

Primero la
Secundaria

MATEMÁTICA

Módulo

2

Funciones



Ministerio de Educación,
Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación

PRIMERO la
Secundaria

MATEMÁTICA

Módulo

2

Funciones

Contenido

Presentación

Funciones

Ejercicios

Funciones lineales

Ejercicios

Funciones cuadráticas

Ejercicios

Polinomios

Ejercicios

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Ejercicios

Resumen

Claves de corrección

Presentación

Antes de comenzar con los temas del segundo módulo de Matemática, te recordamos algunas orientaciones para organizar el estudio.

Para repasar para el examen, te brindamos material de estudio que te servirá para recordar los temas que ya trabajaste en clase y encontrarás actividades que te ayudarán a concentrarte en los temas más importantes.

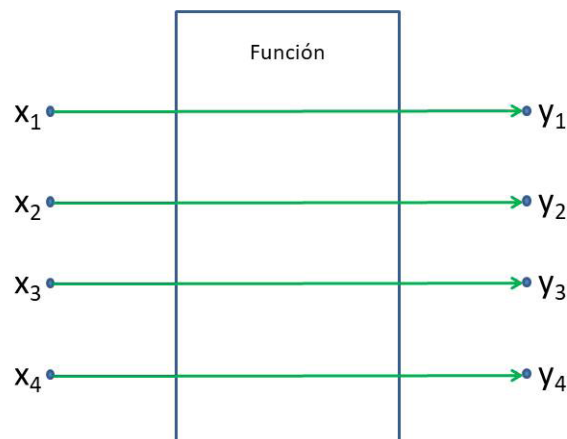
Te sugerimos que dediques entre una hora y media o dos, por día, al estudio y la práctica así, en una semana, alcanzarás a preparar todo el módulo.

En esta guía vamos a tratar las funciones. Primero veremos qué son las funciones y cómo definir las. Trabajaremos sobre qué es el dominio y el codominio. Haremos representaciones gráficas de las funciones que nos permitirán entender mejor su comportamiento. Luego abordaremos algunas funciones usuales. Finalmente, aprovecharemos lo aprendido para avanzar más sobre resolución de ecuaciones. El objetivo de este módulo es que te familiarices con las funciones, puedas reconocer algunas, tanto por sus ecuaciones como por sus gráficos, y que puedas operar con ellas.

Además de las explicaciones, encontrarás ejercicios para practicar. Antes de seleccionar la opción que consideras correcta, hacé el ejercicio a conciencia, encontrá el resultado y recién después buscá las respuestas correctas. Leé bien la solución donde encontrarás explicados los procedimientos.

Funciones

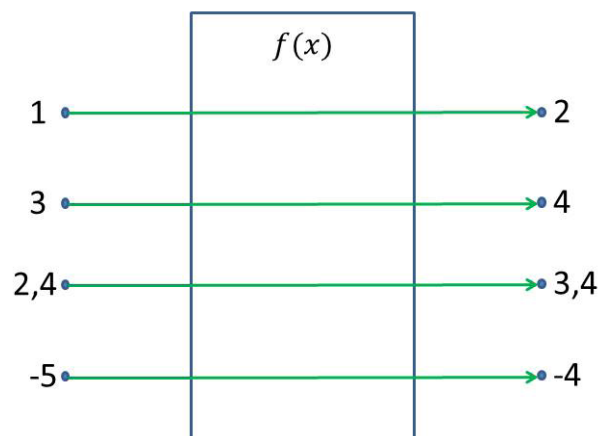
Una función es una serie de operaciones matemáticas que se realiza sobre una variable de entrada con la cual se obtiene un resultado. Para que entiendas mejor, vamos a explicar de a poco, partiendo de algunos casos que no necesariamente representan el caso general, pero así nos van a ir llevando hasta una definición más compleja. Por ejemplo, ahora te mostramos una función, que representamos con una caja:



En este caso, partimos de una variable de entrada. Esa variable es un número que va a tomar la función. A cada número de entrada le va a asignar una salida, que es otro número. Las funciones suelen especificarse con la letra f pero puede ser cualquier otra, y para la variable de entrada suele utilizarse la letra x , pero también puede ser cualquier otra letra. Tomemos, por ejemplo, una función que para cada número de entrada asigna a la salida es ese número de entrada más 1. La definición con notación matemática sería:

$$\text{función que depende de la variable } x = (x + 1) \text{ operaciones que se realizan sobre la variable de entrada}$$

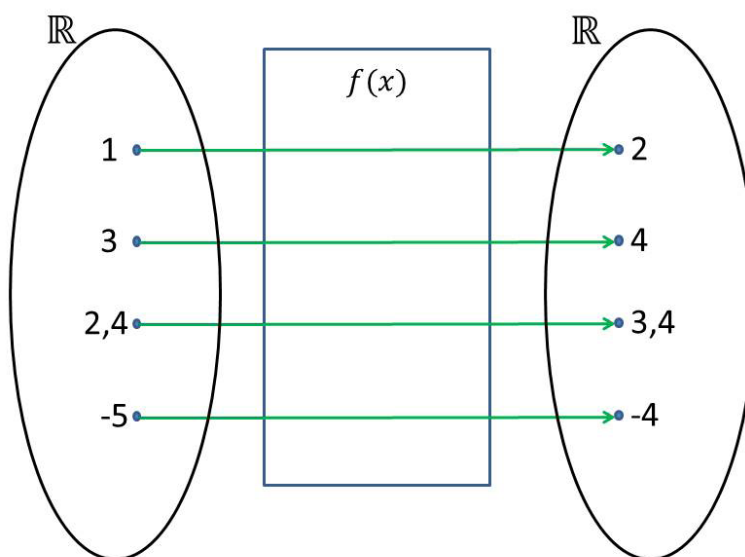
La representación gráfica en forma de "caja" es:



El resultado se asigna a una variable que suele llamarse con la letra y pero como en los otros casos, esa letra podría ser cualquier otra:

$$y = x + 1$$

A x la llamamos variable independiente y a y , que es la salida, la llamamos variable dependiente. Si fijamos el valor de la variable independiente, el valor de la dependiente queda determinado. Tanto las variables de entrada como las variables de salida están dentro de algún conjunto numérico, en este ejemplo los reales:



La función tiene un conjunto de partida al que llamamos dominio y un conjunto de llegada al que llamamos codominio. El dominio es el conjunto de todos los elementos de entrada a la función, a los que se les asigna algún valor de salida. En este caso, el dominio son todos los números reales, esto lo indicamos con:

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

El codominio es el conjunto de todos los elementos de llegada, en este caso también son todos los números reales que la función puede dar como resultado. Lo indicamos así:

$$\text{codom}(f) = \mathbb{R}$$

Las variables de entrada podrán tomar algún valor dentro del conjunto "dominio" y las variables de salida tomarán un valor que pertenezca al conjunto "codominio".

Tomemos otro ejemplo:

$$f(x) = x^2$$

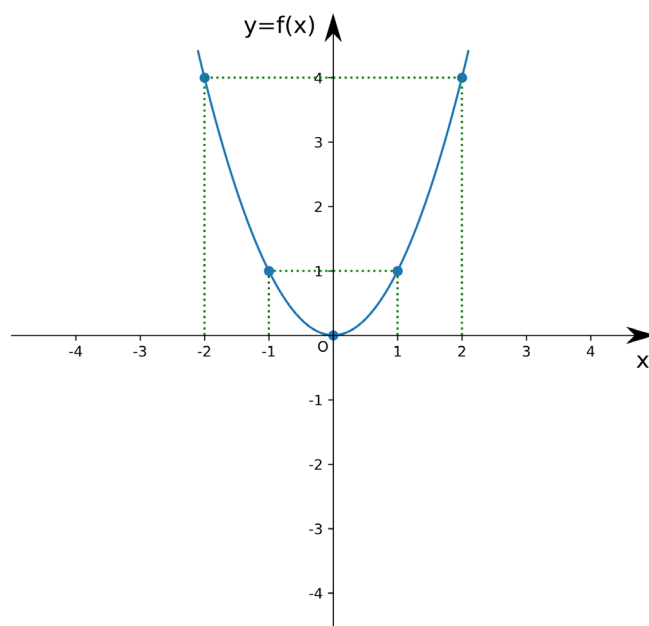
Armemos una tabla de valores con varios x y sus correspondientes $y = f(x)$:

