fuentes

PARA LA TRANSFORMACION CURRICULAR

Matemática

República Argentina - 1996

fuentes PARA LA TRANSFORMACION CURRICULAR 1996

AUTORIDADES

MINISTRA DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN
Lic. Susana Beatriz Decibe

SECRETARIO DE PROGRAMACIÓN
Y EVALUACIÓN EDUCATIVA
Dr. Manuel G. García Solá

SUBSECRETARIA DE PROGRAMACIÓN EDUCATIVA
Lic. Inés Aguerrondo

SUBSECRETARIA DE EVALUACIÓN
DE LA CALIDAD EDUCATIVA
Lic. Hilda Lanza

SUBSECRETARIO DE GESTIÓN EDUCATIVA
Prof. Sergio España

DIRECTORA GENERAL DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO
Dra. Cecilia Braslavsky

REPÚBLICA ARGENTINA
1996

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación

fuentes

PARA LA TRANSFORMACION CURRICULAR

Matemática

República Argentina - 1996

INDICE

PRESENTACION

A partir de 1993 comenzó un proceso inédito de Transformación Curricular Federal, acorde con lo previsto por la Ley Federal de Cultura y Educación. Dicha ley dispuso que el Consejo Federal de Cultura y Educación, presidido por el Ministro de Cultura y Educación de la Nación, aprobara Contenidos Básicos Comunes para todo el país. Hasta ese entonces, los procesos de cambio curricular se realizaban en forma heterogénea y no coordinada en los diferentes contextos provinciales, desperdiciándose esfuerzos y energías, que podrían redituar en un más profundo y extendido mejoramiento de la calidad de la educación nacional.

El primer paso de este nuevo proceso consistió en acordar en el seno del Consejo Federal de Cultura y Educación una metodología de trabajo. De acuerdo con ella, el proceso de elaboración de los Contenidos Básicos Comunes (CBC) debía tomar en cuenta diferentes fuentes: las necesidades y demandas de la población, el estado de avance del conocimiento y las buenas prácticas docentes.

Para eso se propuso realizar una serie de actividades que, mediante la consulta a distintos sectores, permitieran recabar información adecuada y actualizada. Se llevaron a cabo encuestas y entrevistas a organizaciones no gubernamentales, a empresarios y trabajadores, a jóvenes, a las familias, a investigadores, a académicos y a docentes.

La colección *Fuentes para la Transformación Curricular* presenta una parte importante de los resultados de esas consultas.

Los primeros volúmenes recogen los aportes de especialistas de más de veinte disciplinas, que fueron definidas por el Consejo Federal de Cultura y Educación como columnas vertebrales para la selección de los contenidos. Los especialistas consultados representan diferentes enfoques de cada campo y trabajan en instituciones diversas de todo el país. Cada uno de ellos consultó, a su vez, con un número de colegas, a partir de cuyos aportes concretó la propuesta.

Los volúmenes siguientes recogen aportes de las consultas e investigaciones acerca de las demandas que diferentes sectores de la sociedad argentina esperan que la educación atienda.

Los materiales que se publican sirvieron de base para elaborar borradores de trabajo que, luego de un arduo proceso de compatibilización, se transformaron en los Contenidos Básicos Comunes aprobados en diciembre de 1994 y revisados por primera vez en agosto de 1995. Los borradores se nutrieron también de propuestas curriculares renovadas a partir de 1984 y vigentes en varias jurisdicciones, y de contenidos básicos y diseños curriculares de otros países del mundo. Aquellos fueron discutidos por cientos de docentes en seminarios federales, regionales y provinciales.

Pero, además de ser utilizados como fuentes para la selección y organización de los CBC, los planteos y sugerencias que se recogen en esta colección contienen precisiones, comentarios, orientaciones pedagógico-didácticas, reflexiones y bibliografía, que serán de gran utilidad a lo largo de todo el proceso de transformación curricular que establece la Ley 24.195.

En efecto, los CBC constituyen el eslabón fundamental del *primer nivel de especificación curricular,* el que corresponde a los acuerdos nacionales. Son un punto de llegada, pero son también un punto de partida para una nueva etapa en el mejoramiento de la calidad y la promoción de la equidad, la eficiencia y la participación en la educación argentina.

En esta nueva etapa cabe ahora proceder a la adecuación o elaboración de los diseños curriculares a nivel de cada jurisdicción educativa, es decir, de las provincias y de la Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires. Esta adecuación o elaboración constituye el *segundo nivel de especificación curricular.* La colección *Fuentes para la Transformación Curricular* constituirá, sin duda, un adecuado material de consulta para el trabajo de los docentes y equipos técnicos que lo lleven adelante.

Al mismo tiempo que se lleva a cabo la adecuación o elaboración de los diseños curriculares provinciales, las escuelas comienzan a trabajar en el *tercer nivel de especificación curricular,* al desarrollar sus propios Proyectos Educativos Institucionales (PEI).

Muchos equipos de trabajo, constituidos por docentes al frente de aula, directores, supervisores, etc., desearán conocer con más detalle los aportes que realizaron académicos, profesores, jóvenes, familias, empresarios, investigadores, organizaciones no gubernamentales, que se publican en esta colección. Contrastarán sus ideas con las de ellos. Podrán ampliar su espectro de bibliografía a consultar. A todos ellos, también, van destinados los volúmenes de *Fuentes para la Transformación Curricular.*

Lic. Susana B. Decibe
Ministra de Cultura y Educación de la Nación

Fuentes para la Transformación Curricular.
Matemática

Coordinador: *Dr. Héctor H. Cuenya*

Autores de las partes I, II y III:
Dr. Héctor H. CUENYA*
Lic. Marta BASTÁN**
Lic. Silvia ETCHEGARAY**
Prof. Susana PEPARELLI**
Lic. Silvia COLOMBO**

Autores de la parte IV:
Dr. Hector H. CUENYA*
Lic. Jorge CARDELLI***
Lic. Marta BASTÁN**
Lic. Silvia ETCHEGARAY**
Prof. Susana PEPARELLI**
Lic. Silvia COLOMBO**

* Doctor en Ciencia Matemática, Universidad Nacional de San Luis. Profesor Titular (Dedicación Exclusiva) en el Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales, Universidad Nacional de Río Cuarto.
** Profesores Adjuntos (Dedicación Exclusiva), Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Río Cuarto. Miembros de un Grupo de Investigación en Educación dirigido por la profesora Gladys Palau.
*** Profesor Asociado (Dedicación Exclusiva), Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Río Cuarto.

SUMARIO

I. ENFOQUE PARA EL ABORDAJE DE LOS CONTENIDOS BASICOS COMUNES DE MATEMATICA

1. Introducción

En la enseñanza de la matemática en todos los niveles es necesario destacar dos aspectos fundamentales, el informativo y el metodológico o didáctico, es decir, el qué enseñar y el cómo hacerlo. Esta propuesta curricular consiste en una selección de los contenidos y metodologías que consideramos más adecuados a los efectos de lograr el objetivo general de la enseñanza de la matemática en el marco de lo estipulado al respecto en el Anexo I de la Recomendación N° 26/92 del Consejo Federal de Cultura y Educación, a saber: *adquisición por parte del educando de los procesos de pensamiento específicos de la matemática, dirigidos a la resolución de problemas vinculados directamente con situaciones de la vida real.*

En cuanto a los contenidos —si bien se comparte el hecho que dada la velocidad con que evoluciona la ciencia, éstos no podrán ser fijados en forma permanente y deberán estar sujetos a continua revisión—, consideramos necesario establecer primeramente una cierta cantidad de contenidos básicos. Los contenidos básicos comunes (CBC) incluirán aquellos conceptos de la matemática indispensables para el quehacer del hombre común no especializado y constitutivos de los conceptos de mayor complejidad. Es claro entonces que algunos de éstos deberán ir siendo ajustados de manera tal que se adecuen a los intereses y las necesidades vigentes de la sociedad. Para ello es necesario que el énfasis de la enseñanza esté puesto sobre todo en el aspecto formativo del educando, el cual debe tender fundamentalmente a la adquisición de los procesos de pensamiento propios de la actividad matemática, tal como ha sido precisado al comienzo.

Por otra parte, si bien consideramos que es importante adecuar los contenidos a la problemática del mundo actual, tampoco basta con ello. Se hace imprescindible, además, determinar los métodos de enseñanza acordes a dichos contenidos y, por último, instrumentar la formación de los profesores para llevar a cabo las modificaciones propuestas en la currícula. Habrá que tender a lograr un profesor que posea no sólo una sólida formación matemática, sino también conocimientos de las diversas áreas que han influido en la disciplina y recíprocamente, así como de las características del sujeto a quien va dirigida su actividad educativa. Como dice Morris Kline: "Necesitamos profesores de amplios conocimientos académicos y educativos, por oposición al investigador especializado y autoconcentrado".

2. Respecto de los Contenidos Básicos Comunes

Consideramos que para realizar una propuesta curricular tanto para la EGB como para la Educación Polimodal (EP) es necesario analizar los diferentes enfoques adoptados en las últimas décadas.

Hasta los años sesenta, la enseñanza de la matemática tenía como objetivo fundamental la transmisión de los contenidos que se consideraban esenciales mediante procedimientos que enfatizaban la adquisición mecánica de algoritmos para la resolución de problemas.

Posteriormente, es introducida la llamada *matemática moderna*, basada en la Teoría de Conjuntos, que no logró el éxito educativo esperado. Pensamos que ello se debió, por un lado, a un excesivo formalismo, introducido simultáneamente con los nuevos conceptos, el cual trababa el espíritu constructivo e intuitivo —que, creemos, debe primar en todo proceso de enseñanza de esta ciencia—, y por otro lado, al intento de justificar la incorporación de estos conceptos vinculándolos de una manera no natural con los conocimientos que se impartían tradicionalmente a los educandos en los distintos niveles.

En la década del setenta, fundamentalmente con Lakatos (1979), se comienzan a cuestionar los resultados obtenidos por la matemática moderna y, a partir de reflexiones realizadas por investigadores en la temática de la enseñanza de esta disciplina, surgió una caracterización de la matemática como "la ciencia que trata sobre modelos de pensar acerca del mundo, modelos que tratan con cantidades, formas, relaciones y otros conceptos matemáticos" (Carlson, 1992). Dentro de una perspectiva similar, afirma Miguel de Guzmán (1991): "La educación matemática se debe concebir como un proceso de inmersión en las formas propias del proceder del ambiente matemático". Ambas posiciones confluyen en una propuesta didáctica similar basada en: i) la resolución de problemas como el método más eficaz para interiorizar los procesos básicos del pensamiento matemático y ii) tener en cuenta la evolución histórica de esta disciplina para detectar las dificultades que se presentan en la aparición de los distintos conceptos y, a partir de allí, producir una introducción más natural de los mismos.

En los últimos diez años, la introducción de las calculadoras y computadoras en la enseñanza de la matemática ha producido distintas opiniones con respecto a la conveniencia o no de su uso, tal como lo señala Carlson (1992). Los que están a favor señalan que su uso permitiría al alumno concentrar sus esfuerzos sobre la conceptualización de las nociones matemáticas y sus aplicaciones en lugar de dedicarse a cálculos rutinarios. Los críticos sostienen, en cambio, entre otras cosas, que el uso de los ordenadores impide que los alumnos aprendan conceptos matemáticos básicos. Trataremos este ítem en la sección 3 ("Consideraciones metodológicas").

Es nuestra opinión que gran parte de los contenidos que tradicionalmente se vienen impartiendo tanto en la escuela primaria como en la escuela media deben mantenerse en la nueva currícula de los CBC, ya que muchos de ellos se adecuan al objetivo anteriormente propuesto, a saber, que el alumno adquiera gradualmente los procesos de pensamiento propios de la matemática. No hay que olvidar, además, que muchos de ellos son esenciales en lo que respecta a la comprensión de los avances de la matemática. En efecto, en los últimos años esta disciplina ha tenido un fuerte desarrollo en todas sus vertientes: álgebra, análisis, geometría, etc.; en muchos casos la computación ha contribuido a ello, dando impulso a ramas que se han visto favorecidas, como teoría de grafos, combinatoria, fractales, etc. Sin embargo, las bases que subyacen en todas ellas son, en menor o mayor medida, los conceptos que pertenecen a las currículas actuales, razón por la cual consideramos que muchos de ellos tienen hoy vigencia.

Con referencia a la conveniencia de incorporar nociones elementales de conjuntos, debemos señalar que, a nuestro juicio, no es necesario introducir los elementos en los dos primeros ciclos de la EGB, pues, según creemos, la razón que motivó su inserción en los primeros años de la enseñanza primaria fue usarlos como un lenguaje unificador en matemática, en el sentido de que todos los contenidos de la matemática son expresables mediante nociones de conjuntos. Por otra parte, consideramos que el logro de tal lenguaje unificador presupone haber construido e internalizado varios ejemplos de conjuntos matemáticos, los cuales sí deben trabajarse en los dos primeros ciclos. Por consiguiente consideramos que las nociones correspondientes a Conjuntos debieran ser utilizadas a partir del Tercer Ciclo de la EGB, incorporándose en forma natural, es decir *planteando su necesidad a partir de los conceptos y ejemplos pertinentes trabajados en los primeros ciclos, sin perder de vista su carácter de lenguaje unificador de la matemática.*

Además, otro argumento que nos permite sostener el propósito de insertar estos temas es que los mismos fueron usados, y deben ser usados, como una manera de reformular las verdades matemáticas, de forma tal que resulten de mayor simplicidad tanto sus expresiones como demostraciones. Visto desde una perspectiva histórica, la problemática relacionada con la teoría de conjuntos está ligada con la construcción de sistemas axiomáticos formales en matemática. Por razones de complejidad, no se considera que deban presentarse sistemas formales totales sobre las disciplinas matemáticas, sino que más bien se darán sistemas axiomáticos parciales como, por ejemplo, la axiomática de grupos, anillos, etc. Consideramos que, si bien el alumno debe entrar paulatinamente en contacto con la formalización a través de plantear hipótesis, generalizar, conjeturar y demostrar teoremas, tales actividades no deben constituir el eje central de la enseñanza de la matemática en estos niveles.

Consideramos además que, dada la estrecha relación existente entre matemática y computación, se hace necesario reforzar la construcción de algoritmos, para lo cual habrá que introducir los elementos necesarios para que el alumno reconozca los dominios de la matemática que son recursivos y reflexione sobre estos procedimientos.

Por último, respecto de los objetivos de la EP y, supuesto que al finalizar la EGB el estudiante habrá recibido la mayoría de los conocimientos matemáticos necesarios, se sugiere incluir en el tronco común de este nivel los conceptos básicos tendientes a la formación general necesaria involucrada en cualquier inclinación del polimodal. Uno de los objetivos de este nivel es que los conocimientos a impartir tengan estrecha relación y coordinación con los vistos por el alumno en ciclos anteriores, de manera de mostrar que la matemática es un edificio que se va construyendo paulatinamente y en forma abarcativa. Como ya sabemos, la matemática cumple siempre con el doble papel de ciencia pura y ciencia aplicada. Respecto del primer papel, sugerimos que en la EP se comiencen a plantear problemas intrínsecos a la matemática, como aquellos relacionados con Teoría de Números. Respecto del segundo papel, se sugiere que los conceptos a ser vistos en este período tengan aplicaciones a otras ciencias. Otro objetivo de este nivel es facilitar la tarea de adquirir habilidades tales como clarificar, puntualizar y plantear sin ambigüedad los problemas, todas ellas características del pensamiento matemático (Santaló, 1966).

En general, se propone que todos los contenidos sean impartidos en forma constructiva, es decir, que dentro de lo posible, cada uno sea presentado como una necesidad para integrar conceptos anteriores en otros nuevos, sobre la base de resolver situaciones problemática dadas, respecto de las cuales las nociones anteriores resultan insuficientes pero constitutivas.

Objetivos para la selección de los CBC correspondientes a los distintos ciclos de la EGB y la Educación Polimodal

Es claro que los objetivos generales de cada ciclo no son los mismos. Siguiendo el enfoque detallado en la sección anterior, en el Primer Ciclo de la EGB se brindarán algunos elementos mínimos que sirvan como introducción a la matemática. Todos ellos serán presentados de manera constructiva, tal como ha sido explicado. Recién en el Segundo Ciclo, la educación comenzará a ser más amplia en cuanto a contenidos, aunque poniendo más énfasis en la aplicación que en el rigor y la abstracción en cuanto al tratamiento de los temas, de manera que la matemática resulte una herramienta útil para la comprensión del mundo físico.

Es en el Tercer Ciclo de la EGB donde creemos que se debe iniciar una profundización del método matemático, en el sentido de introducir gradualmente al alumno a la idea de demostración deductiva y su necesidad.

Respecto de los objetivos de la EP, además de los ya mencionados en la sección anterior relativos al tronco común, es necesario recordar que los contenidos de cada modalidad deben respetar el eje de interés central sobre el cual se ha estructurado cada una de ellas. En consecuencia, hemos fijado una lista de objetivos que de ninguna manera pretende ser exhaustiva.

EDUCACION GENERAL BASICA

Primer ciclo

- Sistematizar las nociones topológicas de interior, exterior y frontera.
- Construir los números naturales y las operaciones entre ellos.
- Comparar los números naturales construidos en este ciclo mediante los conceptos de: anterior —posterior, menor— mayor.
- Construir la noción intuitiva de fracción.
- Reconocer la fracción como el resultado de dividir un todo.
- Introducir las medidas de longitud, capacidad y peso.
- Reconocer y distinguir ángulos y figuras planas.
- Introducir el uso de la calculadora y la computadora (ver sección 3).

Segundo ciclo

- Extender el sistema de numeración decimal y las operaciones vistas en el ciclo anterior.
- Construir los algoritmos para la multiplicación y la división.
- Reconocer la potenciación con exponente natural como caso particular de la multiplicación.
- Resolver situaciones que involucren nociones de divisibilidad con números naturales.

- Representar las fracciones tanto en una semirrecta como en diagramas de tortas.[1]
- Introducir fraccionarios mayores que uno y representarlos en una semirecta.
- Establecer equivalencias entre fracciones. Definición de número racional.
- Construir las operaciones entre números fraccionarios.
- Construir la noción de "Expresión decimal finita o periódica".
- Construir los algoritmos de las operaciones entre las expresiones decimales finitas.
- Equivalencia entre las expresiones decimal y fraccionaria de un número racional positivo.
- Introducir las medidas de superficie y volumen.
- Introducir los conceptos de múltiplos y submúltiplos para todas las unidades de medidas: longitud, capacidad, peso, superficie y volumen.
- Introducir el sistema sexagesimal para medición de ángulos.
- Reconocer relaciones de proporcionalidad.
- Aplicar relaciones de proporcionalidad lineal a escalas de mapas y planos.
- Reconocer elementos de las figuras planas y cuerpos, como por ejemplo aristas, caras y vértices.[2]
- Calcular perímetros y superficies de los elementos reconocidos.
- Apreciar diferencias potenciales entre una calculadora y una computadora a través de la sistematización de un determinado cálculo.

Tercer ciclo

- Introducir la notación científica; operar con números expresados en notación científica y comparar con expresiones decimales finitas.
- Construir los números enteros y las operaciones entre ellos.
- Construir los números racionales y las operaciones entre ellos.
- Construir las nociones de potenciación y radicación de números racionales con exponentes naturales.
- Resolver situaciones que involucren nociones de divisibilidad con números enteros.
- Introducir conceptos de combinatoria.
- Ejemplificar un sistema de numeración no posicional mediante el sistema de numeración romano.

[1] En lo posible este objetivo implementarlo con ayuda de un *software* adecuado.
[2] Idem.

- Introducir y operar con el sistema de numeración en base 2, en tanto otro ejemplo de sistema de numeración posicional.
- Relacionar distintos sistemas de unidades.
- Interpretar y resolver ecuaciones lineales en una variable.
- Introducir la construcción de algoritmos para aquellos temas que lo requieran para su comprensión.
- Sistematizar las nociones elementales de conjuntos a partir del uso intuitivo.
- Introducir el concepto de función y reflexionar sobre su importancia mostrando ejemplos de su aplicación a otras áreas de conocimiento.
- Interpretar y resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolver e interpretar sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.
- Interpretar gráficos de funciones numéricas.
- Calcular volúmenes de poliedros y cuerpos redondos.
- Reconocer figuras planas que resulten de seccionar cuerpos en el espacio con planos, mediante el uso de la computadora.
- Reconocer triángulos semejantes y homotéticos.
- Reconocer los elementos de una circunferencia.
- Introducir los conocimientos elementales de aritmética comercial.
- Adquirir nociones elementales de estadística e interpretar gráficos estadísticos.

EDUCACION POLIMODAL

Tronco común

- Introducir el concepto de número real.
- Construir la noción de potenciación de exponentes reales.
- Construir métodos generales de resolución de ecuaciones algebraicas, hasta grado dos.
- Resolver ecuaciones algebraicas en una variable de grado mayor o igual que dos usando la noción de ecuaciones equivalentes.
- Trabajar la divisibilidad en el anillo de polinomios a coeficientes reales como instrumento simplificador en la resolución de ecuaciones algebraicas.
- Desarrollar el álgebra de funciones reales en una variable.
- Trabajar con las siguientes funciones especiales: polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Trabajar con funciones que en su definición involucren más de una fórmula.
- Analizar la influencia de los parámetros en los comportamientos de las funciones mencionadas en el objetivo anterior.

- Introducir nociones de geometría analítica a los fines de proveer distintos enfoques para el abordaje de una determinada situación problemática.
- Conocer el método de triangulación para resolución de sistemas de ecuaciones lineales de varias variables.
- Introducir y aplicar nociones elementales de probabilidad e inferencia estadística.

Orientaciones

Dado que no están aún delimitadas las distintas orientaciones de la EP, pasamos a establecer una serie de contenidos que luego serán distribuidos y profundizados según las orientaciones que oportunamente fije el Ministerio de Cultura y Educación.

- Temas de cálculo infinitesimal.
- Temas de álgebra lineal.
- Temas de estadística.
- Temas de programación lineal.
- Temas de matemática financiera.
- Ejemplos de sistemas axiomáticos algebraicos y/o geométricos.

3. Consideraciones metodológicas

En la presente sección diremos algunas palabras acerca de los métodos didácticos que consideramos de mayor trascendencia para la enseñanza de la matemática tanto en la EGB como en la EP.

3.1. Resolución de problemas

La historia de la matemática muestra cómo muchas de sus adquisiciones teóricas han provenido de la resolución de problemas específicos. De esta forma, la metodología llamada resolución de problemas se convierte en esencial para la enseñanza de la matemática. Tal como lo señalan Marabotto y Grau (1992), es común que se haya llegado a las soluciones de los problemas (matemáticos) a través de largos y complejos caminos, que incluyen diversas fases: pensar, modificar, desalentarse, dejar de pensar, reiniciar el análisis y así sucesivamente, con significativos cambios y variaciones en la comprensión del problema a lo largo de todo ese proceso. Como es sabido, resolver un problema implica los siguientes pasos: a) dado un problema (si el tema lo permite, relacionarlo con la actividad práctica), familiarizarse con él, analizarlo y exponerlo con claridad; b) imaginar los caminos posibles o estrategias para su resolución (construyendo algoritmos si el problema lo requiere); c) tantear y evaluar las estrategias y seleccionar para su realización la que se considere mejor según el criterio matemático de economía y simplicidad; y d) examinar el camino elegido reflexionando sobre su corrección y sobre una posible alternativa más simple.

3.2. Recursos informáticos

Actualmente, la informática como recurso didáctico abarca no sólo a las computadoras sino a los llamados multimedia. En general, estas tecnologías posibilitan desarrollar actividades cognitivas, ya que enriquecen el campo perceptual y las operaciones involucradas en los procesos de estructuración y análisis de los contenidos. En efecto, ellas contribuyen, de una u otra forma, a una mejor planificación de estrategias en la resolución de problemas, a la aplicación de reglas de inferencia, al desarrollo de algoritmos, etc. En particular, respecto de la enseñanza de la matemática, consideramos importante destacar el uso de la computadora tanto en la EGB como en el EP.

Estimamos que su uso contribuye al logro, entre otros, de los siguientes resultados:

a) Adquirir, desde temprana edad y de manera más accesible, una visión geométrica (perspectiva, proyecciones, transformaciones del espacio y del plano); desarrollando la imaginación geométrica mediante, por ejemplo, la visualización de conjuntos de cuerpos desde distintas perspectivas y desde distintas posiciones.

b) Una visualización directa de la representación numérica en la recta y, en consecuencia, facilitar la comprensión de las nociones de orden y densidad. Esto debería hacerse mediante la implementación de un *software* que le permita al alumno representar y al mismo tiempo ir viendo el proceso de construcción de los números racionales.

c) Percibir la influencia de la variación de los parámetros en los gráficos de las funciones; por ejemplo, para visualizar los cambios que se producen al introducir distintos valores de los parámetros en las funciones sinusoidales, dada la importancia que tienen éstas en la representación de hechos físicos, así como el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas en distintas bases (V. V. Vavilov, 1990).

Respecto al uso particular de la calculadora, consideramos que requiere por parte del docente un manejo adecuado. En otras palabras, *a priori* y *a posteriori* del uso de la calculadora se debe realizar, en forma sistemática, un proceso de reflexión basado en un análisis de las operaciones involucradas y del orden de magnitud de las cantidades. Entendemos que de esta forma se evita el uso mecanizado de la calculadora y sus efectos nocivos respecto del aprendizaje de las nociones matemáticas.

3.3. El método axiomático

Respecto del método axiomático consideramos que debe incorporarse recién en la EP y sólo respecto de algunos temas, para cuya comprensión deba profundizarse en la estructura de la disciplina y hacer hincapié en las relaciones deductivas entre sus enunciados, tal como es el caso del álgebra y de la geometría.

3.4. La construcción de modelos

Actualmente es común caracterizar a la matemática como la ciencia que trata con modelos de pensar acerca del mundo. Modelos que tratan sobre cantidades, formas, relaciones y otros conceptos (Carlson, 1992).

En efecto, a partir del análisis de determinadas situaciones análogas de la vida cotidiana, se puede construir un *modelo matemático* que describa estas situaciones en términos de relaciones matemáticas y que permita hacer predicciones. Este modelo no siempre describe exactamente la realidad, sino que lo hace de manera aproximada y debe elegirse el más satisfactorio.

Desde el punto de vista metodológico, es esencial destacar que es a través de la construcción de modelos que el alumno relaciona los conceptos matemáticos con la realidad y entiende la necesidad del estudio de esta disciplina y su importancia en la aplicación a otras disciplinas. En efecto, para la construcción de estos modelos utilizará ecuaciones, tablas, funciones, vectores, matrices, gráficas, etc. No se encuentra inconveniente en que esta herramienta se utilice tanto en la EGB como en la EP, respetando las características cognitivas propias del alumno de cada ciclo.

Teniendo en cuenta también que la enseñanza de la matemática es un problema complejo por la naturaleza abstracta de sus contenidos, como es de convencimiento general, tanto de educadores como de educandos, pensamos, en coincidencia con Morris Kline (1986) que, a los efectos de hacer más atractiva esta disciplina, conviene llevar a cabo una adecuada compatibilización con otras áreas del conocimiento para que el alumno vaya percibiendo, simultáneamente con el aprendizaje de matemática, su utilidad. En esta dirección, un trabajo interdisciplinario por áreas, donde se planteen problemas que requieran el auxilio de la matemática para su resolución, sería muy fructífero

3.5. El papel de la historia de la matemática

En la actualidad, varios estudiosos del tema (Guzmán, 1991b) aconsejan introducir la historia de la matemática en su enseñanza. Al respecto consideramos que no es conveniente su introducción en tanto meros datos históricos. Por el contrario, los aspectos históricos serán de gran utilidad para el docente, quien, a través de un contacto con los motivos y formas en que los matemáticos dieron origen a sus ideas y teorías, estará en condiciones de seleccionar aquellos que le provean recursos más naturales e intuitivos.

Se profundizará este tema en la parte dedicada a la formación del docente.

II. Y III. PROPUESTA DE CONTENIDOS BASICOS COMUNES PARA LA EDUCACION GENERAL BASICA Y PARA LA EDUCACION POLIMODAL

1. Introducción

Hemos dividido los contenidos de matemática correspondientes a la EGB y a la EP en diferentes bloques siguiendo el criterio de que se cumplan los objetivos planteados en las páginas anteriores y de que cada cada uno de ellos esté contenido en alguna de las distintas ramas de la matemática.

Esta división por bloques de ninguna manera significa que haya que tratarlos como compartimientos estancos, sino, muy por el contrario, se debe establecer la mayor interrelación posible, además de la que señalaremos en los bloques de contenidos de la EGB y de la EP, que sólo indica que el desarrollo de algunos contenidos de un bloque presupone el tratamiento previo de otros contenidos de otro bloque.

La línea de desarrollo de los contenidos correspondiente a la EGB, si bien no es la única, a nuestro criterio es la más natural.

Pasamos a continuación a dar una breve fundamentación de la incorporación de los distintos bloques, en primer lugar de la EGB y luego de la EP. En las operaciones básicas de contar, comparar y medir subyace la idea de número, de allí la necesidad del bloque 1; los conceptos involucrados en el mismo están en la base de cualquier conocimiento matemático. Además, el conocimiento de los contenidos de este bloque permite ingresar en el estudio de un tema tan interesante en la matemática como es el de la Teoría de Números, a través del trabajo en divisibilidad con números enteros. Si bien no queremos proponer el estudio de la Teoría de Números, consideramos que es importante iniciar al alumno en la misma, dada la riqueza y simplicidad de los problemas que surgen en ella. Es de ahí que dichos temas constituyan por sí mismos un bloque llamado "divisibilidad en Z".

El bloque de geometría del plano y del espacio tiene como uno de sus objetivos estimular en el alumno la capacidad de explorar racionalmente el espacio físico. Por otro lado, es de destacar que el tratamiento de muchas cuestiones geométricas en el espacio pueden ser considerablemente simplificadas mediante una conveniente representación bidimensional, lo que hace que cobre fundamental importancia el estudio de la geometría del plano; y dentro de ésta, son figuras centrales el triángulo y la circunferencia, los cuales merecen un estudio detallado.

La incorporación de los bloques de estadística y de funciones en gran medida responde a una necesidad de analizar e interpretar aquella información que, cada vez con mayor frecuencia, es exhibida a través de gráficos funcionales o estadísticos. Además, el concepto de función como también los de ecuaciones lineales y sistemas, permiten modelizar y, por lo tanto, simplificar el estudio de innumerables cuestiones que surgen tanto en la matemática como en otras ciencias. Otra de las razones que hacen importante el tratamiento del concepto de ecuación es su aspecto favorecedor en la constitución de la noción de símbolo, la cual es muy significativa en el desarrollo de la matemática.

La incorporación del bloque 3, correspondiente a sistemas de medición, se debe a que la noción de medida subyace en los distintos campos científicos. La posibilidad de estimar cantidades, resultados y medidas en general contribuye a desarrollar las capacidades relacionadas con la medición, lo cual es de esencial importancia.

Con respecto a los bloques correspondientes a la Educación Polimodal, pasamos a dar una breve justificación de los mismos.

Nuestro propósito al incluir el bloque 1 ha sido ampliar sustancialmente la gama de problemas dentro de la geometría del plano y del espacio planteados en la EGB, aumentando gradualmente la complejidad de los mismos. En este punto conviene destacar que, en los problemas de más alta complejidad, lo importante son los procesos de razonamiento puestos en práctica más que el arribo a una solución correcta. Por otro lado, la intención es realizar una axiomatización, aunque sea parcial, de la geometría que se ha venido trabajando en la EGB, mostrando de esta manera, por primera vez, un sistema axiomático y el trabajo riguroso que caracteriza a la justificación en matemática.

Considerando que el mundo físico está, en general, modelizado por las matemáticas continuas, se hace necesaria la introducción de funciones que son de gran aplicación en este sentido, como las funciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Hoy día, los métodos de cálculo infinitesimal son aplicados en forma creciente en las ciencias sociales, biológicas y en economía; esto sumado a la gran aplicación que tiene en la física hacen necesaria su incorporación aunque se recomienda un estudio no formal del tema, pues se trata de conocer las ideas centrales del cálculo, las que son enunciadas en el bloque 3.

Por otro lado, los métodos (o procesos) de información requieren del uso de matemática discreta (discontinua). El desarrollo de la computación ha producido una fuerte influencia sobre qué matemática es necesario crear y usar. Teniendo en cuenta estos hechos, es crucial que los estudiantes tengan experiencia con los conceptos y métodos de la matemática discreta. De allí la necesidad de la incorporación del bloque 2.

Históricamente, la matemática dio un gran paso cuando las ideas geométricas fueron expresadas en el lenguaje de coordenadas. La interrelación entre geometría y álgebra permite desarrollar en el alumno habilidades para formular y analizar problemas que surgen, por ejemplo, de la geometría sintética y que, mediante la geometría analítica, son de más simple resolución. Es por ello que hemos incluido un bloque que trate los temas de geometría analítica.

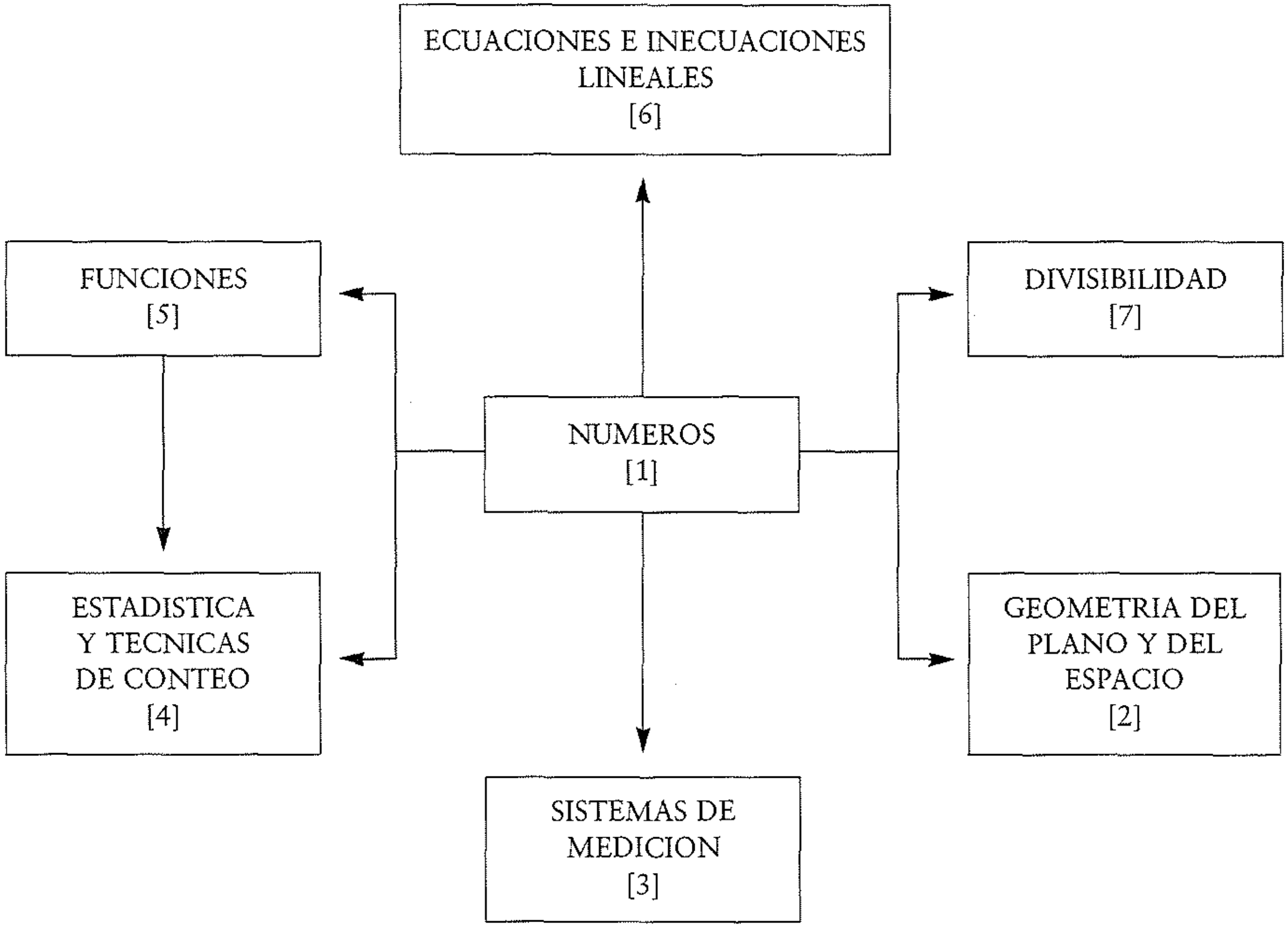
En las ciencias sociales y naturales, además de recolectar, representar y procesar datos, los mismos son resumidos, analizados y transformados. Estas actividades involucran simulaciones y/o muestreo, curvas de ajuste, tests de hipótesis e inferencia. Por esta razón, para mejorar el conocimiento social los estudiantes podrían aprender a aplicar estas técnicas en resolución de problemas. El estudio de las probabilidades provee conceptos y métodos para interpretar predicciones basadas en incertidumbres. Las medidas probabilísticas son usadas en investigación , negocios, juegos de azar, etc., y en la justificación de decisiones. Los temas aquí involucrados son los que se incorporan en el bloque de "probabilidades y estadística".

El bloque de divisibilidad en K[X] y ecuaciones algebraicas, donde el cuerpo K consideramos que debiera ser el de los números reales, es una profundización del bloque 7, divisibilidad en Z, como así también representa extensiones de los conceptos algebraicos desarrollados en la EGB. Es importante destacar que el lenguaje que brinda el álgebra permite una comunicación más clara y precisa de resultados matemáticos, lo que fundamenta su inclusión e importancia.

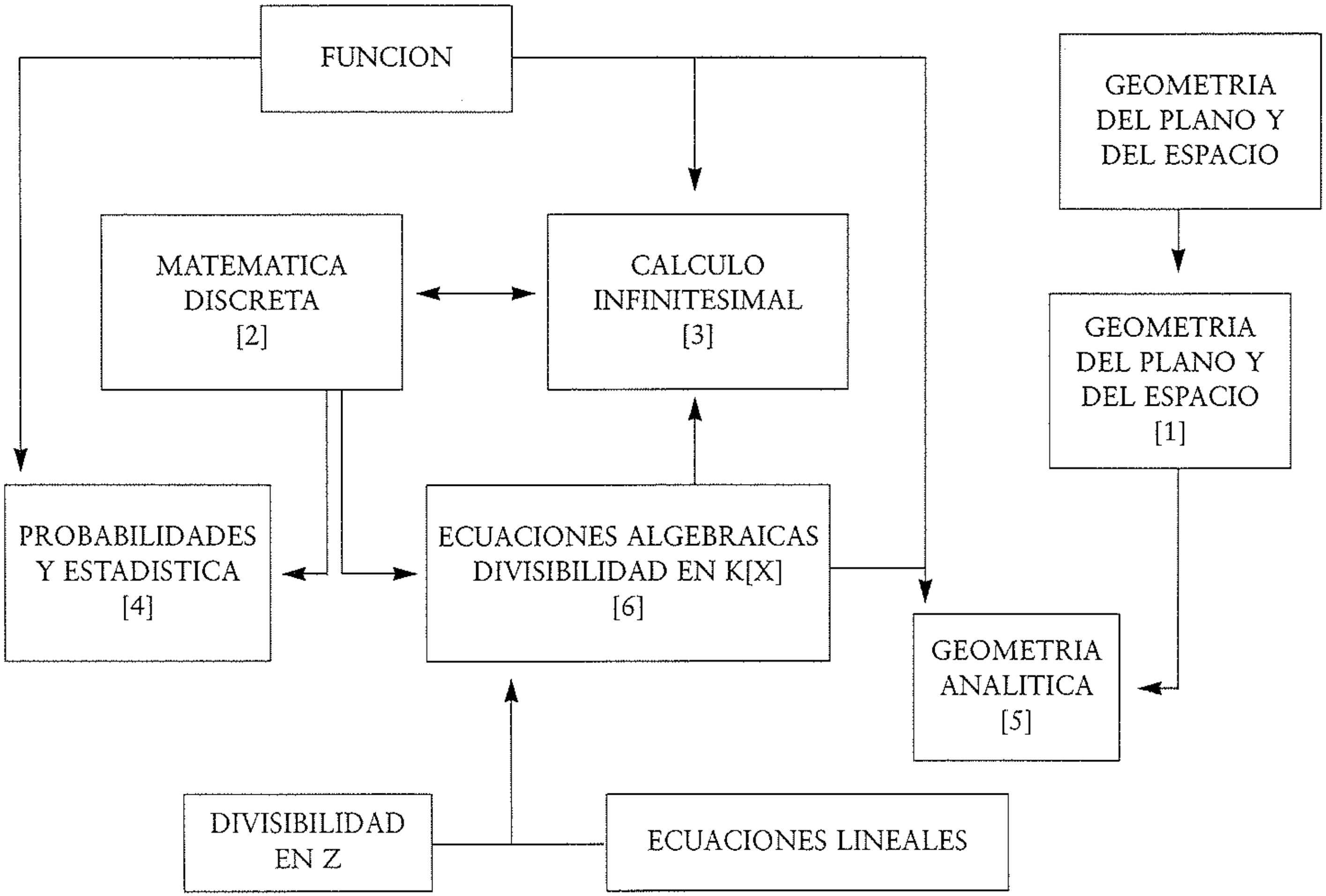
La presentación de los bloques se ha hecho consignando en primer lugar los correspondientes contenidos y algunas actividades que nos parecen importantes de realizar a los efectos de obtener una mayor comprensión de ciertos conceptos. De ninguna manera estas actividades mencionadas son exhaustivas, sino que debieran ser complementarias de las que el docente proponga para el desarrollo de los contenidos respectivos.

Finalmente se presentan los esquemas correspondiente a los bloques de contenidos generales de la EP y de la EGB y, correspondientes a este último punto, los esquemas de interrelación de contenidos por bloque.

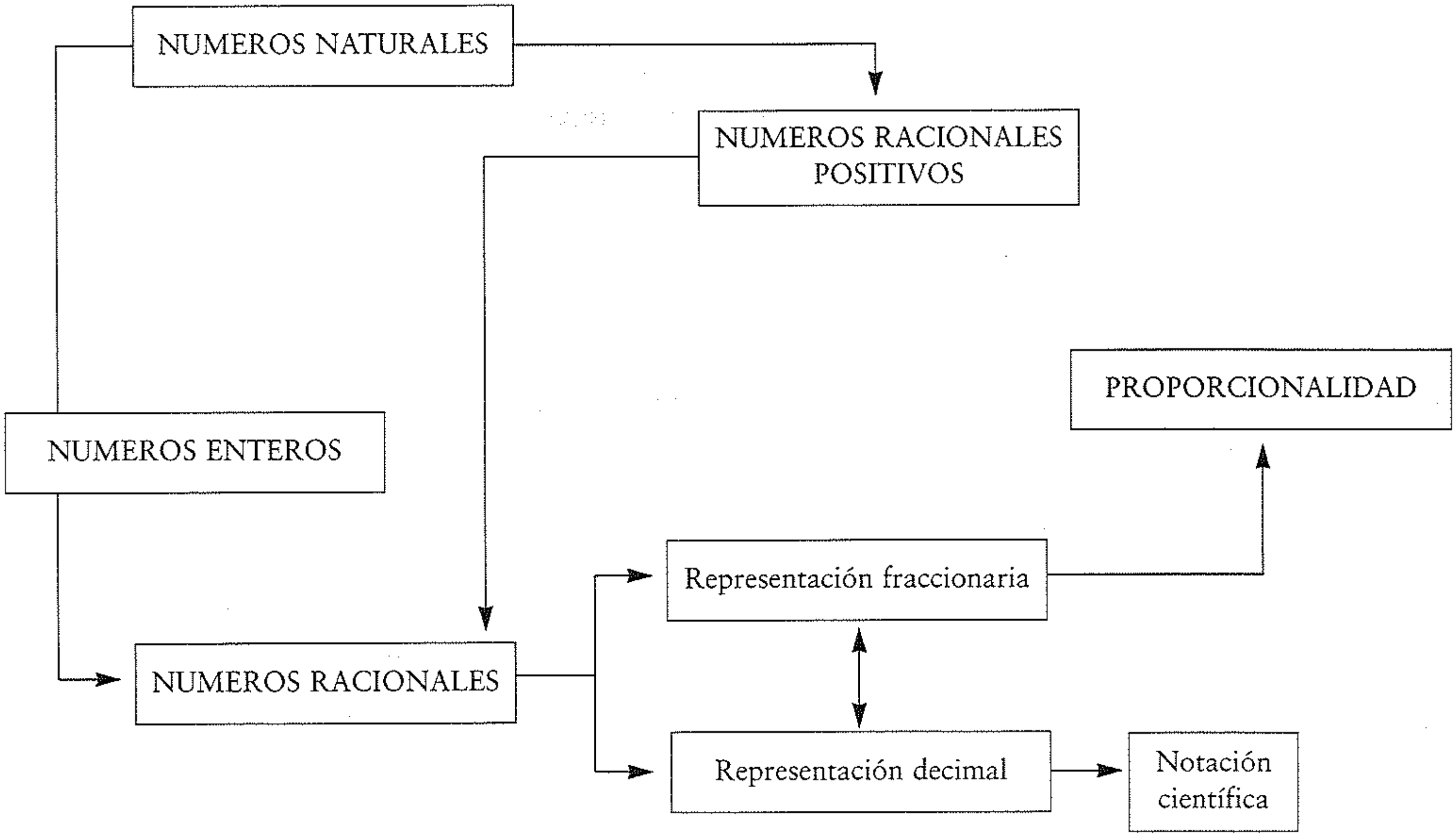
2. Bloques de contenidos de la EGB



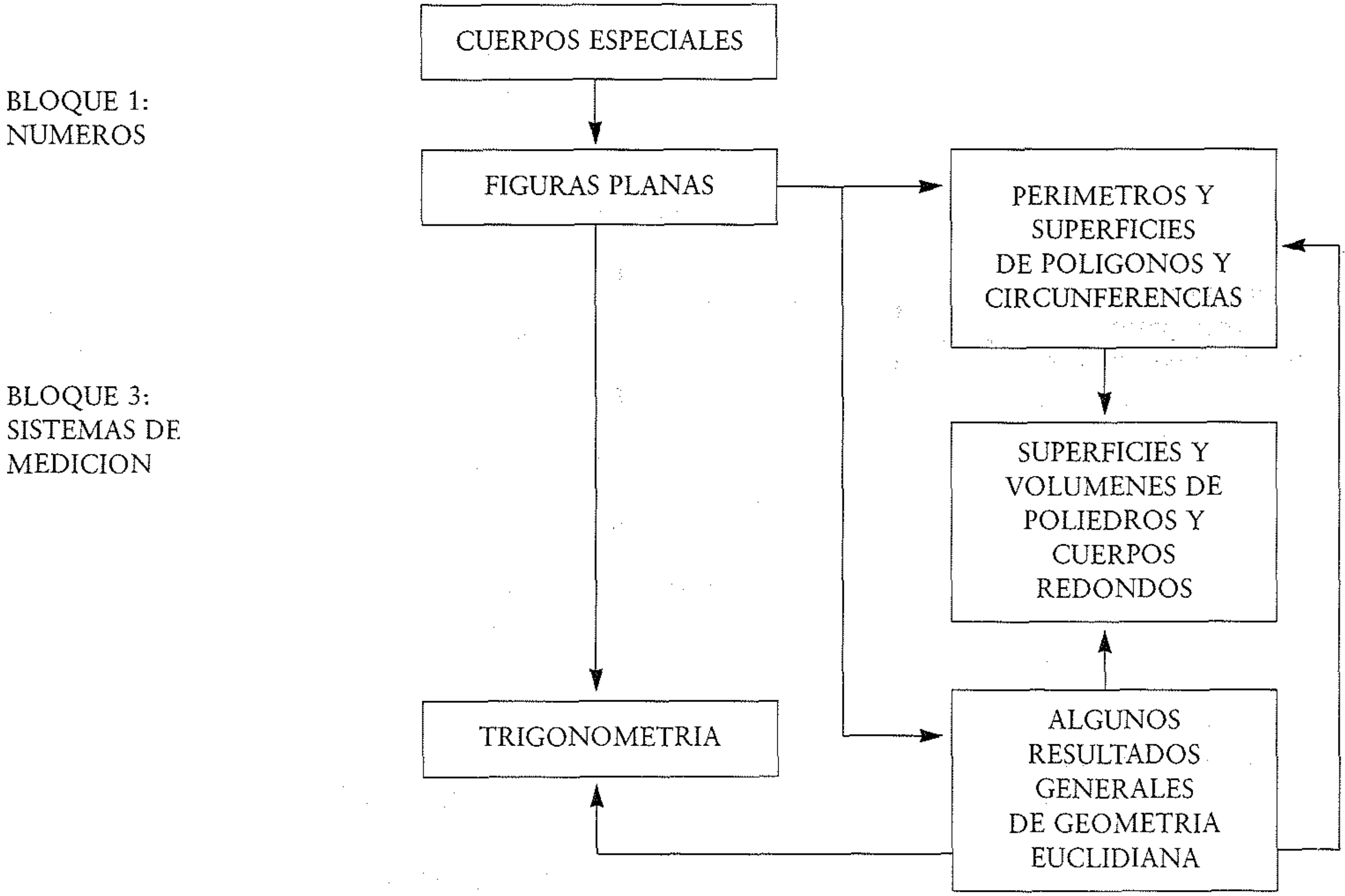
3. Bloques de contenidos de la EP



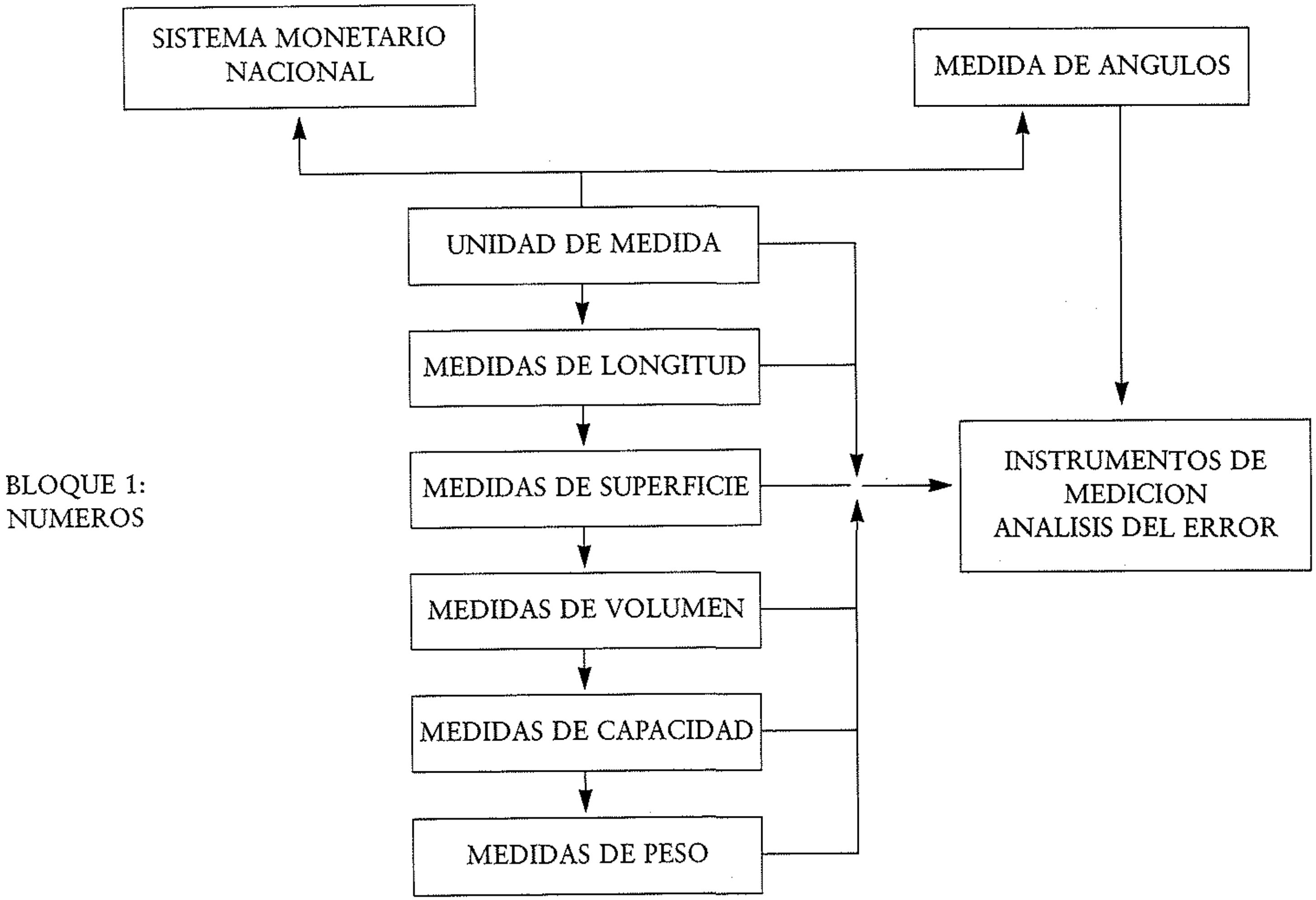
DETALLE DEL BLOQUE 1: NUMEROS



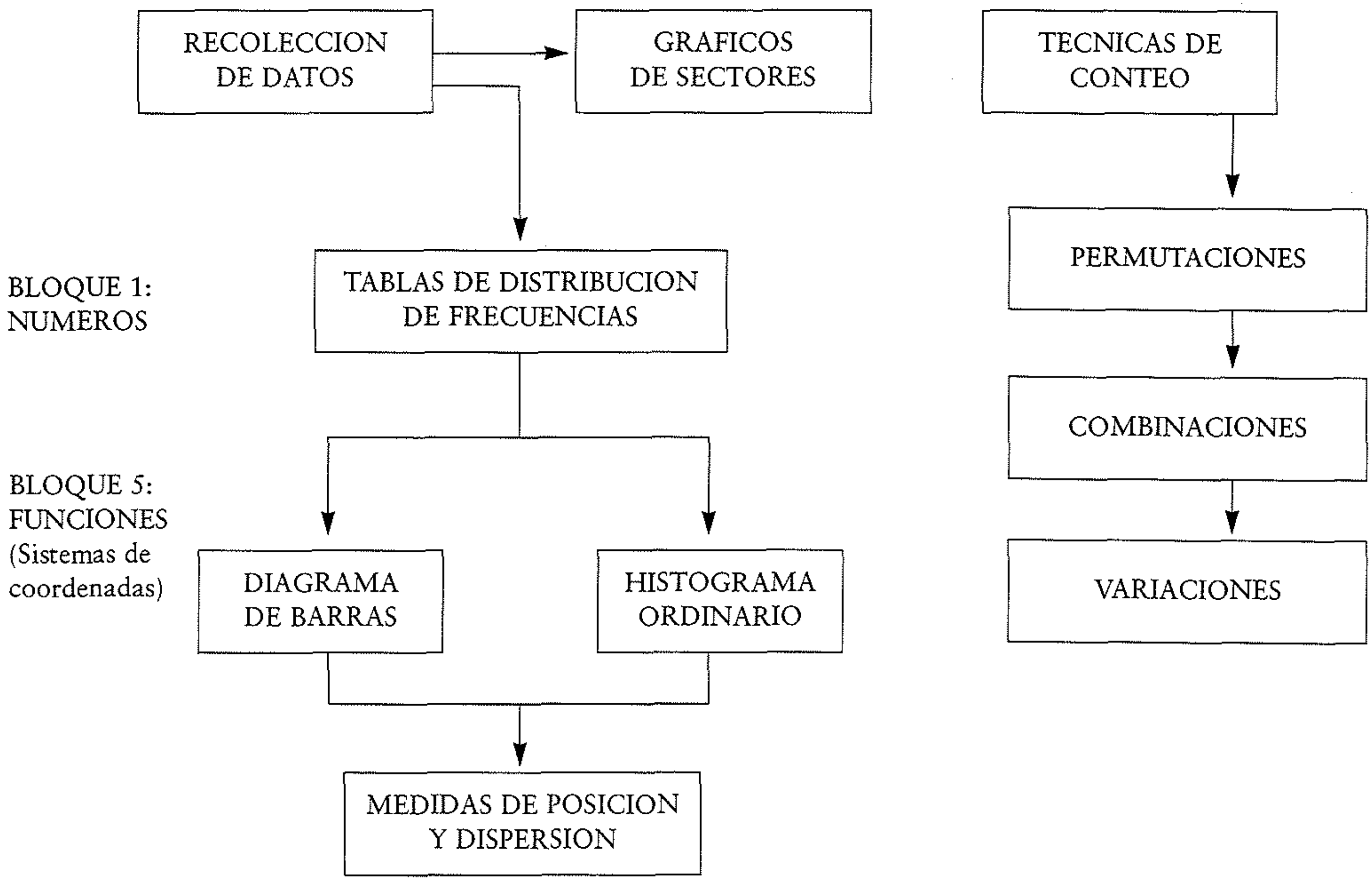
DETALLE DEL BLOQUE 2: GEOMETRIA DEL PLANO Y DEL ESPACIO



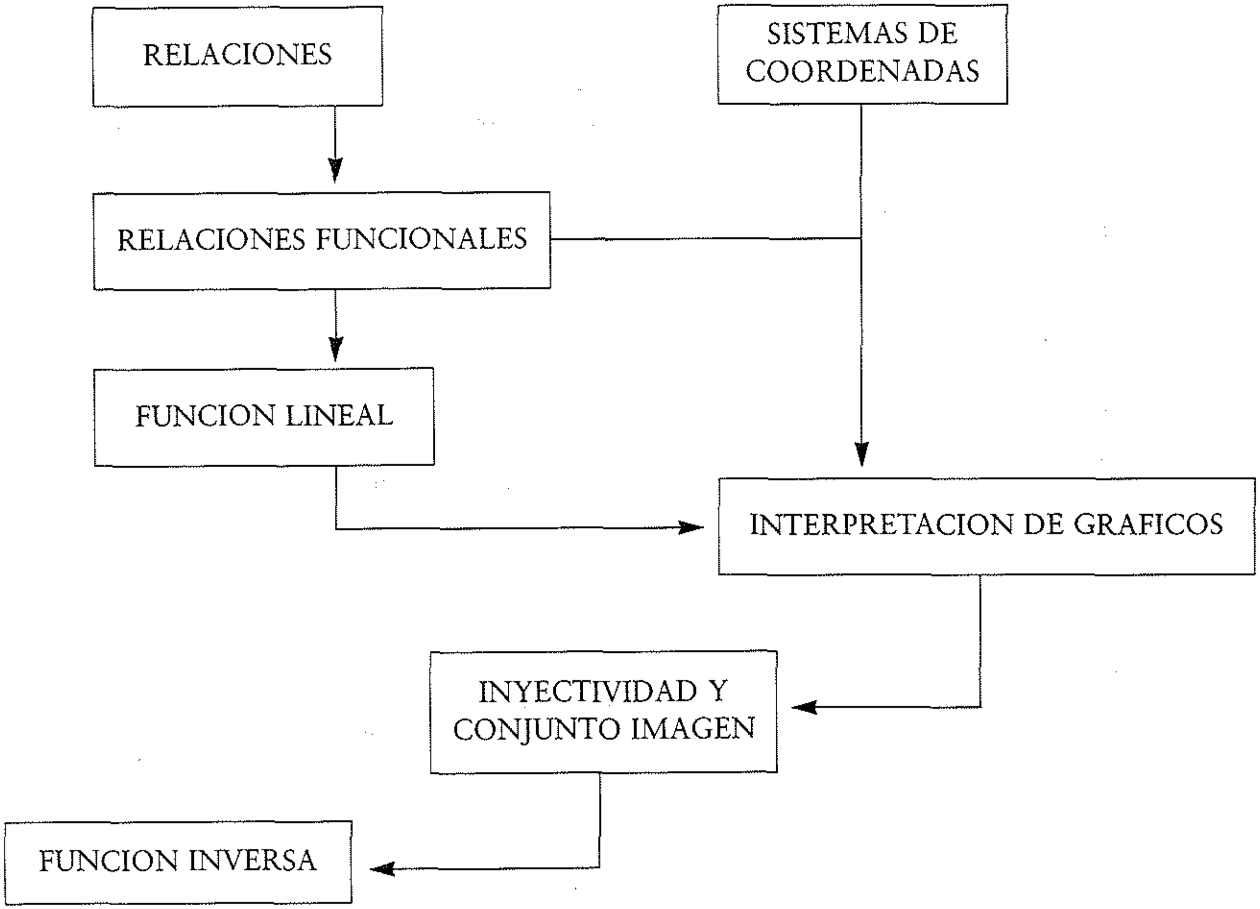
DETALLE DEL BLOQUE 3: SISTEMAS DE MEDICION



DETALLE DEL BLOQUE 4: ESTADISTICA Y TECNICAS DE CONTEO



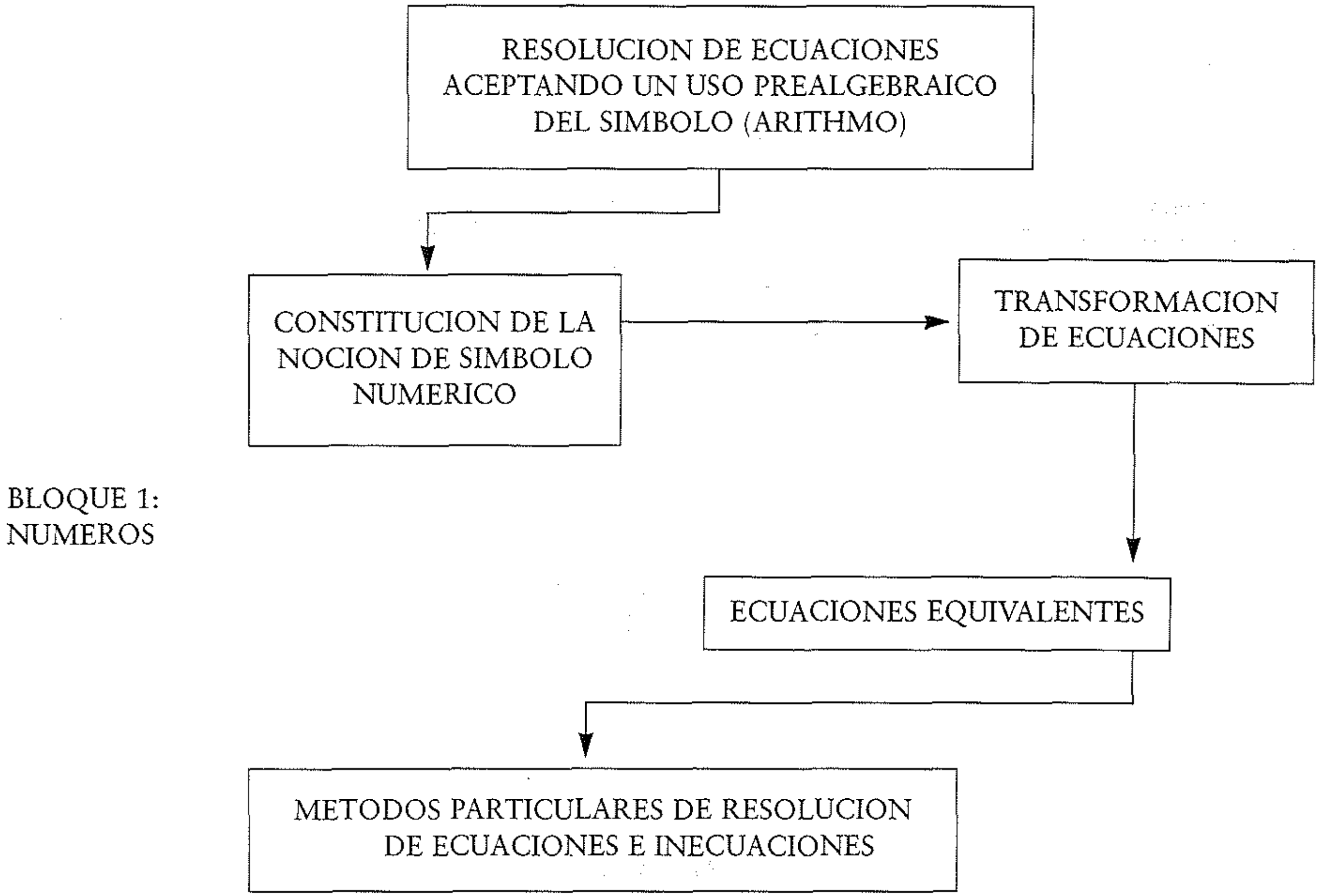
DETALLE DEL BLOQUE 5: FUNCIONES



BLOQUE 1:
NUMEROS

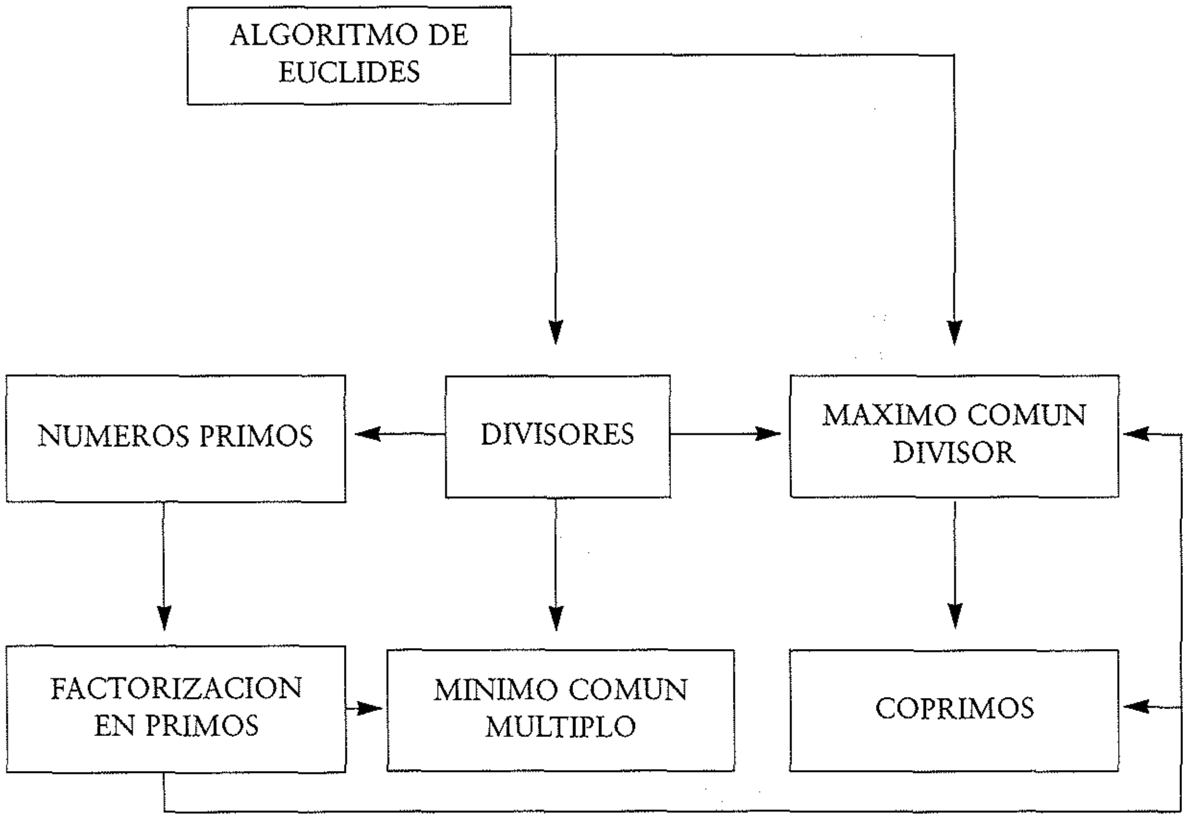
BLOQUE 2:
GEOMETRIA

DETALLE DEL BLOQUE 6: ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES



DETALLE DEL BLOQUE 7: DIVISIBILIDAD

BLOQUE 1:
NUMEROS



Bloque de contenidos	Contenidos	Actividades
NUMEROS [1]	Números naturales, enteros y racionales. Representación decimal. Relación de orden. Operaciones: suma, resta, producto, división, potenciación con exponente natural y radicación. Números irracionales. Notación científica. Representación gráfica. Valor absoluto. Distancia entre números reales. Razones y proporciones. Proporcionalidad directa e inversa. Reglas de tres simples y compuestas. Interés simple y compuesto. Amortización y capitalización. Repartos proporcionales.	• Realizar la representación gráfica de los números racionales a través de la computadora teniendo en cuenta: 1) su introducción gradual a medida que se construya el sistema numérico, 2) el proceso deberá ser reversible en el siguiente sentido, al introducir un número se mostrará el punto que lo representa, recíprocamente, dada una partición equidistribuida, marcar un punto y el alumno deberá reconocer el número representado. • El uso de la calculadora debe ir precedido de un análisis del orden de magnitud de los resultados. • El cálculo de la raíz cuadrada debería realizarse a través de un encaje de intervalos que permita construir el número por aproximaciones sucesivas. • Construcción de programas sobre algoritmos simples que sistematicen un cálculo, como, por ejemplo, el de potencias para una base fija y con una cantidad prefijada de exponentes naturales.
GEOMETRIA DEL PLANO Y DEL ESPACIO [2]	Nociones topológicas de interior, exterior y frontera. Rectas en el plano. Angulos. Figuras planas: triángulos, polígonos y circunferencias. Elementos y propiedades de dichas figuras. Perímetros y áreas. Teorema de Thales. Triángulos semejantes y homotéticos. Teorema de Pitágoras. Funciones trigonométricas. Resolución de triángulos. Rectas y planos en el espacio y ángulos diedrales. Poliedros y cuerpos redondos. Volúmenes y áreas.	• A través de un *software*, reconocer diferentes secciones planas de cuerpos en R3. • Construcciones con regla y compás.
SISTEMAS DE MEDICION [3]	Sistema Monetario Nacional. Sistemas de medición de ángulos. Sistemas de medidas de: longitud, superficie, volumen, capacidad y peso.	

ESTADISTICA Y TECNICAS DE CONTEO [4]	Tablas de distribución de frecuencias. Diagramas de barras. Histograma ordinario. Gráficos de sectores. Medidas de posición y dispersión. Permutaciones, combinaciones, variaciones, triángulo de Pascal.	• Interpretación de tablas y gráficos que aparecen en los periódicos y otras fuentes de información. • Aplicar los conocimientos estadísticos a la interpretación de resultados obtenidos en otras disciplinas. • Promover experiencias áulicas tendientes a realizar análisis estadísticos. • Visualizar la información estadística que proporciona una muestra, mediante *software* adecuado
FUNCIONES [5]	Relaciones. Relaciones funcionales. Sistema de coordenadas. Interpretación de gráficos. Determinación gráfica del conjunto imagen y de la inyectividad. Función inversa. Función lineal. Ecuación de la recta.	• Reconocer relaciones funcionales que aparecen en los periódicos y otras fuentes de información y construir sus gráficos. • Analizar información suministrada por gráficos funcionales presentes en los medios de comunicación. • Rescatar la reversibilidad de algunos fenómenos, por ejemplo, físicos, y relacionarlo con la existencia de una función inversa. • Analizar la variación de los parámetros en el gráfico de funciones lineales mediante el uso del ordenador.
ECUACIONES LINEALES [6]	Ecuaciones lineales en una variable y en dos variables. Ecuaciones equivalentes. Inecuaciones lineales en una y dos variables. Interpretación gráfica.	
DIVISIBILIDAD [7]	Algoritmo de Euclides. Múltiplo y divisor de un entero. Números primos. Criba de Eratóstenes. Mínimo común múltiplo. Máximo común divisor. Números coprimos. Teorema fundamental de la aritmética. Congruencia. Aplicación: criterios de divisibilidad.	• Presentar problemas abiertos expresables de manera sencilla, como, por ejemplo, el algoritmo de Siracusa o algoritmo 3x+1, conjetura de Goldbach. • Introducir el formalismo matemático a través de teoremas simples de divisibilidad.

Bloque de contenidos	Contenidos	Actividades
GEOMETRIA DEL PLANO Y DEL ESPACIO [1]	Aplicaciones de los contenidos trabajados en el bloque 2 de la EGB en situaciones problemáticas más complejas. Sistemas axiomáticos parciales de la geometría del plano. Aplicaciones.	
MATEMATICA DISCRETA [2]	Razonamientos válidos e inválidos. Enunciados. Métodos de demostración. Inducción matemática. Definiciones recursivas. Algebra de matrices. Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Elementos de la teoría de grafos. Modelizar distintas situaciones a través de grafos convenientes.	
CALCULO INFINITESIMAL [3]	Funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Noción de límite. Definición e interpretaciones geométrica y física de la derivada. Reglas básicas de derivación. Integrales definidas. Cálculo de áreas. Cálculo de primitivas.	Analizar cómo varían las funciones exponenciales y logarítmicas en relación con los parámetros que las definen y las variaciones de los gráficos de las funciones del tipo A sen wx en relación a los parámetros A y w, mediante un *software* adecuado.
PROBABILIDADES Y ESTADISTICA [4]	Probabilidad de los sucesos suma y producto. Probabilidad condicional. Introducción a la inferencia estadística. Modelos probabilísticos. Tests de hipótesis.	
GEOMETRIA ANALITICA [5]	Cónicas: elipse, hipérbola, parábola. Elementos principales y ecuaciones.	
ECUACIONES ALGEBRAICAS DIVISIBILIDAD EN K[X] [6]	Polinomios en una variable: álgebra de polinomios. Divisibilidad en K[x]. División de polinomios: regla de Ruffini. Teorema del resto. Descomposición de polinomios en producto de polinomios irreducibles. M.C.D. y M.C.M. Fracciones algebraicas: operaciones.	

IV. FORMACION DOCENTE

1. Introducción

Es claro que hoy en día nadie duda de la necesidad de una reforma de la enseñanza de la matemática tanto en la escuela primaria como en la escuela media y, una vez aceptada esta necesidad, es natural pensar y definir en qué debe consistir. Estamos persuadidos de que toda reforma de la enseñanza debería tener como prioridad una propuesta de formación de los docentes a fin de conseguir que los mismos estén capacitados para comprender todo lo que significa la propuesta. En este sentido consideramos que es ineludible que se realice una formación docente en forma sostenida a través del tiempo.

La escuela debe ser capaz de promover en los docentes: i) la reflexión conjunta sobre su experiencia, ii) la reflexión e investigación sobre la experiencia docente respecto de la disciplina, iii) la planificación y evaluación de las actividades en períodos de tiempo que garanticen la autonomía de trabajo y que posibiliten la creación individual.

Teniendo en cuenta los puntos anteriores consideramos que debería iniciarse a los docentes en la investigación educativa y propiciar institucionalmente ámbitos de reflexión, a fin de que el proceso educativo no se convierta en una rutina sino en un campo de investigación, experimentación y reflexión permanente.

Pensadas así las cosas, es indudable que debe existir una base material mínima en las condiciones del trabajo del docente. Para que lo anterior sea posible es necesario que el docente cuente con cierta cantidad de horas dedicadas a su formación, por encima de aquellas en que se desempeña frente a alumnos; por supuesto que ello debe ser realizado en horarios incluidos dentro de sus jornadas normales de trabajo y debería ir acompañado de un salario que le permita vivir exclusivamente de la actividad docente.

2. Objetivos generales para la formación docente

A partir de lo expuesto en las secciones anteriores y de las consideraciones previas que hicimos en ésta creemos necesario señalar los criterios generales que deben guiar la formación docente.

Es necesario que el docente tenga claridad sobre las diferentes etapas del desarrollo histórico de la ciencia y el tránsito de una a otra, porque el nivel de generalidad de cada etapa es mayor que el de la anterior, en el sentido de que la etapa siguiente es englobante y superadora de la anterior y, por ende, supone un mayor nivel de abstracción por parte del sujeto. Es decir, no es posible pasar de un nivel a otro sin la superación previa de los obstáculos epistemológicos del nivel anterior.

El docente debe moverse con familiaridad en la parte básica de las teorías matemáticas fundamentales: análisis, aritmética, álgebra, geometría y esto se debe complementar con áreas de aplicación como estadística y matemática discreta.

El docente debe saber que en matemática el conocimiento más valioso no viene dado por la erudición sino por el "saber hacer". "Saber hacer" en matemática significa usar el lenguaje matemático con fluidez, resolver problemas, criticar argumentos, buscar demostraciones alternativas y, lo que puede ser más importante, reconocer un concepto matemático en una situación concreta o extraerlo de ella.

Son necesarios docentes capaces de formar alumnos curiosos, de pensar por sí mismos, mucho más que docentes empeñados en enseñar unos cuantos teoremas o unas cuantas reglas operativas, que el alumno, si ha recibido una sólida preparación básica podrá leer sin dificultad de cualquier libro.

Por otro lado, es importante la preocupación del docente por la construcción de una didáctica específica de la ciencia.

Una cuestión central en la construcción de una didáctica para las matemáticas es tener presente que la historia de la constitución de las disciplinas científicas es un largo y penoso proceso que va delimitando el objeto de conocimiento y definiendo el método específico de la disciplina. Las sucesivas construcciones teóricas han implicado saltos cualitativos ocurridos para salvar obstáculos o bien epistemológicos o bien de orden social. La historia de la física simbolizada en Galileo, la historia de la química y el enorme peso que significó la alquimia y la constitución de las geometrías no euclidianas son ejemplos de los laboriosos procesos de constitución de las disciplinas científicas. Es indudable que esto tiene, además de un gran interés epistemológico, un enorme valor pedagógico.

Si partimos de que los diferentes niveles de abstracción implican superación de obstáculos epistemológicos y que éstos inciden en el aprendizaje, tenemos un primer punto de partida para la constitución de la didáctica de la matemática como área de trabajo científico. Trabajo científico que debe ser naturalmente desarrollado en el ámbito docente y con participación de los propios docentes.

Asimismo, el docente debe estar permanentemente al día y en contacto con las ideas de los científicos, a fin de estudiar la factibilidad y el beneficio de incorporar las novedades científicas, así como también perfeccionar los métodos de enseñanza y la presentación de cada tema.

3. Cursos de formación docente

El método natural para cumplir con lo sugerido en el ítem anterior consiste en la realización de cursos, seminarios o talleres de perfeccionamiento.

Es interesante pensar también en la inclusión de cursillos tendientes a informar a los docentes acerca de las propuestas de la reforma y del tipo de perfeccionamiento docente y las condiciones que serán necesarios para llevar a cabo la misma. La formación del educador debe ser encarada teniendo en cuenta que él es un sujeto protagónico de la problemática de la enseñanza y como tal tiene concepciones y valores en torno a la educación en general y a la enseñanza de la matemática en particular, que es importante considerar.

La propuesta de trabajo en los cursos de perfeccionamiento debe incluir bibliografía para el docente diferenciada de la del alumno, a fin de que el primero sienta la seguridad que produce el tener una visión de los temas desde un plano superior al del alumno.

Pensamos que la metodología de *taller* sería la más idónea para el trabajo con docentes. Hablamos de *taller* en lugar de hablar de cursos, porque, en general, se trata de la revisión de temas que son conocidos en cierta forma por el docente y, con estos talleres, lo que nos proponemos es actualizar la presentación de los mismos con una metodología basada en la participación activa de los docentes. Con respecto a este último punto consideramos que la metodología de trabajo debe ser similar a la que el docente debería llevar al aula, sobre todo en lo que se refiere a la resolución de problemas. También sería interesante mostrar experiencias realizadas con otros grupos, todo ello tendiente a vencer la resistencia que siempre se muestra *a priori*: "esto es demasiado complicado, los alumnos no lo van a entender" o "para qué hacer esto si no lo puedo llevar al aula".

Por último, consideramos que sería conveniente que los primeros cursos sean organizados y dictados por docentes de las carreras de los Profesorados consustanciados con la propuesta o por docentes de Universidades y que, a partir de allí, se habilite a aquellos docentes de los diferentes niveles que manifiesten un interés especial para que dicten ellos mismos estos cursos para sus colegas de la región, lográndose de esta manera un efecto multiplicador que permita que la formación esté al alcance de todos y no, como muchas veces ocurre, restringida a los grandes centros urbanos.

4. Contenidos de los cursos de formación docente

Los primeros cursos estarán dirigidos a los docentes del Tercer Ciclo de la EGB y los siguientes a los docentes de la EP.

EDUCACION GENERAL BASICA

Seminario taller de aritmética elemental

Resolución de problemas basados en la Teoría Elemental de Números. Proporciones. Algoritmo de Euclides. Máximo Común Divisor. Teorema Fundamental de la Aritmética. Congruencia. Desarrollo histórico de la teoría de números.
Duración: 30 horas.
Bibliografía:
TIRAO, Juan A., 1985, *Matemática 1*, Buenos Aires, Kapelusz.
GENTILE, Enzo, 1992, *Aritmética en la formación matemática elemental*, O.M.A.
GENTILE, Enzo, *Notas de álgebra*, Eudeba.
VINOGRADOV, I., 1977, *Fundamentos de la Teoría de números*, Moscú, M.I.R.

Seminario taller de geometría I

Concepto de problema geométrico. Problemas geométricos en el plano: semejanza de triángulos. Teorema de Thales. Construcciones con regla y compás. Problemas geométricos en el espacio. Desenvolvimiento histórico de la geometría
Duración: 30 horas.
Bibliografía:
SANTALÓ, Luis, *La geometría en la formación de profesores.*
SANTALÓ, Luis, 1993, *Matemática 1 y 2*, Kapelusz, Red Olímpica.
TIRAO, Juan A., *El plano.*
TIRAO, Juan A., 1985, *Matemática 1*, Kapelusz.

Seminario taller de estadística

Población y muestra. Variables discretas y continuas. Distribución de frecuencias agrupadas y no agrupadas. Diagramas de barras. Histogramas. Polígonos de fre-

cuencias. Otros tipos de gráficos. Estadísticos y parámetros. Estadísticos de posición y dispersión. Nociones de inferencia estadística.
Duración: 20 horas.
Bibliografía:
GILBERT, *Estadística.*
PIMENTEL GÓMEZ, *Iniciación a la estadística.*
TORANZOS, Fausto, *Iniciación a la estadística aplicada.*

Seminario taller de ecuaciones

Análisis de la evolución de los métodos de resolución de ecuaciones. Problemas diofantinos. Transformación de ecuaciones. Métodos de resolución de ecuaciones por radicales. Planteo de la imposibilidad de resolución por radicales para las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco
Duración: 30 horas.
Bibliografía:
GALDÓS, L., 1992, *Algebra*, Ed. Cultural.
BOURBAKI, N., 1976, *Elementos de historia de la matemática*, Alianza.
COURANT, R. y ROBBINS, H., 1955, *¿Qué es la matemática?*, Madrid, Aguilar.

EDUCACION POLIMODAL

Seminario taller de probabilidades e inferencia estadística

Estadística descriptiva. Teoría elemental de probabilidades. Modelos probabilísticos. Inferencia estadística. Pruebas de hipótesis.
Duración: 30 horas.
Bibliografía:
GILBERT, *Estadística.*
PIMENTEL GÓMEZ, *Iniciación a la Estadística.*
TORANZOS, Fausto, *Iniciación a la Estadística Aplicada.*

Seminario taller de álgebra

Divisibilidad en K[X]. Factoreo en polinomios irreducibles. M.C.D. m.c.m. Resolución de ecuaciones algebraicas. Planteo de la irresolubilidad por radicales de las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco. Matemática discreta: matrices, funciones recursivas y grafos. Introducción a las estructuras algebraicas.

Duración: 30 horas.
Bibliografía:
ROSS, K. A. , WRIGHT, CH. R., *Matemáticas discretas.*
GENTILE, Enzo, *Notas de Algebra.*
COURANT, R., ROBBINS, H., 1955, *¿Qué es la matemática?*, Madrid, Aguilar.

Seminario taller de análisis

Nociones intuitivas de límite, continuidad, derivadas e integrales de funciones reales. Aplicaciones geométricas y físicas de la derivada. Aplicaciones de la integral definida al cálculo de áreas. Sucesiones y series numéricas.
Duración: 40 horas.
Bibliografía:
VARGAS, Jorge, *Cálculo.*
LANG, Serge, *Cálculo I.*

Seminario taller de geometría

Evolución histórica de la geometría. Coordenadas en el plano. Ecuaciones e inecuaciones lineales. Ejemplos de programación lineal. Circunferencia y círculo. Cónicas por su ecuación reducida. Coordenadas en el espacio. Rectas y planos: paralelismo y perpendicularidad. La esfera. Introducir axiomáticamente la geometría del plano.
Duración: 30 horas.
Bibliografía:
FLEMING, Walter, *Algebra y trigonometría con geometría analítica.*
GALDÓS, L., *Geometría y trigonometría.*

Los siguientes talleres son comunes a la EGB y a la EP:

Epistemología e historia de la ciencia

Reflexión sobre los principales conceptos matemáticos y su constitución en la historia de la matemática, tanto interior como exterior a ella. Procesos de construcción de la disciplina. Reflexiones sobre los fundamentos de la matemática y del papel de la lógica en ellos. La historia de las distintas ramas de la matemática será trabajada en el taller correspondiente conjuntamente con los contenidos a estudiar, a fin de ver la significación de la historia en la constitución del aprendizaje de la ciencia.

Taller de recursos didácticos

El taller deberá girar en torno al trabajo docente, sus instrumentos de trabajo y la relación de ellos con las características internas de la disciplina. Hoy no se puede negar una didáctica de lo específico.

Entre los instrumentos de trabajo se destaca especialmente el papel de la computación en la enseñanza, así como los videos, las calculadoras, etc.

Por otro lado es importante la reflexión sobre los métodos propios del proceder matemático y la posibilidad de acercamiento de los mismos al aula. Entre ellos, el método de resolución de problemas se constituye en uno de los más destacados.

BIBLIOGRAFIA

CARLSON, Carol G., 1992, *The Metamorphosis of Mathematics Education*, Focus 27, Princeton, Educational Testing Service.

GUZMÁN, Miguel de, 1991a, *Para pensar mejor*, Barcelona, Labor.

GUZMÁN, Miguel de, 1991b, *Tendencias innovadoras en educación matemática,* Madrid.

KLINE, Morris, 1986, *El fracaso de la Matemática Moderna*, España, Siglo XXI.

LAKATOS, Irme, 1979, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press.

MARABOTTO, M. I. y Grau, J. E., 1992, *Hacia la informatización del aprendizaje (Estrategias y Horizontes)*, Buenos Aires, Fundec.

MARABOTTO, M. I. y Grau, J. E., 1991, *Hacia la informatización del aprendizaje (Fundamentos y conducción)*, Buenos Aires, Fundec.

PIAGET, Choquet, Dieudone, Thom y otros, 1986, *La Enseñanza de las matemáticas modernas*, Madrid, Alianza.

SANTALÓ, Luis A., 1966, *La matemática en la escuela secundaria*, Buenos Aires, Eudeba.

VAVILOV V. V., 1990, *Problemas con parámetros*, Univ. de Moscú M.V. Lomonosov, Centro Especial de Estudio y Ciencia.

ANEXO
NOMINA DE COLEGAS CONSULTADOS

TORANZOS, Fausto, Prof. Titular, Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires.

CAMPOLI, Oscar, Prof. Titular, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

VARGAS, Jorge, Prof. Titular, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

PALAU, Gladys, Prof. Extraordinaria visitante, Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Río Cuarto.

ETCHEGARAY, Silvia, Prof. Adjunta, Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Río Cuarto.

BASTÁN, Marta, Prof. Adjunta, Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Río Cuarto.

PEPARELLI, Susana, Prof. Adjunta, Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Río Cuarto.

COLOMBO, Silvia, Prof. Adjunta, Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Río Cuarto.

DAL LAGO, Walter, Prof. Adjunto, FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba.

CARDELLI, Jorge, Prof. Adjunto, Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Río Cuarto.

Norberto Fava

Doctor of Philosophy, Universidad de Minnesota; Licenciado en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional de Buenos Aires. Profesor Ordinario Titular de Análisis Matemático en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

Liliana Gysin

Doctora en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional de Buenos Aires. Profesora Regular Adjunta del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Buenos Aires.

SUMARIO

I. INTRODUCCION

El presente documento propone un enfoque para la integración de los contenidos de la matemática a los contenidos básicos comunes. La elaboración de los bloques de contenidos correspondientes a cada nivel de enseñanza se ha fundamentado aquí en la lógica del conocimiento y en sus aplicaciones actuales o posibles para la resolución de problemas de producción, sociales o políticos. Tal la tarea que nos fuera encomendada.

Una manera simplista de realizar esta tarea sería considerar la educación matemática como una parte de la educación general que puede ser tomada por sí sola a la luz de su desarrollo científico, independientemente de los procesos históricos que confluyeron para dicho desarrollo, de la didáctica que se utilice para su enseñanza, de sus aplicaciones a la vida diaria y a la tecnología y de los seres humanos que se desea formar dentro del sistema educativo. Esto sería como mirar la matemática sólo desde un aspecto del trabajo del investigador, su aspecto rigurosamente formal.

Pero tratándose de educación, no podemos olvidarnos de los educandos ni de los educadores, y hablar de matemática en este contexto no puede reducirse a tratar sólo sus estructuras formales. Todo quedaría fuera de contexto, y además de los errores a los que podría inducir un tal enfoque en cuanto a la enseñanza de los contenidos así determinados, la matemática aparecería como un "aparato formal" al que sólo los elegidos tienen acceso; una especie de ciencia oculta y difícil, tanto que casi no valdría la pena intentar comprenderla.

El Dr. Luis A. Santaló (1986) expresa con claridad esta idea cuando dice:

> Es cierto que una de las características de la matemática, a la que debe gran parte de su belleza, es su estructura coherente y sistematizadora. Desde Euclides hasta Bourbaki se ha procurado siempre ordenar el edificio matemático bajo las reglas de una lógica estricta e inflexible, lo cual es magnífico e irreprochable desde el punto de vista del matemático profesional, que debe desear para su ciencia una seguridad y una armonía perfectas. Pero el problema de la enseñanza, a los niveles elemental y medio, es otra cosa muy distinta. No se trata de formar matemáticos, introduciéndolos de entrada en los sofisticados caminos y preciosuras de la alta matemática, sino de enseñar a usar la matemática y edu-

> car en el método matemático. Y el método matemático, el que siguen los matemáticos para sus descubrimientos no es el lento y pesado camino de la lógica, sino que saltan razonamientos e intuyen resultados que luego exponen poco a poco, mediante una serie de razonamientos atomizados. Una cosa es 'descubrir' y otra 'exponer el descubrimiento' y, en la enseñanza hay que enseñar a descubrir más que enseñar a exponer lo descubierto."

De acuerdo con todo ello, hemos tratado de enfocar los contenido matemáticos a la luz de la educación en general, como un conjunto dinámico que crece continuamente a partir de la interacción con las demás disciplinas, como puede observarse en su desarrollo histórico; cuyos procedimientos, desde los más sencillos hasta los altamente complejos, son herramientas que permiten resolver situaciones problemáticas de los tipos más diversos. Coincidimos con M. de Guzmán (1992) en que "la matemática es, sobre todo, saber hacer", y en tal sentido, dirigimos nuestra mira "hacia la adquisición de los procesos típicos del pensamiento matemático", buscando "la inculturación a través del aprendizaje activo", sin desmedro de los contenidos conceptuales involucrados.

El punto II.1 del presente documento contiene una descripción del enfoque utilizado en la selección de los bloques de contenidos para la Educación General Básica (EGB) respecto de los contenidos mismos primero y respecto de su fundamentación después, un comentario sobre la incidencia en la enseñanza de la matemática de los desarrollos tecnológicos y un tratamiento un poco más detallado de la resolución de problemas, que consideramos una herramienta metodológica fundamental para el aprendizaje activo de la matemática procedimental —el objetivo de la enseñanza de esta ciencia— como conocimiento incorporado. El punto II.2 presenta seis bloques de contenidos para la EGB, con una breve fundamentación —desde el conocimiento y desde sus aplicacionesc de los temas incluidos en cada bloque. En el punto II.3 se hacen algunas consideraciones didácticas que consideramos importantes, para cada uno de los ciclos de la EGB, según los contenidos que corresponden a cada ciclo.

En el punto III.1 se describe el enfoque utilizado para la selección de contenidos del tronco común de la Educación Polimodal. En el punto III.2 se presentan los bloques de contenidos con una breve fundamentación. En el punto III.3 se hacen algunas consideraciones didácticas respecto del ciclo polimodal.

El punto IV.1 trata el enfoque para la formación y actualización docente. Los contenidos respectivos se enumeran en el punto IV.2 separados por ciclo.

En el punto V se exponen brevemente algunas consideraciones finales.

Queremos expresar nuestro agradecimiento al Dr. Luis A. Santaló por sus valiosas recomendaciones, a la Prof. María Cristina Zeballos por sus aportes bibliográficos y a todos nuestros colegas que a través de discusiones y sugerencias colaboraron en la elaboración de este documento.

II. PROPUESTA DE CONTENIDOS BASICOS COMUNES PARA LA EDUCACION GENERAL BASICA

1. Enfoque para la Educación General Básica

1.1. Respecto de los contenidos

En la sociedad moderna, en que el niño dispone de los medios de comunicación masiva desde muy temprano, y más aún considerando que al llegar al primer nivel de la EGB ya ha cursado por lo menos un año obligatorio de educación inicial con diferenciación de ámbitos de experiencia, no podemos dejar de tomar en cuenta que al ingresar a la EGB el alumno se mueve con cierta soltura dentro del ámbito matemático, en cuanto a los números naturales. Pero incluso si no hubiera participado de una educación guiada en este ámbito, es un hecho que el niño maneja los números naturales desde antes de entrar a la escuela, en el contar e incluso en alguna forma de operación elemental como sumar o repartir. Lo que encontrará en la escuela es el número como símbolo.

El número es el primer "símbolo" al que accede el niño en el mundo de la matemática. Este símbolo, que representará cantidades concretas en una primera etapa, es una de las herramientas fundamentales tanto del cálculo mismo como del aprendizaje de un pensamiento formal y abstracto que permite resolver situaciones concretas.

Desde el hecho problemático "si tengo diez caramelos para repartir entre cinco chicos, tengo dos caramelos para cada chico", hasta el enunciado formal "10 dividido 5 igual a 2", y mucho después a enunciados formales más complejos del tipo "el número racional 10/5 es una fracción reducible equivalente a dos enteros", el niño debe recorrer un largo camino de la mano de los conjuntos numéricos, sus relaciones y las operaciones y propiedades respectivas.

Pero tampoco esto es suficiente. Es importante que, además de poder expresar los enunciados formales, sepa aplicarlos a situaciones concretas. Es decir, porque "10 dividido 5 es igual a 2", si uno tiene diez caramelos para repartir entre cinco chicos, sabe que tiene dos para cada chico sin necesidad de imaginar ni los caramelos, ni los chicos, ni la operación de "repartir". Uno debe poder representar el problema concreto con entes matemáticos, resolver el problema matemático y traducir el resultado al problema concreto. Que el niño adquiera estas capacidades es uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la matemática.

Resulta bastante obvio que cuantos más objetos matemáticos conozca, y cuantos más problemas matemáticos sea capaz de plantear y resolver un individuo, mayor será su capacidad para enfrentar y solucionar problemas concretos. Pero esto no debe tomarse como una expresión puramente cuantitativa. Una jerarquización de la calidad de la enseñanza con objetivos claros dirigidos a la formación de un "pensamiento matemático" en el individuo (donde éste incluye las capacidades de representar, resolver y traducir) es el punto clave para la enseñanza de la matemática. De poco le servirá al individuo una enorme cantidad de información, "archivada" en algún lugar de su memoria, si no sabe utilizarla en situaciones concretas.

En concordancia con ello, los contenidos mínimos se han elaborado teniendo en cuenta simultáneamente su aporte "formativo" (en cuanto a que ayuda a formar el pensamiento matemático) y su necesidad como contenido elemental (como herramienta para el cálculo dentro de la situación problemática correspondiente). La integración de los contenidos de la matemática a los Contenidos Básicos Comunes debe tener en cuenta estos dos aspectos, así como su relación con los contenidos de las demás disciplinas.

1.2. Respecto de la fundamentación

Hay contenidos de la matemática tan básicos que resulta difícil "fundamentar desde la lógica del conocimiento y desde sus aplicaciones actuales o posibles para la resolución de problemas" su inclusión en los CBC de la EGB. Tal es el caso, por ejemplo, de los números naturales y las operaciones básicas definidas entre ellos. Sin embargo, queremos hacer hincapié en la importancia de la enseñanza de estos temas básicos en el momento y de la manera adecuados, ya que de ello dependen, en gran medida, la actitud con la que el alumno enfrentará los procesos de aprendizaje posteriores (es bastante común, y para nosotros poco comprensible, que el alumno crea que la matemática es una disciplina difícil y se sienta de antemano incapaz de aprenderla) y la creatividad que sea capaz de aportar al planteo de un problema concreto en términos matemáticos, estrechamente ligada a lo "NO encasillado" que debe estar el conocimiento.

Creemos que es fundamental respetar los momentos en el desarrollo evolutivo del niño para que el aprendizaje sea un movimiento continuo, desde lo concreto hasta lo formal, y desde el niño hacia la matemática. "Enseñarle" a un niño pequeño un concepto puramente formal, por ejemplo, sólo logrará que el niño esquematice ese concepto en alguna categoría concreta que le es accesible y de la cual será muy difícil desligarlo. Como consecuencia, ese "conocimiento" difícilmente podrá ser aplicado a problemas concretos que no estén directamente relacionados con la categoría en que ha sido encasillado.

El movimiento continuo en que debe realizarse el aprendizaje de la matemática se da en todas las direcciones. Queremos ejemplificar este movimiento con un tema que se presta especialmente para ello y que es o debería ser conocido por todos: el teorema de Pitágoras.

Desde los grados inferiores el alumno puede manejar este resultado haciendo una "demostración" concreta del mismo, recortando y superponiendo áreas. Esto hace que, además de lograr una comprensión mucho más profunda del resultado mismo, por haberlo puesto a prueba concretamente, el niño se vaya acercando paulatinamente a una actitud crítica ante los enunciados: hay un resultado propuesto, no necesitamos creerlo a ciegas, tratemos de verificarlo con los conocimientos de que disponemos. Por otro lado, lo enfrenta a un resultado poderoso (que vale para todos los triángulos rectángulos) cuya generalidad intuye, aunque no es capaz de demostrar. La capacidad natural de generalización que posee el niño a edad temprana debe equilibrarse dentro de lo posible, no es cierto que todo se pueda generalizar, pero hay muchas cosas que sí se pueden.

En cuanto su pensamiento comienza a desligarse de lo concreto para hacerse más formal, el alumno es capaz de "mover" geométricamente áreas y buscar su propia demostración geométrica, sólo usando regla y compás. Aquí el movimiento se produce no sólo por la incorporación de un desarrollo formal representativo, sino gráficamente como movimiento real de figuras en el plano. Aquí ya puede verificar el grado de generalización que tiene el resultado en cuestión.

En la última etapa, el alumno será capaz de visualizar (e incluso elaborar, aunque sea parcialmente) una demostración formal. Aquí los movimientos están además en la generalización del resultado, se lo visualiza y dibuja y demuestra en un triángulo rectángulo que representa cualquier triángulo rectángulo.

Además del movimiento a lo largo del tiempo, existe un movimiento de interrelación con otras áreas de la matemática que se va dando paralelamente desde, por ejemplo, la utilización del resultado para el cálculo de áreas de figuras planas y su aplicación a la resolución de problemas hasta la deducción de la relación trigonométrica entre senos y cosenos, sin olvidar mencionar las aplicaciones del resultado mismo y de la trigonometría a otras disciplinas como, por ejemplo, la física.

El aprendizaje de la matemática como un conocimiento en continuo movimiento permite relacionar la rigidez de las reglas y leyes que la dominan con su aplicación a los campos más diversos. Es una ciencia axiomática y como tal sus axiomas son inapelables; una vez dentro del modelo matemático con que miro una realidad parcial, las reglas están dadas por la teoría. El criterio y la creatividad son indispensables para acceder al modelo adecuado. La formación del criterio para evaluar los diferentes modelos aplicables a un problema concreto, la utilización de la creatividad para generar modelos diversos y la capacidad de operar según las reglas preestablecidas por la axiomática que avala el modelo elegido son los objetivos fundamentales que responden al eje de formación humanístico, científico y tecnológico, en tanto desarrollan "la capacidad de construir explicaciones de los fenómenos de los procesos naturales y sociales sobre la base del dominio de conceptos, métodos y lenguaje" de la matemática.

El movimiento desde el niño hacia la matemática puede interpretarse como el proceso de "inculturación" a que se refiere M. de Guzmán (1992). En la obra citada, M. de Guzmán destaca el continuo apoyo en la intuición de lo concreto y en lo real, considerando necesario que

> la inmersión en ella [la matemática] se realice teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge. [...] Para entender esta interacción fecunda entre la realidad y la matemática es necesario acudir, por una parte, a la propia historia de la matemática, que nos devela ese proceso de emergencia de nuestra matemática en el tiempo, y por otra parte, a las aplicaciones de la matemática, que nos hacen patentes la fecundidad y potencia de esta ciencia. Con ello se hace obvio cómo la matemática ha procedido de forma muy semejante a las otra ciencias, por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma más madura, aunque siempre perfectible. Nuestra enseñanza ideal debería tratar de reflejar este carácter profundamente humano de la matemática, ganando con ello en asequibilidad, dinamismo, interés y atractivo.

1.3. Dos temas insoslayables

Queremos comentar, en consonancia con lo dicho, dos temas que consideramos insoslayables en este contexto: i) las nuevas tecnologías; ii) la estadística, la probabilidad y el pensamiento aleatorio.

i) *Las nuevas tecnologías.* Muchos adultos deben recordar con fastidio que durante su pasaje por el primer año de la escuela secundaria debieron invertir mucho tiempo y esfuerzo en aprender un método engorroso que les permitía obtener la raíz cuadrada de un número. Los más jóvenes, sin embargo, simplemente obtienen el resultado deseado apretando un botón de la calculadora de bolsillo, y el engorroso método ha caído obviamente en desuso. Uno podría preguntarse ahora si es correcto que el método ya no se enseñe.

Pero la situación no es tan simple como a simple vista lo parece. En realidad, deberíamos preguntarnos qué aprendía el alumno al aprender a extraer raíces cuadradas y qué es lo que aprende hoy en su lugar. En este ejemplo particular, las respuestas son bastante sencillas; el método en sí no es más que un algoritmo que permite realizar un cálculo, como tal no aporta más que la memorización del mismo. Lo conceptual que debería estar involucrado es independiente, en este caso particular, de cómo se obtuvo el resultado, el concepto de raíz cuadrada es asequible a partir de la potencia. La validez del resultado puede comprobarse y debe poder estimarse *a priori*. Dicho de otra forma, es importante que el alumno sepa qué significa extraer una raíz y que pueda estimarla (por ejemplo, por aproximaciones sucesivas). El cálculo en sí puede dejarlo tranquilamente en manos de la calculadora.

Pero debemos tener en claro, en todo momento, que los instrumentos con que nos provee la tecnología son instrumentos. Debemos aprender a utilizarlos en la medida que resulten convenientes, sin abusar de ellos. En tal sentido, la utilización de calculadoras de bolsillo, ordenadores personales y demás instrumentos (dentro de los que podrían incluirse diferentes softwares especialmente preparados para la educación), que está estrechamente ligada al grupo social, la región y la disponibilidad económica, debe ser cuidadosa y adecuada al desarrollo evolutivo de los alumnos. "Lo verdaderamente importante vendrá a ser su preparación (de los alumnos) para el diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro que ya casi es presente" (M. de Guzmán, 1992).

Recomendamos en relación a este tema, la lectura del capítulo "Las calculadoras de bolsillo", incluido en *La enseñanza de la matemática en la escuela media* de Luis A. Santaló.

ii) *La estadística, la probabilidad y el pensamiento aleatorio*. Es una realidad de nuestra época que los medios de comunicación utilizan gráficos estadísticos y medidas de probabilidad en el lenguaje diario, casi como si todos supieran de lo que se está hablando. Si bien es cierto que, en particular las probabilidades elementales son casi intuitivas en los niños, también es cierto que las lecturas incorrectas de los datos, o la mala recopilación de los mismos, puede llevar a inferencias estadísticas totalmente incorrectas. ¿Cómo saber qué indican esos gráficos que nos muestran a veces en los noticieros sobre los pronósticos del tiempo?, ¿cómo decidir quién puede estar más cercano a la realidad de los muchos encuestadores que nos llenan de proyecciones durante una campaña electoral?

Estos y tantos otros ejemplos de nuestra realidad hacen que estos temas, comúnmente relegados en la enseñanza de la matemática, vuelvan a ocupar un lugar importante en los contenidos básicos.

1.4. La resolución de problemas

Finalmente queremos tratar con cierto detalle un tema que consideramos fundamental para la enseñanza de la matemática, la resolución de problemas.

Al respecto dice Luis A. Santaló (1986) que "enseñar matemática debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemática debe ser lo mismo que pensar en la solución de algún problema." Y cita las palabras dichas en 1968 en St. Agustin (Trinidad) por el profesor Georg Polya: "Está bien justificado que todos los textos de matemática, comenzando por el papiro Rhind (siglo XVIII antes de nuestra era) contenga problemas. Los problemas pueden incluso ser considerados como la parte más esencial de un libro, y la resolución de problemas por los alumnos, como la parte más esencial de su educación matemática".

Podríamos citar diferentes autores que han escrito sobre la enseñanza de la matemática, casi todos ellos concuerdan en la importancia de la resolución de problemas. Es a la vez uno de los pilares fundamentales de la educación matemática, una de sus herramientas principales, la metodología que pone el acento en los procesos de pensamiento, algo que despierta el interés en el alumno, desarrolla la mayoría de las cualidades que se suelen señalar como típicas de la educación matemática. Y sin embargo, si observamos los libros de texto más usuales en la actual enseñanza media, ellos están llenos de ejercicios, pero casi vacíos de problemas.

Es aquí donde los docentes deben hacer un enorme esfuerzo. Muchas veces la diferencia entre un ejercicio y un verdadero problema es sutil. No alcanza con enunciar un ejercicio de forma problemática para transformarlo en un problema. Y si el alumno se queda sólo con la ejercitación, difícilmente podrá hacer verdadera transferencia de conocimientos. Lo que se ejercita queda dentro de la ejercitación y su relación con la realidad o la generación de un modelo matemático que pueda utilizar de hecho el enorme bagaje que el alumno haya adquirido a través de la ejercitación no es sólo intuitivo: se debe aprehender.

Creemos que la resolución de problemas es el mecanismo por el cual se provocan y realizan los movimientos desde el niño hacia la matemática, los que permiten la ya citada inculturación. La provocan a partir de la necesidad de resolver una situación concreta —que podría ser, como dice M. de Guzmán (1992), "la realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos que queremos explorar con nuestros alumnos" o "una modelización de la realidad en la que el profesor sabe que han de aparecer las estructuras matemáticas en cuestión"—, y la realizan a partir de una búsqueda guiada que no anule el placer de descubrir.

2. Propuesta de inclusión de bloques para la EGB

Para tener una visión un poco más clara de los objetos matemáticos que es necesario conocer, podemos hacer una división de áreas dentro de la matemática. Debemos tener en cuenta, sin embargo, que no es una división de hecho, ya que las diferentes áreas están interrelacionadas y van creciendo de manera paralela y complementaria (por ejemplo, calcular un área es un tema geométrico, pero no puedo calcular un área si no conozco la multiplicación). Las áreas a que nos referimos son:

- Aritmética (y dentro de la aritmética el cálculo, las funciones, las representaciones gráficas de los elementos de los conjuntos numéricos y de las funciones numéricas, y la formalización de los resultados),
- Geometría (con construcciones y definiciones por un lado y operaciones y representación de objetos geométricos por otro), y
- Probabilidad y estadística.

La aritmética introduce al alumno al mundo formal de la matemática, además de proveerle las herramientas necesarias para trabajar en él. Desde los primeros símbolos, los números, hasta el lenguaje puramente formal, el alumno debe recorrer varias etapas, a lo largo de las cuales va adquiriendo además capacidades de cálculo y desarrollo que acompañan y apuntalan este nuevo modo de pensar. En tal sentido, el aprendizaje del cálculo es previo y paralelo a las etapas de representación y formalización.

El cálculo además de proveerle directamente de las herramientas operativas, debe tener como objetivos la agilización de las capacidades naturales y el refuerzo de la memoria.

Las funciones y representaciones deben crear en el alumno la capacidad de plantear, visualizar y resolver un problema concreto de la realidad utilizando un modelo matemático adecuado para representarlo.

La formalización es la que lo provee del lenguaje matemático con el cual debe manejarse para plantear el problema.

La geometría es la rama de la matemática que más directamente y desde pequeño relaciona al niño con el mundo a través de imágenes. De hecho se podría decir que la geometría es un mundo de imágenes en movimiento. En tal sentido, las definiciones y construcciones producen un movimiento desde los objetos hacia su representación geométrica, las transformaciones y operaciones son movimiento en sí mismas (mueven los objetos dentro de la representación, incluso modificando tamaños sin modificar las formas), y las mediciones son movimiento en tanto son comparaciones, por igual, más grande o más chico, de los objetos geométricos entre sí.

La estadística y la probabilidad enfrentan al alumno con modelos bastante más complejos de una realidad que no es "exacta", dándole herramientas para evaluar situaciones concretas, e incluso inferir posibles conclusiones con el peso adecuado.

BLOQUE 1: ARITMETICA. CONJUNTOS NUMERICOS Y OPERACIONES.

- Números naturales. Operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación y división). Expresión en bases distintas de 10.
- Números enteros. Operaciones. Divisibilidad. Números primos. Descomposición en factores primos. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Sistemas de coordenadas enteras.
- Números racionales. Operaciones. Representación gráfica sobre la recta. Ordenación. Representación de puntos en el plano. Sistemas de coordenadas racionales. Expresiones racionales finitas y periódicas. Conversión de fracciones a decimales y viceversa. Potencias y raíces. Notación científica.
- Aproximación al valor de la raíz cuadrada por encaje de intervalos. Irracionalidad de la raíz cuadrada de 2. Noción de número real. Representación de números reales.

El aprendizaje correcto de las operaciones con números naturales es fundamental, ya que las capacidades adquiridas se aplicarán (ampliándolas cuando corresponda) a conjuntos numéricos cada vez más complejos. Al ampliar los conjuntos numéricos a los enteros, racionales, etc., el alumno podrá "transferir" y "generalizar" la mayoría de las propiedades y reglas operativas que ha aprendido sobre el conjunto de los naturales, observando qué propiedades se pierden al ampliar los conjuntos.

El trabajo dentro de los enteros, con divisibilidad, números primos, etc., permite una "clasificación" (cuya contraparte formal son las clases de equivalencia en una partición) y permite realzar la importancia de la unicidad de una representación.

El trabajo con bases distintas de 10 permite que el alumno descubra la expresión decimal como la más adecuada a nuestro lenguaje pero no como obligatoria; de hecho, las computadoras operan en base 2 o base 16, porque para ellas es más adecuado. Lleva implícitos los conceptos de "teoría" y "representación", que son fundamentales para una formación conceptual correcta del pensamiento matemático.

Con la introducción de las operaciones entre números racionales aparece fuertemente el concepto de equivalencia (fracciones equivalentes) para acceder a la operatoria. El alumno se ve enfrentado a una situación concreta (para los racionales como los que miden partes de un todo) en la cual necesita la representación adecuada para compatibilizar y poder operar. La representación gráfica surge como una herramienta más que permite relacionar lo gráfico con lo analítico (para la ordenación, por ejemplo). Los sistemas de coordenadas permiten ubicar puntos en el plano (lo que se relaciona con geografía, manejo de planos de una ciudad) e introducen el concepto de escalas. Las nociones de "representación", "infinito" y "convención" subyacen en el trabajo con racionales y su expresión decimal (periódica o finita), y específicamente en las operaciones de potenciación y radicación.

La introducción del número real involucra las nociones de "aproximación" y de "error". Es una nueva herramienta de cálculo que apela fuertemente al intelecto del alumno al introducir los números irracionales, necesarios para cálculos posteriores. Incluye implícitamente las nociones de "infinito" y "densidad".

BLOQUE 2: ARITMETICA. FUNCIONES Y PROPIEDADES.

- Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. Representación gráfica.
- Proporcionalidad directa e inversa. Regla de tres simple.
- Porcentaje. Interés simple. Descuentos. Reparto proporcional.
- Algoritmos. Nociones de programación lineal.
- Funciones numéricas. Función lineal. Función cuadrática.
- Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

Las proporcionalidades y la regla de tres simple y compuesta muestran posibilidades de tratamiento diversificado para un mismo problema, el pasaje por la unidad y la proporción. Exigen la capacidad de "planteo" para situaciones problemáticas más complejas y llevan implícito el concepto de "modelo".

El tema de porcentaje e interés establece un "puente" entre lo que es casi instintivo en el alumno (en la primera etapa), como el porcentaje, y lo que apela fuertemente a su intelecto y capacidad de formalización, como el cálculo de intereses.

Los algoritmos y la programación lineal elemental le abren las puertas al mundo de la computación. El alumno puede "jugar" a funcionar como una computadora, debiendo apelar a una gran cantidad de conocimientos previamente adquiridos.

Las funciones son la primera representación de algo que está en movimiento. Los puntos del plano que antes estaban fijos, ahora se mueven sobre las funciones (lo que se relaciona con movimiento en física). Este tema involucra las nociones de "movimiento" y "función".

La resolución de sistemas de ecuaciones e inecuaciones es una de las herramientas fundamentales en la resolución de problemas. Apela fuertemente a la capacidad de representación y la relaciona con las habilidades operativas. La resolución de problemas gráfica y analíticamente con sistemas de este tipo abarca un amplio espectro de situaciones problemáticas reales.

BLOQUE 3: GEOMETRIA. FIGURAS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO. PROPIEDADES.

- Definiciones y construcciones fundamentales de la geometría plana con regla y compás. Figuras en el plano. Congruencia. Paralelismo y perpendicularidad.
- Longitudes. Sistema métrico decimal. Areas planas. Teorema de Pitágoras.
- Propiedades de los triángulos y paralelogramos. Mediatrices, bisectrices, medianas. Polígonos. Circunferencias.
- Angulos inscriptos y semiinscriptos. Resolución de problemas con regla y compás. Teorema de Thales. Longitud de la circunferencia y área del círculo.
- Ecuaciones de la recta y de la circunferencia.
- Nociones intuitivas sobre paralelismo y perpendicularidad en el espacio. Diedros y poliedros, prismas y pirámides, cuerpos redondos.
- Volumen de la esfera. Volúmenes de cuerpos elementales.
- Proyecciones y perspectiva.

La construcción geométrica introduce al alumno al mundo de la geometría, enseñándole el valor de una construcción correcta. Aparecen las figuras geométricas representando gráficamente realidades. Lleva implícitos los conceptos de "forma" y "axiomática".

Con las congruencias aparecen las primeras relaciones entre los objetos geométricos y su tratamiento desde la geometría. Este tema permite comparar figuras sin necesidad de pesar todos sus elementos. Lleva implícito el concepto de "movimiento". Relaciona entre sí las figuras geométricas y algunas de sus partes generando relaciones que sirven como herramientas para la resolución de problemas representados geométricamente. El manejo de la regla y el compás para demostrar resultados, por ser asequible a edad relativamente temprana, va introduciendo al alumno a la formalización.

Las longitudes, áreas y volúmenes introducen el concepto de medida como comparación. Aparecen las "representaciones", en el sistema métrico decimal, y la noción de tamaño. Este tema lleva implícito el concepto de "magnitud". Utiliza irracionales en el cálculo. "Mueve" la noción de área a figuras circulares, y va abriendo con ello el camino a la geometría del espacio. Esta ubica al individuo en el espacio, involucra "generalización" y "restricción" y amplía la noción de proyecciones, necesaria para el dibujo en perspectiva.

BLOQUE 4: GEOMETRIA. VECTORES. MOVIMIENTOS DEL PLANO. TRIGONOMETRIA.

- Vectores (suma de vectores y producto por un número real).
- Transformaciones en el plano (traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias y semejanzas).
- Funciones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos.

El tema vectores es necesario para trabajar en física. Implica la noción de espacio vectorial, muestra que la matemática maneja no sólo conjuntos de números. Es una de las primeras estructuras que aparece en la geometría. El grupo de transformaciones es una estructura más compleja que la anterior, ya que sus elementos son movimientos del plano. Involucra los movimientos necesarios para la comprensión de propiedades físicas.

La trigonometría es uno de los temas que tiene aplicación más directa en problemas concretos y una de las herramientas más utilizadas en los diferentes campos a que se aplica la matemática como instrumento de cálculo. Es integradora de conocimientos (en cuanto es un tema que abarca muchos temas anteriores).

BLOQUE 5: PROBABILIDADES Y ESTADISTICA. NOCIONES BASICAS. COMBINATORIA.

- Noción de número combinatorio.
- Poblaciones y subpoblaciones. Muestras, tratamiento numérico y presentación de datos estadísticos. Gráficos.
- Experimentos aleatorios, espacios muestrales finitos, probabilidades elementales.

El número combinatorio aparece como herramienta para "contar" en el contexto de las probabilidades, y asociado a la fórmula de potencias de un binomio. Lleva implícitas las nociones de "azar" y "elección".

Formalizando nociones elementales de estadística, que el alumno ya maneja parcialmente en su vida diaria, accede al lenguaje estadístico para poder comprender resultados e importancia de censos, encuestas, etc.

El cálculo de probabilidades es una herramienta más de evaluación ante situaciones concretas. Desarrolla la actitud crítica del individuo en tanto le permite evaluar con criterio probabilístico. Lo introduce a un lenguaje casi "común" en el mundo actual. Implica la noción de "medida".

BLOQUE 6: NOCIONES DE TEMAS MAS FORMALES O AVANZADOS.

- Nociones básicas y nomenclatura sobre conjuntos. Lógica proposicional.
- Números complejos.
- Función exponencial y logarítmica.
- Cónicas (elipse, hipérbola, parábola) y cuádricas.

Los temas de este bloque no deben necesariamente trabajarse como temas conceptuales, sino que deben introducirse como nociones en las oportunidades que correspondan. Los consideramos como temas que el alumno debe "conocer" pero no necesariamente "manejar". El condicionamiento principal viene dado por la tecnología y el lenguaje diario que, a partir de su avance, se transforma. En tal sentido, el individuo que debe incorporarse al medio, debería saber, por ejemplo, que el número (raíz cuadrada de -1 =) *i* es un número complejo, que la tecla que dice log en una calculadora se refiere a aquella función que transforma productos en sumas, etc., o qué forma tiene una antena parabólica.

3. Algunas consideraciones didácticas

Primer ciclo de la EGB

Aun antes de trabajar con las operaciones sobre los números naturales, en el momento de "aprender a escribir" los números, el niño puede agrupar las cantidades (concretas) de que dispone en conjuntos de, por ejemplo, 2 unidades; y luego juntar estos "paquetes" en nuevos conjuntos de 2 paquetes y así sucesivamente. Este trabajo de agrupamiento le dejará demarcado el camino que lo llevará en etapas posteriores a la escritura del número en el sistema decimal, a trabajar concretamente las operaciones y traducirlas a escritura simbólica, a la escritura de números en otras bases y a la utilización del lenguaje conjuntista.

El trabajo de los niños desde las primeras etapas de la educación con las operaciones fundamentales en subconjuntos de los números naturales cada vez más amplios, primero hasta el 100, después hasta el 1.000, etc., debe crear en ellos los conceptos de las operaciones y sus reglas. Las operaciones deben manejarse en todos los sentidos , es decir, el niño debe aprender a resolver, por ejemplo para la suma, cualquiera de las siguientes situaciones: 8 + 4 = _, 8 + _ = 12 , _ + 4 = 12, 12 = _ + _, 12 = _ + 8, _ = 4 + 8, y otras que puedan plantearse con los mismos números; además debe aprender a resolver situaciones concretas que pueda relacionar con las sumas anteriores, como por ejemplo "si gasté 12 pesos para comprar carne y manzanas y la carne me costó 8 pesos, ¿cuánto me costaron las manzanas?", buscando con cuál de las "cuentas" se corresponde el problema de la mejor manera (y haciendo notar que de hecho se puede corresponder con cualquiera de ellas).

La introducción de las operaciones puede ser simultánea y la ejercitación debe ser diversificada. Ya desde aquí debe trabajarse en la resolución de problemas, tanto para la introducción conceptual como para lograr el manejo operativo. El trabajo inicial debería ser con elementos concretos.

El trabajo en geometría a partir del dibujo de formas, buscando simetrías y traslaciones, debe comenzar en el niño desde muy temprano. Sirve como primer paso para la escritura y abre la puerta del mundo de la geometría como movimiento. Las formas no deben ser necesariamente sencillas, pero en las sencillas los alumnos pueden reconocer formas conocidas.

Hacia el final de este nivel también pueden hacerse pequeñas recopilaciones de "datos estadísticos" para ser comentadas, como por ejemplo, cuántos varones hay en el grado, cuántos días de lluvia hubo en un mes.

Segundo ciclo de la EGB

Los números racionales se introducen a partir de las fracciones, como cantidades concretas para medir partes de un todo (los dos tercios de una pizza, por ejemplo). Con ello, las operaciones vuelven a ser una aplicación de las ya conocidas sólo que, el conjunto se ha ampliado. Las reglas de cálculo son deducibles a partir de esta generalización y de la representación gráfica.

La representación sobre la recta permite buscar la regla de ordenación, tan natural para los números naturales. La representación de puntos en el plano es el primer paso hacia las representaciones planas.

Pueden aparecer los números enteros (hacia el final del ciclo) en los resultados de operaciones elementales y la expresión decimal de las fracciones decimales y la manera de operar con estas expresiones ligada a las fracciones.

Se introduce y desarrolla el cálculo de porcentajes e interés simple con aplicaciones a situaciones reales (¿qué porcentaje de un sueldo es el aporte jubilatorio?).

La proporcionalidad directa e inversa y simultáneamente la regla de tres simple se introduce con aplicaciones a problemas muy diversificados y desde el concepto de proporcionalidad, sin esquemas de cálculo. Se trabajan los gráficos con coordenadas enteras (y luego racionales) sin explicitar necesariamente el concepto de función.

El trabajo con estadísticas (recopilación de datos y su discusión) prepara el terreno para un tratamiento más conceptual y profundo en el tercer ciclo.

A partir de las definiciones y construcciones fundamentales de la geometría plana con regla y compás, el alumno adquiere el manejo de regla, escuadra, transportador y compás. El tema se presenta muy relacionado con el dibujo. El alumno aprende a verificar si un objeto geométrico responde o no a una definición. Esto le permite intuir la esquematización dentro de la matemática.

El tema de las propiedades y relaciones de las figuras y entre ellas retoma el trabajo con formas y puede descubrirse a partir de los movimientos (sin definirlos). En este momento, el alumno se enfrenta a las primeras "demostraciones geométricas", que pueden ser presentadas sin una excesiva formalización. Además aprende a medir y a estimar volúmenes elementales, áreas y longitudes, así como a expresar una misma cantidad en diferentes unidades, dentro del sistema métrico decimal.

Las nociones intuitivas sobre paralelismo y perpendicularidad en el espacio, así como el dibujo de cuerpos y sus sombras en diferentes posiciones (cómo se mueve la sombra cuando muevo el cuerpo, por ejemplo con la esfera) desarrollan y fortalecen la noción de perspectiva y proyección.

Es deseable que el maestro tenga siempre presente el concepto subyacente de movimiento al trabajar con formas y figuras geométricas, tanto para que el alumno incorpore la geometría como algo "no estático", como para dejar abierto el camino al manejo más formal de transformaciones planas y representación de funciones.

Tercer ciclo de la EGB

Las operaciones con conjuntos numéricos más grandes deben ser introducidas como una generalización de las operaciones sobre los naturales, para los enteros en particular, incluyendo el 0 y los números negativos. En cuanto a la regla de los signos como una "convención" sugerimos consultar el libro mencionado de L. A. Santaló *La enseñanza de la matemática en la escuela media*, para ejemplificaciones en este tema.

Aparecen las expresiones decimales periódicas completando los racionales. La potencia como otra manera de escribir productos particulares, la raíz como operación inversa. Introducción de las convenciones de la operatoria. Notación científica.

Aproximación al valor de la raíz cuadrada por encaje de intervalos. Irracionalidad de la raíz cuadrada de 2. Noción de número real. Representación de números reales. Sin llegar necesariamente a una demostración formal, el niño puede acceder a la noción de número real. Calculando longitud de la circunferencia y área del círculo puede aproximarse el número pi. Debe tenerse en cuenta que los números reales no tienen que introducirse formalmente en esta etapa. Al respecto citamos al Dr. Santaló (1986):

> El hecho de que los matemáticos construyeran todo su edificio sin necesidad de una definición rigurosa de número real hasta mediados del siglo XIX significa que es mucho lo que se puede enseñar a nuestros alumnos de la escuela media sin que "sientan" la necesidad de las engorrosas definiciones de dichos números (cortaduras, sucesiones convergentes, cuerpos ordenados), las cuales pueden dejarse para el nivel terciario y para aquellos alumnos que hayan elegido, por vocación, los estudios matemáticos.

Aparecen las relaciones y funciones numéricas, la función lineal (representación gráfica) y su relación con las proporcionalidades. La ecuación de la recta, las ecuaciones e inecuaciones de primer grado y los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas con resolución gráfica y analítica, para situaciones problemáticas concretas. La ecuación de segundo grado, la parábola como representación gráfica, las raíces no reales y una breve noción de número complejo (como las raíces de números negativos). Las funciones exponencial y logarítmica y sus propiedades fundamentales.

Se introduce el número combinatorio como una herramienta de cálculo para "contar" posibilidades. Se hace un tratamiento más formal de probabilidades en espacios finitos, trabajando con juegos (puede darse la noción de esperanza en relación con la apuesta). Se realizan experimentos aleatorios.

Se trabajan las propiedades de los triángulos y paralelogramos. Mediatrices, bisectrices, medianas. Polígonos. Circunferencias. Angulos inscriptos y semiinscriptos. Resolución de problemas con regla y compás. Teorema de Thales. Las funciones trigonométricas hasta la resolución de triángulos rectángulos.

Las operaciones con vectores (suma de vectores y producto por un número real) deben estar orientadas fundamentalmente a la representación de fuerzas y al trabajo con transformaciones en el plano (traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias y semejanzas), geométricamente, con construcciones.

III. PROPUESTA DE CBC PARA LA EDUCACION POLIMODAL

1. Enfoque para la Educación Polimodal

1.1. Respecto de los contenidos

La enseñanza de la matemática en este ciclo, en primer lugar por el desarrollo evolutivo de los alumnos que lo cursan, y tomando en cuenta que un buen número de ellos busca la preparación necesaria para enfrentar estudios superiores mientras que el resto necesita una formación que le permita acceder a un puesto de trabajo para desempeñarse dentro del sistema laboral, debe tender a una sistematización de la matemática. La ordenación de conocimientos —que, como dice L. A. Santaló (1986), "debe ser posterior a la adquisición de los mismos: primero el tema y después el sistema"— dará al alumno una visión más formal y esquemática del edificio de la matemática, que le permitirá moverse dentro de este edificio con paso firme y convicciones sólidas.

Pero debemos tener en cuenta que el agregado de una sistematización en el tratamiento de los temas no invalida los objetivos de la enseñanza de la matemática en la Educación General Básica, solamente los amplía. Queremos decir con esto que el objetivo primordial sigue siendo la "inculturación" de los procesos de pensamiento matemático, que en este nivel pueden ser vistos también desde las estructuras algebraicas en que se apoyan. El alumno podrá exponer con rigor lógico los resultados y descubrimientos que realiza dentro y con la matemática que ya aprendió en la EGB, al tiempo que los amplía a conocimientos más complejos.

1.2. Respecto de la fundamentación

Queremos insistir aquí fuertemente en que el hecho de sistematizar no tiene nada que ver con "encasillar" conocimientos. Dado que el espíritu de trabajo debe tender a la formalización y que los temas que se agregan son en muchos casos, en cuanto a su tratamiento formal, esquemáticos, creemos que el riesgo de confusión es grande, tanto para los alumnos como para los docentes. En tal sentido insistimos en que la enseñanza utilice la resolución de problemas como su herramienta fundamental, y las aplicaciones concretas de la realidad en cada caso posible. Es necesario que el alumno se mueva continuamente dentro de la matemática, hacia la matemática y desde la matemática, a fin de poder interactuar con las demás disciplinas y con la realidad desde y con el pensamiento matemático, y no que adquiera conocimientos que no es capaz de relacionar ni utilizar en otros ámbitos.

Un ejemplo clásico, en este sentido, es el concepto de espacio vectorial (aún sobre el cuerpo de los números reales). No es extraño comprobar que un alumno recita a la perfección los axiomas que definen un espacio vectorial, incluso es capaz de encontrar entre sus "ejemplos" de espacios vectoriales sobre los números reales a los reales mismos, a las n-uplas de números reales, etc.; sin embargo, no "entiende" que le preguntemos si una recta o un plano pueden ser espacios vectoriales. O también es común ver que un alumno que conoce la regla del paralelogramo para sumar fuerzas, por un lado, y la suma de pares ordenados de números reales coordenada a coordenada como la operación interna en el espacio vectorial de pares ordenados, por otro, no es capaz de ver que son una y la misma operación. Una cosa son las fuerzas de la física y otra los pares ordenados de números reales como espacio vectorial de la matemática.

Una de las cosas que hace de la matemática una herramienta poderosa es la diversidad de aplicaciones que tiene para la mayoría de sus temas, y no sólo dentro de la matemática misma. Los docentes deben tener incorporada la matemática como un conocimiento dinámico en este sentido, de otro modo no serán capaces de transmitir los conocimientos que poseen con el movimiento adecuado y los errores volverán a repetirse una y otra vez.

2. Propuesta de inclusión de bloques para el "tronco común" de la Educación Polimodal

En este nivel podemos hacer una división más específica de las áreas a tratar, en correspondencia con los seis bloques de contenidos propuestos para este ciclo, a saber: Aritmética, Algebra, Geometría, Cálculo infinitesimal, Estadística y probabilidad, Matemática discreta.

Comentaremos brevemente cada una en la fundamentación que sigue al enunciado de los contenidos específicos de cada bloque, como para el caso de la EGB, desde el conocimiento y sus aplicaciones.

BLOQUE 7: ARITMETICA.

- Los conjuntos numéricos y sus operaciones (naturales, enteros, racionales, reales).
- Sistemas finitos de números (por ej., la aritmética del reloj y de la semana).
- Inducción matemática.
- Divisibilidad. Algoritmo de Euclides.
- Densidad de los racionales.
- Noción de cálculo aproximado. Errores de truncación y redondeo.
- Funciones exponencial y logarítmica.
- Concepto de límite de una sucesión de números reales (ejemplos ilustrativos). Sucesiones monótonas.

Los conjuntos numéricos y sus operaciones aparecen nuevamente desde su estructura algebraica. Los sistemas finitos como ejemplos. Se profundiza el tema de divisibilidad y se explicitan los algoritmos como tales. La noción de algoritmo es fundamental para el cálculo numérico.

Se introduce el cálculo aproximado y una noción de teoría del error para manejarse en la realidad circundante (que nunca o casi nunca es exacta).

La noción de límite de sucesiones es el primer paso hacia cálculo infinitesimal y los problemas de optimización.

BLOQUE 8: ALGEBRA.

- Convexidad en el plano.
- Aplicaciones inyectivas, suryectivas y biyectivas. Aplicación inversa.
- Relaciones de equivalencia y de orden.
- Polinomios. Operaciones. Raíces. Teorema del resto.
- Sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas.
- Combinatoria. Permutaciones. Combinaciones. Factorial. Fórmula del binomio.
- Estructuras algebraicas. Grupo. Anillo. Cuerpo. Espacio vectorial. Producto escalar. Geometría en coordenadas.
- Números complejos. Operaciones. Forma polar. Raíces enésimas.
- Matrices.

Los temas ya vistos se profundizan, se trabaja el anillo de polinomios, espacios vectoriales y producto escalar desde y para sus aplicaciones a la física, lo mismo que los números complejos. Las matrices pueden verse a partir de las tablas de doble entrada y sería deseable que se las llegara a ver en su relación con las transformaciones lineales.

BLOQUE 9: GEOMETRIA.

- Distancia. Grupo de transformaciones en el plano. Cónicas como lugar geométrico.
- La geometría y el arte. Razón áurea. Cubrimiento del plano por polígonos convexos congruentes.
- Trigonometría. Teoremas del seno y del coseno.
- Concepto geométrico de vector.
- Ortogonalidad y proyecciones.
- Sólidos de revolución.

La geometría se trabaja en coordenadas. Aparecen entonces las fórmulas de las figuras antes dibujadas.

Los sólidos de revolución no se tratan en profundidad.

BLOQUE 10: CALCULO INFINITESIMAL.

- Límite y continuidad.
- La derivada. Interpretación geométrica y cálculos. Extremos. Problemas de optimización.
- Integración. Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes.

Con aplicaciones concretas y ejemplos ilustrativos no triviales.

BLOQUE 11: ESTADISTICA Y PROBABILIDAD.

- Espacios de probabilidad discretos. Eventos, probabilidad condicional.
- Distribuciones de probabilidad. Valores medios. Varianza. Leyes de los grandes números.
- Esperanza matemática. Juegos. Tablas de números al azar.
- Frecuencia. Gráficos de barras, circulares, histogramas.
- Introducción a la inferencia estadística. Intervalos de confianza.

Con mayor formalización que en la EGB. Se accede a la inferencia estadística.

BLOQUE 12: MATEMATICA DISCRETA.

- Introducción a la lógica. Proposiciones y tablas de verdad. Implicación y equivalencia lógica. Cuantificadores. Funciones proposicionales. Sistemas axiomáticos.
- Elementos de la teoría de grafos: caminos y circuitos. Isomorfismo de grafos. Arboles.

Desde y para sus aplicaciones a la programación lineal y a la computación.

3. Algunas consideraciones didácticas

No hemos incluido en los bloques de contenido temas específicos de computación, excepto quizá la programación lineal, ya que la informática como área presentará sus propios contenidos básicos curriculares, pero creemos que en este nivel los alumnos que dispongan de calculadoras y ordenadores pueden y deben utilizarlos para acceder a la resolución de problemas mucho más complejos de los que tiene sentido plantear para resolver con cálculos manuales. Existe *software* que permite graficar en el espacio y generar movimientos de los cuerpos, los que pueden resultar de mucha utilidad para comprender, por ejemplo, qué es un sólido de revolución.

Queremos volver a hacer hincapié en el aspecto formal de la enseñanza de la matemática en este nivel en cuanto a su aporte formativo. Como dice L. A. Santaló (1986):

> En el ciclo básico el alumno ha aprendido a batallar con nuevos conocimientos y a perderles el miedo a muchas situaciones que le han interesado y le han sido presentadas de manera natural, ejercitando y echando mano a todas las armas a su alcance, sin preocuparse demasiado de sistematizaciones o coherencias con sistemas preestablecidos, que encantan al entendido, pero pueden desorientar y frenar a la imaginación de los jóvenes, ávidos de novedades gruesas más que de finas exquiciteces. Al pasar al ciclo superior, la cosa puede cambiar: hay que enseñar a recapacitar, ordenar y pulir todo lo aprendido, para seguir adelante con bases más firmes y poderosas.

Recapacitar, ordenar y pulir, que viene a ser intelectualizar un conocimiento, sin restringirlo. Simplemente tiene que ver con manejarlo desde el intelecto, sin que por ello pierda nada de su movimiento interior.

Podríamos establecer una cierta analogía con la siguiente situación: una persona tiene la oportunidad de ver una pintura original de un famoso pintor. Supongamos que observar esa pintura (y tal vez otras del mismo pintor) despierta en él una serie de sensaciones e imágenes que relacionará con el cuadro; ciertas músicas o movimientos o colores que generan un estado de ánimo particular. Supongamos ahora que la persona estudia algo de historia del arte, descubre al pintor de esos cuadros como representante de una corriente pictórica particular, aprende sobre la vida del pintor y la época que le tocó vivir. Y ahora vuelve a enfrentarse a la pintura. ¿Creen ustedes que ésta habrá perdido algo de su belleza, o que nuestra persona ya no logrará acceder a ese estado de ánimo tan particular al que llegaba antes, o que ya no relacionará la pintura con esa música o esos colores como lo hiciera la vez anterior? ¿O es más probable que, además de todo ello pueda ahora descubrir nuevas cosas relacionadas con la pintura, por ejemplo rasgos típicos de la corriente pictórica que antes no había notado?

Insistimos, entonces, en que los docentes deben tener incorporados sus conocimientos de un modo dinámico y querer transmitir este movimiento junto con los conceptos; con el objetivo claro de que el alumno debe adquirir los procesos típicos del pensamiento matemático, incorporándolos a través del aprendizaje activo.

En cuanto al cómo enseñar, quisiéramos destacar la importancia del papel de la historia de la matemática en la formación del docente y la utilidad del trabajo en grupos para la resolución de problemas. Pero no existen recetas mágicas, sólo existen tendencias que van surgiendo de la experiencia y de la investigación, cada vez más numerosa, sobre la didáctica de la matemática. Este es un gran avance, y coincidimos con el Dr. Santaló en la importancia de conocer las publicaciones que existen en tal sentido. De ellas el docente podrá obtener ideas, tendencias y métodos.Sin embargo, toda persona que haya estado alguna vez frente a un curso de nivel medio, sabe que cada docente junto con cada curso forman una situación particular, cuya interacción no es siempre la misma. Al respecto dijo Alan H. Schonfeld (1991): "existen tantas maneras de enseñar a pensar matemáticamente como existen profesores de talento", y si damos a nuestros docentes el acceso a la formación y a la bibliografía necesarias, ellos serán capaces de elaborar la "receta" más apropiada a cada caso.

Para finalizar, coincidimos con Schonfeld, en que "debemos introducir a nuestros alumnos en la experiencia de ejercitar las matemáticas como nosotros las conocemos", y citamos aquí la breve descripción que hace de su experiencia, por creer que puede ayudar a los docentes a tomar plena conciencia de lo que significa pensar matemáticamente:

> Hay una enorme diferencia entre la manera en la que nosotros trabajamos las matemáticas y la manera en que la ven nuestros alumnos. El trabajo matemático es un proceso de descubrimiento, vital y continuo, de alcanzar a comprender la naturaleza de objetos o sistemas matemáticos concretos. Primero dominamos una parte; según avanzamos, la intuición se desarrolla, comenzamos a creer que vamos por buen camino. Lo verificamos con

ejemplos, buscamos los ejemplos contrarios, intentamos enjuiciar el por qué vamos por buen camino. Cuando creemos que sabemos por qué funciona, probamos a demostrarlo. Este ensayo puede tener o no tener éxito. Podemos comenzar por un camino equivocado; sufrir algún revés, tener que batirnos en retirada, hacer modificaciones. Con perseverancia y suerte, el resultado termina por poner cada cosa en su sitio. Pocas experiencias son tan gratificantes o emocionantes; hemos explorado terrenos desconocidos y nos hemos enriquecido al hacerlo.

IV. CONTENIDOS PARA LA FORMACION DOCENTE

1. Enfoque para la formación y actualización docente

1.1. Respecto de los contenidos

La formación de los docentes es uno de los aspectos fundamentales en la implementación de un "cambio" dentro del sistema educativo; ellos son los "instrumentos" de que dispone la sociedad para realizar efectivamente una transformación y lograr los objetivos deseados. En el área de la matemática en particular, aunque no es exclusivo de la misma, la transformación no es un simple cambio de contenidos; es fundamentalmente un cambio de actitud. Queremos enseñar procedimientos más que contenidos. Hay que lograr la incorporación de los procesos típicos del pensamiento matemático, sin olvidar por ello los conceptos involucrados. El acento está puesto en los procedimientos, en el aprendizaje activo, en la resolución de problemas, en la relación de la matemática con las demás disciplinas y con el mundo real. Los docentes encargados de llevar adelante esta transformación del sistema educativo deben transformar primero sus propios conocimientos.

De poco sirve dar una larga lista de los contenidos que creemos que los alumnos deben adquirir, si los docentes encargados de transmitirlos conciben a la matemática como un conjunto estanco de contenidos formales; las ideas de dinamismo y movimiento subyacentes a los contenidos y procedimientos nunca llegarán a los alumnos, no importa cuán grande sea el esfuerzo que el docente realice. Por ello los procesos de formación y actualización docente, en lo que a la capacitación académica se refiere, deben ser interpretados como una relación dinámica entre contenidos, procedimientos y actitudes.

Respecto de los contenidos, éstos deben ir al menos un paso más allá de los que el docente necesita transmitir, para permitirle dejar las puertas abiertas a los conocimientos posteriores, directamente involucrados con los que transmite.

Respecto de los procedimientos, el mismo docente debe recorrerlos en todas las direcciones y sentidos que sus conocimientos le permitan. En tal sentido es importante que el docente conozca aplicaciones diversas de los temas a tratar, así como los desarrollos históricos que dieron lugar a los mismos.

Respecto de las actitudes es fundamental que el docente tenga incorporada la matemática como un conocimiento propio, atractivo, dinámico y humano. Debe ser capaz de "redescubrir" a cada paso lo que ya conoce y ser consciente de que siempre puede descubrirse más; no sólo en cuanto a nuevos conocimientos sino también a nuevas aplicaciones, nuevas formas de interpretación, otras motivaciones. Debe comprometerse en una búsqueda constante, dentro de su propio conocimiento y desde la incorporación de nuevos conocimientos, para lograr una formación y transformación activas de aquello que quiere enseñar.

En cuanto a la actitud del docente frente a los alumnos, coincidimos con M. de Guzmán (1992) en que: "Es necesario romper, con todos los medios, la idea preconcebida, y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, proveniente con probabilidad de bloqueos iniciales en la niñez de muchos, de que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil." Creemos que es posible y necesario fomentar el gusto por la matemática, como una actividad intelectual accesible y atrayente, que se traduce, cuando es guiada adecuadamente, en un saber hacer autónomo. En este contexto incide fuertemente la presentación de los temas, que creemos será tanto más adecuada cuanto mayor acceso tenga el docente a la historia de la matemática, a la modelización y aplicaciones de la misma, a la actividad lúdica y su relación con la matemática, así como a una bibliografía amplia, que debe incluir las investigaciones que se realizan en didáctica de la matemática.

En este sentido, la propuesta de contenidos para los procesos de formación y actualización docente deberían incluir en cada caso, además de los temas específicos de la matemática, una larga lista de contenidos de disciplinas afines, aplicaciones, procesos históricos, métodos didácticos, etc. Aquí optamos por restringirnos a la enumeración de los contenidos específicos de la matemática, dejando aclarado que creemos fundamental para la formación docente de todos los niveles al menos una asignatura que abarque temas de historia de la matemática, una sobre aplicaciones, que podría ser una introducción a la física, y un trabajo intenso en y sobre la resolución de problemas.

1.2. Respecto de los cursos de actualización

En un sistema educativo dinámico, los cursos de actualización docente toman un papel preponderante para el logro de los objetivos del sistema. En este caso particular, donde además el sistema está comenzando a implementarse, y dado que los cambios en la educación matemática son profundos, creemos que deben distinguirse dos etapas respecto de los cursos de actualización docente

Una primera etapa, en la que el acento debe ponerse en la transformación de la actitud de los docentes respecto de la matemática, porque son los docentes actuales los que deben llevar a cabo los grandes cambios. La tarea de transformar los propios conocimientos es ardua y exige un compromiso fuerte y un trabajo intenso. No basta con estar de acuerdo en que las cosas deben hacerse de determinada manera, uno debe aprender a hacerlas de esa manera. Debemos dotar a los docentes de todas las herramientas posibles para llevar adelante el trabajo, y debemos enseñarles a trabajar con ellas. Por ello en esta primer etapa, los cursos de actualización deben estar dirigidos a trabajar sobre los procedimientos y cómo manejarlos con los alumnos: el trabajo procedimental llevará al docente a la transformación que necesita realizar.

En una segunda etapa, en la que ya los docentes habrán adquirido los conocimientos de manera dinámica, se pondrá el acento en los nuevos contenidos, en coincidencia con los cambios de currícula, sin olvidar en ningún momento las ideas de dinamismo y movimiento subyacentes.

2. Propuesta de contenidos a contemplar en los procesos de transformación y actualización docente

Hemos tomado aquí los doce bloques de contenidos propuestos para los alumnos en los diferentes niveles y los hemos distribuido por ciclo, según los contenidos que consideramos que los docentes de los ciclos respectivos deben manejar.

Para no hacer repetitiva la enumeración damos por entendido que los docentes de un determinado ciclo deben manejar, además de los contenidos específicamente indicados, todos los enumerados en los ciclos anteriores. El número de bloque sólo indica la referencia a los parágrafos respectivos de propuesta de Contenidos Básicos Comunes y no tiene ningún ordenamiento propio.

PRIMER CICLO DE LA EGB

Bloque 1:

- Números naturales. Operaciones fundamentales (suma, resta multiplicación y división). Expresión en bases distintas de 10.

- Números enteros. Operaciones. Divisibilidad. Números primos. Descomposición en factores primos. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Sistemas de coordenadas enteras.
- Números racionales. Operaciones. Representación gráfica sobre la recta. Ordenación. Representación de puntos en el plano. Sistemas de coordenadas racionales.

Bloque 2:

- Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. Representación gráfica.
- Proporcionalidad directa e inversa. Regla de tres simple.
- Porcentaje. Interés simple.

Bloque 3:

- Definiciones y construcciones fundamentales de la geometría plana con regla y compás. Figuras en el plano. Congruencia. Paralelismo y perpendicularidad.
- Longitudes. Sistema métrico decimal. Areas planas. Teorema de Pitágoras.
- Nociones intuitivas sobre paralelismo y perpendicularidad en el espacio. Diedros y poliedros, prismas y pirámides, cuerpos redondos.

Bloque 4:

- Vectores (suma de vectores y producto por un número real).

Bloque 5:

- Noción de número combinatorio.
- Poblaciones y subpoblaciones. Muestras, tratamiento numérico y presentación de datos estadísticos. Gráficos.
- Experimentos aleatorios, espacios muestrales finitos, probabilidades elementales.

Bloque 6:

- Nociones básicas y nomenclatura sobre conjuntos. Lógica proposicional.

SEGUNDO CICLO DE LA EGB

Bloque 1:

- Expresiones racionales finitas y periódicas. Conversión de fracciones a decimales y viceversa. Potencias y raíces. Notación científica.

- Aproximación al valor de la raíz cuadrada por encaje de intervalos. Irracionalidad de la raíz cuadrada de 2. Noción de número real. Representación de números reales.

Bloque 2:

- Descuentos. Reparto proporcional.
- Funciones numéricas. Función lineal.
- Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

Bloque 3:

- Propiedades de los triángulos y paralelogramos. Mediatrices, bisectrices, medianas.
- Polígonos. Circunferencias.
- Volumen de la esfera. Volúmenes de cuerpos elementales.
- Proyecciones y perspectiva.

Bloque 4:

- Transformaciones en el plano (traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias y semejanzas).

Bloque 6:

- Números complejos.

TERCER CICLO DE LA EGB

Bloque 2:

- Algoritmos. Nociones de programación lineal.
- Función cuadrática.

Bloque 3:

- Angulos inscriptos y semiinscriptos. Resolución de problemas con regla y compás. Teorema de Thales. Longitud de la circunferencia y área del círculo.
- Ecuaciones de la recta y de la circunferencia.

Bloque 4:

- Funciones trigonométricas. Resolución de triángulos rectángulos.

Bloque 6:

- Función exponencial y logarítmica.
- Cónicas (elipse, hipérbola, parábola) y cuádricas.

Bloque 7:

- Los conjuntos numéricos y sus operaciones (naturales, enteros, racionales, reales).
- Sistemas finitos de números (por ej., la aritmética del reloj y de la semana).
- Inducción matemática.
- Divisibilidad. Algoritmo de Euclides.
- Densidad de los racionales.
- Noción de cálculo aproximado. Errores de truncación y redondeo.
- Funciones exponencial y logarítmica.

Bloque 8:

- Convexidad en el plano.
- Aplicaciones inyectivas, suryectivas y biyectivas. Aplicación inversa.
- Relaciones de equivalencia y de orden.
- Polinomios. Operaciones. Raíces. Teorema del resto.
- Sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticas.
- Combinatoria. Permutaciones. Combinaciones. Factorial. Fórmula del binomio.

Bloque 9:

- Distancia. Grupo de transformaciones en el plano. Cónicas como lugar geométrico.
- La geometría y el arte. Razón áurea. Cubrimiento del plano por polígonos convexos congruentes.

Bloque 11:

- Espacios de probabilidad discretos. Eventos, probabilidad condicional.

Bloque 12:

- Introducción a la lógica. Proposiciones y tablas de verdad. Implicación y equivalencia lógica. Cuantificadores. Funciones proposicionales. Sistemas axiomáticos.

EDUCACION POLIMODAL

Bloque 7:

- Concepto de límite de una sucesión de números reales (ejemplos ilustrativos). Sucesiones monótonas.

Bloque 8:

- Estructuras algebraicas. Grupo. Anillo. Cuerpo. Espacio vectorial. Producto escalar. Geometría en coordenadas.
- Números complejos. Operaciones. Forma polar. Raíces enésimas.
- Matrices.

Bloque 9:

- Trigonometría. Teoremas del seno y del coseno.
- Concepto geométrico de vector.
- Ortogonalidad y proyecciones.
- Sólidos de revolución.

Bloque 10:

- Límite y continuidad.
- La derivada. Interpretación geométrica y cálculos. Extremos. Problemas de optimización.
- Integración. Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes.

Bloque 11:

- Distribuciones de probabilidad. Valores medios. Varianza. Leyes de los grandes números.
- Esperanza matemática. Juegos. Tablas de números al azar.
- Frecuencia. Gráficos de barras, circulares, histogramas.
- Introducción a la inferencia estadística. Intervalos de confianza.

Bloque 12:

- Elementos de la teoría de grafos: caminos y circuitos. Isomorfismo de grafos. Arboles.

Además:

- Determinantes. Matrices y transformaciones lineales. Espacios vectoriales con producto interno. Producto vectorial. Geometría euclídea. Geometrías no euclidianas.
- Estudio de funciones. Integrales dobles, integrales de línea y de superficie y aplicaciones a la física (trabajo, por ej.).

V. CONSIDERACIONES FINALES

La matemática, en cuanto objeto de la educación, es una ciencia dinámica, fuertemente involucrada en los procesos históricos, ligada al desarrollo tecnológico y social, a la capacidad de decisión, a la realidad circundante. Si no logramos formar individuos libres, capaces de utilizar sus conocimientos en la búsqueda de la verdad y el bien social, si el resultado de nuestra educación es una especie de "máquina" repleta de conocimientos en espera de ser utilizados al recibir un mandato específico o por asociaciones débiles y estáticas, habremos fracasado. La educación matemática es uno de los pilares en la formación del intelecto del individuo y por ello la matemática que se enseñe, cuándo se la enseñe y cómo se la enseñe incidirán en la actitud posterior del individuo no sólo frente a la matemática, sino frente a la vida.

Los conceptos claros, la creatividad, la dinámica interna, la diversidad de aplicaciones, el valor de un razonamiento correcto, la capacidad de previsión, la posibilidad de decidir apoyada en cálculos concretos o estimaciones apropiadas, la modelización de situaciones reales, la resolución de problemas concretos, la toma de conciencia de las propias capacidades, el descubrimiento de nuevas ideas o procedimientos son algunas de las cosas que pueden enseñarse con y desde la matemática y deberían formar parte de los ojetivos específicos de los docentes que la enseñan. Formar individuos con conocimientos sólidos, cuya relación con la matemática sea abierta, dinámica, humana y en continuo movimiento (dentro de la matemática misma y sus aplicaciones y entre ella y el individuo) es el objetivo. Lograr modificar nuestras propias actitudes para lograrlo es el desafío. Es tarea de cada docente tomar el desafío como propio. Esperamos que este documento les allane un poco el camino para afrontarlo exitosamente.

BIBLIOGRAFIA

Referencias

DE GUZMÁN, Miguel, 1992, "Tendencias innovadoras en Educación Matemática", Olimpíada Matemática Argentina.

SANTALÓ, Luis A., 1986, *La enseñanza de la matemática en la escuela media*, Editorial Docencia.

SCHOENFELD, Alan H., 1991, "Ideas y tendencias en la resolución de problemas", Olimpíada Matemática Argentina.

Bibliografía recomendada para los docentes

ADAIME, D., BERGADÁ MUJICA, E., CASTELLANO, G., SOLANAS DE CURSI, T., FORTÍN, M., GARCÍA CAMPRA, H. y MUSANTE, M. P., 1993, en : colección "Así Aprendemos", *Matemática, Libro del Maestro*, 1 al 7, Buenos Aires, Edicial.

DE GUZMÁN, M. y COLERA J., 1991, *Matemáticas I - C.O.U.*, Barcelona, Anaya.

DE GUZMÁN, M., 1992, *op. cit.*, y su bibliografía.

GELFAND, I. M., 1961, "Lectures on Linear Algebra", Interscience N.Y.

HARDY, G. H., 1958, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press.

KUROSCH, 1977, *Curso de álgebra superior*, Moscú, Mir.

SANTALÓ, L. A., 1993, "La Geometría en la Formación de Profesores", Red Olímpica.

SANTALÓ, Luis, 1986, *op. cit.*, y su bibliografía. En particular el apéndice II contiene datos y direcciones sobre institutos y publicaciones dedicados a la investigación en didáctica de la matemática.

Bibliografía para utilizar en el aula

ADAIME, D., BERGADÁ MUJICA, E., CASTELLANO, G., SOLANAS DE CURSI, T., FORTÍN, M., García Campra, H. y Musante, M. P., 1993, en: colección "Así aprendemos", *Matemática, Libro del Alumno*, 1 a 7, Buenos Aires, Edicial.

De Guzmán, M., Colera, J. y Salvador, A., 1987, *Bachillerato 1*, *Bachillerato 2*, *Bachillerato 3*, Barcelona, Anaya.

Santaló, L. A., 1993, *Matemática 1. Iniciación a la creatividad* y *Matemática 2. Iniciación a la creatividad*, Buenos Aires, Kapelusz.

ANEXO
NOMINA DE COLEGAS CONSULTADOS

SANTALÓ, Luis, Prof. UBA. Especialización Matemática.
LAROTONDA, A., Prof. UBA. Especialización Matemática
TORANZOS, F., Prof. UBA. Especialización Matemática.
SEGOVIA, C., Prof. UBA. Especialización Matemática.
GUASO, M.J., Profesor en Instituto del Profesorado. Especialización Matemática.
CUENYA, H. Prof. Univesidad Nacional de Río Cuarto. Especialización Matemática.
DE GUZMÁN, M., Prof. Universidad de Madrid. Especialización Matemática.
DALMASSO, J.C., Docente de Matemática de Nivel Medio.

Irma Elena Saiz

Licenciada en Matemática, Universidad Nacional del Sur; *Master* en Matemática Educativa, Centro de Estudios Avanzados e Investigaciones del Instituto Politécnico Nacional, México. Asesora Pedagógica en el área de currículum del Consejo General de Educación de la Provincia de Corrientes.

SUMARIO

I. INTRODUCCION

La matemática ha ocupado tradicionalmente un lugar importante y sin cuestionamiento en la enseñanza elemental y media, tanto en sus aspectos formativo e informativo como en su dimensión social. Cómo enseñarla, cómo aprenderla, que temas nuevos deberían aparecer, cuáles ya no deberían estar, forman el conjunto de aspectos que es necesario discutir en momentos en que, como ahora en nuestro país, se plantea una reforma estructural y profunda de educación.

Se incluye en este documento una propuesta de Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica (EGB), agrupados en cinco bloques de contenidos tanto conceptuales como procedimentales.

Se incorporan en ellos algunos temas que, a nivel nacional, aparecen por primera vez en los diseños curriculares, como el cálculo aproximado, el uso de calculadoras o la inclusión de la enseñanza de la estadística y la probabilidad, en particular para el Segundo y Tercer Ciclo.

Un quinto bloque no tradicional hace aparecer a la resolución de problemas como un tema especial, revalorizando y asignando a los problemas un papel diferente al habitual como aplicación de los conceptos aprendidos. Dado que no existe bibliografía abundante ni formación específica de los docentes sobre este tema se ha incluido un documento específico sobre resolución de problemas.

Se incluye también una propuesta de contenidos para la formación docente de los futuros docentes de la EGB.

Quiero expresar mi agradecimiento a la licenciada Cecilia Parra y a la profesora Ana M. Arqué de Belcastro por la permanente disposición a todas las discusiones y al intercambio de ideas que tanto han enriquecido mi trabajo profesional de los últimos años.

II. PROPUESTA DE CONTENIDOS BASICOS COMUNES DE LA EDUCACION GENERAL BASICA

Para facilitar la lectura de los Contenidos Básicos Comunes se han diseñado bloques agrupando contenidos cuya lógica está determinada por el desarrollo interno de cada área de la matemática.

Dicha agrupación de los temas en bloques no constituye una secuenciación de los temas; a partir de estos bloques los docentes deberán organizar los distintos contenidos en unidades con significación propia, para cada uno de los ciclos de la escolaridad obligatoria.

Los bloques de contenidos retenidos en este propuesta son los siguientes y corresponden a los grandes ejes de la matemática:

1. Números y operaciones.
2. Medición.
3. Estructuración del espacio y geometría.
4. Tratamiento de la información.
5. Resolución de problemas.

En cada bloque se incluyen contenidos conceptuales y procedimentales, incorporando, además, un apartado de procedimientos relacionados con la resolución de problemas.

No se incluyen contenidos conceptuales para la resolución de problemas ya que estos se relacionan con los distintos contenidos de los demás bloques.

BLOQUE 1: NUMEROS Y OPERACIONES

Contenidos conceptuales

- Números naturales, enteros, fraccionarios y decimales: usos de los distintos números para contar, medir, ordenar, codificar, expresar cantidades, particiones o relaciones entre magnitudes; sistemas de numeración, desarrollo histórico; relaciones entre los números: orden, divisibilidad, múltiplos y divisores; representación en la recta.
- Operaciones de suma, resta, multiplicación y decimales: significados de las operaciones; dominio de utilización; algoritmos; propiedades.
- Proporcionalidad simple, directa e inversa: magnitudes proporcionales; dominio de utilización; porcentaje, escalas, velocidad.
- Potenciación y radicación: potencias y raíces de números racionales con exponentes enteros; escritura científica.
- Cálculo numérico: exacto y aproximado; mental, escrito o con calculadora; estimación, margen de error.
- Ecuaciones e inecuaciones lineales: planteo, interpretación y resolución; resolución de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas; conocimiento de sistemas con mayor cantidad de ecuaciones.

Contenidos procedimentales

- Identificación, clasificación y equivalencia de los distintos campos numéricos.
- Representación matemática de una situación utilizando diferentes lenguajes (gráfico, numérico, geométrico y algebraico) y estableciendo relaciones entre ellos.
- Representación de distintos tipos de números en la recta.
- Utilización de traslaciones en la recta para la interpretación de la adición y de la sustracción de números fraccionarios.
- Utilización de los algoritmos convencionales de las 4 operaciones con números naturales, fracciones y decimales sencillos y números enteros.
- Selección y utilización de los procedimientos más adecuados en el tratamiento de situaciones de proporcionalidad: regla de tres, manejo de tablas, propiedades, representación gráfica, etc.
- Utilización de la potenciación y radicación en la resolución de problemas.
- Utilización de la notación científica para describir fenómenos con números muy grandes o muy pequeños.
- Comparación de números a través de su expresión en notación científica.

- Decisión y selección del tipo y del recurso de cálculo más apropiados a la situación planteada: exacto o aproximado, mental, escrito, con calculadora, etc.
- Elaboración y utilización de estrategias personales de cálculo, utilizando en particular las relaciones y regularidades de los números y las propiedades de las operaciones.
- Evaluación del orden de magnitud del resultado de un cálculo simple.
- Aproximación de números o de resultados según la precisión que se desee.
- Traducción de las condiciones de un fenómeno en términos de ecuaciones e inecuaciones.
- Anticipación de soluciones de ecuaciones e inecuaciones lineales a partir del análisis de tablas y de gráficos.

BLOQUE 2: MEDICION

Contenidos conceptuales

- Medición de magnitudes: unidades de medida.
- Sistemas de medidas: sistema métrico decimal; medida del tiempo; medidas angulares.
- Estimación de medidas: margen de error.
- Perímetro, área y volumen de formas geométricas: relación de áreas con perímetro y volúmenes; cálculo aproximado, equivalencia de figuras y fórmulas; teorema de Pitágoras.
- Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente de un ángulo; principales relaciones entre las razones trigonométricas
- Instrumentos de medida: precisión; error de medición.

Contenidos procedimentales

- Selección de las unidades adecuadas a los distintos objetos que se deseen medir.
- Utilización del vocabulario adecuado para interpretar y comunicar informaciones sobre el tamaño de los objetos.
- Expresión de las medidas efectuadas, en las unidades y con la precisión adecuada a la situación y al instrumento utilizado.
- Utilización de las equivalencias entre unidades más usuales para facilitar cálculos.
- Estimación de medidas de objetos, tiempos y distancias.

- Acotación de errores cometidos al estimar, medir o al aproximar una magnitud.
- Medición del área o volumen de figuras y cuerpos utilizando distintas técnicas como la descomposición en otros más simples, la comparación de pesos y la aplicación de fórmulas.
- Determinación de razones trigonométricas para la medida indirecta de longitudes y ángulos.
- Representación a escala para medir magnitudes físicas.
- Utilización precisa de los instrumentos habituales de medida.

BLOQUE 3: ESTRUCTURACION DEL ESPACIO Y GEOMETRIA

Contenidos conceptuales

- Puntos y sistemas de referencia: ubicación en una línea (origen y distancia); ubicación en un plano (coordenadas cartesianas, ángulo y distancia al origen); ubicación en el espacio (coordenadas cartesianas).
- Formas planas y espaciales: líneas, figuras y cuerpos: clasificación; representación; descripción; construcción; reproducción.
- Semejanza de figuras planas: representación a escala; caracterización de la semejanza; teorema de Thales.
- Movimientos en el plano: simetrías, rotaciones y traslaciones; propiedades.

Contenidos procedimentales

- Utilización de sistemas de referencia para situar y localizar objetos.
- Descripción, identificación, reproducción y construcción de formas geométricas: líneas, figuras y cuerpos.
- Justificación de procedimientos de construcción de figuras.
- Comprensión y utilización del vocabulario apropiado para interpretar o comunicar informaciones relativas a situaciones, propiedades y configuraciones geométricas.
- Construcción y análisis de formas complejas obtenidas a partir de otras formas más simples.
- Representación del espacio real por medio de mapas, planos o esquemas.
- Utilización precisa de los instrumentos geométricos usuales para el trazado de formas geométricas.

- Construcción o análisis de formas complejas obtenidas a partir de otras formas más simples.
- Agrandamiento y reducción de figuras planas.
- Identificación de la semejanza entre figuras planas.
- Aplicación del teorema de Thales para resolver problemas.
- Representación plana de cuerpos geométricos sencillos.
- Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades geométricas de los cuerpos y de relaciones entre ellos.
- Utilización de las reglas del debate matemático (contraejemplos, argumentación, pruebas, etc.) como introducción al razonamiento deductivo.
- Utilización de las propiedades de las transformaciones para clasificar, generar y analizar figuras.

BLOQUE 4: TRATAMIENTO DE LA INFORMACION

Contenidos conceptuales

- Representación de la información:
  Gráficos: características; tipos de gráficos (gráficos de barras, circulares, en ejes cartesianos, etc.); aspectos globales de los gráficos (continuidad, crecimiento, valores extremos, tendencia, periodicidad).
  Tablas: tablas de frecuencia (frecuencia absoluta, relativa y porcentual); tablas de proporcionalidad.
- Parámetros estadísticos: medidas de tendencia central (moda, media y mediana); desvío estándar.
- Funciones: descripción, traducción en tablas, gráficos o en fórmulas; funciones de proporcionalidad directa e inversa; funciones lineales; funciones cuadráticas y cúbicas.
- Fenómenos aleatorios: asignación de una probabilidad a un suceso; definición clásica de probabilidad; conceptos de población y muestra; variables aleatorias; frecuencia y probabilidad de un suceso; sucesos dependientes e independientes; probabilidad condicional.
- Combinatoria: problemas de conteo; diagramas de árbol.

Contenidos procedimentales

- Planteamiento y resolución de problemas sencillos en los que se requiera recolectar y registrar información, seleccionando el gráfico más adecuado.

- Representación de información en tablas de frecuencia.
- Lectura y elaboración de tablas y gráficos construidas a partir de situaciones extraídas de la geometría, física, datos sociales, etc.
- Interpretación de la información contenida en ilustraciones, registros, gráficos, tickets, facturas, etc. presente en medios de comunicación y en la vida diaria.
- Interpretación de índices, tasas, razones y proporciones como resúmenes de un conjunto de datos.
- Análisis de las tendencias en gráficas: promedios, valor más frecuente, mediana, dispersión, etc.
- Selección de los parámetros estadísticos más apropiados para la representación de una distribución estadística.
- Modelización de fenómenos a través de funciones lineales y otros tipos de funciones: cuadráticas (relaciones entre área y perímetro) cúbicas (cálculos de volumen), exponenciales (descripción de poblaciones).
- Traducciones recíprocas entre distintos lenguajes (verbal, gráfico, algebraico, por tablas, etc.).
- Elaboración de gráficos de variación proporcional o no proporcional.
- Planificación y realización de experiencias para la estimación experimental de la probabilidad.
- Elaboración de distintas representaciones (tablas, diagramas de árbol, etc.) para problemas de combinatoria.
- Elaboración de procedimientos tendientes a descubrir la estructura multiplicativa de problemas de combinatoria.
- Elaboración de procedimientos que garanticen la exhaustividad en el tratamiento de problemas de numeración.
- Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.
- Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.
- Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentales en distintos contextos.

BLOQUE 5: CONTENIDOS PROCEDIMENTALES PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

- Reconocimiento, selección, organización y tratamiento de los datos pertinentes para la resolución de un problema.

- Formulación, comprobación o modificación de conjeturas a partir de los datos del problema o de los resultados intermedios.
- Formulación, elaboración y comunicación del proceso seguido en la resolución de problemas con interpretación de los distintos cálculos realizados.
- Argumentación de la validez de una solución.
- Elaboración de estrategias en verdaderos problemas de investigación de cuestionamientos a partir de un conjunto de datos.

III. RESOLUCION DE PROBLEMAS

1. Introducción

Cuando se habla de aprendizaje de la matemática, frecuentemente aparece la capacidad de resolver problemas como uno de los contenidos más importantes a lograr.

Las formulaciones sobre el papel que desempeña la resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática varían: se habla de motivación, de aplicación, de contacto con la realidad, etc.

Dichas formulaciones han variado, además, con el paso del tiempo, pero esto es más complicado de determinar. La falta de un currículum básico centralizado, de indicaciones o sugerencias metodológicas a los docentes, de publicaciones actualizadas y aun la coexistencia de publicaciones de muy diferentes épocas y de muy distintos enfoques, dificulta la tarea de seguir la línea o líneas de cambio sufridas por este tema a lo largo de los años en nuestro país.

También es posible analizar cómo la reforma llamada de la "matemática moderna", si bien criticaba los, "problemas tipo" de la enseñanza tradicional al estar sumamente centrada en las estructuras matemáticas, provocó en cierta medida la desaparición de los problemas concretos en la enseñanza y la reducción de su papel a ilustrar las nociones abordadas por medio del uso de esquemas. El trabajo del alumno se reducía con frecuencia a la búsqueda del buen esquema a utilizar.

Es posible, sin embargo, distinguir entre un problema que aparece como la ocasión de aplicar los conocimientos recientemente adquiridos, ocasión de, por ejemplo, utilizar las operaciones en situaciones muy simples (el caso típico del problema "de suma", "de división", etc.) y el problema en el que se pretende que los alumnos descubran una nueva noción matemática como respuesta a la situación planteada.

2. El problema en la historia y en la investigación matemática

Históricamente se conoce que los conceptos matemáticos han surgido como respuestas a problemas, tanto problemas de la vida cotidiana (delimitación de terrenos, etc.) como problemas ligados a otras ciencias (física, astronomía, etc.) o aun problemas internos de la ciencia matemática (ampliación de campos numéricos, organización de conocimientos, etc.).

En algunos casos, estos problemas, fueron reformulados y resueltos parcialmente a partir de los conocimientos preexistentes o provocaron, en otros, la construcción de nuevos recursos matemáticos para su resolución total o para la demostración de la falsedad de su enunciado.

El investigador en matemática continúa esa tarea. Su actividad consiste en resolver problemas aún no resueltos. Emite hipótesis, busca caminos alternativos, abandona aquellos que no lo conducen a los resultados deseados, etc.

Pero para poder comunicarlo a la comunidad científica a la que pertenece

> debe, ante todo, determinar lo que piensa haber encontrado, [...] suprimir todas las reflexiones inútiles, las huellas de los errores cometidos y de los caminos erráticos. Se deben ocultar las razones que lo condujeron en esa dirección y las condiciones personales que lo han llevado al éxito.[1]

Los resultados encontrados por un investigador son presentados a la comunidad dentro de las teorías más generales en que continúan siendo válidos, produciendo así una despersonalización, descontextualización y destemporalización del saber.

3. El problema en la enseñanza

> El trabajo del profesor, es en cierta medida inverso al trabajo del investigador, debe producir una recontextualización y una repersonalización de los conocimientos. Estos se van a convertir en el conocimiento de un alumno, es decir, una respuesta bastante natural a condiciones relativamente particulares. [...] Entonces el profesor debe simular en su clase una microsociedad científica si quiere que los conocimientos sean formas económicas para plantear buenas preguntas y zanjar debates, si quiere que los lenguajes sean instrumentos para controlar situaciones de formulación y que las demostraciones sean pruebas.[...] [2]

---

[1] Brousseau, Guy, 1986, *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.

[2] Ibídem.

> Los alumnos deben a su vez redescontextualizar y redespersonalizar su saber y esto de modo tal que puedan identificar su producción con el saber que se desarrolla en la comunidad científica y cultural de su época.

La enseñanza de la matemática reduce, en general, su presentación a las teorías producidas tal como han sido expuestas, escondiendo las condiciones de producción, los problemas o cuestiones que les dieron origen, impidiendo, por un lado, conocer cuál es la verdadera actividad de un matemático y, por otro, mostrando una matemática acabada, bellamente ordenada y reducida a teorías y definiciones.

Los problemas han desempeñado (y siguen haciéndolo) papeles diferentes. Por ejemplo, el tan conocido *problema tipo*: aparece en los libros de texto al final de los capítulos y en las clases después de aquellas donde se presentó y ejercitó un tema nuevo. El problema como ejercitación, síntesis y control de las adquisiciones interviene al fin del aprendizaje, como ocasión para aplicar conocimientos estudiados.

Frecuentemente, si los problemas están "en la unidad de", los alumnos saben que tienen que utilizar los conceptos que acaban de aprender. Si no es así, buscan si ya han resuelto problemas del mismo tipo. Se trata, en general, de identificar cuál es la operación a realizar con los datos presentes en el enunciado, y así muchas veces vinculan los datos numéricos con alguna operación a partir de indicadores del texto sin ningún control sobre su *significado.*

Por ejemplo, en una clase de 3° grado (principios de año) la maestra plantea el siguiente problema:

El domingo, en el asado se repartieron 122 empanadas de carne y 130 empanadas de jamón y queso. ¿Cuántas empanadas se repartieron en total?

Los alumnos, agrupados en equipos de 4 o 5 inician la resolución del problema. Murmullos de duda, malestar y discusiones no tardan en hacerse sentir. La maestra, sorprendida por la dificultad de resolución de un problema en principio simple, de aplicación directa de una operación aprendida desde hace tiempo, escucha los comentarios. Estos podrían resumirse en el siguiente: "*Habría que dividir..., pero aún no sabemos dividir por 3 cifras entonces restemos*". La palabra "repartir" asociada con la operación dividir, y el estereotipo de usar palabras determinadas impide el reconocimiento de una situación tratable fácilmente con ayuda de la suma: ¿En total? Se suma. ¿Cuánto a cada uno? Se divide...

Junto con los métodos activos o la corriente identificada como Escuela Nueva aparece el *problema como motivación*, abandonando las últimas páginas de cada unidad para ubicarse en las primeras. ¿Su objetivo?: introducir la matemática a partir de situaciones cotidianas, de experiencias vividas o al menos que "hablen" de la vida diaria, esto permitiría en principio transformarla de fría o distante en cercana y práctica.

La constatación es frecuente: incluir enunciados con problemáticas cotidianas no garantiza la motivación de los alumnos por resolverlos, sucediendo, además, que los problemas de la realidad son, muchas veces, demasiado complejos para ser abordados como tales en la enseñanza y demasiado determinados por lo ocasional para que sea tenida en cuenta la coherencia de los conocimientos.

4. Un nuevo enfoque sobre el papel de los problemas

A partir de los años setenta y, en particular, debido al fracaso de la matemática moderna, aparece la necesidad de repensar el aprendizaje de la matemática y en particular el papel que desempeña en ese aprendizaje la resolución de problemas.

Los diagnósticos y evaluaciones que se realizan informan que los alumnos poseen conocimientos matemáticos, pero éstos no se encuentran disponibles ni pueden ser movilizados para ser utilizados en las situaciones que así lo requieren.

No se ha logrado que los aprendizajes tengan sentido para los alumnos, que los conocimientos se construyan con *significado.*

Una parte importante del significado de los conocimientos está dada por reconocer cuáles son las situaciones en que tales conocimientos son útiles, pero también por reconocer cuáles son los límites de su utilización, cuáles son las relaciones que mantiene con otros conceptos, cuáles son las formas de "hablar" sobre ellos, cuáles son sus propiedades, cuáles son sus formas de representación, cuáles son los errores que evita, cuáles son las formas de validación de las respuestas.

> Saber matemática no es sólo aprender las definiciones y los teoremas, para reconocer después la ocasión de utilizarlos y aplicarlos; sabemos bien que hacer matemática implica ocuparse de los problemas. Sólo hacemos matemática cuando nos ocupamos de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar las buenas preguntas es tan importante como encontrar las respuestas. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que actúe, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que las intercambie con otros, que reconozca aquellas que son conformes a la cultura, que tome aquellas que le son útiles, etc.[3]

Hacer matemática es buscar soluciones a problemas, pero también ponerse de acuerdo sobre esas soluciones y para eso es necesario probar, argumentar, dis-

[3] Brousseau, Guy, ob. cit.

cutir, verificar y hacer verificar, tratar de convencer, involucrarse en la búsqueda de la verdad de las afirmaciones que se realizan, no aceptar las de otros *a priori*, etc.

> En matemática, la construcción de significados se hace a menudo a través de acciones con una finalidad, es decir, acciones que permitan alcanzar un objetivo, resolver un problema, responder a una pregunta, ante una situación de la que el sujeto ha logrado apropiarse. Son las acciones del sujeto en situaciones determinadas las que dan sentido a los conocimientos; éstos funcionan primero como recursos adecuados más o menos implícitos antes de adquirir un verdadero *status*, antes de poder ser identificados, nombrados y reutilizados conscientemente en otros contextos.[4]

En resumen, nos planteamos una concepción del aprendizaje que busca la construcción de los conocimientos a través de la resolución de problemas.

5. ¿Qué es un problema?

Distintos autores señalan definiciones de "problema", teniendo en cuenta distintos aspectos, pero podemos en principio avanzar una definición diciendo que hablaremos de situación problemática cuando el alumno se enfrenta a una cuestión para la cual no tiene una respuesta inmediata, cuando no encuentra inmediatamente un camino que relacione los datos del problema con la respuesta que finalmente quiere proveer.

Responder "¿cuánto es 7 x 8?" puede ser un simple ejercicio o recuperación en la memoria para niños de 3° o 4° grado, pero constituir un problema para alumnos de 2° grado que recién se inician en el trabajo con la multiplicación.

Jean Brun precisa: "Desde una perspectiva psicológica, un problema se define generalmente como una situación inicial con una finalidad a lograr, que demanda a un sujeto elaborar una serie de acciones u operaciones para lograrlo. Sólo se habla de problema, dentro de una situación sujeto/situación, donde la solución no está disponible de entrada, pero es posible construirla".[5]

---

[4] Ermel, 1993, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, Cours élémentaire INRP, Hatier, París.

[5] Brun, Jean, 1993, "La résolution de problèmes arithmétiques: bilan et perspectives", en: *Math-Ecole* N° 141, 1990, Suiza. Citado en ERMEL: *Apprentissages numériques*, CE1 Hatier.

Tipos de problemas

Todos los problemas no son iguales; podemos en principio señalar tres grandes tipos: a) los que permiten construir y dar significado a nuevos recursos matemáticos; b) los que permiten la reinversión de los conocimientos en otros contextos, favoreciendo la resignificación, incluyendo también los que permiten controlar su adquisición; y finalmente, c) los que podríamos llamar de investigación, donde la búsqueda es más libre y no se conoce *a priori* un procedimiento estándar de resolución.

Roland Charnay señala una tipología de problemas, que amplía la anterior, caracterizada por los objetivos de aprendizaje que se persiguen:

- los problemas destinados a involucrar a los alumnos en la construcción de nuevos conocimientos (a menudo llamadas situaciones-problema);
- los problemas destinados a permitir a los alumnos la utilización de los conocimientos ya estudiados (a menudo llamados problemas de reinversión);
- los problemas destinados a permitir a los alumnos la extensión del campo de utilización de una noción ya estudiada (llamados a veces problemas de transferencia, con toda la ambigüedad de esta palabra);
- los problemas más complejos en los cuales los alumnos deben utilizar conjuntamente varias categorías de conocimientos (a veces llamados problemas de integración o de síntesis);
- los problemas cuyo objetivo es permitir al docente y a los alumnos conocer el estado de conocimientos (problemas de evaluación);
- los problemas destinados a poner al alumno en situación de investigación y por lo tanto de desarrollar competencias más metodológicas (problemas abiertos).[6]

El autor señala las limitaciones de esta tipología; no todos los problemas quedan representados en esta clasificación, pero además un mismo problema, según el momento en que sea presentado puede pertenecer a una u otra de las categorías.

Un gran desafío para los docentes es mantener un buen equilibrio en la presentación de los diferentes tipos de problemas y asegurar a la vez, a lo largo de la escolaridad, el logro de un aprendizaje significativo de la matemática.

---

[6] Charnay, Roland, 1993, "Problème ouvert, problème pour chercher", en: *Grand N*, N° 51, IREM de Grenoble, Francia.

Para asegurar ciertas relaciones del alumno con el conocimiento y llevar a cabo un trabajo como el que se propone, es necesario seleccionar las situaciones problemáticas con ciertas condiciones. Regine Douady enuncia algunas de ellas:

a) El enunciado tiene sentido en el campo de conocimientos del alumno.

b) El alumno debe poder considerar lo que puede ser una respuesta al problema. Esto es independiente de su capacidad para concebir una estrategia de respuesta o la validación de una propuesta.

c) Teniendo en cuenta sus conocimientos, el alumno puede iniciar un procedimiento de resolución. Pero la respuesta no es evidente, esto quiere decir que no puede proveer una respuesta completa sin desarrollar una argumentación que lo conduce a preguntas que no sabe responder inmediatamente.

d) El problema es rico, esto quiere decir que la red de conceptos involucrados es bastante importante, pero no demasiado para que el alumno pueda abarcar su complejidad, si no solo, por lo menos en equipo o en el seno del equipo o de la clase.

e) El problema es abierto por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantearse o por la diversidad de estrategias que puede poner en acción.

f) El conocimiento que se desea lograr con el aprendizaje es el recurso científico para responder eficazmente al problema. Dicho de otro modo, es un recurso adaptado a la situación. [7]

Las nociones de complejidad y apertura son relativas al alumno. Un problema es rico y abierto para una clase si lo es para la mayoría de los alumnos (por ejemplo, para el 80% de ellos).

Además, las condiciones c), d) y e) impiden que el problema sea recortado en preguntas demasiado pequeñas.

Veamos un ejemplo de situación problemática, diseñada para alumnos de 1° grado: "Los peces sin peceras".

A principio de 1° grado (mes de abril o mayo) con el objetivo general de presentar a los alumnos situaciones que les permitan tomar conciencia de la utilidad de los números para resolver ciertas situaciones; y los objetivos específicos de comprender y utilizar los condicionantes inherentes a diferentes situaciones de partición: ¿es necesario repartir todos los objetos o no?, ¿es necesario dejar lo menos posible?, ¿hay que repartir lo mismo a cada uno?, etc., planteamos a los alumnos la siguiente situación:

[7] Douady, Regine, "Rapport enseignement apprentissage: dialectiques outil-objet, jeux de cadres", en: *Cahier de didactique des mathématiques*, N°3, IREM, Université Paris VII.

> Nos regalaron 15 pececitos, hay que comprarles peceras y ponerlos en ellas como Uds. quieran. Pero son muy delicados, no pueden estar ni 5 ni más de 5 en la misma pecera, porque se pueden lastimar. Cada equipo tiene que pensar y decidir cómo los van a poner y cuando terminen, un compañero de cada equipo va a pasar al frente a contar cómo hicieron.

Podemos analizar en esta situación las condiciones que deben cumplir los problemas, enunciadas anteriormente.[8]

Este problema tiene sentido para los niños tanto a nivel de la comprensión de la situación que se plantea como a nivel de los conocimientos solicitados, en este caso la enumeración de los peces.

Todos pueden iniciar una resolución del problema recurriendo, por ejemplo, a la representación gráfica de la situación. Sin embargo, respetar la condición de no colocar 5 ni más de 5 peces en cada pecera, provocará dificultades. Algunos niños (o grupos) sólo lograrán la solución del problema asignando una pecera a cada pez y otros, únicamente después de la presentación y discusión de los trabajos de sus compañeros.

Es en la confrontación donde las estrategias personales o grupales pueden ser puestas a prueba al ser presentadas y discutidas con sus compañeros en el grupo. Los alumnos mismos pueden validar las distintas respuestas dado que se tratará de verificar si se respetó el total de los peces involucrados y si se cumplió con la condición de no colocar en cada pecera ni 5 ni más de 5 peces.

Según los resultados obtenidos en la primera presentación del problema, la maestra plantea una nueva situación con otro número total de peces y un número diferente de peces permitido por pecera o bien pasa a la siguiente situación:

> Volvemos al problema de los peces; queremos comprar las peceras, pero no tantas; quisiéramos tratar de comprar la menor cantidad de peceras posible porque están muy caras. Recuerden que no puede haber ni 5 ni más de 5 pececitos en una misma pecera.

Esta situación plantea a los alumnos una nueva restricción que los obliga a modificar su respuesta anterior, haciéndolos evolucionar en sus estrategias primitivas.

Nuevamente la puesta en común es importante para hacer emerger el cumplimiento de las diferentes restricciones (ni 5 ni más de 5 en cada pecera, la menor can-

---

[8] Un análisis similar en otra situación de aprendizaje puede consultarse en: "Los niños, los maestros y los números", C. Parra e I. Saiz, Diseño Curricular, Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires, 1992.

tidad de peceras, etc.), poner a punto si es necesario, la utilización de escrituras aditivas (según la época del año) y listar los diferentes procedimientos utilizados.

Finalmente, es necesario tanto en esta actividad como en otras, retomarla en forma individual, no para que el docente pueda conocer si aprendió sino para permitir a cada alumno volver a reflexionar sobre la situación y utilizar los aportes de la puesta en común de las producciones de los diferentes equipos.

La confrontación entre los resultados producidos y la respuesta a la pregunta que plantea el problema puede generar ajustes, cuestionamiento sobre el método utilizado y búsqueda por otro camino. Esta confrontación necesaria entre los resultados parciales o finales obtenidos por el alumno y las condiciones del problema es un objetivo de aprendizaje de los primeros grados: ser capaz de evaluar el resultado de su acción.

Al seleccionar las situaciones, destinadas a los distintos ciclos, es preciso analizar y tener presente el conjunto más amplio posible de problemas diferentes que tal concepto permite tratar.

Veamos por ejemplo, los siguientes problemas:

Se quiere repartir 22 caramelos a 4 niños, dándole a cada uno el mayor número posible, ¿cuántos caramelos le tocan a cada uno?

Se dispone de 22 caramelos y se entregan 4 caramelos a cada niño, ¿para cuántos niños alcanza?

Los 22 kg de carne comprados para el campamento se quieren repartir entre 4 mochilas para ser transportados. ¿Cuántos kg deberán ser colocados en cada una?

En el juego de cartas se deben repartir las 22 cartas entre los 4 jugadores, dándole a todos la misma cantidad y el mayor número de cartas posible, ¿cuántas cartas quedan sin repartir?

Los cuatro enunciados involucran la operación 22/4, sin embargo, esto no es evidente para alumnos que intentan comprender el significado de la división.

Cada uno de los enunciados se refiere a distintos aspectos de un mismo concepto y no pueden plantearse como meras aplicaciones del concepto de división ya aprendido.

Podemos decir que es importante seleccionar para los alumnos distintas situaciones que se relacionen con un mismo concepto. Por supuesto, algunas de ellas no podrán ser planteadas en el mismo nivel escolar. Por ejemplo, el problema 3 no podrá ser planteado simultáneamente al problema 1, ya que corresponden a momentos distintos del aprendizaje, a distintos grados o ciclos de la EGB.

Además, es necesario propiciar que los alumnos establezcan relaciones entre las distintas clases de problemas de manera de entender por qué se resuelven con una misma operación.

6. ¿Se puede aprender a resolver problemas? Consideraciones didácticas

No es necesario revisar los resultados de la evaluación nacional de 7º grado para conocer el bajo rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas. Los docentes comparten las preocupaciones relativas a las dificultades de los alumnos en la actividad de resolución de problemas. Por supuesto estos resultados no son ajenos al papel que desempeña la resolución de problemas en el aprendizaje para cada docente y a los recursos utilizados para lograrlo.

¿Qué piensan los alumnos sobre la resolución de problemas? Se conocen algunas investigaciones sobre este tema y sus conclusiones. Los alumnos piensan que: a) en un problema hay que usar todos los datos; b) todos los problemas tienen una única solución; c) siempre existe "la buena" manera de resolverlo, que coincide con la corrección que se realiza a nivel colectivo; d) sólo el maestro puede decidir si está bien o no la resolución de un problema; e) pero, además, el docente está obligado a pronunciarse sobre la validez del procedimiento y del resultado.

Estas ideas son las que han ido construyendo en el contacto con los problemas que le plantea la escuela y con un trabajo didáctico particular, que las refuerza. Por ejemplo, la resolución de problemas "interesantes" (no reducidos a la aplicación de la operación que se acaba de enseñar) no aparece en los primeros grados, considerando que los problemas más complejos sólo podrán ser abordados una vez que se dominen todas las competencias simples y por la importancia acordada a los ejercicios repetitivos. Además, se encuentra con frecuencia un predominio de actividades que se apoyan sobre simples constataciones (perceptivas o manipulativas) seguidas por un trabajo de codificación numérica en detrimento de reales situaciones de anticipación.

Lo mencionado anteriormente es reiterativo en los primeros grados, pero también en otros cuando se introducen temas por medio del uso de material: por ejemplo, las fracciones en grados medios, donde las actividades se reducen a constataciones con material concreto que se traduce posteriormente en escrituras numéricas.

La selección de los problemas que se presenten, donde los alumnos incluso pequeños, tengan que enfrentarse a situaciones relativamente complejas, los objetivos que se planteen y el trabajo específico que se realice en el aula, irán conformando una concepción diferente de qué es resolver un problema, de cómo, en suma, perciben los alumnos a la matemática, a la vez que se despierta el deseo de investigar, de desarrollar sus capacidades de resolución y la confianza en sus propios recursos.

6.1. Capacidades a desarrollar

El equipo ERMEL (Equipo de investigación sobre la enseñanza de la Matemática) perteneciente al Instituto Nacional de Investigación Pedagógica de Francia, señala una lista de capacidades necesarias para la resolución de problemas:

- saber qué es lo que se busca, ser capaz de representarse y apropiarse la situación;
- ser capaz de concentrarse el tiempo suficiente y también de descentrarse, cambiar su punto de vista;
- ser capaz de movilizar en el buen momento los saberes y los saber-hacer anteriores;
- ser capaz de guardar la traza de sus ensayos, de organizarse, de planificar, de gestionar la información que se dispone, ya sea dada o que sea necesario buscarla o construirla;
- atreverse a actuar, a arriesgarse, a equivocarse;
- poder formular, comunicar sus hipótesis, sus certidumbres, sus estrategias;
- ser capaz de controlar el estado de su procedimiento, medir la distancia que lo separa de la solución;
- ser capaz de validar, probar, etc.

Estos saberes o saber-hacer no aparecen de un día para el otro, será necesario un largo aprendizaje a veces bastante global y a veces también bastante específico a una u otra de las capacidades.[9]

Para que un alumno se apropie de una situación es necesario que pueda: comprender cuál es la situación que se le plantea, comprender qué es lo que se busca e iniciar procedimientos de resolución cuyos resultados puedan ser evaluados .

Para lograr esto, las situaciones presentadas pueden simplificarse en un principio; por ejemplo, en el caso de los peces sin peceras, no se presenta desde la primera situación la restricción de comprar la menor cantidad de peceras. Además puede organizarse una discusión colectiva donde los alumnos explicitan lo que comprendieron de las preguntas y de las consignas de la situación. El docente puede entonces reformular las condiciones del problema o precisar las consignas, sin inducir a los alumnos a un procedimiento de resolución.

La invención de problemas constituye una buena manera de tomar conciencia de lo que es un problema, de lo que debe incluir, de la necesaria relación que debe existir entre los datos y las preguntas.

[9] INRP, 1986, "Apprentissages à la résolution des problèmes au cours élémentaire", Equipe de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Francia.

Los problemas pueden ser elaborados libremente, con una condición especial (sobre el contexto, sobre la operación, sobre el material, etc.) o a partir de un cálculo dado.

Un enunciado inventado por los alumnos puede dar lugar a diferentes trabajos: resolución del problema por otros, analizar si los datos son posibles o no, reformulación del enunciado o de la pregunta, formulación de otras preguntas, etc.

6.2. Construcción de progresiones

No es suficiente plantear a los alumnos resoluciones esporádicas de problemas ni presentar una o dos situaciones aisladas para constituir condiciones favorables para el aprendizaje.

Es necesario construir progresiones, secuencias de situaciones que permitan a los alumnos una construcción progresiva de procedimientos, dando la ocasión de reutilizarlos o mejorarlos en otras situaciones.

La ejercitación de un tipo de trabajo, de un procedimiento, de una noción, debe contribuir a una "descontextualización" de los conocimientos, es decir, una especie de autonomía de los contextos de origen.

Ya vimos una pequeña secuencia de problemas para realizar en 1° grado que apunta a la construcción de la noción de número; veamos ahora una progresión que permite desarrollar ciertas capacidades metodológicas.

Hemos seleccionado algunos problemas de las "Olimpíadas Ñandú", relacionados con el tema de conteo.

Al plantearlos a alumnos de 4° o 5° grado, quienes se enfrentan por primera vez a tal tipo de situaciones, puede observarse la incapacidad que demuestran para realizar una búsqueda sistemática de los números que verifican las condiciones planteadas.

Por ejemplo, un *primer problema* que puede presentarse es el siguiente:

Al escribir los números capicúa de 3 cifras, ¿cuántas veces se escribe la cifra 5?

Los alumnos utilizan distintos procedimientos para escribir los números que cumplen las condiciones del problema: ser números de 3 cifras, capicúa y escribirse con uno o más 5 entre sus cifras:

a) Escriben números capicúa de 3 cifras que incluyan la cifra 5, sin ninguna organización, 454, 575, etc.

b) Escriben los números siguiendo órdenes parciales: 151, 252, 353, 454, 555, 656, 757, 858, 959, 505, 515, 525, 535, 545, 565, 575, 585, 595.

c) Establecen un orden total: 151, 252, 353, 454, 505, 515, 525, 535, 545, 555, 565, 575, 585, 595, 656, 757, 858, 959.

La confrontación de los distintos procedimientos utilizados, la discusión entre los alumnos sobre la cantidad de números hallados, permite ir construyendo entre todos una metodología de búsqueda exhaustiva de todos los números que verifiquen las condiciones del problema.

Es necesario poder reinvertir sus adquisiciones y comprobar su eficacia en situaciones similares, llamando situación similar a aquella que solicita del alumno las mismas capacidades y no referida necesariamente a los mismos temas. Se trata, en nuestro ejemplo, de presentar situaciones que exijan un análisis de los números que verifican ciertas condiciones y la búsqueda sistemática de números con ciertas condiciones y no específicamente trabajar con números capicúa de 4 cifras en lugar de 3.

Se plantea por lo tanto un *segundo problema*:

¿Cuántos números pares comprendidos entre 1000 y 2000, cuya suma de las 4 cifras sea menor que 6, se pueden escribir?

Un análisis previo a la escritura de los números que cumplen con las condiciones del problema lleva a descartar los números impares y aquellos que incluyan cualquier cifra mayor que 4.

Por lo tanto, los únicos números restantes son los siguientes:

1000	1002	1004	1200	1202
1010	1012		1210	
1020	1022		1220	
1030				
1040				
1100	1102		1300	
1110	1112		1310	
1120				
1130			1400	

Finalmente, el tercer problema permite avanzar aún más, empezando a descubrir la estructura multiplicativa de los problemas de conteo.

¿Cuántos números capicúa de 5 cifras se pueden formar si se quiere que tengan 4 de sus dígitos iguales y el otro diferente?

Problemas del mismo tipo, pero más complejos que exigen el trabajo con criterios de divisibilidad son los siguientes:

¿Entre 10 y 238, cuántos múltiplos comunes a 4 y a 6 hay?

6.3. Gestión y organización de la clase

Como decíamos anteriormente, "hacer matemática" es también discutir las soluciones aportadas por sus pares, ponerse de acuerdo sobre esas soluciones y para eso es necesario probar, argumentar, discutir, verificar y hacer verificar, tratar de convencer, involucrarse en la búsqueda de la verdad de las afirmaciones que se realicen, no aceptar las de otros *a priori*, etc.

Y todo lo anterior plantea una relación diferente de los alumnos con el conocimiento, roles diferentes a los tradicionales de alumnos y docente, tanto en la clase como en la gestión de la verdad, las actitudes, etc.

Una organización de la clase diferente es uno de los aspectos a modificar. Para hablar sobre una *organización posible de la clase* que asegure esos objetivos se presentará una situación planteada por el grupo del IREM de Lyon, Francia, que forma parte de una serie de actividades que apuntan a iniciar progresivamente a los alumnos en el razonamiento deductivo.

Se trata de permitir la apropiación de las reglas del debate matemático que el equipo mencionado enuncia bajo la forma siguiente:[10]

- Un enunciado matemático es verdadero o falso;
- un contraejemplo es suficiente para invalidar un enunciado;
- en matemática, para debatir hay que apoyarse en un cierto número de propiedades o definiciones claramente enunciadas sobre las cuales hay un acuerdo (axiomas);
- en matemática, dar ejemplos que verifiquen un enunciado no es suficiente para probar que es verdadero;
- en matemática, una constatación sobre un dibujo no es suficiente para probar que un enunciado de geometría es verdadero.

Y una de las primeras situaciones que proponen para alumnos de 7° u 8° de la EGB es la siguiente:

¿En la expresión nxn - n + 11, si se reemplaza n por cualquier número entero natural, se obtiene siempre un número que tiene exactamente dos divisores?

[10] Arsac, G. Chapiron y col., 1992, *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses universitaire de Lyon, IREM, Francia.

Son objetivos de esta situación el debate y la institucionalización de dos de las reglas mencionadas anteriormente: un contraejemplo es suficiente para probar que un enunciado matemático es falso y algunos ejemplos, aunque sean numerosos no son suficientes para probar que un enunciado matemático es verdadero.

La clase se organiza siguiendo los pasos:

1°) Lectura del problema y primeros intentos de resolverlo en forma individual.

2°) Resolución en grupo. Esta búsqueda culmina con la producción de un afiche que debe presentar el o los resultados o las ideas del grupo y una explicación para convencer a los otros de la validez de sus resultados.

3°) Debate colectivo sobre los afiches.

4°) Síntesis sobre las reglas del debate y/o sobre la insuficiencia de ciertas pruebas que han sido puestas en evidencia durante el tercer momento.

La búsqueda individual en un *primer momento* permite que cada alumno se apropie de la situación e inicie un procedimiento de resolución. Cuando se organiza el trabajo en grupo, *segundo momento*, los alumnos tienen la posibilidad de discutir sus propuestas, pero, la necesidad de realizar un afiche que presente los resultados del grupo los obliga a comprender las eventuales divergencias, buscar las coincidencias y a formular por escrito sus soluciones.

El debate, *tercer momento* de la clase, constituye un momento fuerte del proceso, ya que se trata de confrontar las respuestas elaboradas por los distintos equipos, discutir y decidir sobre la validez de las afirmaciones.

El orden de discusión de los afiches lo decide el docente en función de lo que quiera que sea debatido. Cada grupo debe tomar conocimiento de lo que realizó el "equipo autor" a partir de lo escrito en el afiche, lo que obliga a una formulación y escritura clara y precisa, sin una explicación previa del grupo emisor.

Y el debate se instaura en la clase, tratando de validar o rechazar los argumentos presentados por los otros equipos.

El docente, al presentar la situación aclara que no será él quien determine la veracidad o falsedad de los enunciados, sino que será la clase quien decidirá a partir de sus propias argumentaciones.

Finalmente, en el momento de síntesis, el docente pone en evidencia ciertas reglas del debate matemático y la insuficiencia de ciertas pruebas pragmáticas dadas por los alumnos.

En la situación presentada, los autores plantean realizar un trabajo individual, *cuarto momento* consistente en: pensar en la solución que cada uno de ellos daría finalmente al problema planteado y redactarla, opinando sobre la primera explicación dada por su grupo.

Como pudo verse en este ejemplo, a lo largo de la secuencia, los alumnos son enfrentados a distintas situaciones. Una primera de *acción*: a partir de sus conocimientos anteriores, de sus experiencias previas, los alumnos imaginan cuál puede ser una posible resolución del problema e intentan producirla o, por lo menos, iniciarla.

El trabajo en equipo los obliga a "hablar", explicitar sus ideas de resolución, pero también a tratar de comprender las de sus compañeros.

Redactar un afiche, comprensible para toda la clase, exige una primera puesta de acuerdo a partir de las eventuales divergencias iniciales, pero también una *formulación* clara y precisa de lo realizado, no sólo de los cálculos efectuados sino también del significado de cada uno de ellos, la explicación de por qué afirmar lo que afirman o negar el enunciado.

En la confrontación entre equipos, deben buscar argumentos para convencer a los demás, ser capaz de descentrarse de su propia investigación, cuestionarse, apreciar los elementos positivos de procedimientos diferentes, *validar* lo que se enuncia, evaluar el grado de generalidad de cada uno, etc.

En el momento de la *institucionalización* se identifican los procedimientos o conocimientos utilizados, construidos o modificados que pasan a constituirse en los conocimientos socialmente establecidos, nombrados convencionalmente, que pasan a formar parte del bagaje de saberes evaluables de los alumnos de ese curso.

Finalmente, en la última fase, los alumnos se enfrentan a un trabajo individual de recapitulación, de decisión personal después del debate sobre los argumentos y de revisión de la primera producción de su equipo.

En los grados inferiores

La actividad descrita en el párrafo anterior corresponde a un trabajo posible de realizar con alumnos del Tercer Ciclo, pero también con alumnos de los primeros grados puede provocarse la necesidad de argumentar a propósito de la validez de una solución.

A fines de 2° grado se organiza una actividad de resolución de problemas.[11] Se trata de problemas que podríamos reconocer como de "multiplicación y de suma".

Cada pareja de alumnos recibe una lista de 4 problemas con la consigna siguiente:

[11] Esta actividad forma parte de una secuencia sobre multiplicación desarrollada para 2° grado por C. Parra e I. Saiz.

Clasificar los siguientes problemas de acuerdo a si es posible resolverlos solamente con sumas o si es posible utilizar una multiplicación. Cada pareja toma sus decisiones y posteriormente las confronta con la otra pareja de su equipo.

Al terminar el trabajo, la maestra solicita las respuestas de cada equipo que vuelca en una tabla de doble entrada, donde se ubican los problemas y los distintos equipos.

En cada casillero, la maestra va colocando la respuesta de los equipos: es de suma (S), de multiplicación (M), o bien, en el caso en que las dos parejas no pudieron llegar a un acuerdo se coloca una C, cuyo significado es: será discutido en la confrontación (C).

Una vez ubicadas las respuestas, los distintos equipos discuten la clasificación efectuada por sus compañeros. A veces es necesario discutir además los resultados, dado que los errores de cálculo aún aparecen con frecuencia especialmente en operaciones que involucren números bastante grandes.

Las C de la tabla son presentadas a toda la clase, que discute y decide sobre la validez de las distintas propuestas.

Algunas de las discusiones originadas por este trabajo se centran en la posibilidad de escrituras más cortas o más rápidas en el caso de la multiplicación, pero no de soluciones más fáciles, dado que, para ellos, al no contar aún con resultados multiplicativos ya disponibles en memoria, la suma continúa siendo más fácil de imaginar y resolver.

6.4. El rol del docente

A lo largo del trabajo se ha ido delineando el rol tan importante que debe jugar el docente en el enfoque que presentamos. Deberá seleccionar, analizar, prever, conducir, alentar, institucionalizar, etc.

Una primera actividad del docente se relaciona con los contenidos retenidos oficialmente para ser enseñados. Corresponde en general a las autoridades educativas decidir cuáles son los contenidos a enseñar en los distintos niveles. Es responsabilidad del docente, sin embargo, la organización interna de los contenidos para desarrollar durante el año; también cae bajo su responsabilidad construir o seleccionar cada situación de aprendizaje y su adaptación al nivel, al momento, a las características de su clase, etc. determinar las diferentes fases del proceso de aprendizaje y prever los procedimientos de los alumnos, pasibles de aparecer ante la situación planteada. Finalmente, la organización temporal de las actividades y las evaluaciones, es decir, la obtención de información sobre el estado de conocimientos de los alumnos.

En términos más específicos, el docente debe asumir diferentes funciones en sus relaciones con los alumnos:

- Ayudar a los alumnos a llevar a cabo y a mejorar sus procedimientos; permitirles apropiarse de los procedimientos de sus compañeros, llevándolos a reformularlos o a hacerlos funcionar por sí mismos.
- Entusiasmarlos, pedirles que actúen, que prueben, que se arriesguen, ayudarlos a organizarse.
- Reformular las consignas, las finalidades a lograr cada vez que los alumnos pierden el rumbo.
- Subrayar las adquisiciones, ayudar a identificarlas, nombrarlas, incluso definirlas, relacionarlas con otros conceptos. Cuando el problema ha sido resuelto, es aún necesario poner en evidencia, con los alumnos, las características importantes de la situación de manera de permitirles reconocer posteriormente las situaciones análogas.
- Precisar lo que falta por adquirir sobre un tema dado y los recursos que serán ofrecidos para lograrlo.[12]

El docente debería lograr que los alumnos comprendan que pueden decidir individualmente la resolución de un problemas, los pasos a seguir, que pueden probar, equivocarse, que cuentan con el tiempo suficiente para ello, que pueden buscar distintos recursos, trabajar sobre su hoja sin preocupaciones por la presentación (habrá un momento específico para la presentación de resoluciones), que se puede borrar, tachar y volver a empezar.

La tarea de organizar adecuadamente las distintas actividades a proponer a sus alumnos, seleccionando problemas adecuados y una dinámica de clase que les brinde la oportunidad de pensar, usar procedimientos propios, con posibilidades de interactuar entre ellos y con una evolución constatada en el tratamiento matemático de los problemas a lo largo de la escolaridad, sin lugar a dudas asegurará el logro de los objetivos propuestos y permitirá revertir paulatinamente el tratamiento que este tema tiene en nuestras escuelas, con miras al tan declamado mejoramiento de la CALIDAD EDUCATIVA.

[12] Ermel, 1991, *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, CE1 Hatier, Francia.

IV. PROPUESTA DE CONTENIDOS PARA LA FORMACION DOCENTE DE LA EGB

1. Introducción

Toda propuesta de cambio educativo debe acompañarse con una formación docente, inicial y continua adecuada y pertinente a los cambios que se quieren lograr.

Hoy día contamos con nuevos objetivos, nuevas teorías, nuevos enfoques, especialmente en el terreno didáctico, que permiten considerar el proceso de enseñanza y aprendizaje desde enfoques más científicos, más globales, pero estos resultados no siempre llegan a los ámbitos de formación.

La formación docente (en particular en el área de matemática) ha sufrido influencias a lo largo de su historia que han producido distintas posturas frente a la pregunta: ¿qué debe saber un docente para enfrentarse con éxito a su tarea de educador?

Una primera postura afirma que conocer en profundidad la disciplina a enseñar y algunos principios pedagógicos generales (aplicables, por otra parte, a cualquier área de conocimiento que se quiera enseñar) es suficiente para definir la enseñanza adecuada de los contenidos matemáticos.

Otra postura agrega al conocimiento matemático un conocimiento suficiente de los aportes de la psicología que permitiría adecuar la enseñanza a los niveles intelectuales de los alumnos.

Y conviviendo con ellas algunas creencias afirman que "maestro se nace, no se aprende" o también que "en realidad se aprende haciendo, el maestro aprende realmente cuando se encuentra dentro de la escuela, enseñando a alumnos".

Nunca se ha puesto en duda que es indispensable saber matemática para poder enseñarla, pero sí se discute si la práctica de la enseñanza vuelve inútil la formación inicial o si la formación puede reducirse a las dos componente actuales: una puramente matemática y la otra puramente pedagógica o profesional.

La primera postura (basta saber matemática) ha mostrado sus límites de distintos modos:

- por un lado, no aparecen correlaciones evidentes entre el conocimiento matemático adquirido y la capacidad de organizar eficazmente una enseñanza de la matemática en las clases,

- por otro lado, deja una gran responsabilidad a los futuros maestros y sin herramientas ante un desafío profesional relativo a un fenómeno considerado científicamente complejo.[13]

No es suficiente tener una buena teoría matemática para transmitir los conceptos y las técnicas a los alumnos. Enseñar un contenido matemático requiere un análisis didáctico del mismo y esto supone tanto manejo experto del conocimiento como manejo experto de las condiciones de su apropiación en contexto escolar.

Tampoco es suficiente tener un buen conocimiento del desarrollo del niño, del adolescente y de los procesos de adquisición para deducir una buena enseñanza. Salvo excepción, la psicología no ha estudiado la adquisición de los conceptos matemáticos propiamente dichos. En general, está centrada en el estudio de los procesos generales o de los estadios generales del pensamiento, aportando así conocimientos útiles pero insuficientes para el uso que desearían hacer los docentes.

En suma, una lección de matemática no puede ser concebida únicamente como la exposición de un capítulo producido en condiciones que estarían determinadas por reglas metodológicas y de psicología elemental.

Los conceptos matemáticos enseñados, y en particular la significación de esas nociones para los alumnos, se parecen bastante poco a los conceptos de los matemáticos y esta transposición didáctica es inevitable. El análisis epistemológico permite tomar la distancia que existe entre el "saber experto" y el "saber enseñado", dado que los objetos de enseñanza no son copias simplificadas pero fieles a los objetos de la ciencia. El "saber a enseñar" sufre modificaciones que es necesario conocer y controlar.

Para controlar tal transposición hay que poder actuar sobre las relaciones del alumno con su medio y, al mismo tiempo, poder interpretar sus reacciones, sus comportamientos y sus procedimientos. El conocimiento racional de esos recursos didácticos y de sus efectos sólo puede ser dado por el análisis de las situaciones didácticas.

Una buena formación de los docentes exige conocimientos matemáticos particulares, presentaciones específicas de la matemática que deberán enseñar y también conocimientos de las condiciones didácticas de esas enseñanzas. Por ejemplo, plan-

[13] Parra, Sadovsky y Saiz, 1994, "Matemática y su enseñanza", Documento curricular, Profesorado de Enseñanza Básica, PTFD.

tearse cuáles son los obstáculos epistemológicos de tal concepto y cómo superarlos a partir de la enseñanza o qué "mirar" en la observación de una clase de matemática no puede quedar a cargo de un área pedagógica dado que es un conocimiento específico de didáctica de la matemática.

Exige también la puesta en práctica y la conducción por los maestros de situaciones específicas del concepto que se desea enseñar y del desarrollo de los niños. Si se pretende que los futuros docentes sean capaces de organizar su enseñanza de tal manera que las nociones matemáticas no sean expuestas por el docente sino progresivamente construidas por los alumnos, estas situaciones no pueden ser encontradas por una simple combinación de principios psicopedagógicos y de matemática ni por una simple trasmisión de las prácticas de los maestros.

La formación debería que tener como objetivo capacitar a los alumnos-futuros docentes para:

- concebir o seleccionar actividades adaptadas a la formación de los alumnos para una buena génesis de conceptos matemáticos;
- conducir esas actividades (preparadas o no por aquél que las conduce);
- conocer el resultado de su trabajo a través del de sus alumnos;
- comprender los fenómenos de la enseñanza;
- modificar sus opciones y sus prácticas de forma pertinente para mejorar sus resultados.

Guy Brousseau señala que para realizar esos objetivos es indispensable que se saquen todas las consecuencias posibles de cuatro principios fundamentales:[14]

1) Necesidad de la práctica matemática. Dado que la práctica matemática juega un gran rol en su aprendizaje debe jugar un rol importante en la formación de los docentes. Ninguna formación pedagógica puede corregir un bajo nivel matemático.

2) Existencia de una enseñanza específica. Los alumnos adquirirán cada noción matemática por una adaptación a condiciones específicas que le dan sus significados. Es necesario que los alumnos-maestros aprendan a reproducir las condiciones de las génesis de los conceptos que quieren enseñar y esas condiciones cambian con cada concepto. Esta concepción obliga a reorganizar la totalidad de la enseñanza de la matemática.

3) Importancia de la relación entre la didáctica y la matemática. Este punto de vista pone en evidencia la importancia de los fenómenos de conocimiento en el aprendizaje y en la enseñanza. Permite corregir en parte los efectos nefastos de la independencia actual

[14] Brousseau, Guy, "Suggestions pour un programme de formation initiale des instituteurs en Mathématiques", COPREM, Francia,octubre 1981.

de las formaciones en matemática y en pedagogía, su coordinación es indispensable. Es deseable separar lo menos posible para el futuro docente, el estudio de la disciplina y el de su enseñanza.

4) Necesidad de diferentes tipos de contacto con el sistema educativo. La formación no debe hacerse sin que sean establecidos diferentes tipos de contacto (experimentales, prácticas, etc.) entre el futuro docente y el sistema educativo:

- con sus futuros alumnos considerados como individuos (tests de adquisición, estudio de casos, observación de resolución de problemas, de errores, etc.);
- con las clases, en una relación ya sea de experiencias y de investigaciones personales, lo que es diferente, de observación de experiencias;
- con los docentes en ejercicio en sus clases a los fines de conocer las prácticas profesionales;
- directamente con los problemas de enseñanza en prácticas o residencias.

2. Propuesta de contenidos y de su tratamiento

Es importante tener presente que la formación matemática de los futuros docentes se inscribe, por lo menos para los de Primero y Segundo Ciclo, en una formación que incluye la capacitación para la enseñanza de otras áreas de conocimiento además de la de matemática. Los docentes que se desempeñarán en el Tercer Ciclo únicamente en el área de matemática, recibirán una complemento de formación específica.

Por lo tanto, la formación específica de matemática de los docentes (al menos de Primero y Segundo Ciclo) se reducirá a una o dos materias, lo que, en el mejor de los casos, insumirá 300 horas de clases presenciales.

Esto nos lleva a destacar los temas a tratar y su tratamiento en vistas a formar a los futuros docentes en su tarea específica, confiando en que la formación continua, indispensable para el ejercicio responsable de la profesión, les proporcionará los complementos de formación necesarios.

Como lo plantea el Programa de Transformación de la Formación Docente (PTFD) el trabajo del futuro docente debería abordarse desde tres dimensiones integradas:[15]

- Los contenidos de la enseñanza, que no equivalen a los conocimientos disciplinarios sino que constituyen una construcción didáctica sobre los mismos;

[15] Diker, G., Terigi, F., "Saberes del área de formación especializada", Documento curricular, Formación inicial de profesores de enseñanza básica, PTFD, noviembre 1993.

- las condiciones de su apropiación;
- los criterios para construir estrategias de enseñanza en torno a esos contenidos.

Este enfoque no permitiría el tratamiento exhaustivo de todos los temas de matemática, ni siquiera de aquellos incluidos en los dos primeros ciclos de la EGB. Por lo tanto, deberá recurrirse a una selección de contenidos, de manera tal que el trabajo didáctico y la fundamentación teórica brindada en relación a ellos muestre el que debería realizarse con los otros contenidos en vistas a su enseñanza.

Más que retomar una presentación académica de los contenidos matemáticos, se tratará de organizarlos en lo posible siguiendo un plan que corresponda a la lógica de su enseñanza en los distintos ciclos de la escolaridad obligatoria. Dado que la enseñanza matemática anterior (EGB y Polimodal) de los futuros docentes está en general orientada hacia la adquisición rápida de teorías matemáticas fundamentales es necesario prever la profundización de las preguntas específicas de la enseñanza elemental para que los docentes controlen perfectamente desde el punto de vista teórico el objeto de su enseñanza.

Cada uno de los grandes bloques de temas abordados debería incluir en su tratamiento el análisis didáctico[16] en sus distintas dimensiones, así como el estudio de los programas de enseñanza, el análisis de libros de texto, de observaciones de clase, los procedimientos y errores de los alumnos y las modalidades de evaluación.

Los contenidos propuestos para la formación docente de la EGB son los siguientes:

Campos numéricos: naturales, fracciones, decimales y enteros: funciones de los números, relaciones numéricas, formas de representación, operatoria, cálculo mental.

Nociones espaciales y geometría: líneas, figuras y cuerpos geométricos, clasificación, construcción, representación, movimientos, ubicación espacial, medición, sistemas de medición.

Funciones y ecuaciones: formas de representación, gráficas, características, modelización de fenómenos, función de proporcionalidad directa e inversa, planteo y resolución de ecuaciones, sistemas de ecuaciones.

Nociones estadísticas y probabilísticas: recolección y organización de datos, gráficos, frecuencias, parámetros estadísticos, sucesos, sus características, combinatoria.

---

[16] Parra, Sadovsky y Saiz, 1994, "Matemática y su enseñanza", Documento curricular, Profesorado de Enseñanza Básica, PTFD.

Resolución de problemas: datos pertinentes, formulación de estrategias, conjeturas, elaboración de preguntas, validación de respuestas, demostraciones, lenguaje matemático.

Nociones de computación: algoritmos, utilitarios, etc.

Como ejemplo del tratamiento que proponemos podemos considerar el tema de *decimales*:

- Revisión histórica del concepto, su aparición a partir de las fracciones decimales, aportes de Stevin para su divulgación masiva; su relación con la adquisición escolar.
- Análisis de la enseñanza usual (currículum, observación y análisis de situaciones de enseñanza, libros de textos).
- Precisiones sobre definiciones, propiedades y operaciones, resolución de problemas que involucren el tema: situaciones de aproximación, mediciones, etc.
- Dificultades de los alumnos (dificultades de aprendizaje y dificultades que perduran en distintos niveles de enseñanza (0,3 x 0,3 = 0,9; el sucesor de 0,3 es 0,4; etc.).
- Propuestas de secuencias de enseñanza: preparación de una secuencia en función de los objetivos planteados, análisis *a priori*, observación de la secuencia en las clases, análisis de registros y trabajos de alumnos, determinación de los aprendizajes logrados.

En relación a la actualización de los docentes en servicio, se propone una formación sobre los mismos principios enunciados, seleccionando los contenidos en función de los niveles en los cuales se desarrollará su actividad, organizando su tratamiento según los tiempos que se dediquen a la actualización.

La propuesta de desarrollar una formación matemática y didáctica permitirá a los docentes, por otra parte, comprender los fenómenos que día a día se les plantean en sus salones de clase. Deberá permitir, además, una profundización de los contenidos matemáticos frecuentemente insuficientes, pero también su reorganización en función de la enseñanza.

Para finalizar podemos retomar lo que expresan G. Sacristán y Pérez Gómez:[17]

> No es suficiente la declaración de principios sobre nuevos contenidos sino que debe existir la posibilidad real de que los docentes puedan trasladarlos en alguna forma a la prác-

[17] Sacristán, Pérez Gómez, "El profesorado de la reforma", en: *Cuadernos de Pedagogía*, N° 220.

tica, lo que precisa de una sintonía profesional que, de no existir previamente, hay que propiciar con la formación adecuada, además de garantizar condiciones materiales y la estructura en el puesto de trabajo que hagan factibles las nuevas prácticas.

Las propuestas de cambio, aunque se ciñan a aspectos técnico-pedagógicos de mejora del currículum y de los métodos pedagógicos no pueden lograr sus pretensiones sin cambiar las condiciones profesionales de los docentes. Ignorar esas repercusiones puede llevar a que los buenos principios y orientaciones de partida se pierdan o se agoten en su divulgación, al no plantearse las exigencias reales de medios, condiciones previas, procedimientos necesarios, resistencias y tiempos de realización que requieren cada uno de los principios que con tanta facilidad se expresan y concitan al acuerdo.

BIBLIOGRAFIA

España, Ministerio de Educación y Ciencia.
Currículo oficial, Educación Secundaria Obligatoria, 1992.
Diseño curricular Base, Educación Primaria, 1992.
Proyectos curriculares, Educación Primaria,1993.
Proyectos curriculares, Educación Secundaria Obligatoria.
Francia, Ministerio de la Educación Nacional.
Colegios: programas e instrucciones, 1985.
Los ciclos en la escuela primaria, 1991.
México, Secretaria de Educación Pública.
Educación Básica Primaria, Planes y programas de estudio, 1993.
Educación Básica Secundaria. Planes y programas de estudio, 1993.
Estados Unidos, Consejo Nacional de Profesores de Matemática (NCTM)
Currículo y evaluación para la escuela,1989.
Inglaterra, Matemática de 5 a 16 años, 1985.
Argentina, Programa de matemática para escuelas primarias, 1989, Provincia de Corrientes.
Programa de matemática para escuelas primarias, 1990, Provincia de Río Negro.
Documento de orientación de la Enseñanza de la Matemática en la Escuela Media, 1994, de P. Sadovsky y M. Panizza, Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.

ANEXO
NOMINA DE COLEGAS CONSULTADOS

Sara Alicia FRANCESCONE, Profesora adjunta, Facultad de Ciencias Exactas, Corrientes, Química.

Irene LUCERO, Profesora adjunta, Facultad de Ciencias Exactas, Corrientes, Física.

Daniela PASSICOT, Profesora adjunta, Facultad de Ciencias Exactas, Corrientes, Geometría.

Nelci ACUÑA, Profesora de Matemática, Profesorado de Matemática, Bellavista, Corrientes, Didáctica de la matemática.

Eduardo PORCEL, Profesor titular, Facultad de Ciencias Exactas, Corrientes, Estadística.

Patricia SADOSVSKY, Profesora de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires. Didáctica de la matemática.

Carmen POLACEK, Profesora titular, Departamento de Matemática, Facultad de Humanidades, Universidad Nacional de Misiones. Estadística.

Nancy JAGOU, Silvia JOULIÁ, Natalia LEÓN, Graciela SKLEPEK y Clara VALLEJOS, Equipo de investigación en Didáctica de la Matemática, Profesoras del Departamento de Matemática, Facultad de Humanidades, Universidad Nacional de Misiones. Didáctica de la matemática.

Cecilia PARRA, Licenciada en Ciencias de la Educación, Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires, Didáctica de la matemática.

Producción editorial a cargo de la Dirección General de Investigación y Desarrollo
Coordinación: Unidad Técnica de Publicaciones de la Secretaría de Programación y Evaluación Educativa
Armado: Silvana Ferraro
Diseño de tapa: Juan Pablo Fernández

ESTE LIBRO SE TERMINO DE IMPRIMIR EN AGOSTO DE 1996
CON UNA TIRADA DE 5000 EJEMPLARES EN
TALLERES GRAFICOS RECALI
TEL. 302-1700 PERDRIEL 1534 CAP.FED.

Secretaría de Programación y Evaluación Educativa
Subsecretaría de Programación y Gestión Educativa
Dirección General de Investigación y Desarrollo

fuentes PARA LA TRANSFORMACION CURRICULAR matemática 1996

La colección completa de
Fuentes para la Transformación Curricular
incluye los siguientes tomos:

Lengua

Matemática

Ciencias Naturales

Ciencias Sociales
(2 volúmenes)

Tecnología

Educación Artística y
Educación Física

Formación Etica y Ciudadana

Nivel Inicial

Consulta a la Sociedad
(2 volúmenes)