Biblioteca **Nuestra Escuela** 2023 | Cuadernos para la enseñanza

Nuestra Escuela
Programa Nacional de Formación Permanente

Colección **Actualizaciones Académicas**

Actualización Académica en enseñar y aprender matemática en el nivel primario

Módulo 3: **Temas de enseñanza de Número y Operaciones**

la educación nuestra bandera

INFoD
Instituto Nacional de Formación Docente

Ministerio de Educación Argentina

Índice

Módulo 3: Temas de enseñanza de Número y Operaciones

Presentación

En este módulo nos ocuparemos de algunos temas del eje Número y Operaciones de los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios para la enseñanza de la matemática en nivel primario que están en el centro de nuestras preocupaciones.

Para abordar los interrogantes que iremos planteando, contamos con escritos en los que se sostiene el enfoque de enseñanza presente en ese documento: libros de texto, desarrollos curriculares, artículos y libros que toman cuestiones didácticas del área y temáticas específicas. En estas clases, los iremos retomando.

Los temas elegidos son aquellos que tienen gran incidencia en una formación matemática potente y por su incidencia en el recorrido de aprendizaje de los niños y las niñas. En las dos primeras clases tomaremos problemáticas del campo de los números naturales y en las dos últimas del campo de los números racionales. Recorreremos las cuestiones siguientes:

- por qué poner el foco del trabajo de cálculo en el cálculo mental y cuáles son los aprendizajes que lo sustentan;
- cómo evoluciona el trabajo con las propiedades que fundamentan los procedimientos de cálculo y las formas de generalizarlos y validarlos desde los primeros a los últimos años del nivel primario;
- cuáles son las discusiones que es necesario dar con los niños y niñas al abordar los números racionales y sus operaciones luego del trabajo en el campo de los naturales;
- cómo inciden las distintas formas de escribir un mismo número, natural o racional, en las formas de operar y con qué criterios secuenciar el trabajo en cada ciclo.

Para acompañar en estas reflexiones incluimos momentos para "detenerse a pensar", de los que sugerimos guardar un registro escrito personal que pueda servir para evidenciar el propio proceso de evolución de los conocimientos acerca de la temática, para socializar con colegas cuando sea oportuno y como insumo para los trabajos que se soliciten.

Así como sostenemos que es fundamental el trabajo colaborativo en el aula también sabemos que nuestra tarea se potencia cuando intercambiamos criterios con colegas de nuestra y/o de otras instituciones. Se trata de enriquecer la toma de decisiones fundamentadas ante el desafío de enseñar a todos y todas nuestros niños y niñas.

Objetivos

- Analizar la progresión de contenidos del eje Números y Operaciones a lo largo de la escolaridad primaria con perspectiva de ciclo y criterios de priorización.
- Realizar análisis didácticos de propuestas de enseñanza para adecuarlas a diversos saberes de partida de los niños y niñas de una clase.
- Incorporar herramientas teóricas, tanto matemáticas como didácticas, para potenciar el análisis y desarrollo de la tarea docente.

Presentación

Estimados/as colegas: les damos la bienvenida al Módulo "Temas de enseñanza de Número y Operaciones". A lo largo de las cuatro clases, nos centraremos en este eje de enseñanza.

Para abordar los interrogantes que iremos planteando, contamos con escritos en los que se sostiene el enfoque de enseñanza presente en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios para la enseñanza de la matemática en nivel primario: libros de texto, desarrollos curriculares, artículos y libros que toman cuestiones didácticas del área y temáticas específicas. En estas clases, los iremos retomando.

Del conjunto de temas de este eje, elegimos centrarnos en aquellos que nos generan preocupación por su incidencia en el recorrido de aprendizaje de los niños y las niñas y por su importancia en una formación matemática potente. En estas clases nos ocuparemos de problemáticas de enseñanza en el campo de los números naturales –en las dos primeras– y en el campo de los números racionales –en las dos últimas. A lo largo de las cuatro clases recorreremos cuestiones tales como:

- por qué poner el foco del trabajo de cálculo en el cálculo mental y cuáles son los aprendizajes que lo sustentan;
- cómo evoluciona el trabajo con las propiedades que fundamentan los procedimientos de cálculo y las formas de generalizarlos y validarlos desde los primeros a los últimos años del nivel primario;
- cuáles son las discusiones que es necesario dar con los niños y niñas al abordar los números racionales y sus operaciones luego del trabajo en el campo de los naturales;
- cómo inciden las distintas formas de escribir un mismo número, natural o racional, en las formas de operar y con qué criterios secuenciar el trabajo en cada ciclo.

Para acompañar en estas reflexiones incluimos momentos para "detenerse a pensar", de los que sugerimos guardar un registro escrito personal que pueda servir para evidenciar el propio proceso de evolución de los conocimientos acerca de la temática, para socializar con colegas cuando sea oportuno y como insumo para los trabajos que se soliciten.

Así como sostenemos que es fundamental el trabajo colaborativo en el aula, también sabemos que nuestra tarea se potencia cuando intercambiamos criterios con colegas de nuestra y/o de otras instituciones. Se trata de enriquecer la toma de decisiones fundamentadas ante el desafío de enseñar a todos y todas nuestros niños y niñas.

Clase 1: El cálculo mental con números naturales

Presentación de la clase

Bienvenidas y bienvenidos a nuestra primera clase de "Temas de enseñanza de Número y Operaciones". En esta oportunidad nos ocuparemos del cálculo con las cuatro operaciones básicas con números naturales para analizar cómo fortalecer en los alumnos el dominio flexible de estrategias para encontrar resultados.

En principio, tenemos que plantearnos cómo se han modificado las prioridades en relación con la enseñanza de los algoritmos, atendiendo tanto al acceso masivo a las calculadoras como al sentido mismo de la formación matemática en la escuela obligatoria. Desde el punto de vista de las necesidades de cálculo, hoy basta con aproximar mentalmente y ajustar con la calculadora. Y, desde el punto de vista de la formación matemática, es central que los alumnos y alumnas tengan oportunidad de vivir una práctica matemática con sentido, construyendo procedimientos, analizándolos y pudiendo validarlos para tener control sobre lo que hacen e ir adquiriendo una posición autónoma en su hacer matemático.

No estamos planteando que no se enseñe a calcular, sino que es necesario orientar la enseñanza para disponer de recursos de cálculo efectivos y destinar el tiempo que antes dedicábamos a la consolidación de los algoritmos convencionales de lápiz y papel, a prácticas reflexivas sobre las propiedades de las operaciones en articulación con la estructura del sistema de numeración. Estos saberes son los que sostienen los distintos procedimientos y su dominio permite consolidar una base aritmética firme sobre la que sustentar el trabajo algebraico requerido en la escuela secundaria.

Nos preguntamos entonces: ¿qué tipo de cálculo priorizar? ¿Cómo intervienen las propiedades de las operaciones en los procedimientos de cálculo? ¿Qué procedimientos son más convenientes según los números que intervienen? ¿Por qué interesa la construcción y memorización de repertorios aditivos y multiplicativos? ¿Cómo fortalecer la estimación y el cálculo aproximado para evaluar la razonabilidad de los resultados obtenidos con la calculadora? ¿Cómo utilizar el repertorio conocido y las propiedades para operar con números más grandes? ¿En qué saberes poner el foco del trabajo en el aula a lo largo de cada ciclo?

¿Qué trabajo de cálculo es necesario fortalecer en la escuela obligatoria?

Ya habiendo retomado la presencialidad plena luego de años en los que la continuidad pedagógica fue difícil de asegurar y tomó múltiples y diferentes recorridos en las escuelas como consecuencia de la pandemia, estamos en condiciones de fortalecer los aprendizajes matemáticos de nuestros/as alumnos y alumnas.

Al pensar en el bloque de Número y Operaciones, sabemos que el trabajo con el cálculo para cada operación es solo una parte de lo importante y necesario.

El aprendizaje de una determinada operación supone:

- Resolver diversos tipos de problemas atendiendo a los distintos sentidos de una operación pues implican dificultades muy variables para los alumnos.
- Utilizar variados procedimientos y recursos de cálculo dependiendo de los números y el problema a resolver.
- Vincular los conceptos en redes estableciendo relaciones entre suma y resta; multiplicación y suma; multiplicación y división; división y resta.
- Utilizar formas de representación adecuadas incluyendo distintas formas de escritura y notaciones convencionales.

En este marco, y tomando en cuenta lo planteado en la presentación, nos abocaremos en esta clase al cálculo y a una pregunta que nos hacemos todos los docentes: ¿qué trabajo priorizar en relación al cálculo?

Una mirada rápida podría llevarnos a retomar la ejercitación de prácticas algorítmicas que no requieren del tiempo de los procesos constructivos. Sin embargo, ya tenemos experiencia sobre los resultados de tal enseñanza. Poder reproducir los algoritmos no garantiza el dominio de las propiedades de las operaciones que son un punto de apoyo para la articulación con el nivel secundario, ni un acceso razonado a la posibilidad de estimar resultados y controlar el uso de la calculadora. Hoy sabemos que repetir un algoritmo tiene escaso valor formativo.

Entendemos que una buena formación en torno al cálculo requiere:

- disponer de un repertorio memorizado de cálculos aditivos y multiplicativos, conocer las propiedades de las operaciones y distintas formas de descomponer los números, para obtener nuevos cálculos a partir de otros conocidos.
- conocer diversos procedimientos de cálculo para seleccionar los más adecuados según los números que intervienen y la precisión requerida.
- controlar la razonabilidad de los resultados que se obtienen a través de la estimación.
- dominar el uso de la calculadora.

Y, desde una perspectiva ciclada, planteamos la necesidad de recorrer un camino constructivo que avance desde:

- procedimientos personales hacia otros más cortos y efectivos.
- el uso de las propiedades de las operaciones en el primer ciclo a su reconocimiento y explicitación en el segundo.
- validaciones apoyadas en el contexto extramatemático y los ejemplos hacia otras más generales y descontextualizadas

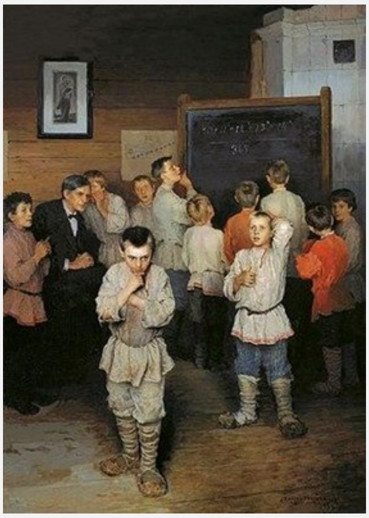
Nuestro foco, en esta clase, estará en el cálculo mental. Tener en cuenta la progresión de contenidos que proponen los documentos curriculares para la enseñanza de la numeración y el cálculo asociadas a los distintos tramos de la serie numérica nos permitirá retomar diversos desarrollos que ya conocemos para, a partir de su análisis didáctico, poner en debate su adaptación a los proyectos institucionales de nuestras escuelas y a las condiciones de nuestras aulas.

¿Qué entendemos por cálculo mental?

Antes de avanzar, busquemos una forma común de entender la idea de cálculo mental tal como aparece hoy en la enseñanza, para reconocer cómo lo incorporamos en nuestra planificación.

El cálculo mental es un concepto que vivió desde siempre en las escuelas primarias y todos tenemos una idea acerca de su práctica. Pero busquemos en la web para encontrar una definición clásica.

El cálculo mental consiste en realizar cálculos matemáticos utilizando solo el cerebro, sin ayudas de otros instrumentos como calculadoras o incluso lápiz y papel o los dedos para contar fácilmente. El cálculo mental a menudo implica el uso de técnicas específicas diseñadas para tipos particulares de problemas. (…) La práctica del cálculo mental ayuda al estudiante para que ponga en juego diversas estrategias.
https://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%A1lculo_mental



Cálculo mental. En la escuela pública S. A. Rachinski, cuadro de Nikolái Bogdánov-Belski de 1895 en el que unos niños tratan de calcular mentalmente el resultado de la expresión en la pizarra.

En un diccionario de uso extendido, el *Pequeño Larousse ilustrado*, encontramos que cálculo mental es “el que se hace sin escritura”. En ambas referencias, la web y el diccionario, se asocia el cálculo mental con la no escritura. Por otro lado, se asocia a “técnicas específicas” o bien a “trucos”.

Si ahora nos centramos en el cálculo mental en la escuela podríamos encontrar cómo este concepto tiene otro significado. Cecilia Parra (1994) se refiere al cálculo mental de la siguiente manera:

"…. la concepción de cálculo mental que vamos a desarrollar no excluye la utilización de papel y lápiz, particularmente en cuanto, por ejemplo, el registro de cálculos intermedios en un proceso que es, en lo esencial mental.

Parece más neta y fundamental la distinción entre el cálculo en el que se emplea de modo sistemático un algoritmo único, sean cuales fueren los números a tratar y el cálculo en el que, en función de los números y la operación planteada, se selecciona un procedimiento singular adecuado a esa situación, y que puede no serlo para otra. ….

El conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan, sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados. Los procedimientos de cálculo mental se apoyan en propiedades del sistema de numeración decimal y en las propiedades de las operaciones y ponen en juego diferentes tipos de escrituras de los números, así como diversas relaciones entre los números". (Parra, p. 222)

Cabe destacar que, en esta clase, tomamos el cálculo mental como cálculo pensado o reflexionado en el sentido planteado por Parra como un conjunto de procedimientos cuya elección tendrá que ver con muy diversas razones:

- ✓ el tipo de resultado que se espera: exacto o aproximado.
- ✓ el tipo de números que intervienen: redondos, cercanos, coincidentes.
- ✓ los conocimientos del sujeto que resuelve en relación con:
  - la descomposición/interpretación de los números que utiliza, por ejemplo, 345 es 300 + 40 + 5 o bien 3 de 100, 4 de 10 y 5 de 1
  - las propiedades de las operaciones que conoce, ya sean con su nombre convencional o como reglas que se usan en la acción, por ejemplo, "cambiando el orden de los números al sumar o multiplicar se obtiene el mismo resultado"
  - el repertorio de cálculo memorizado del que disponga.

Lectura obligatoria

En la introducción del documento “Matemática. Cálculo mental con números naturales” se puede profundizar en la caracterización y las diferencias entre cálculo algorítmico y cálculo mental.

Ya sea que lo denominemos como cálculo mental o cálculo reflexionado y que, para desarrollarlo, sea necesario escribir o no, hoy se piensa en ampliar este concepto no reduciéndonos a entenderlo como asociado a un único procedimiento. Se tratará de privilegiar la elección del tipo de cálculo según la circunstancia, los instrumentos de los que se disponga y los números involucrados, analizando la razonabilidad del resultado.

¿Qué trabajo escolar requiere el cálculo mental?

En principio, consideremos dos tipos de conocimientos involucrados en el trabajo con cálculo mental. Por un lado, la sistematización de un conjunto de resultados y, por el otro, la construcción de procedimientos personales.

“La sistematización de un conjunto de resultados permite la construcción progresiva de un repertorio de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones disponibles en la memoria o fácilmente reconstruibles a partir de aquellos memorizados”. (Sadovsky, 2006, p. 15)

“La construcción de procedimientos personales que permiten dar respuesta a una situación ha sido denominada “cálculo pensado o reflexionado”. Al no tratarse de procesos automatizados, consisten en el despliegue de diferentes caminos a partir de decisiones que los alumnos van tomando durante la resolución. Tales decisiones se vinculan con la comprensión de la tarea, con diferentes relaciones que se establecen y con el control de lo que sucede durante la resolución. (Sadovsky, 2006, p. 16)

Consideramos que el ámbito del cálculo mental es un espacio privilegiado para que las niñas y los niños se involucren en un tipo de trabajo matemático de producción y validación de conocimientos, en el que pueden desarrollar confianza en sus posibilidades de hacer matemática. Esto es porque es un tipo de práctica que invita a los niños a elaborar estrategias propias y compararlas, −para lo cual se torna necesario explicar qué se hizo−, permite discutir sobre la validez de los procedimientos y los resultados, sobre su economía y establecer relaciones con las notaciones convencionales.

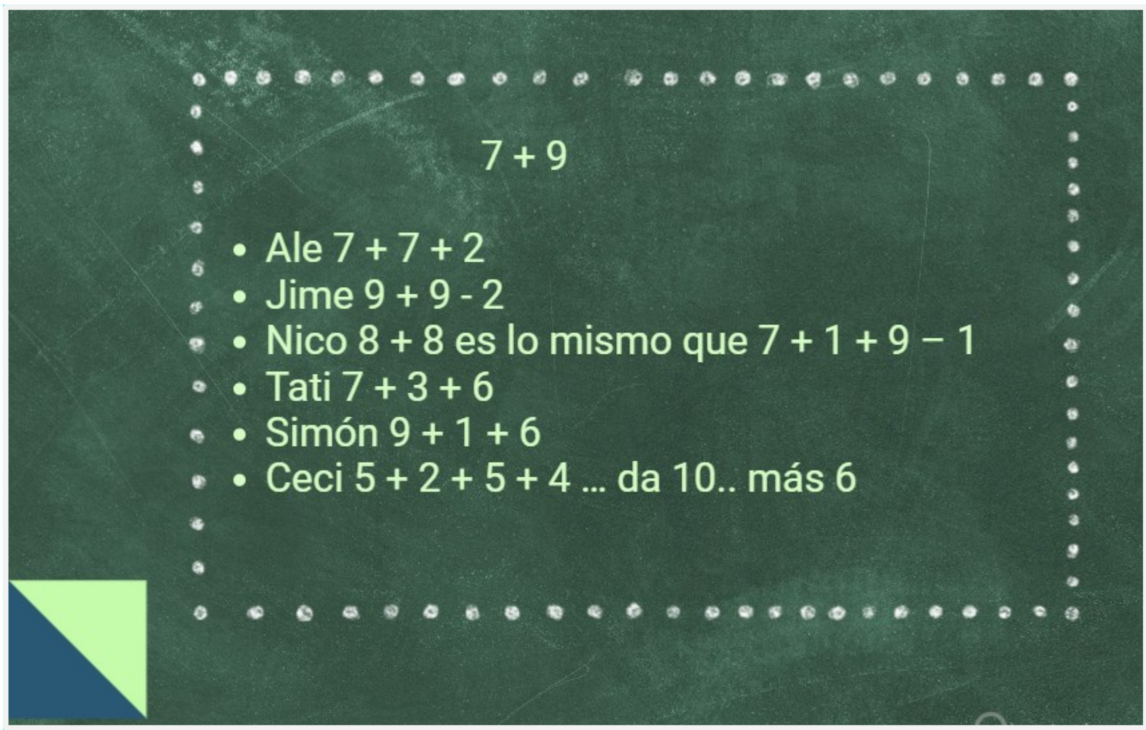
A continuación, nos ocupamos de la enseñanza del cálculo mental advirtiendo que, aunque en esta clase veremos ejemplos sobre la suma y la multiplicación, los pares de operaciones suma y resta y multiplicación y división, se trabajan de modo que se vayan estableciendo las relaciones entre ellas.

La suma y la resta: descomposiciones, propiedades y repertorios al construir procedimientos

Al iniciar el trabajo con una operación, por ejemplo, con sumas en primer grado, se comienza planteando problemas en contexto extramatemático que dan lugar a que los niños, en un trabajo exploratorio, recurran a dibujos, palitos o algún otro material manipulable para luego, en otro momento, avanzar a procedimientos numéricos. Este avance no se da solo, se trata de que como docentes generemos las condiciones para que estos avances estén al alcance de los niños.

En 1ero y 2do, antes de memorizar el repertorio, los niños pueden recurrir al conteo y el sobreconteo antes de pasar al cálculo. Pero, muchas veces, nos sorprende ver a niños de segundo ciclo usando la misma estrategia, contando con los dedos al resolver una cuenta con números de tres cifras que, por ejemplo, incluye pensar cuál es el resultado de 7 + 9.

Analicemos algunos procedimientos que implican cálculos para esta suma buscando identificar qué conocimientos involucra cada uno.



¿Qué saben quiénes usan estos procedimientos?

Por un lado, en relación con el **sistema de numeración**, expresan los números como sumas o restas, es decir, conocen la descomposición aditiva de los números y cada uno descompone según lo que sabe. Saben, por ejemplo, que 9 es equivalente a 7 + 2 y que 8 es equivalente tanto a 7 + 1 como a 9 - 1.

En relación con las **propiedades** de la suma, las "usan" es decir que, aun desconociendo sus nombres, saben que es posible cambiar el orden de los sumandos (lo hace Ceci al sumar 5 + 5 y 2 + 4) como así también asociarlos de distinta manera.

Y, en relación con el **repertorio de cálculos conocidos** usan "los dobles" - como 5 + 5, 7 + 7, 9 + 9, 8 + 8 -; "las sumas que dan 10" -7 + 3 y 9 + 1- y "las sumas y restas +/-1" como 9 -1 y 9 + 1-.

Cabe señalar que, cada uno, cada una, descompone en función de los resultados que ya conoce y, en ese sentido, descomponer usando el 5 como apoyo (7 + 9 = 5 + 2 + 5 + 4) es una estrategia que facilita mucho el cálculo para los niños y las niñas que no tienen un repertorio variado.

Es de destacar que las posibles descomposiciones aditivas o multiplicativas de los números que los chicos usan al resolver están vinculadas con qué repertorio tienen memorizado y disponible, y con la posibilidad de usar de manera implícita las propiedades al cambiar el orden y asociar los números según les convenga. Todas ellas son herramientas centrales en la producción de procedimientos originales. "No hay un procedimiento mejor que otro" se trata de identificar el que mejor cuadra en función de los números en cuestión y los conocimientos disponibles.

¿Qué actividades propondrían a los niños y niñas del 2° ciclo que aún cuentan de a 1 para resolver 7 + 9 para fortalecer sus conocimientos en relación con cálculos de dígitos que suman más de 10?

Una alternativa para el fortalecimiento es considerar cómo hacer que los niños avancen en la memorización de aquellos resultados que no dominan. Esto nos lleva a pensar: ¿cómo hacer para que todos lleguen a memorizar los cálculos que hemos elegido como fundamentales en nuestro grado/ciclo

Sin duda los juegos, convenientemente elegidos según el tipo de cálculo que se usa al jugar, son un recurso de enseñanza privilegiado para construir y memorizar repertorios.
En relación con cada juego que se elige, es importante recordar que:

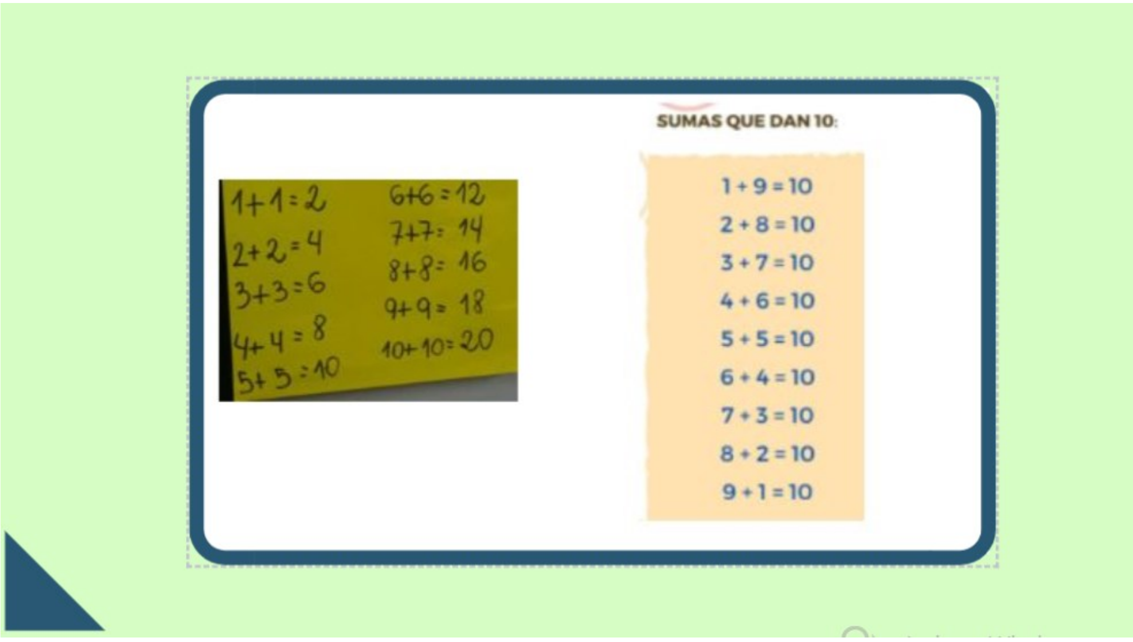
- Es necesario jugar más de una vez.
- Al incorporar la reflexión después de jugar se promueve que los niños/as expliciten las estrategias utilizadas para decidir cuáles funcionaron mejor. Al volver a jugar, estas estrategias podrán ser utilizadas por quienes no lo hicieron al inicio.
- Es conveniente que en el juego los niños/as realicen registros de los cálculos utilizados. A continuación, se podrá generar espacios de reflexión sobre su característica común.
- Es conveniente que el juego esté inserto en una secuencia de actividades que incluya algunas que evoquen el juego para, por ejemplo, decidir una jugada, analizar la jugada de otro, argumentar por qué una jugada vale o no vale.

- También es posible incorporar a la secuencia actividades fuera del contexto del juego, por ejemplo, cálculos incompletos o nuevos cálculos donde se pueden usar los de la lista para resolver, esa lista se puede volver un conocimiento más reutilizable a futuro.

Lectura sugerida

Entre la bibliografía con la que contamos sobre juegos de cartas o dados y juegos de tablero que pueden utilizarse para promover la memorización de repertorios, recomendamos revisar los "Cuadernos para el aula" de todos los años y los fascículos "Piedra libre".

Algunos/as niños/as suelen memorizar en forma espontánea estos repertorios. Otros/as no. Se trata de generar espacios específicos para que todos puedan avanzar en la memorización de manera temprana. Es recomendable que luego de realizar actividades a propósito de determinado repertorio, por ejemplo, una secuencia de juego, las listas de cálculos queden explicitadas en carteles. Así, las listas podrán ser consultadas a la hora de resolver un nuevo cálculo.



También en dichos carteles pueden plasmarse algunos procedimientos y ciertas conclusiones elaboradas a partir de la reflexión grupal como: "a veces conviene cambiar el orden de los números para sumarlos" o "a veces conviene poner el número más grande primero".

Se trata en estos ejemplos de conclusiones de una explicitación de reglas de uso que luego podrán avanzar a la formulación de, en el ejemplo, la propiedad conmutativa, cuando se haya trabajado con más ejemplos, con números más grandes, y aún, en el segundo ciclo con sumas de fracciones y decimales.

En cuanto a la propiedad asociativa se podrían proponer sumas largas, de 6 o 7 dígitos como:

9 + 3 + 1 + 5 + 2 + 2 + 3 + 7 + 6

que puedan reunirse según lo que sabe cada chico, por ejemplo,

9 + 1 + 2 + 10 + 10 + 6 = 10 + 2 + 10 + 10 + 6 = 30 + 8 = 38

para advertir, y también poner en un cartel, que “se pueden reunir de distintas formas y siempre da el mismo resultado”

Así, los carteles son un registro en el que se sistematizan los conocimientos trabajados. A medida que ciertos carteles no son usados pueden guardarse en una carpeta que conserve la memoria de lo trabajado en el año.

La suma y la resta, desde la perspectiva ciclada

En los Cuadernos para el aula, en el apartado “Avanzar año a año en los conocimientos de Primer Ciclo” se sostienen dos ideas que consolidan la importancia del trabajo con cálculo mental:

> “… en relación con las formas de calcular, es importante considerar como inicio del trabajo la utilización de diferentes procedimientos de cálculo en función de los conocimientos disponibles de los alumnos sobre los números involucrados y sobre las operaciones antes de comenzar con los algoritmos convencionales”.
>
> “…. un trabajo reflexivo sobre el cálculo debe incluir tanto actividades de producción y memorización de repertorios y reglas como un trabajo colectivo centrado en la

> comparación de una variedad de procedimientos utilizados por distintos alumnos frente a un mismo problema" (p. 34)

¿Cómo extender el trabajo de producción de procedimientos con sumas y restas a números más grandes? ¿Cuál es la base para que los alumnos se involucren en generar variados procedimientos, escribiendo o no los cálculos parciales intermedios, haciendo o no marcas o números que indiquen los agrupamientos?

- avanzar en la memorización de cierto repertorio de cálculo de sumas y restas
- promover el uso de estos cálculos para resolver otros utilizando las propiedades de las operaciones;
- reconocer el valor posicional de las cifras en las escrituras de los números (cienes, dieces, sueltos), al comienzo apoyado en el uso de billetes y monedas;
- realizar cálculos estimados cuyos resultados se van ampliando progresivamente (hasta 100, hasta 1000 en el primer ciclo).

En este sentido el avance en los números involucrados en los cálculos irá creciendo año a año. En términos de priorización, aunque es posible avanzar en los repertorios para números de dos y tres cifras entre segundo y tercer grado, es importante armar un proyecto institucional en cada escuela para tomar decisiones respecto de qué repertorio aditivo será objeto de trabajo en cada uno. Pueden consultar el repertorio en el siguiente enlace.

Volviendo al tema de las conclusiones en los carteles y la articulación, habrá que ir construyendo y revisando cada año los carteles de años anteriores para fortalecer la idea de que, al sumar con números naturales, chicos o grandes, algunas "reglas" no cambian. Por ejemplo, volver sobre las propiedades "en la suma los sumandos pueden cambiar de orden y en la resta no", o, "en las sumas de más de dos sumandos, se pueden ir armando resultados parciales asociando los números que convenga, pero en la resta no se puede hacer eso". Son reglas que, como dijimos, expresan las propiedades de la suma y que pueden ser elaboradas por los niños como reflexiones luego de resolver algún conjunto de cálculos.

Por ejemplo, ¿cómo podríamos recuperar al inicio de 4° grado el repertorio aditivo y las estrategias para sumar y restar elaboradas en el primer ciclo?

Una alternativa es proponer diversos juegos de emboque con tableros como los mostrados en la ilustración donde los puntajes permiten poner en juego distintas estrategias con números de 2, 3 ó 4 cifras convenientemente elegidos según el repertorio que se quiere abordar.

Si se considera, por ejemplo, que para las sumas de bidígitos terminados en 5 los alumnos ya tienen disponible la regla de sumar pares de números terminados en ceros y cincos, convendrá incorporar pares de números terminados en 50 o en 500.

(Chara, 2012), p. 18.

Asimismo, es posible extender los procedimientos planteados antes para 7 + 9 a sumas del tipo 70 + 90 y 700 + 900 y a sumas donde esos cálculos formen parte de otros donde se realicen descomposiciones como en 735 + 967.

Cada docente, a partir de la información brindada por sus colegas y la que él mismo va tomando de las producciones de los niños irá decidiendo los repertorios de cálculo a incluir en los tableros. Como ya planteamos, es importante en los juegos que se produzcan registros de los valores para luego reflexionar sobre las relaciones establecidas al resolverlos y también generar espacios para producir “consejos que le darían a un compañero” para facilitar estos cálculos u otros del tipo: para sumar 99, para sumar 11, para restar 101 o restar 99.

Cuando los números son más grandes será interesante trabajar con la estimación del resultado y su obtención con calculadora. ¿En qué conocimientos se apoya la estimación? Por ejemplo, para 75638

+ 96420 podemos pensar en 70000 + 90000 y saber que el resultado será mayor que 160000, y aún pensar que 5000 + 6000 es mayor que 10.000 y entonces el resultado será mayor que 170.000. Nuevamente se ve el apoyo en la descomposición del número y el repertorio memorizado.

En cuanto a la resta y su relación con la suma sabemos que de cada suma podemos derivar dos restas. Así sabiendo que 7 + 9 = 16 podemos escribir que 16 – 9 = 7 y que 16 – 7 = 9, es decir, es posible construir restas a partir de sumas. Estas relaciones se juegan también, en actividades de completamiento de sumas, como en 150 + …. = 220.

A partir de los registros en carteles es posible generar espacios en los que los niños tomen conciencia de lo que saben. Se trata de actividades muy interesantes en términos de articulación. Son las de reflexión sobre lo sistematizado y uso de esos conocimientos en nuevas actividades.

Veremos en la próxima clase cómo, en el segundo ciclo, además de avanzar en sumas y restas con números de más cifras, se avanza en el tipo de trabajo que se propone con el análisis de los procedimientos, las propiedades y las explicaciones.

En su escuela, ¿los alumnos usan procedimientos propios para sumar y restar antes de conocer los expertos? ¿Aparecen variedad de procedimientos o se reducen a uno? ¿Se observa alguna evolución de los mismos al mirar la misma operación en distintos cuadernos a lo largo del ciclo?

Antes de continuar, acompañando un mate o un café les proponemos conocer un “truco matemático” para “adivinar” el resultado de una multiplicación con el que podrá sorprender a quien desee.

Para aprender el truco

- Piensen un número entre 100 y 1000. Multiplíquenlo por 999.

- El resultado es un número de seis cifras. Las tres primeras cifras constituyen el número que pensaron menos 1 y las tres cifras restantes son el “complemento” al 9, de las tres primeras.

Un ejemplo

Si pensaron el 741 al multiplicar por 999 les quedó 740.259.

¿Cómo se "adivina" el resultado?

Restando 1 a 741, queda: 740, son las primeras tres cifras.

Buscando los complementos a 9 de 740, quedan las últimas tres cifras (9 – 7 = 2; 9 – 4 = 5; 9 – 0 = 9), 259.

Si prueban con otros números, verán que siempre vuelve a funcionar la regla. Ahora pueden hacerse los/as "magos/as". Pídale a alguien que piense un número de 3 cifras y que lo multiplique por 999. Cuando esa persona le dice el resultado, Ud. solo debe agregar 1 a las tres primeras cifras y podrá decirle el número que pensó.

Aunque parece magia no lo es…. ¿Cómo es posible explicar a qué se debe?. Con solo analizar los cálculos siguientes podrá explicar su magia

$741 \times 999 = 741 \times (1000 - 1) = 741\ 000 - 741 = 740259$

La multiplicación y la división: descomposiciones, propiedades y repertorios al construir procedimientos

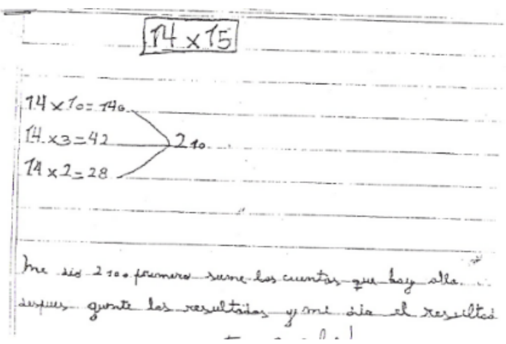
En el comienzo del trabajo en el campo multiplicativo se trata de resolver los primeros problemas en contexto extramatemático que involucran series proporcionales e introducir la escritura multiplicativa a partir del análisis que incluye la consideración del tipo de elementos (análisis dimensional): 3 cajas y 6 huevos por cada caja son 18 huevos, 3 x 6 = 18

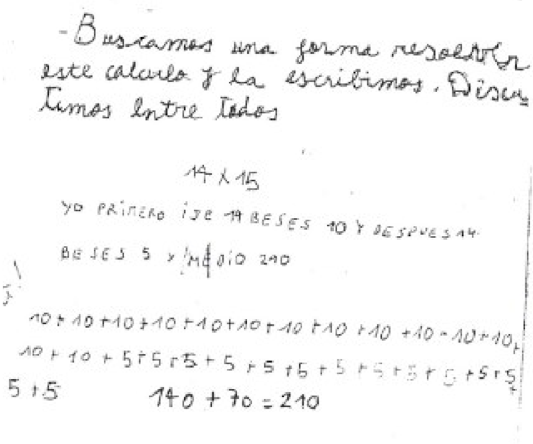
Para avanzar, promovemos el completamiento de tablas en diversos contextos que le dan sentido (ruedas de bicicleta, triciclos, autos, huevos para realizar distintas comidas) para luego desarrollar un trabajo intramatemático de sistematización en la tabla pitagórica. En la clase 3 del módulo 1 revisamos cómo avanzar entre 3ero y 4to en el trabajo con esta tabla analizando las propuestas en los respectivos Cuadernos para el aula, en un caso para construirla y en otros para avanzar en el análisis de las relaciones entre tablas y las propiedades de la multiplicación.

Posteriormente, se trata de desplegar un trabajo alrededor de los repertorios de cálculos multiplicativos con números mayores.

A continuación, compartimos el análisis de distintos procedimientos que usaron algunos niños y niñas al multiplicar dos números de dos cifras es decir que los números incluidos exceden los incluidos en la tabla pitagórica. Efectivamente, mirando la tabla sólo encuentro productos de multiplicaciones hasta 10 x 10, pero 14 x 15 no están allí.

Analicemos primero los procedimientos y luego otra tarea que el docente solicitó, además de resolver el cálculo, la escritura de una explicación.


14 x 15
14 x 10 = 140
14 x 3 = 42
14 x 2 = 28
210
me dio 210 primero sume las cuentas que hay allí despues junte los resultados y me dio el resultado


- Buscamos una forma resolver este calculo y la escribimos. Discutimos entre todos
14 x 15
yo primero ize 14 beses 10 y despues 14 beses 5 y medio 210
10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5
140 + 70 = 210

Producciones aportadas por Mercedes Etchemendy

En el primer procedimiento advertimos que se descompone el 15 en sumandos 10 + 3 + 2, pues se multiplica el 14 por cada uno de ellos y luego se suma. Escribiendo el procedimiento de manera horizontal sería:

$$14 \times (10 + 3 + 2) = 14 \times 10 + 14 \times 3 + 14 \times 2 = 140 + 42 + 28 = 210$$

En el segundo se descompone en otros sumandos 10 + 5, pues se hace 14 veces el 10 y 14 veces el 5. Se puede escribir:

$$14 \times (10 + 5) = 14 \times 10 + 14 \times 5 = 140 + 70 = 210$$

En ambos casos se usa la propiedad distributiva y en cuanto al repertorio multiplicativo se advierte que el primer alumno sabe el uso de x10, y le resulta fácil calcular el doble y el triple. En el segundo procedimiento se incluyen también sumas, lo que parece asegurarle el control de los resultados.

Las explicaciones son de tipo descriptivo del hacer, punto de partida del proceso de comunicación de sus ideas más allá de los símbolos matemáticos. Queremos destacar la importancia de este tipo de tarea como un modo de volver sobre lo pensado lo que implica un avance en la conceptualización de las descomposiciones numéricas y de la “reglas” –propiedades– utilizadas. Veamos lo que afirman al respecto Etchemendy, M. y Zilberman, G. (2012).

> *“El lenguaje oral permite que las ideas se exterioricen con facilidad, que circulen en la clase, que pasen del ámbito de lo privado a lo público para poder ser compartidas pero, a diferencia del lenguaje escrito, no deja huellas, es pasajero y temporal. (...)*
>
> *El hecho de anotar, aunque sólo consista en relatar lo realizado, requiere, en cierta medida, volver a pensar en el modo de obtener el resultado y, en algunos casos, involucra un comienzo del proceso de toma de conciencia del camino desplegado al objetivar la acción desarrollada. ¿Qué significa el acto de escritura desde el trabajo personal de cada niño? El acto de escribir contribuye a reorganizar el pensamiento, es decir la escritura funciona como una herramienta cognitiva que ayuda a ordenar lo que se piensa sobre el asunto”* (p. 214)

¿Qué otras descomposiciones podrán hacerse para multiplicar 14 x 15? ¿Qué “sabe” el que hace una u otra?

Se podría descomponer en factores y multiplicar como convenga. Por ejemplo, si quien resuelve sabe que es fácil multiplicar por 10, podría buscar tener factores 2 y 5 y escribir:

$$2 \times 7 \times 3 \times 5 = 7 \times 3 \times 2 \times 5 = 7 \times 3 \times 10 = 21 \times 10 = 210$$

Sabe también que puede cambiar el orden de los factores (usa la propiedad conmutativa) y que puede elegir cómo combinar los factores (usa la propiedad asociativa).

Actividad matemática de la clase

Como vimos los procedimientos de cálculo se fundamentan en la estructura del sistema de numeración y las propiedades de las operaciones.

Les proponemos analizar este procedimiento, que transforma una resta "difícil" en una forma fácil de obtener un resultado equivalente, para analizar por qué funciona.

Aclaramos que este procedimiento no se incluye con el propósito de que sea objeto de enseñanza sino para plantear un desafío para cada uno de nosotros como docentes.

a) Consideren estos ejemplos y verifiquen que el resultado que se obtiene es equivalente:

416-187 2003 - 645 43214 - 25978

416	416	2003	2003	43214	43214
- 187	+ 812	- 645	+ 354	- 25978	+ 74021
	1228		2357		117235
	229		**1358**		**17236**

b) Prueben con otros ejemplos.

c) Expliquen por qué se obtiene el mismo resultado y compartan sus explicaciones en el foro.

Al final de la clase, encontrarán recomendaciones para su participación.

La multiplicación y la división, desde la perspectiva ciclada

Si bien la multiplicación y división se comienzan a trabajar entre 2do y 3er grados, es entre 4to y 5to que nos abocamos al avance de su cálculo con procedimientos más cortos. Para ello, en 3° grado es fundamental fortalecer el repertorio multiplicativo, estableciendo prioridades. Por ejemplo, además de los incluidos en la tabla pitagórica, el cálculo de dobles y mitades para números de dos y tres cifras, los por 10 y por 100.

Para armar un proyecto institucional de cálculo multiplicativo pueden consultar el repertorio en el siguiente enlace y así decidir qué cálculos se priorizarán en cada grado.

En cuanto a la multiplicación, tanto en 3ero como en 4to resultan interesantes los avances desde los cálculos con dígitos a los procedimientos para multiplicar números de 2 y 3 cifras por números de una y dos cifras en los que se descompone alguno de los factores en sumas o en otros factores de manera similar al visto en 14 x 15.

Así, primero en problemas de contexto extramatemático y luego en problemas intra se puede pensar para, por ejemplo, 124 x 12 en:

*124 x (10 + 2) –con un procedimiento similar, usando la propiedad distributiva.

*124 x 3 x 4 –transformando una multiplicación por dos cifras en dos por una cifra lo que lleva al uso de la propiedad asociativa.

También es central en el segundo ciclo avanzar desde las reglas para multiplicar o dividir por diez, cien y mil (x10, x100, x1000) a pensar en cómo multiplicar por factores que pueden descomponerse para luego usar esas reglas. Veamos dos ejemplos del Cuaderno para el aula de 4to (p.88 y p. 89):

Sabiendo que 16 x 10 = 160, resuelve sin hacer la cuenta: 16 x 20 = 16 x 40 = 16 x 80 16 x 100 = 16 x 50 =	Si 60 : 10 = 6, calcula y explica por qué te parece que es así: 60 : 30 = 60 : 20 = 600 : 30 = 600 : 20 =

Cuando los números son más grandes será interesante trabajar con la estimación del resultado y su obtención con calculadora. ¿En qué conocimientos se apoya la estimación? Por ejemplo, para 7563 x 458 podemos pensar en 7000 x 400 y saber que el resultado será mayor que 70 x 4 con cuatro ceros, es decir mayor que 2.800.000. Y también que será menor que 8000 x 500 = 4.000.000. En este caso se advierte también el apoyo en el conocimiento del valor posicional y el repertorio memorizado.

Señalamos aquí que, aunque vamos a trabajar sobre la enseñanza de la división en la próxima clase, es importante incluir, como parte del fortalecimiento del cálculo, problemas en los que se trabaje en el vínculo entre multiplicación y división.

Si 25 x 40 = 1000, sin hacer la cuenta resuelve

1000 : 25 =   1000 : 50 =

1000 : 40 =   1000 : 20 =

Además de analizar que la relación entre cada factor y el producto se transforma en dividendo, divisor y cociente, este problema permite considerar que ocurre con el cociente cuando el divisor de duplica o cuando es la mitad del anterior y explicitar esas relaciones. Y luego tomar otros casos para ver si las relaciones encontradas funcionan a veces o “todas las veces que estudiamos”

Lectura sugerida

Para ampliar el bagaje de actividades posibles de proponer para fortalecer las estrategias de cálculo con números naturales es interesante recorrer distintas secuencias de actividades en ¿Cómo mejorar las estrategias de cálculo con números naturales? El juego como un recurso de enseñanza (Chara, S. 2012)

Para concluir, y ante la creencia de que esta variedad de procedimientos surge solo en “aulas privilegiadas” o “en mentes dotadas”, sostenemos que dichos procedimientos pueden ser desplegados por todos los alumnos. Lo que es fundamental es que tengan la oportunidad de desarrollar estrategias de cálculo mental apoyadas en la construcción y memorización de repertorios de cálculo y en la descomposición de números de distintas formas. Esto supone trabajarlos no como “entrenamiento para algún procedimiento” sino como una variedad de estrategias de cálculo que se tienen disponibles. Serán los alumnos los que elegirán la estrategia en función de los números involucrados y sus conocimientos previos.

Actividad didáctica de la clase

En los libros de textos suelen aparecer una gran variedad de actividades que los docentes trabajamos con los alumnos y alumnas y es importante que podamos identificar en cada caso, qué diversos procedimientos podrán desarrollar los/as alumnos/as y qué conclusiones se podrían elaborar en la puesta en común.
Estas actividades pueden tener muy variadas utilidades ya sea para afianzar el uso de ciertas propiedades, para avanzar en el cálculo estimado, para extender ciertos repertorios a números mayores, a usar cálculos conocidos para resolver otros. Por tanto,

a) lo invitamos a elegir una de las dos actividades que se proponen a continuación y detallar:

- ¿qué procedimientos podrían utilizar los/as niños/as?;
- ¿a qué conclusiones podrían llegar los/as niños/as?;
- ¿qué carteles se podrían escribir?;

b) ¿cómo le explicarían a otro docente la importancia del desarrollo del cálculo mental en la escuela?

Al final de la clase, encontrarán recomendaciones para su entrega.

Actividad 1

USAR CÁLCULOS FÁCILES PARA RESOLVER OTROS

1 Traten de pensar cómo se podría usar el cálculo **6 + 6 = 12** para resolver estos otros, que son "parecidos".

6 + 7 = ____	5 + 6 = ____	16 + 6 = ____
7 + 7 = ____	60 + 60 = ____	60 + 50 = ____
600 + 600 = ________	6.000 + 6.000 = ________	60.000 + 60.000 = ________

2 En este cuadro hay algunos cálculos fáciles que seguramente ya saben de memoria.

2 + 2 = 4	9 + 9 = 18	6 + 4 = 10
4 + 3 = 7	4 + 8 = 12	7 + 7 = 14

Fíjense si encuentran alguna manera de usar esos cálculos para resolver estos otros.

20 + 20 = ________	40 + 60 = ________	40 – 20 = ________	90 + 90 = ________
200 + 200 = ________	8 + 4 = ________	400 + 600 = ________	920 + 920 = ________
7 + 8 = ________	603 + 600 = ________	2.000 + 2.000 = ________	40 + 80 = ________

Actividad 2

ALGUNAS CURIOSIDADES

Conocer la tabla nos puede ayudar a saber más sobre multiplicaciones y divisiones…

1 Completen en las tablas los números que faltan.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2					10					
4							28			40
8			24							

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			9							
6						36			54	

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5					25					
10		20								100

Actividades de la clase

A continuación, se presentan las actividades propuestas para esta clase, con algunas recomendaciones para su realización:

Actividades Obligatorias:

- Foro de presentación
- Foro: Actividad matemática de la clase

Se espera que participen en el foro, con dos intervenciones:

- compartiendo sus registros e ideas expresadas en su propia voz (si se incluye una cita de texto o de internet, indicar el origen y justificar su inclusión)
- seleccionando un aporte de otro colega, ampliándolo, refutándolo o expresando su opinión al respecto.

- **Actividad de entrega: Actividad didáctica de la clase**

Forma de Presentación:

- El trabajo deberá realizarse en formato word (Texto justificado, fuente: arial - calibri tamaño 11, no transcribir las consignas de la actividad)

- No podrá extenderse más de dos carillas. Incluir un encabezado con los siguientes datos: Nombre de la Actualización, Nombre de la actividad y clase, nombre del cursante y nombre del tutor (4 renglones, en la misma fuente y tamaño de letra que el cuerpo del texto)

- Todas las citas y referencias bibliográficas deben ser realizadas de acuerdo a las normas APA.

- Deberán entregar el documento en este BUZÓN DE ENTREGA con la denominación: "Apellido_Nombre_Actividad_obligatoria_Clase_1_Aula XX"

- El tutor/a les hará la devolución en el mismo espacio.

Actividad Optativa:

Foro de Consultas

Recuerden que tienen a disposición este espacio para consultar todo lo que necesiten.

Bibliografía de referencia

Chara, Silvia (2012) *Propuestas para la enseñanza en el área de Matemática ¿Cómo mejorar las estrategias de cálculo con números naturales? El juego como un recurso de enseñanza.* Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación (Más tiempo, mejor escuela).

Etchemendy, M. y Zilberman, G. (2012). "Hablar y escribir en la clase de matemática: interacciones entre alumnos y maestros". Capítulo 6 en C. Broitman (comp.). *Matemáticas en la escuela primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes.* Buenos Aires: Paidós.

Etchemendy, M. et al. (2012). *Serie Piedra libre para todos*. Matemática. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Disponible en: Disponible en : https://www.educ.ar/recursos/118471/serie-piedra-libre Fecha de consulta 20 de julio de 2022.

MECyT, Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente (2006). *Matemática 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Serie Cuadernos para el aula*. Buenos Aires.

Parra, C. (1994) "El cálculo mental en la escuela primaria" en C Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires: Paidós.

Sadovsky, P; Ponce, H. y Quaranta, M. (2006) Cálculo mental con números naturales Apuntes para la enseñanza Buenos Aires. GCBA. Dirección de Currícula. Disponible en: http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pluri_mate.php?menuid=20709 Fecha de consulta 20 de julio de 2022.

Créditos

Autores: <Silvia Chara

Cómo citar este texto:
Chara, Silvia (2022). Clase Nro.1: El cálculo mental con números naturales. Módulo 3: Temas de enseñanza de Número y Operaciones. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 2: Relaciones entre números, formas de validar

Bienvenida a la clase

¡Bienvenidas y bienvenidos a esta segunda clase! En esta oportunidad nos centraremos en la evolución del trabajo intramatemático sobre las operaciones en el segundo ciclo, en particular sobre la multiplicación, la división y el sentido del tratamiento de la divisibilidad en la escuela primaria.

Como hemos planteado en la clase anterior, vamos a analizar cómo evoluciona el conocimiento sobre las operaciones cuando avanzamos en el análisis de las propiedades que fundamentan los procedimientos de cálculo. Se trata de que los niños y niñas, además de resolver controlando la razonabilidad del resultado obtenido, comparen y expliquen procedimientos, y vayan explorando los alcances y los límites de los mismos para contar con herramientas cada vez más generales.

El trabajo sobre problemas intramatemáticos en torno al cálculo en el segundo ciclo es fundamental no solo para afianzar lo aprendido en el primer ciclo, sino que resulta un punto de apoyo imprescindible para el trabajo propio de la escuela secundaria. La posibilidad de avanzar en el trabajo algebraico requiere de una base aritmética sólida y esa solidez no se alcanza con la ejercitación de algoritmos sino con la comprensión de las propiedades de las operaciones en relación con la estructura del sistema de numeración.

Por otra parte, como venimos planteando, toda práctica matemática resulta incompleta si no ofrecemos a las y los alumnos situaciones en las que puedan explorar, formular interrogantes, producir e interpretar conjeturas y afirmaciones de carácter general y analizar su campo de validez, defender sus propios puntos de vista, considerar ideas y opiniones de otros, debatirlas y elaborar conclusiones.

La multiplicación, la división y la divisibilidad

La posibilidad de independizar una noción de los contextos particulares en los que se usa, depende tanto de la variedad de contextos explorados como de sucesivas descontextualizaciones. Para ello es necesario alternar momentos de trabajo extra y intramatemático, con otros de análisis y sistematización de las conclusiones a las que se vaya arribando.

El campo multiplicativo resulta particularmente fértil para desarrollar este tipo de prácticas a propósito de la exploración de algunas cuestiones como: ¿podemos saber si habrá resto o no en una división sin hacer la cuenta? ¿Se puede transformar una cuenta difícil con números grandes en otras cuentas más fáciles descomponiendo con sumas o con multiplicaciones? ¿Cuándo se puede, cuándo no? ¿Por qué basta mirar las dos últimas cifras de un número para saber si es divisible por 4? ¿Es cierto que si a un número que es divisible por 6, se le suma otro divisible por 6, la suma también lo es? ¿Y si solo sabemos que el número que se suma es divisible por 3, qué podemos anticipar?... entre otras muchas.

En cuanto a la divisibilidad, si buscamos su significado en un diccionario encontramos “propiedad de un número entero de poder dividirse por otro, dando como resultado un número entero”. Otra manera de decirlo es “propiedad de un número entero que, al ser dividido por otro entero distinto de cero, da resto 0”. También podríamos decir que un número es divisible por otro si el primero es múltiplo del segundo.

Si bien estas relaciones se analizan para el conjunto de los números enteros, en la escuela primaria solo trabajamos con la divisibilidad en el conjunto de los números naturales. Nos preguntamos entonces: ¿cómo se vincula la divisibilidad con los conocimientos sobre las operaciones y las relaciones entre números?

Una primera reflexión que podemos hacer nos lleva a considerar que las cuentas de dividir presentan un resto que puede ser 0 o algún número menor que el divisor. Cuando es distinto de cero, es posible analizar si tiene sentido para las cantidades que intervienen, seguir dividiendo “lo que queda”. Veamos un ejemplo en el que no tiene sentido hacerlo:

Nahuel guarda en carpetas los fascículos semanales de una colección. Cada carpeta puede contener 12 fascículos y las va comprando a medida que se publican los fascículos. Hasta el momento tiene 55 fascículos para guardar.

a) ¿Cuántas carpetas necesita para guardarlos?

b) ¿Cuántos fascículos le faltan como mínimo para completar las carpetas?

En el problema del ejemplo las cantidades son discretas, no tiene sentido partirlas. Si para resolver se hace una cuenta de dividir, advertimos en el ítem a) que el cociente no es la respuesta adecuada y en el ítem b) que es necesario comparar resto y divisor.

Efectivamente, con 55 fascículos se completan 4 carpetas (el cociente) y sobran 7 (el resto), no tiene sentido seguir dividiendo 7: 12. Respondemos el ítem a) con “se colocan 7 en una nueva carpeta de modo que se necesitan 5 carpetas para guardar los 55 fascículos” y el b) “faltan 5 fascículos para completar la quinta carpeta”.

Cuando trabajamos con cantidades “continuas” por ejemplo metros, pesos, tortas, el resto lo podemos seguir dividiendo, lo que nos lleva a considerar los números racionales, tema que abordaremos en las próximas clases.

Cuando el resto es cero, las relaciones entre dividendo y divisor nos remiten a la divisibilidad y las nociones de múltiplo y divisor.

Si $a \times b = c$ con a y b números naturales distintos de cero, resulta que

c es múltiplo de a y c es múltiplo de b

b es divisor de c y a es divisor de c

El abordaje de la divisibilidad como objeto de estudio ofrece, bajo ciertas condiciones, una buena oportunidad para profundizar el trabajo de argumentación que ya se viene haciendo con las operaciones. Las preguntas acerca de por qué un número es –o no es– múltiplo o divisor de otro remiten a considerar los números como tales, a “relaciones entre números” –y no entre cantidades–

lo que permite a los niños y niñas argumentar apoyados en lo que saben sobre la escritura de los números, sobre sus relaciones y sobre las operaciones, es decir realizar un tipo de trabajo argumentativo fundado en razones matemáticas.

En relación con los conocimientos que intervienen en los argumentos –por ejemplo “ser divisible por 4”– nos preguntamos: ¿qué conocimientos intervienen? ¿La idea de dividir por 4 con resto 0? ¿La de dividir dos veces por 2, es decir hacer: 2, :2 con resto cero en ambos casos? ¿Cómo se reconoce sin operar si un número es divisible por 4? ¿Tiene relación con cómo se escriben los múltiplos de 4 en el sistema de numeración decimal?

Para pensar sobre múltiplos y divisores en tercero y cuarto grados

¿Cómo se va recorriendo el campo multiplicativo en los primeros años? Desde los primeros grados es esperable que los niños exploren situaciones

- en las que se trate de determinar la cantidad total de elementos a partir de varias colecciones de igual cantidad de elementos o
- en las que se trate de realizar repartos equitativos o no equitativos para conocer cuántos le corresponde a cada una de las partes o
- si se conoce lo que le corresponde a cada una de las partes, averiguar la cantidad de partes.

Para resolver estas situaciones, los niños/as que no tienen aún las “herramientas expertas”, exploran variados procedimientos (contar con palitos o dibujos, sumas o restas sucesivas) y es esperable que al resolver situaciones que involucran tablas con series proporcionales los/as alumnos/as vayan avanzando a la escritura con multiplicaciones o divisiones.

El trabajo de completamiento de tablas en contextos significativos dará lugar posteriormente a la organización de la tabla pitagórica que luego se podrá usar como herramienta para resolver una variedad de problemas.

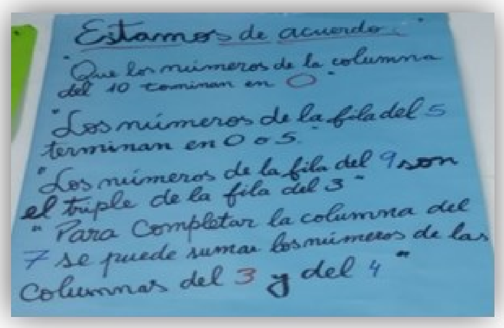
Tal como se plantea en muchos materiales y en los Cuadernos para el Aula, Matemática 3 (pág. 85) es posible armar la tabla pitagórica completando unas tablas a partir de otras. Hemos visto que este trabajo de completamiento está íntimamente ligado a las propiedades de la multiplicación. Pero la tabla pitagórica también se puede constituir en un recurso a la hora de dividir para que los niños/as establezcan la relación entre esta operación y la multiplicación y entiendan a la división como la operación que permite hallar el factor desconocido en una multiplicación. Se trata de discutir ¿cómo proceder para hacerlo? ¿Qué pasa cuando en la columna del otro factor no encuentro el producto? ¿Debo usar el más cercano o el menor?

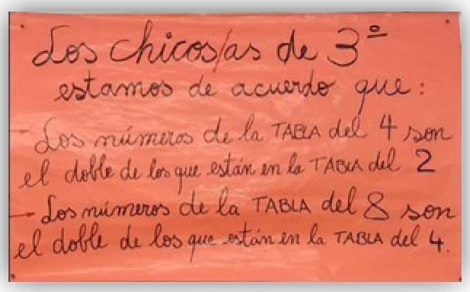
En este trabajo de búsqueda de resultados de productos como así de repartos o particiones equitativas podemos reconocer que los alumnos están buscando permanentemente múltiplos y divisores de números sin todavía referirse a ellos como tales.

Es importante señalar que, cuando trabajamos en la tabla pitagórica, aunque no siempre mencionemos los términos múltiplo y divisor, esas relaciones están implícitas. En efecto:

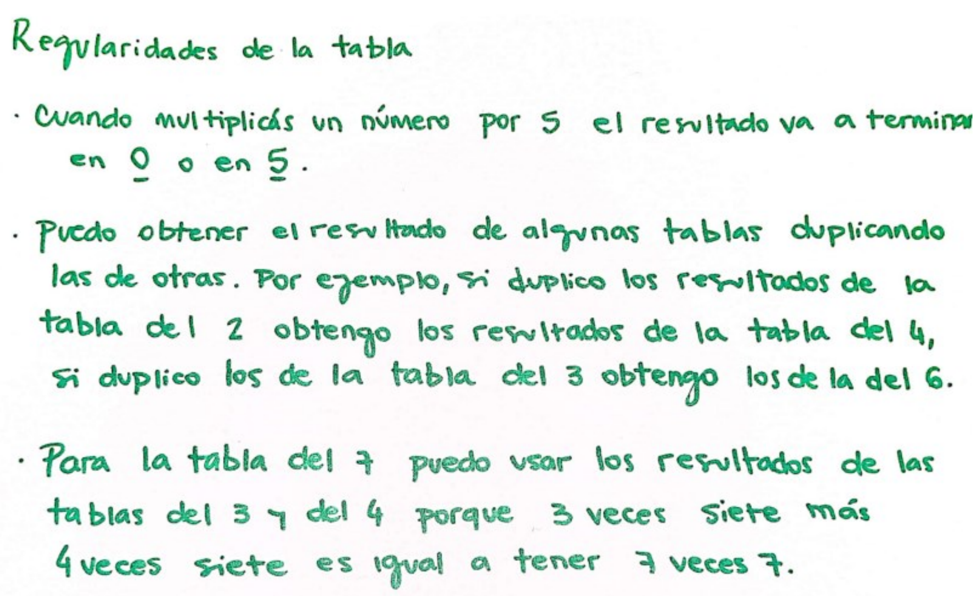
- Los números "de la tabla del …" son todos "múltiplos de …"
- Si se "sigue la tabla" de cualquier número con x11, x12, x13,… se obtienen más múltiplos de ese número.
- Cada uno de los números de la "tabla del … "es "divisible por …".
- En el caso de los números de la tabla del 2, tienen un nombre, son los pares.

En el aula se podrá disponer de una tabla pitagórica que permitirá a los niños apoyarse para la resolución de nuevas situaciones y también de carteles que sistematicen los nuevos conocimientos para guardar la memoria de lo producido como fuente de consulta y estudio.





Si un chico de 3ro que construyó el cartel "estamos de acuerdo" con sus compañeros necesita saber cuánto es 9 x 8, puede reconocer, por ejemplo, "los números de la fila del 8 son el doble de la fila del 4" y apoyarse en 9 x 4 = 36 para hacer el doble, lo que le permite resolverlo en forma autónoma. Luego, puede constatar que su razonamiento fue válido al buscar el resultado en la tabla pitagórica que se completó entre todos. Y también será posible, frente a la pregunta de "¿cómo sabes que lo que pensaste es correcto?" elaborar un argumento apoyado en las relaciones estudiadas.



Si analizamos este cartel y lo comparamos con los "estamos de acuerdo", podemos observar diferencias. La afirmación "puedo obtener los resultados de algunas tablas duplicando las de otras" evidencia un nivel mayor nivel de generalidad que los carteles "estamos de acuerdo". Es un cartel parecido producido por niños de grados superiores. En la primera afirmación, no es necesario poner el ejemplo sin embargo en la segunda, necesitan ratificar lo expresado de manera general con ejemplos.

Además del trabajo sobre la tabla pitagórica, es posible avanzar en la explicación de las relaciones entre un producto y sus factores, a partir del juego El gato. Si los niños y las niñas no lo conocieran, presentar el juego a fin de cuarto año o en el inicio de quinto, es una buena estrategia tanto para revisar el dominio del repertorio multiplicativo como para descubrir, explicar o sistematizar relaciones entre números.

Al jugar, en un primer momento, las niñas y los niños suelen centrarse en ocupar sus casilleros sin preocuparse por bloquear las jugadas de su contrincante y van reconociendo que tener memorizadas las tablas les permite obtener mejores resultados en el juego. Al avanzar, los niños intentan ocupar casilleros que le convienen al contrario y tratan de no dejar como factores aquellos números que son divisores de los números de esos casilleros. Para hacerlo, anticipan las jugadas, buscando distintas descomposiciones en factores de los números del tablero, es decir, piensan en los divisores de esos números y en cuántos divisores tiene cada uno.

> Cuando se está jugando, ¿qué casilleros del tablero conviene ocupar, los que tienen pocos o muchos divisores? ¿Por qué?

Este juego brinda, entonces, la posibilidad de utilizar los términos “múltiplo” y “divisor” y de reconocer que:

- todos los números del tablero son múltiplos de algunos de los números de la fila de factores.
- todos los números de la fila de factores son divisores de los números incluidos en el tablero de productos.

En los intercambios a propósito del juego podrán aparecer conclusiones tales como “hay números con más y otros con menos divisores” “hay números que son divisores de varios números”, “hay números que solo tienen dos divisores” “siempre se puede saber cuántos divisores tiene un número”.

Lectura sugerida

Se recomienda la lectura de las páginas seleccionadas del apartado "Plantear situaciones para analizar las relaciones de múltiplo y divisor" en el Cuaderno para el aula 5° y en el Cuadernos para el aula 6°. En ambos casos se desarrollan secuencias como así también se incluyen juegos como recursos.

Para pensar la división y la divisibilidad en 5to y 6to

Sabemos que, en la perspectiva de enseñanza que sostenemos, para cada noción matemática que enseñamos proponemos, en primera instancia, problemas para que la noción sea utilizada como instrumentos en la resolución y luego proponemos otros problemas en los que la noción se estudia en sí misma. En el caso de la divisibilidad, y aunque en tercero y cuarto año ya se enuncian algunas relaciones, es en 5° y 6° año cuando comienza a abordarse la divisibilidad como objeto de estudio.

Recreo

Antes de seguir con la clase les proponemos un recreo con algo de magia con la calculadora para probar, compartir y sorprender a sus alumnas y alumnos.

Piensen un número de 3 cifras y escríbanlo en la calculadora dos veces seguidas.

Dividan a ese número de 6 cifras por 13. Al resultado divídanlo por 11. Ahora dividan el número obtenido por 7… .podemos estar seguros de que ese es el número que pensaron.

No es magia…

Para explicar este truco piensen en las siguientes preguntas: Al escribir dos veces seguidas el número de 3 cifras elegido, ¿por cuánto está multiplicando al número pensado? ¿Cuáles son los factores primos de ese número?

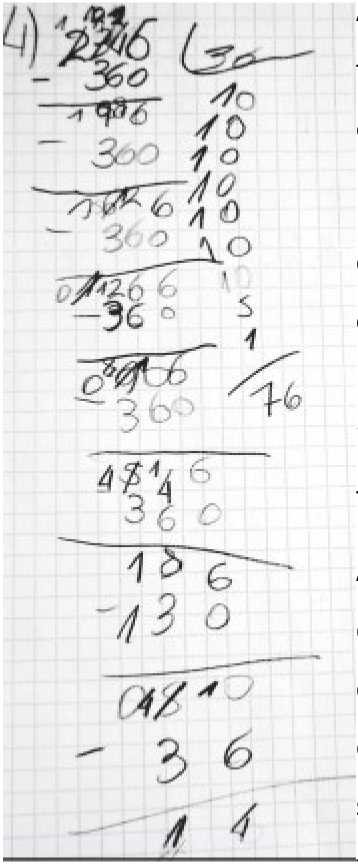
Las relaciones de múltiplo y divisor y la cuenta de dividir

En principio, es importante destacar que, para realizar divisiones con cualquier procedimiento, es necesario estimar el cociente. Para hacerlo recurrimos a la estimación y al repertorio conocido de múltiplos. La inclusión sistemática de la estimación y el cálculo mental de multiplicaciones y divisiones con números redondos es un apoyo muy necesario tanto para flexibilizar el cálculo como para explicitar relaciones entre números, realizar afirmaciones, formular conjeturas y explorar su validez.

Como planteamos al iniciar este módulo, y en la clase 1 del módulo 1, hoy no resulta prioritario insistir en el dominio de un algoritmo para calcular divisiones. Basta con estimar, usar la calculadora y poder realizar algún procedimiento con lápiz y papel teniendo control sobre el resultado.

Lectura obligatoria

En los Cuadernos para el aula, se presenta una progresión posible para el trabajo sobre la cuenta de dividir. En tercer año, en las páginas 81 a 84, en cuarto año en las páginas 95 a 99 y en 5to año, en las páginas 80 y 83. Descargar material del aula virtual.



Aunque prioricemos el trabajo sobre procedimientos personales, tampoco resulta eficiente que los algoritmos con lápiz y papel sean extremadamente largos.

Por una parte se puede perder control y, por otra, da cuenta de la falta de dominio de repertorio multiplicativo. Tomar la cuenta de dividir como objeto de estudio, para entenderla, para acortarla, a la vez que se analizan las propiedades de esta operación, es un primer paso del trabajo intramatemático sobre la división. En términos del valor formativo este trabajo es muy superior a la práctica del algoritmo tradicional.

Además, se trata de analizar en cuentas de dividir, distintas descomposiciones del dividendo y el divisor en las que es posible considerar múltiplos del divisor o divisores del dividendo como posibles estrategias de resolución. Se advierte aquí la profundización en el segundo ciclo del tratamiento de las propiedades de las operaciones que fundamentan los procedimientos de cálculo.

Consideremos la descomposición del dividendo. Para pensar en cómo hacer la división y también para estimar su resultado, es interesante discutir cómo descomponer el dividendo en sumandos y utilizar la propiedad distributiva de la división respecto a la suma. ¿Qué sumandos serán convenientes?

a) ¿Cómo conviene descomponer el dividendo para hallar el cociente de 1610:7?

(1400 + 210) : 7 *(1000 + 600 + 10) : 7*

b) Expliquen cómo lo pensaron

c) ¿Qué otras descomposiciones son posibles al dividir por 7 para que el resto sea 0? (Incluya alguna resta)

En el primer caso, (1400 + 210) : 7

se distribuye la división 1400 : 7 + 210 : 7 = 200 + 30 = 230

En el segundo caso, (1000 + 600 + 10): 7

1000:7	+	600:7	+	10:7
142	+	85	+	1 = 228
Sobran 6		sobran 5		Sobran 3

Se podría arribar a la conclusión “es conveniente descomponer el dividendo eligiendo que los sumandos sean múltiplos del divisor”. En caso contrario, se deberá trabajar con los restos parciales y analizar lo que sucede, lo que no resulta sencillo ni económico. Cabe destacar que esta descomposición es posible porque la suma o la resta de dos múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número.

Para seguir con el análisis de la cuenta se podrían formular preguntas para revisar si es posible descomponer en sumas –o restas– el divisor y obtener el mismo resultado, y arribar a la idea de que solo es válido descomponer el dividendo y no en el divisor.

Tomemos ahora las distintas descomposiciones del divisor en factores y cómo elegirlos ¿es conveniente elegir aquellos que permitan dividir exactamente al dividendo o siempre los divisores del divisor serán divisores del dividendo?

Nicolás está resolviendo estas divisiones con la calculadora y se le rompió la tecla del 1 ¿cómo puede resolver los siguientes cálculos?

3424 : 16 =

540 : 18 =

324 : 81 =

En esta actividad se busca que los alumnos expresen el divisor de otras formas. Por ejemplo, descomponiendo el divisor en productos e ir dividiendo sucesivamente por cada uno de ellos.

En el caso de 540 : 18 es posible

- Descomponer 18 en 2 x 9

540 : 2 = 270 270 : 9 = 30

- Descomponer 18 en 3 x 6

540 : 3 = 180 180 : 6 = 30

Es de destacar que si el divisor se descompone en productos en ninguno de estos casos habrá resto ya que, otra propiedad de la divisibilidad es que "si un número es divisor de otro, y éste lo es de un tercero el primero es divisor del tercero".

Otra posibilidad para estudiar la cuenta es proponer la búsqueda de un dividendo que sea múltiplo del divisor con un problema como el siguiente:

¿Cuánto agregarle o quitarle a 1013 para que al dividirlo por 4 de resto 0? ¿hay más opciones?

Al resolver este problema haciendo la cuenta los alumnos podrán descubrir fácilmente que el cociente es 253 y el resto es 1. Al introducir la pregunta sobre las opciones, y no indicar nada en relación con el cociente, los niños/as podrán reconocer que es posible restar 1 o sumar 3 al dividendo para obtener resto 0. Por tanto, 1012 y 1016 son dos respuestas, y ambos son múltiplos de 4.

Abrir la pregunta a la posibilidad de encontrar otros números apunta a reflexionar sobre los infinitos múltiplos de un número ya que es posible sumarle 4 reiteradamente para obtener nuevas respuestas.

Si algún alumno procediera a resolverlo con la calculadora, se trata de interpretar la relación entre el 1 del resto y el 0,25. Esto lo retomaremos en las próximas clases de este módulo.

Actividad matemática de la clase

Una extraña forma de dividir

Supongamos que queremos hacer una división, nos dejamos la calculadora en casa, no tenemos papel y lápiz a mano, necesitamos conocer el cociente entero, pero no nos importa nada el resto y el número por el que queremos dividir es el producto de dos o más números "pequeños". Por ejemplo, pensemos en 97 dividido 18, ya que 18 = 2x9 = 6x3 = 2x3x3.

En estas condiciones, existe una manera rápida y eficaz de efectuar la división.

Para dividir 97 entre 18, dado que 18 = 2x9, empezamos dividiendo 97 entre 2.

Lo hacemos mentalmente y encontraremos 48 como cociente.

Después dividimos 48 por el otro factor, 9, y hallamos 5.

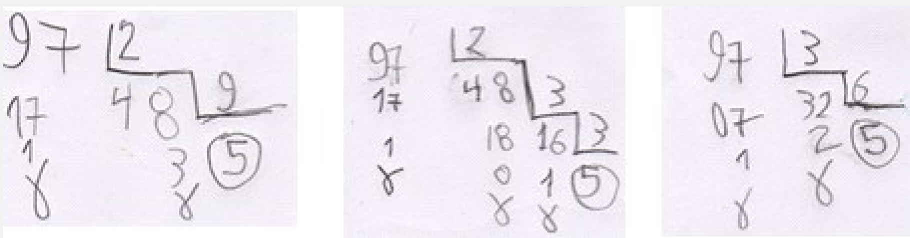
Luego 5 es el resultado de dividir 97 entre 18.

También hubiéramos podido utilizar que 18 = 3x6 y empezar dividiendo 97 entre 3, obteniendo 32, y luego 32 entre 6, obteniendo nuevamente 5 como cociente.

Curiosamente, el hecho de ignorar el resto de la división en cada uno de los pasos efectuados no afecta al resultado final.

a) ¿Funcionará siempre esta técnica? ¿Por qué?

b) Tres chicos calcularon 97:18 con el método que se explicó antes.



Aunque todos tienen el mismo resultado final (5), en sus cuentas no les da el mismo resto. ¿Cómo se puede saber cuál es el resto de 97:18 utilizando las cuentas que hicieron los chicos?

c) ¿Funcionará ese procedimiento para cualquier división?

Al final de la clase encontrarán indicaciones para la participación.

Las relaciones de múltiplo y divisor y la exploración de la validez de distintas afirmaciones

Una diferencia señalada en los Cuadernos para el aula entre el primero y el segundo ciclo de la escuela primaria apunta a que en el segundo ciclo "… es importante también que los alumnos comiencen a analizar el nivel de generalidad que tienen sus respuestas a los problemas que resuelven".

En matemática, las generalizaciones son una forma de construir el conocimiento que permite la elaboración de leyes, reglas o propiedades que se dan en un grupo de objetos matemáticos bajo ciertas condiciones.

Por ejemplo, podemos plantear cómo reconocer si un número es múltiplo de otro sin necesidad de hacer la división para saber si el resto es 0. Y, una vez advertida una regla para reconocerlo, justificar por qué funciona.

Por ejemplo, al completar la tabla pitagórica es probable que los niños hayan comenzado a hacer algunas afirmaciones intuitivas tales como "todos los de la columna del 10 terminan en 0, ó "los de la columna del 5 siempre terminan en 0 o en 5". También podrán reconocer que en la tabla del 2, se suceden en la última cifra 2, 4, 6, 8, 0.

Si bien estas afirmaciones evidencian reglas válidas, sólo nuestras intervenciones les permitirá hacerlo evidente. En 5to grado es posible retomar estas relaciones a través de preguntas tales como

a. Los números que terminan en 0 ¿de qué número son múltiplos? ¿Y los que terminan en 5?

b. Los números múltiplos de 2 ¿pueden terminar en 3? ¿en 8? ¿en 5? ¿Por qué?

c. Escribí la lista de los números en los que puede terminar un múltiplo de 2.

¿Cómo se justifican los criterios en los que es necesario “mirar” la última cifra?

Los/as niños/as podrían avanzar en el análisis de los criterios de divisibilidad a partir de problemas tales como:

Analiza las explicaciones de cada niño para afirmar que un número es divisible por 10 si termina en 0 e indica con quién estás de acuerdo

- Nina sostiene que si se descompone el número

2340 = 2 x 1000 + 3 x 100 + 4 x 10

o lo que es lo mismo

2340 = 2 x 10 x 10 x 10 + 3 x 10 x 10 + 4 x 10

cada uno de los sumandos es múltiplo de 10 por tanto el número lo es.

- Simón sostiene que si un número termina en cero es múltiplo de 10 porque si se descompone un número en forma multiplicativa el mismo puede expresarse como

2340 = 234 x 10

Ambas explicaciones son válidas, en un caso se apoya en la descomposición de los números y en la propiedad de que la suma de múltiplos de un número también es múltiplo de dicho número en tanto que la otra recurre a una descomposición multiplicativa ya que todo número que termina en cero puede expresarse como a x 10.

En el caso del criterio de los números terminados en dos ceros se puede recurrir a las mismas explicaciones.

A partir de la puesta en común del problema anterior se podría solicitar a los niños que avancen en el análisis del criterio del 5.

¿Cómo podés explicar que “Un número es divisible por 5 cuando termina en 0 o en 5”?

Retomando lo visto para el criterio del 10 se puede afirmar que todos los números terminados en 0 son divisibles por 5 porque son divisibles por 10. Como 10 = 2 x 5. Entonces 2340 = 234 x 10 = 234 x 2 x 5 o bien 2340 = 2 x 1000 + 3 x 100 + 4 x 10

Ahora faltaría analizar los números terminados en 5

Todos los números terminados en 5 se pueden expresar de la siguiente manera

2345 = 234 x10 + 5.

Usando la propiedad de que la suma de dos números múltiplos de un número también es múltiplo de dicho número podríamos decir que 234 x 10 es múltiplo de 5 porque 234 x 2 x 5 y 5 es múltiplo de 5. Por tanto 2345 también es múltiplo de 5.

Cabe señalar que siempre está el recurso de descomponer aditivamente el dividendo para saber si es múltiplo de otro número. Esto puede ser usado en casos de olvido o en los casos en los que no se conocen los criterios.

Para números cuya regla no depende del valor de la última cifra, no es sencillo construirla. En 7° grado es posible ensayar con los alumnos la producción de la justificación de la regla de divisibilidad por 4 que permite usar la descomposición aditiva que ya se usó.

En relación con los tipos de explicaciones que se producen en la clase, y a cargo de quién están, coincidimos con Chemello y Crippa (2013) cuando afirman:

> *"Pensemos que, hasta hace un tiempo, en la mayoría de las clases el docente era el responsable de la legitimidad y la validez de lo que se construía, el que decía lo que estaba bien y lo que estaba mal, lo que hacía que muchos alumnos pensaran que no tenían que hacerse cargo de la validez de sus producciones. Para superar esta dificultad es necesario gestionar situaciones de enseñanza que devuelvan la responsabilidad matemática de las producciones a los alumnos, es decir, que en cierto sentido el docente "no participe de la toma de decisiones durante la resolución del problema propuesto, favoreciendo la construcción de procedimientos originales y pruebas autónomas por parte de los alumnos".*

Por ejemplo, ¿cómo sabemos si es válida la afirmación siguiente? : “La suma de dos números pares siempre será par, divisible por dos.” ¿Qué pasará con la suma de un número par y otro impar? ¿Y si se suman dos números impares?

Para analizar cada uno de los casos, en un primer momento, podríamos poner una gran variedad de ejemplos y podríamos concluir que la afirmación es válida. También podríamos responder las dos preguntas: “la suma de un número par y otro impar será siempre impar” y “la suma de dos números impares será siempre par”. Sin embargo, en matemática, los ejemplos no bastan para sostenerlo. Decimos que “muchos ejemplos no son suficientes para asegurar la verdad de una proposición”.

También podríamos recurrir a expresiones con letras para tratar de responder las preguntas, pensando, por ejemplo, que la letra a represente a cualquier número par –y por lo tanto a todos ellos ya que cualquiera puede tomar el lugar de a– y la expresión a+1 represente a cualquier número impar que, en este caso será el siguiente de a y, como a es par, a+1 será impar pues en la serie numérica a todo número par le sigue un impar.

En nuestros tres casos:

- Para la suma de dos pares: si a es par entonces a + a es par
- Para la suma de un par con un impar: si a + 1 es impar entonces a + a + 1 = 2a + 1 es impar (porque 2a es par y 2a + 1 es el siguiente de 2a)
- Para la suma de dos impares: si a + 1 es impar entonces a + 1 + a + 1 = 2 a + 2 es par (porque 2a es par y se suman 2 que es 2a + 2 es el siguiente del siguiente)

¿Cómo podríamos plantear a nuestros alumnos de primaria el pedido de formulación de explicaciones?

> *Sebastián dice que cuando se suman dos números impares el resultado es un número par. ¿Te parece que tiene razón? ¿Por qué?*

Ante este problema un/a niño/a podría afirmar que “si a un impar le saco uno se convierte en par y ese uno se lo sumo al otro impar para hacerlo par y sabemos que la suma de dos pares es siempre par”. Otro niño podría decir “impar más impar siempre va a dar par, porque un impar tiene uno más que el par, entonces si sumás dos impares ahí se forman dos, dos unos que se suman y forman un par”.

Se trata de que promovamos que los/as niños/as formulen “explicaciones” de cómo lo pensaron, elaborarán enunciados que serán sometidos al debate con sus compañeros. Estas explicaciones, según el planteo de Balacheff, pueden ser consideradas como “pruebas” para el conjunto de la clase cuando hayan sido debatidas y aceptadas como válidas. En este sentido, es interesante tomar en cuenta la diferenciación que hace Balacheff (1987) entre una explicación y una prueba.

> *“Nosotros llamamos explicación a un discurso con vistas a volver inteligible el carácter de verdad, adquirido por el locutor, de una proposición o un resultado. Estas razones pueden ser discutidas, refutadas o aceptadas.*
>
> *Llamamos prueba a una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. Esta decisión puede ser el objeto de un debate cuya significación es la exigencia de determinar un sistema de validación común a los interlocutores”.*

A partir de esta cita podemos reconocer que en el aula de la escuela primaria se trata de avanzar en el pedido de explicaciones convirtiéndolas en pruebas con carácter de verdad para un grupo determinado.

En la medida en que desarrollemos en las aulas un trabajo matemático en el cual los niños se inicien en la necesidad de dar explicaciones sobre sus producciones acerca de “cómo lo hicieron” y en la posibilidad de dar razones de “por qué consideran que lo realizado vale”, se estará avanzando tanto en su autonomía respecto del control de lo realizado como en el establecimiento de pruebas.

Actividades de la clase

Actividades obligatorias:

Actividad matemática de la clase

Recomendaciones para la participación en el foro

Se espera que participen en el foro con dos intervenciones:

- compartiendo sus registros e ideas,
- seleccionando un aporte de otro colega, ampliando, refutando o expresando su opinión al respecto.

Actividad didáctica de la clase

María Elsa, maestra de 6to, ya trabajó con sus alumnos

*distintas descomposiciones aditivas de los números naturales.

*cómo identificar los números que son múltiplos de 2, de 5 y de 10.

*las explicaciones de, para cada uno, por qué valen los criterios de mirar la última cifra (pueden encontrar algunas explicaciones en esta clase)

Propone entonces la actividad siguiente en grupos de 4

a) Escriban veinte números múltiplos de 4, comenzando con los de la tabla del 4. ¿Cómo están seguros de que son múltiplos de 4?

b) Juan Manuel dice que, para saber si un número es múltiplo de 4, él sólo mira si el número formado por las dos últimas cifras es múltiplo de 4. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Juan Manuel? ¿por qué?

1. Escriban al menos dos procedimientos para resolver el **ítem a** que podrían producir sus alumnos. Expliquen qué podrían haber pensado al producirlos

2. En el ítem b ¿qué explicaciones podrían producir sus alumnos respecto a lo que dice Juan Manuel (sin repetir el criterio de divisibilidad por 4)?

3. Indiquen una explicación general sobre por qué funciona la regla que enuncia Juan Manuel.

Recomendaciones para la entrega

- El trabajo deberá realizarse en formato word (Texto justificado, fuente: arial - calibri tamaño 11, no transcribir las consignas de la actividad)
- No podrá extenderse más de dos carillas. Incluir un encabezado con los siguientes datos: Nombre de la Actualización, Nombre de la actividad y clase, nombre del cursante y nombre del tutor (4 renglones, en la misma fuente y tamaño de letra que el cuerpo del texto)
- Todas las citas y referencias bibliográficas deben ser realizadas de acuerdo a las normas APA.
- Deberán entregar el documento en este BUZÓN DE ENTREGA con la denominación: "Apellido_Nombre_Actividad_obligatoria_Clase_2_Aula XX"

Actividad optativa:

Recuerden que tienen a disposición en el menú lateral izquierdo, este espacio para consultar todo lo que necesiten.

Bibliografía de referencia

- Balacheff, N. (1987) *Procesos de prueba y situaciones de validación.* En Educational Studies in Mathematics 18. Pp 147-176
- Corujo, M; Damisa, C; Easton V y Méndez V. (2020) *Racionalidad escondida. La generalización en la matemática escolar.* Montevideo: Ed Grupo Magro Editores

- Chara, Silvia (2012) *Propuestas para la enseñanza en el área de Matemática ¿Cómo mejorar las estrategias de cálculo con números naturales? El juego como un recurso de enseñanza.* Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación (Más tiempo, mejor escuela)
- Chemello, G y Crippa, A. (2013) "Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible?" En: AAVV Enseñar matemáticas en la escuela media. Buenos Aires: Editorial Biblos
- MECyT, Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente (2006). *Matemática 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Serie Cuadernos para el aula*. Buenos Aires. Ministerio de educación de la Nación
- Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires (2018). *Progresiones de los aprendizajes. Matemática*. Segundo ciclo. Descargar material del aula virtual

Créditos

Autores: Chara, Silvia

Cómo citar este texto:

Chara, Silvia (2022). Clase Nro.2: Relaciones entre números, formas de validar. Módulo 3: Temas de enseñanza de Número y Operaciones. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 3: Naturales y racionales, rupturas y continuidades

Bienvenida a la clase

¡Bienvenidos/as a esta tercera clase! En esta oportunidad y también en la clase siguiente trabajaremos sobre un nuevo campo numérico: los racionales.

Una buena pregunta que podríamos plantearnos es: ¿qué implica conocer los números?

En el *Cuaderno para el aula* de 6to año se afirma que

"Conocer los números implica no sólo conocer los modos de referirse a ellos en forma escrita u oral, es decir, sus representaciones (con símbolos numéricos, en la recta numérica, etc.), sino también sus propiedades, las relaciones que pueden establecerse entre ellos (de orden, aditivas o multiplicativas), cómo intervienen en los cálculos, cómo se usan en las operaciones que resuelven problemas y, más adelante, el tipo de estructura que forman".

En el primer ciclo de la escuela primaria los niños/as trabajan fundamentalmente con el campo de los naturales y construyen ciertas certezas acerca de esos números: "cada número tiene un siguiente", "entre 3 y 4 no hay ningún número", "a mayor cantidad de cifras el número es más grande", "si dos números tienen igual cantidad de cifras, el primero es el que manda". Algunas certezas podrán extenderse al campo numérico de los racionales y otras serán cuestionadas.

A partir de operar con los números naturales, los niños/as podrían afirmar que "al sumar y multiplicar números distintos de 0 siempre se obtiene un resultado igual o mayor a los números involucrados", “al restar o dividir se obtiene un resultado menor”. Cabe preguntarnos: ¿qué pasa con las operaciones en el nuevo campo numérico?

También nos preguntamos por los significados de las operaciones. En el campo de los naturales, por ejemplo, la suma puede usarse al resolver situaciones de juntar y agregar o la división en situaciones de reparto, partición o iteración. ¿Cuáles de estos significados pueden extenderse y cuáles no al operar con los números racionales?, ¿cuáles son los contextos que le dan sentido a las operaciones en este campo?

En esta clase nos ocuparemos de analizar qué aspectos de los números naturales y de las operaciones entre ellos se pueden extender al campo de los racionales y también qué aspectos se constituyen en rupturas. Al enfocarnos en ellas podremos pensar mejor la enseñanza y entender cuáles son algunos de los obstáculos que enfrentan los niños/as al adentrarse en este nuevo campo numérico.

Dos campos numéricos y un recorrido escolar

Sobre los números naturales, presentamos en la escuela, desde el inicio, situaciones donde se usan para contar, ordenar y calcular y la serie numérica en distintos tramos. En cuanto a la forma de representarlos sabemos que, en la historia de la humanidad, es posible rastrear los distintos sistemas de numeración que fueron creados por distintos pueblos con diferentes símbolos y reglas. Si bien nuestro sistema de numeración se estudia desde el inicio de la escolaridad, recién en el segundo ciclo se lo toma como objeto de estudio y se reflexiona sobre sus características a partir de compararlo con otros sistemas tales como el romano, el egipcio y el maya.

Sobre los números racionales, podemos preguntarnos: ¿en qué situaciones se utilizan? ¿Qué es un número racional? ¿Qué diferencias existen entre estos números y los naturales? ¿Y qué diferencias hay entre las fracciones y los números decimales?

Los números racionales permiten algo que con los naturales está limitado. Los naturales son suficientes para expresar algunos cocientes, como 12 : 4 = 3, pero no para expresar cocientes como 3 : 4 ó 15 : 4. De manera general, podemos decir que:

Un número racional es el que puede expresarse como cociente entre dos números enteros, con la restricción de que el divisor sea distinto de cero.

Esto se debe a que cualquier número n . 0 = 0 y no es posible encontrar ningún número qué multiplicado por 0 dé como resultado n.

En los NAP se plantea el inicio del trabajo con fracciones y decimales en situaciones donde haya que expresar repartos y medidas y que se tome al número racional como objeto de estudio, según la jurisdicción, en el último grado de la primaria o a partir del primer año de la escuela secundaria en la que se reconoce la interpretación del número racional como un cociente. Este estudio tendrá que apoyarse sobre los conocimientos que los niños/as fueron construyendo acerca de las fracciones y los números decimales desde 3° y 4° grado de la escuela primaria.

El conocimiento de los números racionales requiere de un proceso largo de aprendizaje que recorre y trasciende la escuela primaria.

Cuando se aborda en el nivel secundario, se delimita el campo de los racionales, pues una de las novedades es el estudio de situaciones que no pueden resolverse con estos números y requieren de un nuevo campo numérico, el de los números irracionales. Un ejemplo es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro (pi) y otro es la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado (V2), en ambos casos esas razones no pueden escribirse con un cociente de dos números enteros.

El recorrido requiere, entonces, la producción de proyectos interciclo e interniveles a fin de acordar los contenidos que se abordan en cada uno como “nuevos” y cuáles serán los apoyos posibles en aquellos que se han trabajado en años anteriores, tomando en cuenta los problemas que se han resuelto, el tipo de tareas abordadas, las representaciones conocidas, las propiedades y operaciones que se han tratado, las conclusiones que se han podido sistematizar.

Sobre los usos de los números, sus significados y representaciones

Consideremos cada uno de los aspectos señalados.

Usos

El punto de partida planteado para las fracciones en 3° grado de la escuela está ligado a su uso social como expresiones de una medida, asociados a los medios y los cuartos de las unidades de masa y de capacidad utilizados en la vida cotidiana. Cabe resaltar que se incluye, en los NAP, en el eje de Medida y no en el de Número y Operaciones. Estas primeras situaciones en las que se trata de reconocer que representa lo mismo ½ que dos de 1/4 y que 4 de ¼ es lo mismo que 1. Sabemos que no es lo mismo una porción que corresponde a la mitad que dos porciones de cuartos, aunque las cantidades representadas sean equivalentes. Reconocer que un número racional puede representarse con muchas fracciones diferentes (1/2 = 2/4 = 5/10, etc.) implica un cambio considerable en relación con los números hasta ahora conocidos.

En el caso de los números decimales, se inicia en 4° año con su uso para expresar medidas de partes cada vez más pequeñas de una unidad (longitud, capacidad, peso, etc.). Cabe destacar que en estos casos se utilizan dos lugares decimales. Hasta hace poco tiempo, el manejo de las monedas facilitaba otro contexto de uso. Estas primeras experiencias están aún lejos de poner en evidencia la complejidad de este campo numérico, en particular la existencia de infinitos racionales entre otros dos.

Es importante señalar que, si bien tanto las fracciones como los decimales pueden expresar un mismo número racional, al trabajar en contextos extramatemáticos, el uso social ha asociado ciertas escrituras fraccionarias o decimales a determinados contextos. Hoy podemos afirmar que el uso de las fracciones es más acotado. Por ejemplo, al hablar de tiempo es habitual usar ¼ de hora y no 0,25 hora, o ½ día y no 0,5 de día. Esto también sucede al expresar la compra de ciertas verduras y frutas o bien el helado. La expresión decimal prevalece en muchas más situaciones extra matemáticas.

Más allá de la lectura, en experiencias de medición, se puede reconocer una continuidad con los números naturales para expresar el valor numérico de la medida. También hay una novedad cuando la unidad no entra un número de veces exacto en la cantidad a medir y hay que encontrar un modo de expresar esa medida.

Otra novedad en relación con los usos de los números racionales es la posibilidad de avanzar en la expresión del cociente exacto de dos números enteros cualesquiera. Tal es el caso de 10 : 4 = 2 ½ = 2,5

Significados

En la bibliografía didáctica, muchos autores coinciden en identificar, en función de los tipos de situaciones que se pueden resolver, los siguientes significados: parte-todo, reparto, operador, medida y razón. Estos se pueden identificar en los NAP, tanto de 2° como de 3° ciclo.

Fracción como parte-todo: está pensada como división de una unidad en n partes y tomando m de ellas. La unidad puede ser una cantidad continua que usualmente en la escuela puede representarse gráficamente con figuras de distintas formas: círculos, rectángulos, cuadrados u otras sin denominación específica. También la unidad puede ser un conjunto de elementos.

Fracción como reparto: surge de dividir una cantidad m entre n partes cuando el resto es distinto de 0 y tiene sentido seguir dividiendo el resto, es necesario hacer una partición de las unidades que lo componen. También se expresan con fracciones los repartos en los que m es menor que n.

Fracción como operador: pensar en el operador m/n como una combinación de dos transformaciones realizadas sobre una cantidad: una división por n y una multiplicación por m, donde m y n son números sin unidad (escalares) y las dos operaciones pueden ser realizadas en cualquier orden

Fracción como medida: surge de comparar dos cantidades m y n para saber cuántas veces entra n en m, tomando n como unidad, o cuántas veces entra m en n, tomando m como unidad

Fracción como razón: está pensada como cociente entre dos números o dos cantidades que pueden ser de la misma o distinta magnitud.

En términos generales, salvo en el caso de las fracciones como operadores, todos los otros significados remiten a la idea de cociente entre números o entre cantidades.

La noción de fracción se va construyendo a partir de usarlas para resolver conjuntos de problemas en los que se presentan los diferentes significados. Cada uno de ellos aporta a la construcción de su sentido.

Trabajar la fracción como parte-todo es un contexto útil para reconocer fracciones menores que la unidad, discutir sobre la cantidad de partes y el tamaño de las mismas, reconocer que distintas formas pueden representar lo mismo de un entero porque con cierta cantidad de ellas se forma un entero.

Al trabajar las situaciones de reparto se pueden abordar las fracciones menores o mayores que la unidad y, en este último caso, expresarlas como número mixto o como fracción, por ejemplo, 1 ¼ y 5/4.

Abordar problemas de la fracción como operador supone calcular una parte de una cantidad. Reconocer que al hacer 2/3 de 12, es lo mismo averiguar la tercera parte de 12 y luego duplicarla, que duplicar 12 y luego hacer la tercera parte. Del mismo modo, si fuera una fracción de una fracción como en 2/3 de 4/5.

En el caso de la fracción como medida es posible proponer actividades que requieran medir cantidades de distintas magnitudes y encontrar nuevas unidades, más pequeñas, para expresar el valor numérico de la medida.

Al considerar las fracciones como razones, se trata de considerar que es un único número que expresa la comparación entre dos magnitudes del mismo tipo (escala, porcentaje) o distinto tipo (velocidad, concentración)

Como docentes, sabemos que es necesario presentar a lo largo del recorrido escolar distintos conjuntos de problemas asociados a los distintos significados para que los alumnos puedan ir construyendo su sentido y que, si pueden reconocer y comprender alguno de ellos, no implica que puedan hacerlo con los demás.

Representaciones

Con los números naturales, a partir de distintas propuestas, los niños van reconociendo que la forma de nombrarlos –la designación oral– y la escritura convencional con cifras, son formas de representación de esos números así como los iniciales dibujos de colecciones y las distintas descomposiciones aditivas y multiplicativas posibles.

Una de las mayores dificultades que presenta el campo de los racionales en relación con los naturales es la variedad de representaciones, tanto numéricas como gráficas, que puede asumir un mismo número racional.

En el caso de las fracciones, hay cocientes equivalentes que definen un mismo número racional, es decir, distintas fracciones equivalentes corresponden al mismo número. Además, es posible representar las fracciones a través de distintos gráficos (círculos, cuadrados, rectángulos), con expresiones decimales, como punto en la recta numérica y en su relación con los porcentajes.

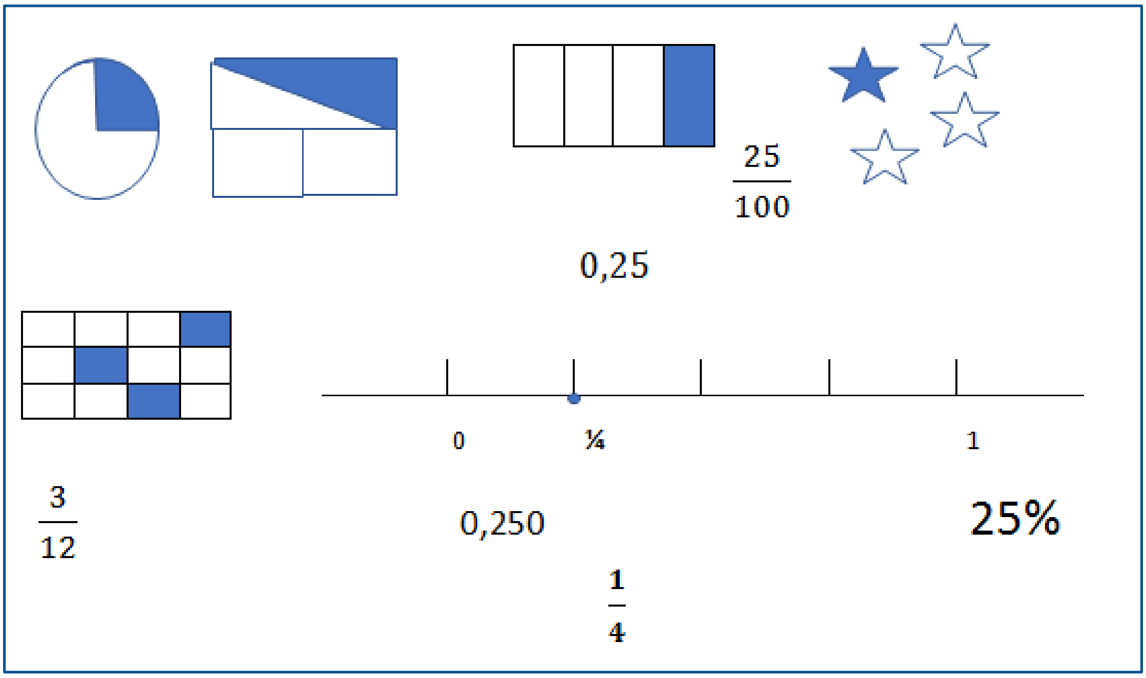
La designación oral o escrita de las fracciones no representan dificultades para los niños. Sin embargo, es necesario diferenciar, por ejemplo, que 3/4 es lo mismo que 3 de ¼ porque ¼ + ¼ + ¼ = ¾ pero no es lo mismo que 3 ¼ y que al leerlos en un caso se dice “tres cuartos” y en el otro “tres y un cuarto”. Además, es posible reconocer la igualdad entre 3 ¼ y 3+1/4, es decir, que a veces se puede incluir o no el signo +.

En cuanto a la lectura y escritura de las expresiones decimales es importante puntualizar que se trata de una extensión de las reglas del sistema de numeración decimal y por ello si bien inicialmente se expresan en su contexto “tres pesos con 25 centavos” y no “3 con 25” luego, al descontextualizar, se expresan mencionado sus valores relativos: “3 enteros, 2 décimos y 5 centésimos” o bien “3 enteros y 25 centésimos”. Al trabajar sobre la equivalencia de estas formas de nombrarlos se favorece la comprensión del valor posicional de las cifras.

La representación de los números racionales en la recta numérica, si bien resulta un recurso útil para comparar estos números entre sí y con los naturales y establecer equivalencias entre ellos, genera ciertas dificultades a los niños. Es que, a la vez que cada punto representa un número, también ese número resulta la distancia al cero en la escala elegida.

El trabajo con las distintas representaciones y la posibilidad de interpretar cada una y transformarla según interese a la situación, permite a los alumnos ir diferenciando el número como objeto matemático de las formas de expresarlo.

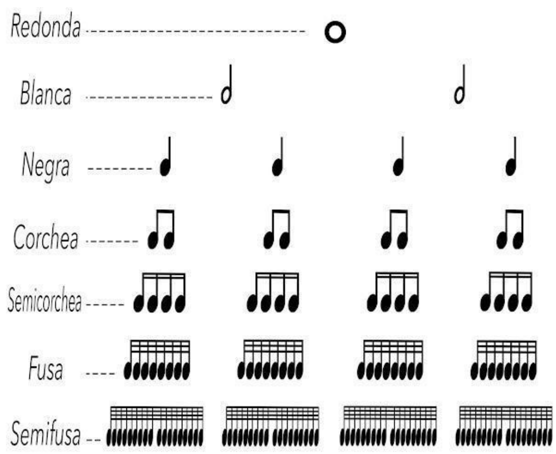
El trabajo sobre los significados y representaciones de las fracciones aporta a construir la idea de que las fracciones son un nuevo tipo de número y no “dos números naturales separados por una raya”. Se trata de números que se definen como un cociente.



Lectura sugerida

Con respecto a los números racionales, una mirada sobre el origen de las fracciones y de los decimales para conocer qué problemas permitieron resolver y cómo aparecieron sus representaciones numéricas, nos permitirá enriquecer las decisiones didácticas que se pueden tomar al proponer las actividades para el aula. Para profundizar, recomendamos "Para analizar las relaciones entre los números y entre las representaciones", en el Cuaderno para el aula de 6to, (p. 38 a 41).

Antes de avanzar, les proponemos hacer un recreo para explorar un uso de las fracciones en el ámbito de la música que seguramente muchas y muchos de ustedes ya conocerán.



Las figuras que se usan para representar la duración de los sonidos en el tiempo en una partitura se organizan de este modo:

blanca = 1/2 redonda

negra = 1/4 redonda

corchea = 1/8 redonda

semicorchea = 1/16 redonda

Las y los invitamos a descubrir estas equivalencias disfrutando de esta animación de una obra muy conocida para 4 instrumentos de cuerda, el Canon de Pachelbel (1680). En ella se puede observar cómo los instrumentos inician con blancas y luego se van superponiendo negras, corcheas y semicorcheas. Los colores nos permiten identificar los distintos instrumentos y los tamaños de los cuadraditos las equivalencias entre figuras.
https://www.youtube.com/watch?v=CHbmS2boS-g

Propiedades de los números: discretitud y densidad

Para los números naturales es posible encontrar siempre el número siguiente y además reconocer, por ejemplo, que entre 4 y 7 están el 5 y el 6 y entre 4 y 5 no hay ningún natural. Para los números racionales estas afirmaciones no son válidas porque siempre es posible encontrar un nuevo número racional entre otros dos que se elijan. Decimos que el conjunto de los naturales es discreto y que el de los racionales es denso.

La idea de densidad si bien se comienza a abordar en la escuela primaria resulta muy compleja pues no es intuitivo imaginar que entre dos números hay otros infinitos números y, entre cualquier par de los nuevos, también sigue habiendo infinitos números. Y esto de manera recursiva. Esto resulta en un cambio sustantivo en cómo los chicos vienen pensando los números y sus propiedades.

¿Cuándo y cómo abordar la idea de densidad con las niñas y los niños?

La posibilidad de encontrar algunos números racionales entre otros dos, para luego pensar si los encontrados son únicos o hay otros, requiere de un trabajo previo. Por ejemplo:

- haber transitado por actividades que permitan pensar cada número con diferentes representaciones y conocer las formas de comparar esos números, que será distinta si se trata de fracciones o de decimales.
- haber comparado fracciones con diferentes criterios para llegar a la idea de que una forma de comparación que siempre funciona es transformarlas en otras equivalentes con igual denominador.
- haber comparado expresiones decimales con diferentes criterios para llegar a la idea de que es conveniente transformarlas de modo que ambas tengan el mismo número de cifras decimales.

Este trabajo, del orden de lo intramatemático, es para el fin del segundo ciclo y requiere de acuerdos entre los docentes ya que realizarlo sin antes haber afianzado un cierto dominio de las escrituras y comparaciones no permitirá que los niños y niñas construyan un primer sentido para la idea de densidad.

Actividad matemática de la clase

Consideren la propuesta de una maestra de 5to año, luego de que sus alumnos jugaran varias veces a la Guerra de fracciones.

Ella planteó una actividad para después de jugar en la que los chicos debían buscar la fracción mayor entre las siguientes:

3/5 2/6 3/4 2/3

Al analizar las respuestas sobre ¿Cuál es la mayor? ¿Por qué?, surgieron las explicaciones siguientes:

Juan *“Primero comparé 3/5 y 3/4, 3/5 es menor que 3/4 porque al dividir la misma cantidad en más partes, los pedacitos que obtengo son más chiquitos. De la misma manera comparo*

2/6 y 2/3 y llego a que 2/6 es menor que 2/3. Entonces me queda por comparar 3/4 y 2/3, y me fijo en cuánto le falta a cada una de las fracciones para llegar al entero, a 3/4 le falta 1/4 y a 2/3 le falta 1/3. Como 1/4 es menor que 1/3 entonces 3/4 es más grande que 2/3."

Joaquín *"Yo lo hice igual que Juan pero me di cuenta que 2/6 es equivalente a 1/3 y 1/3 es más chico que 2/3. 3/5 y 3/4 los comparé como él."*

Santiago *"3/5 es mayor que 2/6 porque, como 1/6 es menor que 1/5, tener 3 veces 1/5 es más que tener 2 veces 1/6. Después comparé 3/5 y 3/4, y 3 veces 1/5 es menos que tener 3 veces 1/4, entonces 3/5 es menor que 3/4. Después comparé 3/4 y 2/3 y vi que tener 3 veces 1/4 es más que tener 2 veces 1/3 porque aunque 1/4 es más chico que 1/3, tengo más cuartos que tercios."*

Nicolás "3/5 y ¾ son lo mismo, hay guerra Nosotros dibujamos (pasa y hace el dibujo en el pizarrón)"

En el pizarrón quedó el registro siguiente

Juan

3/5 < 3/4 2/6 < 2/3

¾ + ¼ = 1 2/3 + 1/3 = 1

¾ > 2/3

Joaquín

2/6 = 1/3 y 1/3 < 2/3

—--------------------------------------

Santiago

3/5 > 2/6

1/6 < 1/5 y 3 veces 1/5 > 2 veces 1/6

⅗ y ¾

⅗ < ¾ porque 3 veces ⅕ < 3 veces ¼

—--

¾ > 2/3

3 veces ¼ > 2 veces 1/3

Aunque ¼ < 1/3 porque 3>2

Nicolás

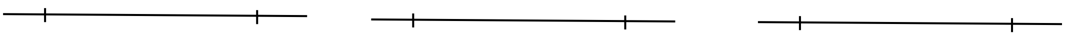
3/4

3/5

a. Analicen los argumentos de los alumnos y decida si son o no correctos
b. ¿Cómo se puede formular un criterio general para comparar fracciones derivado de estos diálogos?

Para encontrar números entre otros dos dados, y si las alumnas y los alumnos han trabajado antes sobre recta numérica, para el caso de las fracciones se podría proponer, por ejemplo:

Intercalá 3 números entre los indicados



2 4 ¼ ¾ 2,3 2,4

La decisión de incluir tres números en cada caso dispara el conflicto, en el primer caso además del 3 se verán obligados a incluir otros dos que podrán ser fracciones o decimales. En el segundo caso además de 2/4 o ½ es posible proceder a transformar los cuartos, por ejemplo, en octavos. En el tercer caso convendrá transformar los décimos en centésimos.

En el primer caso, para pensar otros números además del 3, sería posible considerar por ejemplo 2½ o 2,5 y 3 ½ ó 3,5. Sin embargo si se solicita sólo el uso de otras fracciones y no de números mixtos o decimales, se requiere pensar el 2 como 4/2 ó 6/3 por ejemplo y el 4 como 8/2 ó 12/3. Esto permitiría reflexionar acerca de la consideración de los números naturales como números racionales.

Es interesante advertir cómo en este problema aparece, al cambiar las condiciones, la necesidad de transformar la expresión de los números 2 y 4 como fracciones, con lo que su aparición está ligada a una situación de uso, a diferencia de propuestas clásicas en las que, presentadas las fracciones, se clasificaban en propias, impropias y aparentes sin un sentido para esta diferenciación.

Actividad didáctica de la clase

Le proponemos analizar el siguiente juego e indicar

a - Para organizar la puesta en común después del juego, ¿qué preguntas o problemas se podrían plantear para que las/los alumnas/os expliciten los procedimientos desarrollados al jugar? Mencione tres posibles intervenciones para incluirlas en su planificación.

b - ¿Qué se podría discutir a partir de jugarlo?

c - Armar 3 actividades para realizar después del juego (una que promueva la reflexión sobre la densidad de este campo numérico)

<u>Juego “Armar expresiones decimales”</u>

<u>Materiales</u>:

Cartas como las siguientes

Lápiz y una hoja como la siguiente para cada jugador

Cartas	Números entre 0 Y 3,2	Números entre 2,6 Y 6	Números entre 5 Y 7,5	Números entre 7,90 y 10

Organización de la clase: en grupos de cuatro jugadores.

Reglas del juego: Se colocan sobre la mesa la carta roja boca arriba y el resto del mazo de cartas boca abajo. Un jugador da vuelta 4 cartas del mazo y los participantes deben escribir en la primera columna las tarjetas con las que se juega, por ejemplo: , 0 3 5 8 y luego armar números en función de lo que cada columna solicita, usando 3, 4 o las 5 cartas. El primero que completa dos números en cada columna dice "basta para mí" y el resto de los jugadores solo pueden completar el número que ya están escribiendo. A continuación, cada alumno -sin mostrar la hoja- debe ir diciendo los números que escribió al tiempo que el participante que está a su derecha forma dicho número con las cartas de la mesa. Si el resto acuerda que es correcto y algún otro participante también lo escribió, se anota 0,5 puntos. En caso de que algún número sea escrito correctamente por un único participante, éste se anota 1,50 puntos.

Operar con fracciones o decimales con distintos significados

Hemos revisado antes en esta clase distintos significados de las fracciones. En este apartado consideraremos los significados de las operaciones con esos números.

Los niños construyeron algunos significados en relación con las distintas operaciones con los naturales. Estos significados ¿se pueden extender al nuevo campo numérico o en algunos casos pierden sentido? ¿Aparecen nuevos sentidos?

Sumar y restar

Al considerar los significados de la suma y la resta con los naturales, planteamos en nuestras planificaciones problemas en los que la suma significa: unir o agregar, y la resta: quitar, hallar la diferencia o bien buscar el complemento. También, según el caso, sumar o restar permite componer transformaciones de la cantidad de elementos de una colección. Y, en todos los casos, recorrimos en nuestras elecciones varias posibilidades moviendo el lugar de la incógnita. Recordemos un ejemplo con naturales donde hay dos transformaciones negativas pues se pierde dos veces:

> *Simón colecciona figuritas de fútbol y hoy no es su día de suerte. En el primer recreo perdió 10 de las figuritas de su colección y en el segundo recreo perdió 20 de sus figuritas. ¿Cuántas figuritas perdió hoy?*

Cada pérdida implica que disminuye la cantidad de elementos de la colección y, para componer esas dos transformaciones negativas (perder 10 y perder 20), que se suman para saber cuántas figuritas perdió.

¿Se mantienen o cambian estos significados al sumar o restar fracciones o decimales? Los significados unir, agregar, diferencia y complemento se mantienen en problemas donde las fracciones funcionan como parte de un todo (P1) o como medida (P2). Por ejemplo:

> *P1) En una huerta se ocupa la superficie del siguiente modo: ¼ en plantas aromáticas, otra cuarta parte en distintas variedades de zapallo, 1/3 en papa y zanahoria y 1/6 en verduras de hoja. ¿Queda lugar para plantar tomate o se ha ocupado todo el terreno?*

> *P2) Para una ensalada de frutas se compran 0,5 kg de manzanas, 1,5 kg de naranjas y 4 bananas que pesan ¾ kg. Se quieren preparar 3 kg de ensalada de fruta ya pelada y cortada, ¿se llegará a la cantidad que se pensó? ¿Cuál podría ser el peso aproximado de la ensalada de fruta ya preparada?*

La operación de suma como unión o reunión de partes o de medida está presente en ambos problemas: se reúnen partes de un terreno, el entero y se reúnen los pesos de las distintas frutas. También está presente la resta como complemento: “lo que falta” para cubrir el terreno o la cantidad deseada -3kg-.

Si las cantidades perdidas en el problema de las figuritas se expresaran como parte de un todo, 1/6 en el primer recreo y 1/3 en el segundo recreo, ¿cómo cambia la pregunta del problema?

¿Piensan que el significado de “componer dos transformaciones” tiene sentido también con las fracciones?

Al retomar el problema de la composición de transformaciones y si se trata de partes de un todo, será necesario considerar cuidadosamente cuál es el “todo” para cada fracción.

Es interesante destacar que, en el trabajo con cantidades, así como no sumamos manzanas con naranjas, y que, si queremos reunirlas recurrimos a la expresión frutas, para sumar tercios con cuartos necesitamos pensarlos como doceavos. Es la necesidad de sumar partes del mismo tipo lo que hace necesario expresar cada fracción con una equivalente de modo tal que todas tengan el mismo denominador. Extender esta idea de usar denominaciones comunes a las expresiones decimales, por ejemplo, usar centésimos para sumar décimos y centésimos, contribuye a tener un mejor control sobre el resultado y evitar errores por encolumnar mal.

Multiplicar y dividir

¿Qué situaciones dan lugar al uso de la multiplicación y división de fracciones? ¿Qué significados tienen estas operaciones cuando se opera con números racionales? ¿Cambia su significado respecto de la multiplicación y división con naturales?

- Los problemas donde la multiplicación o la división se utilizan en combinatoria (¿cuántos gustos combinados de helado se pueden armar con 3 cremas y 2 frutas?) o iteración (averiguar cuántas veces 7 días entran en un año), solo tienen sentido en el campo de los números naturales. Tampoco tiene sentido pensar en repartir una cantidad, discreta o continua, en una cantidad de partes que no se exprese con un natural. Con lo cual, al repartir, el dividendo puede estar expresado con naturales o racionales, pero no el divisor. La idea de partir, de averiguar cuántas veces entra una cantidad en otra, asociada a la medida, no solo puede extenderse sin problemas al campo de los racionales, sino que pone en evidencia la razón misma de la existencia de este conjunto numérico. En el conjunto de los números naturales no tiene sentido preguntar cuántas veces entra 4 en 3 y no es posible dar una respuesta exacta para 15 :4.

- Otro significado de la multiplicación y división de naturales aparece en las situaciones que involucran la proporcionalidad. En este caso, según sean las magnitudes con las que se están vinculando -discretas o continuas- y las unidades que se usen para expresar las cantidades -por ejemplo 1/2 kg o 500 g- será necesario recurrir al uso de naturales o racionales. En estos problemas, las fracciones pueden aparecer en las cantidades de las magnitudes que se relacionan, en la constante de proporcionalidad o en ambos y las operaciones a realizar implicarán el cálculo del producto o el cociente de dos fracciones o decimales o el de una fracción o decimal por un número natural.Los significados de las multiplicaciones y divisiones a realizar en estos problemas no cambian en relación con el significado conocido para los números naturales y las y los alumnos pueden usar las mismas propiedades que conocen.

- Consideremos por último los problemas de producto de medidas. Sabemos que en estos problemas intervienen tres magnitudes o dimensiones. Por ejemplo, al averiguar el área de un rectángulo consideramos la longitud de la base, la longitud de la altura y el área que resulta al multiplicarlos. Al averiguar el volumen de un cuerpo tomamos el área de la base, la longitud de la altura y el volumen que resulta. En el caso de la velocidad, intervienen el espacio que recorre el móvil, el tiempo que tarda en hacerlo y su velocidad. En estos casos, aparece un nuevo significado para la multiplicación. Efectivamente, se trata de la aparición de una nueva magnitud (el área, el volumen, la velocidad) junto a las unidades que permiten expresar su medida. Sabemos que, en estas situaciones, es posible variar el lugar de la incógnita dando lugar a problemas donde hay que dividir, por ejemplo, dado el área del rectángulo y un lado averiguar el otro.

Al trabajar con fracciones y decimales también es preciso tener en cuenta la complejidad de operar con magnitudes continuas pues supone una representación mental menos inmediata de la situación que operar con magnitudes discretas expresadas con naturales. Hay magnitudes continuas que admiten una medición directa, como la longitud, la capacidad y el peso, y otras magnitudes cuyo tratamiento es más complejo, como en el caso de la superficie o de la velocidad. La superficie, si bien puede medirse directamente, también puede calcularse como el producto de dos magnitudes y la velocidad surge como el cociente entre dos magnitudes.

Señalemos también que, aunque retomaremos las cuestiones del cálculo en la próxima clase, es fundamental que los alumnos puedan resolverlos desde el sentido y no desde una mera técnica. Al respecto, adelantemos que, tanto en los problemas de proporcionalidad como en los de producto de medidas, será necesario averiguar la fracción de un número natural o bien averiguar la fracción de otra fracción, cuestiones que remiten a la multiplicación de natural por fracción y a la multiplicación de fracciones.

Para averiguar la fracción de un número natural como en 2/3 de 12 se puede pensar que 2/3 = 1/3 + 1/3 y luego sumar lo mismo. También se puede pensar 2/3 como operador (dividir por 3 y multiplicar por 2) para lo cual habrá que relacionar que “calcular 1/3 es dividir por 3”. Escribimos 2/3 de 12 como 2/3 x 12, es decir, como la multiplicación de un natural por una fracción.

La misma idea se puede usar para conocer la fracción de una fracción, por ejemplo 1/2 de 1/3 donde habrá que relacionar que “calcular ½ es dividir por 2” y escribir ½ x 1/3.

Por último, dos cuestiones que no podemos soslayar al hablar de la multiplicación y división con los números racionales asociadas a la “ruptura “de certezas construidas en el aprendizaje al operar con los naturales.

Por un lado, la idea de multiplicación no está siempre asociada a la idea de “veces” como en el caso de producto de medidas.

Otra diferencia surge al comparar factores y productos, al proponer situaciones en las que se trabaja con números mayores o menores que la unidad. Mientras se trabaja con números naturales distintos de 0, se obtiene un producto igual o mayor a los factores y el cociente es siempre menor que el dividendo. Al operar con estos nuevos números, los alumnos podrán constatar que al multiplicar no siempre el resultado es igual o mayor, ya que al multiplicar por números menores que 1 el producto resulta menor (2 x 1/2 o bien 2 x 0,5). Veamos un ejemplo de problema donde se pone en juego esta idea para ser discutida en la clase.

**Analicen las respuestas que dieron al completar el espacio en blanco de este cálculo y expliquen con quiénes estás de acuerdo:*

2000 x…..=500

**Mailén dice “Esto no es posible porque al multiplicar siempre se obtiene un número mayor, para que de 500 solo podríamos restarle 1500”.*

**Horacio dice “es posible multiplicar por ¼ porque eso es lo mismo que dividir por 4”.*

**Marcelo agrega “entonces también podríamos multiplicar por 0,25”*

Lectura sugerida

Son muchas y muy variadas las producciones que incluyen propuestas para el trabajo en el aula con números racionales. Compartimos aquí algunos materiales que pueden ser de interés, teniendo que en cuenta que todo aprendizaje requiere de decisiones situadas en función de los saberes disponibles en el grupo, de experiencias múltiples en distintos momentos y cada secuencia o propuesta resulta un medio para el intercambio entre colegas, un objeto de análisis y no un modelo a replicar.

<u>Propuestas de los Cuadernos para el aula de distintos años</u>

- Secuencia para usar fracciones que indican la parte de un todo continuo: “Plegando rectángulos” (4to pp 53 a 57)
- Problemas de reparto (4to pp. 58 a 63)
- Fracciones como resultado de una medición (5to pp.50 a 53)
- Secuencia para establecer relaciones y argumentar sobre ellas “Repartir de distintas formas” (5to, pp. 54 a 57)

<u>Propuestas en Notas para la enseñanza Fracciones y números decimales</u> MPT

- Secuencia 4° pp. 57 a 75 - Fracciones y las relaciones parte todo
- Secuencia 5° pp. 77 a 93 - Fracciones en situaciones de reparto

Lectura obligatoria

En la introducción de todos Cuadernos para el aula afirmamos “…., además de elegir un problema desafiante pero adecuado para sus conocimientos, y en el que la noción a enseñar sea un instrumento eficaz de resolución, es necesario tener en cuenta un conjunto de condiciones: cuáles son los materiales necesarios, qué interacciones prevemos derivadas de la forma de organizar la clase y nuestras intervenciones durante su transcurso. Cuidar estas condiciones, anticiparlas al planificar la clase, es, en realidad, uno de nuestros grandes desafíos como maestros….” Por tal motivo, los y las invitamos a leer el apartado “La gestión de la clase”.

Actividades de la clase

Actividades obligatorias:

- Actividad matemática de la clase

Esta actividad se resuelve en el foro.

Se espera que participen en el foro, con dos intervenciones:

- compartiendo sus registros e ideas,
- seleccionando un aporte de otro colega, ampliando, refutando o expresando su opinión al respecto.

- **Actividad didáctica de la clase**

Recomendaciones para la entrega

- El trabajo deberá realizarse en formato word (Texto justificado, fuente: arial - calibri tamaño 11, no transcribir las consignas de la actividad)

- No podrá extenderse más de dos carillas. Incluir un encabezado con los siguientes datos: Nombre de la Actualización, Nombre de la actividad y clase, nombre del cursante y nombre del tutor (4 renglones, en la misma fuente y tamaño de letra que el cuerpo del texto)

- Todas las citas y referencias bibliográficas deben ser realizadas de acuerdo a las normas APA.

- Deberán entregar el documento en este BUZÓN DE ENTREGA con la denominación: “Apellido_Nombre_Actividad_obligatoria_Clase_3_Aula XX”

Actividad optativa:

Foro de Consultas

Recuerden que tienen a disposición este espacio para consultar todo lo que necesiten.

Bibliografía de referencia

Chemello, G. (coord.), Agrasar, M., Chara, S. (2004) Juegos en matemática EGB 1 y Juegos en matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender. Material para docentes. MECyT.

MECyT, Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente (2006) Matemática 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Serie Cuadernos para el aula. Buenos Aires.

MECyT, (2012) Matemática para todos en el nivel primario. Notas para la enseñanza. Operaciones con números naturales. Fracciones y números decimales.

MECyT, Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente (2011). Clases del ciclo de formación de capacitadores en Áreas curriculares

Créditos

Autores: Silvia Chara

Cómo citar este texto:

Chara, Silvia (2022). Clase Nro.3: Naturales y racionales, rupturas y continuidades. Módulo 3: Temas de enseñanza de Número y Operaciones. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

Clase 4: Decimales y fracciones: escrituras, formas de calcular y cálculo mental

Bienvenida a la clase

Bienvenidos/as a la última clase.

Veremos en esta oportunidad cómo inciden las diferencias entre las representaciones como fracción y como decimal de los números racionales en la forma de calcular. Para ello, nos ocuparemos de revisar cómo operar en cada registro, decimal y fraccionario entendiendo que, conocer la variedad de representaciones distintas para un mismo número y adquirir flexibilidad en el uso de una u otra, resulta clave para elegir los procedimientos más adecuados en cada caso.

Asimismo, abordaremos el cálculo mental con números racionales, recorriendo algunos cálculos y estrategias que conviene memorizar y avanzando en el análisis de propuestas de actividades para fortalecerlos.

¿Qué cuestiones considerar en la enseñanza de las operaciones con los números racionales?

Tal como planteamos en la clase anterior, el uso de números racionales está entramado con contenidos vinculados a la medida y a la proporcionalidad. Las medidas de longitud, pueden resultar contextos interesantes para proponer los primeros problemas con números de hasta tres cifras decimales, aunque otras medidas como las de masa y área también podrán funcionar ya avanzado el segundo ciclo, teniendo en cuenta que la escritura decimal es la de mayor uso en nuestra vida en sociedad. Por otra parte, las escrituras numéricas con coma son las únicas notaciones para números diferentes a los enteros que aparecen en las calculadoras comunes y este ámbito también permite proponer problemas interesantes.

La resolución de problemas en estos contextos, dará lugar a la elaboración de las estrategias de cálculo que, de manera similar a lo que analizamos para los números naturales, se apoyan en descomposiciones de los números y en las propiedades de las operaciones. Las y los alumnos se apoyarán primero en las equivalencias entre unidades de medida que han explorado al registrar y comparar cantidades considerando distintas expresiones posibles para una misma cantidad (descomposiciones aditivas, distintas unidades). Por ejemplo, al considerar 2,25 m =2 m 25cm = 225 cm o que 3/4kg = ½ kg + ¼ kg. La comparación de las producciones en la clase, dará lugar a la confrontación de diferentes procedimientos de cálculo, lo que a su vez permitirá establecer relaciones entre unidades relacionándolas con el valor de posición de las cifras y explicitar propiedades de las operaciones involucradas. Asimismo, será necesario revisar equivalencias entre expresiones decimales y fraccionarias de un mismo número, así como la equivalencia de fracciones. A lo largo del segundo ciclo las alumnas y los alumnos podrán tener oportunidad de ir tomando decisiones cada vez más autónomas acerca del tipo de representación que conviene utilizar según el problema a resolver.

Ahora bien, sabemos que es necesario hacer evolucionar el trabajo inicial apoyado en las unidades de medida, a través de actividades de cálculo mental, y de análisis de procedimientos de cálculo. Para el caso de la suma y la resta, como vimos en la clase anterior, los significados de las operaciones no plantean desafíos nuevos. Para la multiplicación y división de un decimal o fracción por un número natural tampoco aparecen nuevos significados, en cambio, para la multiplicación y la división de un decimal o una fracción, por otro decimal u otra fracción, sí van a plantear distintos tipos de obstáculos. Consideraremos en los próximos apartados un análisis de los temas de cálculo. En ambos registros de representación.

Si pensamos en la evolución del estudio de las operaciones en el ciclo, podríamos considerar una primera etapa para 4to/5to con apoyo de equivalencias en el contexto de la medida para elaborar y comparar procedimientos de cálculo de sumas y restas entre decimales o entre fracciones, y de multiplicaciones y divisiones de decimales o fracciones por un natural, y explorar un primer conjunto de procedimientos. Tanto para calcular como para comprobar la razonabilidad de los resultados obtenidos, será importante encuadrar entre naturales y construir un primer repertorio de resultados memorizados que será la base de estimaciones futuras.

Para avanzar, será clave el establecimiento de relaciones entre multiplicación y división, junto con el uso de distintas escrituras como un insumo para elaborar procedimientos de cálculo no algoritmizado. Por ejemplo, advertir que multiplicar por 0,1 es equivalente a multiplicar por 1/10 y, a su vez, a dividir por 10. Con este tipo de relaciones se espera propiciar la elaboración de cálculos adecuados a las diferentes situaciones presentadas, de manera de preparar el camino para la sistematización de estrategias más generales a realizarse entre 6° y 7mo grado.

"Se espera que este proceso de resolución y análisis por parte de los alumnos contribuya al progreso de la utilización de procedimientos más económicos de cálculo, al uso de diferentes recursos y al control de los resultados de multiplicaciones y divisiones con números racionales. Hoy la meta ya no es el dominio de los algoritmos con lápiz y papel sino disponer de una variedad de estrategias que permitan, frente a un desafío de cálculo, decidir cuál es el procedimiento más conveniente priorizando el uso de la calculadora, previa estimación del resultado." (*Notas para la enseñanza 2*, 2014, 8)

Abordar la división entre expresiones decimales, nos brinda una nueva oportunidad para establecer relaciones entre operaciones, entre representaciones y el uso de propiedades, por sobre la mecanización de un procedimiento particular. Desde una mirada ciclada, que busca fortalecer un trabajo reflexivo sobre el cálculo, carece de sentido dedicar parte del valioso tiempo escolar al estudio de "los casos" de la división con decimales y a la práctica de algoritmos que solo se usan excepcionalmente.

Tengamos en cuenta que, el alcance del trabajo en los NAP para 6to año es el siguiente:

- operar seleccionando el tipo de cálculo y la forma de expresar los números involucrados que resulte más conveniente en función de la situación y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.

- elaborar y comparar procedimientos de cálculo –exacto y aproximado, mental, escrito y con calculadora– de divisiones de expresiones decimales, incluyendo el encuadramiento

de los resultados entre naturales y analizando la pertinencia y economía del procedimiento en relación con los números involucrados. (NAP segundo ciclo, 2003)

Hay una enorme variedad de producciones de desarrollo curricular que abordan el tratamiento de las distintas operaciones, en los distintos años del ciclo, por lo que no haremos un análisis exhaustivo de cada operación, en cada año. Solo por citar algunos ejemplos producidos a nivel nacional, podemos encontrar propuestas para el aula en:

Lecturas sugeridas

- Para comenzar a operar con fracciones y decimales: Serie Cuadernos para el Aula, Matemática 4;
- Para calcular de diferentes formas con fracciones y decimales al resolver problemas: Serie Cuadernos para el Aula, Matemática 5;
- Para avanzar en los procedimientos de cálculo con distintos tipos de números: Serie Cuadernos para el Aula, Matemática 6;
- La enseñanza de las operaciones con fracciones y números decimales (Notas para la enseñanza 2, Matemática para todos en el Nivel primario).

En los siguientes apartados compartimos algunos ejemplos en los que el trabajo sobre juegos ofrece un contexto fértil para el análisis de procedimientos, y la sistematización de resultados y estrategias de cálculo.

¿Cómo interviene la forma de escribir en la forma de operar?

Consideremos cómo operar con los números racionales expresados como decimal o como fracción.

Entre los números naturales y los decimales: cuando se puede extender lo conocido

Sabemos que los números decimales se escriben extendiendo las reglas que se usan para los números naturales en el sistema de numeración decimal y, como se trata de expresar valores menores que la unidad, en cada posición a la derecha de la coma se va dividiendo por 10 para obtener décimos, centésimos y milésimos.

Así, a la hora de operar, se trata de extender las mismas reglas atendiendo a ciertas diferencias y reconociendo ciertas dificultades. Cada número se expresa con “partes del entero del mismo tipo” y esto permite pensar en sumar o restar décimos con décimos, centésimos con centésimos, etc. y lo mismo ocurre al multiplicar un decimal por un natural, se puede repetir el valor de cada posición del decimal tantas veces como indica el número natural.

- Para sumar o restar decimales, basta considerar el valor posicional de cada cifra, atender a la necesidad de agrupar o desagrupar según sea necesario y usar las propiedades conocidas.

Si se está sumando y se decide descomponer los números aditivamente, se podrá cambiar el orden de los sumandos (propiedad conmutativa) y asociarlos como convenga (propiedad asociativa) en función de las sumas o restas que se tengan disponibles.

En el ejemplo:

$$4{,}55 + 0{,}85 + 12{,}4 = 4 + 12 + 0{,}55 + 0{,}45 + 0{,}40 + 0{,}4 = 16 + 1 + 0{,}80 = 17{,}80$$

se ve que, además de descomponer en parte entera y parte decimal, se descompone el 0,85 en 0,45 + 0,40 porque se quiere completar 1 unidad al hacer 0,55 + 0,45. Estos cálculos se apoyan en conocer 85=45 + 40 y 100 = 45 + 55.

- Si se trata de multiplicar un número decimal por un natural reaparece la idea de uso de la propiedad distributiva como en la multiplicación de naturales considerando el valor posicional de cada cifra. Al descomponer, multiplicar y transformar las expresiones, se advierte que se puede extender el procedimiento.

Por ejemplo:

3,45 x 3 = (3 + 0,4 + 0,05) x 3 = 9 + 1,2 + 0,15 = 10 + 0,3 + 0,05 = 10,35

Se advierte aquí que al pensar 0,4 x 3 se obtienen 12 décimos lo que forma 1 unidad y 2 décimos y que 0,05 x 3 da 15 centésimos que forman 1 décimo y 5 centésimos.

- Para dividir un número decimal por un número natural, también seguimos con la idea que usamos para dividir naturales, buscar aproximaciones sucesivas como mejor convenga.

  Por ejemplo:

6,45 : 4 =	**Son 645 centésimos para dividir por 4**
Con 400 centésimos se da 100 a cada uno y sobran 245 centésimos Con 245 centésimos se da 60 a cada uno y sobran 5 centésimos Con 5 centésimos se da 1 a cada uno y sobre 1 centésimo	100 centésimos a cada uno 60 centésimos a cada uno 1 centésimo a cada uno Son 161 centésimos a cada uno y sobra 1 1,61 y sobra 1

Este tipo de procedimientos pueden ser discutidos con los estudiantes entre 4to y 5to grado en función de los problemas que se van presentando.

Una cuestión a considerar en el contexto del problema es el significado del cociente y la forma de expresarlo. Si el cálculo anterior 6,45 : 4 cobra sentido en un problema donde se corta en 4 partes iguales una cinta de 6,45 m, si bien cada parte de cinta debe medir 1,61 m según el cálculo es interesante discutir con nuestros alumnos que es razonable expresar el resultado de manera aproximada como 1,60 m pues no resulta significativo un mayor nivel de precisión para ese corte.

Ya señalamos que los requerimientos en torno al cálculo tanto para la escuela secundaria como para la vida, no incluyen la necesidad de hacer cálculos con decimales con números con más cifras. En esos casos convendrá estimar el resultado y usar la calculadora. Veremos algunos ejemplos en el último apartado

- Nos queda aquí pendiente pensar en la multiplicación y la división de dos números decimales, cuestión a la que nos referiremos en otro apartado de esta clase.

Entre los números naturales y las fracciones: cuando interesan las partes

En la enseñanza tradicional de las fracciones se hace hincapié en una gran variedad de reglas como “se multiplican numerador y denominador por el mismo número”, “busco denominador común y lo divido por el denominador y lo multiplico por el numerador”, “se multiplica derecho y se divide cruzado”. En principio, es interesante analizar que estas reglas no refieren a cada fracción como tal sino que considera por separado los numeradores y denominadores, lo que no aporta a que los niños avancen en concebir la fracción como un número. Por otro lado, la mayoría de los niños desconocen la explicación de las reglas, las razones que las fundamentan y en qué ocasiones son útiles y cuando innecesarias, y por tal motivo suelen olvidarlas o confundirlas.

- Al analizar cómo sumar o restar fracciones nos encontramos frente a una situación muy diferente a la que aparece con decimales, no tenemos “partes del mismo tipo” como ocurre, por ejemplo, al considerar 5 décimos más 7 décimos. Veamos el ejemplo:

  $$\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

  Resulta que no es posible sumar cuartos con quintos pues no se podrá expresar el resultado con una única fracción con denominador 4 ó 5. Se advierte entonces la necesidad de expresar cada una en “partes del mismo tipo” y ¿cuáles serán esas partes? Se busca subdvidir cuartos y quintos de modo que, para ambos casos, funcione el mismo tipo de partes, los veinteavos (15/20 y 16/20), cuarentavos (30/40 y 32/40), etc. Es decir, habrá que buscar fracciones equivalentes con un denominador común para ambas que indica el tipo de partes que se sumarán o restarán.

  Se advierte entonces que la noción de equivalencia de fracciones es la que permite transformar las partes para poder sumarlas o restarlas.

También aquí podemos usar las propiedades de la suma conmutativa y asociativa, para reordenar y asociar de manera conveniente.

Por ejemplo, al sumar varias fracciones, se puede ir pensando por partes, primero usando cuartos y sextos y luego doceavos

¾ + 4/3 + 5/6 + ½ = (3/4 + ½) + (4/3 + 5/6)= (3/4 + 2/4) + (8/6+ 5/6) = 5/4 + 13/6

5/4 + 13/6 = 15/12 + 26/12

Esta idea de equivalencia es también la que funciona en el caso de las escrituras decimales, con la ventaja de que las partes del mismo tipo ya vienen dadas en la escritura del número: son los décimos, centésimos, etc. que también pueden expresarse con fracciones decimales.

3,5 + 0,12 = 3 + 5/10 + 1/10 + 2/100 = 3 + 6/10 + 2/100 = 3,62

En las sumas y restas de fracciones, un recurso importante para controlar el resultado es el de encuadrar cada fracción entre naturales. En el último apartado veremos ejemplos.

- Si se trata de multiplicar o dividir una fracción por un número natural, nos encontramos con la posibilidad, igual que con los decimales, de pensar en repetir la fracción tantas veces como el natural indica y usar las propiedades de la multiplicación.

Por ejemplo, al multiplicar podemos descomponer en factores y asociar:

¾ x 12 = ¾ x 2 x 2 x 3 = 1 ½ x 2 x 3 = 3 x 3 = 9

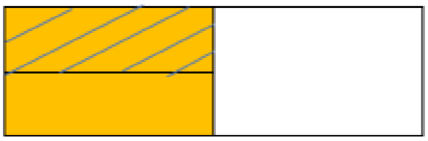
O descomponer aditivamente y usar la propiedad distributiva:

(1/2 + ¼) x 12 = 6 + 3 = 9

Y para dividir, descomponer el dividendo en sumandos y usar la propiedad distributiva de la división con la suma recordando cómo se pueden pensar las mitades, tercios, etc de fracciones:

¾ : 2 = (½ + ¼) : 2 = (1/2 : 2) + (1/4 : 2) = ¼ + 1/8 = 3/8

Al resolver algunos problemas, los niños podrán recurrir a un apoyo gráfico como, por ejemplo, los siguientes:



La mitad de un ½ es ¼ del entero

La mitad de un ½ de 12 es 3

La mitad de un tercio es 1/6 del entero

La mitad de un tercio de 12 es 2

Cuando no se puede extender lo conocido y no se trata de partes

Cuando se trata de multiplicar o dividir dos números racionales, nos encontramos con que, la interpretación que hagamos de cada uno de ellos, incide en cómo pensar la operación

Al multiplicar o dividir un decimal o una fracción, por otro decimal u otra fracción, no es posible asignar a ambos números el significado de "parte" ni tampoco considerar que alguno indica "veces" para repetir el otro.

Sí podemos pensar uno de los números como un "operador", teniendo en cuenta que multiplicar por una fracción como ¾ involucra una multiplicación por 3 y una división por 4, y que multiplicar por 0,8 = 8/10 es equivalente a multiplicar por 8 y dividir por 10.

En esta línea, multiplicar por 0,5 es dividir por 2, entre tantas novedades que sorprenden a nuestras y nuestros estudiantes.

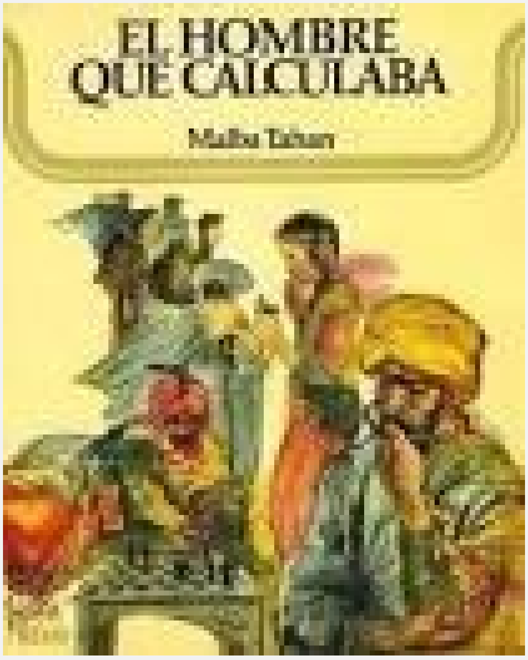
¿Cómo podemos pensar la multiplicación de dos fracciones? ¿Y al multiplicar dos decimales? Pensando una de las fracciones o un decimal como un operador y transformando un número decimal en fracción decimal. Por ejemplo:

¾ x 5/6 = (5/6 x 3) : 4

0,25 x 1,3 = 25/100 x 1,3

La división de dos fracciones y dos decimales entre sí requiere trabajar en profundidad con la noción de operador inverso cuestión que excede el tratamiento de este campo numérico en el nivel primario.

Recreo



Llegó el recreo y mientras se preparan el mate les proponemos que lean el Capítulo 3 del libro El hombre que calculaba. (link)

Su autor, Malba Tahan es un maestro brasileño fascinado por la cultura árabe. En cada capítulo narra la vida del calculador Beremiz Samir, quien introduce variados problemas matemáticos a través de distintos cuentos llenos de enredos.

En el capítulo 3 se narra la distribución de una herencia de camellos. En esta clase hay pistas para la resolución del enigma.

Cálculo mental con racionales

Como ya hemos planteado, el cálculo mental refiere al conjunto de procedimientos que, a partir del análisis de los números intervinientes, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados. Es decir, se caracteriza por la presencia de una diversidad de técnicas que se adaptan a los números en juego y a los conocimientos del sujeto que las despliega.

También sabemos que lograr un dominio flexible del cálculo requiere que los alumnos tengan la oportunidad de desarrollar estrategias apoyadas en las propiedades de las operaciones, la construcción y memorización de ciertos cálculos, en la descomposición de números de distintas formas y en el uso de reglas construidas como “consejos”.

Con respecto a las fracciones y los decimales, podemos conformar una lista de tipos de cálculos y estrategias que es interesante ir trabajando

- Para sumar y restar

Sumas y restas que involucren ½ y ¼ como en 3 ½ + 2 ¾

Complemento de una fracción al entero más próximo

Sumas que dan 1 como ½ +1/3 + 1/6

Sumas y restas que compongan 0,25; 0,50; 0,75 como en 3,75 + 1,50

Complementos de décimos y centésimos al entero más próximo

Resultados de sumar o restar 0,1; 0,01; 0,001; etc.;

- Para multiplicar o dividir

Dobles y mitades de medios y cuartos, por ejemplo: el doble de 2 ¾ ó la mitad de 4 ½

Dobles y mitades de números decimales que terminen en 25; 50; 75, por ejemplo: el doble de 2,75, la mitad de 4,50.

Multiplicación y división de cualquier número por 10; 100 y 1.000;

Multiplicaciones y divisiones de cualquier número por 0,1; 0,01; 0,001

Aproximación y redondeo de resultados de multiplicaciones y divisiones.

Sabemos que el trabajo sobre cálculo puede ser poco convocante para muchas niñas y niños y, en ese sentido, el uso de juegos reglados y la elaboración de “consejos” para realizar determinados cálculos puede ser una buena estrategia para su abordaje. Tal como se afirma en la introducción de “Juegos, un recurso para aprender” (2001):

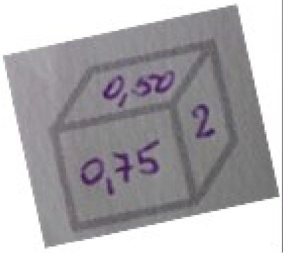
"Los juegos poseen la ventaja de interesar a los alumnos, con lo que, en el momento de jugar, se independizan relativamente de la intencionalidad del docente y pueden desarrollar la actividad, cada uno a partir de sus conocimientos. Pero la utilización del juego en el aula debe estar dirigida a su uso como herramienta didáctica: jugar no es suficiente para aprender. Justamente, la intencionalidad del docente diferencia el uso didáctico del juego de su uso social. En el momento de jugar, el propósito del alumno es siempre ganar, tanto dentro como fuera de la escuela. El propósito del docente, en cambio, es que el alumno aprenda el contenido que está involucrado en el juego."

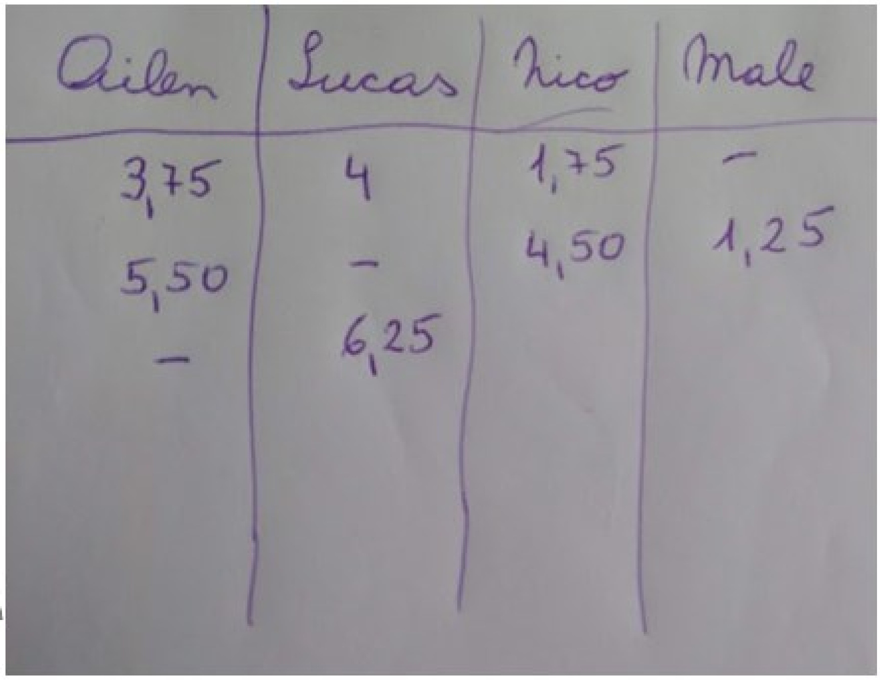
Por un lado, es interesante reconocer que, en el juego, además de darse la producción de estrategias eficaces para ganar, la corrección de lo realizado es inmediata ya que los niños no querrán que los contrincantes les saquen ventaja. Y, si se trata de promover aprendizajes, es importante que compartamos la idea de que no solo por jugar se aprende. Para que el juego se convierta en un recurso de enseñanza, además de elegir un juego donde se use el conocimiento matemático que queremos que se aprenda, se trata de que los niños jueguen más de una vez, que reflexionen después de jugar sobre las estrategias, de hacer registros durante el juego, y de insertarlo en secuencias en las que se incluyan actividades que evoquen el juego.

Juegos y consejos para sumar y restar

Los juegos tradicionales suelen presentar reglas claras y el hecho de que hayan perdurado en el tiempo tiene que ver con las condiciones que presentan. Recordar juegos como "El huevo" o el "Siete y medio" nos inspiran para inventar juegos como los siguientes que nos permiten abordar las sumas (y restas) con decimales o fracciones con sumandos que compongan 0,25; 0,50; 0,75 o que involucren ½ y ¼.

Juego "El huevo"





Materiales:

- 1 dado en cuyas caras se pegan etiquetas en las que se escriben los siguientes números 0; 1,25; 0,50; 1,50; 0,75 y 2

- Una hoja para registrar sus puntajes.

Organización de la clase:

se juega en grupos de 3 ó 4 jugadores, uno de los cuales será el encargado de registrar los puntajes

Reglas del juego:

A su turno, cada participante tendrá que tirar el dado las veces que quiera e ir sumando los puntajes obtenidos. El jugador decidirá en qué momento “plantarse”, es decir, registrar el puntaje obtenido hasta ese momento. Si el jugador, antes de plantarse, saca el 0 en el dado, pierde todo el puntaje acumulado hasta ese momento en esa tirada.

En ambos casos (“plantarse” o “sacarse 0”), pasa el turno al siguiente jugador. Gana el participante que llega primero a acumular 10 puntos.

Para resolver los cálculos algunos niños pueden retomar cierto repertorio desarrollado a partir de problemas que involucran medidas y adaptarlo a estos números.

Por ejemplo, para hacer 1,50 + 0,75 es probable que descompongan el 0,75 en 0,50 + 0,25 para completar al entero más cercano y luego hagan 2 + 0,25. En tanto que si se trata de sumar 3,25 +

1,50 tal vez lo piensen sumando parte entera y parte decimal por separado como en 3 + 0,25 + 1 + 0,50 para luego conmutar 3 + 1 + 0,25 + 0,50 y asociar convenientemente haciendo 4 + 0,75.

Este procedimiento puede dar lugar a error al resolver 4,90 + 0,30 = 4,120 en cuyo caso tendremos que discutir con los alumnos que los 120 son centésimos por lo que son equivalentes a 1 + 0,20.

Este juego admite diversas modificaciones tales como partir de 10 y que tengan que ir restando el valor del dado hasta llegar a 0 ó modificar el dado para avanzar con otros repertorios de cálculo con fracciones o decimales al pegarle etiquetas en sus caras con valores como los siguientes:

- Versión décimos: 0; 0,10; 0,20; 0,30; 0,50 y 0,90.
- Versión ceros: 0- 0,01- 0,001 0,5 0,05 0,005.
- Versión fracciones: 0 ¼ ½ ¾ 1½ 1 ¼
- Versión décimos y centésimos (con dos dados): 0 - 0,05 – 0,20 - 0,2 - 0,5 – 0,8 - 0,85 - 1,08 – 1,1- 1,15 -1,45– 1,90

¿Qué conocimientos anteriores se requieren para jugar?

Para avanzar en la elaboración de conclusiones sobre las estrategias de cálculo convendrá realizar una tabla donde además de anotar los resultados de cada jugada, se anoten los números obtenidos

¿A qué conclusiones se puede arribar al jugar cada versión?

En función de los repertorios incluidos en los distintos dados se modificarán las estrategias de cálculo y se podrá apelar a distintos repertorios ya conocidos con los números naturales. En la versión “décimos” se apoyarán en la suma de números redondos en tanto que en la versión “ceros” se tratará de analizar qué cambia en el número según se sumen décimos, centésimos y milésimos. En la versión “fracciones” se podrán descomponer las fracciones en sumas según lo que complete el entero o los cálculos que se hayan memorizado. En la versión décimos y centésimos interesa componer centésimos cuando terminan en 0 o en 5.

¿Qué actividades se podrán proponer para después de jugar?

En principio, se promoverá que realicen lo ya vivido en forma individual, con actividades de evocación del juego o juego simulado. En otras, se pueden plantear nuevos desafíos.

Por ejemplo, si los niños jugaron con dos dados con los valores siguientes

0 - 0,05 – 0,20 - 0,2 - 0,5 – 0,8 – 0,85- 1,08 – 1,1- 1,15 -1,45 - 1,90

se puede proponer:

1. *Un alumno sacó en el dado los siguientes valores:*
   1,45   0,5   1,90   0,05   1,45   1,1

   a. ¿Cuál podría ser una manera rápida de obtener el total? ¿Por qué?

   b. ¿Cuánto le falta para llegar a 10?

2. Indiquen quién obtuvo mayor puntaje. Resuelvan agrupando los números de tal manera de obtener una respuesta lo más rápida posible:

Juan: 1,45 - 0,8 - 0,05 - 0,5 - 0,20

Osvaldo: 1,90 - 0,5 - 1,90 - 0,5 – 0,85

Nicolás: 0,8 - 0,20 - 0,05 - 1,45 - 0,2

En estas actividades, se modifica la situación del juego en tanto que no es necesario sumar o restar los valores en forma sucesiva. También se trata de ver de qué forma asociar los valores para hacer más rápido el cálculo (asociado los 25, los 75 con los 25, los 50 entre sí). Algunas alternativas son:

1,45 + 0,8 = 1,45 + 0,55 + 0,25 = 2 + 0,25

1,4 + 0,8 + 0,05 = 1,4 + 0,6 + 0,2 + 0,05 = 2 + 0,25 = 2,25

0,45 + 0,80 + 1=1,25 +1 = 2,25.

Si aparece 1,125 como respuesta, habrá que discutir que 125 son centésimos y discutir cómo transformarlo.

Es importante que tanto en el juego como en las actividades se haga hincapié en la forma de nombrar los números -no se lee “dos coma veinticinco” sino “dos enteros con veinticinco centésimos”- y en que, como las descomposiciones posibles son muchas, cada uno puede elegir la que le parezca más conveniente para facilitar los cálculos.

Consejos para sumar y restar

Una alternativa interesante para 6to y 7mo en relación con el trabajo sobre estrategias de cálculo de expresiones decimales y de fracciones en estos grados se puede plantear a través de actividades en las que los niños tengan que elaborar "consejos" a fin de resolver más rápidamente los cálculos propuestos.

Una posibilidad para organizar su puesta en aula es darle a todos los grupos la misma lista de cálculos y luego analizar en forma conjunta los consejos elaborados, o podremos dar una lista a la mitad de los grupos y a la otra mitad otra para luego intercambiar los listados con los consejos elaborados. La idea es arribar al análisis de los consejos recibidos para ver si les permitieron resolver los cálculos y pensar, si lo creen necesario, cómo mejorarlos. Es importante que el análisis de los consejos construidos sea evaluado por los mismos alumnos y no que sea la palabra del docente las que los valide.

Vemos algunos ejemplos:

a) En grupos de a 4 alumnos, resuelvan la lista de cálculos que se les asigna.

b) Enuncien un consejo para que otros chicos resuelvan más rápidamente el tipo de cálculos incluidos en la lista.

· ***Lista 1*** ***Lista 2***

Lista 1	Lista 2
¿Cuánto hay que sumar para obtener 1?	*Calculen*
0,4 + …= 1 0,8 + …= 1 0,48 + …= 1	*0,6 + 0,4= 0,06 + 0,04= 0,006 + 0,004=*
0,85 + …= 1 0,115 + …= 1 0,005 + …= 1	*0,3 + 0,7= 0,03 + 0,07= 0,003 + 0,007=*
¿Cuánto le falta a …para llegar a ….?	*Calculen*
34,45 +…= 35 23,28 +..=.24 23,28 +…..= 30	*0, 125 + 0,075= 0, 25 + 0,75= 0,125 + 0,875 =*

144,3 +..= 145 144,03 +..= 145 23,999 +...=30	*0, 975 + 0,005 =0, 55 + 0,55 = 0,975 + 0,025 =*

· **Lista 3** **Lista 4**

Calculen *4,125 + 0,1= 4,125 + 0,01= 4,125 + 0,001=* *4,12 + 0,1= 4,12 + 0,01= 4,12 + 0,001=* *4,1 + 0,1= 4,1 + 0,01= 4,1 + 0,001=* *Calculen* *4,125 - 0,1= 4,125 - 0,01= 4,125 - 0,001=* *4,1 - 0,1= 4,1 - 0,01= 4,1 - 0,001=*	*¿Cuánto hay que sumar o restar para obtener 0,1?* *0,01 + ... = 0,1 1,11 - ... = 0,1* *0,045 + ... = 0,1 1,05 - ... = 0,1* *0,003 + ... = 0,1 0,333 - ... = 0,1* *0,099 + ... = 0,1 0,99 - ... = 0,1*

· **Lista 5** **Lista 6**

Resuelvan *2,5 + 0,9 = 2,5 + 0,09 = 2,5 + 0,99 =* *23,4 + 5,9 = 23,4 + 5,99 = 23,4 + 5,09 =* *Resuelvan* *2,5 - 0,9 = 2,5 - 0,09 = 2,5 - 0,99 =* *23,4 - 5,9 = 23,4 - 5,99 = 23,4 - 5,09 =*	*Calculen* *2 - 1,45 = 5 – 3,3 = 1,11 - 0,6 = 1,05 - 0,8 =* *0,33 - 0,08 = 0,66 - 0,16 = 5,5 – 2,40 = 3,33 – 1,01*

¿En qué tipos de cálculo está centrada cada lista? ¿En qué conocimientos anteriores podrían apoyarse los chicos y las chicas?

En las listas 1 y 2 es necesario centrarse en el reconocimiento y el uso de los milésimos, centésimos o décimos. Se trata de armar un número que sea complementario al dado para llegar a 1. Para esto, los/as alumno/as deberán tener en cuenta que, en tanto sistema decimal, siempre hace falta formar

10; pero también atender a que si en el agrupamiento de la derecha hay diez, en los agrupamientos intermedios la suma debe dar 9 para que no se pase de 1.

Para resolver “sumar para obtener 1”, es posible apoyarse en el repertorio memorizado sobre sumas de números naturales (las sumas que dan 10, 100 o 1000), que puede reutilizarse con el recaudo de utilizar las relaciones entre valores decimales: con 10 décimos se obtiene uno, con 10 centésimos se obtiene un décimo, y con 10 milésimos se obtiene un centésimo. Algunos/as alumnos/as podrán expresar: “tomo la parte decimal que está después de la coma y hallo el complemento a 10, 100 o 1000 según corresponda.

En los cálculos de “¿cuánto le falta a …para llegar a ….?” , los/as alumnos/as tendrán que volver a usar lo discutido anteriormente teniendo en cuenta también la parte entera del número para llegar al número natural indicado.

En relación con la lista 3 se trata de que los alumnos reconozcan qué cifra se modifica en el número cuando se suma o se resta 0,1; 0,01 o 0,001, cuestión que permite revisar aspectos asociados con la posicionalidad de nuestro sistema de numeración.

Con la lista 4 se apunta a las mismas estrategias utilizadas en la lista 1 pero en este caso se trata de buscar complementos a 0,1. Si bien los alumnos suelen expresar estas estrategias con frases como “le agregás ceros de modo que la parte decimal de ambos números te queden con la misma cantidad de cifras”, es conveniente que el docente intervenga haciendo preguntas de modo que puedan justificar qué es lo que hacen o qué es lo que les permite hacer lo que dicen. Por ejemplo, “para resolver 0,045 + … = 0,1 es posible pensarlo como en 0,045 + … = 0,100 entonces 0,045 + 0,055 = 0,1. Se trata entonces de discutir qué es lo que les permite afirmar que un décimo es lo mismo que cien milésimos (0,1 = 0,100).

En los cálculos de la lista 5 se trata de que los alumnos descubran a qué número conviene aproximar el número terminado en 9 en cada caso, para luego reconocer que es lo que hay que sumar o restar para completar el cálculo. Por ejemplo, para 23,4 + 5,9 = es posible hacer 23,4 + 6 – 0,1 = 29,4 – 0,1 = 29,3. O bien para 23,4 – 5,09 es posible pensarlo como 23,4 – 5,1 + 0,01 = 18,3 + 0,01 = 18,31

Para resolver los cálculos de la lista 6 los alumnos tendrán que retomar algunas de las estrategias utilizadas en el juego en el que se valieron de distintas descomposiciones aditivas que les facilitaron los cálculos.

Si tuvieran que organizar las listas para distribuirlas en un proyecto institucional, ¿cuáles elegirían para cada grado?, ¿qué otras listas agregarían?

Juegos y consejos para multiplicar y dividir

En relación con la lista de cálculos multiplicativos, veamos un juego para hallar el doble o la mitad de una fracción o un número decimal y la fracción de un número redondo.

Juego “Los dobles y las mitades”

Materiales: Papel y lápiz para cada jugador

Tarjetas con las siguientes inscripciones para cada grupo:

El doble de 2 ¼	El doble de ¾	El doble de 2/3
La mitad de 3 ½	La mitad de 3	La mitad de 3½
El doble de 1,25	El doble de 4,50	La mitad de 1,50
La mitad de 7	La mitad de 2,50	El doble de 1,75
El cuádruple de 1,25	La cuarta parte de 10	El cuádruple de 1 ¾

Organización de la clase: Se arman grupos de a 4 estudiantes.

Reglas del juego: Se coloca el grupo de tarjetas boca abajo en el centro de la mesa y se dan vuelta 4 tarjetas. Cada alumno debe escribir el resultado de cada tarjeta. Al concluir, todos controlan cada una de las respuestas. Se anotan ½ punto por cada respuesta correcta. Se juegan 3 vueltas.

En la puesta en común de este juego se trata de que los alumnos expliquen cómo hicieron para averiguar lo indicado en los carteles, así como que argumenten sobre por qué funciona el procedimiento que relatan. En varios cálculos, los números involucrados permiten trabajar por separado con la parte entera y la parte decimal o fraccionaria, (la mitad de 2,50) en tanto que en otros la modificación operada en la parte decimal o fraccionaria repercute en la parte entera del número (la mitad de 3 1/2).

¿Qué reflexiones podrán promoverse al jugar para elaborar conclusiones que puedan anotarse para reutilizar a futuro?

¿Qué proponer para después de jugar?

Es interesante discutir ciertos conflictos que podrían haber surgido en el desarrollo del juego con problemas como los siguientes:

- *"Juan escribió que el doble de 2/3 es 4/6, Martín dice que es 4/3 y Nicolás dice que 1 1/3 ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?"*

- *"Tamara dice que para hacer la cuarta parte de un número ella piensa en la mitad de la mitad. ¿Es correcto lo que piensa? ¿Sirve para todos los números?*

- *"Martina dice que la cuarta parte de 9 es 2,25 y Paula dice que es 2 ¼ ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?"*

A partir de la primera pregunta es posible discutir sobre el significado de la "fracción respuesta" en cada una de las alternativas para lo cual habrá que considerar los argumentos que los niños elaboren y, entre otras cuestiones, analizar la diferencia entre hallar el doble o una fracción equivalente.

Tanto la primera como la tercera permiten discutir respecto de distintas notaciones de un mismo número. En la segunda pregunta se trata de la expresión en palabras de una estrategia que facilita el cálculo de la cuarta parte.

El/la docente podrá modificar las cartas para agregar nuevas dificultades, por ejemplo, la mitad de 3/5. En este caso, el numerador impar dificulta la resolución. Algunos alumnos recurrirán a la representación gráfica en tanto que otros buscarán alguna fracción equivalente (6/10) para luego hallar la mitad (3/10).

Consejos para multiplicar y dividir

Con una organización de la clase igual que la planteada para los consejos de suma y resta, se podría proponer:

En grupos de a 4 escriban "consejos" para que otros chicos

- *multipliquen por 2,5*
- *multipliquen por 0,5*

Se trata de retomar cuestiones tal vez han sido discutidas a propósito de las estrategias para multiplicar con números naturales, por ejemplo "si para multiplicar por 25 se puede "multiplicar por 100 y dividir por cuatro o hacer la mitad de la mitad" ahora a propósito de multiplicar por 2,5 puedo multiplicar por 10 y hacer la mitad de la mitad". Si la estrategia con naturales no ha sido discutida, por ejemplo, se podrá plantear como ítem anterior de esta actividad.

Como se señaló en la clase anterior, en relación a multiplicar por 0,5 algunos/as alumnos/as podrán sorprenderse al reconocer que al multiplicar se obtiene un número menor. Se trata de discutir la idea de "multiplicar no siempre agranda" lo que llevará a pensar en diferencias entre los números naturales y las expresiones decimales ante la multiplicación. En este caso, el resultado se obtiene haciendo la mitad.

Reconocer que multiplicar por ½ o 0,5 es lo mismo que dividir por 2 o que multiplicar por ¼ en lo mismo que hacer la mitad de la mitad o sea dividir por 4 es una cuestión central

Por último señalemos que, como hemos planteado, es central promover estrategias para controlar los resultados de los cálculos. En el caso de las sumas y restas de fracciones, aproximar cada una al entero más próximo permite anticipar un posible resultado. Por ejemplo:

a. *Al sumar ¾ + 4/5 piensan que el resultado será mayor o menor que 2? ¿Por qué?*

b. *¿Y será mayor o menor que 1? ¿Por qué?*

c. *¿Cuál es el resultado de la suma?*

La actividad matemática que en esta propuesta busca que los niños y las niñas anticipen entre que valores estará el resultado, se promueve que cada fracción sea considerada como número comparable con 1, con 2, con ½…

Para el caso de la multiplicación y división de decimales, el control de su resultado se logra mediante el uso de estrategias de redondeo y aproximación

Indiquen cuál de estos cálculos dará el mayor resultado y cuál el menor sin hacer las cuentas

292,5 : 23 =

29,25 : 2,3 =

2925 : 2,3 =

29,25 x 2,3 =

2925 x 0,23 =

292,5 x 2,3 =

En un primer momento los alumnos podrán buscar el resultado mayor en las multiplicaciones y el menor en las divisiones. Sin embargo, esto será cuestionado al estimar el resultado de cada cálculo.

Cabe destacar que al recurrir a la estimación los niños suelen adoptar distintos criterios según los números involucrados. En este caso, los/as niños/as redondearán el primer número de cada cálculo a 300, 30 y 3000 en tanto que el segundo número de cada cálculo se lo reemplazará por 20 y 2 para estimar el resultado. Es también una oportunidad para volver sobre el análisis de una cuestión que los niños se resisten a aceptar: cuando uno de los factores es menor que 1, el resultado de la multiplicación es menor que el otro factor. ese cálculo será aproximadamente la quinta parte de 3000. Si bien no responde lo que se solicita se podría pensar que el resultado de los dos primeros es el mismo.

Otra opción es pedir que encuadren el resultado de diversos cálculos en intervalos determinados.

Indiquen, sin hacer la cuenta, cuál o cuáles de estos cálculos estará entre 200 y 250.

467: 2,9

4567,55 : 22

34,34 x 7,3

250 x 0,9

Lectura obligatoria

¿A qué nos referimos cuando hablamos de cálculo mental en el aula, a propósito de las fracciones? (pp 138 – 142), en "El trabajo escolar en torno a las fracciones", Cap 5 de *La matemática escolar de Itzcovich y otros*, Buenos Aires: Aique, 2008.

Actividades de la clase

Actividades obligatorias:

Actividad matemática de la clase

Esta actividad se resuelve en el foro.

Se espera que participen en el foro, con dos intervenciones:

- compartiendo sus registros e ideas,
- seleccionando un aporte de otro colega, ampliando, refutando o expresando su opinión al respecto.

Actividad didáctica de la clase

Recomendaciones para la entrega

- El trabajo deberá realizarse en formato word (Texto justificado, fuente: arial - calibri tamaño 11, no transcribir las consignas de la actividad)

- No podrá extenderse más de dos carillas. Incluir un encabezado con los siguientes datos: Nombre de la Actualización, Nombre de la actividad y clase, nombre del cursante y nombre del tutor (4 renglones, en la misma fuente y tamaño de letra que el cuerpo del texto)

- Todas las citas y referencias bibliográficas deben ser realizadas de acuerdo a las normas APA.

- Deberán entregar el documento en este BUZÓN DE ENTREGA con la denominación: "Apellido_Nombre_Actividad_obligatoria_Clase_4_Aula XX"

Actividad optativa:

Foro de Consultas

Recuerden que tienen a disposición este espacio para consultar todo lo que necesiten.

Actividad didáctica de la clase

Analicen la siguiente propuesta de juego teniendo en cuenta:

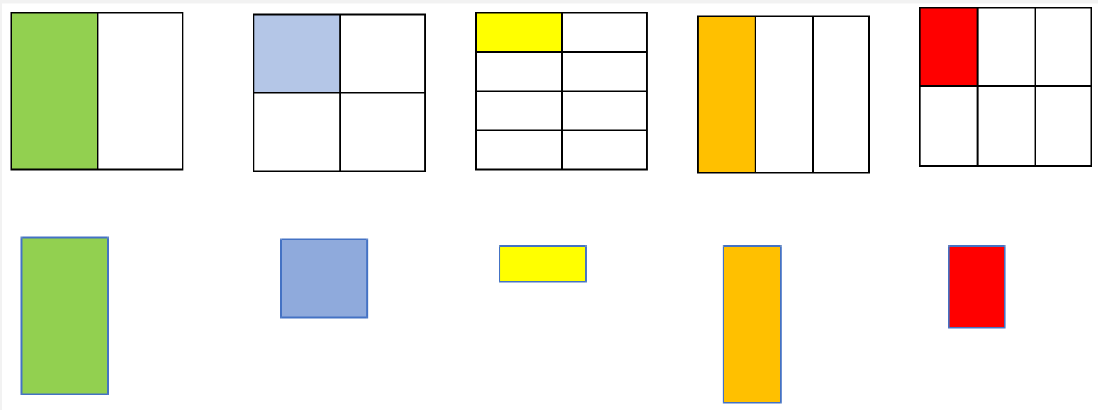
a. ¿Cómo se pone en juego la noción de equivalencia?
b. Las posibles conclusiones que se podrían sacar después de jugarlo.
c. ¿Qué actividad simulando el juego se puede proponer luego de jugar, para discutir nuevas estrategias o en la que se reutilicen las conclusiones, o en la que se analicen explicaciones?

"El que llega a 2, gana"

Materiales:

- papel, lápiz y dos papeles de taco o papel glasé sin recortar para cada jugador.

- Para cada grupo: ocho fichas de ½, ocho de ¼, dieciséis de 1/8, seis de 1/3 y doce de 1/6 (las fichas deberán construirse a partir del mismo cuadrado tomado como unidad tal como se muestra en el dibujo).



- Un dado con etiquetas pegadas en sus caras en las que se escriben los siguientes valores ½ - 3/4 -3/8 – 2/3 - 5/6 - 5/8.

Organización de la clase: se juega en grupos de 4 alumnos

Reglas del juego: Se colocan todas las fichas en el centro de la mesa. Antes de comenzar, cada jugador coloca delante de sí dos papeles sin cortar que serán considerados como enteros. En su turno, cada jugador tira el dado y retira del pozo común la ficha correspondiente a la fracción obtenida. También puede armar la fracción con otras fichas menores (por ejemplo al obtener ¼, saca dos de 1/8). A medida que avanza el juego cada jugador debe ir colocando las fichas sin superponerlas sobre los papeles glasé sin recortar. El primero que llega a completar 2 enteros, gana.

Actividad matemática de la clase

a. Analicen los siguientes desarrollos para explicar las reglas siguientes:

- ¿Por qué funciona la regla de multiplicar cruzado al comparar fracciones?

$\frac{3}{4}$ $\qquad\qquad$ $\frac{4}{5}$

3x5 $\qquad\qquad$ 4x4

$15 \quad < \quad 16$

$\frac{4}{5}$ es mayor

- ¿Por qué vale hacer “20 dividido 4 por 3 igual 15 y luego 20 dividido 5 por 4 igual 16” al sumar estas fracciones?

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{15+16}{20} = \frac{31}{20}$$

b. Relacionen sus explicaciones con el contenido de la clase

Bibliografía de referencia

Tahan, Malba (2006). *El hombre que calculaba*. Ed Pluma y Papel. Buenos Aires. Argentina

MECyT (2001). *Juegos en matemática EGB 2. El juego como recurso para aprender*. Material para docentes.

MECyT, (2014). *Matemática para todos en el nivel primario*. Notas para la enseñanza. La enseñanza de las operaciones con fracciones y números decimales.

MECyT,. Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente (2006) *Matemática 4, 5 y 6. Serie Cuadernos para el aula*. Buenos Aires.

MECyT, (2005) Núcleos de aprendizajes priorizados 2° ciclo EGB/Nivel primario

Itzcovich y otros (2008) “El trabajo escolar en torno a las fracciones”, Cap 5 en *La matemática escolar.* Buenos Aires, Aique.

Créditos

Autores: Silvia Chara

Cómo citar este texto:

Chara, Silvia (2022). Clase Nro.4: Decimales y fracciones: escrituras, formas de calcular y cálculo mental. Módulo 3: Temas de enseñanza de Número y Operaciones. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.