Primero la Secundaria

MATEMÁTICA

Módulo 3

Funciones y Relaciones Trigonométricas

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación

Primero la Secundaria

MATEMÁTICA

Módulo

3

Funciones y Relaciones Trigonométricas

Contenido

Presentación

Antes de comenzar con los temas del tercer módulo de Matemática, te recordamos algunas orientaciones para organizar el estudio.

Para repasar para el examen, te brindamos material de estudio con explicaciones teóricas y ejemplos que te servirán para recordar los temas que ya trabajaste en clase, y encontrarás actividades que te ayudarán a concentrarte en los temas más importantes. También encontrarás una animación para entender mejor una fundamentación teórica. Te recomendamos que la descargues de la plataforma para mirarla mientras leés. En cualquier caso es información para sumar a tu comprensión pero que no va a ser evaluada en el módulo ni en el examen.

Te sugerimos que dediques entre una hora y media o dos, por día, al estudio y la práctica así, en una semana, alcanzarás a preparar todo el módulo.

En esta guía vamos a repasar, primero, los triángulos para poder introducir el teorema de Thales. Luego, vamos a trabajar con relaciones entre lados y ángulos de una clase particular de triángulos: los triángulos rectángulos. Esto último nos llevará, primero, al teorema de Pitágoras y después, a aprender sobre algunas funciones trigonométricas. El objetivo es que puedas comprender algunas relaciones geométricas y que con ellas puedas resolver situaciones problemáticas. En las explicaciones vas a encontrar deducciones de varias relaciones, es importante que las leas para poder comprender bien qué implican sus conclusiones y luego cómo aplicarlas. En los ejercicios y en los exámenes se evaluará la aplicación de las relaciones, funciones y teoremas (pero no las deducciones).

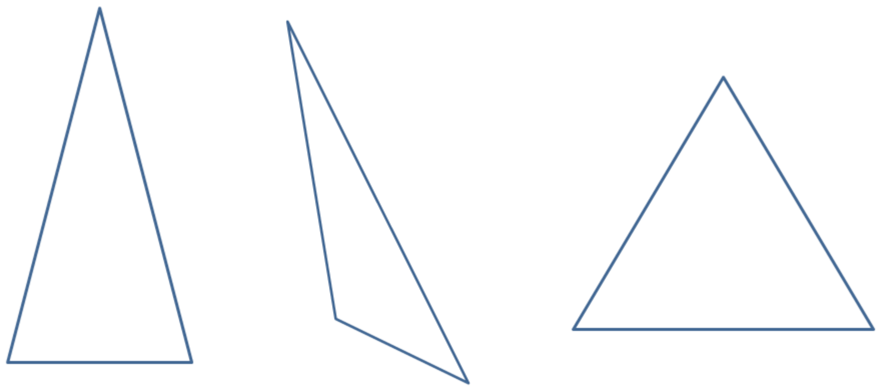
Al igual que en los módulos anteriores, vamos a ir aprendiendo en base a ejercicios. Antes de seleccionar la opción que consideres correcta, hacé el ejercicio a conciencia, encontrá el resultado y luego buscalo entre las opciones. Luego, leé bien la solución en las claves de corrección. Te sugerimos que leas con atención los desarrollos de las soluciones tanto si pudiste encontrar la solución correcta como si no lo lograste. Al finalizar el módulo, volvé a hacer los ejercicios para autoevaluarte y saber si pudiste incorporar los temas.

Triángulos

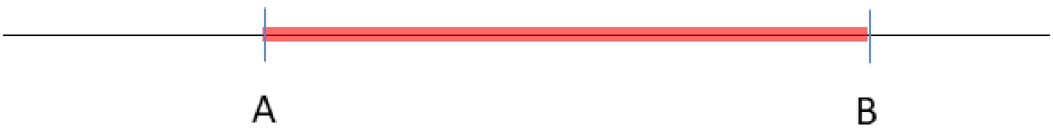
Las partes de los triángulos

A lo largo del módulo vamos a trabajar con triángulos. Si bien seguramente ya sabés qué es un triángulo, vamos a formalizar algunas notaciones y características. Esta sección no es en sí mismo un objetivo del módulo, pero es necesaria para refrescar un lenguaje común que vamos a ir utilizando.

Un triángulo es una figura plana que consiste en un polígono de tres lados. Que sea una figura plana significa que el triángulo no tiene volumen, es “chato”. Al ser un polígono, está compuesto por segmentos (fragmentos de recta) que están unidos por sus puntas, uno tras otro, y que el último segmento se une al primero. Al ser de tres lados, también tendrá tres ángulos. Observá los siguientes ejemplos de triángulos:

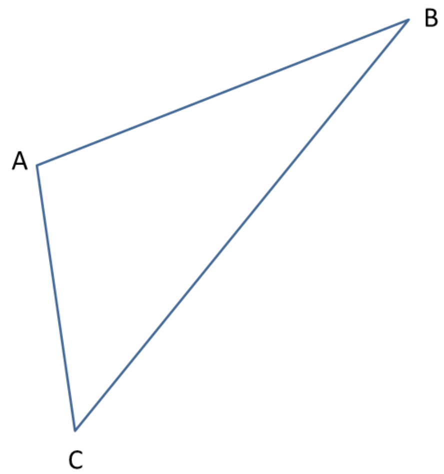


Habíamos mencionado que los triángulos están compuestos por segmentos. Veamos un segmento y cómo lo nombramos:



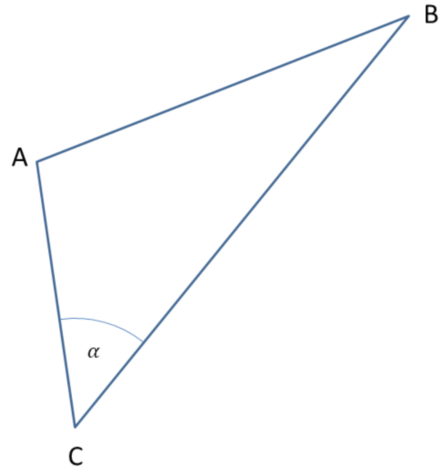
En la figura anterior, el segmento marcado en rojo forma parte de la recta marcada en negro. El segmento tiene un comienzo y un fin que están determinados por dos puntos, en este caso son los puntos A y B. Los puntos suelen recibir una letra mayúscula como nombre identificador. Al nombrar los segmentos, se lo hace en base a sus extremos, con lo cual el segmento de la figura tiene el nombre $\overline{AB}$.

Un triángulo está compuesto por 3 segmentos, entonces resulta natural identificarlo por los segmentos por los cuales está compuesto. Tomemos este triángulo:

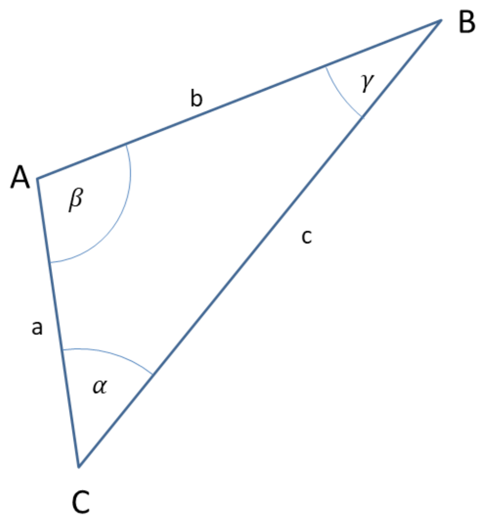


El triángulo de la figura está compuesto por los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$. Los extremos de los segmentos son las "puntas" del triángulo. A esas puntas las llamamos "vértices". A un vértice lo identificamos con el nombre del punto en común a los lados que lo forman. Con esta información nos alcanza para identificar al triángulo con una notación compacta: $\overset{\Delta}{ABC}$. En esta notación se indican los tres vértices y se dibuja un triángulo arriba. Como debe haber una notación para polígonos de cualquier cantidad de lados (y sería muy molesto dibujar, por ejemplo, un octógono arriba de la lista de sus 8 vértices), también se utiliza la notación *ABC*, que es simplemente la enumeración de sus vértices. Se puede empezar por el vértice A o por cualquier otro, el requisito es ir recorriendo la figura pasando en orden por todos sus vértices, con lo cual el triángulo también podría llamarse *BCD* o *CAB*. Es más, en estos casos recorrimos el triángulo en el sentido de las agujas del reloj, cosa que tampoco era necesaria con lo cual *CBA* también es un nombre válido del mismo triángulo. ¿Por qué dimos aquí tanta variedad de nombres? Para que seamos cuidadosos y sepamos reconocer la figura independientemente de la elección del nombre.

Ahora que ya sabemos cómo identificar un triángulo y sus lados, veremos la forma de identificar sus ángulos. Volvamos al triángulo anterior:



Dentro del triángulo marcamos un ángulo con un arco. El arco va a tener un trazo delgado o punteado porque es importante que se pueda distinguir del trazo correspondiente a la figura del triángulo. Al ángulo le damos un nombre que usualmente es una letra griega minúscula. Por ejemplo, el ángulo α que marcamos corresponde al vértice que se forma entre los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, por lo que surge para identificarlo la notación $A\hat{C}B$ (un ^ arriba como "sombrero" que puede ir sobre el punto del vértice o sobre los tres puntos). De esta forma, $A\hat{C}B$ y α se refieren al mismo ángulo. Para completar, también se puede poner nombre a los lados:



En la última figura agregamos nombres a los lados sobre los segmentos que lo forman, por ejemplo: el lado $\overline{AB}$ es el mismo lado al que llamamos b. El nombre que utilizamos fue una letra minúscula para distinguir de los puntos a los que llamamos con una letra mayúscula, sin embargo podemos utilizar letras mayúsculas o siglas, lo importante es que se distinga que uno se refiere a un lado y no a un punto o a un ángulo.

Relaciones entre los ángulos de un triángulo

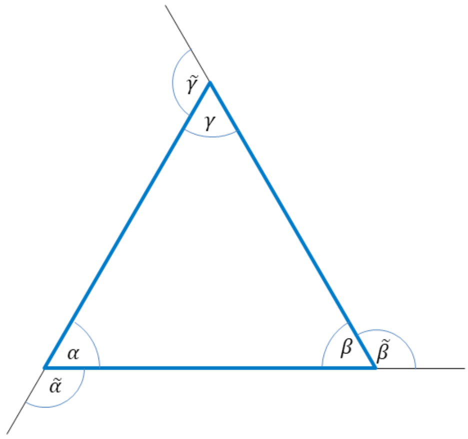
A continuación te vamos a explicar el modo de deducir la relación entre los ángulos de los triángulos. La explicación que sigue es para que comprendas la fundamentación, pero no es algo que vamos a evaluar ni en los ejercicios de este módulo, ni en el examen.

Lo primero que debemos observar es la relación entre los ángulos de un triángulo.

Para eso vamos a partir de una animación simple, observala haciendo click en el siguiente enlace:

http://primerolasecundaria.net/recursos/gifs/rtriangulo.gif

Observemos primero el segmento que está en la parte izquierda de la animación. Ese segmento azul, al dar una vuelta completa girará 360º. Hace el giro entrecortado para esperar a que ocurra algo en el resto de la figura de la animación. Ahora observemos el triángulo de la derecha y el segmento rojo que va girando y trasladándose por él. Este segmento gira hasta tocar un lado del triángulo, se traslada sin rotar hasta el vértice siguiente y repite la acción. Prestá atención a que el segmento rojo gira exactamente el mismo ángulo que el azul y lo hace al mismo tiempo, hay momentos en los que se desliza, pero no rota. Después de 3 de estos pasos de giro + traslación, el segmento rojo vuelve a la posición original. ¿Cuánto giró? Como giró exactamente lo mismo que el azul, terminó barriendo también un ángulo de 360º. En la animación te mostramos cómo el segmento rojo que se mueve sobre el triángulo va dejando una "estela" para resaltar ciertos ángulos sobre los que queremos que prestes atención. Nombremos los ángulos del triángulo de la animación:



Los ángulos que indicamos con letras griegas con un símbolo ~ arriba se llaman ángulos externos, y son los que barrió el segmento rojo dejando su estela. Podemos notar que el ángulo externo más el interno de cada vértice suman 180:

$$\alpha + \tilde{\alpha} = 180°$$

$$\beta + \tilde{\beta} = 180°$$

$$\gamma + \tilde{\gamma} = 180°$$

Los ángulos que suman 180º se llaman suplementarios. Sumemos los tres pares de ángulos suplementarios:

$$\alpha + \tilde{\alpha} + \beta + \tilde{\beta} + \gamma + \tilde{\gamma} = 180° + 180° + 180°$$

Reordenamos un poquito el miembro izquierdo (agrupando juntos los ángulos internos y luego los externos) y sumamos en el miembro derecho:

$$\alpha + \beta + \gamma + \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 540°$$

La línea roja de la animación había recorrido los tres ángulos externos de forma de completar un giro, esto significa que $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 360°$

$$\alpha + \beta + \gamma + \underbrace{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}}_{360°} = 540°$$

$$\alpha + \beta + \gamma + 360° = 540°$$

Despejamos:

$$\alpha + \beta + \gamma = 540° - 360°$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Llegamos a una conclusión importante:

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180º

En el camino, también obtuvimos una conclusión que aplica a cualquier polígono:

La suma de los ángulos externos de cualquier polígono es siempre 360º

El objetivo en los ejercicios y en el examen, es que puedas aplicar estas conclusiones, **no es necesario que las deduzcas, aquí lo hicimos para que comprendas el fundamento.**

Ahora, a poner en práctica lo aprendido!

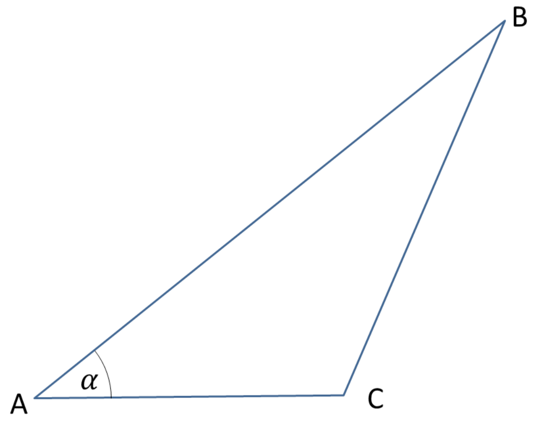
A. Indicá la respuesta correcta.

Observá la figura donde se muestra al triángulo ABC.

Se conoce cuánto valen dos de sus ángulos:

$A\hat{B}C = 30°$

$\alpha = 45°$

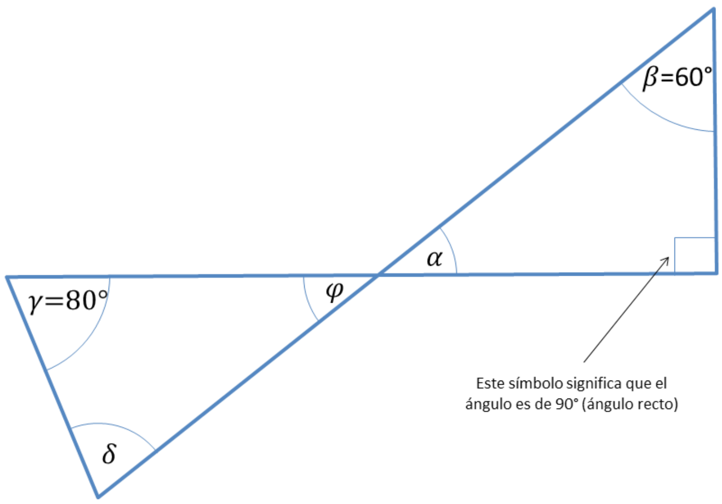


¿Cuánto vale el ángulo $\hat{ACB}$?

- $\hat{ACB}$ = 85°
- $\hat{ACB}$ = 95°
- $\hat{ACB}$ = 105°
- $\hat{ACB}$ = 285°

B. Indicá la respuesta correcta.

Observá la figura. Prestá atención a que $\alpha = \varphi$ por como está construida la figura:

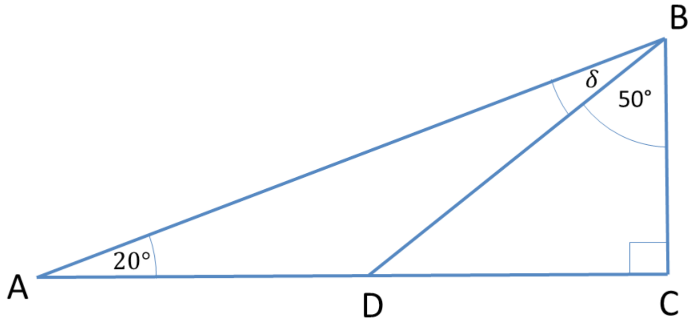


¿Cuánto vale el ángulo φ ?

- φ = 60°
- φ = 70°
- φ = 80°
- φ = 90°

C. Indicá la respuesta correcta.

Enunciado Observá atentamente la figura.

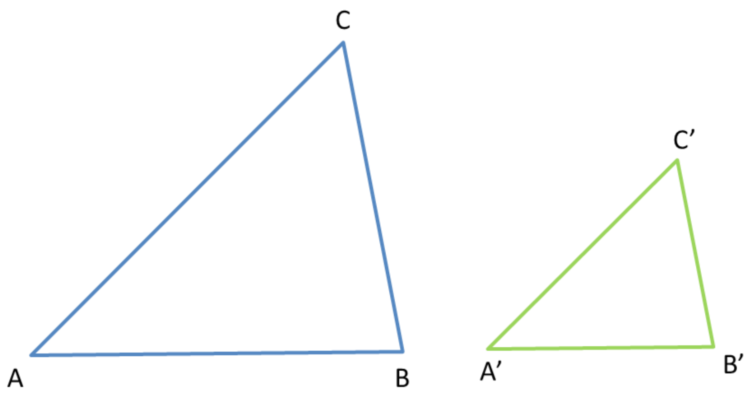


¿Cuánto vale el ángulo $A\hat{D}B$?

- $A\hat{D}B = 110°$
- $A\hat{D}B = 140°$
- $A\hat{D}B = 150°$
- $A\hat{D}B = 160°$

Triángulos semejantes y teorema de Thales

Dos triángulos son semejantes si tienen ángulos iguales. Veamos un ejemplo de triángulos semejantes:



Podemos ver que ambos triángulos tienen los mismos ángulos, entre los dos hay solamente una diferencia de escala, uno es más grande que el otro pero tienen la misma forma. La relación (división) entre los lados semejantes debe ser igual:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}}$$

También, como las formas son iguales, tomamos el cociente de dos lados en uno de los triángulos, que debe ser igual al cociente de los lados semejantes en el otro. Por ejemplo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

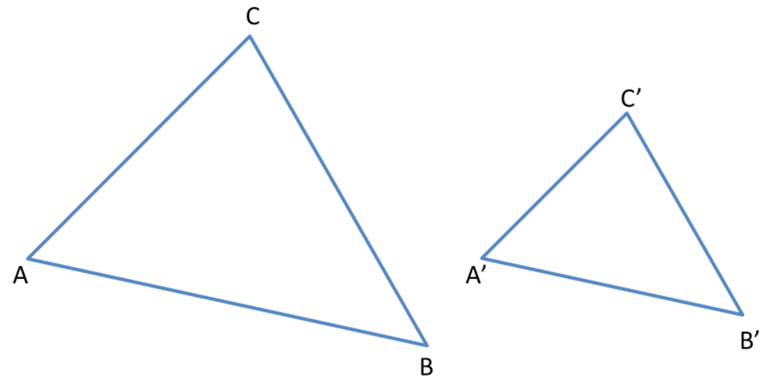
(Para entender bien las relaciones anteriores, fijate con atención a cuáles segmentos se refiere cada operación).

Ahora, seguí practicando:

A. Indicá la respuesta correcta..

Observá la figura donde se muestran dos triángulos semejantes. Se sabe que:

$\overline{AB}$ = 12 cm ; $\overline{AC}$ = 10 cm ; $\overline{A´B´}$ = 6 cm

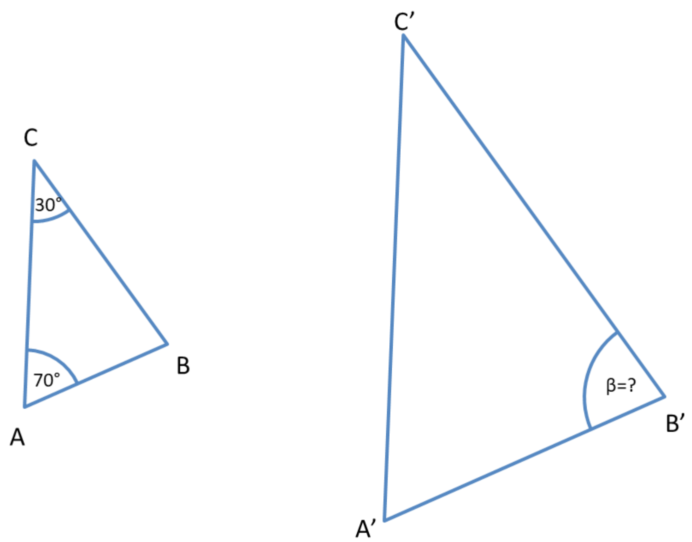


¿Cuál es el largo del lado $\overline{A´C´}$?