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Si en la tabla hubiésemos indicado la totalidad de los valores independientes posibles, sería una forma válida de especificarla. En esta tabla indicamos algunos valores para la variable independiente y sus correspondientes valores para la variable dependiente. Los valores de la tabla nos van a facilitar hacer un gráfico. Marcaremos en un gráfico cartesiano los puntos de la tabla anterior, ubicando cada par x con su $f(x)$. Como solemos graficar las funciones en gráficos cartesianos x - y , suele indicarse como $y = f(x)$ de modo que y es la variable dependiente. Entonces, también se utiliza la notación:

$$y = f(x) = x^2$$

Uniando los puntos $(x; y)$ —introducimos recién una notación para un punto, encerrando entre paréntesis sus coordenadas separadas por “;”- tenemos la curva completa para todos los números reales:



Analicemos la función:

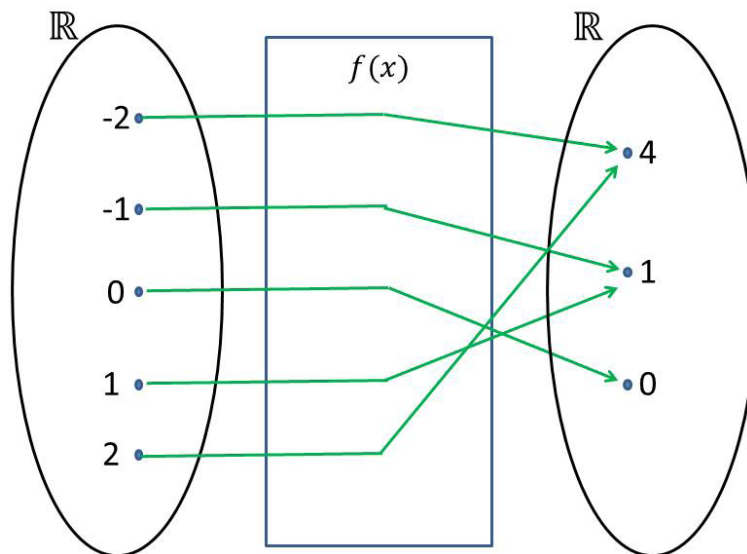
- A cualquier número x real se le asigna algún número vía la función. Esto significa que el dominio son todos los reales:

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}$$

- Con la función solamente obtenemos reales mayores o iguales a 0. Hay notación matemática compacta, elegante y muy formal para decir esto mismo, pero lo vamos a escribir en palabras para no complicarnos:

$$\text{codom}(f) = \text{Reales mayores o iguales a cero}$$

- A cada elemento del codominio, excepto el cero, puedo llegar con dos elementos diferentes del dominio:



Recién vimos una característica de las funciones: cada elemento x del dominio tiene asignado un único elemento y en el codominio pero a cada elemento y del codominio se puede llegar desde uno o más elementos x del dominio. En el caso que estamos tratando, si me dicen que $f(x_1) = 0$ puedo encontrar que $x_1 = 0$. Sin embargo, si me dicen que $f(x_2) = 4$, no puedo saber cuánto vale x_2 ya que habría dos posibilidades: 2 y -2, y no tendríamos ningún argumento para fijar cuál de ellas es x_2 .

Otro ejemplo:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

En este ejemplo, el dominio son los números mayores o iguales que cero, ya que la raíz cuadrada no se puede evaluar para números negativos (al menos en el campo de los números reales que es hasta donde veremos).

A. Indicá si el enunciado es verdadero o falso:

"En la función $f(x) = \sqrt{x}$ el codominio es el conjunto de números reales".

☐ Falso ☐ Verdadero

Hay otras restricciones que pueden surgir para el dominio de una función. Por ejemplo, no se puede dividir por cero. Entonces la función:

$$f(x) = 1/x$$

tiene como dominio a todos los reales distintos a 0.

B. Indicá la respuesta correcta.

Dada la función:

$$f(x) = \sqrt{2 * x - 1}$$

¿Cuál es su dominio?

- ☒ Los números reales.
- ☐ Los números reales mayores o iguales que 0
- ☐ Los números reales mayores o iguales que 0,5
- ☐ Los números reales mayores o iguales que 1

Los dominios también pueden estar restringidos por la naturaleza del problema que queremos estudiar. Por ejemplo, si hay una función que indica la temperatura media en cada hora a lo largo de un determinado día, el dominio estará restringido a los valores entre 0 y 24 horas, otras horas no tendrían sentido. Cada situación particular que podamos representar con una función tendrá su dominio dentro de la naturaleza del problema.

Funciones lineales

Vimos características de las funciones en general, ahora trataremos algunas funciones en particular. Las funciones lineales son aquellas que tienen por gráfico una recta. Hay dos tipos de funciones lineales: las homogéneas y las inhomogéneas. Empecemos por las homogéneas. Las funciones lineales homogéneas son de la forma:

$$y = f(x) = m * x$$

Dependiendo del valor de k , pasarán distintas cosas:

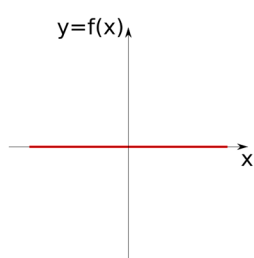
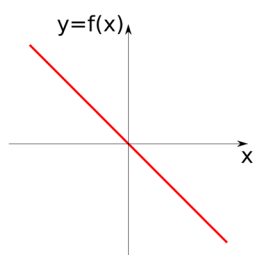
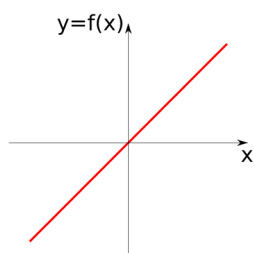
Si $m > 0$, cuando crece x también crece y

Si $m < 0$, cuando crece x va a ocurrir que y disminuye

Si $m = 0$, y 0 siempre 0

A. Uní cada elemento de la columna izquierda con un elemento de la derecha (quedará un elemento sin emparejar). En unos gráficos de funciones se han borrado las escalas. Indicá cuáles de los siguientes gráficos corresponden a cada forma funcional.

Columna izquierda



Columna derecha

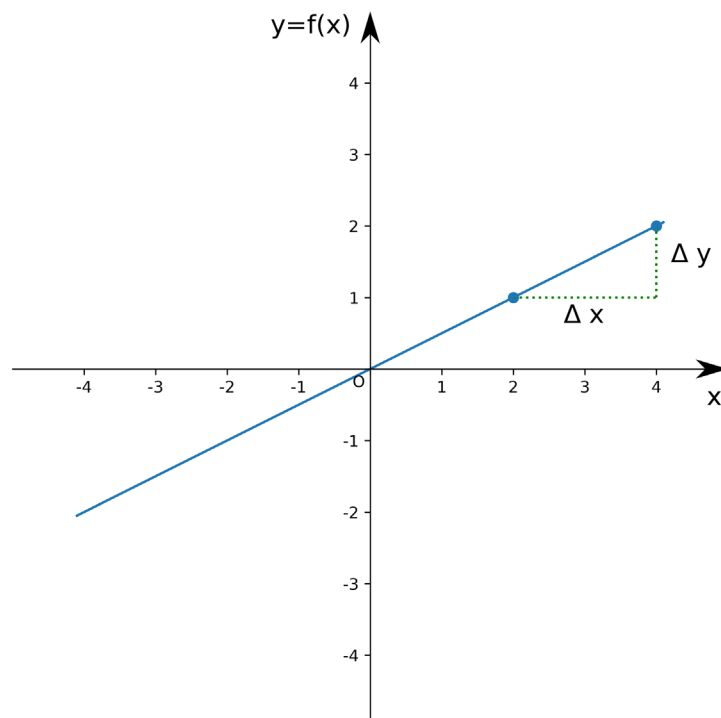
● $y = f(x) = -1 * x$

● $y = f(x) = 0$

● $y = f(x) = 1 * x$

● $y = f(x) = -x * x$

Tomemos una función lineal:



Podemos observar que si tomamos dos pares de puntos cualesquiera:

$$y_1 = m * x_1$$

$$y_2 = m * x_2$$

Y definimos las distancias en x e y entre dichos puntos con la letra griega delta mayúscula Δ:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Podemos obtener el cociente (asegurate de entender bien los pasos y cómo se fueron reemplazando las variables):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k * x_2 - k * x_1}{x_2 - x_1} = \frac{k * (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = k$$

Es decir, el valor de la constante m nos indica cuánto varía y respecto de cuánto varía x. Esta variación se manifiesta en la inclinación de la recta, por eso a la constante m se la llama "pendiente". Cuanto mayor es el módulo de m, la recta será más "vertical". La conclusión es que:

$$m = \Delta y / \Delta x$$

En el caso de la función del último gráfico, podemos elegir los puntos resaltados:

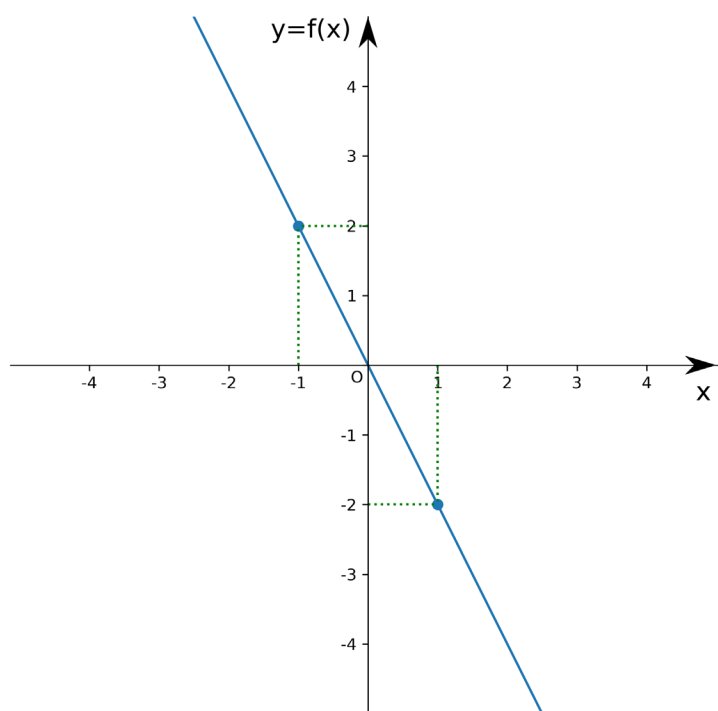
$$(x_1; y_1) = (2; 1) \quad y \quad (x_2; y_2) = (4; 2)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{4 - 2} = 0,05$$

Noten que el subíndice que utilizamos es indistinto, podríamos haber llamado a un punto "1" y al otro "2" o viceversa, o inclusive ponerle cualquier otro rótulo, lo importante es que si en el numerador restamos el punto 2 menos el 1, en el denominador también tenemos que hacerlo en ese orden.

B. Indicá la respuesta correcta.

Se tiene una función cuya gráfica es:



¿Cuál de las siguientes expresiones representa a la función?

- ☐ $f(x) = -2 * x$
- ☐ $f(x) = -2 * y$
- ☐ $f(x) = 2 * x$
- ☐ $f(x) = 2 * y$

Las funciones lineales homogéneas representan reglas de proporcionalidad directa. En el siguiente ejercicio encontrarás un ejemplo.

C. Indicá la respuesta correcta.

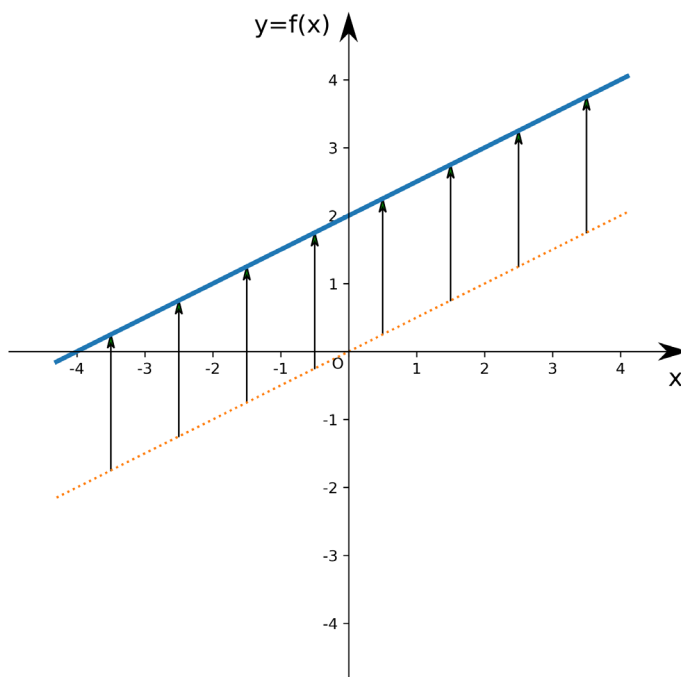
Un camionero quiere saber cuál es el peso de harina que cargará en su camión. Pone dos bolsas de harina en una balanza y encuentra que juntas pesan 100kg. Encontrá una función que exprese el peso en función de la cantidad de bolsas. En esa función x será la cantidad de bolsas y $f(x)$ será el peso.

Utilizá esa función y respondé la siguiente pregunta:

¿Cuál es la función que describe el peso en función de la cantidad de bolsas y cuánto pesarán 300 bolsas?

- $f(x) = 50 \text{ kg/bolsa} * x$ y las 300 bolsas pesarán 15000kg
- $f(x) = 50 \text{ kg/bolsa} * x$ y las 300 bolsas pesarán 30000kg
- $f(x) = 100 \text{ kg/bolsa} * x$ y las 300 bolsas pesarán 15000kg
- $f(x) = 100 \text{ kg/bolsa} * x$ y las 300 bolsas pesarán 30000kg

Ahora que ya abordamos funciones lineales homogéneas, veamos unas funciones con mucha similitud: las funciones lineales inhomogéneas. En la siguiente figura está graficada una función lineal inhomogénea con una línea azul, con línea punteada está graficada la función lineal homogénea asociada.



Las funciones inhomogénea y homogénea que graficamos tienen la misma pendiente (en este caso $m=0,5$). Con las flechas está indicado cómo debe moverse cada punto de la homogénea

para conseguir la función inhomogénea: el desplazamiento que marcamos es en el sentido "y" y es siempre 2. Si la función homogénea es:

$$f_h(x) = 0,5 * x$$

¿Se te ocurre cómo será la función inhomogénea? Debemos sumar 2 a cualquier punto:

$$f_i(x) = 0,5 * x + 2$$

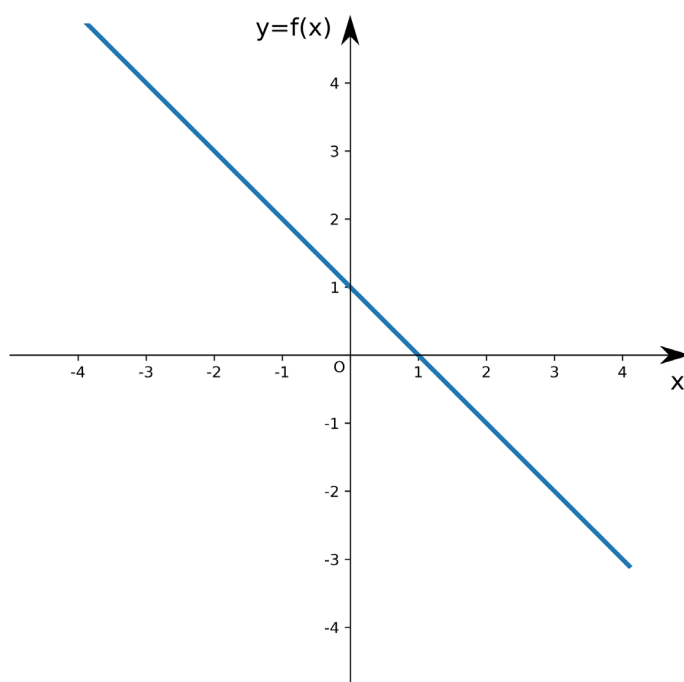
Lo último es para el caso particular que graficamos. La forma general de una función lineal inhomogénea es:

$$f_i(x) = m * x + b$$

Donde m es la pendiente y b se llama "ordenada al origen". El valor de la ordenada al origen corresponde al valor que toma la función cuando $x = 0$ (verificalo).

D. Indicá la respuesta correcta.

Observá la recta que posee la siguiente gráfica:



¿Cuál de las siguientes opciones representa la expresión matemática de la función?

- ☐ $f(x) = -1 * x - 1$
- ☐ $f(x) = -1 * x + 1$
- ☐ $f(x) = -1 * x + 2$
- ☐ $f(x) = 2 * x + 1$

Hay diversas situaciones diarias que pueden quedar representadas por funciones lineales inhomogéneas. Realizá el siguiente ejercicio y verás cómo se aplica en la vida cotidiana.

E. Indicá la respuesta correcta.

Para calcular el presupuesto de trabajo, un pintor cobra una suma fija de \$400 en concepto de viáticos y luego \$300 por cada hora que le lleve el trabajo. Encontrar una función que indique cuánto costará el trabajo según la cantidad de horas trabajadas.

Utilizando la función anterior, calcular cuánto se le deberá pagar un trabajo que le lleva 5 horas.

¿Cuál es el pago que recibirá el pintor?

- ☐ \$ 1200
- ☐ \$ 1500
- ☐ \$ 1900
- ☐ \$ 2100

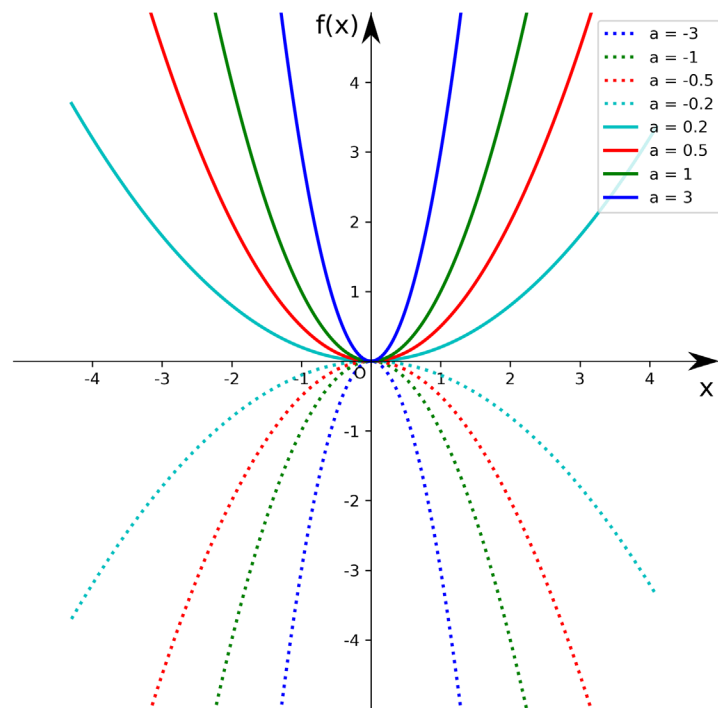
Funciones cuadráticas

Una función cuadrática consiste en una función lineal inhomogénea a la que se adiciona un término cuadrático:

$$f(x) = a * x^2 + b * x + c$$

con a , b y c constantes.

Al graficarla, observamos que es una parábola. Veamos cómo influye cada uno de los términos. Comencemos por el caso más simple, una parábola con $b = 0$ y $c = 0$, esto es el caso particular donde $f(x) = a * x^2$. Grafiquemos esta función para distintos valores de " a ", donde haremos curvas de distinto color y tipo de letra para cada a :



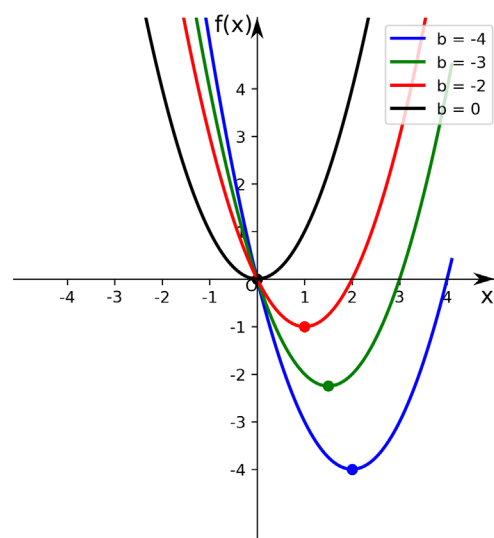
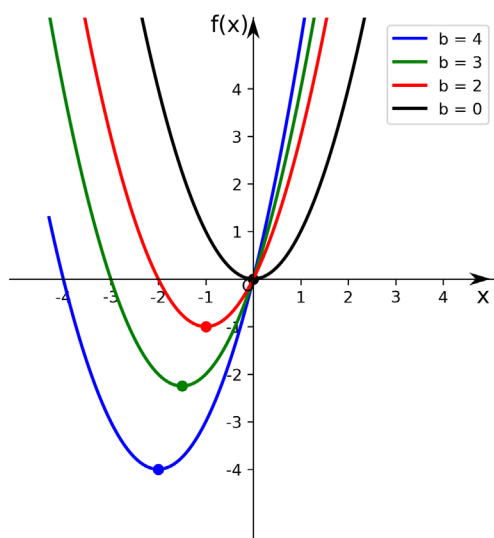
Podemos observar que:

- Si $a > 0$, la curva tiene forma de "U".
- Si $a < 0$, la curva tiene forma de "∩".
- Cuanto más grande se hace el valor absoluto de "a", más "angosta" se hace la curva (el valor absoluto es el número sin el signo, y lo indicamos con dos barras, por ejemplo $|-3| = 3$ y $|4| = 4$).

Ahora veremos la influencia del parámetro "b", para ello vamos a trabajar con funciones cuadráticas con $a=1$ y $c=0$:

$$f(x) = x^2 + b \cdot x$$

Veamos cómo es el gráfico para distintos "b". Para no superponer demasiadas curvas que hagan todo muy confuso, vamos a hacer un gráfico con $b \geq 0$ y otro para $b \leq 0$, además vamos a resaltar el mínimo de la curva para ver como se comporta:

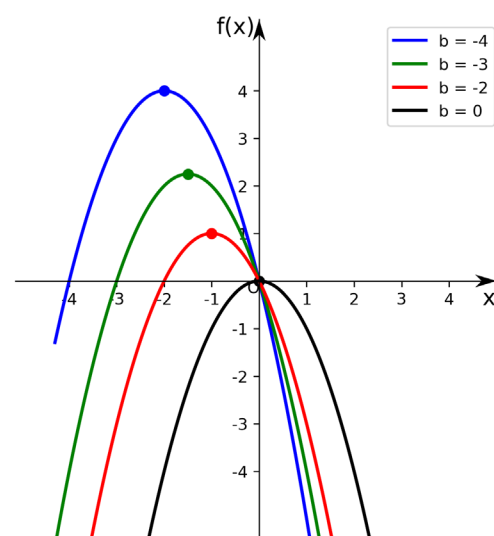
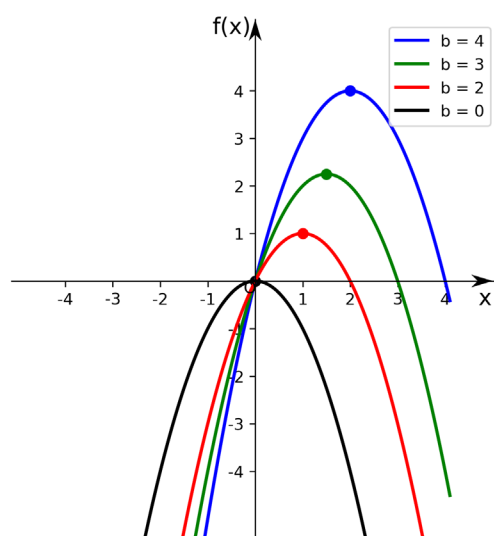


Este comportamiento lo graficamos para $a=0$, pero el comportamiento es el mismo para todos los $a > 0$. Podemos observar que si $a > 0$:

- A medida que b se hace cada vez más positivo, la curva se va moviendo hacia la izquierda y abajo.
- A medida que b se hace cada vez más negativo, la curva se va moviendo hacia la derecha y abajo.
- La forma de la curva no cambia al cambiar b , solamente cambia su posición.

Ahora repetimos el análisis pero cuando a es negativo. Lo haremos con un caso particular, observaremos como varía la curva con $a = -1$ y $c = 0$ al variar b :

$$f(x) = -x^2 + b \cdot x$$



Podemos observar que si $a < 0$:

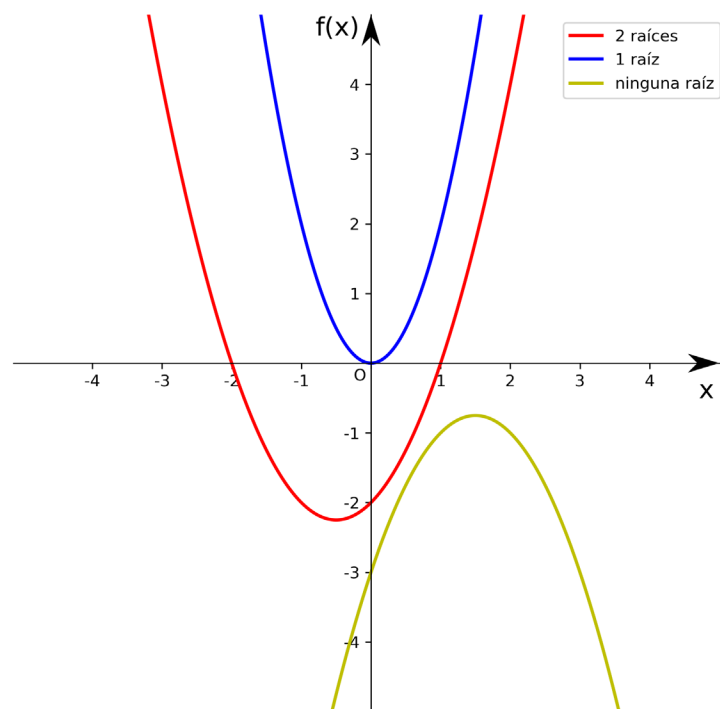
A medida que b se hace cada vez más positivo, la curva se va moviendo hacia la derecha y arriba.

A medida que b se hace cada vez más negativo, la curva se va moviendo hacia la izquierda y arriba.

La forma de la curva no cambia al cambiar b , solamente cambia su posición.

Por último, nos queda explorar cómo cambia la curva según varíe la constante " c ". Como c es una constante aditiva, lo único que hace es trasladar hacia arriba (si c es positivo) o hacia abajo (si c es negativo) toda la curva. Ocurrió lo mismo cuando pasamos de la función lineal homogénea a la inhomogénea, el término constante solamente sube o baja la curva como un todo.

Se denomina raíces a los valores de la variable independiente para los cuales la función vale cero. Una parábola puede tener 2 raíces reales, 1 raíz real o ninguna. Con este gráfico, que contiene un ejemplo de cada caso, te quedará más claro:



¿Cómo encontramos las raíces conociendo la definición de la función? Igualamos la función a 0 y resolvemos la ecuación. Teníamos que la función era:

$$f(x) = a * x^2 + b * x + c$$

Buscando que $f(x_{1,2}) = 0$:

$$0 = a * x_{1,2}^2 + b * x_{1,2} + c$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 * a * c}}{2 * a}$$

La demostración para encontrar esta expresión que permite encontrar las raíces excede los objetivos de esta guía. Por eso, la utilizaremos sin demostrar. Igualmente te invitamos, en forma optativa, a buscar la demostración para algunos casos particulares y a que realices más ejercicios visitando el siguiente link:

<https://www.educ.ar/recursos/70272/las-raices-de-una-cuadratica>

Observá que la solución de la cuadrática está indicada con $x_{1,2}$ y que hay una operación indicada con “ $\pm$ ” esto es porque hay dos posibles soluciones, una con la suma y otra con la resta:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 * a * c}}{2 * a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 * a * c}}{2 * a}$$

Dependiendo el resultado del argumento de $\sqrt{}$ habrá 2, 1 o ninguna solución:

- Si $b^2 - 4 * a * c < 0$ no se podrá calcular la raíz, por lo que no habrá soluciones reales
- Si $b^2 - 4 * a * c = 0$ habrá una sola solución ya que las dos posibles soluciones que se distinguirían sumando o restando algo, no lo estarían haciendo porque sería sumar o restar 0. En este caso: $x_1 = x_2 = -b / 2 * a$
- Si $b^2 - 4 * a * c > 0$ habrá 2 soluciones reales

¿Cómo hay que proceder si en lugar de evaluar las raíces buscáramos encontrar los x que hacen que la función cuadrática tome un valor h cualquiera en lugar de 0? Hay que resolver:

$$h = a * x_{1,2}^2 + b * x_{1,2} + c$$

Llevamos a la forma que conocíamos:

$$0 = a * x_{1,2}^2 + b * x_{1,2} + \frac{(c - h)}{c}$$

Y llamamos $\bar{c} = c - h$, con lo cual la expresión queda:

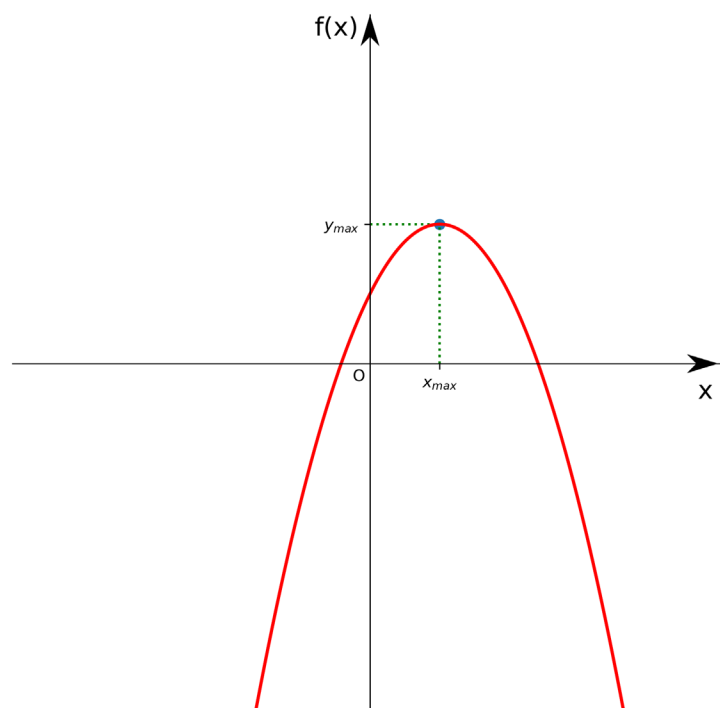
$$0 = a * x_{1,2}^2 + b * x_{1,2} + \bar{c}$$

Resta resolver igual que antes, pero en lugar de c tendremos $\bar{c}$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 * a * \bar{c}}}{2 * a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 * a * (c-h)}}{2 * a}$$

En las parábolas que tienen forma de “∩” hay un punto característico que es el máximo de la función. En ese punto la función pasa de crecer a decrecer. En las parábolas que tienen forma de “U” ese punto característico es el mínimo, que es donde la función pasa de decrecer a crecer. En forma general, a los máximos y mínimos de una función se los llama extremos. Vamos a ver una forma de encontrar las coordenadas de ese punto. Miremos en el siguiente gráfico una parábola donde marcamos el punto máximo:



En el punto máximo:

$$= f(x_{max})$$

Indicamos explícitamente la forma funcional de la parábola:

$$y_{\max} = a * x_{\max}^2 + b * x_{\max} + c$$

Y despejamos según lo visto anteriormente:

$$0 = a * x_{\max}^2 + b * x_{\max} + (c - y_{\max})$$

La diferencia con la expresión que teníamos antes, es que ahora la constante aditiva en lugar de ser "c" es "c - y_{max}":

$$x_{\max} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 * a * (c - y_{\max})}}{2 * a}$$

El máximo es único, por lo cual la raíz cuadrada tiene que ser cero (de otra forma tendría dos valores: uno cuando la sumo y otro cuando la resto):

$$x_{\max} = -b / 2 * a$$

Para calcular y_{max} tenemos dos opciones, una es calcular x_{max} y luego utilizar ese valor como variable independiente en la función:

$$y_{\max} = f(x_{\max})$$

Te dejamos como ejercicio para que verifiques que ese camino da lo mismo que la forma que ahora te proponemos. Habíamos dicho que la raíz tiene que ser cero, entonces tiene que ser cero su argumento:

$$b^2 - 4 * a * (c - y_{\max}) = 0$$

Despejamos (aquí ya te mostramos el resultado del despeje, hazlo como práctica):

$$y_{\max} = c - \frac{b^2}{4a}$$

El criterio que utilizamos es que el máximo es único, y solo con ese criterio llegamos a encontrar la posición del máximo. En el caso de una parábola con forma de U, para encontrar el mínimo, también utilizaríamos solamente el criterio de que el mínimo es único, entonces como el razonamiento va a ser exactamente igual, llegaremos a la misma conclusión. De esta forma concluimos que el mínimo lo encontramos con las expresiones:

$$x_{\min} = \frac{-b}{2 \cdot a} \quad ; \quad y_{\min} = c - \frac{b^2}{4a}$$

Entonces, si estas expresiones valen tanto para máximos como para mínimos, la podemos escribir indicando que sirven para calcular ambos "extremos":

$$x_{\text{extremo}} = \frac{-b}{2 \cdot a} \quad ; \quad y_{\text{extremo}} = c - \frac{b^2}{4a}$$

A. Indica la respuesta correcta.

Dada la siguiente función cuadrática:

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

¿Cuáles son sus raíces?

- ☒ $x_1 = -2$; $x_2 = 2$
- ☒ $x_1 = -2$; $x_2 = 3$
- ☒ $x_1 = -3$; $x_2 = 2$
- ☒ $x_1 = -3$; $x_2 = 3$

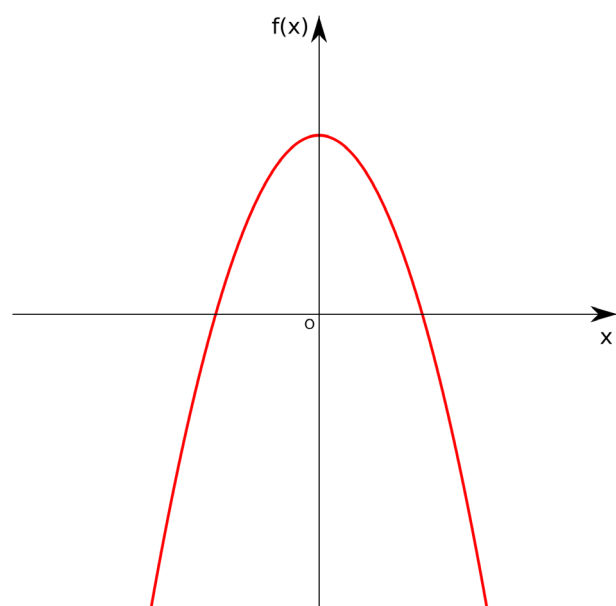
B. Indica si el enunciado es verdadero o falso.

$x_1 = 2$ es raíz de $f(x) = x^2 + 2 \cdot x - 3$

☐ Verdadero ☐ Falso

C. Indica la respuesta correcta.

Se tiene una función cuadrática cuya gráfica es:



¿A cuál de las siguientes expresiones puede corresponder la función?

- $f(x) = -x^2 - 4$
- $f(x) = -x^2 + x$
- $f(x) = x^2 + 4$
- $f(x) = -x^2 + 4$

D. Indicá la respuesta correcta.

Dada la función cuadrática:

$$f(x) = 3 * x^2 + 2$$

¿Cuál es su codominio?

- Todos los reales
- Números reales mayores o iguales a 2
- Números reales mayores a 2
- El 3 y el 2

Polinomios

Un polinomio es la suma de términos del tipo: $c * x^n$ donde c es una constante real y n es un entero mayor o igual a cero. Cada uno de esos términos es conocido como monomio. El grado de un polinomio, es el mayor exponente que tiene (la n).

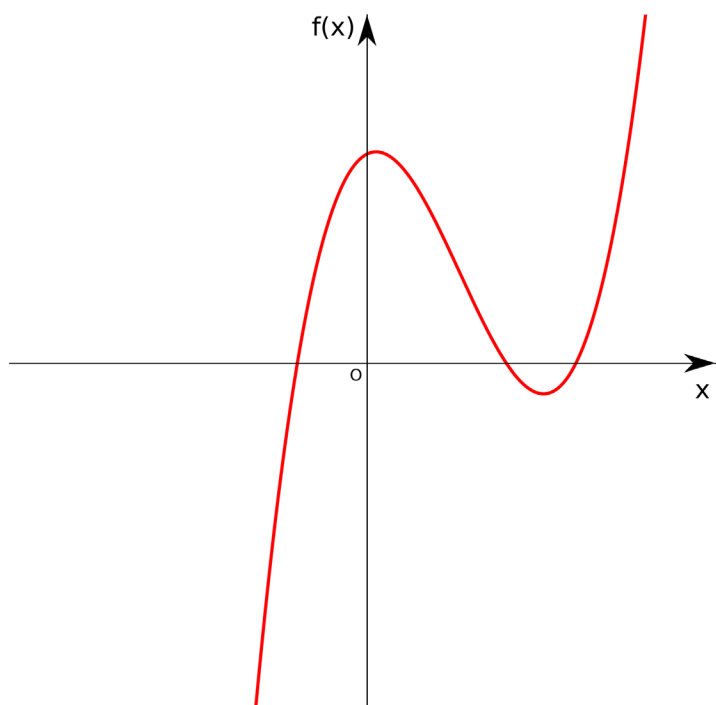
Grado	Forma funcional del polinomio
0	$f(x) = c_0$
1	$f(x) = c_0 + c_1 * x$
2	$f(x) = c_0 + c_1 * x + c_2 * x^2$
3	$f(x) = c_0 + c_1 * x + c_2 * x^2 + c_3 * x^3$
4	$f(x) = c_0 + c_1 * x + c_2 * x^2 + c_3 * x^3 + c_4 * x^4$

Los polinomios de grado 0 (constantes) y los de grado 1 (rectas, funciones lineales) no tienen extremos. A partir de ahí se cumple que:

- Todos los polinomios tienen como mucho $n-1$ extremos, donde n es el grado.
- Los polinomios de grado par tienen al menos 1 extremo.
- Los extremos tienen que estar alternados entre mínimos y máximos.
- Todos los polinomios salvo los de grado 0 tienen como mucho n raíces reales, donde n es el grado.
- Los polinomios de grado impar tienen al menos una raíz real.

A. Indicá la respuesta correcta.

Observá la función polinómica cuya gráfica es:

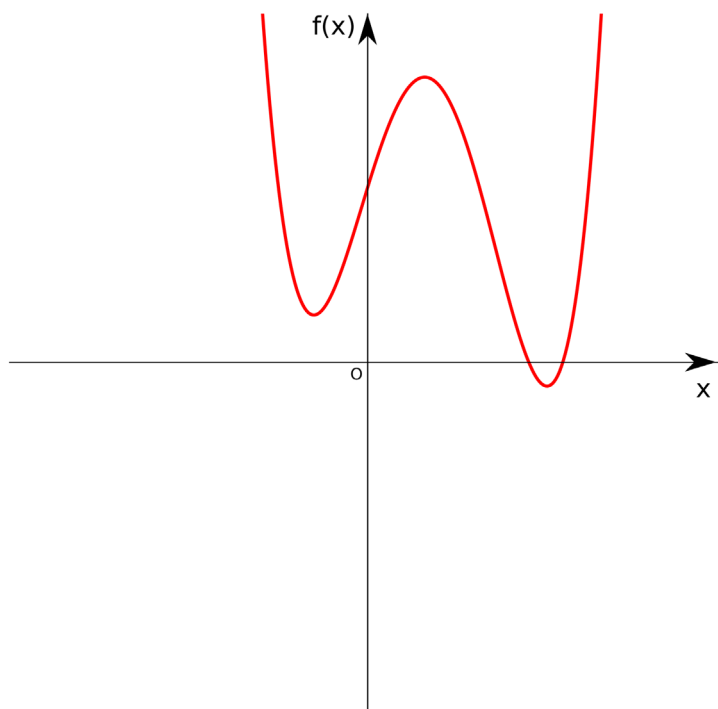


¿Cuál es el mínimo grado que puede tener esta función polinómica?

- 0
- 1
- 2
- 3

B. Indicá la respuesta correcta.

Se tiene una función polinómica cuya gráfica es:



¿Cuál es el grado mínimo que puede tener esta función polinómica?

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Este tema lo vamos a explicar con un ejemplo:

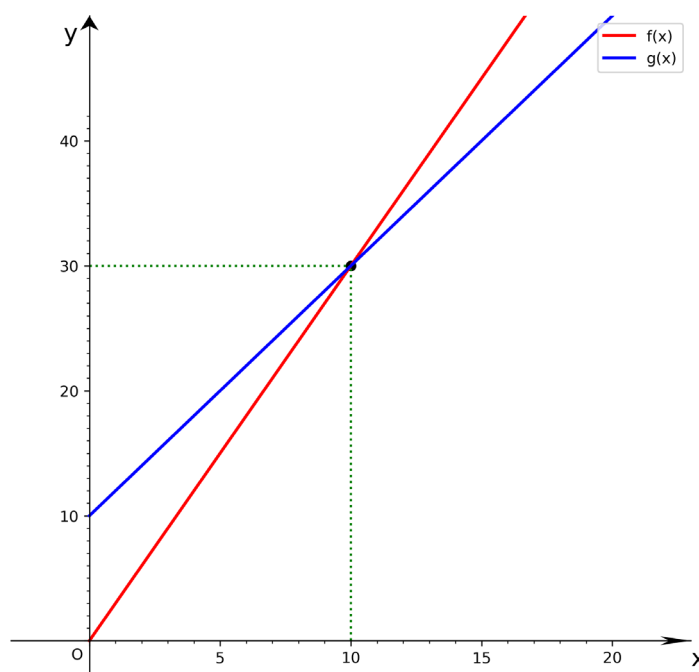
Hay dos personas y queremos saber sus edades. Preguntamos a una de ellas cómo se llama y cuál es su edad, y nos contesta: "soy Yolanda y tengo el triple de edad que Ximena". Como solamente con esta respuesta no podemos saber su edad, preguntamos a Ximena y nos contesta: "Yolanda tiene 10 años más que el doble de mi edad". Entre ambas amigas nos dicen dos formas de calcular la edad de Yolanda según cuánto sea la edad de Ximena, lo que nos están diciendo son dos funciones. De lo que nos dice Yolanda, podemos obtener una función $f(x)$ que nos permite calcular la edad de Yolanda (y) si conocemos la de Ximena (x):

$$f(x) = 3 * x$$

Por otro lado, de lo que nos dijo su amiga, podemos obtener otra función $g(x)$ que también nos permite calcular la edad de Yolanda conociendo la de Ximena.

$$g(x) = 2 * x + 10$$

Como las edades son únicas, de todos los posibles valores de edad de Yolanda solo uno será verdadero. Las edades no pueden depender de si hacemos el cálculo con lo que nos dijo una amiga o la otra, por lo cual esas dos funciones deben coincidir en algún punto. Grafiquemos ambas funciones:



Vemos que ambas curvas se cruzan en un punto, ese punto debe representar la edad de las dos amigas: la edad de Ximena es 10 años ($x=10$) y la de Yolanda 30 años ($y=30$). Lo que hicimos recién fue encontrar la solución en forma gráfica.

Ahora encontremos la solución en forma analítica, es decir, haciendo cálculos. Evaluemos ambas funciones:

$$\begin{cases} y = 3 * x \\ y = 2 * x + 10 \end{cases}$$

El corchete a la izquierda significa que tenemos que resolver ambas ecuaciones en forma simultánea. Tanto y como x deben valer lo mismo en las dos ecuaciones. Entonces, de la primera ecuación podemos despejar y (ya está despejado) y remplazarlo en la segunda:

$$\begin{aligned}y &= 2 * x + 10 \\y &= 3 * x \\3 * x &= 2 * x + 10\end{aligned}$$

Despejamos:

$$\begin{aligned}3 * x - 2 * x &= 10 \\(3-2) * x &= 10 \\x &= 10\end{aligned}$$

Una vez que tenemos el valor de x, utilizamos la primera o la segunda función para calcular y:

$$y = 2 * \underset{10}{x} + 10 = 2 * 10 + 10 = 30$$

Encontramos en forma analítica la edad de Yolanda (y=30) y la de Ximena (x=10).

Una de las formas de trabajo para resolver dos ecuaciones en forma simultánea, es como lo hicimos recién: despejamos una de las variables de una de las ecuaciones y remplazamos ese despeje en todos los lugares donde aparece esa variable en la otra ecuación. Nos quedará después de este paso, una ecuación que depende solo de la otra variable, tendremos que trabajar para despejarla.

Ahora, resolvé este ejercicio para que compruebes si comprendiste bien:

A. Indicá la respuesta correcta.

Un conejo parte de x=40m con velocidad v=5m/s en línea recta hacia el lado de las x positivas. La posición (en metros) en función del tiempo t (en segundos) será:

$$f(t) = 40 + 5 * t$$

Un zorro corre a cazarlo, parte de x=10m con velocidad v=10m/s. Encontrá una función g(t) para la posición del zorro y luego calculá:

¿En cuál posición el zorro alcanzará al conejo y cuánto tiempo tardará en hacerlo?

- X=40m, t=4s
- X=40m, t=6s
- X=70m, t=4s
- X=70m, t=6s

Hasta acá completaste varios ejercicios. Te dejamos, para que visites en forma optativa, estos links con más ejercicios y explicaciones.

Sobre funciones cuadráticas:<https://www.educ.ar/recursos/15182/funcion-cuadratica><https://www.educ.ar/recursos/90231/skool-tm-leccion-resolucion-de-ecuaciones-de-segundo-grado>**Sobre sistemas de ecuaciones lineales:**<https://www.educ.ar/recursos/90026/skool-tm-leccion-sistema-de-ecuaciones-lineales><https://www.educ.ar/recursos/102801/sistemas-de-ecuaciones>

Resumen

En esta guía repasaste y ejercitaste sobre funciones: definición matemática, representación gráfica, armado de tabla de valores, dominio y codominio. Viste algunos tipos de funciones: lineales, cuadráticas y polinómicas. También aprendiste a resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Claves de corrección

Funciones

■ A. La respuesta correcta es: "Falso", ya que solamente se pueden obtener números mayores o iguales a cero

■ B. La respuesta correcta es: "Los números reales mayores o iguales que 0,5".

Para poder calcular la raíz cuadrada, necesitamos hacerlo sobre un número positivo o cero.

Esto implica que:

$$2 * x - 1 \geq 0$$

$$2 * x \geq 1$$

$$x \geq 1 : 2$$

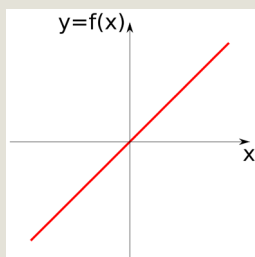
$$x \geq 0,5$$

Funciones lineales

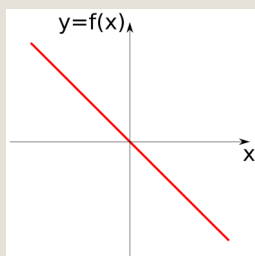
■ A.

Columna izquierda

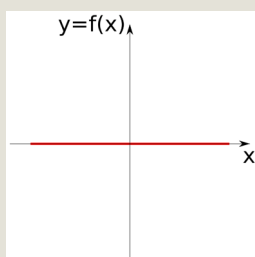
Columna derecha



$$y = f(x) = 0$$



$$y = f(x) = 1 * x$$



$$y = f(x) = -1 * x$$

Para encontrar cuál función lineal corresponde con cada gráfico tenés que prestar atención en el valor de m , si m es positivo el valor de y debe crecer con el valor de x ; por el contrario, si m es negativo, el valor de y debe decrecer a medida que crece x ; por último, si $m=0$ la función valdrá 0 para todo x .

- B. La respuesta correcta es: " $f(x) = -2 * x$ ". Te mostramos cómo llegar a esta forma funcional. Sabemos que es una función lineal homogénea, entonces la forma funcional va a ser:

$$f(x) = m * x$$

Tenemos que encontrar cuánto vale k .

Tomemos 2 puntos de los que identificamos en la recta:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1 & ; \quad y_1 = -2 \\ x_2 = 0 & ; \quad y_2 = 0 \end{array}$$

(Podríamos haber tomado el punto que está en $x_3 = -1$; $y_3 = 2$, pero es más fácil hacer cuentas con ceros)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{1 - 0} = \frac{-2}{1} = -2$$

Por lo tanto:

$$f(x) = m * x = -2 * x$$

Si la elección fue $f(x) = -2 * y$ o $f(x) = 2 * y$, el error estuvo en que la variable independiente x es la que tiene que aparecer en la forma de calcular la dependiente.

- C. La respuesta correcta es: " $f(x) = 50 \text{ kg/bolsa} * x$ y las 300 bolsas pesarán 15000kg"

Este es el procedimiento para llegar a la respuesta. Sabemos que es una función lineal homogénea, entonces la forma funcional va a ser:

$$f(x) = m * x$$

Tenemos que encontrar cuánto vale m .

Tomemos 2 puntos para identificar la recta:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 \text{ bolsas} & ; \quad x_1 = 100 \text{ kg} \\ x_2 = 0 & ; \quad y_2 = 0 \end{array}$$

(El punto 2 lo conocemos porque las funciones lineales homogéneas pasan siempre por $x=0$; $y=0$)

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 \text{ kg} - y_1}{2 \text{ bolsas} - x_1} = \frac{100 \text{ kg} - 0}{2 \text{ bolsas} - 0} = \frac{100 \text{ kg}}{2 \text{ bolsas}}$$

$$m = 50 \text{ kg/bolsa}$$

Por lo tanto:

$$f(x) = m * x$$

$$f(x) = 50 \text{ kg/bolsa} * x$$

Para calcular el peso de 300 bolsas, evaluamos la función para $x=300$ "bolsas"

$$f(300 \text{ bolsas}) = 50 \text{ kg/bolsa} * 300 \text{ bolsas}$$

$$f(300 \text{ bolsas}) = 15000 \text{ kg}$$

Observá cómo fuimos haciendo la simplificación de unidades.

■ D. La respuesta correcta es: $f(x) = -1 * x + 1$

Sabemos que es una función lineal inhomogénea, entonces la forma funcional va a ser:

$$f(x) = m * x + b$$

Tenemos que encontrar cuánto vale m y cuánto vale b . " b " es la ordenada al origen y la ordenada al origen es el valor que toma la función para $x=0$. En el gráfico encontramos que $f(0)=1$ por lo cual $b=1$

nos fijamos que $f(0) = 1$ $b = 1$

Para la pendiente, usamos el mismo procedimiento que antes, identificamos dos puntos cualesquiera:

$$x_1 = 0 \quad ; \quad y_1 = 1$$

$$x_2 = 1 \quad ; \quad y_2 = 0$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$$

Por lo tanto:

$$f(x) = m * x + b$$

Que con los valores de m y b que encontramos, se convierte en:

$$f(x) = -1 * x + 1$$

■ E. La respuesta correcta es "\$ 1900"

Para calcularla, primero encontramos la función que es:

$$f(x) = 300 \$/h * x + 400\$$$

donde x es la cantidad de horas de trabajo, y $f(x)$ es el presupuesto en pesos. Evaluamos la función en $x=5h$ y obtenemos el resultado esperado

Funciones cuadráticas

■ A. La respuesta correcta es: " $x_1 = -2$; $x_2 = 3$ "

Te mostramos el camino para llegar a la respuesta. La función es:

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

Y encontrar las raíces significa encontrar los valores de x para los cuales $f(x) = 0$:

$$0 = x^2 + x - 6$$

Comparamos con la expresión que teníamos para las raíces:

$$0 = a * x_{1,2}^2 + b * x_{1,2} + c$$

e identificamos cuánto vale cada constante:

$$0 = \frac{a * x_{1,2}^2}{1} + \frac{b * x_{1,2}}{1} + \frac{c}{-6}$$

Remplazamos las constantes en la expresión para calcular las raíces:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 * a * c}}{2 * a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 1 * (-6)}}{2 * (-6)}$$

Resta terminar las cuentas para encontrar los 2 valores. Si en lugar de buscar las raíces solamente se busca verificar si un valor de x es raíz, se debe calcular la función para ese valor y verificar que el resultado sea cero.

■ B. La respuesta correcta es: "Falso" porque para que $x_1 = 2$ sea raíz, se debe cumplir que $f(x_1) = 0$

Verifiquemos:

$$f(x_1) = x^2 + 2 * x - 3$$

$$f(2) = 2^2 + 2 * 2 - 3$$

$$f(2) = 4 + 4 - 3$$

$$f(2) = -3$$

Como $f(2) \neq 0$, no cumple la condición de raíz.

■ C. La respuesta correcta es: " $f(x) = -x^2 + 4$ "

Indicamos aquí el procedimiento para encontrarla. La función cuadrática general tiene la siguiente forma:

$$f(x) = a * x^2 + b * x + c$$

- La curva tiene forma de "∩", eso significa que el valor de " a " es negativo
- El extremo de la curva está sobre el eje de las " y ", $x_{max} = 0$; esto significa que $b=0$, de otro modo estaría desplazado hacia un costado
- $f(0)$ es positivo, lo que significa que c tiene que ser positivo

La opción $f(x) = -x^2 + 4$ es la única de las cuatro opciones que cumple todas estas condiciones.

■ D. La respuesta correcta es: "Números reales mayores o iguales a 2".

Una de las formas de encontrar la solución al problema es la siguiente. La función cuadrática general tiene la siguiente forma:

$$f(x) = a * x^2 + b * x + c$$

En este caso $a=3$; $b=0$ y $c=2$

- La función tiene forma de "U" ya que $a > 0$
- La función está centrada en el eje vertical porque $b = 0$
- La función corta el eje y en $y = 2$ porque $c = 2$

Como está centrada en el eje y, lo corta en $y = 2$ y además tiene forma de U, todos los puntos tendrán $y \geq 2$

Polinomios

A. La respuesta correcta es: "3" porque:

- Tiene 3 raíces, con lo cual debe ser al menos de grado 3.
- Tiene 2 extremos, con lo cual debe ser al menos de grado 3.

Juntando los dos anteriores, el grado mínimo debe ser 3.

B. La respuesta correcta es "4" porque:

- Tiene 2 raíces, con lo cual debe ser al menos de grado 2.
- Tiene 3 extremos, con lo cual debe ser al menos de grado 4.

Juntando los dos anteriores, el grado mínimo debe ser 4.

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

A. La respuesta correcta es $X = 70\text{m}$, $t = 6\text{s}$.

Para encontrar la respuesta representamos la función de la posición del zorro como:

$$x = g(t) = 10 + 10 * t$$

Armamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 40 + 5 * t \\ \square \\ x = 10 + 10 * t \end{cases}$$

Remplazamos el despeje de la primera ecuación en la segunda:

$$40 + 5 * t = 10 + 10 * t$$

Y despejamos el tiempo (asegurate de poder hacer el despeje):

$$t = 6$$

Remplazamos el tiempo calculado en cualquiera de las ecuaciones del sistema:

$$x = 10 + 10 * t = 10 + 10 * 6 = 70$$

Y ya encontramos el tiempo y la posición.



Ministerio de Educación,
Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación