Biblioteca
Nuestra
Escuela
2023

Cuadernos
para la
enseñanza

Nuestra Escuela
Programa Nacional de Formación Permanente

Colección **Actualizaciones Académicas**

Actualización Académica en enseñar y aprender matemática en la escuela secundaria

Módulo 3: **Enseñanza y aprendizaje de la aritmética en la escuela secundaria**

la educación
nuestra bandera

INFoD
Instituto Nacional de Formación Docente

Ministerio de Educación
Argentina

Índice

Clase 1: El trabajo aritmético en la escuela secundaria

Presentación

Les damos la bienvenida a "Enseñanza y aprendizaje de la aritmética en la escuela secundaria". Este módulo consta de cuatro clases en las que reflexionaremos acerca del trabajo que se propone en la Escuela Secundaria en torno a la enseñanza de la Aritmética. Nos proponemos problematizar su enseñanza y aprendizaje, caracterizar el trabajo aritmético en el aula y poner en discusión asuntos matemáticos y didácticos que colaboren a interpelar la propia práctica docente.

Desde la mirada didáctica que sostiene el Ministerio de Educación de la Nación, explicitada en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP), la clase de Matemática toma como referencia los modos de trabajo de la Matemática como disciplina científica, entendida como un producto cultural y social. Cultural, porque sus producciones están condicionadas y permeadas por las concepciones de la sociedad en la que emergen; y social, porque surgen de la interacción entre personas de una misma comunidad (Sadovsky, 2005).

Asumimos que, para que un estudiante aprenda Matemática en la escuela secundaria es necesario que la propuesta de enseñanza lo involucre en una actividad de producción de conocimiento matemático, tomando como eje central la resolución de problemas. Para ello será necesario que el docente proponga situaciones de enseñanza que desafíen a los estudiantes y les permitan explorar, elaborar conjeturas, analizar diferentes formas de resolver un problema, producir distintas soluciones, etcétera.

Si bien resolver problemas es una condición necesaria para el aprendizaje de la matemática, podemos afirmar que no es suficiente. Desde este enfoque didáctico, la interacción con otros y otras es un elemento imprescindible en la producción de conocimiento y en la apropiación de saberes: hacer matemática implica discutir sobre la validez de los procedimientos, reflexionar sobre lo realizado, argumentar, validar, etcétera. Todas estas acciones no se dan de manera espontánea al resolver un problema, sino que es el docente quien tiene la tarea de proponer momentos de la clase destinados a fomentar estas interacciones. Por ejemplo, solicitando explicaciones a propósito de una resolución o pidiendo mayor precisión en las formulaciones.

En la clase 1 les proponemos reflexionar de manera general en torno a la enseñanza de la Aritmética.

En la clase 2 nos ocuparemos específicamente de la enseñanza de los Números Enteros. Analizaremos de qué manera distintos sentidos de los números negativos condicionan la enseñanza y el aprendizaje de sus propiedades y de las operaciones con ellos. Estudiaremos situaciones que posibiliten avanzar hacia un pensamiento de tipo algebraico.

En la clase 3 abordaremos la enseñanza de las operaciones en el conjunto de los Números Racionales.

Finalmente, en la clase 4, estudiaremos cuestiones vinculadas con el uso de aproximaciones al momento de resolver problemas en los que intervienen números reales y/o números racionales de expresión decimal periódica. Esto implicará considerar las relaciones entre distintas representaciones y la propagación del error, incluyendo el uso de la calculadora y de otros dispositivos tecnológicos.

En todos los casos, intentaremos problematizar algunas de las continuidades y rupturas entre los contenidos y prácticas propios de la escuela secundaria y los de la escuela primaria.

Esperamos que este módulo resignifique la actividad que se despliega en torno a la enseñanza de la Matemática en sus aulas y posibilite involucrar a los y las estudiantes en una cultura matemática centrada en la discusión, argumentación, confrontación y producción de ideas y que también habilite un espacio para la validación.

Antes de interiorizarnos con los contenidos del módulo, les proponemos que participen de la primera actividad obligatoria:

ACTIVIDAD 1 (obligatoria) Foro de presentación

Para empezar a conocernos, los invitamos a realizar una breve presentación. Dada la diversidad de lugares y formaciones de los cursantes de este módulo, resulta interesante que compartan algunos detalles sobre su experiencia docente, su lugar de trabajo, en dónde viven y si ya tuvieron experiencia en formación virtual.

También les proponemos que **escriban una reflexión sintética acerca de cómo ustedes entienden, a partir de su formación matemática y experiencia docente, que la Aritmética resulta un contenido importante** en el currículum de la enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria.

Introducción

Si bien muchos de los contenidos aritméticos son tratados en la Escuela Primaria y en el Ciclo Básico de la Escuela Secundaria, también hay contenidos aritméticos a ser enseñados durante el Ciclo Orientado. Consideramos importante, entonces, identificarlos y describir las prácticas aritméticas que se proponen en los NAP y los diseños curriculares para toda la escuela secundaria.

Actividad 2 (sin entrega)

Consulten los diseños curriculares para la Escuela Secundaria de su región e identifiquen cuáles son los contenidos aritméticos que se proponen enseñar.

¿Por qué consideran importante incluirlos?

Los contenidos de carácter aritmético que se proponen enseñar desde los NAP en el Ciclo Básico se enuncian en el eje Números y Operaciones, donde se plantea el estudio de los conjuntos de Números Enteros y Números Racionales, y las operaciones entre ellos. En cambio, en el Ciclo Orientado estos tipos de contenidos se encuentran dentro del eje Números y Álgebra y se focalizan, principalmente, en el conjunto de los Números Reales.

En este enlace encontrarán el listado de contenidos de Aritmética por ciclo, tal y como se enuncian en los NAP.

Poniendo el foco en los contenidos a ser enseñados en el Ciclo Básico de la Escuela Secundaria, podemos reconocer que estos suponen ciertos conocimientos que los y las estudiantes deben haber aprendido durante su trayecto por la escolaridad primaria. Sin embargo, puede suceder que los profesores y las profesoras no conozcamos de manera profunda de qué manera se estudian esos contenidos en el nivel primario, cuáles son las técnicas y las estrategias de cálculo que más se desarrollan, etcétera. Inclusive, teniendo conocimiento de estas cuestiones, no es una tarea sencilla poder establecer continuidades entre los contenidos de ambos niveles. Por este motivo, en esta clase les proponemos revisar algunos problemas aritméticos que se abordan en la escuela primaria, con el objetivo de identificar los conocimientos que los estudiantes pueden poner en juego para avanzar en sus aprendizajes en la escuela secundaria.

Una última cuestión que queremos remarcar es la importancia que cobran el trabajo, las prácticas y los contenidos aritméticos para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Muchos de los problemas de enseñanza que tienen como propósito la iniciación al pensamiento y a la operatoria algebraica se apoyan sobre conocimientos aritméticos.

Los problemas y las prácticas aritméticas

De manera general podemos caracterizar a la Aritmética como el estudio de los números y de las operaciones que pueden realizarse con ellos. En este sentido, consideramos que un problema es aritmético si puede resolverse mediante una representación que involucra números y operaciones entre ellos. Sin embargo, esta caracterización no nos permite atrapar las prácticas asociadas a lo aritmético.

Desde el enfoque de enseñanza presentado, el conocimiento matemático es construido por los estudiantes a partir de interactuar con situaciones que las y los docentes proponen con la intención de enseñar ciertos contenidos y prácticas asociadas a ellos. Y en estas interacciones se van desplegando un conjunto de prácticas en las que los estudiantes irán construyendo distintos sentidos de los objetos matemáticos. Por eso las prácticas aritméticas que estamos pensando no suponen estudiantes que solo "buscan la operación" a aplicar, reemplazan los datos y hallan un resultado, sino que esperamos que trabajen de manera reflexiva sobre los números y las operaciones aritméticas, considerándolas como objeto de estudio en sí mismas, lo que no se logra solamente resolviendo una gran cantidad de problemas aritméticos.

Por lo tanto, al hablar de la aritmética escolar, tanto en el nivel primario como en el secundario, resulta imprescindible que se consideren dentro del proyecto de enseñanza un conjunto de prácticas asociadas a variados problemas numéricos que permitan hacerlas emerger.

Las prácticas aritméticas en la escuela secundaria

Si consideramos los contenidos que se proponen para el Ciclo Básico, podemos identificar algunas tareas referidas a los Números Enteros y a los Números Naturales que se vinculan con prácticas aritméticas, entre las cuales podemos mencionar: realizar operaciones, comparar números, elegir y utilizar distintas representaciones según la situación, elaborar estrategias de cálculo, estimar resultados, etcétera.

En cambio, para el Ciclo Orientado se considera la enseñanza de diferentes cuestiones vinculadas a los Números Reales, lo que genera una ampliación del campo numérico y agrega algunas prácticas asociadas. Por ejemplo, su aproximación por medio de números racionales de manera adecuada, lo que supone el estudio del error que se comete al realizarla.

En las clases siguientes de este módulo profundizaremos sobre algunas de estas prácticas específicas y, en particular, sobre su enseñanza.

Continuidades y rupturas

Considerando que el avance en los aprendizajes puede producirse a partir de conocimientos en dónde anclar lo nuevo que se quiere enseñar, resulta fundamental indagar acerca de la continuidad del trabajo aritmético que se da entre ambos niveles. En este caso, los problemas que se trabajan en la escuela primaria pueden ser retomados en la escuela secundaria para avanzar hacia situaciones que, por ejemplo, requieran buscar ciertas regularidades o habilitan la generalización, abriendo el camino hacia una transición entre prácticas aritméticas y la introducción al trabajo algebraico.

La escuela media es un escenario de transformaciones esenciales en relación con los conocimientos matemáticos. La idea de transformación del conocimiento es central para comprender la particularidad de este nivel: frente a muchos de los conceptos de la escuela primaria, los alumnos deberán producir nuevas estrategias para abordar los problemas que se les propongan, será necesario que tomen contacto con nuevas formas de representación, así como construir nuevas maneras de validación. Es decir, se podría afirmar que algunos de los conceptos tratados en la escuela primaria reaparecen en la escuela media bajo otras denominaciones, otros sentidos y otras prácticas que resultan esencialmente diferentes. Por lo tanto se presenta un delicado juego de rupturas y continuidades: los alumnos deberán renunciar a muchas de las elaboraciones realizadas en la escuela primaria, al tiempo que tendrán que apoyarse en ellas para producir las modificaciones que los nuevos desafíos demandan.

Grimaldi, V - Itzcovich, H (2013).

En este sentido, uno de los contenidos que se pueden considerar para pensar en la transición escuela primaria - escuela secundaria es el cálculo mental. Veremos de qué manera las estrategias que los estudiantes ponen en juego permiten una reflexión sobre las propiedades de las operaciones, al mismo tiempo que le dan sentido.

El cálculo mental

Con frecuencia se consideran el cálculo mental, en el que no se escribe, y el cálculo escrito como opuestos. Sin embargo, es posible considerarlos desde la siguiente perspectiva.

Cuando se habla de cálculo mental no significa que no se involucre la escritura o que no se hagan cálculos, sino que se hace referencia a estrategias 'artesanales', que muchas veces no se pueden expresar como algoritmos ni son generalizables.

> "Entendemos por *cálculo mental* el conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados.
>
> Los procedimientos de cálculo mental se apoyan en las propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones, y ponen en juego diferentes tipos de escritura de los números, así como diversas relaciones entre los números".
>
> Parra Cecilia, (1994).

De este modo, podemos establecer una distinción entre **cálculo algorítmico**, en el que se emplean siempre los mismos pasos para determinada operación, independientemente de los números involucrados, y **cálculo mental,** en el que se selecciona un procedimiento adecuado a esa situación dependiendo de los números y la operación planteada. El primero se asocia a un modo más "mecánico", mientras que el segundo es considerado un cálculo reflexionado.

Actividad 3 (sin entrega) - Lectura obligatoria

Los invitamos a leer las páginas 39 a 43 del documento curricular "Matemática: cálculo mental con números naturales", donde se analizan algunas actividades de la escuela primaria que permiten abordar distintas estrategias de cálculo mental.

https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/numeros-naturales_web.pdf

A partir de lo que se expone en el documento, se pueden considerar actividades vinculadas al cálculo mental para trabajar en la escuela secundaria que se apoyen en algunas estrategias descriptas. Por ejemplo, se pueden proponer en clase los siguientes problemas:

Actividad 4 (sin entrega)

Resuelvan los siguientes problemas pensando posibles estrategias de resolución que podrían poner en juego los estudiantes en cada uno de ellos.

Problema 1

Sabiendo que hacer 20 · 0,5 es lo mismo que calcular la mitad de 20, es decir que da 10:

1) ¿Cómo harían para calcular mentalmente 20 · 1,5?
2) Calculen los siguientes productos.
   a) 20 · 2,5
   b) 20 · 3,5
   c) 30 · 1,5

Problema 2

Sabiendo que $\frac{1}{3} = 0,\hat{3}$, escribí los números $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$ y $\frac{14}{3}$ en su expresión decimal.

En el **Problema 1**, para responder la primera pregunta, los y las estudiantes podrán analizar en qué sentido conocer el resultado de 20·0,5 es una herramienta para calcular mentalmente lo pedido. En este caso, una posibilidad es analizar que 1,5 puede interpretarse como tres veces 0,5. De esta manera, los y las estudiantes podrán considerar que 1,5 = 0,5 + 0,5 + 0,5, por lo que

$$20 \cdot 1,5 = 20 \cdot (0,5 + 0,5 + 0,5) = 20 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5 = 10 + 10 + 10 = 30.$$

Otra forma de expresar esta relación entre 1,5 y 0,5 es 1,5 = 0,5 · 3. Entonces

$$20 \cdot 1,5 = 20 \cdot (0,5 \cdot 3) = (20 \cdot 0,5) \cdot 3 = 30$$

Otra estrategia de resolución que puede surgir es que los y las estudiantes consideren que 20 · 1,5 equivale a hallar una vez y media 20, es decir

$$20 \cdot 1,5 = 20 + 10 = 30$$

Esta última estrategia puede apoyarse en la relación entre multiplicar por 0,5 y calcular la mitad o considerando que 1,5 = 1 + 0,5 y aplicando la propiedad distributiva.

Es importante analizar estas equivalencias con los y las estudiantes y explicitar que multiplicar por 1,5 es equivalente a multiplicar tres veces por 0,5 o que es lo mismo que hallar una vez y media 20. Estas mismas relaciones pueden reutilizarse para resolver el ítem 2.

En el caso del **Problema 2**, para escribir la expresión decimal de cada uno de los números dados en su expresión fraccionaria, los y las estudiantes pueden analizar la relación entre cada expresión fraccionaria y $\frac{1}{3}$.

Un abordaje posible para $\frac{2}{3}$ consiste en considerar que se trata de dos veces $\frac{1}{3}$. Es decir: $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Entonces, $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0,\hat{3} + 0,\hat{3} = 0,\hat{6}$.

En el caso de $\frac{4}{3}$ se espera que los estudiantes analicen que es cuatro veces $\frac{1}{3}$, o también que $\frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = 1 + 0,\hat{3} = 1,\hat{3}$, y para $\frac{14}{3}$ que se trata de catorce veces $\frac{1}{3}$ o bien, $\frac{14}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$.

Las propiedades de la multiplicación y de la división

Como mencionamos anteriormente, los contenidos aritméticos pueden utilizarse como insumo para avanzar sobre la enseñanza y el aprendizaje de cuestiones algebraicas. En este caso, se analizarán modos de obtener un cálculo equivalente a uno dado, poniendo en juego las propiedades de la multiplicación y de la división.

Proponemos como ejemplo una actividad que podría abordarse en los primeros años de la escuela secundaria y que se apoya en contenidos y prácticas aritméticas de la escuela primaria.

Actividad 5 (sin entrega)

Les proponemos analizar didácticamente el siguiente conjunto de problemas secuenciados teniendo en cuenta las prácticas aritméticas de la Escuela Primaria en las que se apoyan. Esta serie de problemas forma parte del material: “Manual de Matemática, UNTREF”, (2021, Agrasar, Chemello, Díaz, Ministerio de Educación. Pág. 28) que incluye propuestas para trabajar sobre la articulación primaria - secundaria.

a) Sin resolver cada cálculo, indiquen las multiplicaciones que dan el mismo resultado que 18 × 15. No olviden explicar en cada caso sus respuestas.

i) 9 × 30 ii) 15 × 3 × 3 × 2 iii) 18 × 10 × 5 iv) 18 × 5 × 3

b) Escriban cada multiplicación de otra manera, tratando que el cálculo resulte más fácil.

i) 24 × 21 ii) 45 × 12 iii) 14 × 50 iv) 96 × 5

c) Sabiendo que $32 \times 21 = 672$, decidan si los siguientes cocientes tienen resto 0 o no. No olviden explicar cómo se dieron cuenta.

i) 672 : 21 ii) 672 : 8 iii) 672 : 12 iv) 672 : 9

d) Sin hacer las cuentas, completen la tabla de multiplicar × 24, sabiendo que $7 \times 24 = 168$. Anoten los cálculos que fueron realizando.

	2	3	5	10	14	70	150
× 24							

Esta actividad corresponde a una secuencia que se propone abordar el pasaje de la Aritmética al Álgebra en el campo de los Números Naturales, en la cual se trabaja en torno a las propiedades de las operaciones con estos números. Uno de los propósitos de la secuencia es recuperar los conocimientos referidos a las propiedades de las operaciones con Números Naturales.

Una posible estrategia de resolución del ítem a) consiste en trabajar con escrituras equivalentes del producto 18×15, utilizando tanto las descomposiciones multiplicativas de los números 18 y 15, como las propiedades conmutativa y asociativa. Por ejemplo, como $18 = 9 \times 2$, entonces:

$$18 \times 15 = 9 \times 2 \times 15 = 9 \times (2 \times 15) = 9 \times 30$$

Aquí se ha realizado una factorización del número 18 y luego se aplicó la propiedad asociativa para concluir que el resultado es el mismo, sin necesidad de hallarlo. En esta resolución podemos identificar una práctica aritmética que usualmente se realiza en la escuela primaria: reconocer diferentes modos de escribir un mismo cálculo.

En el ítem b) se pueden utilizar las propiedades de las operaciones de modo que los cálculos propuestos resulten más simples. De este modo, se pueden relevar las estrategias de cálculo que tienen disponibles los estudiantes y así avanzar hacia explicitar las relaciones y estudiar la equivalencia de los cálculos. Por ejemplo, para realizar 14×50 los estudiantes podrían considerar que, como $50 = 100 : 2$, es posible realizar los cálculos

$$14 \times (100 : 2) = (14 \times 100) : 2 = 1400 : 2 = 700.$$

En este caso, se utiliza la propiedad asociativa para realizar una multiplicación por la unidad seguida de ceros, para luego calcular la mitad de ese resultado.

El ítem c) propone analizar relaciones entre la multiplicación y la división a partir de saber que el cálculo 32×21 da como resultado 672. Aquí, a partir de esta igualdad se puede saber que 672 es múltiplo de 32 y de 21, o bien que 32 y 21 son divisores de 672. Otras descomposiciones en factores de 32 y 21, permitirán establecer nuevas relaciones. Nuevamente se sacan conclusiones de los "resultados" (en este caso es el resto) sin hacer los cálculos sino a través de analizar las relaciones entre el cálculo dado, los números involucrados y las propiedades de la divisibilidad. Este tipo de abordaje del problema implica un tratamiento algebraico porque supone, entre otras cuestiones, "leer" cierta información en la escritura.

En el último ítem se propone como actividad obtener nuevos productos a partir de conocer el resultado de una multiplicación. Es otro caso en el que los resultados se analizan sin hacer los cálculos sino a partir de cómo se pueden obtener.

> No se trata de resolver un cálculo, sino de poner en juego propiedades convenientes que permitan relacionarlos con otros. En ese sentido, el tipo de práctica deja de ser aritmética para comenzar a plantear cuestiones relacionadas con el Álgebra.
> Podemos entonces decir que este tipo de actividades permite revisar lo que se ha trabajado en la Escuela Primaria, a la vez que ofrece posibilidades para profundizar en cuestiones aritméticas y avanzar hacia prácticas algebraicas.

Rupturas en el trabajo con números racionales

Hasta este momento estuvimos analizando algunas continuidades que se pueden dar entre contenidos y prácticas del nivel primario y del nivel secundario. Sin embargo, se torna necesario revisar también algunas rupturas. Muchas de las estrategias construidas en el aprendizaje de los números Naturales encuentran límites, lo que obliga a estudiar su alcance, su dominio de validez y, por lo tanto, a desarrollar nuevas.

Por ejemplo, analicemos qué sucede en la siguiente actividad que pone en juego conocimientos aritméticos propios de la escuela secundaria.

Problema

Sin hacer las cuentas indiquen <, > o =

Expliquen su respuesta:

a) $\left(-\frac{12}{13}\right)^{126}$ .... $\left(\frac{12}{13}\right)^{126}$

b) $4{,}25^{87}$ .... $(-4{,}25)^{87}$

c) $\left(\frac{27}{31}\right)^{15}$ .... $\left(-\frac{27}{31}\right)^{15}$

d) $\left(\frac{27}{31}\right)^{15}$ .... $\left(\frac{27}{31}\right)^{12}$

Este problema, que requiere comparar potencias sin resolverlas, puede abordarse utilizando propiedades de la potenciación, de la multiplicación de números racionales y relaciones previamente construidas. La resolución se apoya en esos conocimientos, pero avanza hacia otros que, necesariamente, involucran un cambio de prácticas. Por ejemplo, para los ítems a), b) y c) se puede poner en juego el análisis del signo de una potencia según la paridad del exponente, mientras que en el ítem d) se puede considerar que, si la base de una potencia se encuentra entre 0 y 1, entonces cuanto mayor sea el exponente menor será el resultado. Esta noción se contrapone a la idea de que la potencia de un número es siempre mayor que él, afirmación que es válida en el conjunto de Números Naturales. Este análisis implica un tratamiento de tipo algebraico de las expresiones numéricas debido a que no se trata de hallar los resultados y compararlos, sino de apelar a relaciones y propiedades de las operaciones.

Los “errores” que habitualmente cometen los y las estudiantes al resolver problemas que involucran a los números racionales muchas veces responden a rupturas que deben transitar. En este caso se vincula con el intento de aplicar a un nuevo campo numérico (los Números Racionales) los saberes construidos sobre otros (los Números Naturales). Estas concepciones erróneas de los y las estudiantes no marcan una ausencia de conocimiento, sino un modo de conocer que se debe adaptar a nuevas relaciones.

En las próximas clases profundizaremos sobre estas cuestiones.

Reflexiones finales

Al estudiar nuevos conjuntos numéricos existen continuidades en muchas de las prácticas aritméticas “generales” entre el nivel primario y el secundario. Para que se enriquezca progresivamente el significado de los números y operaciones aprendidos en la escuela primaria, en la escuela secundaria se propone estudiar las propiedades de estos objetos en los diferentes conjuntos numéricos, indagar sobre el alcance y limitaciones de la variedad de representaciones de los números, cómo se relacionan unos con otros y qué tipo de estructura forman y, especialmente, cómo se usan los números y las operaciones para resolver diferentes tipos de problemas.

Al mismo tiempo, el aprendizaje de nuevos conjuntos numéricos genera rupturas respecto a los saberes construidos hasta el momento. Estas rupturas, que comienzan en la escuela primaria, deben ser recuperadas y abordadas en la escuela secundaria, para poder formalizar las propiedades de los números y operaciones dando lugar a la construcción de herramientas algebraicas.

Es responsabilidad de la enseñanza proponer situaciones en las que se pongan en juego las viejas concepciones y se expongan las diferencias entre el funcionamiento de los diferentes conjuntos numéricos de manera que permitan hacer avanzar los conocimientos de todos los y las estudiantes.

Actividad

Les proponemos analizar didácticamente un conjunto secuenciado de problemas, teniendo en cuenta las prácticas aritméticas de la Escuela Primaria en las que se apoyan.

El propósito de este trabajo es vincular los contenidos abordados en la primera clase de este curso con sus participaciones, por lo que les vamos a solicitar que incluyan citas textuales extraídas del texto de la clase y de la bibliografía complementaria, para darle sustento teórico a sus afirmaciones, explicitando las razones por las que las eligieron. Es importante usar vocabulario específico, citar correctamente y diferenciar ideas propias de ajenas.

Consideramos fundamental la interacción con sus colegas, por lo que pueden responder a participaciones realizadas por otros, enriqueciéndolas con citas o poniendo en discusión algunas de ellas. Pensamos al foro como un espacio de debate colectivo que, tal como sostiene nuestra postura didáctica, tiene un rol central en la enseñanza y aprendizaje. En este sentido, no deberían ser "muros" en donde se publican las actividades para "cumplir con la tarea" sin tener en cuenta las participaciones de los demás.

PROBLEMAS

Problema 1

¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos dan el mismo resultado que 1.500 x 9?

a) 1.500 x 3 x 3
b) 1.500 x 3 + 6
c) 1.500 x 3 + 1.500 x 6 =
d) 1.500 x 10 – 1500 =

Problema 2

¿Cómo harían para resolver 250 x 18 x 4 mentalmente?

Problema 3

¿Cómo podrían usar una calculadora en la que no funciona la tecla del 9 para resolver 1.809 x 9?

Problema 4

¿Las transformaciones que se hicieron en cada uno de los cálculos permiten resolverlos mentalmente? Expliquen.

a) 39 x 50 = (40 – 1) x 50 = 2.000 – 50 = 1.950
b) 15 x 25 x 3 x 4 = 45 x 100 = 4.500
c) 25 x 48 = 5 x 5 x 6 x 8 = 30 x 40 = 1.200

Problema 5

Transformen los siguientes cálculos en otros equivalentes que sean fáciles de resolver mentalmente.

a) 597 x 15 = b) 8 x 12 x 5 = c) 52 x 21 =

Problema 6

Sabiendo que 335 x 20 = 6.700, calculen, sin hacer cada cuenta, los resultados de:

a) 345 x 20 = b) 335 x 21 = c) 335 x 40 =

FORO DE CIERRE DE LA CLASE 1

Analicen didácticamente el siguiente conjunto secuenciado de problemas, teniendo en cuenta **las prácticas aritméticas de la Escuela Primaria en las que se apoyan**.

En sus intervenciones deberán incluir citas del texto de la clase y/o de la bibliografía complementaria que les den sustento teórico a sus afirmaciones. Es importante usar vocabulario específico, citar correctamente, y diferenciar ideas propias de ajenas. Les recomendamos tener en cuenta, como ejemplos, los análisis didácticos realizados en la clase y en el documento curricular "Matemática: cálculo mental con números naturales", incluido en la misma como lectura obligatoria.

Consideramos fundamental la interacción con sus colegas, por esta razón les solicitamos también **responder a participaciones realizadas por otros**, enriqueciéndolas con citas e ideas propias o poniendo en discusión algunas de ellas. Para esto deberán entrar periódicamente al foro para leer las intervenciones de sus colegas.

PROBLEMAS

Problema 1

¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos dan el mismo resultado que 1.500 x 9?

a) 1.500 x 3 x 3=
b) 1.500 x 3 + 6=
c) 1.500 x 3 + 1.500 x 6 =
d) 1.500 x 10 – 1500 =

Problema 2

¿Cómo harían para resolver 250 x 18 x 4 mentalmente?

Problema 3

¿Cómo podrían usar una calculadora en la que no funciona la tecla del 9 para resolver 1.809 x 9?

Problema 4

¿Las transformaciones que se hicieron en cada uno de los cálculos permiten resolverlos mentalmente?. Expliquen.

a) 39 x 50 = (40 – 1) x 50 = 2.000 – 50 = 1.950
b) 15 x 25 x 3 x 4 = 45 x 100 = 4.500
c) 25 x 48 = 5 x 5 x 6 x 8 = 30 x 40 = 1.200

Problema 5

Transformen los siguientes cálculos en otros equivalentes que sean fáciles de resolver mentalmente.

a) 597 x 15 =   b) 8 x 12 x 5 =   c) 52 x 21 =

Problema 6

Sabiendo que 335 x 20 = 6.700, calculen, sin hacer cada cuenta, los resultados de:

a) 345 x 20 =   b) 335 x 21 =   c) 335 x 40 =

Actividades

ACTIVIDAD 1 (obligatoria)

Foro de presentación.

Para empezar a conocernos, los invitamos a realizar una breve presentación. Dada la diversidad de lugares y formaciones de los cursantes de este módulo, resulta interesante que compartan algunos detalles sobre su experiencia docente, su lugar de trabajo, en dónde viven y si ya tuvieron experiencia en formación virtual.

También les proponemos que **escriban una reflexión sintética acerca de cómo ustedes entienden, a partir de su formación matemática y experiencia docente, que la Aritmética**

resulta un contenido importante en el Currículum de la enseñanza de la Matemática en la Escuela Secundaria.

Actividad 2 (sin entrega)

Consulten los diseños curriculares para la escuela secundaria de su región e identifiquen cuáles son los contenidos aritméticos que se proponen enseñar.

¿Por qué consideran importante incluirlos?

Actividad 3 (sin entrega) - Lectura obligatoria

Los invitamos a leer las páginas 39 a 43 del documento curricular "Matemática: cálculo mental con números naturales", donde se analizan algunas actividades de la escuela primaria que permiten abordar distintas estrategias de cálculo mental.

https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/numeros-naturales_web.pdf

Actividad 4 (sin entrega)

Resuelvan los siguientes problemas pensando posibles estrategias de resolución que podrían poner en juego los estudiantes en cada uno de ellos.

Problema 1

Sabiendo que hacer $20 \cdot 0{,}5$ es lo mismo que calcular la mitad de 20, es decir que da 10:

1) ¿Cómo harían para calcular mentalmente $20 \cdot 1{,}5$?
2) Calculen los siguientes productos.
    a) $20 \cdot 2{,}5$
    b) $20 \cdot 3{,}5$
    c) $30 \cdot 1{,}5$

Problema 2

Sabiendo que

$\frac{1}{3} = 0,\hat{3}$, escribí los números $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$ y $\frac{14}{3}$ en su expresión decimal.

Actividad 5 (sin entrega)

Les proponemos analizar didácticamente la siguiente secuencia didáctica teniendo en cuenta las prácticas aritméticas de la escuela primaria en las que se apoyan. Esta serie de problemas forma parte del material: "Manual de Matemática, UNTREF", (2021, Agrasar, Chemello, Díaz, Ministerio de Educación. Pág. 28) que incluye propuestas para trabajar sobre la articulación primaria - secundaria.

e) Sin resolver cada cálculo, ubiquen las multiplicaciones que dan el mismo resultado que 18 × 15. No olviden explicar en cada caso sus respuestas.

   i) 9 × 30 ii) 15 × 3 × 3 × 2 iii) 18 × 10 × 5 iv) 18 × 5 × 3

f) Escriban cada multiplicación de otra manera, tratando que el cálculo resulte más fácil.

   i) 24 × 21 ii) 45 × 12 iii) 14 × 50 iv) 96 × 5

g) Sabiendo que 32 × 21 = 672, decidan si los siguientes cocientes tienen resto 0 o no. No olviden explicar cómo se dieron cuenta.

   i) 672 : 21 ii) 672 : 8 iii) 672 : 12 iv) 672 : 9

h) Sin hacer las cuentas, completen la tabla de multiplicar × 24, sabiendo que 7 × 24 = 168. Anoten los cálculos que fueron realizando.

	2	3	5	10	14	70	150
× 24							

Actividad

Les proponemos analizar didácticamente un conjunto secuenciado de problemas, teniendo en cuenta las prácticas aritméticas de la Escuela Primaria en las que se apoyan.

El propósito de este trabajo es vincular los contenidos abordados en la primera clase de este curso con sus participaciones, por lo que les vamos a solicitar que incluyan citas textuales extraídas del texto de la clase y de la bibliografía complementaria, para darle sustento teórico a sus afirmaciones, explicitando las razones por las que las eligieron. Es importante usar vocabulario específico, citar correctamente y diferenciar ideas propias de ajenas.

Consideramos fundamental la interacción con sus colegas, por lo que pueden responder a participaciones realizadas por otros, enriqueciéndolas con citas o poniendo en discusión algunas de ellas. Pensamos al foro como un espacio de debate colectivo que, tal como sostiene nuestra postura didáctica, tiene un rol central en la enseñanza y aprendizaje. En este sentido, no deberían ser "muros" en donde se publican las actividades para "cumplir con la tarea" sin tener en cuenta las participaciones de los demás.

PROBLEMAS

Problema 1

¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos dan el mismo resultado que 1.500 x 9?

a) 1.500 x 3 x 3=
b) 1.500 x 3 + 6=
c) 1.500 x 3 + 1.500 x 6 =
d) 1.500 x 10 – 1500 =

Problema 2

¿Cómo harían para resolver 250 x 18 x 4 mentalmente?

Problema 3

¿Cómo podrían usar una calculadora en la que no funciona la tecla del 9 para resolver 1.809 x 9?

Problema 4

¿Las transformaciones que se hicieron en cada uno de los cálculos permiten resolverlos mentalmente?. Expliquen.

a) 39 x 50 = (40 – 1) x 50 = 2.000 – 50 = 1.950
b) 15 x 25 x 3 x 4 = 45 x 100 = 4.500
c) 25 x 48 = 5 x 5 x 6 x 8 = 30 x 40 = 1.200

Problema 5

Transformen los siguientes cálculos en otros equivalentes que sean fáciles de resolver mentalmente.

a) 597 x 15 =   b) 8 x 12 x 5 =   c) 52 x 21 =

Problema 6

Sabiendo que 335 x 20 = 6.700, calculen, sin hacer cada cuenta, los resultados de:

a) 345 x 20 =   b) 335 x 21 =   c) 335 x 40 =

FORO DE CIERRE DE LA CLASE 1

Analicen didácticamente el siguiente conjunto secuenciado de problemas, teniendo en cuenta **las prácticas aritméticas de la Escuela Primaria en las que se apoyan**.

En sus intervenciones deberán incluir citas del texto de la clase y/o de la bibliografía complementaria que les den sustento teórico a sus afirmaciones. Es importante usar vocabulario específico, citar correctamente, y diferenciar ideas propias de ajenas. Les recomendamos tener en cuenta, como ejemplos, los análisis didácticos realizados en la clase y en el documento curricular “Matemática: cálculo mental con números naturales”, incluido en la misma como lectura obligatoria.

Consideramos fundamental la interacción con sus colegas, por esta razón les solicitamos también **responder a participaciones realizadas por otros**, enriqueciéndolas con citas e ideas propias o poniendo en discusión algunas de ellas. Para esto deberán entrar periódicamente al foro para leer las intervenciones de sus colegas.

PROBLEMAS

Problema 1

¿Cuál o cuáles de los siguientes cálculos dan el mismo resultado que 1.500 x 9?

a) 1.500 x 3 x 3=
b) 1.500 x 3 + 6=

c) 1.500 x 3 + 1.500 x 6 =

d) 1.500 x 10 – 1500 =

Problema 2

¿Cómo harían para resolver 250 x 18 x 4 mentalmente?

Problema 3

¿Cómo podrían usar una calculadora en la que no funciona la tecla del 9 para resolver 1.809 x 9?

Problema 4

¿Las transformaciones que se hicieron en cada uno de los cálculos permiten resolverlos mentalmente?. Expliquen.

a) 39 x 50 = (40 – 1) x 50 = 2.000 – 50 = 1.950

b) 15 x 25 x 3 x 4 = 45 x 100 = 4.500

c) 25 x 48 = 5 x 5 x 6 x 8 = 30 x 40 = 1.200

Problema 5

Transformen los siguientes cálculos en otros equivalentes que sean fáciles de resolver mentalmente.

a) 597 x 15 = b) 8 x 12 x 5 = c) 52 x 21 =

Problema 6

Sabiendo que 335 x 20 = 6.700, calculen, sin hacer cada cuenta, los resultados de:

a) 345 x 20 = b) 335 x 21 = c) 335 x 40 =

Material de lectura

Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Dirección de Currícula y Enseñanza (2010). Matemática: cálculo mental con números naturales (pp. 38-45). Buenos Aires: Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Disponible en: https://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/numeros-naturales_web.pdf

Bibliografía de referencia

AA. VV. (2013). Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo básico. Educación secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

AA. VV. (2012). Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Campo de Formación General. Ciclo Orientado. Educación Secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Grimaldi, V. y Itzcovich, H. (2013). Tensiones en el paso de la escuela primaria a la escuela media. Algunas reflexiones en el área de matemática. En: Broitman, C. (Comp.). Matemáticas en la escuela primaria. Buenos aires: Paidós.

Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Dirección de Currícula y Enseñanza (2010). Matemática: cálculo mental con números naturales (pp. 38-45). Buenos Aires: Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Parra, C. (1994). Didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones. El cálculo mental en la escuela primaria. Buenos Aires: Paidós.

Agrasar, M.; Chemello G. y Díaz A. (2021). Manual de Matemática UNTREF. Ministerio de Educación. Presidencia de la Nación.

Créditos

Autores: Andrea Novembre, (coord.). Carolina Benito; Mauro Nicodemo; Débora Sanguinetti; María Paula Trillini.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.) Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2022). Clase Nro. 1: El trabajo aritmético en la escuela secundaria. Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética en la Escuela Secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 2: Números Enteros

Introducción

En la clase anterior se identificaron distintos conocimientos aritméticos vinculados a los contenidos propios de la escuela secundaria, al mismo tiempo que se establecieron relaciones entre estos y los que son propios de la escuela primaria. Por ejemplo, se analizaron problemas que retoman estrategias de cálculo mental para realizar operaciones con números racionales y para escribir la expresión decimal periódica de algunas fracciones. A su vez, se realizó una caracterización de qué entendemos por *problema aritmético* desde el enfoque de enseñanza a partir de la resolución de problemas desde el cual realizamos esta propuesta de formación.

De manera general podemos caracterizar a la Aritmética como el estudio de los números y de las operaciones que pueden realizarse con ellos. En este sentido, consideramos que un problema es aritmético si puede resolverse mediante una representación que involucra números y operaciones entre ellos.

En el transcurso de esta clase les proponemos continuar el análisis teniendo como ejes las continuidades y rupturas con respecto a la escuela primaria y la caracterización y el tratamiento de los problemas aritméticos, profundizando en particular con respecto a los Números Enteros, un contenido central del Ciclo Básico de la escuela secundaria.

Acerca de la enseñanza de los números enteros

La utilización de modelos concretos y de contextos extramatemáticos ha sido y es una opción muy extendida para abordar la enseñanza de los Números Enteros. Sin embargo, diversas investigaciones (Cid, 2016), y nuestra propia experiencia docente, dan cuenta de que cualquiera de estos modelos es insuficiente para responder a todas las problemáticas vinculadas a las operaciones y propiedades en este conjunto numérico. Por este motivo, uno de los objetivos de esta clase será problematizar la enseñanza de los Números Enteros a partir de modelos concretos, sin perder de vista que los contextos extramatemáticos son un buen punto de apoyo para su introducción y para comenzar su estudio.

Queremos también explicitar que si bien muchos de los conocimientos que se abordarán durante la clase son aplicables a todos los números negativos, desde los diseños curriculares se propone comenzar su enseñanza en el ámbito del conjunto de los Números Enteros, para luego extender su alcance. Por eso, los ejemplos, los análisis, las observaciones y las demás cuestiones que se aborden se harán en el ámbito de este conjunto numérico.

Distintos conocimientos relacionados con el conjunto de los Números Enteros

Es probable que al comenzar la escuela secundaria los y las estudiantes ya sepan de la existencia de los números negativos a partir de su uso social, posiblemente como representaciones de distintos hechos en diferentes contextos. Por ejemplo, para indicar el subsuelo en un edificio, una deuda en una cuenta comercial, una temperatura, la profundidad a la que se encuentra un objeto en el mar, etcétera. Sin embargo, los profesores y las profesoras de Matemática reconocemos fácilmente que los saberes asociados a los números negativos (y al conjunto de los Números Enteros) exceden este tipo de usos. Por eso, para comenzar a pensar en la enseñanza, les proponemos identificar distintos conocimientos relacionados con los números negativos que deben aprender los y las estudiantes en la escuela secundaria.

Proponemos una clasificación de los distintos conocimientos relacionados con los números negativos que puede ser útil para pensar en la enseñanza.

1. El empleo de los números negativos para representar distintas situaciones en distintos contextos.
2. Las propiedades de los Números Enteros.
3. Las operaciones con Números Enteros y sus propiedades.

Los números negativos en distintos contextos

Como mencionamos anteriormente, los números negativos suelen utilizarse socialmente para representar distintas situaciones en diferentes contextos. De manera análoga a lo que sucede con los Números Naturales, en estos casos se emplean para representar cantidades, medidas o posiciones, pero con el agregado de un signo relativo a un “cero”. A continuación, mostramos algunos ejemplos de problemas que se pueden resolver poniendo en juego esta concepción.

Problema

El primer día de la semana Jorge tenía 1200 pesos en su cuenta del banco y, a medida que pasaron los días, fue gastando dinero de esa cuenta con su tarjeta de débito. Al finalizar la semana el saldo de la cuenta era de -800 pesos. ¿Es cierto que gastó más dinero del que tenía? ¿Cuánto gastó en total durante esa semana?

Problema

Se sabe que entre las 8 y las 14 horas de un día de invierno la temperatura ambiente subió 10 °C. Si a las 8 horas la temperatura era de -2 °C, ¿cuál era la temperatura a las 14 horas?

Problema

Un submarino que se encontraba a 230 metros de profundidad bajo el nivel del mar descendió 120 metros. ¿Su posición actual con respecto al nivel del mar es -110 metros o -350 metros?

Estos tres problemas pueden resolverse poniendo en juego conocimientos sobre números naturales y “decidiendo” el signo del número que conforma la respuesta a partir de lo que representa en el contexto. Por ejemplo, en el tercer caso se podría interpretar que luego de descender el submarino se encontrará a mayor profundidad, por lo que la operación a realizar es una suma (230 + 120 = 350), para luego responder que la posición final es -350 metros, debido a que se encuentra bajo el nivel del mar. Si bien la resolución es correcta, de esta manera no se estaría operando con números negativos, sino que se los estaría usando para representar estados o situaciones, a partir de una concepción que se suele llamar “número con signo”.

“En el intento de encontrar el obstáculo u obstáculos que puedan estar detrás de esas dificultades, Brousseau (1983, p. 191) hace la hipótesis de que el empleo de números con signo se generalizó al atribuir arbitrariamente el estatuto de ‘positivo’ o ‘negativo’ a las medidas de las cantidades de magnitud, según el papel que representaban en la situación. Por ejemplo, dependiendo de la situación, la entrada y salida de productos en un comercio puede notarse positiva o negativamente. Esos números, considerados aisladamente son números sin signo, puesto que representan medidas de magnitudes; el signo es algo circunstancial, provisional, que sirve para indicar la oposición de unas cantidades respecto a otras en el transcurso de la acción. Así pues, el carácter 'relativo' de los números positivos y negativos pudo jugar un papel importante en su creación y aceptación y suponer un obstáculo a una concepción que asuma el signo como algo intrínseco al propio número”.

Cid, (2016, p.26).

Como se menciona en el texto, “quedarse” con esta concepción de “número con signo” podría resultar un obstáculo para el estudio de las operaciones y de las propiedades de los números negativos. Desde el punto de vista de la enseñanza, se evidencia entonces que es necesario avanzar hacia una concepción que permita operar con ellos y estudiar sus propiedades. Tomando como insumo la resolución de problemas en contextos extramatemáticos y apoyados en ellos, el docente podría proponer representar esas resoluciones por medio de cálculos con números enteros, realizando modelizaciones de las situaciones. En el problema que se analizó más arriba se podría representar la resolución por medio del cálculo -230 - 120 = -350. Otro tipo de situaciones son las que se pueden resolver poniendo en juego la concepción de número negativo como *variación o “diferencia” orientada*. Por ejemplo, el primero de los problemas propuestos como ejemplo (en un contexto de saldos bancarios y gastos) se podría representar con el cálculo -800 - 1200 = -2000 e interpretar que la variación obtenida es negativa porque representa un gasto. En estos casos el signo no representa una posición con respecto a un “cero”, sino la orientación de una variación.

Las limitaciones de los modelos concretos y de los contextos extramatemáticos

Teniendo como referencia las distintas resoluciones, en los distintos contextos y a partir de las dos concepciones de número negativo descritas anteriormente, los y las estudiantes podrían formular reglas generales para realizar algunas operaciones. Sin embargo, estos abordajes no son suficientes. No todas las operaciones con números negativos se pueden interpretar a partir de contextos extramatemáticos o modelos concretos, lo que obliga a estudiarlas de manera intramatemática. Observemos algunos casos.

> ¿Existen modelos concretos o contextos extramatemáticos que se podrían utilizar como apoyo para resolver las siguientes operaciones? ¿Cuáles?
>
> a) 3 · (-4)
>
> b) -4 · 3
>
> c) -3 · (-4)

El primer cálculo se puede resolver a partir de apoyarse en un contexto. Por ejemplo, -4 se puede interpretar como una "variación orientada", indicando que una temperatura disminuye 4 °C. Siguiendo con esa interpretación, multiplicar por 3 podría indicar que se está considerando 3 veces la disminución de 4 °C, lo que se puede representar con el número -12. En este caso, además del contexto, se estaría poniendo en juego la noción del producto como suma o "repetición" sucesiva (cantidad de veces), asociada a conocimientos de la escuela primaria. Si bien para el segundo caso se podría hacer la misma interpretación (3 veces -4), también es posible afirmar que el resultado debe ser -12 por una necesidad interna matemática: que siga siendo válida la propiedad conmutativa en este conjunto numérico. El tercer cálculo también se puede resolver a partir del primero, apelando al concepto de opuesto: si 3 · (-4) es -12, entonces el opuesto debe ser 12.

opuesto de

$$\underbrace{-\overbrace{3\cdot(-4)}^{-12}}_{12}$$

Para este último caso fue necesario poner en juego el concepto de opuesto, que resulta ser nuevo para los y las estudiantes al momento de comenzar el estudio de los números enteros. Entonces, para la interpretación analizada, resulta necesario abordar la enseñanza de esta noción antes de proponer problemas y actividades que tengan como objetivo la formulación de la regla de los signos. Situaciones similares a estas suceden con otras características y propiedades de los números enteros, que deben ser estudiadas "al interior" de la Matemática.

Los modelos concretos y los contextos extramatemáticos son útiles para darle sentido a los números negativos y para comenzar a estudiarlos, pero resultan insuficientes para estudiar y resolver todas las problemáticas vinculadas a sus operaciones y propiedades. Por eso resulta necesario considerar cuestiones de sentido y coherencia internas de la Matemática.

ACTIVIDAD 1 (LECTURA OBLIGATORIA)

Para seguir profundizando sobre las limitaciones de los modelos concretos y de los contextos extramatemáticos, les proponemos que lean el siguiente artículo que forma parte de una ponencia de Eva Cid titulada "Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos", enfocándose particularmente en las 5 primeras páginas. Podrán encontrarlo disponible en el siguiente enlace:

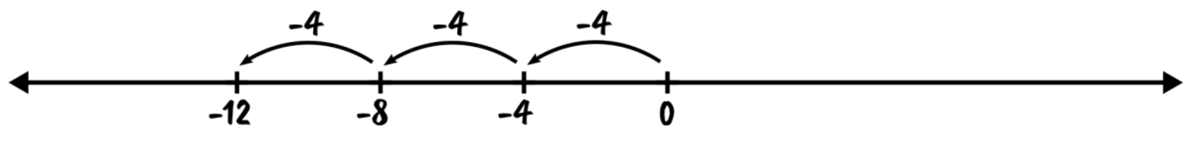
https://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Este artículo es un resumen del capítulo 1 de su tesis doctoral del año 2016.

Los números negativos en la recta numérica

La recta numérica puede ser un recurso potente para representar números enteros y estudiar sus operaciones y propiedades "al interior" de la Matemática. En este caso se estaría realizando una modelización intramatemática entre la recta (con sus propiedades geométricas) y el conjunto de los Números Enteros (con sus propiedades algebraicas). Esta relación puede utilizarse para abordar variados conocimientos sobre este conjunto numérico: sumas y restas, multiplicaciones y divisiones, distancia, comparación y orden, el concepto de opuesto, etcétera. Para analizar de qué manera podría emplearse, tomemos como ejemplo los productos con los que trabajamos antes.

Con respecto al caso 3·(-4) dijimos que se podía interpretar como 3 veces -4, lo que podría representarse de la siguiente manera en la recta numérica, “repitiendo” 3 veces un desplazamiento de 4 unidades hacia la izquierda a partir del 0.

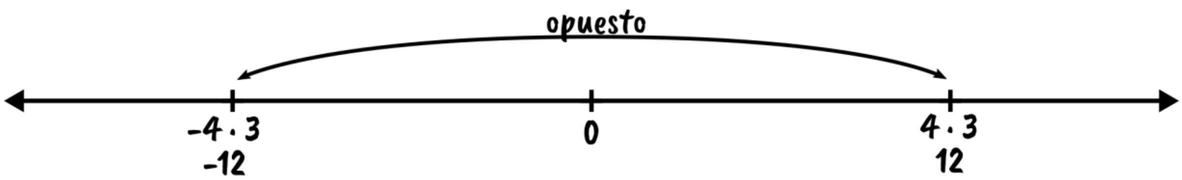


En el caso de -4·3 hicimos referencia a que se podía interpretar de la misma manera que el caso anterior. Sin embargo, también dijimos que se podría afirmar que el resultado debe ser -12 por la necesidad interna matemática de que siga siendo válida la propiedad conmutativa.

Como el resultado de 3 · (-4) es -12, entonces, por la propiedad conmutativa, el resultado de -4 · 3 también es -12.

Para este último caso podemos agregar otra estrategia de resolución “interna”, análoga a la que desarrollamos para -3 · (-4) más arriba: “leer” la expresión como “el opuesto de 4 por 3” para concluir que el resultado debe ser -12. Esta resolución también se puede representar en la recta numérica.

Como el resultado de 4 · 3 es 12, entonces el resultado de -4 · 3 es -12, debido a que el resultado de -4 · 3 es el opuesto del resultado de 4 · 3.



Considerando las resoluciones expuestas nos podemos hacer la siguiente pregunta con respecto al uso que se hace de la recta numérica.

¿La recta numérica se utiliza para llevar a cabo resoluciones o se emplea para representar resoluciones ya realizadas?

Desde nuestro punto de vista, creemos que la recta numérica puede utilizarse de las dos maneras, tanto como un soporte sobre el cual operar para hallar soluciones, como un recurso para representar resoluciones y soluciones, y luego validarlas. En efecto, si bien esta distinción entre diferentes usos puede ayudarnos a pensar en términos didácticos, al momento de resolver problemas es probable que se den de manera simultánea y relacionada, retroalimentándose entre sí.

Por ejemplo, en el caso analizado, la recta numérica podría estar utilizándose para resolver, al “operar” sobre ella repitiendo 3 veces un desplazamiento de 4 unidades desde 0 y hacia la izquierda, hasta llegar a -12. Pero también se podría estar empleando como una manera de explicar y validar por qué “3 veces -4 es -12”, luego de haberlo resuelto mediante esa estrategia. Lo matemáticamente más deseable, ya que conlleva un conocimiento más profundo, es que estos dos usos se estén dando de manera simultánea, uno dándole sentido al otro, y viceversa. Es por eso que en un contexto de aula es muy provechoso que las diferentes estrategias, representaciones e interpretaciones se expongan de manera colectiva y se pongan en relación para favorecer que unas se constituyan como validación de las otras, en la medida de lo posible.

Al resolver problemas, la utilización de la recta numérica para representar números enteros, sus operaciones y propiedades puede realizarse con, al menos, dos objetivos: resolver y validar.

Por ejemplo, ante una situación planteada podría utilizarse la recta numérica como recurso para hacer una modelización y para llevar a cabo una resolución poniendo en juego sus propiedades.

También podría suceder que, habiendo resuelto un problema con alguna otra estrategia, se utilice la recta numérica para representar la situación y validar la resolución realizada y la solución hallada, estableciendo relaciones entre ambas maneras de resolver.

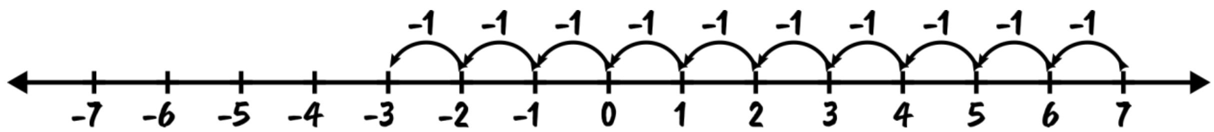
Lo deseable es que durante una práctica matemática estos dos usos de la recta numérica se den de manera simultánea y relacionada, retroalimentándose entre sí.

Sumas y restas en la recta numérica

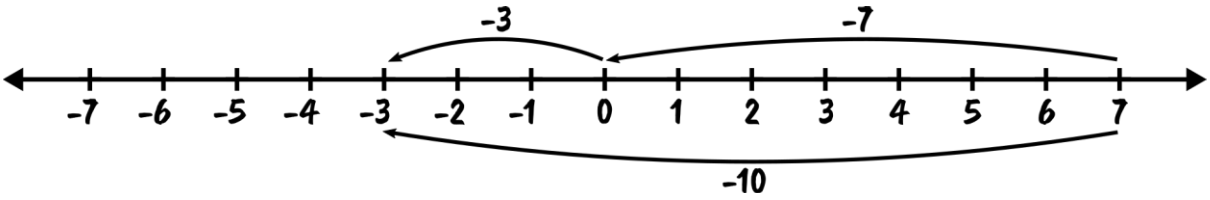
Como venimos observando, la recta numérica puede ser un recurso potente para estudiar las operaciones con números enteros y sus propiedades, al utilizarla como un modelo intramatemático. A continuación, les proponemos algunos ejemplos con el objetivo de analizar de qué manera se podría utilizar para abordar cuestiones específicas vinculadas a las operaciones de sumas y restas. A su vez, intentaremos identificar sobre qué conocimientos alcanzados en la escuela primaria es posible apoyarse para realizar esas tareas.

Restar un número positivo o sumar un número negativo

La primera de estas operaciones se puede representar en la recta numérica interpretándola como un desplazamiento hacia la izquierda, a partir de un número que sería el "punto de partida". Este sentido de la resta se trabaja en la escuela primaria, muchas veces asociado a la idea de retroceder en un recorrido, pero sin que esté habilitado restar un número que sea mayor al que se le está restando. A propósito del trabajo con números enteros, para abordar y superar esta limitación es posible retomar esta misma idea extendiendo el recorrido hacia los números negativos. Por ejemplo, para el cálculo 7-10 se podría utilizar la siguiente representación.



"Retroceder" 10 unidades de 1 en 1 no es la resolución óptima, por lo que sería deseable que los y las estudiantes construyan estrategias de cálculo mental para realizar este tipo de operaciones. Por ejemplo, este mismo cálculo se podría resolver empleando una representación similar en la recta numérica, pero poniendo en juego estrategias de cálculo mental asociadas a "números redondos" y descomposiciones aditivas: para restarle 10 a 7 puedo restar primero 7 hasta llegar a 0, para luego restar los 3 que "faltan", llegando a -3.

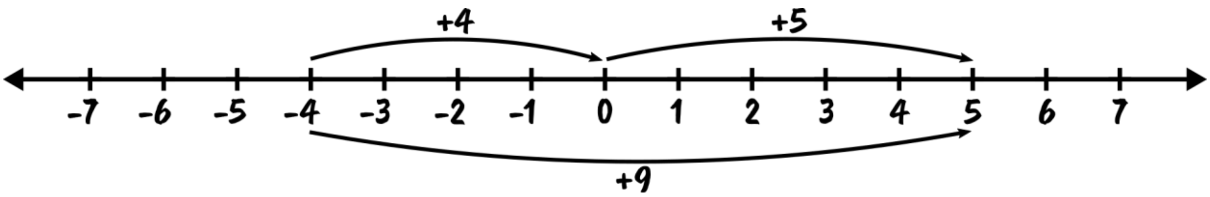


En la escuela primaria se trabajan estrategias análogas a la descripta. Por ejemplo, para calcular la suma 90 + 25 se analiza que es posible sumar primero 10 hasta llegar a 100, para luego sumar los 15 que "faltan", llegando a 115.

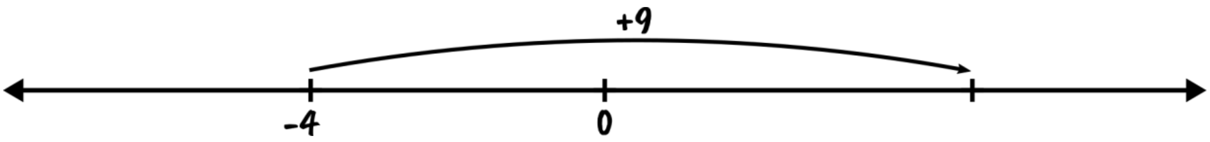
La suma de un número negativo también se puede interpretar como un desplazamiento hacia la izquierda, lo que supone concebir a los números negativos como "variaciones orientadas". Entonces, a partir de identificar que ambas operaciones se representan de la misma manera en la recta numérica, es posible establecer la equivalencia entre la suma de un número negativo y la resta de un número positivo con el mismo valor absoluto. En el caso que estamos tomando como ejemplo, llegar a la conclusión de que 7 - 10 = 7 + (-10), para avanzar hacia la construcción de la regla general.

Sumar un número positivo a un número negativo

Esta operación también se puede representar en la recta numérica como un desplazamiento (en este caso hacia la derecha del "punto de partida") y resolver poniendo en juego estrategias de cálculo mental. Por ejemplo, para el cálculo -4 + 9 se puede utilizar una estrategia análoga a la que se mostró para la resta: sumar 4 hasta llegar a 0, para luego sumar los 5 que "faltan", llegando a 5.



Estos casos también se pueden utilizar para trabajar sobre estrategias de anticipación, que permiten avanzar sobre un pensamiento más general. Por ejemplo, se puede proponer a los y las estudiantes que analicen si el resultado será positivo o negativo sin resolver el cálculo. Apoyándose en la recta numérica e interpretando la suma como un “desplazamiento hacia la derecha”, los alumnos y las alumnas podrían establecer si el resultado “se pasará de 0” o si “no llegará a 0”. Es decir, se podrá determinar si es mayor o menor que 0. Para el caso -4 + 9, como 9 es mayor que 4 el resultado “se pasa de 0”, por lo cual es positivo.



A partir del estudio de estos casos, los y las estudiantes junto con el/la docente podrían construir una regla general como la siguiente:

Suma de un número positivo a un número negativo

Si el valor absoluto del número que se suma es mayor que el valor absoluto del número al cual se le está sumando, entonces el resultado será positivo y su valor absoluto será “lo que sobra” después de llegar a 0. En caso contrario, el resultado será negativo y su valor absoluto será “lo que falta” para llegar a 0.

“Siempre que se suma un número positivo a uno negativo, si el valor absoluto del número que se suma es mayor que el valor absoluto del número al cual se le está sumando, entonces el resultado será positivo y su valor absoluto será “lo que sobra” después de llegar a 0. En caso contrario, el resultado será negativo y su valor absoluto será “lo que falta” para llegar a 0. En caso de que ambos números, el positivo y el negativo, tengan igual valor absoluto, el resultado es cero”.

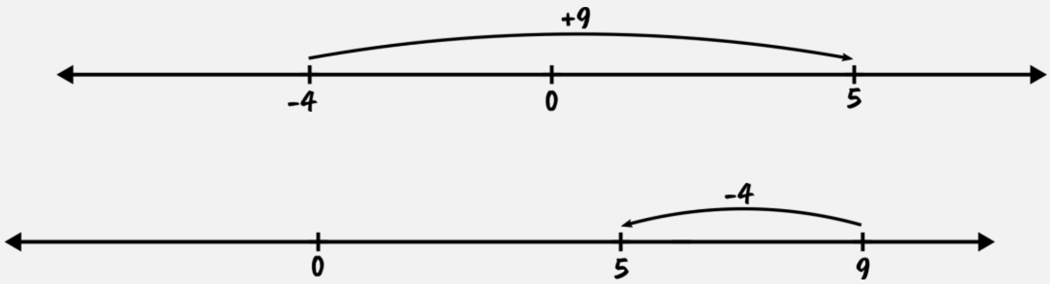
Esta formulación de reglas requiere de un tratamiento general de cuestiones aritméticas, lo que favorece la constitución de un pensamiento algebraico por parte de los y las estudiantes. Con este objetivo, los y las docentes podríamos proponerles problemas en los cuales se pongan en cuestión estas relaciones aritméticas de manera general. Por ejemplo, por medio del siguiente enunciado en el que se incluyen números indeterminados representados por letras.

Problema

¿Qué valores podría tomar *b* para que -10 + *b* sea positivo?

Antes de terminar con este apartado, no queremos dejar de reflexionar acerca de una cuestión importante con respecto al uso que propusimos de la recta numérica para estudiar operaciones y propiedades de sumas y restas. En todos los casos la representación se puede realizar ubicando el “primer” número en la recta y luego desplazándose según “indiquen” la operación y el “segundo” número. Este procedimiento se puede llevar a cabo concibiendo al “primer” número como un “número con signo” y al “segundo” número como una “variación orientada”. Sin embargo, en la primera parte de la clase hicimos referencia a que estas concepciones podrían ser un obstáculo para lograr ciertos conocimientos sobre los números enteros. En particular, podrían ser un obstáculo para estudiar propiedades que requieran de la conmutatividad de la suma, ya que el “primer” número y el “segundo” número se conciben de manera distinta. Analicemos esta igualdad.

¿Por qué -4 + 9 = 9 - 4?



Al observar las representaciones pareciera que la recta numérica es insuficiente para estudiar la equivalencia entre estos cálculos. Para validarla podrían realizarse transformaciones poniendo en juego la propiedad conmutativa.

$$-4 + 9 = 9 + (-4) = 9 - 4$$

La recta numérica es un recurso potente para estudiar los números enteros, sus operaciones y sus propiedades, aunque en algunos casos encuentre limitaciones para representar y permitir interpretar ciertas relaciones.

La recta numérica como objeto matemático

Hasta este momento estuvimos analizando la recta numérica en cuanto a su utilización para representar y estudiar los números enteros, sus operaciones y sus propiedades. Es decir que la estuvimos considerando en cuanto a su carácter de instrumento, como una herramienta para abordar y resolver problemas. Sin embargo, la recta numérica no solo es un instrumento, sino que también es un objeto matemático que, como tal, debe ser conceptualizado.

"Para un concepto matemático, conviene distinguir su carácter 'instrumento' y su carácter 'objeto'. Por instrumento entendemos su funcionamiento científico en los diversos problemas que permite resolver. Un concepto toma sentido por su carácter 'instrumento'. [...]
Por objeto, entendemos el concepto matemático, considerado como objeto cultural que tiene su lugar en una construcción más amplia que es la del conocimiento inteligente en un momento dado, reconocido socialmente. [...]
La actividad principal en Matemáticas, en el cuadro escolar, o en los centros de investigación profesional(...), consiste en resolver problemas, en plantear cuestiones. El investigador puede declarar resuelto un problema si puede justificar sus declaraciones según un sistema de validación propio de las Matemáticas. En este camino, crea conceptos que juegan el papel de instrumentos para resolver problemas".

Douady, (1986, p.3)

Como se desprende del texto, un objeto matemático se construye durante la actividad matemática con el objetivo de ponerlo en funcionamiento como instrumento para resolver nuevos problemas. Por eso cobra importancia el estudio de la recta numérica como objeto, explicitando sus características y propiedades, que son las que se pondrán en juego al resolver distintas situaciones. A continuación, listamos algunas que, consideramos, son relevantes para el estudio del conjunto de los Números Enteros.

- **La recta numérica es simétrica con respecto a 0.** Coloquialmente se podría decir que “lo que sucede a la izquierda de cero es lo mismo que lo que sucede a la derecha”. Apoyándose en esta característica, algunas de las propiedades de los números negativos se pueden estudiar a partir de ciertos conocimientos que poseen los y las estudiantes referidos a los números positivos. Por ejemplo, si los números naturales son infinitos, entonces los enteros negativos también deben serlo, ya que la recta “no termina”. También se podría utilizar la simetría para ubicar números negativos a partir de la ubicación de los positivos. Para estudiar otras propiedades de estos números es necesario considerar de manera conjunta esta característica (la simetría) y otras de la recta numérica.
- **La recta numérica es ordenada.** Las “posiciones” de los números sobre la recta definen un orden, lo que permite determinar si uno es mayor que otro analizando cuál se representa “a la derecha” del otro. Esta característica, junto con la simetría, permite comparar números enteros apoyándose en conocimientos sobre los números naturales. Por ejemplo, ante una tarea de este tipo, los y las estudiantes podrían ubicar los números en la recta numérica utilizando la simetría (para el caso de los negativos) y luego establecer cuál es mayor a partir de su posición relativa.
- **En la recta numérica la ubicación de los números respeta una escala.** Esta característica permite definir distancias entre los números. Para el caso de los números positivos, es probable que los y las estudiantes hayan construido esta noción asociada a la “diferencia”, en la escuela primaria. Sin embargo, esta concepción puede resultar insuficiente si se quiere establecer la distancia entre un número negativo y uno positivo. En este caso, nuevamente se pueden representar los números en la recta numérica (tal vez utilizando la simetría para el caso del negativo) y calcular la distancia a partir de “los desplazamientos” necesarios para ir de uno a otro.

Como se puede apreciar, algunos de estos conocimientos sobre la recta numérica se ponen en juego al utilizarla para resolver los ejemplos sobre operaciones que analizamos anteriormente. De esta manera, cuando un/una estudiante utiliza la recta numérica como un instrumento para resolver un problema, también la está construyendo como un objeto. Y, a su vez, cuando la estudia como un objeto, debería identificar cuáles de sus propiedades son las que le permite resolver problemas utilizándola como un instrumento. Por eso Douady analiza el carácter de instrumento y el carácter de objeto de un concepto matemático de manera dialéctica, en constante relación y retroalimentación.

Síntesis y reflexiones finales

Al comenzar esta clase reconocimos algunos conocimientos asociados al conjunto de los Números Enteros: el empleo de los números negativos para representar distintas situaciones en distintos contextos, las propiedades de los números enteros y las operaciones con números enteros y sus propiedades.

Luego continuamos reflexionando sobre el uso de modelos concretos y de contextos extramatemáticos para el estudio de los números negativos. Analizamos que, así como resultan un recurso muy útil para el comienzo del trabajo con estos números en las aulas, también se pueden constituir en un obstáculo para estudiar algunas operaciones y propiedades. Por este motivo, concluimos que se torna necesario hacer un estudio intramatemático de esas cuestiones.

Siguiendo con el razonamiento anterior, propusimos el uso de la recta numérica como herramienta de modelización intramatemática. Fue sobre esta representación y a partir de algunos ejemplos que analizamos de qué manera se la podría emplear para estudiar las operaciones y las propiedades de los números enteros: la suma, la resta, algunos productos y la noción de opuesto.

Por último, aún con el foco puesto en la recta numérica, identificamos que al ser esta una herramienta valiosa para la enseñanza y el aprendizaje y para la resolución de problemas, resulta necesario considerarla como objeto matemático en sí mismo, estudiando, enseñando y aprendiendo sus características y sus propiedades.

Actividades

Participación en el foro de la clase 2

Participación en el foro de integración de la clase 2 (ACTIVIDAD OBLIGATORIA)

En este foro los vamos a invitar a participar con una consigna que puede resultar novedosa para muchos de ustedes. Sabemos que los momentos en los que pueden participar de los foros varían de acuerdo a sus actividades, así que lo dividimos en dos partes: cuando participen durante la **primera semana** de la clase (desde el miércoles de publicación de la clase hasta el martes siguiente) deberán respetar la primera consigna; y para cuando lo hagan a partir de la segunda semana de clase (hasta el cierre del foro) deberán responder a la **segunda consigna**.

Recuerden

que la participación en los foros no es simplemente publicar su respuesta “para cumplir”, queremos que se establezca un diálogo entre ustedes, debates, preguntas, ideas. Por eso extendemos esta invitación a la reflexión en dos momentos diferentes.

Consigna para la Primera Semana

- Realicen una lectura los NAP de Educación Primaria (Primer y Segundo Ciclo) y los NAP de Séptimo año. (correspondientes a 7°año EP o 1°Año ES según la jurisdicción) Disponibles en: https://www.educ.ar/recursos/150199/coleccion-ncleos-de-aprendizajes-prioritarios-nap ·
- Luego compartan una breve actividad para la enseñanza de los números enteros (debe incluir números positivos, negativos y el cero). Esta actividad deberá tener la característica de ser **intramatemática y estar en relación con las propuestas desarrolladas en este curso**. Fundamenten su elección realizando citas de la clase o de la bibliografía complementaria.
- Identifiquen algunos conocimientos correspondientes a la Escuela Primaria (basados en los NAP) que podrían utilizar los y las estudiantes para resolver la actividad propuesta.

Consigna de participación para la segunda semana

Elijan alguno de los problemas publicados por alguna o alguno de sus colegas y respondan a dicha publicación haciendo alguna observación (puede ser ampliándola, poniendo alguna idea en debate, incluyendo preguntas, etcétera).

Es importante que este comentario recupere lo tratado en la clase, utilizando alguna cita extraída de la bibliografía o de la clase que refuerce sus ideas y le dé sustento teórico, para que no sean simplemente opiniones.

Material de lectura

Cid, E. (2106). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. [Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza]. Repositorio de la Universidad de Zaragoza – Zaguan. (Artículo que resume el capítulo 1 para realizar una ponencia). Recuperado de: https://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf

Bibliografía de referencia

Cid, E. (2106). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. [Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza]. Repositorio de la Universidad de Zaragoza – Zaguan. Disponible en: https://zaguan.unizar.es/record/112529/files/TESIS-2022-085.pdf

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.* (7.2), pp. 5-32. Editions La Pensée Sauvage: París, Francia. (Traducido al castellano, "Relación enseñanza - aprendizaje, dialéctica instrumento - objeto y juego de marcos").

Créditos

Autores: Andrea Novembre (coord.); Carolina Benito; Mauro Nicodemo; Débora Sanguinetti; María Paula Trillini.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.) Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2022). Clase Nro.: 2. Números Enteros. Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética en la Escuela Secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 3: La enseñanza de las operaciones entre fracciones

Introducción

En la clase anterior abordamos la enseñanza de los Números Enteros en la escuela secundaria y analizamos los diferentes sentidos de los Números Negativos que se espera que construyan los estudiantes. Reflexionamos sobre los contextos extramatemáticos y el modo en el que pueden favorecer la introducción a este conjunto numérico, la comparación de números e incluso el trabajo con algunas operaciones. Pero también vimos cuáles son sus limitaciones, dado que no todas las operaciones entre números enteros pueden explicarse mediante un contexto extramatemático.

En esta clase propondremos continuar el trabajo que venimos realizando en términos de continuidades y rupturas centrándonos en la enseñanza de las operaciones en el conjunto de los Números Racionales, en particular en el trabajo con fracciones. Si bien el estudio de este conjunto numérico comienza en la escuela primaria, continúa y se profundiza en la escuela secundaria, razón por la cual resulta necesario preguntarnos qué abordaje podemos hacer para su estudio teniendo en cuenta el recorrido anterior.

Acerca de la enseñanza de los números racionales

Como mencionamos previamente, cuando se aborda el trabajo con los Números Racionales en la Escuela Secundaria, los estudiantes disponen de conocimientos que fueron desarrollados durante la Escuela Primaria. Sin embargo, muchas veces identificamos algunas concepciones erróneas persistentes en nuestros estudiantes. Algunas de estas son esperables para quien está aprendiendo, mientras que otras requieren de acciones específicas de enseñanza para ponerlas en discusión. Mencionamos algunas de ellas:

- $\frac{2}{3}$ corresponde al número decimal 2,3.

- Al comparar dos fracciones, por ejemplo $\frac{235}{428}$ y $\frac{3}{2}$, suelen considerar que la primera es mayor que la segunda porque los números en el numerador y denominador son mayores que los correspondientes a la segunda fracción.
- Ante la pregunta acerca de cuál es el siguiente de $\frac{1}{3}$ pueden decir $\frac{2}{3}$ o $\frac{1}{4}$ o $\frac{2}{4}$.
- También pueden sostener que el doble de $\frac{3}{5}$ es $\frac{6}{10}$.
- Y suele ocurrir que consideran que $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ da $\frac{3}{5}$.

Esta lista puede continuar y seguramente ustedes puedan agregar muchos ejemplos más.

Para analizar algunas de estas concepciones, les proponemos mirar el fragmento del video comprendido entre 22:55 y 31:40 minutos, en el que Claudia Brotimann comparte algunas reflexiones.

Enlace: https://youtu.be/xvwyN4ytI5Y?t=1387

En la primera clase mencionamos que los errores que cometen los estudiantes al trabajar con Números Racionales generalmente están vinculados con extender propiedades que son propias de otro conjunto numérico. Además, muchas de estas resoluciones ponen en evidencia la falta de sentido que tiene para ellos el número racional. Entonces, ¿qué podemos hacer desde la enseñanza? Proponemos un trabajo en el aula que permita confrontar y poner en discusión estas hipótesis que se han construido sobre este nuevo conjunto numérico.

Distintos sentidos de las fracciones

Como sucede con todos los conceptos matemáticos, el sentido que los estudiantes podrán construir de las fracciones depende fuertemente de las situaciones a las que se enfrenten durante su aprendizaje.

Algunos de los sentidos planteados en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios son:

- la fracción como resultado de un reparto en partes iguales sin que sobre nada. En estos casos, puede quedar ligada al cociente entre dos números enteros;
- la fracción como una constante de proporcionalidad. Esta constante puede tener un significado en relación con el contexto del problema con el que se está trabajando;
- la fracción como expresión de una medición. En este caso, tendrá una relación con una unidad de referencia;
- la fracción como una razón: escala, velocidad, porcentaje, densidad, probabilidad;
- la fracción para expresar una relación entre partes que forman un todo;
- la fracción como solución de una ecuación del tipo $ax = b\ ,\ \ con\ \ \ a, b \in Z,\ \ a \neq 0$ y donde a no es divisor de b.

PARA TOMAR NOTA (LECTURA OBLIGATORIA - sin entrega)

Para profundizar sobre los sentidos de las fracciones que se abordan en la Escuela Primaria, los invitamos a leer las páginas 53 a 79 del documento de actualización curricular: Matemática. Documento 4. Disponible para descargar en la plataforma

Les sugerimos tomar nota de lo que consideren relevante porque será un buen insumo para sus justificaciones y la elaboración de actividades.

Si bien es necesario que en las situaciones de enseñanza se presenten actividades que permitan abordar los distintos sentidos de las fracciones, sabemos que esto no es suficiente. Es indispensable proponer un trabajo reflexivo que permita volver sobre lo realizado solicitando explicaciones, fundamentaciones, poniendo en discusión las distintas resoluciones, etc. Esta tarea de reflexión no se da en forma espontánea, sino que debe ser promovida desde la enseñanza y es esencial en la construcción del conocimiento porque permite que las nociones y quehaceres aprendidos puedan ser reutilizados en otros contextos.

Los Números Racionales en la Escuela Secundaria

Si bien las fracciones y los números decimales son objeto de enseñanza de la Escuela Primaria, las primeras aproximaciones a la noción de Número Racional -de acuerdo con lo que se propone en los NAP- se realizan en 7º grado o 1º año de la Escuela Secundaria, dependiendo de la jurisdicción. La construcción de este objeto matemático requiere comprender nuevos sentidos vinculados a cuestiones intramatemáticas. En este sentido, presentamos los dichos de los autores Courant y Robbins.

> Así como la introducción de los números negativos y el cero abre el camino a la resta sin restricciones, la introducción de los números fraccionarios elimina el obstáculo análogo para la división. El cociente $x = \frac{b}{a}$ de dos enteros a y b, definido por la ecuación $ax = b$, existe como un entero sólo si a es factor de $b\ y\ distinto\ de\ 0$. Si éste no es el caso, como por ejemplo cuando a = 2 y b = 3, simplemente introducimos un nuevo símbolo $\frac{b}{a}$ al cual llamamos una fracción, sujeto a la regla de que $a \cdot \frac{b}{a} = b$, de manera que $\frac{b}{a}$ es por definición una solución (de la ecuación) “por definición”. La invención de las fracciones como nuevos símbolos numéricos hace posible la división sin restricciones, excepto la división entre cero, la cual queda excluida de una vez para siempre.
>
> [...]
>
> La trascendencia puramente aritmética del sistema de *todos los números racionales* (enteros y fracciones, positivos y negativos) es clara ahora, ya que en este dominio extendido de números no solo se cumplen las leyes formales de asociatividad, conmutatividad y distributividad, sino que las ecuaciones $a + x = b$ y $ax = b$, tienen soluciones $x = b - a$ y $x = \frac{b}{a}$, siempre y cuando en el segundo caso $a \neq 0$.
>
> Courant - Robbins (1941).

En la conceptualización del número racional es necesario que los estudiantes logren identificar que el cociente entre dos números enteros $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, es un número que expresa el resultado de la división entre *a* y *b* y no una operación por resolver.

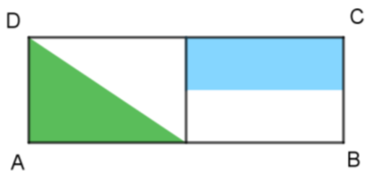
Sobre las definiciones de fracción

La definición de fracción más extendida consiste en considerar a $\frac{a}{b}$, con $a\ y\ b\ \in N$, como una relación entre un "entero" dividido en b partes iguales, de las que se toman a. Es frecuente que los problemas que se consideran mencionan partes que se pintan, o que se "comen", aludiendo a chocolates o pizzas. Se trata de estrategias de enseñanza que favorecen la comprensión de algunos sentidos de las fracciones, aunque no de todos.

Esta definición presenta algunos problemas, entre los que queremos mencionar:

- Varios estudios señalan que muchos estudiantes no reconocen como fracción una parte si la figura total no está dividida en regiones iguales.
- Al definir fracciones de enteros, es posible, por ejemplo, obtener cuartos de diferentes tamaños (un cuarto de pizza no es igual que un cuarto de alfajor).
- Estas formas de considerar las fracciones pueden funcionar como un obstáculo para comprenderlas en tanto número racional, donde la definición no es tan directamente aplicable.

El análisis de situaciones como la que se plantea en la siguiente imagen lleva a considerar que tanto el triángulo rectángulo pintado de verde como el rectángulo pintado de celeste representan $\frac{1}{4}$ del rectángulo ABCD, aunque este rectángulo no esté dividido en partes iguales ni que ambos cuartos tengan la misma forma.



Teniendo en cuenta que tanto la parte verde como la celeste representan $\frac{1}{4}$ del rectángulo porque con 4 de esas partes se completa el rectángulo ABCD, es posible proponer una definición alternativa de fracción. Esta definición se adapta para considerar tanto partes de un todo como números fraccionarios. Así, por ejemplo, un número es $\frac{1}{4}$ si cuatro veces ese número forma 1.

Consideramos entonces las dos maneras de definir fracciones, con la intención de que los estudiantes puedan elegir la que resulte más conveniente en función de la situación a resolver.

- Si se divide una figura entera en *n* partes iguales, cada una de esas partes representa $\frac{1}{n}$ de la figura. A su vez, si se juntan *n* partes de $\frac{1}{n}$ se obtiene la figura completa.
- Cuando *n* veces un número permite formar el número 1, ese número es $\frac{1}{n}$, es decir que $n.\frac{1}{n} = 1$. A partir de esta última igualdad y teniendo en cuenta la relación entre la multiplicación y la división, es posible afirmar que también se cumple que $1 : n = \frac{1}{n}$.
- La fracción $\frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ es aquella que se puede pensar como m veces la fracción $\frac{1}{n}$. Esta definición se puede extender a fracciones negativas considerando que la fracción $-\frac{m}{n}$, con $m, n \in N$, es la opuesta de la fracción $\frac{m}{n}$ o bien, que es m veces la fracción $-\frac{1}{n}$.

Operaciones entre fracciones

Una de las cuestiones que suele aparecer en relación con la enseñanza de las operaciones –tanto en el Nivel Primario como en el Secundario– es la falsa oposición entre la enseñanza de algoritmos y la resolución de problemas en contextos extramatemáticos que los doten de sentido.

Esta dicotomía ("cuentas versus problemas") oculta el complejo interjuego existente entre los procedimientos y recursos de cálculo y la construcción y ampliación de sentido de las operaciones. Efectivamente, usar propiedades de las operaciones, anticipar, estimar, controlar resultados, son recursos que ponen en juego el sentido de las operaciones, a la vez que constituyen herramientas imprescindibles para abordar nuevos problemas.

Matemática. Documento de trabajo N°4, pág. 2

Por la complejidad y la extensión que requiere el tratamiento de la enseñanza de las operaciones en el conjunto de los Números Racionales, en esta clase vamos a detenernos en la tensión entre enseñar algoritmos o trabajar con otro tipo de tareas que aporten al sentido de las operaciones con fracciones. En esta dirección, les proponemos analizar algunas actividades que nos permitirán reflexionar sobre la potencia de considerarlas en un proyecto de enseñanza.

Los algoritmos

Algunos conocimientos que los estudiantes fueron construyendo sobre los Números Naturales pueden presentar obstáculos que resulta necesario poner en discusión al aprender los Racionales. Por ejemplo, los algoritmos de cálculo entre fracciones, tal como plantea Héctor Ponce (2012), se realizan entre números enteros y no relacionando las fracciones entre sí ni apelando a su definición. Por ejemplo, para resolver $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ se busca primero el mínimo común múltiplo entre 2 y 3 (6, que será el denominador de la suma), luego se realiza 6:2 y se multiplica por 1, y 6:3 y se multiplica por 2, etc. Es decir que se opera con los números enteros por separado, perdiendo de vista los números racionales con los que se está trabajando ($\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$), abonando a la hipótesis de que una fracción en realidad no es un solo número sino dos.

Otra de las dificultades que menciona Ponce está vinculada con aquello que se oculta al aplicar el algoritmo. En el ejemplo mencionado previamente, ¿resulta claro que el mínimo común múltiplo entre 2 y 3 está al servicio de buscar fracciones equivalentes a las dadas con el mismo denominador? Aun cuando los estudiantes adviertan que encuentran fracciones equivalentes, ¿se entiende por qué es necesario buscar un denominador común?

> No se trata de desacreditar a los algoritmos sino de brindar herramientas que permitan tener control sobre las producciones, rescatando el sentido de las operaciones puestas en juego.
>
> Ponce, H. (2012).

En el apartado siguiente propondremos analizar el uso del cálculo mental como modo de poner en juego relaciones entre fracciones, así como propiedades de las operaciones.

Suma y resta de fracciones

A continuación, presentamos algunas actividades que podrían permitir trabajar con fracciones en la Escuela Secundaria a partir del cálculo mental y sin utilizar algoritmos.

NOS DETENEMOS A PENSAR (SIN ENTREGA)

Para cada uno de los siguientes problemas, identifiquen al menos dos estrategias de resolución que podrían surgir por parte de los estudiantes y que no impliquen el uso del algoritmo convencional para resolver las operaciones.

Problema 1

Completen con el número que falta para que se verifiquen las igualdades:

a) $\frac{4}{7}+\ldots\ldots = 1$ b) $\frac{4}{7}+\ldots\ldots = 2$ c) $\frac{4}{7}+\ldots\ldots = 3$

d) $2-\ldots\ldots = \frac{3}{5}$ e) $1-\ldots\ldots = \frac{4}{7}$ f) $2-\ldots\ldots = \frac{2}{3}$

Problema 2

Resuelvan los siguientes cálculos:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

b) $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=$

Compartimos algunos comentarios vinculados a las posibles resoluciones de estos problemas.

En el Problema 1, es probable que muchos de ustedes hayan considerado a las ecuaciones como una estrategia posible de resolución. Si bien es una resolución válida, consideramos que no usarlas permite apelar al sentido de la fracción como número y las relaciones entre ellas.

Para la parte a) es posible pensar en “cuánto le falta” a $\frac{4}{7}$ para llegar a 1. Considerando que $\frac{4}{7}$ son 4 de $\frac{1}{7}$ y que el número 1 está formado por 7 de $\frac{1}{7}$, apelando a una de las definiciones de fracción propuestas, entonces faltan $\frac{3}{7}$. En el caso de las restas d), e) y f) se puede considerar cuánto le falta al resultado para completar el número. Por ejemplo, cuánto le falta a $\frac{3}{5}$ para llegar a 2. Resultará interesante también que los estudiantes puedan identificar que si 1 puede formarse con 5 de $\frac{1}{5}$, en 2 habrá 10 de $\frac{1}{5}$, por lo que si el resultado es $\frac{3}{5}$ (3 de $\frac{1}{5}$), entonces se deben restar 7 de $\frac{1}{5}$ a los 10 de $\frac{1}{5}$.

La resolución del problema 1 requiere que los estudiantes representen de manera conveniente a cada uno de los números enteros para poder operar a partir de la definición de fracción.

Para resolver los cálculos que se proponen en el Problema 2 sin usar algoritmos, se espera que los estudiantes se apoyen en relaciones entre fracciones. Por ejemplo, si tanto con 2 de $\frac{1}{2}$ como con 4 de $\frac{1}{4}$ se obtiene 1, cada cuarto tiene que ser la mitad de $\frac{1}{2}$. También es posible apoyarse en que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$, que es lo mismo que decir que $\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1$. Y como $\frac{1}{2}$ es el único número que sumado dos veces da 1, resulta que $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Esta relación no solo permite establecer una relación de doble y mitad entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, sino que también es posible afirmar que $2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ y que $\frac{1}{2}\div 2=\frac{1}{4}$.

Luego, es posible resolver el cálculo apoyándose en alguna de las relaciones, por ejemplo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, teniendo en cuenta que $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$ puede sumarse a partir de considerar que se trata de 2 veces $\frac{1}{4}$ más una vez $\frac{1}{4}$.

De manera similar se pueden establecer relaciones entre sextos y tercios llegando a las relaciones 2 veces $\frac{1}{6}=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ o bien, que $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\div 2\right)$ o que $\frac{1}{3}$ es el doble de $\frac{1}{6}$ $\left(2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\right)$.

Multiplicación y división de fracciones

Comenzaremos este apartado analizando algunas situaciones particulares: la multiplicación y división de una fracción por un número entero. Para ello les proponemos resolver la siguiente actividad:

NOS DETENEMOS A PENSAR (SIN ENTREGA)

Analicen en qué conocimientos se puede apoyar un estudiante que no conoce el algoritmo para multiplicar una fracción por un número natural para realizar la siguiente actividad.

Problema 1

Resuelvan mentalmente las siguientes cuentas:

a) $3\cdot\frac{1}{3}=$ b) $7\cdot\frac{1}{7}=$ c) $3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=$ d) $21\cdot\frac{1}{7}=$

Problema 2

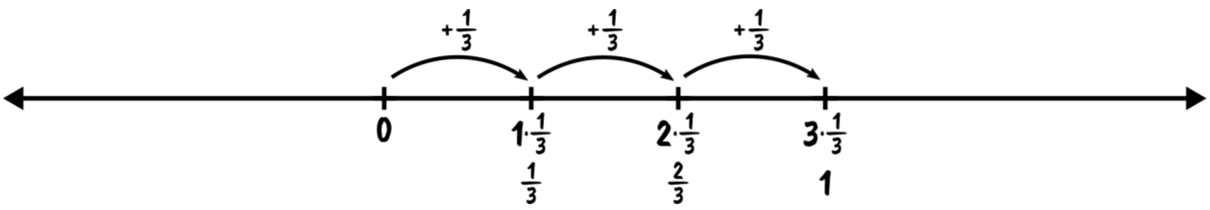
Encuentren el número que falta en cada una de las multiplicaciones. Expliquen cómo lo encontraron.

a) $\frac{1}{5}\cdot \ldots\ldots\ldots = 1$	b) $\frac{1}{5}\cdot \ldots\ldots\ldots = 2$	c) $6\cdot \ldots\ldots\ldots = 1$
d) $\frac{8}{3}\cdot \ldots\ldots\ldots = 8$	e) $7\cdot \ldots\ldots\ldots = \frac{7}{5}$	f) $\frac{3}{4}\cdot \ldots\ldots\ldots = \frac{9}{4}$

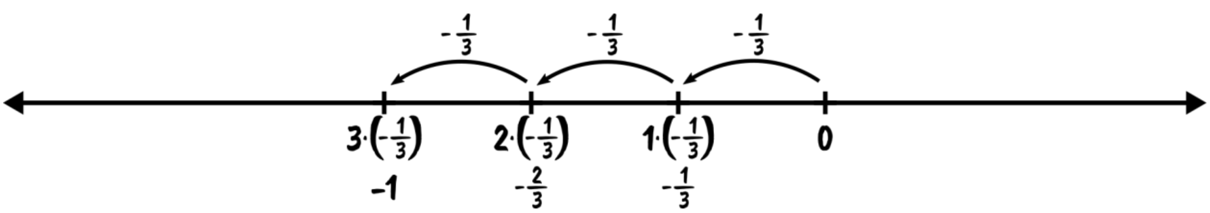
En estos dos problemas se vuelve a poner en juego la definición de fracción mencionada previamente.

Por ejemplo, para resolver $3 \cdot \frac{1}{3}$, se podría considerar que se tiene 3 veces la fracción $\frac{1}{3}$. Es decir: $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. En este caso, la definición de fracción permite saber el resultado de un producto sin disponer de una manera de resolverlo de manera algorítmica.

También es posible apoyarse en la recta numérica para realizar estos cálculos. Comenzando desde cero se puede repetir la fracción la cantidad de veces que se indica en el cálculo y luego analizar el resultado. En este caso, sería considerar “tres saltos” de longitud $\frac{1}{3}$ como se indica en la figura:



Del mismo modo que analizamos en la clase 2, el producto del ítem c), $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ puede interpretarse como el opuesto de $3 \cdot \frac{1}{3}$. La recta numérica resulta un buen soporte para trabajar con el producto de un número natural por un número negativo. Por ejemplo:



En este caso, $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ puede ser: tres veces $-\frac{1}{3}$, el opuesto de $3 \cdot \frac{1}{3}$ o bien, restar 3 veces $\frac{1}{3}$ desde cero.

En el ítem d), La proporcionalidad permite afirmar que si $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$, entonces $21 \cdot \frac{1}{7} = 7 \cdot \frac{1}{7} + 7 \cdot \frac{1}{7} + 7 \cdot \frac{1}{7} = 3$.

Si bien el segundo problema podría resolverse planteando ecuaciones, mencionamos anteriormente por qué sugerimos no abordarlo de este modo.

En los primeros 4 ítems, retomando la definición de fracción, se pide encontrar el número que falta para obtener distintos números enteros. Resolverlos implica o bien la aplicación directa de la definición o la reescritura de cada número entero de manera conveniente como fracción. Para el último ítem es posible considerar cuántas veces $\frac{3}{4}$ es $\frac{9}{4}$.

Algo que se puede poner en cuestión a propósito de la resolución de estos dos problemas es la hipótesis que sostiene que "la multiplicación agranda", una propiedad que los estudiantes construyen a lo largo de su escolaridad y que resulta válida en el conjunto de Números Naturales, excepto cuando se multiplica por 1. Por ejemplo, a partir de que $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, se puede observar que en este caso el producto es menor que uno de los factores. El docente podrá proponer una reflexión en torno a las razones por las cuales esto sucede, intentando buscar las condiciones generales para que ocurra.

Para continuar con el análisis de la división entre una fracción y un número entero les proponemos realizar la siguiente actividad.

NOS DETENEMOS A PENSAR (SIN ENTREGA)

Analicen en qué conocimientos se puede apoyar un estudiante que no conoce el algoritmo para dividir una fracción por un número natural para realizar la siguiente actividad.

Problema 1

Tres amigos se juntan a cenar y compran helado de postre. Al finalizar la cena, deciden que repartirán el helado que sobre en partes iguales.

Completen la tabla, en la que se indica la cantidad que se lleva cada uno:

Sabor y cantidad de helado que sobró.	Chocolate: ½ kg.	Dulce de leche: ¼ kg.
Cantidad de helado de cada sabor que le corresponde a cada uno.		

Problema 2

Resuelvan los siguientes cálculos:

a) $\frac{7}{4}:3=$ b) $\frac{5}{2}:3=$ c) $\frac{4}{5}:3$

El problema 1 pone en juego la división de una fracción de la forma $\frac{1}{n}$ por un número natural (en este caso por 3). Para resolverla, los estudiantes pueden utilizar diferentes estrategias. Una de ellas es recurrir a las ideas trabajadas previamente sobre multiplicación, ya que para saber la cantidad del helado de chocolate que se llevará cada uno están buscando el número faltante en el cálculo $3 \cdot \ldots\ldots = \frac{1}{2}$. Así se podrá establecer que esta resolución es equivalente a considerar $\frac{1}{2} \div 3$, es decir, calcular la tercera parte de $\frac{1}{2}$, que es $\frac{1}{6}$. La relación entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$ también puede pensarse a partir de dividir cada medio en tres partes iguales, lo que hace que se necesiten 6 de ellas para obtener 1.

En el contexto del problema, la división se puede interpretar como “repartir” en partes iguales y es posible establecer la relación y las razones por las cuales $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$. Posteriormente a esta actividad se podrían plantear otras que avancen en cuanto a complejidad, por ejemplo, que requieran calcular la cantidad de personas entre las que se reparte si se conoce la cantidad de helado a repartir y lo que cada uno se lleva.

El problema 2 se puede abordar a partir de haber trabajado con divisiones de la forma $\frac{1}{n} \div b$, donde b representa un número natural. Algunas de las ideas que podrían desplegarse en la resolución se apoyan en resoluciones anteriores.

Por ejemplo, usando que $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{12}$, resolver $\frac{7}{4} \div 3$.

Una de las formas en que podrían resolver esta operación es razonando de la siguiente manera,

$$\frac{7}{4} \div 3 = \left(7 \cdot \frac{1}{4}\right) \div 3 = 7 \cdot \left(\frac{1}{4} \div 3\right) = 7 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{12}.$$

Otra posibilidad es que consideren que $\frac{7}{4}$ resulta de sumar 7 veces $\frac{1}{4}$, por lo que $\frac{7}{4} \div 3$ se puede considerar como $\frac{1}{4} \div 3 + \frac{1}{4} \div 3 + \cdots + \frac{1}{4} \div 3$.

Al finalizar el trabajo con actividades de este tipo, se podrían registrar en el pizarrón algunas conclusiones que permitan sistematizar el trabajo realizado.

Para finalizar este apartado les proponemos algunos ejemplos de actividades para el aula que permiten multiplicar fracciones sin necesidad de conocer el algoritmo tradicional.

NOS DETENEMOS A PENSAR (SIN ENTREGA)

Analicen en qué conocimientos se puede apoyar un estudiante que no conoce el algoritmo para multiplicar dos fracciones.

Problema 1

Sabiendo que $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, ¿por cuánto habrá que multiplicar a $\frac{3}{5}$ para que el resultado sea 1?

Problema 2

¿Por qué número habrá que multiplicar a 2 para que el resultado de 3?

Para el caso de la multiplicación entre fracciones, una de las dificultades que se presentan en la enseñanza consiste en que ya no es posible interpretar esta operación como una suma reiterada de la misma fracción o como "cantidad de veces" como sucede con el producto de una fracción por un número natural.

El problema 1 tiene la intención de poner en juego la noción de inverso multiplicativo. Nuevamente, si bien es posible responder a esta pregunta planteando y resolviendo una ecuación no es la intención que se resuelva de este modo. En este caso, se propone resolver $\frac{3}{5} \cdot \ldots = 1$ a partir de saber que que $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.

Una forma de abordarlo es considerar que la fracción $\frac{3}{5}$ es 3 veces $\frac{1}{5}$. De esta manera, si $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, entonces $5 \cdot \frac{3}{5} = 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} = 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} = 3$. Entonces el problema puede reducirse a considerar por cuánto habrá que multiplicar a 3 para que el resultado sea 1, obteniendo que el número debe ser $\frac{1}{3}$ porque $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Reconstruyendo los pasos realizados tenemos:

$$\frac{3}{5} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Asociando $5 \cdot \frac{1}{3}$ y resolviendo se obtiene que el número por el cual hay que multiplicar a $\frac{3}{5}$ para que el resultado sea 1 es $\frac{5}{3}$.

Todo este desarrollo se apoya en un trabajo previo en torno a la multiplicación de una fracción por un número natural y es necesario proponer otros productos del mismo tipo para arribar a la noción de inverso multiplicativo. A su vez, este tipo de trabajo genera buenas condiciones para acceder posteriormente al algoritmo de la multiplicación entre fracciones. Por ejemplo, para resolver $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ se puede pensar:

$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$.

Para resolver $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ los alumnos se pueden apoyar en relaciones que hayan trabajado previamente. Por ejemplo, la tercera parte de $\frac{1}{4}$, o bien, la cuarta parte de $\frac{1}{3}$. En ambos casos se obtiene $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Finalmente, $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = 10 \cdot \frac{1}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

El problema 2 instala una noción que es propia del conjunto de los Números Racionales y que rompe con la idea de múltiplo construida durante años y válida en el conjunto de los Números Enteros. Es decir, en el conjunto de los Números Racionales la idea de múltiplo pierde sentido porque cualquier número racional puede obtenerse a partir del producto por otro que no sea cero.

En este caso, es necesario determinar qué número multiplicado por 2 da como resultado 3.

Nuevamente, los estudiantes podrían apoyarse en que $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Como 3 es el triple de 1, entonces será necesario multiplicar por 3 al producto $2 \cdot \frac{1}{2}$. A partir de $3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$ y agrupando se obtiene $2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$. Luego, el número buscado es $\frac{3}{2}$.

Las actividades que hemos analizado en esta clase para el tratamiento de las operaciones con fracciones plantean un abordaje que consiste en no introducir las operaciones desde los algoritmos, sino a partir de problemas en los que es necesario analizar los cálculos que se proponen y transformarlos en otros convenientes utilizando propiedades. Esto implica una forma de resolver las operaciones que requiere tomar decisiones en función de los números que aparecen y lo que puede resultar más conveniente en relación con lo que se está resolviendo. Por otra parte, no alcanza con obtener un resultado, sino que es necesario ir controlando todo el proceso de resolución realizando las transformaciones necesarias. Este tipo de práctica y de tratamiento de los números involucrados en las operaciones prepara a los alumnos para el trabajo algebraico.

Para finalizar el trabajo de esta clase, les proponemos realizar la siguiente actividad.

ACTIVIDAD OBLIGATORIA: Participación en foro de la clase 3

Recuperamos un párrafo de la primera página del texto de la clase 3:

"(...) *cuando se aborda el trabajo con los Números Racionales en la Escuela Secundaria, los estudiantes disponen de conocimientos que fueron desarrollados durante la Escuela Primaria. Sin embargo, muchas veces identificamos algunas concepciones erróneas persistentes en nuestros estudiantes. Algunas de estas son esperables para quien está aprendiendo, mientras que otras requieren de acciones específicas de enseñanza para ponerlas en discusión."*

Consigna:

Parte 1

- Compartan algún error que aparezca en sus aulas cuando abordan la enseñanza de los Números Racionales expresados como fracciones.
- Identifiquen por lo menos una continuidad y/o ruptura que podría ser la causante del error.
- Propongan alguna actividad breve que sirva para poner en discusión el error (deben guiarse de los ejemplos dados en los materiales de la clase 3).

Parte 2

- Realicen algún aporte a la participación sobre la Parte 1 que haya realizado algún compañero o compañera. Puede tener como objetivo enriquecer la actividad propuesta, sugerir una intervención docente, disentir, etc.

En ambas partes deberán realizar fundamentaciones. Éstas tienen que basarse en conceptos abordados en la Clase, en la lectura obligatoria y en el video compartido, haciendo las citas correspondientes.

Síntesis y reflexiones finales

Al comenzar esta clase mencionamos las rupturas que representa el aprendizaje del conjunto de los Números Racionales en relación con los conocimientos que han construido los alumnos sobre los Números Naturales. Identificamos algunas concepciones erróneas que tienen los estudiantes, muchas de las cuales persisten a lo largo de los años y están vinculadas con el propio proceso de aprendizaje, mientras que otras están relacionadas con la enseñanza. Esto evidencia que el trabajo con fracciones requiere establecer nuevas relaciones y romper con ciertas hipótesis construidas sobre los números y las operaciones. Para comprender la dificultad que implica su enseñanza y aprendizaje, analizamos algunos sentidos que pueden tener las fracciones. También reflexionamos en torno a los algoritmos tradicionales de cálculo y analizamos la potencia de incluir en nuestras clases actividades que involucren el cálculo mental, permitiendo darles sentido a las operaciones.

Para finalizar, nos parece importante mencionar que los estudiantes que transitan la Escuela Secundaria tienen diversos conocimientos sobre los Números Racionales, que es necesario considerarlos y recuperarlos para avanzar en su enseñanza y aprendizaje.

Material de lectura

Broitman, C.; Itzcovich, H.; Parra, C. y Sadovsky, P. (1994). Documento de trabajo N° 4: "Matemática" (pp. 53 -79). Buenos Aires. GCBA. Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula. Disponible en la plataforma.

Bibliografía de referencia

AA. VV. (2013). Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo básico. Educación secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

AA. VV. (2012). Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Campo de Formación General. Ciclo Orientado. Educación Secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Courant, R. y Robbins, H. (1941). ¿Qué son las matemáticas? Capítulo II: El sistema de Números de las Matemáticas. (3.ª ed.). México DF: Fondo de Cultura Económica.

Ponce, H. (2012). Enseñar y aprender Matemática. Capítulo 5: Las fracciones en la escuela, un camino con obstáculos. Buenos Aires: Novedades Educativas.

Créditos

Autores: Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2022). Clase 3: la enseñanza de las operaciones entre fracciones. Enseñanza y aprendizaje de la Aritmética en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 4: El trabajo con expresiones decimales

Introducción

Iniciamos la clase anterior reflexionando sobre la enseñanza de los números racionales. En un primer momento, identificamos algunos errores que los docentes reconocemos como comunes o típicos, para luego adentrarnos en cuestiones vinculadas en particular a la enseñanza de las operaciones con fracciones.

En esta clase nos abocaremos a tratar otra de las representaciones de los números racionales: las expresiones decimales. En particular, profundizaremos en el estudio de las expresiones decimales periódicas y su correspondencia con las fracciones.

Las expresiones decimales finitas y las fracciones

En la Escuela Primaria, el trabajo con fracciones y con expresiones decimales se comienza de manera separada. En un principio las fracciones son utilizadas para representar cantidades no enteras en distintos contextos y situaciones como pueden ser el resultado de repartos equitativos, la parte de un todo, una medida, una constante de proporcionalidad, la razón entre dos magnitudes, etc. En el caso de las expresiones decimales (que se suelen llamar "números con coma"), su enseñanza suele comenzar a partir de la exploración de situaciones cotidianas en donde este tipo de expresiones se ven involucradas. Por ejemplo, se trabaja en el contexto del dinero y de la medida, donde se trata con longitudes y pesos, en la mayoría de los casos. Luego, con el transcurso de la escolaridad primaria, se propone vincular estos dos contenidos con el objetivo de que los estudiantes logren conceptualizar la idea de número racional, siendo las fracciones y las expresiones decimales dos maneras posibles de representarlos. Sin embargo, cabe destacar que tanto su enseñanza como su aprendizaje no se acaba en la Escuela Primaria, sino que también es uno de los contenidos importantes del Ciclo Básico de la Escuela Secundaria.

Repertorio de distintas escrituras de números racionales

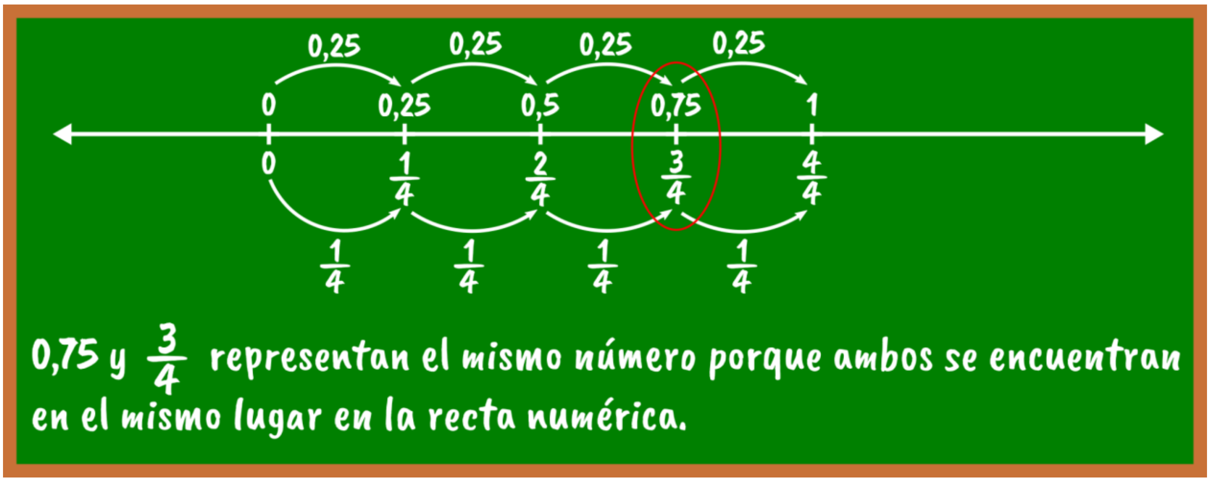
Al trabajar sobre la vinculación entre las fracciones y las expresiones decimales, uno de los primeros pasos de la enseñanza consiste en estudiar esta relación para algunos casos específicos, con el objetivo de construir un repertorio sobre el cual se pueda luego avanzar. Por ejemplo, 0,5 y $\frac{1}{2}$; 0,25 y $\frac{1}{4}$; 0,2 y $\frac{1}{5}$; 0,1 y $\frac{1}{10}$; 0,01 y $\frac{1}{100}$; y todas las demás fracciones decimales con sus respectivas expresiones decimales.

> Vamos a llamar "fracciones decimales" a aquellas fracciones para las que se puede hallar alguna fracción equivalente cuyo denominador es una potencia de 10.

Estos casos se pueden abordar a partir de algunos conocimientos que se tienen hasta el momento de las fracciones y de las expresiones decimales. Por ejemplo, se puede afirmar que 0,5 y $\frac{1}{2}$ representan el mismo número porque ambos son la mitad de 1. O bien, porque 2 veces 0,5 es 1, al igual que 2 veces $\frac{1}{2}$. De esta misma manera se puede establecer la relación entre 0,25 y $\frac{1}{4}$, ya sea porque ambos son la mitad de 0,5 y de un $\frac{1}{2}$, respectivamente, o porque 4 veces 0,25 es 1, al igual que 4 veces $\frac{1}{4}$. Con esta última estrategia también se puede relacionar 0,2 con $\frac{1}{5}$ y todas las fracciones decimales con sus respectivas expresiones decimales.

Luego, sobre la base de estas relaciones es posible construir otras para fracciones que tienen los mismos denominadores que los estudiados. Por ejemplo, a partir de interpretar que $\frac{3}{4}$ es $3 \cdot \frac{1}{4}$ (el triple de $\frac{1}{4}$ o 3 veces $\frac{1}{4}$) se puede establecer el vínculo entre $\frac{3}{4}$ y 0,75. A su vez, para el caso de números mayores que 1 es posible, por ejemplo, utilizar otra estrategia que consiste en encontrar el número entero (mayor o menor) más cercano para luego utilizar el repertorio construido sobre los números menores que 1. Por ejemplo, para el caso de $\frac{3}{2}$ se puede pensar que se trata de $\frac{1}{2}$ más que 1, entonces ese número también se puede escribir 1,5, que es 0,5 más que 1.

Una cuestión importante para tener en cuenta es que todas estas relaciones se pueden representar y estudiar también en la recta numérica, lo que favorece la conceptualización de la idea de número racional por parte de los estudiantes.



Las fracciones decimales

De los casos descritos anteriormente, uno de los que se propone abordar la enseñanza durante los últimos años de la Escuela Primaria es el de las fracciones decimales. A partir del estudio del valor posicional y su vinculación con las fracciones decimales se busca concluir que toda expresión decimal finita representa un número que se puede escribir por medio de una fracción decimal, y viceversa. Por ejemplo, se presentan problemas como los siguientes.

Les proponemos que resuelvan los siguientes problemas y tomen notas. Luego, analizaremos una posible resolución de uno de los casos del Problema 3 para seguir ampliando las herramientas didácticas del trabajo con fracciones y números decimales.

Problema

Sin hacer ninguna cuenta, escriban el resultado de cada suma mediante una expresión decimal.

a) $5 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{1}{1000} =$

b) $\frac{8}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{4}{10} =$

c) $\frac{5}{100} + \frac{9}{1000} + 2 =$

Problema

Expresen cada número como sumas de fracciones decimales.

a) 2,375

b) 1,527

c) 0,72

¿Cómo se podría escribir cada uno mediante una única fracción?

Problema

Escriban los siguientes números mediante una expresión decimal y mediante una fracción decimal.

a) 5 enteros, 4 décimos, 7 centésimos.
b) 2 enteros, 7 décimos, 8 centésimos, 3 milésimos.
c) 7 enteros, 3 centésimos.

En el último problema, 5 enteros, 4 décimos y 7 centésimos se puede interpretar como 500 centésimos, 40 centésimos y 7 centésimos, respectivamente. Es decir que se puede interpretar como 547 centésimos, lo que permite escribirlo por medio de la fracción $\frac{547}{100}$. Sobre la base de resoluciones como esta es posible concluir que **el número que representa cualquier expresión decimal finita se puede escribir por medio de una fracción decimal (y viceversa)**, interpretando todas las cifras de la expresión decimal en términos del valor que representa la posición de la última cifra (en el caso de 5,47 son los centésimos).

ACTIVIDAD 1 (LECTURA OBLIGATORIA)

Para profundizar sobre el abordaje de la enseñanza de las fracciones y las expresiones decimales en la Escuela Primaria, les proponemos leer las páginas 37 a 42 del documento curricular: Matemática. Cálculo mental con números racionales: aportes para la enseñanza.

Disponible en:
https://buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/numeros-racionales_web.pdf

Las expresiones decimales periódicas y las fracciones

El estudio de expresiones decimales periódicas es un contenido propio del Ciclo Básico de la Escuela Secundaria. Su abordaje puede plantearse a partir de la siguiente pregunta:

Todo número representado por una expresión decimal finita se puede representar también por medio de una fracción.

¿Será cierto que todo número representado por una fracción se puede escribir por medio de una expresión decimal finita?

Se trata de una propiedad que suele enunciarse en la escuela primaria, aunque seguramente sin incluir la palabra "finita", debido a que no se estudian expresiones de otro tipo.

Para pensar de qué manera se podría abordar este interrogante en el aula, creemos que es valioso revisar en un primer momento nuestros propios conocimientos acerca de esta temática. Con ese objetivo les proponemos la siguiente pregunta.

¿Cómo es posible saber si una fracción se corresponde con una expresión decimal finita o infinita?

Interpretar a las fracciones como divisiones

Una posible manera de encontrar la expresión decimal correspondiente a una fracción es realizando la división entre el numerador y el denominador, lo que requiere interpretarla como un cociente entre números enteros. Este cálculo se podría hacer

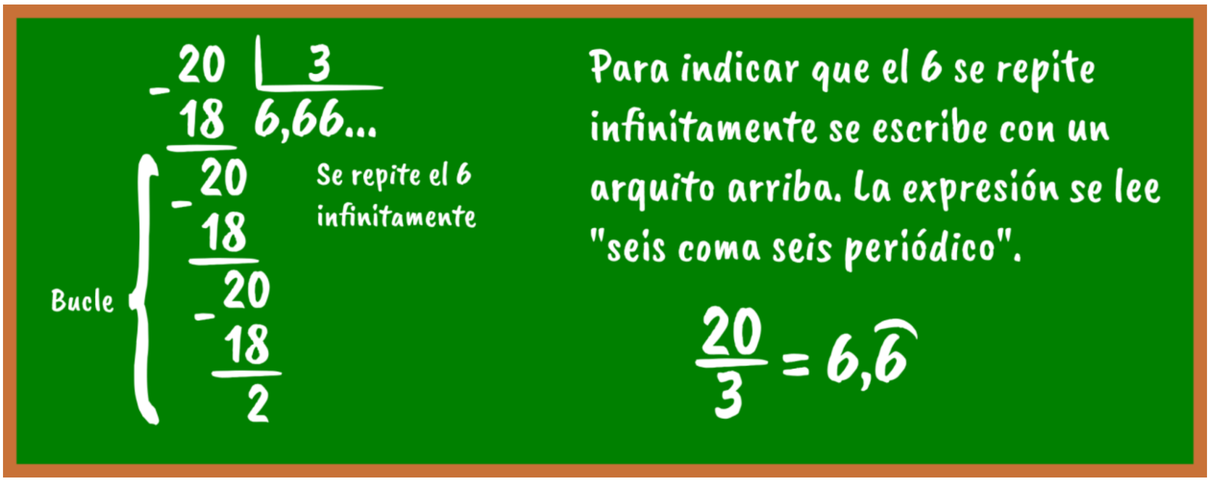
- Utilizando una calculadora, lo que resulta efectivo si las cifras decimales son finitas y, además, entran en la pantalla.
- Desarrollando el algoritmo de la división para analizar si termina o no, identificando si se forma un bucle infinito con sus restos. Situaciones que requieran de este tipo de análisis podrían ser utilizadas para que los alumnos estudien tanto la existencia de expresiones decimales infinitas como su caracterización, mediante la identificación de un grupo de cifras que se repiten (el período). Analicemos un ejemplo.

Problema
Escriban los siguientes números mediante una expresión decimal.

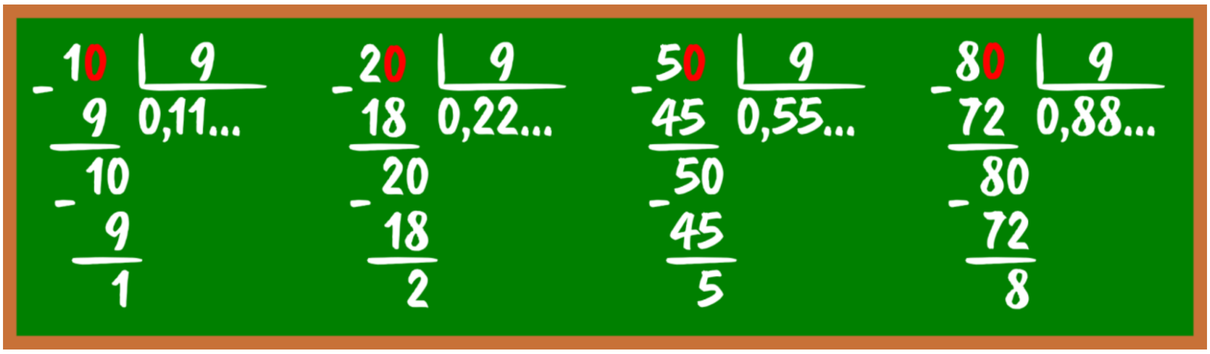
a) $\frac{5}{8}$

b) $\frac{20}{3}$
c) $\frac{1}{9}$
d) $\frac{3}{7}$

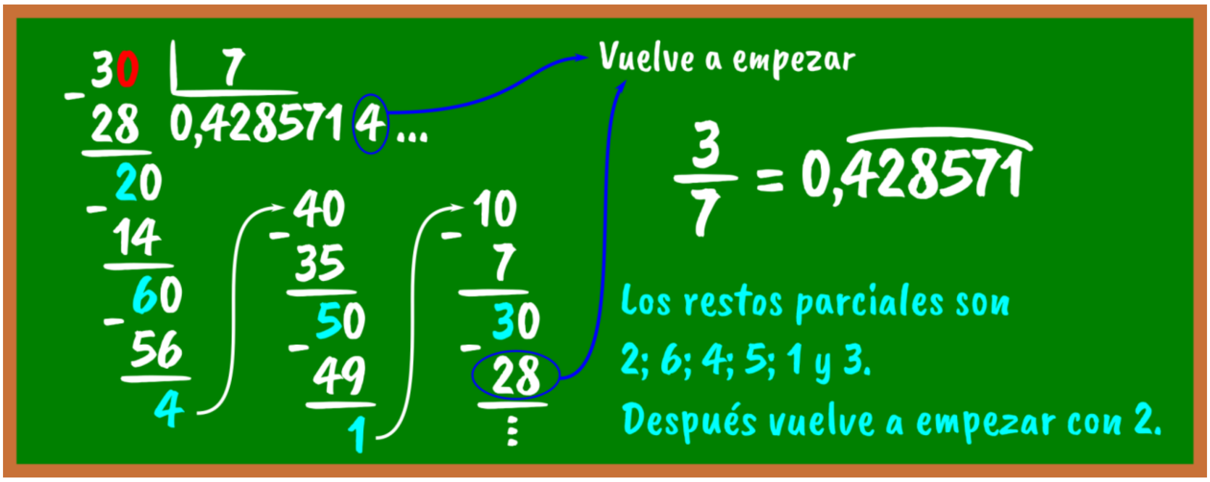
Para el caso de $\frac{5}{8}$, tanto al realizar la división por medio de la calculadora como al desarrollar el algoritmo de la división se obtiene la expresión 0,625, lo que no da lugar a cuestionamientos sobre la validez. En cambio, para $\frac{20}{3}$ la calculadora ofrece el resultado 6,6666666 o 6,6666667 ocupando toda su pantalla (la cantidad de cifras que se muestran varía según los lugares que tenga disponibles). Este hecho podría permitir que surja un interrogante de suma importancia: ¿es esa la expresión decimal exacta que se corresponde con la fracción o está limitada por la cantidad de cifras que permite visualizar la pantalla de la calculadora? Esta cuestión podría abordarse por medio del algoritmo de la división. Al desarrollarlo se puede analizar que se forma un bucle, dado que los restos y los cocientes parciales son siempre 2 y 6, respectivamente, lo que permite concluir que la expresión decimal es infinita y periódica. Si no formara parte de los conocimientos de los estudiantes, este podría ser un buen momento para definir a qué se llama período y expresión decimal periódica en este contexto.



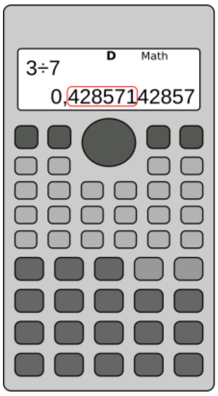
Una resolución y un análisis similar se podría realizar para $\frac{1}{9}$. En este caso, además, se podría proponer cambiar el 1 del numerador por los demás números naturales hasta el 8 y concluir que en todos estos casos el período está formado por la cifra que es el numerador de la fracción. Al dividir 10; 20; 30; etc. por 9 el resto siempre es igual a la primera cifra del múltiplo de 10 que se está dividiendo, lo que produce que se forme un bucle infinito.



El $\frac{3}{7}$ podría utilizarse para exhibir y analizar un caso en el que el período no está formado por una única cifra. A su vez, se podría reflexionar sobre las razones por las cuales en este caso son 6 las cifras periódicas y no podrían ser más. El bucle se forma cuando se repite alguno de los restos parciales que ya se había obtenido. En este caso los posibles restos distintos son 6, ya que deben ser menores que 7 y distintos de 0 (1; 2; 3; 4; 5 y 6), lo que determina la cantidad de "pasos" que puede tener como máximo el bucle.



Si bien el trabajo con la división es efectivo y un buen punto de partida para el estudio de expresiones decimales periódicas, existen situaciones para las cuales emplear el algoritmo de la división podría no resultar eficiente y, por lo tanto, sería más valioso contar con otras estrategias. Por ejemplo, pudiendo anticipar que la expresión decimal correspondiente a $\frac{3}{7}$ es periódica y su período tiene como máximo 6 cifras distintas se puede emplear la calculadora para determinarla.



$$\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}$$

Porque se sabe que la expresión es periódica y tiene como máximo seis cifras.

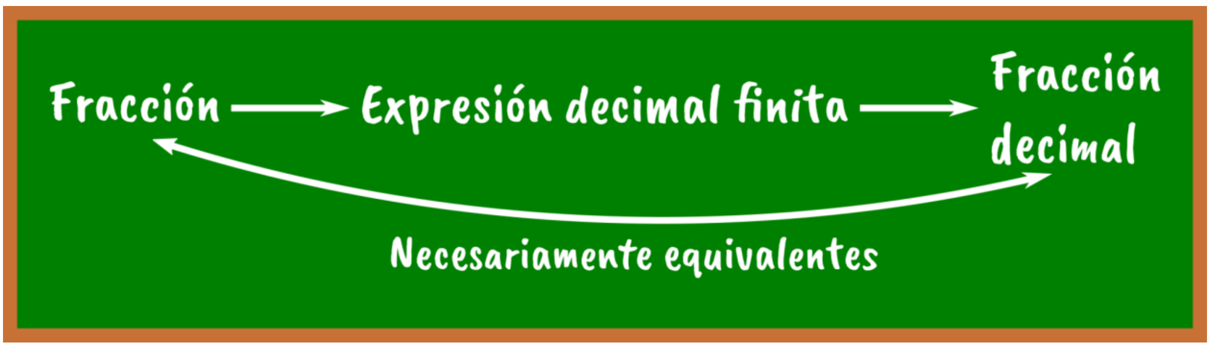
A continuación, estudiaremos una manera en que se puede anticipar si una fracción se corresponde o no con una expresión decimal finita y de qué modo se podría trabajar en el aula.

Analizar del denominador

Para saber si una fracción se corresponde o no con una expresión decimal finita sin apelar a la división es posible analizar su denominador.

> Una fracción solo se corresponde con una expresión decimal finita si es equivalente a una fracción decimal, es decir, a una fracción cuyo denominador sea potencia de 10.

Sabemos que toda expresión decimal finita se corresponde con una fracción decimal, y viceversa. Por lo tanto, si una fracción determinada no es equivalente a alguna fracción decimal, entonces no se corresponde con ninguna expresión decimal finita. Pues si se correspondiera con una expresión decimal finita, ésta a su vez sería correspondiente a una fracción decimal, que necesariamente sería equivalente a la primera fracción. Pero este no es el caso.



Entonces resulta valioso estudiar cuáles son las fracciones que son equivalentes a alguna fracción decimal y cuáles no. Analicemos algunos problemas por medio de los cuales se podrían trabajar propiedades relacionadas con estas cuestiones en el aula.

Problema

Indiquen si las siguientes fracciones son equivalentes a una fracción decimal.

a) $\frac{7}{20}$

b) $\frac{13}{25}$

c) $\frac{11}{15}$

d) $\frac{6}{15}$

Problema

Los números de la forma 0,*abc* se pueden escribir mediante fracciones de la forma $\frac{abc}{1000}$.

Hallen valores de *a*, *b* y *c* de manera que el número 0,*abc* se pueda escribir mediante una fracción con:

a) denominador 250;
b) denominador 4;
c) denominador 7.

En los primeros dos casos del primer problema los estudiantes podrían obtener las fracciones decimales equivalentes poniendo en juego su repertorio sobre múltiplos: tanto 20 como 25 tienen a 100 como uno de sus múltiplos. A partir de identificar el factor correspondiente para 20 y para 25, podrían obtener $\frac{7}{20}=\frac{7\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{35}{100}$ y $\frac{13}{25}=\frac{13\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{52}{100}$, respectivamente. En cambio, para fundamentar que la fracción $\frac{11}{15}$ no es equivalente a ninguna fracción decimal es necesario formular un argumento general, pues debe contemplar a todas las potencias de 10. En este caso, al factorizar el denominador de la fracción dada (15 = 3 · 5) se puede analizar que no existe un número natural por el cual multiplicarlo de manera que el resultado sea una potencia de 10, ya que estas solo contienen como factores a potencias de 2 y/o de 5. El último caso parecería ser análogo a este, pero la fracción se puede simplificar, ya que 3 también es uno de los factores del numerador. De esta manera se puede concluir que sí es equivalente a una fracción decimal: $\frac{6}{15}=\frac{3\cdot 2}{3\cdot 5}=\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$.

Analizando de manera similar otros casos como estos se podría generalizar que:

Una fracción irreducible es equivalente a una fracción decimal si y sólo si los factores de su denominador son solamente potencias de 2 y/o de 5.

$\frac{7}{20}=\frac{7}{2{\cdot}2{\cdot}5}=\frac{7{\cdot}5}{2{\cdot}5{\cdot}2{\cdot}5}=\frac{35}{10{\cdot}10}=\frac{35}{100}$ Como en la factorización de 20 está dos veces 2 y una vez 5, es necesario multiplicar una vez más por 5 para formar dos veces 10.

$\frac{11}{15}=\frac{11}{5{\cdot}3}\neq\frac{\quad}{10{\cdot}10\cdots10}=\frac{\quad}{2{\cdot}5{\cdot}2{\cdot}5\cdots2{\cdot}5}$ No puede ser equivalente a una fracción decimal porque 3 es uno de los factores de su denominador, pero no puede ser uno de los factores de una potencia de 10.

Para resolver el primero de los ítems del segundo problema, los estudiantes podrían reconocer que 1000 = 250 · 4 y proponer valores de *a*, *b* y *c* de manera que formen un múltiplo de 4 y permitan simplificar la fracción utilizando ese divisor. Por ejemplo, tomando el número 0,444 se pueden obtener las fracciones $\frac{444}{1000}=\frac{111\cdot 4}{250\cdot 4}=\frac{111}{250}$. De manera similar podrían proceder con el número 250 en el segundo ítem. Tomando el número 0,250 se pueden obtener las fracciones $\frac{250}{1000}=\frac{250.1}{250.4}=\frac{1}{4}$.

Para el caso de la fracción con denominador 7, los estudiantes podrían argumentar que no es posible debido a que 1000 no es múltiplo de 7, por lo que es imposible elegir un numerador de manera tal que al simplificar se obtenga una fracción con denominador 7. Esto es equivalente a decir que no existe una expresión con tres decimales que se corresponda con una fracción con denominador 7. A partir de este hecho se podrían realizar, por lo menos, dos generalizaciones. Por un lado, se puede argumentar que esto sucede para cualquier fracción decimal y que, por lo tanto, no existen fracciones irreducibles con denominador 7 que se correspondan con expresiones decimales finitas. Por otro lado, se puede realizar una generalización con respecto al denominador y concluir que, al igual que sucede con 7, las fracciones irreducibles cuyo denominador no sea divisor de alguna potencia de 10 no se corresponden con expresiones decimales finitas. Es decir que las expresiones decimales finitas solo se corresponden con fracciones irreducibles en las que los factores de su denominador son potencias de 2 y/o de 5.

Repertorio de correspondencias entre fracciones y expresiones decimales periódicas

Al comienzo de la clase describimos algunos ejemplos de cómo se trabaja en la escuela primaria la relación entre fracciones y expresiones decimales. En particular, analizamos una manera de establecer nuevas relaciones apoyándose en un **repertorio de correspondencias** y apelando luego a **estrategias de cálculo**

mental. Por ejemplo, analizamos que a partir de saber que 0,25 y $\frac{1}{4}$ representan el mismo número, se puede establecer el vínculo entre 0,75 y $\frac{3}{4}$ interpretando que ambos son el triple o tres veces 0,25 y $\frac{1}{4}$, respectivamente. Este tipo de razonamiento también es valioso para establecer correspondencias entre fracciones y expresiones decimales periódicas. En la Escuela Secundaria se podrían proponer actividades como la siguiente, que avancen sobre ese conocimiento en continuidad con el tipo de trabajo desplegado durante la escolaridad primaria.

Problema

Sabiendo que $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$, escriban la expresión decimal de los siguientes números.

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{7}{3}$

Para el primer caso, los estudiantes podrían escribir la expresión $0,\widehat{6}$ duplicando todas las cifras de $0,\widehat{3}$, habiendo interpretado que $\frac{2}{3}$ es el doble de $\frac{1}{3}$. Sin embargo, esta estrategia no es aplicable (de manera directa) al segundo caso, ya que al multiplicar a cada una de las cifras por 7 se obtiene un número de dos cifras, lo que hace que se deba analizar cómo influye en las demás. Resultaría más conveniente utilizar otra de las estrategias que se describieron al comienzo de la clase, que consiste en encontrar el número entero (mayor o menor) más cercano para luego utilizar el repertorio construido sobre los números menores que 1. En caso de $\frac{7}{3}$ se puede pensar que se trata de $\frac{1}{3}$ más que 2 (que es $\frac{6}{3}$), por lo que ese número se puede escribir mediante la expresión $2,\widehat{3}$, que es $0,\widehat{3}$ más que 2.

El contexto de resolución de este problema podría ser una buena oportunidad para estudiar el caso de la equivalencia entre las expresiones $0,\widehat{9}$ y 1. Habiendo determinado que $0,\widehat{6} = \frac{2}{3}$ a partir de duplicar las cifras de $0,\widehat{3}$, se podría llegar a la conclusión de que $0,\widehat{9} = \frac{3}{3} = 1$.

La enseñanza de los Números Reales

El conjunto de los Números Reales es otro contenido relacionado con el trabajo con expresiones decimales de la escuela secundaria. Una parte de su estudio contempla el análisis de expresiones decimales infinitas, en el que se pone el foco en la existencia o no de un período, retomando los conocimientos abordados en esta clase. A continuación, les proponemos una lectura que plantea un análisis de propuestas de enseñanza presentes en libros de texto. En particular, a partir de la página 6, el eje de análisis “definición y conceptualización" pone el foco en la representación de los números reales mediante una expresión decimal.

ACTIVIDAD 2 (LECTURA OPTATIVA)

Les proponemos leer el artículo: "La enseñanza de los números reales: un análisis de textos escolares" (Bergé et al., 2019).

https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.11886/ev.11886.pdf

Síntesis final

En esta clase nos propusimos abordar la relación entre fracciones y expresiones decimales, que es un contenido importante de la Escuela Primaria, pero que también es propio de la Escuela Secundaria en lo que respecta a su profundización y a la inclusión de las expresiones decimales periódicas. Por este motivo, comenzamos recuperando algunos de los conocimientos, de las estrategias y de las maneras de trabajar que se desarrollan durante la escolaridad primaria con respecto a este objeto, con el objetivo de analizar de qué manera es posible apoyarse en ellos para hacerlos avanzar.

Con respecto a la utilización de la división como modo establecer relaciones entre fracciones y expresiones decimales, reflexionamos acerca de cómo se puede analizar el algoritmo de la división para determinar la existencia de expresiones decimales infinitas y definir las expresiones decimales periódicas. A su vez, identificamos la importancia de poder anticipar si se está ante la presencia de una expresión decimal periódica y de cuántas cifras es el período, ya que posibilita, por ejemplo, hacer un uso adecuado de la calculadora.

Con el propósito de pensar cómo se podrían construir algunas de estas estrategias de anticipación en el aula, propusimos el análisis de algunas actividades que tienen como objetivo establecer relaciones entre los denominadores de las fracciones y su correspondencia o no con expresiones decimales finitas.

Para concluir, recuperamos algunos tipos de problemas y estrategias que se trabajan en la escuela primaria y que se describieron al comienzo de la clase. Se trata de estrategias que permiten establecer nuevas relaciones entre fracciones y expresiones decimales a partir de un repertorio de correspondencia ya conocido.

Esperamos que lo abordado en estas clases les resulte un insumo eficaz para profundizar y hacer avanzar los conocimientos de sus estudiantes. A su vez, consideramos que contar con conocimientos aritméticos diversos y sólidos resulta imprescindible al momento de abordar la resolución de problemas de otras áreas de la Matemática.

FORO DE LA CLASE 4: FINALIZANDO EL RECORRIDO (ACTIVIDAD OBLIGATORIA)

Este espacio tiene el propósito de intercambiar ideas sobre el Trabajo Final, recuperando los conceptos más relevantes tratados en la cursada.

Después de hacer una lectura reflexiva de los materiales de las cuatro clases, y de las consignas del Trabajo Final, tendrán que:

- Escribir un breve adelanto del TF (puede ser de cualquiera de las dos partes de la consigna). Se trata de, en un párrafo, compartir alguna idea sobre la que deseen trabajar y ponerla en discusión.
- Leer las intervenciones realizadas por sus colegas y responder a, por lo menos, una de ellas (podrán hacer aportes, sugerencias y/o preguntas).

Recuerden que es muy importante fundamentar lo que escriban incluyendo citas de las lecturas de las cuatro clases.

Además, si bien nos centramos en los conocimientos matemáticos abordados, les recomendamos que tengan especial cuidado en la redacción.

Material de lectura

Bergé, A., Cedrón, M., Duarte, B., Herrera, R. & Lamela, C. (2019). *La enseñanza de los números reales: un análisis de textos escolares*. Actas V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, FAHCE, La Plata, Argentina. Disponible en: https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.11886/ev.11886.pdf

GCABA, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula (2006) Cálculo mental con números racionales: apuntes para la enseñanza (pp. 37-42). Disponible en: https://buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/primaria/calculo_racional_web.pdf

Bibliografía de referencia

Bergé, A., Cedrón, M., Duarte, B., Herrera, R. & Lamela, C. (2019). *La enseñanza de los números reales: un análisis de textos escolares*. Actas V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, FAHCE, La Plata, Argentina. Disponible en: https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.11886/ev.11886.pdf

GCABA, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula (2006) Cálculo mental con números racionales: apuntes para la enseñanza. Disponible en: https://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/calculo_mental_con_numeros_racionales._apuntes_para_la_ensenanza.pdf

GCABA, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula (2005) Matemática, fracciones y números decimales 7º grado: apuntes para la enseñanza. Disponible en: https://www.buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/fracciones_y_numeros_decimales_7o_grado._apuntes_para_la_ensenanza.pdf

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación (2012) *Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales*. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/158248/matematica-para-todos-en-el-nivel-primario-notas-para-la-ens

Créditos

Autores: Novembre, Andrea (coord.). Benito, Carolina; Nicodemo, Mauro; Sanguinetti, Débora; Trillini, María Paula.

Cómo citar este texto:

Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2022). Clase 4: el trabajo con expresiones decimales. Enseñanza y aprendizaje de la Aritmética en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.