- $\overline{A´C´}$ = 4 cm
- $\overline{A´C´}$ = 5 cm
- $\overline{A´C´}$ = 6 cm
- $\overline{A´C´}$ = 7 cm

B. Indicá la respuesta correcta.

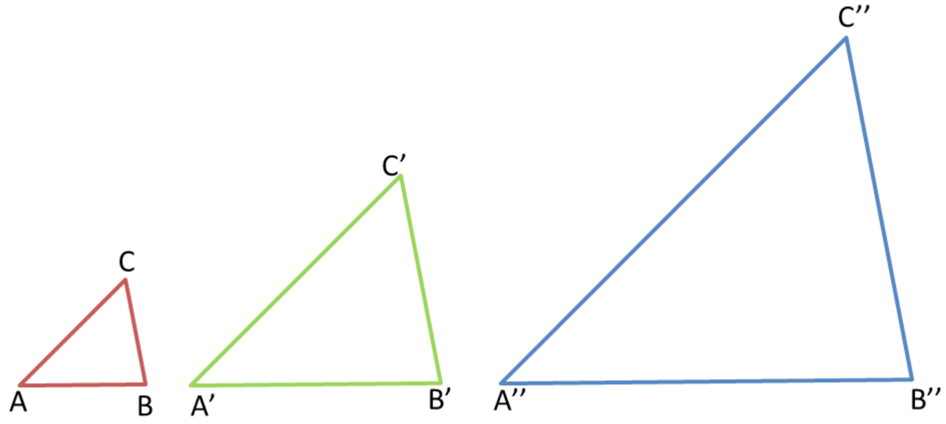
Se tienen dos triángulos semejantes, como se indica en la siguiente figura.



¿Cuánto vale el ángulo β ?

- β = 60°
- β = 70°
- β = 80°
- β = 100°

Veamos qué ocurre cuando superponemos 3 triángulos semejantes. Te mostramos primero una figura con los tres triángulos separados.

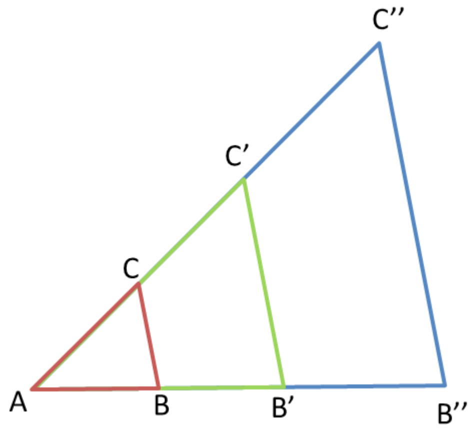


Por ser triángulos semejantes:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{C'B'}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{C''B''}}{\overline{A''C''}} \qquad *$$

Antes de avanzar, veamos qué significa la relación anterior. Está indicando que el cociente de dos lados de un triángulo da el mismo resultado que hacer el cociente de los lados equivalentes en cualquier triángulo semejante al triángulo original. Fijate que hay un asterisco y es para indicarte que vamos a retomar esta expresión más adelante.

Ahora te mostramos los tres triángulos, pero superpuestos en un vértice. Como A, A' y A'' quedan superpuestos, vamos a llamar siempre a ese punto como A. Quedan dos líneas diagonales y tres líneas paralelas:

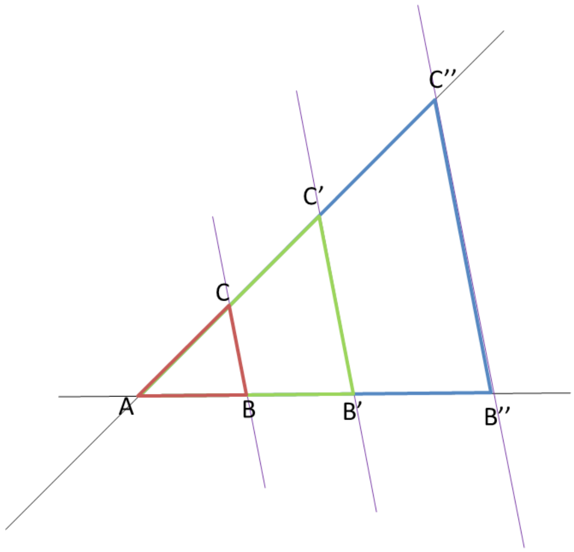


Podemos observar (y demostrar matemáticamente, pero no es algo que vamos a hacer aquí) que:

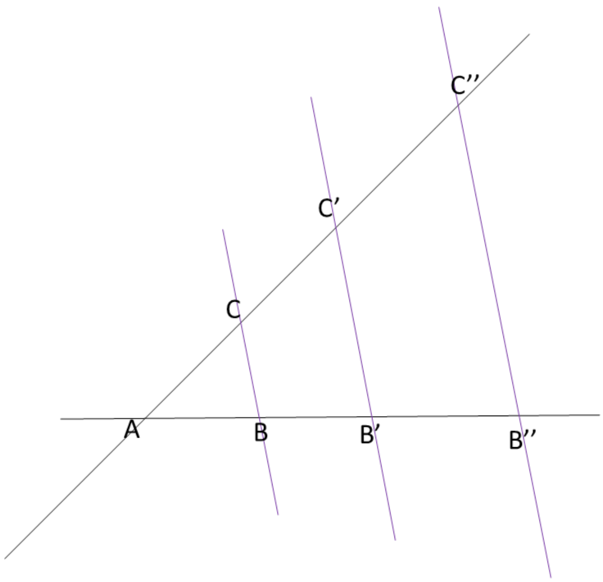
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{C'C''}}{\overline{B'B''}} \qquad **$$

Esto quiere decir que si tomamos el cociente entre los tramos sobre las diagonales (que quedaron pintados del mismo color) siempre obtendremos el mismo resultado. Marcamos la expresión con ** porque la utilizaremos más adelante.

Vamos a hacer un paso en la transformación del dibujo agregando unas líneas de fondo:



Borramos los triángulos y nos quedamos con las líneas que teníamos para llegar a la forma del teorema de Thales:

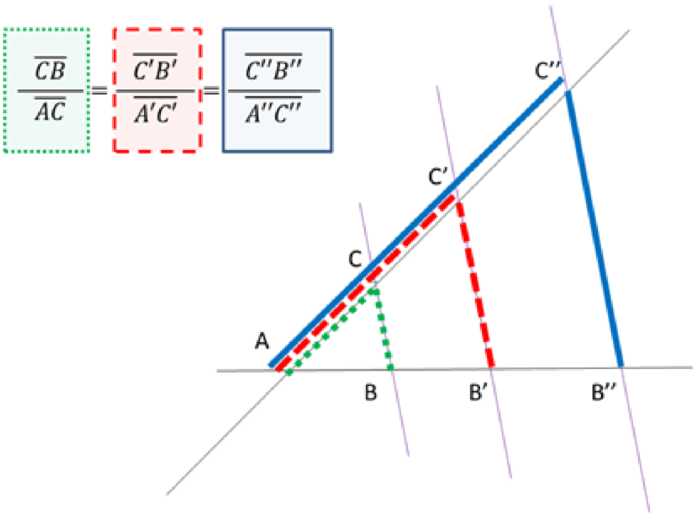


Dadas dos líneas diagonales cortadas por una serie de líneas paralelas (como la última figura), el teorema de Thales consiste en dos leyes:

- **Primera ley**: relaciona cocientes entre segmentos paralelos y diagonales. La expresión matemática es la que habíamos señalado con *:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{C´B´}}{\overline{A´C´}} = \frac{\overline{C´´B´´}}{\overline{A´´C´´}}$$

Observá bien la figura asociada al teorema prestando mucha atención a cuáles son los segmentos que se están relacionando y cómo son esas relaciones. Si tenés dificultades en identificar los segmentos y sus relaciones, mirá la siguiente figura donde resaltamos con el mismo tipo y color de línea los segmentos de cada cociente:

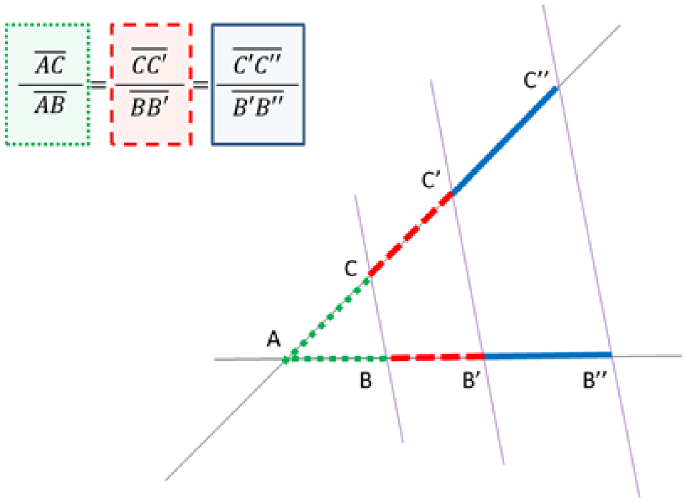


- **Segunda ley**: el cociente entre el largo del tramo de una de las diagonales que queda encerrado entre dos paralelas, respecto al largo del tramo de la otra diagonal que queda encerrado por las mismas paralelas es siempre el mismo.

Relacioná los tramos de las diagonales encerrados entre dos paralelas. Corresponde a la fórmula que estaba más arriba marcada con **:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CC´}}{\overline{BB´}} = \frac{\overline{C´C´´}}{\overline{B´B´´}}$$

Al igual que para la primera parte, observá bien el gráfico asociado al teorema. Si tenés dificultad en identificar los segmentos y sus relaciones, mirá la siguiente figura donde resaltamos con el mismo tipo y color de línea los segmentos de cada cociente:

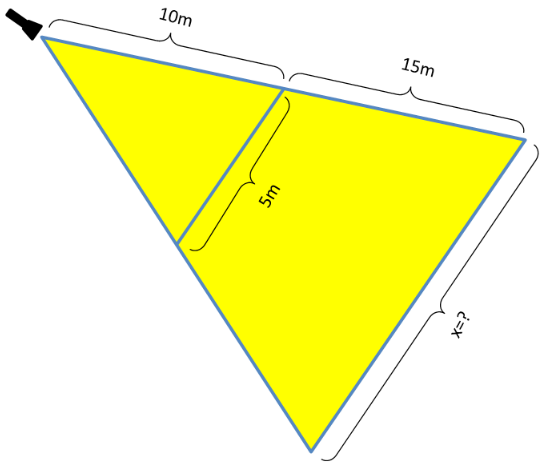


En los ejercicios y en los exámenes trabajarás aplicando el teorema de Thales, no será necesario que sepas deducirlo. En este módulo mostramos su deducción para poder llegar los enunciados de sus leyes y que luego puedas aplicarlas.

Ahora, seguí practicando para comprobar si entendiste bien:

C. Indicá la respuesta correcta.

Una linterna tiene 5m de apertura de iluminación a 10m medidos por la diagonal como muestra el siguiente esquema.

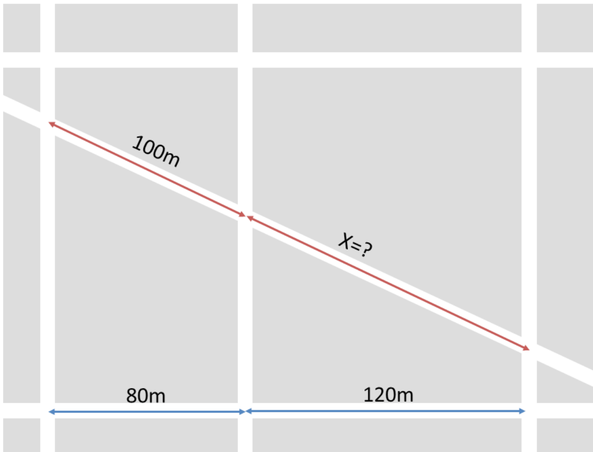


¿Cuál será la apertura x?

- x = 7,5 m
- x = 10,5 m
- x = 12,5 m
- x = 15 m

D. Indicá la respuesta correcta.

Observá el mapa de la figura. Ana y Juan caminan para encontrarse. Ana va por el recorrido marcado en azul: en la primera cuadra camina 80m y, en la segunda, 120m. Juan avanza por una calle diagonal y en la primera cuadra camina 100m.

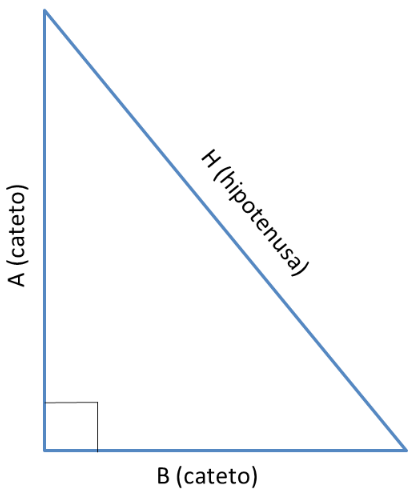


¿Cuál es la distancia X que debe caminar Juan en su segunda cuadra?

- X = 100 m
- X = 120 m
- X = 140 m
- X = 150m

Teorema de Pitágoras

Vamos a comenzar a trabajar con una clase particular de triángulos: los triángulos rectángulos, que tienen la siguiente característica: uno de sus ángulos es recto, es decir de 90 . Un triángulo rectángulo sería el siguiente:



La marca en el ángulo inferior izquierdo indica que ese ángulo es recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman “catetos” y el restante recibe el nombre de “hipotenusa”.

El teorema de Pitágoras establece que:

La suma de los cuadrados de los catetos es igual a la suma del cuadrado de la hipotenusa.

En el triángulo de la última figura, la expresión matemática es:

$$H^2 = A^2 + B^2$$

Ahora entrá a los siguientes links que tienen explicaciones y ejercicios para que realices y practiques sobre el Teorema de Pitágoras. Mirá los videos y hacé los ejercicios.

Si querés practicar un poco más sobre el teorema de Pitágoras, de manera optativa entrá a estos links y realizá los ejercicios:

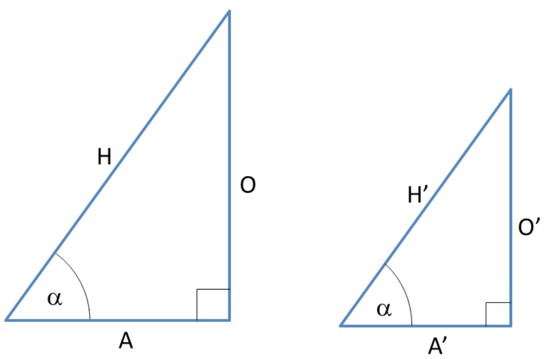
https://www.educ.ar/recursos/60230/aplicacion-del-teorema-de-pitagoras

https://www.educ.ar/recursos/90858/skoool-tm-leccion-uso-del-teorema-de-pitagoras

https://www.educ.ar/recursos/91036/skoool-tm-leccion-ejemplos-del-teorema-de-pitagoras-segunda-parte

Funciones Trigonométricas

Seguiremos trabajando con triángulos rectángulos. Tomemos dos triángulos rectángulos semejantes (con ángulos iguales aunque con lados de diferente dimensión)::



Teniendo determinados dos ángulos (α y el ángulo recto), el restante queda también determinado ya que sabemos que los ángulos internos deben sumar 180°. Para relacionar los nombres de los lados con el ángulo *α*, llamamos "O" al cateto opuesto a este ángulo, "A" al adyacente, y "H" a la hipotenusa. Por ser semejantes:

$$\frac{A}{H} = \frac{A'}{H'}$$

$$\frac{O}{H} = \frac{O'}{H'}$$

$$\frac{O}{A} = \frac{O'}{A'}$$

Estas relaciones no dependen del tamaño del triángulo mientras sean semejantes, lo cual implica que estos cocientes quedan determinados por el ángulo *α*: son funciones del ángulo *α.* Esas funciones son las llamadas "funciones trigonométricas", el coseno, seno y tangente, y las indicamos así:

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

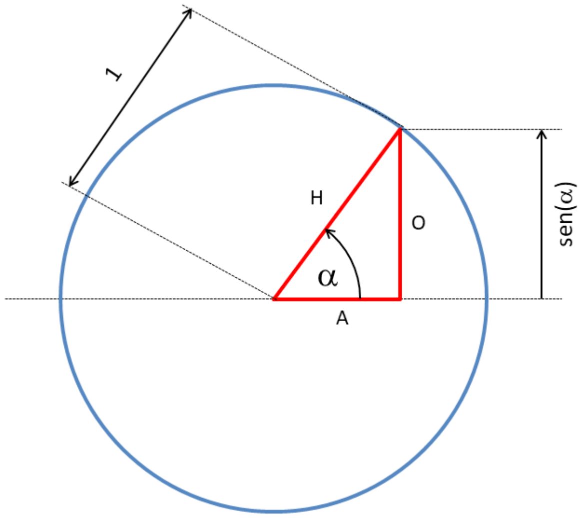
$$\cos(\alpha) = \frac{O}{H'}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{O}{A}$$

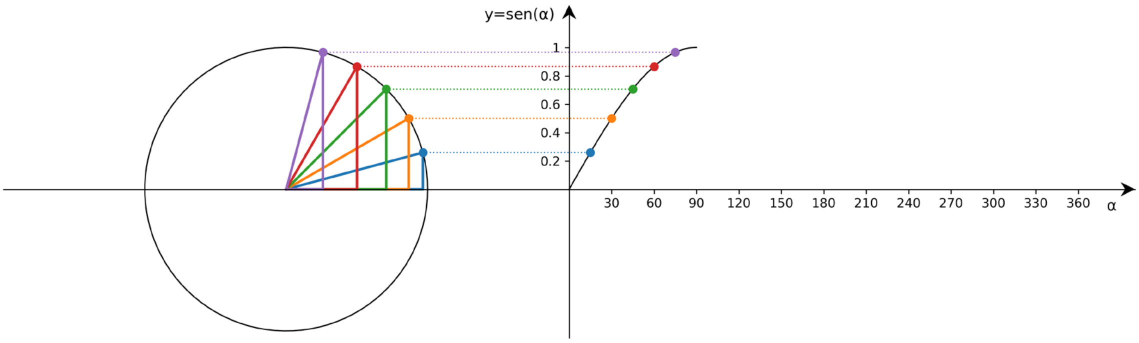
Vamos a concentrarnos ahora en el seno. Primero te vamos a mostrar el camino para encontrar los valores de esta función. En los ejercicios y en los exámenes, tendrás que aplicar la función pero no hará falta que deduzcas la forma de calcular sus valores. Aquí haremos algunas explicaciones para mostrarte de dónde vienen sus valores y cómo es la forma de la función. En el caso de que la hipotenusa valga exactamente "1" se dará la relación:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{O}{H} = \frac{O}{1} = O$$

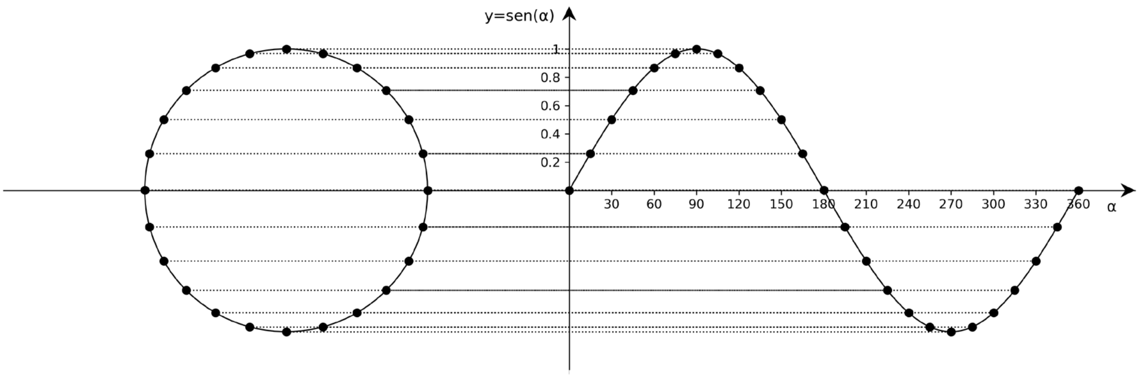
En el dibujo a continuación van a poder ver un triángulo rectángulo dentro de un círculo de radio "1" (que es el valor de la hipotenusa). Haremos coincidir la hipotenusa con un radio de forma de asegurar que la hipotenusa valdrá "1". Si el cateto adyacente es la línea horizontal, el cateto opuesto será la altura y, por lo tanto, el seno:



Avancemos un poco y grafiquemos el seno en función del ángulo. Para distintos ángulos graficamos el triángulo dentro del círculo de radio “1”. Observá cómo el triángulo hace contacto con el círculo en un punto que va avanzando en sentido antihorario a medida que crece el ángulo α. Luego, graficamos la altura del triángulo en función del ángulo y vamos trazando la curva:

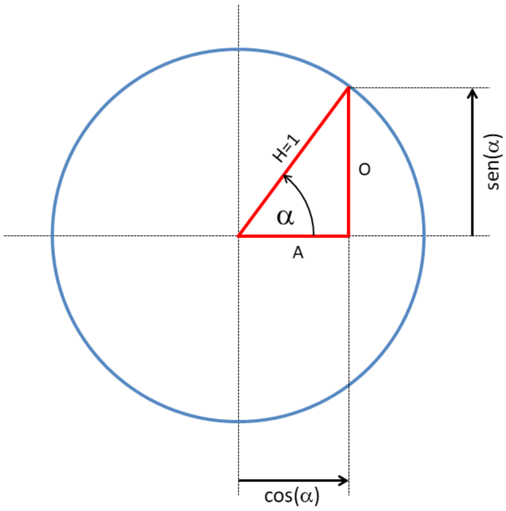


Si bien el ángulo que estábamos analizando puede ir de 0 a 90°, la función seno está definida más allá y permite el giro completo. Para la próxima figura vamos a completar el giro, para ello solamente vamos a marcar los puntos en el círculo y trasladarlos a la curva del seno sin dibujar los triángulos, ya que el gráfico se haría muy cargado. Asegurate de poder identificar cada punto del círculo con un punto en la curva del seno.



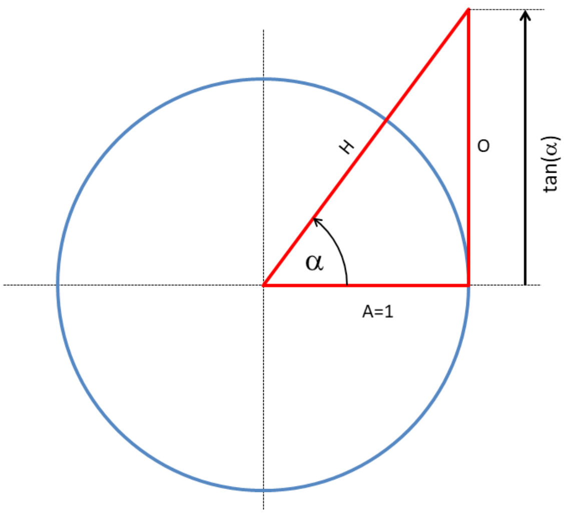
El ángulo no se restringe al rango 0 a 360°, ángulos mayores dirán que se hizo más de un giro y ángulos negativos dirán que el giro es hacia el otro lado. Como al dar una vuelta se vuelve al mismo lugar, la función seno es periódica, es decir, va repitiendo su forma y valores cada 360°: sen (α + 360°) = sen (α).

Recién trabajamos con el "círculo trigonométrico", que es un círculo de radio "1" que nos permite calcular en forma gráfica las funciones trigonométricas. Para calcular el seno y el coseno dibujamos un triángulo rectángulo contenido en el círculo. El cateto adyacente será el horizontal y la hipotenusa será un radio. La altura del triángulo será el seno y la base, el coseno (hacé el mismo razonamiento que hicimos con el seno: fijá la hipotenusa con H=1 y fíjate cuánto debería valer el coseno).

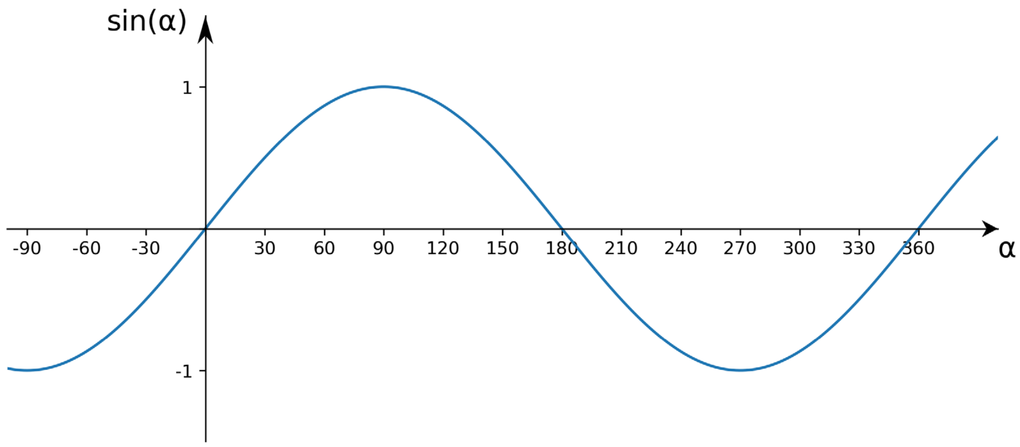


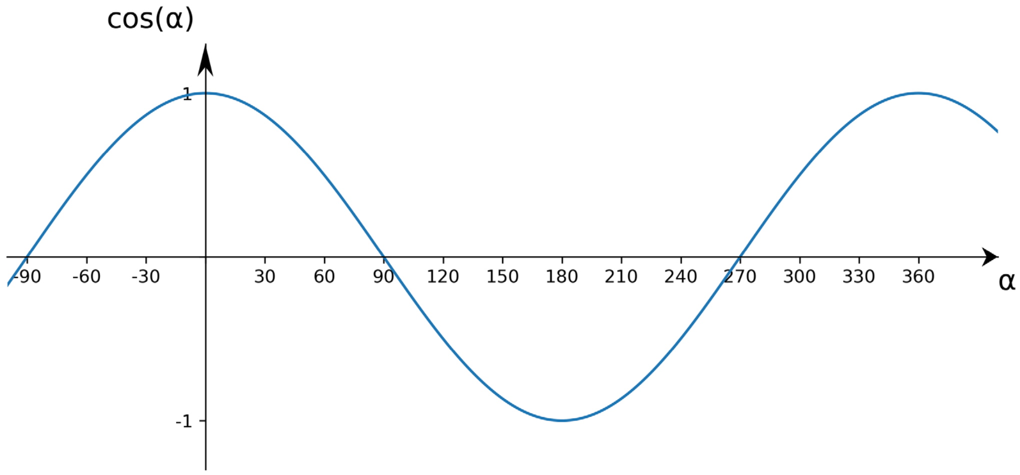
Para el caso de la tangente debemos hacer que el cateto adyacente sea 1 para que el opuesto sea la tangente del ángulo:

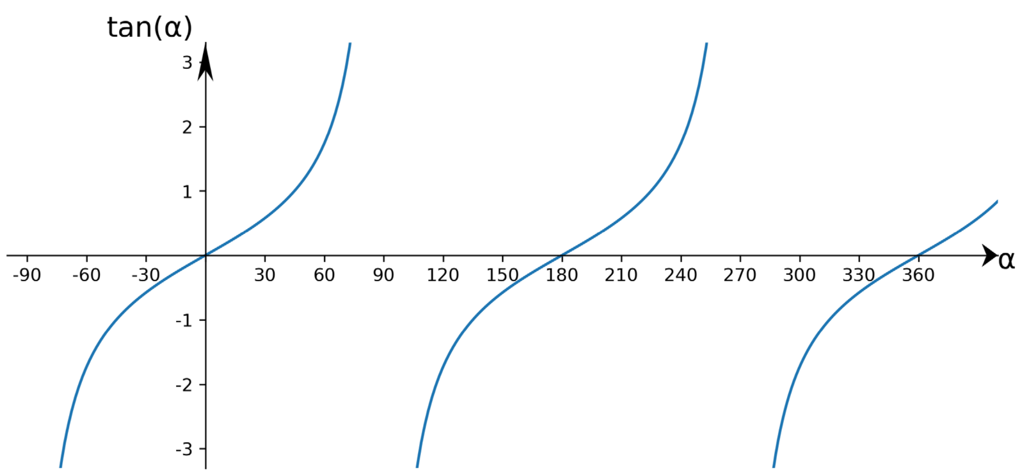
$$\tan(\alpha) = \frac{O}{A} = \frac{O}{1} = 1$$



Por último, te dejamos las curvas de las funciones trigonométricas que vimos y una tabla con algunos de sus valores por si no tenés acceso a una calculadora científica que te permita calcularlos. En los ejercicios del examen tendrás estas tablas cuando las necesites. Observá que las funciones seno y coseno tienen su codominio acotado al rango -1 a 1. La tangente tiene todos los reales como codominio y hay lugares donde crece al infinito.







α [º]	sen (α)	cos (α)	tan (α)
0	0	1	0
15	0.259	0.966	0.268
30	0.5	0.866	0.577
45	0.707	0.707	1
60	0.866	0.5	1.732
75	0.966	0.259	3.732
90	1	0	--
105	0.966	-0.259	-3.732
120	0.866	-0.5	-1.732
135	0.707	-0.707	-1
150	0.5	-0.866	-0.577
165	0.259	-0.966	-0.268
180	0	-1	0
195	-0.259	-0.966	0.268
210	-0.5	-0.866	0.577
225	-0.707	-0.707	1
240	-0.866	-0.5	1.732
255	-0.966	-0.259	3.732
270	-1	0	--
285	-0.966	0.259	-3.732
300	-0.866	0.5	-1.732
315	-0.707	0.707	-1
330	-0.5	0.866	-0.577
345	-0.259	0.966	-0.268
360	0	1	0

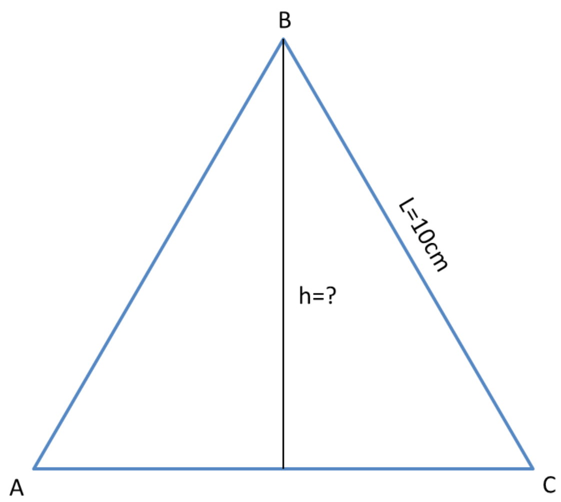
Para que sigas practicando, de manera optativa te dejamos un link con ejercicios sobre las funciones trigonométricas:

https://www.educ.ar/recursos/90002/skoool-tm-leccion-funciones-trigonometricas

Ahora, te proponemos más actividades para seguir practicando con las funciones trigonométricas.

A. Indicá la respuesta correcta.

Se tiene el triángulo equilátero (tres lados y tres ángulos iguales) de la figura.



Se dispone además de una tabla de funciones trigonométricas:

α [º]	sen (α)	cos (α)	tan (α)
0	0	1	0
15	0.259	0.966	0.268
30	0.5	0.866	0.577
45	0.707	0.707	1
60	0.866	0.5	1.732
75	0.966	0.259	3.732
90	1	0	--

¿Cuál es la altura h del triángulo?

- h = 5,77 cm
- h = 7,07 cm
- h = 8,66 cm
- h = 9,66 cm

B. Indicá si el siguiente enunciado es Verdadero o Falso.

La tangente de un ángulo se puede calcular sabiendo su seno y su coseno con la siguiente expresión:

$$\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

(*Ayuda: remplazar las funciones trigonométricas por sus definiciones, por ejemplo en lugar de sen (α) poner O/H*)

◯ Verdadero ◯ Falso

Resumen

En esta guía aprendiste y ejercitaste sobre triángulos. Trabajaste con la nomenclatura de sus partes, con los ángulos internos y con triángulos semejantes. Los triángulos semejantes derivaron en el teorema de Thales. Luego repasaste el teorema de Pitágoras y las funciones trigonométricas.

Recordá que el aprendizaje de esta guía está basado en los ejercicios, asegurate de haber hecho todos. Cuando sea necesario, hacelos mirando las explicaciones de las claves de corrección y al otro día rehacelos sin mirarlas, para verificar si comprendiste el tema. Parte del aprendizaje es comprender cómo otros resolvieron un problema y luego poder hacerlo nosotros de manera autónoma.

Claves de corrección

Triángulos

- **A.** La respuesta correcta es $A\hat{B}C$ = 105°.

  Los ángulos internos del triángulo suman 180º:

$$\alpha + A\hat{B}C + A\hat{C}B = 180°$$

$$45° + 30° + A\hat{C}B = 180°$$

$$A\hat{C}B = 180° - 30° - 45° = 105°$$

- **B.** La respuesta correcta es δ = 70°.

  Para calcularla, se siguen los siguientes pasos:

  - Primero, trabajar sobre el de la derecha, se conocen dos de sus ángulos internos, motivo por el cual se puede calcular entonces el ángulo α (se obtendrá *α* = 30°)
  - Sabiendo α, también se conoce δ.
  - Ahora se debe trabajar con el triángulo de la izquierda, conociendo γ y φ, se puede obtener δ sabiendo cuanto tienen que sumar los ángulos internos.

Aquí se indicó un esquema de los pasos que deben hacerse. Realice los cálculos de cada uno de ellos para asegurarse de llegar al resultado correcto.

- **C.** La respuesta correcta es: $A\hat{D}B$ = 140°

  Se propone dos caminos para llegar a la solución. Uno es:

  - En base a los ángulos internos del triángulo *ABC*, calcular el ángulo $A\hat{B}C$
  - Luego fijarse que $A\hat{B}C$ es la suma de los ángulos $D\hat{B}C$ y δ, con lo que se puede calcular delta.
  - Con los ángulos internos del triángulo *ABC*, se calcula $A\hat{D}B$

Otro camino es:

- Calcular el ángulo $C\hat{B}D$ en base a la suma de los ángulos internos del triángulo *BCD*
- Luego, calcular el ángulo $A\hat{D}B$ sabiendo que debe sumar 180° junto con $B\hat{D}C$

En muchos problemas matemáticos se puede encontrar más de un camino para llegar a la solución. Se mostrará alguna forma de trabajar el problema que puede no coincidir otra forma de hacerlo, pero sí deben coincidir sus resultados.

Triángulos semejantes y teorema de Thales

A. La respuesta correcta es $\overline{A'B'}$ = 5 cm. Para encontrarla utilizamos la relación entre lados de triángulos semejantes:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

Remplazando los datos:

$$\frac{6cm}{12cm} = \frac{\overline{A'C'}}{10cm}$$

Despejando:

$$\overline{A'C'} = \frac{6cm}{12cm} * 10cm = 5cm$$

B. La respuesta correcta es β = 80°. Para encontrarlo, primero se debe calcular cuánto vale el ángulo $A\hat{B}C$ utilizando la regla de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Luego β = $A\hat{B}C$ porque son triángulos semejantes.

C. La respuesta correcta es x=12,5m. Para encontrarla, hay que utilizar el primer enunciado del teorema de Thales:

$$\frac{5m}{10m} = \frac{x}{10m + 15m}$$

Notá que se utilizó 10 m +15 m en el lado derecho de la igualdad, esto es así porque debe tomarse la distancia desde el vértice en común a ambos triángulos. Luego se debe depejar x.

D. La respuesta correcta es X =150m. Para encontrar la respuesta se debe aplicar el segundo enunciado del teorema de Thales:

$$\frac{100m}{80m} = \frac{x}{120m}$$

Luego despejar X

Funciones Trigonométricas

A. La respuesta correcta es h = 8,66 cm

Para llegar a este resultado, primero se debe encontrar los ángulos internos del triángulo. Como los tres son iguales y deben sumar 180°, cada ángulo interno es 60°. Ahora, se debe utilizar las funciones trigonométricas:

$$\text{sen}\,(A\hat{C}B) = \frac{h}{L}$$

Remplazando los valores conocidos:

$$\text{sen}\,(60^o) = \frac{h}{10cm}$$

Buscar en la tabla el sen (60°) y despejar *h*.

B. La respuesta correcta es: “Verdadero“. Para encontrarla se debe partir de la expresión del enunciado y remplazar la tangente, el seno y coseno por sus definiciones:

$$\tan\,(\alpha) = \frac{\text{sen}\,(\alpha)}{\cos\,(\alpha)}$$

$$\frac{O}{A} = \frac{\frac{O}{H}}{\frac{A}{H}}$$

Simplificando:

$$\frac{O}{A} = \frac{O}{A}$$

Como la última igualdad es verdadera, el enunciado original es verdadero.

Ministerio de Educación,
Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación