Primero la Secundaria

MATEMÁTICA

Módulo 1

Conjuntos numéricos

Ministerio de Educación,
Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación

Primero la Secundaria

MATEMÁTICA

Módulo

1

Conjuntos numéricos

Contenido

Presentación

Antes de comenzar con los temas del primer módulo de Matemática, te acercamos algunas orientaciones para organizar el estudio.

Para repasar para el examen, te brindamos material de estudio que te servirá para recordar los temas que ya trabajaste en clase y encontrarás actividades que te ayudarán a concentrarte en los temas más importantes.

Te sugerimos que dediques entre una hora y media o dos, por día, al estudio y la práctica así, en una semana, alcanzarás a preparar todo el módulo.

En este primer módulo vas a encontrar material de estudio para comprender los conceptos y poder realizar los ejercicios, que son similares a los del examen, asegurate de poder hacerlos por vos mismo para poder prepararte bien para rendir la materia. Leé bien el enunciado de cada ejercicio, una parte muy importante consiste en comprender los enunciados e identificar cuales datos se tienen y cuáles resultados se buscan. Tratá de resolverlos y, recién después, elegí la solución dentro de las opciones y, finalmente, campará con las soluciones correctas que están al final del módulo. Junto con la solución correcta, vas a encontrar la explicación para llegar a ella; es fundamental que prestes mucha atención a los procedimientos dentro de cada explicación.

A tal fin, vamos a seguir un itinerario con los temas más importantes: iniciaremos con el repaso de los conjuntos numéricos. El objetivo aquí es que identifiques características en común dentro de cada conjunto numérico y que comprendas el campo de aplicación. Partiremos de conjuntos restringidos con números con ciertas propiedades y en los que podremos aplicar algunas operaciones matemáticas. Haremos crecer esos conjuntos para abarcar más características y operaciones permitidas.

Seguiremos con fracciones y porcentajes, nuestro objetivo en esta parte es que entiendas cómo hacer representaciones de los números racionales en forma de números decimales, fracciones y porcentajes, y que puedas pasar de una representación a otra.

Por último, haremos cálculos combinados dentro de los distintos conjuntos numéricos y resolveremos ecuaciones simples. El objetivo es que puedas aplicar la matemática a situaciones cotidianas.

En este primer módulo, te proponemos entonces, estudiar sobre uno de los componentes fundamentales de la matemática: los números. Identificaremos características y resolveremos cálculos y ecuaciones.

Conjuntos numéricos

Números Naturales

Los números naturales son los que utilizamos para contar elementos: “11” jugadores de fútbol, “3” caballos, “257” representantes en la Cámara de Diputados de La Nación, etc. Al conjunto de estos números los denominamos con la letra “N”, levemente modificada: $\mathbb{N}$. Una forma de definir los conjuntos es por enumeración, es decir, indicando explícitamente sus elementos. En el caso de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{1;2;3;4;5;...\}$$

Observá que encerramos entre corchetes los elementos de $\mathbb{N}$ y que los separamos con punto y coma “;”. Encontramos otra notación más dentro de la definición: los puntos suspensivos. ¿Qué significan? Que esa serie de números sigue y que la cantidad es infinita. Los siguientes elementos del conjunto deben resultar obvios partiendo de los que se mostraron.

Indicá la respuesta correcta.

A. ¿Cuál de las siguientes definiciones de los números naturales está correctamente formulada?

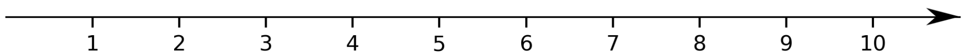
$$\mathbb{N} = \{0;1;2;3,...\}$$

$$\mathbb{N} = 1;2;3;4,....$$

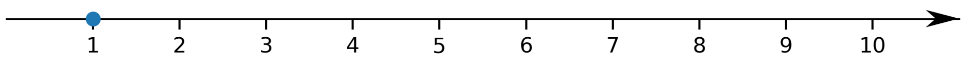
$$\mathbb{N} = \{1;2;3;4\}$$

$$\mathbb{N} = \{1;2;3;4,...\}$$

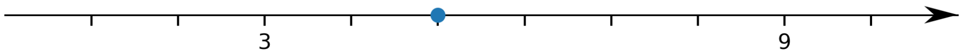
Los números suelen representarse sobre una recta conocida como la “recta numérica”. En dicha recta, hay una posición para cada número y esas posiciones están equiespaciadas:



Supongamos que queremos representar el número 1 en la recta, entonces lo que hacemos es marcar su posición con un punto:

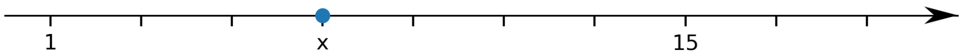


No siempre se indican explícitamente todos los valores numéricos en la recta. Con tener algunos valores de referencia ya se deduce qué otros valores corresponden a las otras marcas. Veamos el siguiente ejemplo:



Podemos observar que el valor representado por el punto es el 5. ¿Cómo nos dimos cuenta? Partimos del 3, hay 6 marcas hasta llegar al 9 y la diferencia entre 9 y 3 es 6. Esto significa que cada marca vale “1”. El punto está 2 marcas del 3, lo que equivale a una diferencia de 2 desde el 3, entonces es el 5.

Ahora, vamos a complicarnos un poquito más y a averiguar cuál es el número x en la siguiente recta numérica:



¿A cuánto equivale cada “salto” entre marcas? Vemos que hay que trasladarse 7 saltos para llegar del 1 a 15. Entonces, cada salto (lo vamos a llamar “s”) vale:

$$s = (15-1) : 7 = 2$$

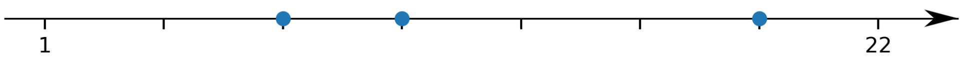
Ahora, nos resta saber cuál es el número x representado por el punto. Partimos del 1 y vemos que nos tenemos que correr 3 saltos hacia la derecha:

$$x = 1+3 * s = 1 + 3 * 2$$

$$x = 7$$

Indicá la respuesta correcta.

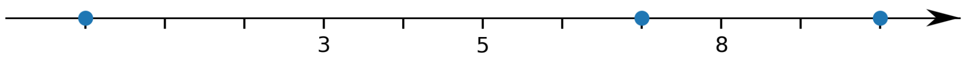
B. ¿Cuáles son los números representados en la siguiente recta numérica?



- {1;22}
- {3;4;7}
- {7;9;21}
- {7;10;19}

C. Indicá si la afirmación es Verdadera o Falsa

Todos los números indicados en la siguiente recta numérica pertenecen al conjunto de los números Naturales



◯ Verdadera ◯ Falsa

Hay muchas operaciones matemáticas que podemos hacer trabajando solo con números naturales y cuyo resultado también es un número natural. La más simple es la suma. Cualquier número natural sumado a cualquier otro número natural tiene como resultado un número natural.

La multiplicación es otra operación con esta característica (recuerden que la multiplicación se simboliza con una “x” pequeña o con un punto y que muchas computadoras ahora utilizan el asterisco “*”).

Otro ejemplo es la potenciación. Recordemos que un número “a” elevado a la “n” tiene como expresión:

$$a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ....)}_{\text{n veces}}$$

Donde la multiplicación, se repite “n” veces (en este caso, los puntos suspensivos denotan que la cantidad de veces a repetir la operación de multiplicar es n).

Hay otras operaciones matemáticas que se realizan con números naturales, pero cuyo resultado puede no ser un número natural. Un ejemplo es la raíz enésima. La raíz “n”-sima del número “a” es “b” si se cumple:

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \text{si se cumple que} \qquad b^n = a$$

Por ejemplo:

$$\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{porque} \qquad 4^2 = 16$$

En este ejemplo introdujimos la notación de la “raíz cuadrada”, que es la raíz enésima con n=2 y solo para este caso no hace falta poner el 2 sobre el símbolo de la raíz. Se sobrentiende que si no hay ningún número sobre el símbolo de la raíz el número que habría es un 2.

Indicá si la afirmación es Verdadera o Falsa.

D. La resta de un número natural consigo mismo da como resultado un número natural (esto equivale a decir que si “a” es Natural, entones el resultado de **a-a** también es natural).

◯ Verdadera ◯ Falsa

Analicemos la actividad anterior con un ejemplo:

$$3-3=0$$

El cero no pertenece a los números naturales. La frase anterior, con notación matemática es:

$$0 \notin \mathbb{N}$$

El símbolo $\in$ significa que el elemento a su izquierda pertenece al conjunto de la derecha; si está tachado $\notin$ significa que no pertenece. Entonces, surge como necesidad un conjunto que incluye a los naturales y al cero. Se lo llama Naturales sub Cero y se lo define así:

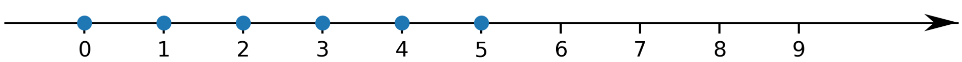
$$\mathbb{N}_0 = \{0;1;2;3; \ldots\}$$

Si ahora vemos la relación entre conjuntos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$$

El símbolo $\subset$ significa el conjunto a la izquierda de este símbolo está incluido en el conjunto de la derecha. Que un conjunto A está en otro conjunto B significa que todos los elementos de A también son elementos de B. El cero es un número que tardó mucho tiempo en ser inventado. Originalmente, los números servían solo para contar elementos de la naturaleza y como nadie contaría un no elemento, el cero no tenía razón de existir en tiempos antiguos.

Los números $\mathbb{N}_0$ también pueden ser representados en una recta numérica. Por ejemplo, los 6 primeros números naturales los representaríamos con la siguiente recta numérica:



Ahora que ampliamos el conjunto de números naturales para incluir el 0, para cualquier número x con $x \in \mathbb{N}_0$ podemos afirmar que $(x-x) \in \mathbb{N}_0$

Indicá si el enunciado es Verdadero o Falso

E. La resta entre números de $\mathbb{N}_0$ da siempre como resultado un número que pertenece a $\mathbb{N}_0$

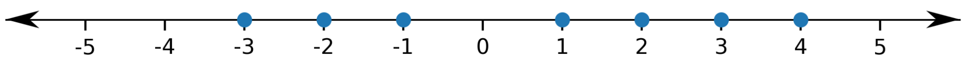
- Verdadero
- Falso

Nuevamente, una operación matemática nos pide ampliar nuestros conjuntos numéricos: necesitamos incorporar a los negativos. Surge entonces un conjunto más grande que es el de los números enteros, los identificamos con la letra $\mathbb{Z}$, y al conjunto lo definimos como:

$$\mathbb{Z} = \{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$$

Observen como ahora hay puntos suspensivos al principio y al final de la enumeración, esto es porque los números enteros se extienden tanto hacia el infinito, por el lado de los positivos, como hacia el menos infinito, por el lado de los negativos.

Los números de $\mathbb{Z}$ también podemos representarlos en la recta numérica. Por ejemplo, los 3 números inmediatamente menores a 0 y los 4 inmediatamente mayores quedan representados en:



La recta numérica se extiende hacia el infinito tanto por el lado de los números positivos como por el lado de los negativos, por eso hay flechas a ambos lados.

Indicá la respuesta correcta.

F. Dados dos números enteros cualquiera "a" y "b" (**a** $\in \mathbb{Z}$ y **b** $\in \mathbb{Z}$), ¿para cuál de las siguientes operaciones **no** puede asegurarse que el resultado también pertenezca al conjunto de los enteros?

- Suma
- Resta
- Multiplicación
- División

Seguimos extendiendo nuestros conjuntos de números. Los números racionales son aquellos que pueden escribirse como el cociente de dos números enteros. Si **a** $\in \mathbb{Z}$ y **b** $\in \mathbb{Z}$ entonces:

$$c = a : b$$

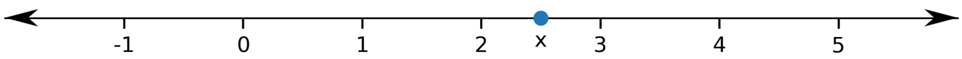
es un número racional. El nombre "racional" se debe a que el resultado de una división se llama razón. El conjunto de los números racionales se lo identifica con la letra $\mathbb{Q}$.

Indicá si el siguiente enunciado es Verdadero o Falso:

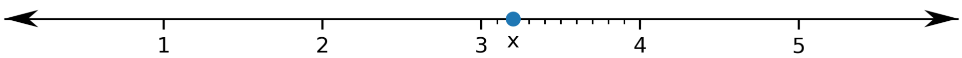
G. Todos los números enteros son también racionales, lo que es equivalente a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

○ Verdadero ○ Falso

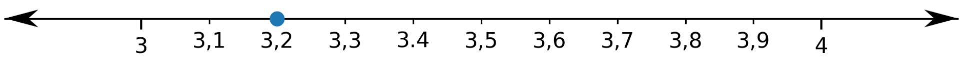
A diferencia de los números enteros, cuya representación se encuentra sobre una de esas marcas principales que tiene la recta numérica, los números racionales pueden encontrarse entre marcas. Tomemos el ejemplo del número x=5:2=2,5 ¿cómo lo representamos? El punto debe estar en el medio del 2 y el 3:



Si tenemos cualquier otro número racional deberemos subdividir las marcas en tantos espacios como haga falta. Tomemos otro ejemplo, ¿cómo representamos el número x=16/5? Primero pasamos a la representación decimal: x = 16 : 5 = 3,2. Ahora sabemos que está entre el 3 y el 4. ¿en cuál posición lo ubicamos? Dividimos el espacio entre en 3 y el 4 en 10 subdivisiones, de este modo cada una tendrá un ancho de 0.1. Ahora sabemos que va en la segunda:



Si nos queda algo de dudas, miremos en detalle el rango entre el 3 y el 4:



Si los números racionales surgen del cociente entre dos números enteros, entonces podemos ver que los números racionales pueden ser expresados como fracciones. Las fracciones son esencialmente eso, un cociente entre dos números enteros. ¿Cómo pasamos de la expresión fraccionaria a una decimal? Este paso es muy simple: dividiendo. Tomemos un ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$$

¿Y si queremos hacer el paso inverso de notación decimal a fraccionaria? Vamos a multiplicar al número anterior por 1, con lo cual no lo modificamos. Ese 1 lo escribimos como 10:10 y luego operamos un poco:

$$0{,}5 * 1 = 0{,}5 * \frac{10}{10} = \frac{0{,}5 * 10}{10} = \frac{5}{10}$$

Listo, pasamos el número a una fracción, ¿es esta la fracción más simple? ¿hay otras fracciones que representen al mismo número? Las podemos reducir a la fracción más simple dividiendo tanto numerador como denominador por el mismo número entero:

$$\frac{5}{10} = \frac{5 : 5}{10 : 5} = \frac{1}{2}$$

Veamos un caso un poquito más difícil: ¿cómo represento en fracción al número 0,053?

$$0{,}053 * \frac{1000}{1000} = \frac{0{,}053 * 1000}{1000} = \frac{53}{1000}$$

El procedimiento es similar: corrimos 3 lugares la coma para que el 0,053 se transforme en el 53 que va a ser el numerador. Para el denominador, si corrimos 3 lugares la coma, elegimos un 1 seguido de tres ceros: 1000.

Indicá la respuesta correcta.

H. ¿Cuál de las siguientes fracciones representa el número 2,03 como un cociente de enteros?

- 203/10
- 20,3/10
- 203/100
- 203/1000

Pasemos a situaciones un poco más complicadas. ¿Cuál es la representación decimal de la fracción 1⁄3? Al hacer la división encontramos que:

$$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0{,}333333...$$

El dígito 3 se repite indefinidamente, los puntos suspensivos indican eso (hagan la división en un papel y verifiquen que ocurre esto). Para estos números, que llamaremos periódicos, primero identificaremos el período que es la parte que se repite, y la marcaremos con un "sombrero" que indica que se repite indefinidamente:

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overset{\frown}{3}$$

¿Cómo hacemos el camino de vuelta para pasar de la expresión decimal de un número periódico a la expresión como fracción? Tomamos el período (la parte que se repite) como numerador y como denominador tantos 9 como dígitos tenga el período. Por último simplificamos:

$$0{,}\overset{\frown}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0{,}\overset{\frown}{27} = \frac{27}{99} = \frac{9}{33}$$

¿Y si la parte periódica no comienza justo después de la coma? Veámoslo con un ejemplo:

$$0{,}\overset{\frown}{03} = 0{,}\overset{\frown}{3} : 10 = \frac{3}{9} : 10 = \frac{3}{90}$$

Entonces, colocamos como numerador el período y como denominador tantos 9 como dígitos tenga el período seguido de tantos ceros como los lugares que debería correr la coma, para que la coma quede justo antes del período. Luego deberíamos simplificar, aquí no lo hicimos para no confundir.

Indicá la respuesta correcta.

I. ¿Cuál de las siguientes fracciones es equivalente al número $0{,}0\overset{\frown}{72}$?

- 720/99
- 72/100
- 72/990
- 72/1000

Si los números son una mezcla de parte periódica y parte no periódica, debemos separar ambas partes y luego combinarlas. Tomemos este ejemplo, ¿cómo es la expresión fraccionaria del número $1{,}\overset{\frown}{32}$? Transformamos en fracción cada una de esas partes:

$$1{,}\overset{\frown}{32} = \underset{\frac{13}{10}}{\underline{1{,}3}} + \underset{\frac{2}{90}}{\underline{0{,}0\overset{\frown}{2}}}$$

y luego sumamos las fracciones:

$$1{,}\overset{\frown}{32} = \frac{13}{10} + \frac{2}{90}$$

Hacemos que ambas fracciones tengan el mismo denominador para poder sumar y, ahora sí, sumamos:

$$1{,}\overset{\frown}{32} = \frac{117}{90} + \frac{2}{90} = \frac{119}{90}$$

¡Listo, encontramos la fracción!

Si no recordás o necesitás más práctica sobre como simplificar fracciones, ingresá al siguiente link:

https://www.educ.ar/recursos/60149/llegaron-las-fracciones

Encontrarás este video en la plataforma, Página del estudiante: Recursos para el estudio / Matemática 1 / Llegaron las fracciones.

Si no recordás o necesitás más práctica sobre operaciones con fracciones, ingresá a:

https://www.educ.ar/recursos/92075/skoool-tm-leccion-suma-y-resta-de-fracciones

Encontrarás este video en la plataforma, Página del estudiante: Recursos para el estudio / Matemática 1 / Suma y resta de fracciones.

En ambas páginas revisá la “lección” donde te explicará como trabajar y hacé los ejercicios. Tené en cuenta que las explicaciones y ejercicios de esos dos links forman parte del aprendizaje y evaluación de esta guía.

Porcentaje en pocos renglones

El porcentaje es algo que suele confundir mucho pero, una vez que se entiende su significado, es algo muy simple. Supongamos que de una clase de 40 alumnos solo 8 disfrutan de jugar al fútbol. ¿Cuál fracción de alumnos disfruta del fútbol?:

$$8/40$$

Podemos simplificar la fracción (dividiendo numerador y denominador por 8) y decir que 1/5 de los alumnos disfrutan de jugar al fútbol. También podemos ir más lejos, hacer la división y decir que una fracción de 0,2 de los chicos disfrutan de jugar al fútbol. Si bien todas las expresiones anteriores son correctas, se hace un poco complicado en una conversación comparar fracciones o números decimales. Hagamos esta cuenta, multipliquemos por 1 ese número fraccionario, que claramente no cambia el valor y a ese 1 lo remplazamos por 100/100

$$0{,}2 = 0{,}2 * 1 = 0{,}2 * \frac{100}{100} = 20 * \frac{1}{100}$$

Si no pudiste seguir las cuentas, volvé a consultar

https://www.educ.ar/recursos/92075/skoool-tm-leccion-suma-y-resta-de-fracciones

Encontrarás este video en la plataforma, Página del estudiante: Recursos para el estudio / Matemática 1 / Suma y resta de fracciones.

Ahora veamos algo de nomenclatura: al "*1/100 " lo voy a llamar "%", entonces

$$0{,}2 = 20\%$$

Listo: 0,2 es lo mismo que 20%.

¿Cuál número decimal es equivalente al 25%? Recordemos que el % significa multiplicar por 1/100

$$25\% = 25 * \frac{1}{100} = \frac{25}{100} = 0{,}4$$

Hagamos algunos cálculos con porcentajes: supongamos que cierto producto costaba $ 30 y aumentó un 60%, ¿cuánto cuesta ahora? Calculemos primero el aumento:

60% * 30 = 60 / 100 * 30 = 18

$$60\% * 30 = \frac{60}{100} * 30 = 18$$

(Verificá esa última cuenta que dio 18 para ver si estás operando bien). El precio actual va a ser el que tenía, más lo que aumentó:

$$30 + 18 = 48$$

Indique la opción correcta.

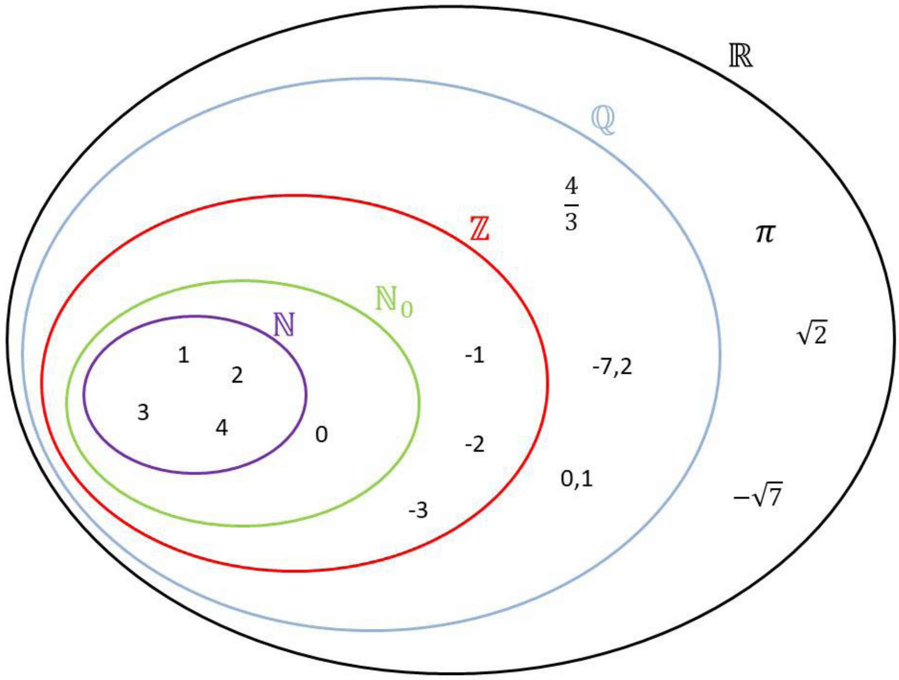
A. Si en el patio del colegio había 400 chicos y al sonar el timbre solamente el 15% de los chicos volvió al aula, ¿cuántos chicos quedaron en el patio?

- 60
- 320
- 340
- 375

Seguimos con los conjuntos numéricos. Existen números que no pueden calcularse como el cociente entre dos números enteros. Un caso típico es √2="1,414213…" Los puntos suspensivos indican que la cantidad de dígitos continúa indefinidamente. Si buscamos un período, es decir una sucesión de dígitos que se repita infinitas veces, no la vamos a poder encontrar. Demostrar que √2 no se puede escribir como el cociente de dos números enteros es una tarea compleja que queda fuera de esta guía. A estos números que no pertenecen al conjunto de los racionales los llamamos irracionales. Hay otros números irracionales, uno de los más famosos es π = "3,14159265..."

Al conjunto de números racionales junto con los irracionales lo llamamos Reales y lo denominamos con el símbolo $\mathbb{R}$.

Veamos como quedan los conjuntos numéricos que vimos, unos incluidos en otros. En la siguiente figura mostramos algunos elementos de cada uno de ellos:



Podemos expresar la misma relación de inclusión que mostramos en la figura solo con notación matemática de conjuntos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

El símbolo $\subset$ significa "incluido en". Los números naturales también pertenecen al conjunto $\mathbb{N}_0$, lo que es equivalente a decir que el primer conjunto está incluido en el segundo. Si a los elementos de N agregamos el "0" completamos todos los elementos de $\mathbb{N}_0$. Si a todos los elementos de $\mathbb{N}_0$ agregamos los números enteros negativos obtenemos el conjunto de enteros $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ está incluido en el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$, que incluye todos aquellos que podemos escribir como un cociente de números enteros. Por último, si a los números racionales agregamos los números irracionales formamos el conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

¿Se acaban aquí los conjuntos numéricos? No, hay conjuntos más amplios y cuya aplicación excede lo que estamos buscando en la matemática de este módulo.

Operaciones y cálculos combinados

De aquí en adelante trabajaremos dentro del conjunto de los números reales. En esta sección vamos a practicar algunos cálculos combinados. Vamos a aprender en base a ejemplos.

¿Cuánto es el resultado del siguiente cálculo?

$$3 * 4 + 2 * 5 = ?$$

Recordemos que la suma y la resta dividen "términos", y que tenemos que calcular primero dentro de esos términos. Esto equivale, en este caso, a que primero resolvemos las multiplicaciones y luego la suma:

$$\underbrace{(3 * 4)}_{12} + \underbrace{(2 * 5)}_{10} =$$

$$= 12 + 10 = 22$$

Indicá la opción correcta.

A. En una estantería había 6 estantes con 7 libros cada uno y 4 estantes con 2 libros en cada uno, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el total de libros que había en la estantería y además su resultado está bien calculado?

- $6 + 7 + 4 + 2 = 19$
- $6 * 7 * 4 * 2 = 336$
- $6 * 7 + 4 * 2 = 50$
- $6 * 7 + 4 * 2 = 96$

Para alterar el orden en el que vamos haciendo los cálculos se utilizan paréntesis. Los paréntesis indican que lo que encierran debe ser reducido primero antes de seguir operando. *Ejemplo*:

$$\underbrace{(3 * 4)}_{12} + 2 * 5 =$$

$$= \underbrace{(12 + 2)}_{14} * 5 = 70$$

Indicá la opción correcta.

B. A 5 se le suma el resultado de multiplicar 3 por 4, ¿cuál de las operaciones matemáticas representa la frase anterior y además está bien calculado el resultado?

- 5 + 3 * 4 = 17
- 5 + 3 * 4 = 32
- 3 * 4 + 5 = 27
- 3 * (4 + 5) = 27

Hay ciertas propiedades que debemos tener en claro para poder simplificar expresiones y resolver situaciones que veremos más adelante.

Propiedades de la suma:

- Propiedad conmutativa, se puede alterar el orden de los sumandos: a + b = b + a
- Propiedad asociativa: a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)
- Propiedad distributiva: a * (b + c) = a * b + a * c
- Por la propiedad conmutativa es lo mismo que: (b + c) * a = b * a + c * a
- Existe un elemento "neutro" sumado a cualquier número no lo altera. Ese elemento neutro es el cero: a + 0 = a
- Existe un elemento "opuesto" a cada número, de forma que al sumarlo a ese número da como resultado el elemento neutro. El opuesto de "a" es "-a": a+(-a)=a-a=0
- Lo anterior podemos verlo como que la operación opuesta a la suma es la resta: a-a=0

Propiedades de la multiplicación:

- Propiedad conmutativa, se puede alterar el orden de los factores: a * b = b * a
- Propiedad asociativa: a * b * c = (a * b) * c = a * (b * c)
- Propiedad distributiva (es lo mismo en indicamos en la suma): a * (b + c) = a * b + a * c
- Existe un elemento neutro, al multiplicar cualquier número por el elemento neutro ese número no se altera. El elemento neutro es el 1: a * 1 = a
- Existe un elemento absorbente, al multiplicar cualquier número por el elemento absorbente obtenemos el elemento absorbente. El elemento absorbente es el 0: a*0=0
- Todos los reales salvo el 0 tienen un elemento inverso. Al multiplicar un número por su inverso obtenemos el elemento neutro. El elemento inverso de a es (1:a): a*(1 : a) = a * 1/a = 1

- Lo anterior podemos verlo como que la operación inversa a la multiplicación es la división: $a : a = 1$ (siempre que $a \neq 0$)

Estas propiedades podemos utilizarlas para simplificar expresiones y también para resolver ecuaciones. ¿Te acordás qué es una ecuación? Una ecuación es una igualdad entre expresiones matemáticas que poseen incógnitas. Por ejemplo, la incógnita en la siguiente ecuación es x y vamos a deducir cuál es su valor:

$$x + 12 = 18$$

¿Cómo lo trabajo? Voy a tratar de “despejar” x, lo que significa dejarla “sola”, para ello voy a realizar la misma operación a ambos lados del "=", como ambos lados valen lo mismo, si les aplico la misma operación seguirán valiendo lo mismo. En este caso utilizo la operación inversa a la suma.

$$x + 12 - 12 = \underbrace{18 - 12}_{6}$$

$$x + 12 - 12 = 6$$

¿Por qué resté 12? Para eliminar el 12 que ya tenía. Por ser operación opuesta:

$$x + \underbrace{12 - 12}_{0} = 6$$

$$x + 0 = 6$$

Ahora, el 0 es elemento neutro para la suma:

$$\underbrace{x + 0}_{x} = 6$$

Y finalmente:

$$x = 6$$

Este es detalle de todas las operaciones que quedan escondidas en que “si algo está sumando, lo paso para el otro lado restando”:

$$x + 12 = 6$$

$$x = 6 - 12$$

Vayamos con otro ejemplo un poquito más complicado:

$$2 * x - 2{,}5 = 7{,}5$$

Si un miembro de la ecuación está restando, lo paso sumando (¿Cuáles son los pasos escondidos en esta expresión? Hacelos en hoja aparte):

$$2 * x = 7{,}5 + 2{,}5$$

Y voy haciendo las cuentas que puedo (7,5+2,5):

$$2 * x = 10$$

Ahora, si algún número está multiplicando lo "paso" dividiendo (fíjate cuales son las operaciones escondidas para esto):

$$2 * x = 10$$

$$x = 10 : 2$$

$$x = 5$$

Resolvamos un ejemplo aún más complejo:

$$5 * x - 6 = 3 * x + 14$$

La estrategia es aislar la x de todo el resto. Vayamos por parte. Podemos pasar el 6 hacia la derecha, si estaba restando, lo paso multiplicando:

$$5 * x - 6 = 3 * x + 14$$

$$5 * x = 3 * x + \underbrace{14 + 6}_{20}$$

$$5 * x = 3 * x + 20$$

¿Cómo sigo? Trato de juntar todas las "x" del mismo lado. Pasaremos el término con la x que está a la derecha para la izquierda. Seguí atento estos pasos:

$$5 * x - 3 * x = 3 * x + 20 - 3 * x$$

Uso la propiedad conmutativa:

$$5 * x - 3 * x = 3 * x - 3 * x + 20$$

Y ahora identifico operaciones opuestas (sumo algo y luego lo resto, eso me da 0, ese “algo” puede ser un número o una expresión más compleja, en este caso la expresión es 3*x):

$$5 * x - 3 * x = \underbrace{3 * x - 3 * x}_{0} + 20$$

$$5 * x - 3 * x = 20$$

Aplico la propiedad distributiva:

$$\underbrace{(5 - 3)}_{2} * x = 20$$

$$2 * x = 20$$

Habíamos visto la propiedad distributiva con la suma, ¿por qué la pudimos aplicar con la resta? Porque restar un número positivo es equivalente a sumar su opuesto: 5 - 3 = 3 + (-3). Noten que pusimos el -3 entre paréntesis para evitar que queden dos símbolos seguidos. Restar un número positivo es lo mismo que sumar su correspondiente negativo.

Finalmente, paso dividiendo al 2 que estaba multiplicando:

$$2 * x = 20$$

$$x = 20 : 2$$

$$x = 10$$

¿Cómo verificamos que sea el resultado correcto? Volvemos a la ecuación general, remplazamos x por su valor 10, calculamos y vemos que la igualdad se cumpla:

$$5 * \underbrace{x}_{10} - 6 = 3 * \underbrace{x}_{10} + 14$$

$$5 * 10 - 6 = 3 * 10 + 14$$

$$50 - 6 = 30 + 14$$

$$44 = 44$$

Si hubiese resuelto mal la ecuación, en el último renglón habría encontrado un absurdo, algo así como 17 = 32, algo que claramente no está bien.

No existe una forma única de resolver una ecuación, tampoco una receta para resolver todas las ecuaciones. La única forma es practicar y practicar.

Redondeos

Muchas veces, las representaciones exactas de los números pueden ser muy incómodas para manejar y no tiene sentido práctico mantener la exactitud. En esos casos, surge el redondeo. Veremos qué es el redondeo con un ejemplo. Hagamos la siguiente cuenta:

$$\frac{17}{11} + 0{,}\overset{\frown}{5} =$$

$$= \frac{17}{11} + \frac{5}{9} =$$

$$= \frac{17 * 9 + 5 * 11}{11 * 9} =$$

$$= \frac{153 + 55}{99} = \frac{208}{99} = 2{,}\overset{\frown}{10}$$

Las cuentas no fueron muy cómodas, podemos aproximar los números que teníamos a una cantidad de dígitos decimales, por ejemplo, si decidimos quedarnos con 3 dígitos decimales (el símbolo “ $\cong$ ” indica “aproximadamente igual):

$$\frac{17}{11} + 0{,}\overset{\frown}{54} = 1{,}54545454... \cong 1{,}545$$

$$0{,}\overset{\frown}{5} = 0{,}555555... \cong 0{,}556$$

Noten que el último dígito de la aproximación de $0{,}\overset{\frown}{5}$ es 6, ¿por qué? Porque buscamos el número con 3 decimales más próximo, y si hubiésemos elegido el 0,555 estaría más alejado del valor real. Esta última aproximación se llama truncado y consiste directamente en eliminar los dígitos a partir del cual ya no nos interesa la precisión, es una aproximación menos precisa que el redondeo pero también es válida. Ahora, hagamos la cuenta con los números redondeados a 3 decimales:

$$1{,}545 + 0{,}556 = 2{,}101$$

Y si redondeamos a 3 decimales, el resultado exacto:

$$2{,}\overset{\frown}{10} = 2{,}101010... \cong 2{,}101$$

Trabajando con los números redondeados, obtuvimos un valor equivalente a trabajar con la expresión exacta pero los cálculos son muchísimo más sencillos. Puede resultar que los cálculos aproximados y el exacto no den exactamente igual, esto es porque el proceso de redondeo quita información de los números. Igualmente, ambos cálculos darán resultados equivalentes dentro de la precisión. ¿Son válidos los cálculos aproximados? Todo depende de la aplicación, por ejemplo, si vamos a medir el largo de una cancha de fútbol, que si el valor exacto es 80,00002 metros estamos teniendo más precisión que la necesaria, con redondear a 80 metros para fines prácticos es lo mismo. La precisión y la cantidad de dígitos significativos dependerán de cada situación.

Ahora, resolvé el siguiente ejercicio para comprobar si comprendiste bien:

A. Indicá la respuesta correcta.

¿Cuál es el resultado de redondear con 3 decimales a 7/9 ?

- 0,77
- 0,78
- 0,777
- 0,778

Guía de ejercicios

Ahora que ya repasaste todo, resolvé estos ejercicios para estar bien preparado para el examen. Al finalizar encontrarás todas las respuestas correctas para que compares con tus procesos y resultados.

A. Ordená los conjuntos de forma tal que el primero esté incluido en el segundo, que el segundo en el tercero y que el tercero esté incluido en el cuarto:

- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Z}$
- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{R}$

B. Indicá si el siguiente enunciado es Verdadero o Falso:

El número 4 pertenece a $\mathbb{Z}$.

◯ Verdadero ◯ Falso

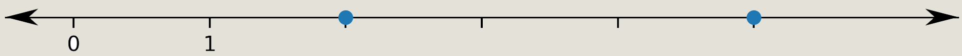
C. Indicá si el siguiente enunciado es Verdadero o Falso:

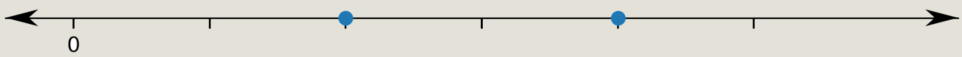
El número 4 **no** pertenece a $\mathbb{Q}$ debido que los enteros pertenecen al conjunto $\mathbb{Z}$.

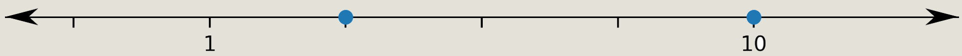
◯ Verdadero ◯ Falso

D. Indicá la respuesta correcta.

¿En cuál de las siguientes rectas numéricas se representó correctamente, con puntos azules, los números 4 y 10?







E. Indicá la respuesta correcta.

Dado un número entero cualquiera a y un entero positivo cualquiera b; $a \in \mathbb{Z}$ “y” $b \in \mathbb{N}$. ¿De cuál de las siguientes operaciones **no** se puede asegurar que el resultado pertenezca a $\mathbb{Z}$?

a * b   a ^ b   a : b   a - b

F. Indicá la respuesta correcta.

¿A cuál de los siguientes conjuntos numéricos pertenece $4,\overset{\frown}{3}$?

$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}_0$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$

G. Indicá la respuesta correcta.

¿Cuál de los siguientes números **no** pertenece al conjunto de los racionales?

-6   2,21   π $3,\overset{\frown}{4}$

H. Indicá si la afirmación es Verdadera o Falsa.

La siguiente relación es correcta: $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$

○ Verdadera   ○ Falsa

I. Indicá la respuesa correcta.

Calculá el resultado de la siguiente operación matemática:

$$\frac{3}{2} * 4 + 2 * \frac{4}{3}$$

¿Cuál es el resultado correcto?

8/3   26/3   14/3   14/6

J. Indicá la respuesta correcta.

¿A cuál de las opciones es equivalente la siguiente operación matemática?

a * b + b * c + c * a + a * a

(a + b) * (b + c)   (a * b) * (a + c)   a * (a + b + c) + b * c   b * (a + c) + a * a

K. Indicá la respuesta correcta.

Cuatro cajones tenían 3 cuadernos cada uno; también, había 2 estantes con 5 cuadernos cada uno y un cuaderno más, suelto sobre el escritorio. Si se pegaron 2 etiquetas en cada cuaderno, ¿cuál de las siguientes operaciones representa la cantidad total de etiquetas que pegadas y tiene bien calculada la cantidad de etiquetas?

- (4*3+2*5+1)*2=46
- 4*3+2*5+1*2=142
- ((4+2)*(3+5)+1)*2=98
- ((4+2)*(3+5)+1)*2=98

L. Indicá la respuesta correcta.

Para hacer un cálculo con fracciones que no requiere mucha precisión, se redondeará a 3 decimales. El cálculo es: 1/3 + 1/7

Se aproxima a 3 decimales cada número y se opera: 0,333 + 0,142 = 0,475

Para saber si está bien resulto, se realiza en forma exacta y se obtiene:

1/3 + 1/7 = (7 + 3) / 21 = 10/21 ≅ 0,4761904

Lo último redondeado a 3 dígitos es 0,476. El resultado del cálculo aproximando con 3 decimales y el resultado con el cálculo exacto no son idénticos.

¿Se verificó el cálculo aunque el resultado del cálculo aproximado y el exacto no son idénticos?

○ Si ○ No

M. Indicá la respuesta correcta.

Se paga con 1000 pesos 2 almohadones iguales y dan de vuelto 40 pesos.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite calcular el precio "x" (en pesos) de cada almohadón y además está bien resuelta?

- 2 * x - 1000 = 40 ; x = 460
- 1000 - 2 * x = 40 ; x = 480
- 1000 - 2 * x = 40 ; x = 510
- 2 * x - 1000 = 40 ; x = 520

N. Indicá la respuesta correcta.

En la verdulería se pidió 1kg de naranjas. El verdulero puso 11 naranjas en la balanza y, como se pasaba, quitó 3 y la balanza marcó exacto 1kg. Si todas las naranjas son iguales, ¿cuál de las siguientes ecuaciones está bien resuelta y permite calcular el peso "x" (en kg) de cada naranja?

- $1 - 11 * x - 3 * x = 0$; $x = 0{,}125$
- $11 * x - 3 * x = 1$; $x = 0{,}125$
- $11 * x - 3 * x = 1$; $x = 0{,}250$
- $1 - 11 * x - 3 * x = 0$; $x = 0{,}250$

O. Indicá la respuesta correcta.

En un sube y baja, se ponen 5 pelotas de un lado y del otro, para equilibrar, se colocan 3 pelotas y 4 paquetes de yerba de 1kg. Todas las pelotas son iguales.

¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite calcular el peso "x" (en kg) de cada pelota y además está bien resuelta?

- $5 * x = 3 * x + 4 * 1$; $x = 0{,}5$
- $5 * x + 3 * x = 4 * 1$; $x = 0{,}5$
- $5 * x = 3 * x + 4 * 1$; $x = 2$
- $5 * x + 3 * x = 4 * 1$; $x = 2$

P. Uní cada ecuación con su solución. Quedará una posible solución sin emparejar.

Columna 1	Columna 2
$1/2 * x + 2 = 3/2 * x + 1/4$	$x = 0$
$3/4 (x + 2/3) = 1$	$x = 1/3$
$0{,}2 * (5 * x + 10) = 4 * (0{,}1 * x + 1)$	$x = 0{,}\overset{\frown}{6}$
$5/2 * (3/2 * x + 6/5) - 3 = 11/3 * x$	$x = 7/4$
	$x = 10/3$

Hasta acá completaste varios ejercicios que te permitieron poner en práctica los temas repasados. Podés encontrar más ecuaciones para resolver en internet buscando "ejercicios de ecuaciones de primer grado" (primer grado es como se denominan las ecuaciones que vinimos realizando). Y también podés inventar tus propias ecuaciones y luego verificar la solución remplazando x por el valor que calculaste y ver que las igualdades queden bien.

Resumen

En este módulo repasaste y ejercitaste sobre conjuntos numéricos, distintas representaciones numéricas y operaciones. También practicaste cómo redondear un número y cómo calcular porcentajes. Por último, repasaste cómo resolver ecuaciones de primer grado. Todos estos conocimientos te dan una base sólida para seguir aprendiendo.

Claves de corrección

A continuación dejamos las respuestas correctas para que corrobores con los procesos que realizaste y los resultados que obtuviste. En el examen final no tendrás que justificar tus respuestas pero es importante que observes con detenimiento el desarrollo de cada ejercicio para que autoevalúes tu práctica.

Números naturales

- **A.** La respuesta correcta es: "ℕ = {1;2;3;4,...}", porque tiene correctamente los corchetes que encierran a los elementos, los puntos suspensivos que indican que hay infinitos elementos y comienza con el "1" y no con el "0" que no pertenece al conjunto.

- **B.** La respuesta correcta es: "{7;10;19}". Para encontrarlo, primero debes calcular de cuánto es el salto entre marcas. Para pasar de la marca correspondiente al 1 hasta la del 22 avanzamos 7 pasos, luego cada paso entre marcas equivale a dividir el salto entre ambos números entre los 7 pasos:

$$\frac{22 - 1}{7} = 3$$

Una vez obtenido el paso, podemos calcular el valor representado por cada marca, por ejemplo la segunda marca después del 1 representa:

$$1 + 2 * 3 = 7$$

La tercera marca después del 1 representa:

$$1 + 3 * 3 = 10$$

Y la sexta marca después del 1 representa:

$$1 + 6 * 3 = 19$$

En esta forma de cálculo referenciamos a la marca del "1", pero podríamos haberlo hecho referenciando a otro valor conocido, si queremos ver el valor representados por la marca anterior al 22, para la cual nos corrimos un paso en sentido negativo:

$$21 - 1 * 3 = 19$$

- **C. La respuesta es: "Falsa".** El primero de los puntos es el "0" que no pertenece a los naturales.

- **D. La respuesta correcta es: "Falsa".** La resta de un número consigo mismo tiene como resultado "0" y el 0 no forma parte de los naturales

- **E. La respuesta correcta es: "Falso".** Si bien hay muchas restas entre números naturales que tienen como resultado otro número natural hay casos en los que no es así, uno sería 17-180 = -173 y -173 $\notin \mathbb{N}_0$. Encontrar un caso que no cumpla con una afirmación es demostrar con lo que se conoce como contraejemplo.

- **F. La respuesta correcta es "División".** Como ejemplo 1/2 = 0,5 y 0,5 $\notin \mathbb{Z}$

- **G. La respuesta correcta es "Verdadero".** Tomemos un número entero cualquiera "z", sabemos que el número 1 es entero y que z=z/1 Entonces pudimos escribir a z como el cociente entre dos enteros ("z" y 1)

- **H. La respuesta correcta es: "203/100"** ya que dividir por 100 equivale a correr 2 lugares la coma. La opción 20,3/10 da el mismo resultado pero no es un cociente de enteros.

- **I. La respuesta correcta es: "72/990"**, ya que es el resultado de dividir por 10 a:

$$0,\overset{\frown}{72} = \frac{72}{990}$$

Porcentaje

- **A. La respuesta correcta es: "340"** porque la cantidad de chicos que volvió al aula son:

$$15\% * 400 = \frac{15}{100} * 400 = 60$$

Entonces, la cantidad de chicos que quedó en el patio son:

$$400 - 60 = 340$$

Operaciones y cálculos combinados

- **A. La respuesta correcta es: "6 * 7 + 4 * 2 = 50"**

En caso de haber elegido otra opción, habría que revisar la separación en términos al hacer las cuentas o si las cuentas no representan al problema.

- **B. La respuesta correcta es: "5 + 3 * 4 = 17"**

- Si se elegió la opción 5 + 3 * 4 = 32, no están bien separados los términos.
- Si se eligió la opción 3 * 4 + 5 = 27, no representa la expresión y esas operaciones no tienen como resultado 27.
- Si se eligió la opción 3 * (4 + 5) = 27, habrá que atender que la expresión matemática no representa la frase.

Redondeo

A. La respuesta correcta es: "0,778", ya que:

$$7/9 = 0{,}7777\ldots$$

Al redondear a 3 decimales debemos elegir entre truncarlo a 0,777 o elegir uno levemente mayor: 0,778. Seleccionamos la última opción ya que es la más cercana al número sin redondear.

Guía de ejercicios

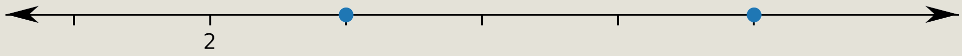
A. La respuesta correcta es: "$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset$ R" , porque:

- El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales abarca exclusivamente a los números enteros positivos, es el más pequeño de los conjuntos del ejercicio.
- El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros incluye a todos los elementos de $\mathbb{N}$ y además agrega al cero y a los enteros negativos.
- El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales incluye a todos los elementos de $\mathbb{Z}$y agrega todos los números que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros y que aún no estaban en $\mathbb{Z}$.
- El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales incluye a todos los elementos de $\mathbb{Q}$ y además incorpora a los números irracionales.

B. La respuesta es: "Verdadero", ya que el número 4 es un número entero positivo con lo que pertenece a $\mathbb{N}$, y como $\mathbb{N}$ está incluido en $\mathbb{Z}$ entonces también pertenece a este último conjunto

C. La respuesta es: "Falso". Los números enteros son un subconjunto de los racionales, por lo cual si un número pertenece a $\mathbb{Z}$ también pertenece a $\mathbb{Q}$.

D. La respuesta correcta es:



Para verificar que es la solución, se debe primero encontrar la escala, es decir, cuánto es el paso entre marcas. El primer punto azul debería ser el 4, lo que indica que cada paso equivale a "2". Luego como desde el 2 hasta el segundo punto se avanzaron 4 pasos, este punto representa: $2 + 2 * 4 = 10$

E. La respuesta correcta es "a : b". La división entre enteros es un número racional no necesariamente entero.

F. La respuesta correcta es "$\mathbb{Q}$" ya que $4,\widehat{3}$ es un número racional. Los otros conjuntos solo admiten números enteros, y $4,\widehat{3}$ no lo es.

G. La respuesta correcta es: "π" ya que no puede escribirse como un cociente de enteros.

H. La respuesta correcta es: "Verdadera" porque $3 * 8 > 4 * 5$

I. La respuesta correcta es: 26/3. Si se ha elegido otra respuesta, se deberá revisar la separación en términos.

J. La respuesta correcta es: "a*(a+b+c)+b*c".

Se parte de la expresión original:

$$a * b + b * c + c * a + a * a$$

Se emplea la propiedad conmutativa de la suma para reordenar los términos:

$$a * a + a * b + c * a + b * c$$

Se emplea la propiedad conmutativa de la multiplicación en el tercer término:

$$a * a + a * b + a * c + b * c$$

Por último, se emplea la propiedad asociativa y se llega al resultado final:

$$a * (a + b + c) + b * c$$

- **K. La respuesta correcta es: “(4 * 3 + 2 * 5 + 1) * 2 = 46“.** En caso de haber elegido otra opción, habría que revisar si la expresión representa al problema y si están bien separados los términos para resolverla.

- **L. La respuesta correcta es “Sí”**, ya que la verificación es correcta. En el proceso de redondeo se pierde información por lo que los resultados serán aproximados pero no exactos.

- **M. La respuesta correcta es: “1000 - 2 * x = 40 ; x = 480“.** En caso de haber elegido otra ecuación, observar que esa otra ecuación no sólo que no representa al problema sino que además está mal resuelta. Por otro lado, si la opción seleccionada fue la misma ecuación pero con otro resultado, ese resultado no es el correcto para la ecuación.

- **N. La respuesta correcta es: “11 * x - 3 * x = 1 ; x = 0,125“.** En caso de haber elegido otra respuesta correcta, observar si la x es solución de la ecuación y si la ecuación representa al problema.

- **O. La respuesta correcta es: “5 * x = 3 * x + 4 * 1 ; x = 2“.** En caso de haber elegido otra opción, observar si la x es solución de la ecuación y si la ecuación representa al problema.

- **P. La respuesta correcta es:**

Columna 1	**Columna 2**
1/2 * x + 2 = 3/2 * x + 1/4	x = 7/4
3/4 (x + 2/3) = 1	$x = 0,\overset{\frown}{6}$
0,2 * (5 * x + 10) = 4 * (0,1 * x + 1)	x = 10/3
5/2 * (3/2 * x + 6/5) - 3 = 11/3 * x	x = 0
	x = 1/3

Ministerio de Educación,
Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación