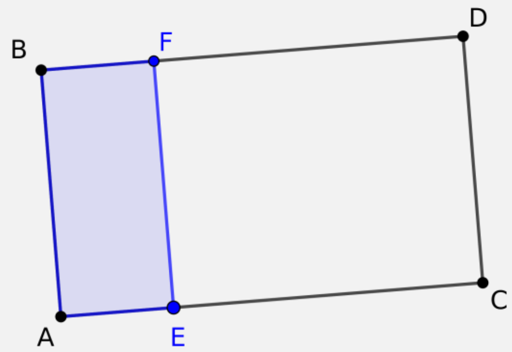
Elegir un gráfico que represente la situación

A continuación, volvemos a presentar el problema con el que trabajamos en la clase 1, pero con la incorporación del ítem d), que trata sobre gráficos cartesianos.

Recordemos el problema que estuvimos analizando en la clase 01

Problema

En la siguiente figura, ACDB es un rectángulo de 7 cm de altura y posee un área de 84 cm². Sobre el segmento AC se marca un punto E y se construye el rectángulo AEFB.



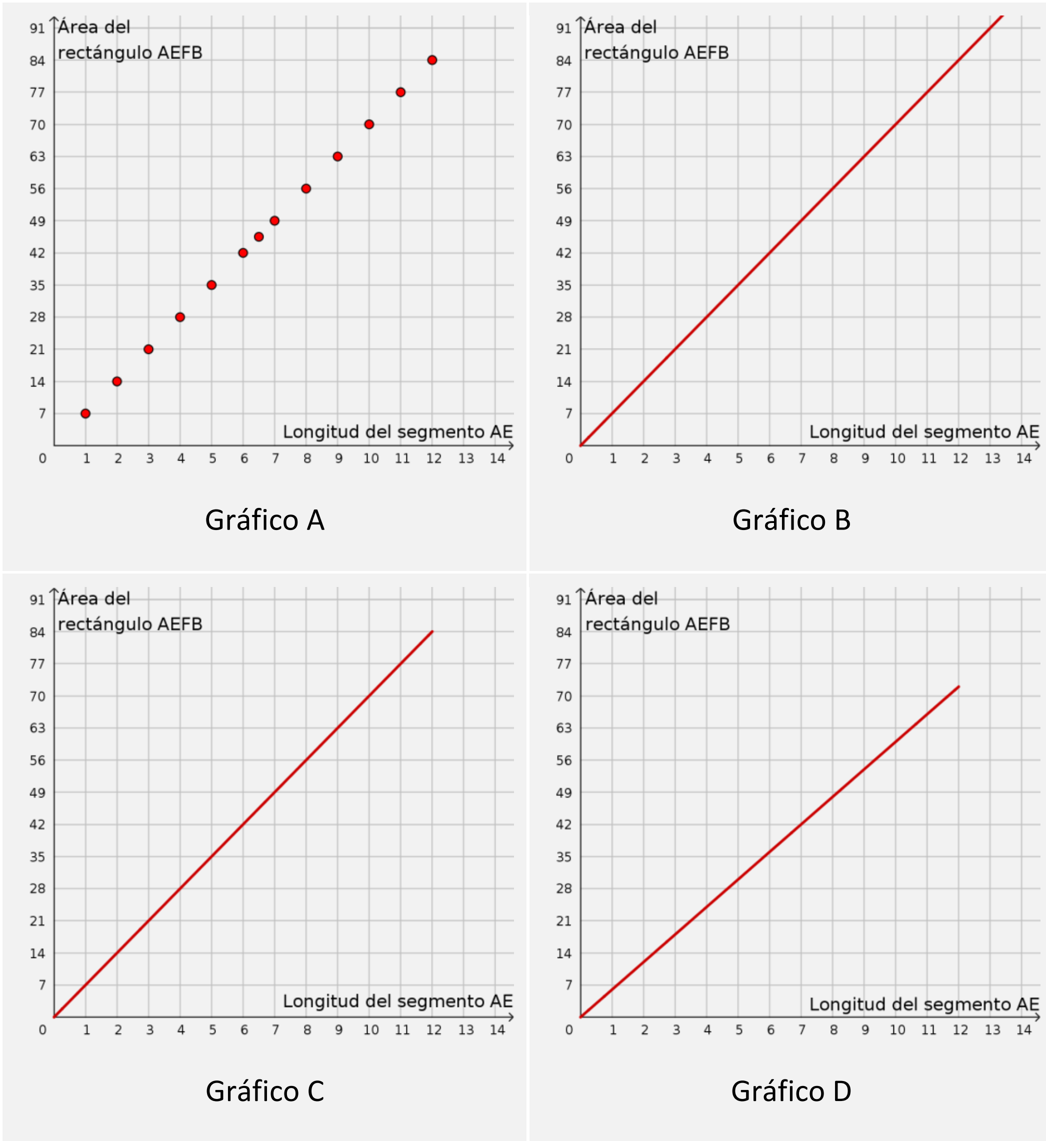
a) Completen la tabla que representa el área del rectángulo AEFB a medida que cambia la longitud del segmento AE.

Longitud del segmento AE (cm)	1	2	3	6	6,5		
Área del rectángulo AEFB (cm²)							84

b) Escriban una fórmula que permita calcular el área del rectángulo AEFB para una longitud x, siendo x una medida cualquiera del segmento AE contenido en el segmento AC.

c) ¿Cuáles son los posibles valores que puede tomar la variable x?

d) ¿Cuál de estos gráficos les parece que representa mejor la relación entre la longitud del segmento AE y el área de los rectángulos?



Si bien algunos estudiantes seguramente tuvieron la oportunidad de trabajar sobre la interpretación de representaciones gráficas en los últimos años de la Escuela Primaria, es probable que no se haya abordado en profundidad. Por este motivo, tal vez sea necesario comenzar su enseñanza a partir de nociones básicas y, hasta se podría decir, intuitivas, para hacerlos avanzar en la comprensión del **registro de representación gráfico**.

La teoría de las **representaciones semióticas** de R. Duval (1995) ofrece categorías teóricas que permiten analizar de manera ordenada y sistemática las producciones matemáticas escritas. Una de estas categorías es la de **registro de representación** que I. Guzmán (1998) describe de la siguiente manera:
"Un registro está constituido por signos en el sentido más amplio de la palabra: trazos, símbolos, íconos... y estos signos están asociados de manera interna y externa...".

En una primera aproximación al trabajo con gráficos cartesianos, los estudiantes suelen tener dificultades más o menos típicas. Por ejemplo, es esperable que les cueste diferenciar qué parte de la representación corresponde específicamente al gráfico de una función y qué parte corresponde a elementos que se utilizan como referencia para enmarcarlo, como podrían ser los valores considerados para los ejes. Para analizar de qué manera se podría trabajar sobre estas cuestiones en el aula, tomemos como ejemplo el ítem d) del problema que se propuso como actividad.

ACTIVIDAD 1: Participación en el foro de la clase 2 (OBLIGATORIA)

Con la intención de avanzar en el análisis del problema que estuvimos estudiando en la clase 1, y que continuamos trabajando en esta clase; los invitamos a que resuelvan el ítem d), que involucra el trabajo con gráficos cartesianos. Con la intención de avanzar en el análisis del problema que estuvimos estudiando en la clase 1, y que continuamos trabajando en esta clase; los invitamos a que resuelvan el ítem d), que involucra el trabajo con gráficos cartesianos.

Para el trabajo en este foro los vamos a invitar a que realicen al menos 2 intervenciones considerando las siguientes consignas:

Intervención 1

Compartan en este foro anticipaciones de posibles resoluciones del ítem d) que podrían hacer las y los estudiantes (ya sea correctas, incorrectas o incompletas), analizando los argumentos que podrían elaborar para elegir o descartar cada uno de los gráficos, poniéndolo en relación con lo abordado en el transcurso de esta clase.

Intervención 2

Lean las intervenciones de sus compañeros y compañeras y elijan una con la que entrar en diálogo, respondan a esa intervención usando la herramienta “Responder a intervención” e identifiquen los tipos de representación que predominan en ella, poniéndola en relación con el texto de lectura obligatoria de la clase: Guzmán R., Ismenia (1998). “Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes”

Obtener información a partir de un gráfico cartesiano

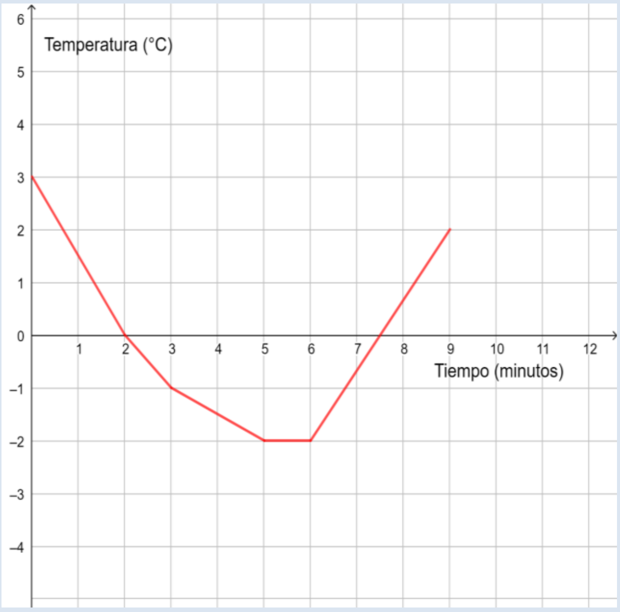
El plano cartesiano es un **registro de representación** en términos de la teoría de las representaciones semióticas de R. Duval (1995). Los signos que lo componen son los ejes, las marcas de la escala sobre los ejes, los puntos graficados, el gráfico de una función, las líneas punteadas que determinan coordenadas, etc. Sin embargo, conocer estos signos no es suficiente para poder hacer una interpretación en el registro, pues es necesario conocer también cómo se relacionan entre sí, cómo “leerlos”, cuáles se pueden agregar o quitar (una cuadrícula) y cuáles no (los ejes), etc. Por ejemplo, para poder interpretar un punto que pertenece al gráfico de una función que representa una determinada situación es necesario establecer relaciones entre el punto y los valores representados en los ejes, uno correspondiente a la variable independiente y otro a la dependiente. Comenzar en las aulas el trabajo con funciones a partir de gráficos cartesianos permite que, al mismo tiempo, los estudiantes construyan ciertos conocimientos acerca del registro de representación y nociones funcionales como la dependencia y variabilidad. A continuación, les compartimos un problema a modo de ejemplo.

Análisis y resolución de un problema

Les proponemos que resuelvan y anticipen posibles resoluciones de las y los estudiantes a propósito del siguiente problema. Las notas que tomen a propósito de este problema serán un buen insumo para enriquecer el análisis posterior que haremos sobre él en el transcurso de la clase.

Problema 2

El siguiente gráfico representa la temperatura de una sustancia desde el momento en que se introduce en un congelador.



a) ¿Cuál es la temperatura de la sustancia a los 3 minutos? ¿Y a los 5 minutos?

b) Identifiquen en qué intervalo de tiempo la temperatura de la sustancia aumentó, y en cuál disminuyó.

c) ¿Es cierto que en un intervalo de tiempo la temperatura no varió? En caso afirmativo, identifiquen en cuál. Si no, expliquen por qué.

Para resolver el ítem a) los estudiantes deberán identificar el punto del gráfico que corresponde al valor 3 en el eje horizontal, para luego determinar que en ese instante la temperatura es -1 °C, ya que ese es el valor del eje vertical que le corresponde al punto. Para esto podrán apoyarse en la cuadrícula que ofrece la representación. De manera análoga, podrían determinar la temperatura a los 5 minutos. Las respuestas a estas preguntas requieren de una lectura puntual del gráfico, que abona a que los estudiantes reconozcan la dependencia entre las variables a la vez que elaboran estrategias para interpretar la representación: sobre el trazo rojo se pueden identificar puntos que están asociados con valores de los ejes que representan la temperatura de la sustancia para un instante de tiempo determinado.

Con respecto al ítem b), puede resultar intuitivo para los estudiantes reconocer que en los primeros 5 minutos la temperatura disminuye y que entre los minutos 6 y 9 aumenta. Sin embargo, para realizar esta interpretación se está realizando una lectura distinta del gráfico que la que se hizo para el ítem anterior. En este caso se está considerando la variabilidad, identificando qué sucede con la variable dependiente (temperatura) a medida que aumenta la variable independiente (tiempo). En este caso, la interpretación está favorecida por la familiaridad de la situación, lo que permite que los estudiantes la estudien en términos de variaciones, a la vez que continúan construyendo estrategias de interpretación de los gráficos cartesianos de funciones.

Para el ítem c) se espera que los estudiantes interpreten que el segmento horizontal que forma parte del gráfico representa un tramo de la función en donde no varía la temperatura, es decir, con la temperatura constante.

Actividad 2 (lectura Obligatoria)

Para continuar profundizando los contenidos de esta clase les proponemos la siguiente lectura.

Guzmán R., Ismenia (1998). “Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes”. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en línea] 1 (marzo).

Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf ISSN 1665-2436. Pág. 2 y 3.

Actividades

ACTIVIDAD 1: Participación en el foro de la clase 2 (OBLIGATORIA)

Con la intención de avanzar en el análisis del problema que estuvimos estudiando en la clase 1, y que continuamos trabajando en esta clase; los invitamos a que resuelvan el ítem d), que involucra el trabajo con gráficos cartesianos. Les proponemos que compartan en este foro anticipaciones de posibles resoluciones del ítem d) que podrían hacer las y los estudiantes (ya sea correctas, incorrectas o incompletas), analizando argumentos que las y los estudiantes podrían elaborar para elegir o descartar cada uno de los gráficos, poniéndolo en relación con lo abordado en el transcurso de esta clase.

Compartan estas estrategias de resolución (que pueden ser correctas, incorrectas, incompletas) en el foro.

ACTIVIDAD 2 (LECTURA OBLIGATORIA)

Para continuar profundizando los contenidos de esta clase les proponemos la siguiente lectura.

Guzmán R., Ismenia (1998). "Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea] 1 (marzo). Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf ISSN 1665-2436. Pág. 2 y 3.

Material de lectura

Guzmán R., Ismenia (1998). "Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea] 1 (marzo). Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf ISSN 1665-2436. Pág. 2 y 3.

Bibliografía de referencia

Duval, R. (1998). "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento” en Espinosa, F.H. *Investigaciones en Matemática Educativa II.* págs. 173-201. México: Grupo editorial Iberoamérica.

Guzmán R., Ismenia (1998). “Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea] 1 (marzo). Disponible en: **http://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf** ISSN 1665-2436.

Créditos

Autores: Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.) Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2022). Módulo 4. Clase Nro. 1: El inicio del trabajo con funciones en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 3: Incorporar la tecnología para el estudio de variaciones

Introducción

En las dos clases anteriores la propuesta giró en torno a un problema que proponía el estudio de una situación geométrica en términos funcionales. Analizamos de qué manera se podrían recuperar los conocimientos trabajados durante la Escuela Primaria para hacerlos avanzar hacia los que se proponen construir la escuela secundaria, en particular los correspondientes a la proporcionalidad y a la interpretación de gráficos cartesianos. Con este objetivo, explicitamos dos nociones que resultan fundamentales para el aprendizaje de las Funciones: la dependencia y la variabilidad. En esta clase nos centraremos en el estudio de variaciones con el uso de herramientas tecnológicas, analizando de qué manera es posible llevarlo a cabo y cuáles son las ventajas de realizarlo de esta manera.

Al igual que en las clases anteriores, en esta oportunidad también les propondremos la resolución de un problema que tomaremos como ejemplo y sobre el cual iremos desarrollando las reflexiones y los análisis e incorporando algunas cuestiones teóricas y lecturas que nos permita fundamentarlos.

El programa GeoGebra

Es probable que muchos conozcan este programa y lo reconozcan como uno de los recursos tecnológicos potentes para la enseñanza de la Matemática, debido a que está diseñado como herramienta didáctica que busca favorecer la exploración y la investigación como medios para aprender. A nivel técnico, tiene la ventaja de que sus actualizaciones son constantes, es libre y multiplataforma. Es decir que se puede utilizar en distintos dispositivos (PC, teléfonos celulares, *tablets*) y ejecutar de distintas maneras (*online* y *offline*, mediante descarga). Las capturas de pantalla que se mostrarán en esta clase pertenecen a la versión *online* ejecutada en el navegador de una PC, debido a que es la de más fácil acceso por medio de enlaces y la que más se parece a las demás versiones. Sin embargo, a continuación, les ofrecemos distintos enlaces de descarga e instalación para las distintas versiones.

Descarga e instalación de GeoGebra

Para PC:

https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Installation#GeoGebra_Classic_6

Para Android:

https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android.calculator.suite

Para iOS:

https://apps.apple.com/us/app/geogebra-calculator-suite/id1504416652

Para iPad:

https://itunes.apple.com/gb/app/geogebra/id687678494?mt=8

GeoGebra *online*

https://www.geogebra.org/classic

Desde un punto de vista didáctico, GeoGebra incorpora las ramas de la Matemática que son objeto de enseñanza en la escuela permitiendo interactuar entre ellas, posibilita trabajar los contenidos desde distintos registros de representación y, al existir una enorme comunidad de educadores que lo usan, se pueden encontrar una cantidad inmensa de prácticas y recursos compartidos.

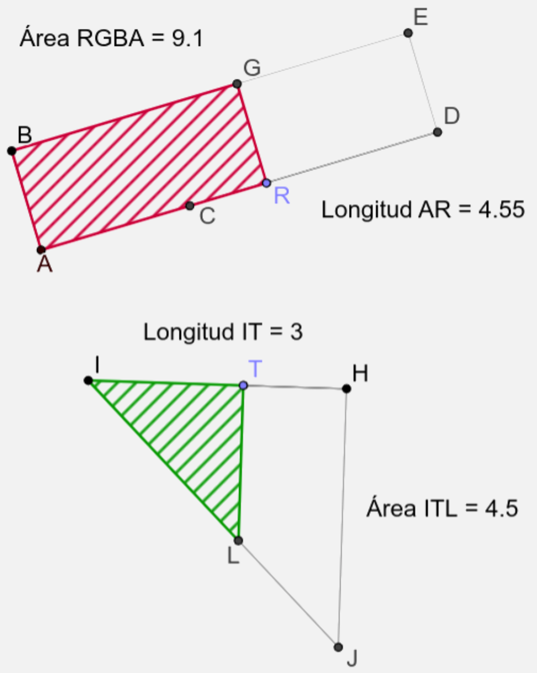
El problema que le presentamos a continuación para resolver y analizar toma como base un escenario armado (*applet*) que lo compartimos como parte de la comunidad de uso de GeoGebra.

El estudio de la variación uniforme

ACTIVIDAD 1 (primera parte)

Les proponemos que consideren el siguiente problema y que lo resuelvan teniendo en cuenta la siguiente pregunta: ¿Cuáles creen que son los argumentos que podrían usar los estudiantes para confirmar o refutar las afirmaciones formuladas en cada uno de los ítems?

Ingresen a un escenario armado en GeoGebra mediante el enlace. En él encontrarán un rectángulo y un triángulo rectángulo isósceles como se muestra en la siguiente figura, con los segmentos RG y TL paralelos a los lados AB y HJ, respectivamente.



1. Desplacen los puntos R y T e identifiquen qué magnitudes varían y cuáles no.

2. Teniendo en cuenta que las relaciones de **variación uniforme** son un tipo de relación en la cual a variaciones iguales de una de las variables le corresponden variaciones iguales de la otra variable.

   Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o no, fundamentando sus decisiones.

   - Al desplazar el punto R hacia el punto D, el área del rectángulo ARGB varía de manera uniforme en función de la variación de la longitud del segmento AR.
   - Al desplazar el punto T hacia el punto H, el área del triángulo ITL varía de manera uniforme en función de la variación de la longitud del segmento IT.

Al explorar las figuras del escenario armado a partir del desplazamiento de los puntos móviles R y T, en el ítem 1 se pueden identificar cuáles son las magnitudes que varían y cuáles son las que no lo hacen. Por ejemplo, el área y el perímetro de las figuras rayadas y la longitud de los lados IL, IT, TL, AR y BG se pueden identificar como variables. Por otro lado, también es posible reconocer que otras no varían o que están fijas, como pueden ser la amplitud de los ángulos o la altura correspondiente al lado AR. La presentación de la situación geométrica en el entorno de GeoGebra permite que los estudiantes exploren las relaciones en términos de variabilidad y dependencia, ofreciendo la posibilidad de que sean ellos los que reconozcan que existen objetos que se desplazan y que, a su vez, determinan el desplazamiento y la variación de otros. En este caso, de todas las posibles relaciones entre las magnitudes que varían se propone estudiar la variación de las áreas rayadas en función de la longitud de los segmentos AR e IT.

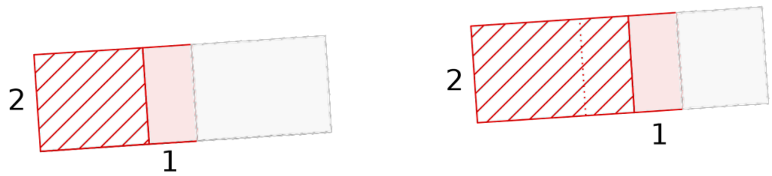
Uno de los propósitos del ítem 2 es estudiar variaciones en clave de si son o no uniformes. Si bien la situación que se presenta es geométrica, los argumentos que se pueden elaborar a propósito de las afirmaciones podrían estar vinculados tanto a razonamientos geométricos como a aritméticos y algebraicos.

A continuación, en todos los casos considerados según el tipo de razonamiento empleado se concluye que la variación del área del rectángulo es uniforme porque, al aumentar en una unidad la base del rectángulo rayado, su área aumenta en dos unidades.

Para continuar con la lectura de la clase les sugerimos que tengan abierto el escenario armado en GeoGebra, de manera de poder ir realizando en el programa la manipulación que se describe como parte de las resoluciones posibles. Les volvemos a compartir el enlace.

Análisis desde un marco geométrico

Para el caso del rectángulo, cuando se amplía en una unidad la longitud del segmento AR (base de cualquier posible rectángulo rayado) es posible calcular el área del nuevo rectángulo sumando el área de la figura original (rectángulo rayado) con la de un rectángulo de dos unidades de área (rectángulo rosa).



Es decir que, sin importar cuál es el rectángulo original, siempre que su base varíe una unidad, su área variará dos unidades. Con este argumento se puede asegurar que el área del rectángulo ARGB **varía de manera uniforme** en función de la variación de longitud del segmento AR.

En ambos casos, las distintas figuras en las cuales es posible apoyarse para hacer el análisis se pueden obtener rápidamente en el escenario de GeoGebra desplazando los puntos R y T.

Análisis desde un marco aritmético

Con el objetivo de realizar el estudio que propone el problema, los estudiantes podrían confeccionar tablas y analizar de qué manera varían los valores de las magnitudes que hayan obtenido. Por ejemplo, en el caso del rectángulo, al considerar una tabla como la siguiente, podrían observar que al aumentar en una unidad la longitud del segmento AR, el área del rectángulo rayado aumenta en dos unidades.

+1 +1 +1

Longitud del segmento AR	3	4	5	6
Área del rectángulo ARGB	6	8	10	12

+2 +2 +2

Esto se podría considerar como evidencias a favor de la conjetura que afirma que en este caso **se trata de una situación de variación uniforme**. Nos referimos a una conjetura y no a una prueba ya que se estudia la variación solo para algunos valores determinados.

Para llevar a cabo una resolución desde esta perspectiva también podría utilizarse el escenario armado en GeoGebra. Los valores de longitudes y áreas de cada una de las tablas podrían completarse a partir del desplazamiento de los puntos móviles R y T, ya que el *applet* muestra los valores correspondientes a las figuras que se van obteniendo.

Análisis desde un marco algebraico

Los estudiantes también podrían resolver el problema a través de un razonamiento algebraico, poniendo en juego el uso de las fórmulas que se utilizan para calcular las áreas de las figuras involucradas. Es importante tener en cuenta que el desarrollo de estas ideas debe ser acompañado por el docente, pues el uso de las fórmulas que se requieren para analizar la variación de áreas difiere del su uso habitual, que pone el acento en el cálculo.

Por ejemplo, los estudiantes podrían construir una fórmula que calcule el área de los rectángulos ARGB en función de la longitud de su base b, reemplazando la altura por 2 en la fórmula estándar:

$$\text{Área de ARGB} = b \cdot 2$$

Al aumentar en una unidad, la longitud de la base de cierto rectángulo ARGB se obtiene un nuevo rectángulo AR’G’B, cuya área se puede calcular a partir del área del rectángulo original.

Se puede llegar así a la conclusión de que el área del nuevo rectángulo es el área del rectángulo original aumentada en dos unidades de área. De esta manera, independientemente del rectángulo que consideremos, siempre que aumentemos la longitud de su base en una unidad, su área aumentará dos unidades.

Algunas reflexiones sobre los análisis desde los distintos marcos

El análisis desde los marcos geométrico, aritmético y algebraico tiene como objetivo poner a disposición de los estudiantes una estrategia útil para estudiar si la variación del área es uniforme o no: considerar el caso en el que la longitud del segmento base va aumentando de a una unidad. En cada una de estas resoluciones la variación puede identificarse de manera distinta, ya que se trata de razonamientos equivalentes que se dan en diferentes marcos interpretativos. Es valioso para la formación matemática del estudiante ponerlos en relación y comprender esas equivalencias.

Cabe destacar que los argumentos vinculados a razonamientos de tipo geométrico, aritmético y algebraico generalmente no se dan de forma separada, de la manera en que se hizo el análisis. El ida y vuelta entre estos tipos de razonamientos e interpretaciones es lo que suele llamarse “juego de marcos”. En cuanto a las anticipaciones sobre posibles resoluciones de los estudiantes, es esperable que su producción también posea estas características e incluya estrategias más artesanales. La información que extraigan del modelo podría estar organizada en esquemas y diagramas, en listas, mediante descripciones coloquiales, en diferentes tipos de tablas, etcétera.

A partir del análisis de estos primeros dos ítems, podemos concluir que:

- Una estrategia útil para decidir si la variación del área es uniforme o no es analizar el caso en el que la longitud del segmento base va aumentando de a 1 unidad.
- Hay tres tipos de abordajes posibles del problema: geométrico, algebraico y aritmético. La variación puede identificarse en cada uno de estos marcos de manera distinta, pero por medio de razonamientos equivalentes. Es valioso para la formación matemática del estudiante ponerlos en relación y comprender esas equivalencias.

Es importante que como docentes reconozcamos la distancia que puede existir entre nuestras propias producciones (expertas) y las de los estudiantes. El objetivo es generar estrategias de acompañamiento que les permitan a los alumnos registrar, seleccionar, organizar y manipular los datos extraídos del modelo para avanzar hacia resoluciones válidas.

El estudio de variaciones a partir de los gráficos de funciones

Estudiar el tipo de variación de una función es un aspecto fundamental del trabajo matemático. Es sabido que las situaciones de variación uniforme caracterizan a los modelos lineales y son las primeras funciones que se estudian en profundidad durante el Ciclo Básico. Identificar este tipo de variación y estudiar las formas que toma en sus diferentes representaciones puede ser un asunto sustancial para considerar desde las propuestas de enseñanza. Por consiguiente, en los análisis desarrollados desde los marcos geométrico, aritmético y algebraico que se compartieron en la primera parte de la clase se delimitó un conjunto de abordajes con el propósito de construir algunos sentidos en relación con la variación uniforme poniendo en cuestión fórmulas y tablas, entre otros. De igual importancia, el análisis de situaciones que no sean de variación uniforme forma parte de los recorridos que se esperan realizar a lo largo de la Escuela Secundaria, ya sea para diferenciar ambos tipos de variación (uniforme y no uniforme) como para estudiar en profundidad algún tipo de variación particular, como por ejemplo, la de funciones cuadráticas o también exponenciales. En este sentido, el estudio de variaciones no uniformes también puede contemplar el trabajo con diferentes marcos y representaciones, como se mostró en el ejemplo desarrollado.

En lo que sigue nos interesa indagar de qué manera se podría discutir la variación poniendo en juego gráficos cartesianos de funciones. Antes de continuar con la lectura de la clase, les proponemos trabajar con las consignas que siguen a continuación.

ACTIVIDAD 1 (segunda parte)

Les proponemos retomar la situación de la primera parte de la Actividad 1 y les pedimos que consideren el mismo escenario armado en GeoGebra con el archivo compartido en este enlace:

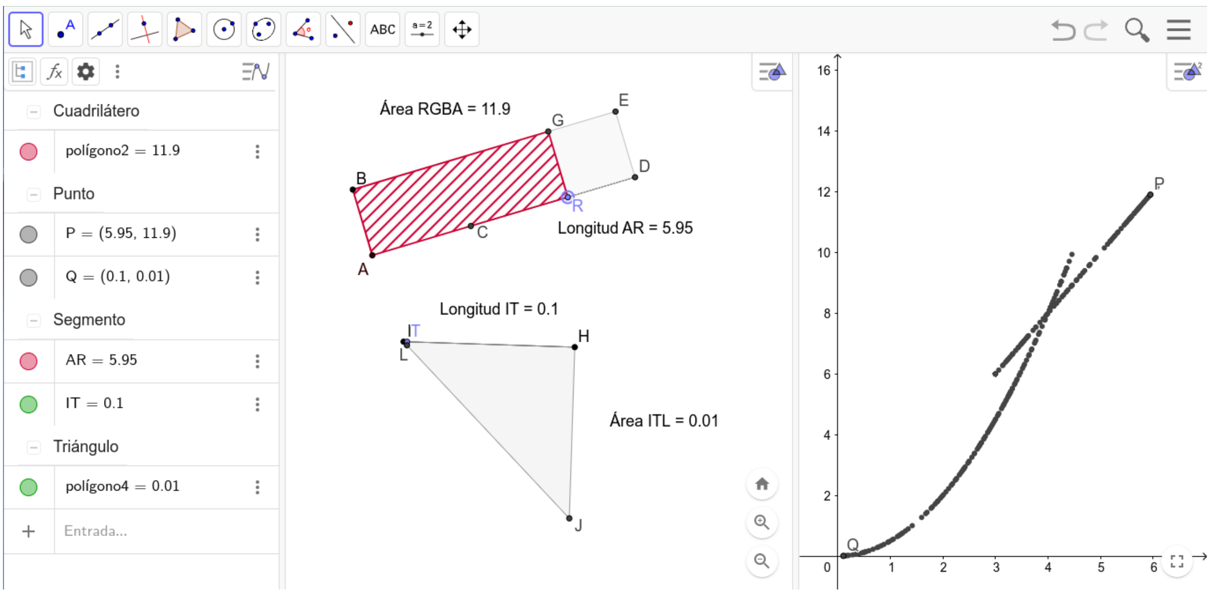
1. Lleven a cabo el siguiente instructivo en el mismo archivo utilizado anteriormente.
   a. Abran la *Vista Gráfica 2* y la *Vista Algebraica*.
   b. En la *Vista Gráfica 2* definan un punto P cuyas coordenadas sean la longitud del segmento AR y el área del rectángulo rayado. Por ejemplo, ingresen en la barra de *Entrada*: "P=(AR, polígono2)"
   c. Activen la opción *Activa Rastro* del punto P.
   d. Dinamicen la construcción moviendo el punto R y observen el recorrido del punto P.
2. De manera análoga, definan un punto Q cuyas coordenadas sean la longitud del segmento IT y el área del triángulo rayado: "Q=(IT, polígono4)".
3. ¿Cómo se pueden utilizar los rastros de los puntos P y Q para explicar las variaciones estudiadas?
4. En la *Vista Gráfica 2*, mediante la barra de *Entrada*, ingresen fórmulas que representen la variación de las áreas en función de la longitud de los

segmentos. ¿Cuál es la relación entre el rastro de P y Q y las gráficas obtenidas?

El uso simultáneo de distintas vistas de GeoGebra

El ítem 1 comienza solicitando que se realicen una serie de pasos para la construcción de puntos dinámicos. A continuación, les ofrecemos un video en el cual se describe la construcción.

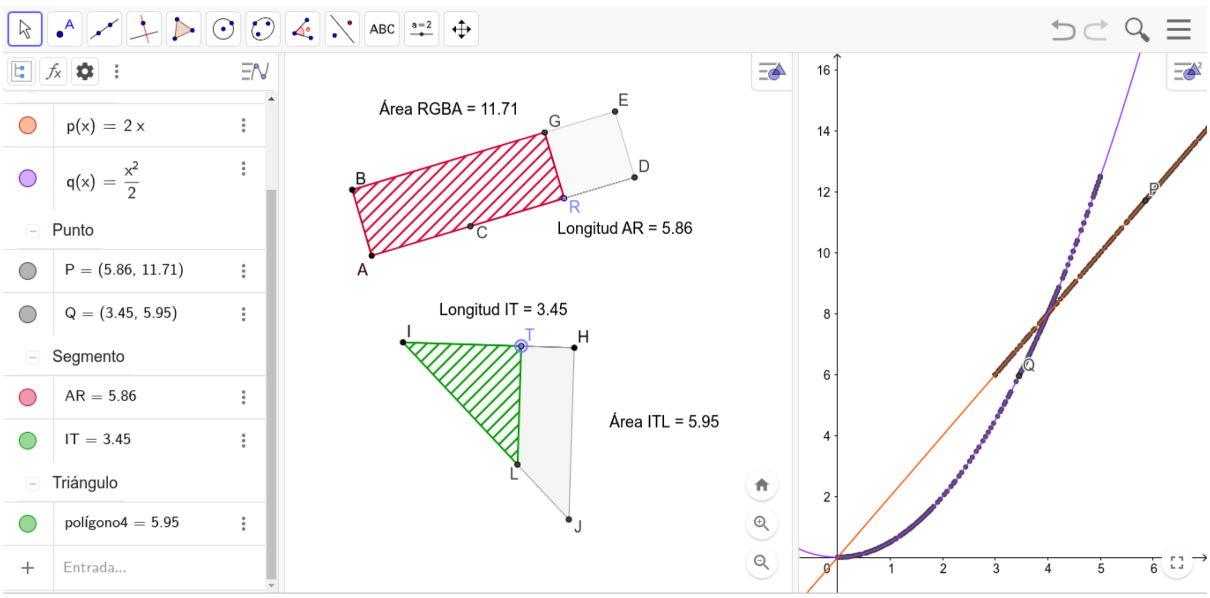
El siguiente video describe la construcción solicitada en la actividad.
https://youtu.be/dvUrliEG8-o



A partir de esta actividad se puede analizar de qué manera el uso de distintas vistas en simultáneo y la relación entre los objetos de cada una de ellas nos permite dar respuesta a los interrogantes que nos propone el problema.

En primer lugar, consideremos la interacción, simultánea y dependiente, **entre el modelo geométrico dinámico y el rastro**. Al desplazar el punto R en el modelo geométrico del rectángulo, se desplaza el punto P describiendo su rastro; y lo mismo sucede en el caso del triángulo con el punto Q. Esto posibilita obtener información acerca del modelo dinámico realizando un análisis del rastro. Por ejemplo, para **decidir si las afirmaciones del ítem 2 de la primera parte son verdaderas o falsas**, se puede conjeturar que el rastro correspondiente al modelo del triángulo corresponde al gráfico de una función lineal (pues no describe una línea recta) y, por lo tanto, no está asociado a una variación uniforme. En el caso del modelo del rectángulo, el rastro del punto P pareciera describir una línea recta y, por lo tanto, podría estar asociado a una variación uniforme. Es importante remarcar que en este análisis decidimos utilizar la palabra "conjeturar" en lugar de "afirmar" ya que muchas veces **"lo que vemos" no alcanza** para validar matemáticamente. Por ejemplo, para alguna escala en el sistema de ejes cartesianos el rastro producido por el punto Q podría asemejarse al de una línea recta.

En segundo lugar, consideremos la relación entre los rastros que describen los puntos P y Q y **los gráficos de las funciones que representan los modelos dinámicos**. Para realizar este análisis se pueden emplear fórmulas que representen las funciones asociadas a cada modelo dinámico, como se pide en el ítem 3 de la actividad. Estas podrían ser $p(x) = 2x$, para el caso del rectángulo; y $q(x) = \frac{x^2}{2}$, para el caso del triángulo (se sugiere el uso de las letras "p" y "q" para que no entren en conflicto con los nombres de otros elementos del archivo de GeoGebra).



Podemos observar que los gráficos de las funciones quedan superpuestos con los rastros determinados por los puntos, dejando en evidencia que **el gráfico de la función está compuesto por todos los puntos que cumplen con la relación.** A su vez, se puede identificar en los rastros que los puntos tienen un recorrido limitado. En este caso, los puntos las coordenadas de los puntos P y Q sólo tienen sentido para las longitudes de los segmentos y las áreas de las figuras rayadas; en consecuencia, sus coordenadas están sujetas al dominio de estas magnitudes.

Este estudio que realizamos a partir de la última actividad nos permitió reflexionar sobre algunos asuntos en relación con la representación gráfica de las funciones involucradas en un entorno dinámico computacional. Para profundizar estas ideas y estudiar otras situaciones fértiles para este estilo de propuestas les sugerimos la siguiente lectura.

ACTIVIDAD 2 (Lectura obligatoria)

Para continuar profundizando los contenidos de esta clase les proponemos la lectura del artículo "Diseño colaborativo de una propuesta para abordar la noción de función que coordina gráficos cartesianos con modelos geométricos dinámicos", elaborado por Carmen Sessa (*et. al*).

https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/28177/29413

ACTIVIDAD 3 (Obligatoria): Participación en el foro de la clase 3

En la primera parte de la Actividad 1, analizamos el problema del rectángulo vinculándolo con los distintos marcos de interpretación (geométrico, aritmético, algebraico). En este foro les proponemos realizar un análisis similar pero teniendo en cuenta, en este caso, el triángulo.

Para el trabajo en este foro los vamos a invitar a que realicen al menos 2 intervenciones considerando las siguientes consignas:

Intervención 1

Elijan uno de los marcos de interpretación y realicen las siguientes actividades.

1) Planteen una posible resolución de los estudiantes y analicen por qué se encuentra dentro del marco elegido.

Anticipen posibles errores que puedan surgir, vinculados al marco que eligieron.

Intervención 2

Lean las intervenciones de sus compañeros y compañeras y elijan una para entrar en diálogo, respondan a esa intervención usando la herramienta “Responder a intervención” y planteen acuerdos, desacuerdos, agreguen ejemplos, posibles errores, etc.

Reflexiones finales

El trabajo con funciones en la Escuela Secundaria se puede iniciar a partir de distintas propuestas de resolución de problemas que requieran desplegar estrategias sustentadas en conocimientos construidos durante la Escuela Primaria. A su vez, uno de los propósitos es hacerlas avanzar con la intención de estudiar diversas características de las funciones, como son la dependencia y la variabilidad. En esta clase nos centramos en particular en el estudio de la variación, ya que la identificamos como una de las características distintivas del trabajo con Funciones en el Nivel Secundario. Para ello, propusimos actividades que requieren de un trabajo coordinado entre los distintos aspectos y representaciones de las situaciones, con el objetivo de que los estudiantes logren realizar una construcción del objeto matemático Función con la mayor riqueza matemática posible.

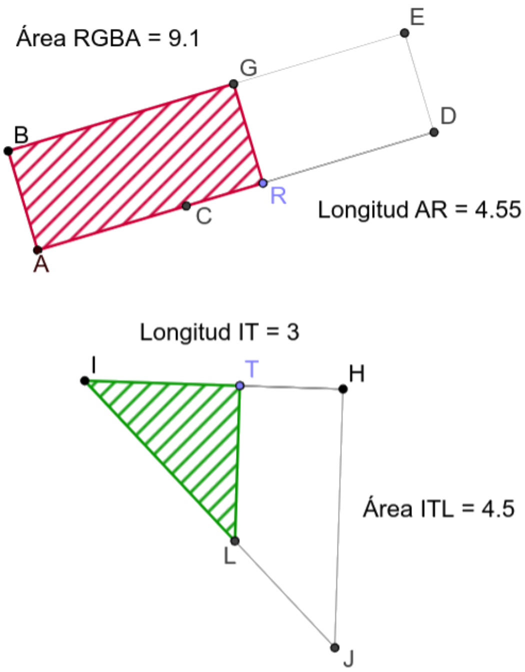
En la siguiente clase profundizaremos sobre las diferentes concepciones de la noción de función con el objetivo de disponer de más herramientas que enriquezcan las reflexiones que fuimos realizando a lo largo de estas clases.

Actividades

ACTIVIDAD 1 (primera parte)

Les proponemos que consideren el siguiente problema y que lo resuelvan teniendo en cuenta la siguiente pregunta: ¿Cuáles creen que son los argumentos que podrían usar los estudiantes para confirmar o refutar las afirmaciones formuladas en cada uno de los ítems?

Ingresen a un escenario armado en GeoGebra mediante el enlace. En él encontrarán un rectángulo y un triángulo rectángulo isósceles como se muestra en la siguiente figura, con los segmentos RG y TL paralelos a los lados AB y HJ, respectivamente.



3. Desplacen los puntos R y T e identifiquen qué magnitudes varían y cuáles no.

4. Teniendo en cuenta que las relaciones de **variación uniforme** son un tipo de relación en la cual a variaciones iguales de una de las variables le corresponden variaciones iguales de la otra variable.

   Decidan si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o no, fundamentando sus decisiones.

   - Al desplazar el punto R hacia el punto D, el área del rectángulo ARGB varía de manera uniforme en función de la variación de la longitud del segmento AR.

- Al desplazar el punto T hacia el punto H, el área del triángulo ITL varía de manera uniforme en función de la variación de la longitud del segmento IT.

ACTIVIDAD 1 (segunda parte)

Les proponemos retomar la situación de la primera parte de la Actividad 1 y les pedimos que consideren el mismo escenario armado en GeoGebra con el archivo compartido en este enlace:

5. Lleven a cabo el siguiente instructivo en el mismo archivo utilizado anteriormente.

    a. Abran la *Vista Gráfica 2* y la *Vista Algebraica*.
    b. En la *Vista Gráfica 2* definan un punto P cuyas coordenadas sean la longitud del segmento AR y el área del rectángulo rayado. Por ejemplo, ingresen en la barra de *Entrada*: "P=(AR, polígono2)"
    c. Activen la opción *Activa Rastro* del punto P.
    d. Dinamicen la construcción moviendo el punto R y observen el recorrido del punto P.

6. De manera análoga, definan un punto Q cuyas coordenadas sean la longitud del segmento IT y el área del triángulo rayado: "Q=(IT, polígono4)".

7. ¿Cómo se pueden utilizar los rastros de los puntos P y Q para explicar las variaciones estudiadas?

8. En la *Vista Gráfica 2*, mediante la barra de *Entrada*, ingresen fórmulas que representen la variación de las áreas en función de la longitud de los segmentos. ¿Cuál es la relación entre el rastro de P y Q y las gráficas obtenidas?

ACTIVIDAD 2 (LECTURA OBLIGATORIA)

Para continuar profundizando los contenidos de esta clase les proponemos la lectura del artículo "Diseño colaborativo de una propuesta para abordar la noción de función que coordina gráficos cartesianos con modelos geométricos dinámicos", elaborado por Carmen Sessa, Marina Andrés, María Teresa Coronel, Enrique Di Rico, Juan Pablo Luna y el resto del grupo Lunes.

https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/28177/29413

ACTIVIDAD 3 (Obligatoria): Participación en el foro de la clase 3

En la primera parte de la Actividad 1, analizamos el problema del rectángulo vinculándolo con los distintos marcos de interpretación (geométrico, aritmético, algebraico). En este foro les proponemos realizar un análisis similar, pero teniendo en cuenta, en este caso, el triángulo.

Para el trabajo en este foro los vamos a invitar a que realicen al menos 2 intervenciones considerando las siguientes consignas:

Intervención 1

Elijan uno de los marcos de interpretación y realicen las siguientes actividades.

Planteen una posible resolución de los estudiantes y analicen por qué se encuentra dentro del marco elegido.

Anticipen posibles errores que puedan surgir, vinculados al marco que eligieron.

Intervención 2

Lean las intervenciones de sus compañeros y compañeras y elijan una para entrar en diálogo, respondan a esa intervención usando la herramienta “Responder a intervención” y planteen acuerdos, desacuerdos, agreguen ejemplos, posibles errores, etc.

Material de lectura

Sessa, C. (Et. al) (2020) Revista de Educación Matemática. Volumen 35, N.º 1 (2020), páginas 45 – 60 V. Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC).

Bibliografía de referencia

ANSES, Programa Conectar Igualdad, Plan Escuelas de Innovación de la Dirección de Comunicación y Contenidos, Equipo de Matemática: Andrea Novembre, Mauro Nicodemo y Pablo Coll (2015) Matemática y TIC. Orientaciones para la enseñanza.

Arcavi, A., y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, 15-25.

Douady, Régine (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.* (7.2), 5-32. Editions La Pensée Sauvage: París, Francia. (Traducido al castellano, “Relación enseñanza - aprendizaje, dialéctica instrumento - objeto y juego de marcos”).

Créditos

Autores: Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto:
Novembre, A. (coord.) Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2022). Módulo 4. Clase Nro. 3: Incorporar la tecnología para el estudio de variaciones. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 4: Las concepciones de la noción de función

Presentación

Les damos la bienvenida a la última clase de este módulo. Durante las clases anteriores pusimos el foco en la noción de modelización matemática, en posibles entradas al estudio de las funciones y en diferentes formas de representarlas. Trabajamos con problemas que requieren poner en discusión algunos asuntos centrales, como el tipo de variación, los límites y alcances de las representaciones, discutimos en torno a sus características y reflexionamos acerca de la importancia de su inclusión en nuestras clases de matemática.

Será objetivo de esta clase recorrer algunas concepciones de la noción de función y reflexionar acerca de ellas en relación con su estudio en la escuela secundaria. Por último, nos detendremos a estudiar una secuencia didáctica sobre modelos lineales, analizando características de los problemas, posibles resoluciones y su relación con los conceptos teóricos abordados.

Esperamos realizar un aporte que posibilite ampliar el repertorio de herramientas didácticas a disposición de los profesores y enriquecer el tratamiento de esta temática en la clase de Matemática.

ACTIVIDAD 1 (Lectura)

Como parte de las **actividades** de la clase, les proponemos que lean el texto *La Noción de función a través de la historia* de Mirta Hanfling (2001).

Disponible en:

https://drive.google.com/file/d/1PsBrIfP7GkdDNx2_Q31ouYcq7OP8WiCY/view?usp=sharing

Tomen nota de las ideas centrales que la autora propone, que podrán tomar en cuenta para la realización de la actividad obligatoria correspondiente a esta clase y para el trabajo final del módulo.

Luego de la lectura del texto, les proponemos participar de un espacio de discusión colectiva cuya intención es compartir las reflexiones de la lectura del texto propuesto.

ACTIVIDAD 2

Participación en el foro de la clase 4

Les proponemos identificar y poner en discusión las ideas centrales del texto de Mirta Hanfling "Estudio didáctico de la noción de función". También pueden señalar aspectos que les parecieron interesantes o controversiales y dudas, etc.

Nos interesa señalar algunas ideas que propone el texto y que consideramos centrales para enmarcar el trabajo posterior, tanto en el marco de esta clase como en el trabajo final del módulo.

A lo largo de la historia surgieron diferentes concepciones de la noción de función. Las primeras estuvieron vinculadas con el estudio de la variación y la dependencia. Se trató de un **abordaje dinámico**, estrechamente ligado al análisis de los cambios en los fenómenos físicos. Las concepciones más modernas adquirieron un **abordaje estático**, y fueron desplazando gradualmente al dinamismo, hasta culminar con representaciones abstractas, vinculadas a la idea de función como correspondencia.

Considerar este proceso histórico nos ayuda a entender que cada definición del concepto de función nació en respuesta a la necesidad de resolver un tipo particular de problema. En este sentido, está estrechamente vinculado a la idea de modelización matemática estudiada en la primera clase del módulo.

Es importante poder analizar e identificar las concepciones de función implícitas en nuestras planificaciones, ya que nuestros estudiantes construirán la idea de lo que es una función a partir del trabajo que se haga en la clase de Matemática.

Con el objetivo de seguir reflexionando acerca de los diferentes abordajes del concepto de función que pueden generarse a partir de la resolución de problemas, les proponemos que analicen tres resoluciones de un mismo problema, producidas por estudiantes de nivel secundario.

Para tener en cuenta antes de continuar con la lectura de la clase

A continuación, les presentamos un problema acompañado por tres resoluciones producidas por estudiantes de Nivel Secundario. Les proponemos que identifiquen, en cada una de ellas, las concepciones de función estudiadas en la actividad anterior que ponen en juego: ¿se trata de abordajes dinámicos o estáticos?

Tomen nota de los argumentos que respaldan sus afirmaciones.

El proceso de vaciamiento de un tanque de 200 litros de capacidad se puede representar a partir de esta fórmula $A = 200 - 5 \cdot t$, en la que t representa el tiempo medido en minutos que transcurre desde que comenzó el proceso, y A representa la cantidad de agua que queda en el tanque, desde que empezó a vaciarse, expresada en litros.

a) ¿Es posible saber si el tanque estaba lleno al comenzar el proceso?
b) ¿Cuánto tiempo tardó en vaciarse?
c) ¿Cuánta agua contenía el tanque a los 15 minutos? ¿Y a los 16 minutos?
d) ¿Cuánta agua se sacó del tanque a los 15 minutos?
e) ¿En qué momento el tanque contiene 145 litros?

Resolución 1

ⓐ $t=0$

$A = 200 - 5 \cdot t$

$A = 200 - 5 \cdot 0$

$A = 200 - 0$

$A = \boxed{200}$

Respuesta: Sí, es posible saberlo. Hay 200 ℓ.

ⓑ $t = ?$ $A = 0$

$A = 200 - 5 \cdot t$

$0 = 200 - 5 \cdot t$

$0 - 200 = -5 \cdot t$

$-200 = -5 \cdot t$

$-200 + 5 = t$

$-195 = t$ X

$-200 = -5 \cdot t$

$-200 : -5 = t$

$\boxed{40} = t$

Respuesta: Tardó 40 min en vasiarse.

Resolución 2

A) Si, porque se sacan 5 litros por minuto pero al comenzar no se cargó nada, entonces quedan 200 L, estaba lleno.

B) Tardó 40 min en vaciarse, porque $5 \cdot 40 = 200$

cuánto más C) A los 15 tarda 75, a los 16, 80. (tarda en vaciarse)

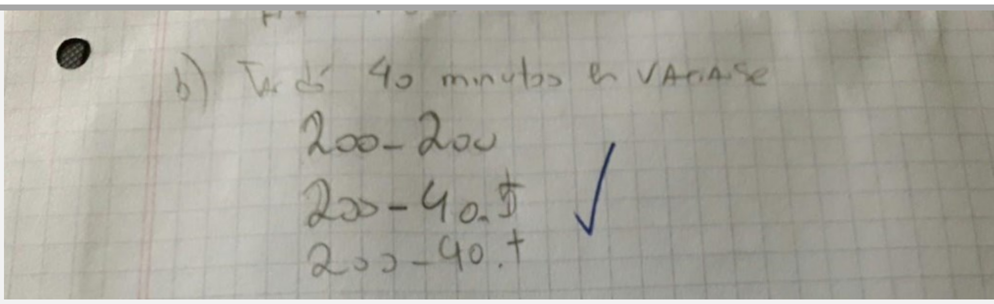
$200 - 75 = \underline{125}$, $200 - 80 = \underline{120}$ (agua que contiene el tanque)

Calculamos cuanto se vació el tanque a los 15 y 16 min. Después le restamos los resultados a 200 (cant que tenía al principio)

D) $15 \cdot 5 = 75$

E) A los 35 minutos el tanque tiene 145, le restamos 20 a 75, porque $200 - 75 = 125$.

Resolución 3



Transcribimos un diálogo entre el docente y el estudiante productor de esta resolución:

Profesor: *¿Me explicás las cuentas que anotaste acá?*

Estudiante: *Sí. Primero hice 200 - 200 porque había 200 litros en el tanque; y para que se vacíe, tienen que salir esos 200. El 200 - 40.5 es porque, si salen 5 litros de agua en 1 minuto, necesito 40 minutos.*

Profesor: *¿Pero cómo llegaste a qué tenías que hacer 40 . 5?*

Estudiante: *Puse en la calculadora 46 . 5 y me dio 230 y no podía ser, entonces hice cuentas y ahí llegué.*

Profesor: *No entiendo, ¿por qué hiciste 46 . 5?*

Estudiante: *No sé, pensé un número para hacer por 5 y se me ocurrió 46.*

Profesor: *Ahhh… ¿y después qué cuentas hiciste para llegar a 40? ¿Te acordás?*

Estudiante: *Sí, hice 230 - 5 - 5...hasta llegar a 200, conté los 5 y eran seis; y como cada 5 es un minuto, son 6 minutos menos que 46. Y por eso es 40.*

Profesor: *Está bien. ¿Y el último renglón? ¿Por qué escribiste esto?*

Estudiante: *porque 5 es t, entonces va t.*

La **primera resolución** involucra un abordaje estático pues la dependencia entre variables aparece como una correspondencia numérica: un valor en una de las variables se corresponde con un valor en la otra variable. Es un tratamiento despegado del contexto del problema que no hace referencia a procesos, sino que se conforma de un conjunto de técnicas: evaluar la fórmula para diferentes valores de *t*, o bien, igualar la fórmula a un valor de *A* y despejar *t*.

Si analizamos la **segunda resolución**, en el primer ítem ya podemos notar una diferencia respecto de la primera: este estudiante no necesitó reemplazar a la variable *t* por 0 para afirmar que el tanque estaba lleno. Es más, al afirmar que “no se cargó nada”, suponemos que este estudiante quiso decir que, en el instante inicial, no hubo variación de la cantidad de agua.

A partir del segundo ítem vemos que este estudiante comienza a construir una técnica de resolución: para saber la cantidad de agua que se sacó del tanque, multiplica a 5 por los minutos transcurridos desde que se inició el vaciado. Y para saber cuánta agua queda en el tanque, resta esa cantidad a 200.

De esta manera, se generan argumentos apoyados en el contexto del problema para explicar los procedimientos que, a su vez, van constituyendo una técnica de resolución.

Podemos afirmar entonces que hay un abordaje dinámico subyacente a la resolución, pues este estudiante está pensando en variaciones. Sin embargo, esta estrategia va evolucionando hacia una mirada estática, hacia la construcción de técnicas que se van despegando poco a poco del contexto.

En cuanto a la **tercera resolución**, la transcripción del diálogo nos hace sospechar que todavía no fue construida la estrategia de resolver la ecuación o que todavía no trabajaron con formas de resolución de ecuaciones para averiguar el valor de t o puede ocurrir también que le resulte más cómodo estimar. En su lugar, este estudiante utiliza una estrategia personal (multiplicar y luego restar 5 veces sucesivas) apoyándose en el contexto del problema y apelando a la variación uniforme para darle sentido a los cálculos. Por lo tanto, podemos afirmar que esta forma de resolución del ítem b) está apoyada en un abordaje dinámico del problema, que puede servir de insumo para empezar a construir técnicas de resolución de ecuaciones y apuntar a un abordaje estático. En este sentido, estamos en una situación similar a la analizada en la resolución 2.

La reflexión a propósito de las posibles resoluciones ayudará a comprender que es necesario que la enseñanza considere ambos abordajes, debido a que puede resultar más conveniente usar uno u otro en función de los conocimientos disponibles y el problema a resolver.

En particular, queremos concluir que:

- Los abordajes dinámicos pueden dotar de sentido a las técnicas de resolución que usualmente se aplican de forma algorítmica. Por eso, es importante tomarlos como punto de partida y no de llegada.
- Los abordajes estáticos pueden ser de suma utilidad a la hora de resolver problemas

matemáticos complejos. Y son un paso fundamental para empezar a pensar a los objetos matemáticos de forma descontextualizada.

No se trata de optar entre un abordaje estático o dinámico, de manera excluyente, sino que en el interjuego entre ambos se va construyendo una noción del objeto función más completa y abarcativa, con variedad de técnicas de tratamiento y mecanismos de control a disposición de los estudiantes. Por eso, consideramos valioso tanto el aprendizaje de abordajes dinámicos como estáticos.

La noción de función lineal en la clase de matemática

Recordemos que, en una secuencia de problemas, en general, se pueden encontrar problemas para construir nuevos conocimientos, problemas para reinvertir, sistematizar, elaborar y/o estabilizar una determinada técnica, etcétera. En esa clase también se desarrollaron una serie de criterios que pueden ser útiles al momento de diseñar secuencias didácticas, considerando tanto el contenido a enseñar y los propósitos de las actividades como las diferentes etapas y tipos de tareas en este proceso.

PARA RECORDAR

"Las secuencias didácticas desarrollan un contenido específico. Incluyen varios tipos de problemas vinculados a él y contemplan diferentes grados de dificultad. Para decidir el orden de los problemas es imprescindible anticipar qué se espera que aprendan los alumnos con cada uno de ellos, qué aporta cada problema a los anteriores, qué nuevas relaciones se ponen en juego, etc.".

Tarasow, 2010.

Es habitual que los y las profesores organicen la enseñanza a partir de secuencias de problemas, lo que hace que su análisis didáctico sea una actividad cotidiana. Esta tarea incluye, por ejemplo, identificar cuáles son los aspectos que se pueden retomar de un problema a otro y sobre qué cuestiones avanza cada uno de ellos respecto a los anteriores. En ese sentido, algunos de los interrogantes que pueden ayudar a problematizar la organización del aprendizaje a partir de secuencias de enseñanza pueden ser: ¿Cuál es el objetivo de toda la secuencia? ¿Cuáles son los objetivos de cada uno de los problemas? ¿Qué trabajo con los modelos matemáticos posibilita cada problema: interpretación, aplicación y/o producción de un modelo? ¿Cómo aparece involucrada la noción de variación uniforme en cada uno de los problemas? ¿Qué tipos de abordajes dinámicos o estáticos promueve o pone en relación?

A continuación, vamos a proponer el trabajo en torno a una secuencia de problemas, a modo de ejemplo. El objetivo de la **Actividad 3** es problematizar la enseñanza del objeto función lineal mediante el análisis de una secuencia didáctica pensada para la Escuela Secundaria. A partir de este análisis se pueden poner en juego los conceptos teóricos estudiados hasta el momento en este módulo y los anteriores, para fundamentar y enriquecer los argumentos que surjan a partir del análisis de la secuencia.

Para tener en cuenta antes de continuar con la lectura de la clase

ACTIVIDAD 3 (Optativa sin entrega)

Les proponemos realizar un análisis didáctico de la siguiente secuencia teniendo en cuenta las dimensiones: el objetivo de cada problema y las posibles resoluciones (correctas, incorrectas e incompletas).

Secuencia

Problema 1

Una sustancia se encuentra a una temperatura de -3°C. En un momento se inicia un proceso de calentamiento de la sustancia, y su temperatura comienza a aumentar de manera constante, a razón de 0,5°C por minuto.

a) Luego de 6 minutos de iniciado el proceso de calentamiento, ¿qué temperatura tendrá la sustancia?
b) ¿Cuánto tiempo debería transcurrir para que la sustancia alcance 2 °C de temperatura?
c) ¿Qué temperatura tendrá la sustancia, si el proceso de calentamiento dura una hora?

d) ¿Cuánto tiempo debería transcurrir para que la sustancia alcance una temperatura de 40°C?

Problema 2

Un tanque de agua tiene 400 litros de capacidad y se vacía a razón de 3 litros por minuto. Considerando que:

- la variable *t* representa los minutos transcurridos desde que se inició el vaciamiento del tanque;
- la variable *A* representa la cantidad de agua que queda en el tanque, desde que éste empezó a vaciarse.

Analicen cada una de las siguientes fórmulas. Para cada una de ellas, decidan si representa o no el proceso de vaciamiento del tanque, explicando cómo se dieron cuenta.

$$a)\ A = 400 + 3 \cdot t$$
$$b)\ A = 400 \cdot t - 3$$
$$c)\ A = 400 - t$$
$$d)\ A = 400 - 3 \cdot t$$
$$e)\ A = \ -3 \cdot t + 400$$
$$f)\ A = \frac{800\ -\ 6 \cdot t}{2}$$

Problema 3

Relean el problema 1 y propongan una fórmula que pueda servir para representar la situación planteada.

Problema 4

El proceso de vaciamiento de un tanque de 200 litros de capacidad se puede representar a partir de esta fórmula $A = 200 - 5 \cdot t$, en la que *t* representa el tiempo medido en minutos que transcurre desde que comenzó el proceso, y A representa la cantidad de agua que queda en el tanque, desde que empezó a vaciarse, expresada en litros.

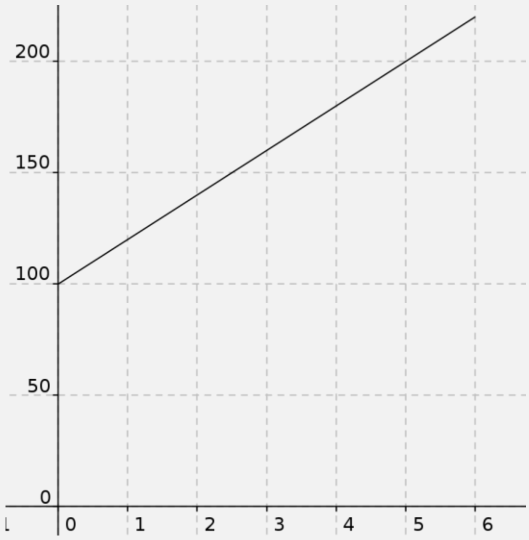
a) ¿Es posible saber si el tanque estaba lleno al comenzar el proceso?
b) ¿Cuánto tiempo tardó en vaciarse?
c) ¿Cuánta agua contenía el tanque a los 15 minutos? ¿Y a los 16 minutos?

d) ¿Cuánta agua se sacó del tanque a los 15 minutos?

e) ¿En qué momento el tanque contiene 145 litros?

Problema 5

El siguiente gráfico representa la cantidad de agua (en litros) que hay dentro de un tanque a medida que pasa el tiempo (en minutos)



a) ¿El tanque se está llenando o vaciando?

b) ¿Cuánta agua hay dentro del tanque al inicio del proceso?

c) ¿Qué cantidad de agua ingresa o sale por minuto?

d) Escriban una fórmula que permita calcular la cantidad de agua dentro del tanque a partir del tiempo que transcurre.

La intención del análisis es explicitar cuestiones para tener en cuenta cuando se analiza didácticamente una secuencia sobre funciones. En particular, la pregunta acerca de la variación uniforme busca poner el foco en esta noción para caracterizar a las funciones lineales.

Un análisis posible de la secuencia presentada puede ser el siguiente:

La intención del **primer problema** es que los estudiantes se enfrenten a una tarea que involucra la noción de variación uniforme. Se espera que lo resuelvan apelando a diferentes estrategias, entre ellas, la multiplicativa con suma, que será recuperada en la actividad siguiente con el propósito de apoyar la interpretación de las fórmulas.

Posibles resoluciones del problema 1

Anticipamos que los estudiantes podrán utilizar estrategias artesanales para responder a las preguntas planteadas. Por ejemplo, el **inciso a)** puede abordarse sumando sucesivas veces 0,5 (una por cada minuto transcurrido desde que se inició el proceso):

-3 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 = 0 °C

O bien, apelando a la multiplicación y luego a la suma:

0.5 x 6 = 3   -3 + 3 = 0

También es posible resolverlo "tomando atajos", es decir, pensando cuántos minutos se necesitan para que la temperatura suba un grado: *"como en 2 minutos la temperatura sube 1 grado, entonces en 6 minutos la temperatura va a subir 3 grados; y como estoy en -3 grados, cuando suben 3 grados, queda en 0°C."*

Algunas resoluciones del **inciso b)** que pueden surgir son:

- Sumar 0,5 a 3 sucesivas veces hasta llegar a 2°C, y contar las veces que fueron sumadas.
- Pensar que hay que sumarle 5 grados a -3 para llegar a 2, y luego:
    - analizar multiplicaciones por 0,5 que den como resultado 5; o bien,
    - dividir 5 por 0,5.
- Utilizar el resultado del inciso a): *"como la temperatura tiene que subir 2 grados centígrados, desde 0 grados centígrados, y cada 2 minutos sube 1 grado, necesito que transcurran 4 minutos más. Entonces 6 + 4 = 10 minutos".*

Para el caso de los **incisos c)** y **d),** algunas de las estrategias utilizadas en los puntos anteriores tendrán sus limitaciones y será necesario cambiar la forma de abordarlos. Por ejemplo, analizando regularidades o previendo qué estrategia de las analizadas anteriormente es la más conveniente para resolver esta actividad. Se puede concluir que la multiplicación y luego una suma es una estrategia conveniente cuando hay que sumar varias veces el mismo número y luego sumar el valor inicial.

En las estrategias mencionadas se consideran períodos de aumento de temperatura y, a partir de las sumas sucesivas, se pueden identificar diferentes estados de la temperatura hasta alcanzar el que se pretende estudiar. De esta manera, el análisis se sostiene en los cambios de temperatura asociados al proceso de calentamiento de la sustancia. Como mencionamos antes, este tratamiento se puede vincular con un abordaje dinámico.

Por último, nos interesa explicitar cómo varía el proceso estudiado. A partir del contexto del problema es posible afirmar que la temperatura aumenta, minuto a minuto, la misma cantidad de grados centígrados, por lo que se trata de un proceso de variación uniforme.

En el **segundo problema,** el objetivo es relacionar las fórmulas con la situación estudiada, es decir, se trata de hacer una *interpretación del modelo matemático* dado por una expresión algebraica. Asimismo, incluye la idea de variación uniforme, pues la cantidad de agua que sale del tanque, en cada minuto, es siempre la misma.

La fórmula a) puede permitir el análisis del caso en el que se agrega agua en el tanque.

La fórmula b) tiene la intención de discutir por qué 400 no puede multiplicar a la variable *t*, y también por qué 3 no puede aparecer restando.

Suele ocurrir que cuando los estudiantes trabajan por primera vez con este tipo de problemas, multiplican a la variación por los minutos, y reemplazan el valor de ese resultado en la variable *t*. En este sentido, la fórmula c) contempla una posible discusión a propósito de la definición de las variables involucradas en el problema, en particular, a partir de su comparación con la fórmula d).

La inclusión de la fórmula e) posibilita analizar que, a pesar de estar expresada como una suma, es equivalente a una fórmula correcta.

La fórmula f) apuesta a discutir sobre la posibilidad de que existan fórmulas con otros números involucrados, que también resultan equivalentes a fórmulas correctas. En este sentido, se puede proponer a los estudiantes que evalúen la fórmula f) en diferentes valores de tiempo para que puedan identificar que al utilizarla se obtienen la misma cantidad de agua en el tanque, por ejemplo, la del ítem anterior. Podrá entonces plantearse la pregunta: ¿Será cierto que para cualquier valor de tiempo se obtendrá la cantidad de agua del tanque?

Este ítem puede ser una oportunidad para discutir qué significa que dos fórmulas sean equivalentes y de qué manera se pueden poner en relación. En este caso, se puede mencionar que realizar primero la resta y luego la división es equivalente a dividir primero cada término por 2 y luego restar, es decir, $A = \frac{800 - 6 \cdot t}{2} = \frac{800}{2} - \frac{6 \cdot t}{2} = 400 - 3 \cdot t$. Surge la idea de que cuando dos expresiones son equivalentes, dan el mismo resultado al reemplazar a la variable por un valor cualquiera y, además, una puede transformarse en la otra a partir de aplicar propiedades.

La intención del **tercer problema** es que los estudiantes utilicen lo discutido a propósito de la actividad anterior para **producir un modelo** de la situación. Esperamos que propongan fórmulas del mismo estilo que las de la actividad anterior y, en caso de que surjan diferentes fórmulas, discutir acerca de su equivalencia.

Con este problema se puede empezar a analizar a la variación uniforme como el valor que multiplica a la variable t, identificándolo con el aumento de la temperatura por minuto. De esta manera, el abordaje dinámico del problema permite dotar de sentido a un futuro abordaje estático.

En el **problema cuatro** se busca que los estudiantes comiencen a ensayar formas de *aplicar un modelo* representado por una fórmula. Como mencionamos en el primer momento de trabajo, podrían surgir estrategias como las que vimos en la actividad 2. En este caso la variación uniforme se puede identificar tanto como componente de la situación, como por medio de la fórmula.

El **quinto problema** tiene la intención de poner en escena una nueva forma de presentar el problema del tanque, a partir de un gráfico cartesiano.

Al involucrar preguntas análogas a las del problema anterior, se busca poner en diálogo las dos representaciones (el gráfico y la fórmula), así como dotar de sentido a estas representaciones estáticas con el abordaje dinámico que se hizo del problema.

La resolución de la actividad requiere de la interpretación del modelo, mientras que la elaboración de una fórmula requiere de la producción de uno.

La variación uniforme puede identificarse de manera análoga a los casos anteriores, pero también en el registro gráfico.

RECAPITULAR

- Consideramos que la secuencia presentada puede llevarse al aula pues posibilita la construcción del objeto función lineal, caracterizándolo mediante la variación uniforme.
- Todos los problemas involucran la noción de variación uniforme y, por lo tanto, se pueden modelizar mediante una función lineal.
- Esta propuesta está pensada para introducir el concepto, y permite el interjuego de abordajes dinámico y estático, pues posibilita dotar de sentido a la variación uniforme, identificándola con fenómenos de naturaleza dinámica.
- A partir de la resolución de estos problemas, los estudiantes pueden poner en juego los diferentes tipos de trabajo con modelos matemáticos, estudiados en la clase anterior: interpretación, producción y aplicación. Además, implican la interpretación, producción y coordinación de diferentes registros de representación.

DETENERSE A PENSAR

Les proponemos considerar los problemas que habitualmente utilizan en sus clases para trabajar a propósito de la noción de Función Lineal.

En forma individual, analicen su propuesta a partir de los conceptos abordados en esta clase:

- ¿Qué concepciones de la noción de función identifican en su propuesta?
- ¿Qué trabajo con los modelos matemáticos posibilita: interpretación, aplicación y/o producción de un modelo?
- ¿Cómo aparece involucrada la noción de variación uniforme en cada uno de los problemas?

Tomen nota de sus observaciones y propongan modificaciones a su propuesta.

FORO DE CONSULTA PARA EL TRABAJO FINAL

En este espacio de intercambio tiene el propósito de evacuar dudas y consultas con respecto al trabajo final de módulo.

Actividades

ACTIVIDAD 1 (Lectura obligatoria y toma de apuntes)

Como parte de las **actividades obligatorias** de la clase, les proponemos que lean el texto *La Noción de función a través de la historia* (Hanfling, 2001), que expone una caracterización histórica de la noción de función.

Disponible en: https://docplayer.es/2435387-Estrategias-de-ensenanza-de-la-matematica-carpeta-de-trabajo.html

Tomen nota de estas ideas centrales porque podrán tomarse en cuenta para la actividad obligatoria correspondiente a esta clase y para el trabajo final del módulo.

ACTIVIDAD 2 (Obligatoria)

Participación en el foro de la clase 4

Identificar y poner en discusión las ideas centrales del texto de Mirta Hanfling "Estudio didáctico de la noción de función". Les proponemos que las compartan en el foro, así como también que tomen nota sobre los aspectos que les parecieron interesantes, controversiales y las dudas que les surgieron durante la lectura, etc.

Material de lectura

Hanfling, M. (2001). La noción de función a través de la historia. En *Carpeta de trabajo. Estrategias de enseñanza.* Buenos Aires: UVQ.

Bibliografía de referencia

Barallobres, G. y otros (1998) *Funciones.* Documento de desarrollo Curricular. MCBA

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICI – Horsori.

Tarasow, P. (2010). La tarea de planificar. En Kurzrok, L. (coord.) *Enseñar Matemática en la Escuela Primaria.* Buenos Aires: Tinta Fresca.

Créditos

Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2022). Módulo 4. Clase 4: Las concepciones de la noción de función. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.