

Inferir

NIVEL
SECUNDARIO

Presidente de la Nación

Mauricio Macri

Jefe de Gabinete de Ministros

Marcos Peña

Ministro de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología

Alejandro Finocchiaro

Secretario de Gobierno de Cultura

Pablo Avelluto

Secretario de Gobierno de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva

Lino Barañao

**Titular de la Unidad de Coordinación General
del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología**

Manuel Vidal

Secretaria de Innovación y Calidad Educativa

Mercedes Miguel

Inferir

Entre las posibilidades
y su cuantificación

NIVEL
SECUNDARIO

Secretaría de Innovación y Calidad Educativa
Mercedes Miguel

Directora Nacional de Planeamiento de Políticas Educativas
Inés Cruzalegui

Director de Diseño de Aprendizajes
Hugo Labate

Desarrollo de contenido: Equipo del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. **Coordinadora:** Daniela Reyes. **Diseño:** Ricardo Cantoral, Rebeca Flores, Guadalupe Simón, Mario Caballero, Angélica Moreno, Rodolfo Fallas, Cristian Paredes, Moisés Aguilar, Viridiana García. **Revisión:** Luis Cabrera
Revisión técnica: Equipo de Matemática de la Dirección de Diseño de Aprendizajes

Plan Nacional de Lectura y Escritura / Coordinación de Materiales Educativos
Coordinadora: Alicia Serrano

Responsable de publicaciones: Gonzalo Blanco

Documentación gráfica: Javier Rodríguez

Diseño, armado y diagramación: Clara Batista, Juan De Tullio, Alejandra Mosconi, Mario Pesci, Paula Salvatierra, Elizabeth Sánchez

Producción de gráficos: Fabián Ledesma

Fotografía: Gastón Garino, Santiago Radosevich

Edición y corrección: Viviana Herrero, Myriam Ladcani, Daniela Parada, Jennifer Pochne

Ilustraciones: Mariano Pais

Cartografía: José Pais

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología
Inferir: entre las posibilidades y su cuantificación - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019.
48 p.; 28 x 21 cm. - (Plan Nacional Aprender Matemática)

ISBN 978-987-784-012-4

1. Matemática. 2. Didáctica. I. Título.
CDD 510.7

PRESENTACIÓN

Bienvenidos a una etapa de trabajo compartido que nos permitirá abordar la necesidad de construir aprendizajes significativos para la vida de todos y cada uno de nuestros niños, niñas y adolescentes a lo largo de su escolaridad. Porque sabemos que viven en una sociedad donde el conocimiento es y será cada vez más la base sólida sobre la que construirán su futuro.

Nos une el objetivo de lograr que cada estudiante que ingresa al sistema educativo pueda llegar al día de su egreso con los saberes fundamentales para el futuro que lo espera.

El **Plan Nacional Aprender Matemática** es el resultado del consenso y compromiso logrado entre todos los ministros y ministras en el seno del Consejo Federal de Educación. Allí se asumió la responsabilidad de mejorar el nivel de enseñanza y aprendizaje de la matemática a lo largo de todo el país, reconociendo su trascendental importancia en la formación integral de los niños, niñas y jóvenes y en sus oportunidades de acceso a los estudios superiores y al mundo laboral.

Una de las dimensiones más importantes del plan es la formación docente continua orientada a la búsqueda de la transformación y la mejora de la práctica de la enseñanza. Es por ello que este cuadernillo presenta una estrategia alternativa para llevar a las aulas, que los docentes podrán utilizar como insumo para enriquecer su tarea cotidiana.

Este abordaje de la formación continua implica asimismo el acompañamiento en el proceso de mejora, y la elaboración de redes de aprendizaje colaborativo entre los docentes. De este modo, se busca generar un conocimiento sobre la matemática educativa basado en el trabajo entre pares, sostenible y efectivo.

Confiamos en la potencia del hacer juntos y en la visión común de los ministros y ministras que abrieron camino a esta iniciativa. Estamos seguros de que servirá para compartir las buenas prácticas, potenciar las mejores experiencias y asumir la hermosa tarea de ser agentes de cambio en nuestra querida Argentina.

Alejandro Finocchiaro
Ministro de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 7

Probabilidad y permutaciones en el ciclo básico de la Educación Secundaria 7

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 8

Estructura general: ¿qué se propone? 8

FUNDAMENTO TEÓRICO Y EXPLICACIONES DIDÁCTICAS 11

Fundamento teórico de las situaciones de aprendizaje 11

Explicaciones didácticas de las situaciones de aprendizaje 13

Situación de aprendizaje: La incertidumbre en dispositivos aleatorios ... 13

Etapa factual: Tarea 1. ¿Qué podría suceder? 13

Etapa procedimental: Tarea 2. Entre diferentes opciones, elegí la mejor 15

Etapa simbólica: Tarea 3. Toma de decisiones. ¿Qué hacés? 17

Situación de aprendizaje: Los cambios de patentes en la Argentina 18

Etapa factual: Tarea 1. Evolución de las patentes. ¿Qué ha cambiado? 18

Etapa procedimental: Tarea 2. ¿Cada cuánto cambia algún carácter de la patente? ¿Cómo se puede saber? 19

Etapa simbólica: Tarea 3. ¿Cuántos automóviles pueden patentarse? 21

**CÓMO EVALUAR LOS PROCESOS DE PRODUCCIÓN
DE LOS/AS ESTUDIANTES**

23

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

26

ANEXO. LIBRO DE ESTUDIANTES

27

(La paginación de este anexo corresponde a la del libro de estudiantes)

INTRODUCCIÓN

Probabilidad y permutaciones en el ciclo básico de la Educación Secundaria

Durante el ciclo básico de la Educación Secundaria, se busca el acercamiento entre los estudiantes y diversas situaciones de enseñanza que promuevan su participación en problemas relevantes para la vida. Para alcanzar este fin, el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología ha propuesto un conjunto de saberes primordiales: los *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP) que, recientemente, ha complementado con los *Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios* (IPAP), que son las formulaciones que expresan los aprendizajes prioritarios mínimos que se espera que puedan lograr los/as estudiantes. En particular, en este cuadernillo se trabajarán aquellos relativos a la probabilidad y las permutaciones.

NÚCLEOS DE APRENDIZAJES PRIORITARIOS (NAP) El reconocimiento y uso de la probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas que requieran:	A Ñ O	INDICADORES DE PROGRESIÓN DE LOS APRENDIZAJES PRIORITARIOS (IPAP)
Comparar las probabilidades de diferentes sucesos incluyendo casos que involucren un conteo ordenado sin necesidad de usar fórmulas.	1º / 2º	Determinar la frecuencia relativa de un suceso mediante la experimentación real y compararla con la probabilidad teórica (como uno de los sentidos de la fracción).

Para que los/as estudiantes reconozcan la funcionalidad y la transversalidad de la matemática para el desarrollo de argumentos y la toma de decisiones, se precisa que el significado del conocimiento matemático refiera al valor de uso (Cantoral, 2013). Sobre la base de esta afirmación se sustenta la reflexión sobre los objetos matemáticos puestos a discusión en esta interacción.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Estructura general: ¿qué se propone?

El aprendizaje del estudiante, desde el punto de vista socioepistemológico (Cantoral, 2013), es el producto emergente de una dialéctica de construcción social del conocimiento, que parte de lo factual, articula con lo procedimental y se consolida en el nivel simbólico. Es decir, todo objeto matemático tiene un origen y una significación amplia que se apoya en prácticas, cada vez más complejas y estructuradas.

Sobre la base de la investigación, se propone un material para la construcción de conocimientos específicos. Se vivencia, *in situ*, la propuesta didáctica con el fin de identificar posibles respuestas y hacer explícitos los aspectos de la resignificación progresiva, la racionalidad contextualizada, el relativismo epistemológico y la funcionalidad del conocimiento.

El objetivo es desarrollar situaciones de aprendizaje acercándonos a un contexto situacional real (no ficticio fuera del contexto de los estudiantes) y a un contexto de significancia basado en una evolución pragmática, es decir, aprovechar prácticas del actuar de las personas que permitan significar, mediante el uso, la noción que nos ocupa: la probabilidad clásica y las permutaciones. Para ello, se considera la importancia de las prácticas socialmente compartidas como ordenar, contar, medir, comparar, decidir, en el uso de la probabilidad y las permutaciones, con el fin de acompañar la construcción del objeto matemático, superando la mecanización de aquellos contenidos previos que se consideran para abordar un tema.

La propuesta, durante los encuentros, será la de organizar el conocimiento en espiral, es decir, desde la anidación de prácticas –a partir de las acciones (el hacer) y la organización de acciones a nivel de actividad, hasta lograr el estadio simbólico–, partiendo del entorno de quien aprende. El diseño de las situaciones de aprendizaje considera las siguientes directrices, según la situación de aprendizaje.

Para la situación de aprendizaje “La incertidumbre en dispositivos aleatorios” se considera:

- Promover el desarrollo del lenguaje y el tratamiento de la incertidumbre, en términos cualitativos y cuantitativos, a partir de prácticas de conteo, comparación, estimación y medición para inferir qué podría suceder.

- El tratamiento de los elementos implicados en el cálculo de la probabilidad clásica: ¿cuál es el resultado de interés?, ¿cuántas posibilidades tiene el resultado de interés?, ¿cuáles son los resultados posibles?, ¿cuál es el número total de posibilidades?

Para la situación de aprendizaje “Los cambios de patentes en la Argentina” se considera:

- El tratamiento de los componentes implicados en el cálculo de permutaciones a través de la comparación en un sentido global y otra puntual: ¿cuántos elementos?, ¿qué tipo de elementos?, ¿cuáles y cuántas opciones?, ¿cuál es el papel del orden?
- La determinación del número total de posibilidades que genera la combinación de caracteres como parte de una toma de decisiones para anticipar hechos.

Mediante estas directrices se pretende significar el cálculo de la probabilidad, es decir, dar sentido a la relación parte-todo, a través del análisis de los resultados posibles y los resultados favorables. En el caso de las permutaciones, se pretende reconocer la naturaleza de los elementos implicados en el cálculo del número total de posibilidades que puede generar una combinación de caracteres.

A continuación, se presentan las intenciones de las tres etapas que constituyen la propuesta de cada situación de aprendizaje y, específicamente, los elementos principales de cada tarea.

→ **Etapas factuales**

En esta etapa, la primera situación pretende abrir un momento para entender la cuantificación de la incertidumbre en términos cualitativos, mediante el uso de un lenguaje coloquial o común en el juego, con dispositivos aleatorios. Para ello, las primeras tareas se centran en reconocer, en diferentes ruletas, qué es más probable, qué es igual de probable, qué es menos probable y de qué depende, para luego, en el momento de cierre de la etapa, construir dispositivos con condiciones específicas.

La segunda situación tiene como propósito describir las características globales y puntuales de un artefacto conformado por caracteres alfanuméricos. Las primeras tareas promueven la comparación de modelos de patentes, para identificar qué es lo que cambia, las implicaciones del cambio y con ello, establecer criterios para categorizar patentes en el modelo.

→ Etapa procedimental

En la primera situación se busca que la idea de proporcionalidad, que está inmersa en la probabilidad, emerja como una forma de medición de la incertidumbre, presente en el estudio de la ocurrencia de sucesos específicos. En las tareas propuestas, la comparación –qué comparo y cómo– entra en juego para establecer qué color de ficha es más, igual o menos probable, y en qué urna. El hecho de que el número de fichas de las urnas no sea el mismo, permite la construcción de criterios para la toma de decisiones: no basta considerar la cantidad, sino que es necesario saber sobre la base de qué cantidad la estoy comparando, es decir, es necesaria la relación entre ambas.

La segunda situación concierne a la generación de una estrategia para conocer el número total de posibilidades que puede generar una combinación de caracteres alfanuméricos. En esta etapa se presenta una evolución sobre la generación de estas estrategias. Primeramente, se describen las posibilidades poniendo en juego la idea de conteo y orden de los caracteres. Posteriormente, se enfoca en identificar el número total de posibilidades, analizando el cambio a través de lo que sucede si algunos caracteres quedan fijos y otros varían. Finalmente, se reconoce la estrategia que permite el cálculo de la cantidad de posibilidades.

→ Etapa simbólica

En la fase final, la primera situación pretende analizar los efectos en la probabilidad que generan las acciones en el cambio de los componentes de la urna y, mediante el cálculo de la probabilidad, establecer relaciones entre sucesos, cuya probabilidad es la misma.

La segunda situación pone en juego el número de caracteres, las posibilidades de cada carácter y el orden para la cuantificación del número de posibilidades totales y la descripción de posibilidades específicas asociadas a condiciones dadas.

Debido a que las tareas planteadas en las Situaciones de Aprendizaje promueven, por una parte, el conteo de las diferentes posibilidades que puede generar un artefacto y, por otra, la medición de la incertidumbre asociada a la ocurrencia de sucesos de interés, se desarrollan aspectos de la estadística y la probabilidad de los *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios* (ME, 2011) y los *Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios* (ME, 2018) propuestos por el Ministerio de Educación.

FUNDAMENTO TEÓRICO Y EXPLICACIONES DIDÁCTICAS

Fundamento teórico de las situaciones de aprendizaje

Hoy día, todo ciudadano requiere el desarrollo de habilidades, capacidades para analizar información de cualquier índole sobre sucesos que ocurren a su alrededor y que comúnmente involucran incertidumbre. Por ejemplo, la adquisición de un seguro médico, la inversión en un banco, la compra de artículos en oferta, son algunas de las situaciones en contextos de incertidumbre que demandan de la toma de una decisión, y por lo tanto justifican la importancia del desarrollo del pensamiento matemático entre la población.

Respecto del trabajo con la probabilidad, Carranza y Fuentealba (2010) destacan que el tratamiento de este conocimiento se ha centrado más en una visión operatoria y se ha dejado de lado lo referente al significado. De esta manera, se está limitando la enseñanza a la determinación de un simple número, no dejando ver su verdadera función como herramienta para la toma de decisiones en escenarios de incertidumbre, siendo el momento de justificación de una decisión, el escenario para dar significado al valor de la probabilidad calculada.

De acuerdo con Ruiz (2010) la probabilidad clásica se caracteriza por:

[...] la probabilidad de un suceso como [razón] entre el número de casos favorables y el total de casos posibles, siempre que se cumplan dos hipótesis: todos los sucesos elementales han de ser igualmente favorables y el número total de casos favorables ha de ser finito (p. 17).

En este contexto, la herramienta para la cuantificación de la incertidumbre –relación entre casos favorables y casos totales– se usa solo en aquellas situaciones que verifiquen dichas características, de manera que, si la herramienta pudiera ser sencilla, el campo de fenómenos para su uso es limitado, puesto que debe garantizarse la hipótesis de equiprobabilidad, elemento que está presente en los juegos de azar.

Se considera entonces un escenario que cumpla con las características de este enfoque de probabilidad (clásico) para propiciar en el diseño de situación, una aproximación intuitiva de la probabilidad, haciendo uso del lenguaje de certidumbre e incertidumbre asociado a expresiones como seguro, probable, posible, imposible. Y luego, mediante las prácticas de conteo y comparación, entre otras, hacer progresar estas ideas cualitativas a una medición cuantitativa mediante la noción de proporcionalidad.

En la situación de aprendizaje de probabilidad estas ideas se encuentran inmersas, en primer lugar, en el análisis de dispositivos aleatorios, desde una perspectiva geométrica a partir de la idea de área. Luego, se propone un nuevo escenario que promueva el “¿qué comparo?” y el “¿cómo lo comparo?” para establecer formas de cuantificación de la ocurrencia de un mismo suceso en diferentes experimentos, haciendo uso de la noción de proporcionalidad, es decir, la construcción de una medida de la incertidumbre –la probabilidad–.

Sobre la combinatoria puede decirse que es un contenido que presenta bastante dificultad para estudiantes de diferentes niveles educativos (Roa, 2000).

Conforme a lo que señala Kaput (1970, citado en Fuentes y Roa, 2014), la importancia del conocimiento sobre combinatoria es que permite la descripción de un conjunto de posibilidades y la enumeración de casos, ideas que luego pueden progresar y ponerse en juego en la resolución de problemas de probabilidad.

Para la construcción del diseño de permutaciones partimos de que la distinción principal entre la combinación y la permutación involucra la noción de orden. El reconocimiento de esta noción se logra a partir de dos tipos de comparaciones sobre los elementos que conforman una configuración, una en sentido global y otra en lo puntal. Veamos, por ejemplo, cómo las siguientes patentes en lo global mantienen la característica similar, el número de caracteres alfanuméricos (siete caracteres, tres números y cuatro letras) y en lo puntal, se especifican las diferencias: en la primera la configuración es dos letras-tres números-dos letras, y en la segunda es tres números-cuatro letras. Así, la pregunta “¿podría una patente de Paraguay coincidir con una de la Argentina?”, pone en juego la idea de orden.



En síntesis, la base de la conceptualización del ordenamiento es la comparación: una comparación global donde se conserva algo y otra comparación puntal donde se distingue algo.

Como consecuencia de haber involucrado el orden, es posible, en primera instancia, describir las posibilidades que cumplen con las características del artefacto y, posteriormente, realizar un conteo. Para contar, en el caso de las permutaciones, es necesario el tránsito del reconocimiento de las posibilidades en cada caso a la certeza de que es la multiplicación la operación que las considera a todas (Roa, 2010). En la situación de aprendizaje estas ideas fueron abordadas mediante la dualidad “¿qué varía? y ¿qué se mantiene?”, es decir, ¿cuántas posibilidades se tiene al mantener todos los elementos fijos y el conteo de posibilidades cuando todos los elementos varían a través de reconocer las posibilidades que se tienen cuando elementos se mantienen y otros varían?

Los elementos antes mencionados, ¿qué comparo?, ¿cómo comparo?, ¿qué cambia?, ¿qué se mantiene?, son preguntas directrices de las situaciones de aprendizaje.

Explicaciones didácticas de las situaciones de aprendizaje

A continuación, se hace una descripción de la intencionalidad de las diferentes etapas de las situaciones de aprendizaje, cuyos objetivos son:

Para la primera situación, significar el cálculo de la probabilidad, es decir, dar sentido a la relación parte-todo mediante el análisis de los resultados posibles y los resultados favorables, reconociendo las posibilidades y cuantificándolas con relación a la totalidad.

Para la segunda situación, se pretende reconocer la naturaleza de los elementos implicados en el cálculo del número total de posibilidades que puede generar una permutación de caracteres de una configuración.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: LA INCERTIDUMBRE EN DISPOSITIVOS ALEATORIOS

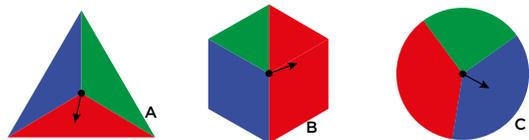
→ Etapa factual

Tarea 1. ¿Qué podría suceder?

MOMENTO 1

Intención. En este momento se pretende analizar los sectores en cada ruleta para establecer el resultado cuya medición de la incertidumbre corresponde al dado. Cada ítem (a-e) está asociado a un tipo de medición cualitativa de la incertidumbre. Se parte de verbalizaciones que pueden ser comunes en lo cotidiano para hablar de la ocurrencia de sucesos inciertos. Desde una perspectiva geométrica-visual se pretende establecer asociaciones como lo más probable con el sector de mayor área respecto al todo o a la conjunción de área.

1. En tu carpeta, completá los siguientes enunciados indicando lo que puede pasar si girás la flecha de las siguientes ruletas:



- a) Al girar la flecha de cada ruleta es seguro que: la flecha en la ruleta **A** se detenga en alguna región; la flecha en la ruleta **B** se detenga en la zona verde, roja o azul; la flecha en la ruleta **C** se detenga y ocupe parte de la región roja, verde o azul.
- b) Al girar la flecha de cada ruleta es poco probable que:
- c) Al girar la flecha de cada ruleta es muy probable que:
- d) Al girar la flecha de cada ruleta es igual de probable que:
- e) Al girar la flecha de cada ruleta es imposible que:

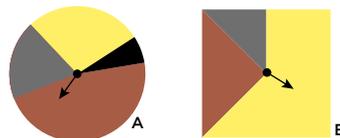
MOMENTO 2

Intención. Se continúa con un análisis geométrico-visual para analizar nuevos dispositivos aleatorios (ruletas). El ítem a) se centra en la descripción de los resultados posibles en cada ruleta, es decir, reconocer y explicitar las diferentes secciones en las que puede detenerse la flecha. El ítem b) pretende dar sentido al análisis de la probabilidad, pues permite tomar decisiones fundamentadas. Los ítems c)-f) tienen como objetivo la identificación del resultado más probable, menos probable y la medición cualitativa de la ocurrencia de un resultado de interés. En particular, el ítem f) trata con la probabilidad nula.

MOMENTO 3

Intención. El momento 3 propicia un proceso inverso con lo realizado desde el comienzo. En los momentos 1 y 2 se parte de los dispositivos y se analiza cuán probable son ciertos resultados. Ahora, se proponen ciertas condiciones y se pregunta por la configuración que debe tener el dispositivo para obtener determinados resultados deseados. De esta manera se pretende hacer explícito el papel del área como una forma de cuantificar la ocurrencia de un suceso o resultado.

2. Considera las siguientes ruletas y analiza las preguntas propuestas:



- a) ¿Cuáles son los resultados posibles en cada ruleta al girar la flecha?
- b) Si en ambas ruletas se entrega un premio cuando la flecha se detiene en la sección amarilla o en la marrón, ¿cuál color elegirías?
- c) ¿En qué color es más probable que se detenga la flecha de la ruleta B? ¿Por qué?
- d) ¿Cuán probable es que la flecha de la ruleta A se detenga en la región negra? ¿Por qué?
- e) ¿En qué color es menos probable que se detenga la flecha de la ruleta B? ¿Por qué?
- f) ¿Cuán probable es que la flecha de la ruleta B se detenga en la región azul? ¿Por qué?



3. Construí, para cada ítem, una ruleta que cumpla con las condiciones dadas en la consigna.

- a) Los resultados posibles al girar la flecha de la ruleta deben ser que esta se detenga en la región azul, en la negra o en la amarilla. Además, el resultado menos probable al realizar el experimento debe ser que la flecha se detenga en la región amarilla.
- b) Al girar la flecha de la ruleta esta debe detenerse con certeza en la región azul.

→ Etapa procedimental

Tarea 2. Entre diferentes opciones, elegí la mejor

MOMENTO 1

Intención. En esta etapa se busca comenzar a construir formas de medición cuantitativa de la incertidumbre. Para ello previo a una cuantificación, el foco se sitúa en la descripción de los resultados posibles, el número de opciones asociadas a cada posibilidad y el establecimiento de un resultado de interés. Dichos elementos permitirán establecer argumentos para determinar el resultado más, igual o menos probable.

MOMENTO 2

Intención. El que el número de fichas en cada urna sea distinto tiene el objetivo de construir nuevas argumentaciones que no se sitúen en cuál de ambas urnas tiene mayor número de fichas de cierto color.

1. Analizó la composición del bol y respondió las preguntas propuestas.



- a) Si se extrae al azar una ficha del bol, ¿es posible que sea azul? ¿Por qué? ¿Qué número se le podría asignar a la probabilidad del suceso "sacar una ficha azul"?
- b) Si se extrae una ficha del bol, ¿cuántos resultados posibles hay?
- c) ¿Cuál podría ser un resultado favorable² para considerar en el experimento?
- d) Si extraés una ficha del bol, ¿de qué color creés que será?
- e) ¿Qué es más probable: sacar una ficha roja o una ficha verde del bol? ¿Por qué?
- f) ¿De qué depende que un suceso sea más probable que otro?

2. Analizó la composición de cada uno de los siguientes boles, y luego respondió las preguntas.



- a) ¿Cuáles son los resultados posibles si se extrae una ficha del bol A? ¿Y si se extrae una ficha del bol B?
- b) Si se considera que el resultado favorable del experimento es extraer una ficha verde, ¿cuántas posibilidades de ocurrir tiene este suceso en el bol A? ¿Y en el bol B?
- c) ¿Las posibilidades de extraer una ficha roja son mayores en alguno de los dos boles? ¿En cuál? ¿Por qué?
- d) ¿Cuán probable es extraer una ficha azul del bol A en comparación con el bol B?

MOMENTO 3

Intención. Este momento pretende propiciar dos aspectos: el primero (ítems a y b) refiere al uso de la razón parte-todo, es decir, casos favorables-casos posibles, como una forma de cuantificar la ocurrencia de extraer una ficha de color específico de la urna y decidir dónde es más, igual o menos probable su ocurrencia.

El segundo aspecto (ítems c, d y e) refiere al análisis del cambio que se produce en la probabilidad cuando las fichas que conforman la urna cambian.

3. Analizó la composición de cada uno de los siguientes boles, y luego respondió las preguntas.



- a) ¿Cuáles de los boles tienen la misma probabilidad de extraer una ficha azul? ¿Por qué?
- b) ¿De cuál de los boles es más probable extraer una ficha roja? ¿Por qué?
- c) Si al contenido del bol A se le agregan dos fichas rojas, ¿qué cambia? ¿Cambia la probabilidad de extraer una ficha de un color específico? Si es así, ¿cómo cambia dicha probabilidad?
- d) Si se duplica la cantidad de fichas de cada color en el bol C, ¿qué cambia? ¿Cambia la probabilidad de extraer una ficha de un color específico? Si es así, ¿cómo cambia dicha probabilidad?
- e) ¿Cuál es la probabilidad de no extraer una ficha roja del bol B?

MOMENTO 4

Intención. La pregunta de cierre busca poner en juego el papel de la proporcionalidad en la comparación de relaciones casos favorables–casos posibles, para confrontar afirmaciones como “mayor número de fichas implica mayor probabilidad del resultado” o “igual número de fichas significa igual probabilidad del resultado”.



4. Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y argumentá tu respuesta:

- a) Si en el bol A hay mayor número de fichas negras que en el bol B, entonces es más probable extraer una ficha negra del bol A que del bol B.
- b) Si en el bol A hay igual número de fichas blancas que en el bol B, entonces es igual de probable extraer una ficha blanca del bol A que del bol B.

→ Etapa simbólica

Tarea 3. Toma de decisiones. ¿Qué hacés?

MOMENTO 1

Intención. Este momento está basado en la cuantificación de la ocurrencia de sucesos: de manera específica se determina el valor numérico de la ocurrencia de un suceso seguro, el valor numérico de la ocurrencia de sucesos específicos y el valor numérico de la ocurrencia de dos sucesos equivalentes.

MOMENTO 2

Intención. Esta etapa tiene como propósito identificar las acciones a considerar para lograr resultados deseados. Es decir, analizar el efecto que genera la eliminación de ciertos colores de fichas, la disminución o aumento de las fichas de cada color, entre otros.

MOMENTO 3

Intención. Finalmente, el momento 3 cierra con el análisis de la razón entre los casos favorables y los casos posibles en el intervalo 0 a 1. Así, cuando el valor numérico de la razón es cercano a 0 se trata de un suceso poco probable, mientras que si es exactamente 0, el suceso es imposible. Por el contrario, cuando el valor numérico de la razón es muy próximo a 1, refiere a un suceso muy probable, mientras que si es exactamente 1, es un suceso seguro.

1. Analizó la composición de los boles y respondió las siguientes consignas, suponiendo que en el bol B se agregan seis fichas azules.



a) Copiá la siguiente tabla en tu carpeta y completala con las probabilidades correspondientes.

	BOL A	BOL B
Probabilidad de extraer una ficha roja		
Probabilidad de extraer una ficha verde		
Probabilidad de extraer una ficha azul		

- b) ¿Qué es más probable: extraer una ficha roja, una ficha verde o una ficha azul? ¿Por qué?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha de cualquier color del bol?
- d) ¿Qué posibilidades hay de extraer una ficha que no sea de color azul? ¿Cuál es la probabilidad de dicho suceso?
- e) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha verde o roja?
- f) ¿Cómo son los resultados de la probabilidad en los ítem d y e? ¿Por qué?

2. Considerá los boles A y B de la pregunta 1, analizá las siguientes situaciones.

- a) Si se eliminan las fichas de color rojo en cada uno de los boles, ¿cómo cambia la probabilidad de extraer una ficha azul?
- b) Si el resultado favorable fuera extraer del bol A una ficha verde, ¿qué harías para extraer con mayor probabilidad una ficha de ese color?
- c) ¿Qué harías para garantizar con total certeza la extracción de una ficha verde?
- d) ¿Qué harías para que sea más probable extraer una ficha azul del bol A que del bol B?



3. En las situaciones analizadas, ¿de qué depende que un resultado o suceso sea más, igual o menos probable que otro? ¿Por qué?

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: LOS CAMBIOS DE PATENTES EN LA ARGENTINA

→ Etapa factual

Tarea 1. Evolución de las patentes.
¿Qué ha cambiado?

MOMENTO 1

Intención. En este momento se pretende generar una caracterización de los modelos de patentes a partir de la descripción del número de caracteres alfanuméricos que la conforman, su estructura y su diseño, elementos que permitirán establecer diferencias entre modelos y generar nuevos ejemplos de patentes.

1. Desde los años sesenta hasta la segunda década del siglo XXI, se han realizado tres modelos de patentes de automóviles en Argentina que se muestran en las imágenes que están a continuación. El cambio más reciente (hecho en el 2015) incluso implica la creación de un sistema único de identificación para todos los países del MERCOSUR.³



- Describí cada uno de los diseños de patente.
- ¿Han cambiado con el tiempo los modelos de patentes? Si la respuesta es afirmativa, ¿qué ha cambiado en las patentes? Indicá las diferencias y similitudes entre los modelos.
- En tu carpeta, construí dos patentes para cada modelo. ¿En qué te fijaste para construir las patentes?

MOMENTO 2

Intención. En este momento se continúa con un análisis puntual de dos modelos de patentes para analizar las implicaciones de la integración de un carácter y del tipo de carácter en el total de patentes que puede generar el modelo.

2. Considerá las siguientes patentes y analizá las preguntas propuestas:



- ¿Cuál es el cambio realizado entre la patente de 1994 y la patente de 2015?
- ¿Por qué considerás que al agregar un nuevo carácter a la patente, las autoridades correspondientes decidieron colocar una letra y no un número?

MOMENTO 3

Intención. El momento 3 tiene como objetivo reconocer si una patente corresponde o no a un modelo específico. Elementos como orden, tipo de caracteres y número de caracteres alfanuméricos son fundamentales para la categorización.



3. A continuación, se presentan algunas patentes. Identificá si la patente pertenece a algún modelo: de 1964, de 1994 o de 2015. En cada caso describí en qué te fijaste para decidir si la patente pertenece o no pertenece a algún modelo.

PATENTE	¿PERTENECE A ALGÚN MODELO? ¿POR QUÉ?	¿A CUÁL MODELO PERTENECE?
KNJ 605		
M297823		
470-102 <small>RESERVA BLANCO 8-27</small>		
783479		
AG 759 LH		
AAA 12		

→ Etapa procedimental

Tarea 2. ¿Cada cuánto cambia algún carácter de la patente? ¿Cómo se puede saber?

MOMENTO 1

Intención. Estas preguntas buscan describir todas las posibles opciones de patentes previo a la cuantificación del número de patentes que se pueden generar. En el ítem a) el orden de los caracteres no juega un rol.

Por el contrario, en los ítems b), c) y d) el orden de los caracteres tiene un rol fundamental para la construcción de las patentes faltantes y para poder decidir si cierto modelo coincide con su patrón.

1. a) Sin hacer cuentas, hacé una estimación: ¿cuántas patentes permite construir el diseño de 2015?

Antes de determinar el número total de patentes posibles que permite el diseño de 2015, analizá cuáles son todas las formas posibles para una patente más pequeña formada por tres caracteres alfanuméricos: específicamente, una letra seguida de dos números.

b) ¿Cuáles son las patentes posibles si solamente se utilizan las letras A y B, y los números 0 y 1? ¿Qué estrategia seguiste para describir todas las combinaciones posibles?

c) A continuación se presentan algunas patentes considerando dos letras posibles (A y B) y tres números posibles (0, 1 y 2). Copiá el diagrama en tu carpeta, y completalo con el resto de las combinaciones posibles.

A	0	0	B	0	1			
A	0	2	B	1	0			
A	1	1	B	1	2			
A	2	0	B	2	1			
A	2	2	B	2	2			

d) Las patentes 1A2, 02B y 1BA, ¿forman parte de los casos posibles? ¿Por qué?

e) ¿Cómo podés saber si faltó escribir alguna patente de los casos posibles? ¿Cómo podés descartar patentes que no sean parte de los casos posibles?

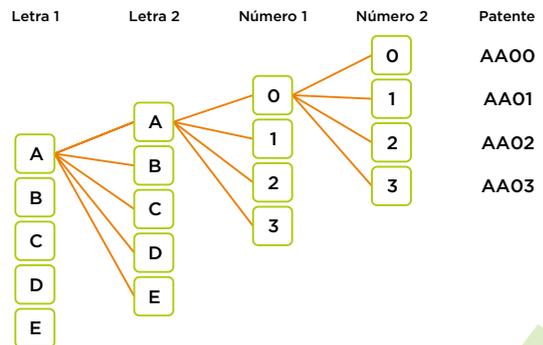
MOMENTO 2

Intención. El segundo momento tiene como propósito construir una estrategia para la cuantificación del número total de patentes. La pregunta parte de la realización de una estimación del número de posibilidades que se tiene para la patente.

Los ítems a), b) y c) proporcionan casos donde cierto número de caracteres permanecen fijos y otros varían, con el objetivo de analizar las patentes que se pueden generar e identificar un patrón que permita el cálculo del número total de patentes.

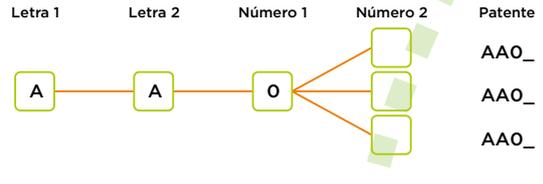
Los ítems d) y e) pretenden explicitar una herramienta de cálculo óptima para la determinación de todas las posibilidades sin tener que describir todos los casos posibles.

2. Considera que la patente se conforma por dos letras (pueden utilizarse las que van de la A a la E) y dos números (del 0 al 3). El siguiente diagrama presenta parte de las posibles patentes:

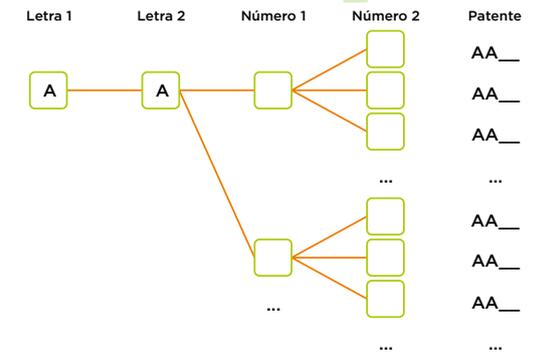


a) Si la patente cambia de derecha a izquierda, ¿cuántas posibilidades se tienen para la posición "Número 2"? ¿Cuántas para la posición "Número 1"? ¿Cuántas para "Letra 1"?

b) Si se mantienen fijos los primeros tres caracteres, ¿cuántas patentes pueden construirse? Copia el siguiente diagrama y complétalo en tu carpeta.



c) Si se mantienen fijos los primeros dos caracteres, ¿cuántas patentes pueden construirse? Copia el siguiente diagrama y complétalo en tu carpeta.



d) Si pueden variarse los cuatro caracteres, ¿cómo influye el número de posibilidades por carácter en el cálculo del número total de patentes? ¿Cuántas patentes pueden construirse, si se utilizan todas las letras del abecedario (excepto la ñ) y todos los dígitos (del 0 al 9)?

e) ¿Es necesario describir todos los casos posibles para determinar la cantidad de formas diferentes en que puede construirse la patente? ¿Por qué?

f) ¿Qué estrategia propones para determinar la cantidad total de patentes? ¿En qué te basaste?

MOMENTO 3

Intención. Este tercer momento busca reconocer la estrategia para el cálculo del número de casos posibles a partir de la interpretación de los componentes que la conforman.



3. ¿Cuál de las siguientes estrategias permite calcular el número total de patentes para el diseño de 2015 de la Argentina? ¿Por qué?

a) $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 24 \times 23$

b) $26^2 \times 10^3 \times 26^2$

c) $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26$



→ Etapa simbólica

Tarea 3. ¿Cuántos automóviles pueden patentarse?

MOMENTO 1

Intención. Este momento favorece una cuantificación de las posibilidades considerando ciertas condiciones en el cálculo en a), la determinación de una patente específica en b) y la identificación de un caso en relación con todas las posibilidades en c).

1. En 1993, el gobierno argentino, a través de la Dirección Nacional del Registro de la Propiedad del Automotor (DNRPA), decretó que todos los automóviles nuevos vendidos a partir del 1° de enero de 1995 serían incorporados a un nuevo sistema de patentamiento. El formato propuesto para las nuevas patentes consistió en tres letras y tres dígitos numéricos.
A su vez, la DNRPA determinó que a los vehículos de inscripción inicial (0 Km), se les otorgarían los dominios consecutivos desde la patente AAA 000, mientras que a los reinscriptos se les otorgarían los consecutivos desde el dominio RAA 000 en adelante.
a) Considerando la información emitida por la DNRPA, ¿cuántos automóviles de inscripción inicial (0 Km) podrían entrar al proceso de patentamiento? ¿Por qué?
b) ¿Cuál es la última patente posible de emitir para automóviles de inscripción inicial (considera que se emiten en orden cambiando de derecha a izquierda)? ¿En qué te basaste?
c) ¿La patente ORE 629 forma parte de las patentes a emitir para automóviles reinscriptos? ¿Por qué?

MOMENTO 2

Intención. Esta sección tiene la intención de calcular el número de patentes que se requieren emitir para que un caracter en determinada posición cambie. El ítem b) pretende la identificación de un patrón de cambio (número de patentes) para que el caracter cambie de manera consecutiva.

2. La nueva patente de la Argentina (2015) va avanzando de derecha a izquierda: las dos primeras posiciones son letras, las tres siguientes son números y las dos restantes son de nuevo letras. Ejemplifiquemos:
Primera patente: AA 000 AA
Segunda patente: AA 000 AB
Tercera patente: AA 000 AC
a) ¿Cuántos automóviles para patentamiento se requieren para cambiar la letra de la segunda posición desde la derecha, considerando que el modelo inicial es AA 000 AA?
b) ¿Cada cuántos patentamientos cambia la letra de la segunda posición desde la izquierda, es decir, pasa de AA a AB, luego a AC y así sucesivamente? ¿Por qué?
c) ¿Cuántos patentamientos de automóviles se requieren para que comience a circular la patente con las iniciales AD (primeras dos posiciones de la izquierda)?
d) ¿Cuántos automóviles tienen que patentarse para que se cambie la letra inicial A de este modelo de patente?

MOMENTO 3

Intención. Finalmente, el momento 3 cierra con un análisis global y puntual que implique el análisis de las posibilidades para el carácter en primera posición (de izquierda a derecha) y la determinación del número de patentes faltantes para tener todos los casos posibles.



3. En 1995 comenzó el sistema de patentamiento argentino con la patente AAA 000. Los autos con patentes viejas que se repatentaban comenzaban desde RAA 000. En 2013 ya circulaban por las calles de Argentina automóviles con patente cuyas letras eran NKA.

a) ¿Cuáles son las letras iniciales que quedaron en el 2013 para generar patentes para vehículos de inscripción inicial?

b) Si la última patente fue NKA 999, ¿cuántas patentes quedaban por generarse en su momento e implicaba pensar en un cambio de diseño de la patente? ¿Qué consideraste para realizar el cálculo?

c) En el diseño de un modelo de patente, ¿por qué sería mejor recurrir al uso de mayor cantidad de letras que de números?



CÓMO EVALUAR LOS PROCESOS DE PRODUCCIÓN DE LOS/AS ESTUDIANTES

Con el correr de los años, la evaluación en la escuela se convirtió en un criterio de acreditación y quedó relegada a la “prueba escrita”. Sin embargo, la evaluación tiene distintos aspectos importantes en la escuela que no solo implican la acreditación.

Sin desconocer que cada maestro tomará decisiones de promoción y acreditación en función de acuerdos institucionales y jurisdiccionales sobre criterios y parámetros, queremos poner énfasis en la idea de que un sentido fundamental de la evaluación es recoger información sobre el estado de los saberes de los alumnos, para luego tomar decisiones que permitan orientar las estrategias de enseñanza.

Las producciones de los niños dan cuenta tanto de los resultados derivados de nuestras propias estrategias de enseñanza, como de lo que aprendieron y de sus dificultades. (ME, 2012)

Se considera entonces la evaluación formativa. Se llama así a un procedimiento usado por los/as docentes para adaptar un proceso didáctico a los progresos y necesidades observados en los/as estudiantes. De este modo se puede recoger información mientras los procesos se desarrollan con el fin de detectar logros, puntos débiles, identificar errores y posibles causas y poder tomar así decisiones respecto a lo que se enseña, cuándo y cómo se lo enseña.

Desde este punto de vista, cuando el/la estudiante no aprende no es solo debido a que no estudia, sino que puede ser atribuido y analizado desde múltiples factores como las actividades propuestas, los recursos utilizados, etc.

La evaluación formativa se construye a partir de la observación y conversación con los/as estudiantes y también analizando sus producciones. Esta evaluación brinda a los/as alumnos/as información para desarrollar una mayor autonomía y autorregulación de sus aprendizajes. También permite a los/as docentes adaptar las estrategias de enseñanza y los recursos utilizados a las características y necesidades individuales de los/as estudiantes.

En síntesis, la evaluación formativa sirve para que:

- los/as docentes
 - conozcan mejor a los/as estudiantes;
 - planifiquen su enseñanza ajustando el ritmo y presentación de los desafíos de aprendizajes a las características de los/as estudiantes;
- los/as estudiantes
 - comprendan la forma en la que aprenden mejor;
 - mejoren su aprendizaje;
 - se autoevalúen y comprendan cuán bien aprendieron.

Uno de los objetivos a lograr es entonces proponer actividades que permitan apropiarse de la metacognición, es decir, la capacidad de autorregular los procesos de aprendizaje. Para ello es necesario presentar a los/as estudiantes actividades que les permitan dar cuenta de sus aprendizajes. Es posible pensar en preguntas como:

- ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que te resultaron claves para resolver la actividad?
- ¿Cuáles son las estrategias que te resultaron complejas? ¿Cuáles te resultaron fáciles?
- ¿Qué aspectos de esta actividad podés guardarte para usarlos en otras?
- ¿Cuáles son las consignas que te resultaron difíciles? ¿Podrías descubrir el motivo por la que fueron difíciles?
- ¿Qué aprendiste hoy? ¿Qué conceptos no terminaste de entender?

Es fundamental que los/as estudiantes contesten estas preguntas de modo escrito y puedan recurrir a ellas luego de distintas secuencias didácticas. De este modo, todo lo expuesto se vuelve parte de sus aprendizajes y favorece el logro de la autonomía en la resolución.

Finalmente, para que la evaluación permita lograr los objetivos planteados, es necesario explicitar los criterios adoptados a los/as estudiantes. Según Toranzos (2014), esto permite:

- a. la necesaria transparencia de los procesos de evaluación;
- b. el resaltar el papel de la evaluación como un elemento que contribuye al desarrollo de procesos metacognitivos, es decir de reflexión activa de los alumnos sobre su propio proceso de aprendizaje.

Una forma de lograr todos los objetivos propuestos anteriormente es mediante el armado de rúbricas. Una rúbrica es una guía usada en la evaluación del desempeño de los/as estudiantes que describe las características específicas de un producto, proyecto o tarea en varios niveles de rendimiento. Se arma para clarificar lo que se espera del trabajo del estudiante y facilitar así la retroalimentación.

A partir de una rúbrica bien hecha, se logra:

- informar a los/as estudiantes acerca de sus saberes;
- fomentar el aprendizaje autónomo y la autoevaluación;
- anticipar los criterios de evaluación;
- promover la responsabilidad de los/as estudiantes frente a sus aprendizajes.

Para estos materiales, una rúbrica posible podría ser:

	Siempre	La mayoría del tiempo	A veces	Nunca
Entiende los enunciados de las situaciones				
Puede leer la información escrita en distintos registros de representación				
Logra comprender las distintas posibilidades de ocurrir de los sucesos en las distintas ruletas				
Comprende cuando un suceso es seguro, probable, poco probable o inseguro				
Logra comprender la multiplicación como una forma de contar las permutaciones				
Escucha y aprende de los debates áulicos				
Argumenta sus posturas con claridad				
Logra comprender sus errores y comenzar a partir de ellos				

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa.

Ministerio de Educación (2001). *Para seguir aprendiendo. Material para alumnos (Matemáticas EGB3).* Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. 2° Ciclo Básico Educación Secundaria. 1° y 2°, 2° y 3° Años.* Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación (2012). *Cuadernos para el aula. Matemática 4.* Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación (2018). *Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios de Matemática.* Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada.* Tesis de doctorado no publicada. Granada: Universidad de Granada.

Ruiz, G. (2010). “El concepto de probabilidad en publicidad”. *Suma*, 65, 17-21.

Toranzos, L. V. (2014). “Evaluación educativa: hacia la construcción de un espacio de aprendizaje”. *Propuesta Educativa*, 41, 9-19. Buenos Aires: FLACSO.

LA INCERTIDUMBRE EN DISPOSITIVOS ALEATORIOS

Tratar con la incertidumbre es una característica distintiva de nuestras vidas. En muchas ocasiones nos encontramos ante un suceso cuyo desenlace no podemos anticipar con exactitud, aunque conozcamos cuáles son los desenlaces posibles. A continuación, veamos algunos ejemplos.

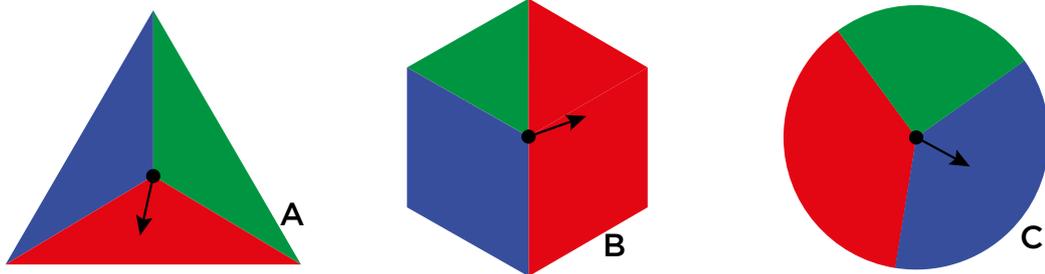
En un torneo de fútbol nunca se puede saber quién ganará la final, pero se sabe con seguridad que habrá un ganador. Cuando se lanza una moneda al aire, no se puede saber si caerá cara, pero sí que saldrá cara o ceca. En el caso de un dado, se sabe que al tirarlo se obtendrá como resultado alguno de los números 1, 2, 3, 4, 5 o 6, pero no se puede anticipar cuál de ellos quedará cara arriba. Hoy en día se sabe que el riesgo de padecer cáncer de pulmón es más alto en fumadores que en no fumadores, sin embargo, no se puede saber con seguridad si una persona en particular padecerá cáncer de pulmón o no.

Una de las características principales del mundo contemporáneo es que la toma de decisiones se basa en el análisis de la información. Por este motivo, es importante tener a mano herramientas estadísticas y probabilísticas, es decir, disponer de formas y métodos eficaces para la interpretación de la información disponible.

En esta situación nos centramos en el tratamiento de la información y el análisis del azar y la probabilidad (y la comunicación de los datos que resultan de este), y en la cuantificación de la incertidumbre de sucesos inciertos.

TAREA 1. ¿Qué podría suceder?

1. En tu carpeta, completá los siguientes enunciados indicando lo que puede pasar si girás la flecha de las siguientes ruletas:



a) Al girar la flecha de cada ruleta es seguro que: *la flecha en la ruleta A se detenga en alguna región; la flecha en la ruleta B se detenga en la zona verde, roja o azul; la flecha en la ruleta C se detenga y ocupe parte de la región roja, verde o azul.*

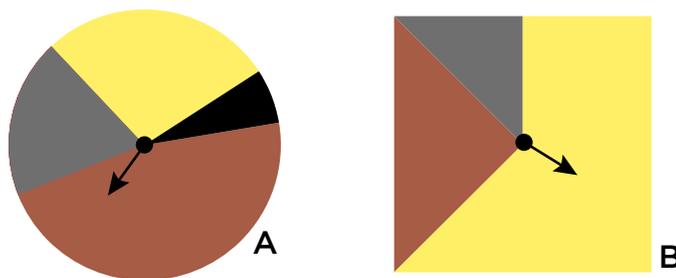
b) Al girar la flecha de cada ruleta es poco probable que:

c) Al girar la flecha de cada ruleta es muy probable que:

d) Al girar la flecha de cada ruleta es igual de probable que:

e) Al girar la flecha de cada ruleta es imposible que:

2. Considerá las siguientes ruletas y analizá las preguntas propuestas:



a) ¿Cuáles son los resultados posibles en cada ruleta al girar la flecha?

b) Si en ambas ruletas se entrega un premio cuando la flecha se detiene en la sección amarilla o en la marrón, ¿cuál color elegirías?

- c) ¿En qué color es más probable que se detenga la flecha de la ruleta B? ¿Por qué?
- d) ¿Cuán probable es que la flecha de la ruleta A se detenga en la región negra? ¿Por qué?
- e) ¿En qué color es menos probable que se detenga la flecha de la ruleta B? ¿Por qué?
- f) ¿Cuán probable es que la flecha de la ruleta B se detenga en la región azul? ¿Por qué?



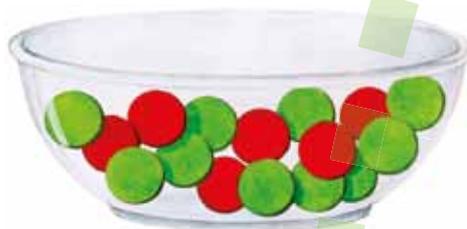
3. Construí, para cada ítem, una ruleta que cumpla con las condiciones dadas en la consigna.

a) Los resultados posibles al girar la flecha de la ruleta deben ser que esta se detenga en la región azul, en la negra o en la amarilla. Además, el resultado menos probable al realizar el experimento debe ser que la flecha se detenga en la región amarilla.

b) Al girar la flecha de la ruleta esta debe detenerse con certeza en la región azul.

TAREA 2. Entre diferentes opciones, elegí lo mejor

- 1.** Analizá la composición del bol y respondé las preguntas propuestas.



BOL A

- a) Si se extrae al azar una ficha del bol, ¿es posible que sea azul? ¿Por qué? ¿Qué número se le podría asignar a la probabilidad del suceso “sacar una ficha azul”?
- b) Si se extrae una ficha del bol, ¿cuántos resultados posibles hay?
- c) ¿Cuál podría ser un resultado favorable² para considerar en el experimento?
- d) Si extraés una ficha del bol, ¿de qué color creés que será?
- e) ¿Qué es más probable: sacar una ficha roja o una ficha verde del bol? ¿Por qué?
- f) ¿De qué depende que un suceso sea más probable que otro?

2. Analizá la composición de cada uno de los siguientes boles, y luego respondé las preguntas.



BOL A



BOL B

- a) ¿Cuáles son los resultados posibles si se extrae una ficha del bol A? ¿Y si se extrae una ficha del bol B?
- b) Si se considera que el resultado favorable del experimento es extraer una ficha verde, ¿cuántas posibilidades de ocurrir tiene este suceso en el bol A? ¿Y en el bol B?
- c) ¿Las posibilidades de extraer una ficha roja son mayores en alguno de los dos boles? ¿En cuál? ¿Por qué?
- d) ¿Cuán probable es extraer una ficha azul del bol A en comparación con el bol B?

2. Un resultado o suceso favorable refiere a aquel resultado de interés, aquel que nos interesa.

3. Analizá la composición de cada uno de los siguientes boles, y luego respondé las preguntas.



- a)** ¿Cuáles de los boles tienen la misma probabilidad de extraer una ficha azul? ¿Por qué?
- b)** ¿De cuál de los boles es más probable extraer una ficha roja? ¿Por qué?
- c)** Si al contenido del bol A se le agregan dos fichas rojas, ¿qué cambia? ¿Cambia la probabilidad de extraer una ficha de un color específico? Si es así, ¿cómo cambia dicha probabilidad?
- d)** Si se duplica la cantidad de fichas de cada color en el bol C, ¿qué cambia? ¿Cambia la probabilidad de extraer una ficha de un color específico? Si es así, ¿cómo cambia dicha probabilidad?
- e)** ¿Cuál es la probabilidad de no extraer una ficha roja del bol B?

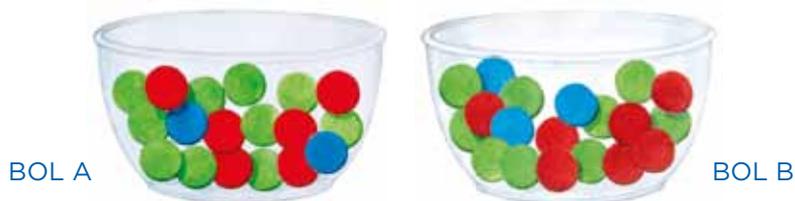


4. Indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y argumentá tu respuesta:

- a)** Si en el bol A hay mayor número de fichas negras que en el bol B, entonces es más probable extraer una ficha negra del bol A que del bol B.
- b)** Si en el bol A hay igual número de fichas blancas que en el bol B, entonces es igual de probable extraer una ficha blanca del bol A que del bol B.

TAREA 3. Toma de decisiones. ¿Qué hacés?

1. Analizá la composición de los boles y respondé las siguientes consignas, suponiendo que en el bol B se agregan seis fichas azules.



a) Copiá la siguiente tabla en tu carpeta y completala con las probabilidades correspondientes.

	BOL A	BOL B
Probabilidad de extraer una ficha roja		
Probabilidad de extraer una ficha verde		
Probabilidad de extraer una ficha azul		

b) ¿Qué es más probable: extraer una ficha roja, una ficha verde o una ficha azul? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha de cualquier color del bol?

d) ¿Qué posibilidades hay de extraer una ficha que no sea de color azul? ¿Cuál es la probabilidad de dicho suceso?

e) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una ficha verde o roja?

f) ¿Cómo son los resultados de la probabilidad en los ítem d y e? ¿Por qué?

2. Considerá los boles A y B de la pregunta 1, analizá las siguientes situaciones.

a) Si se eliminan las fichas de color rojo en cada uno de los boles, ¿cómo cambia la probabilidad de extraer una ficha azul?

b) Si el resultado favorable fuera extraer del bol A una ficha verde, ¿qué harías para extraer con mayor probabilidad una ficha de ese color?

c) ¿Qué harías para garantizar con total certeza la extracción de una ficha verde?

d) ¿Qué harías para que sea más probable extraer una ficha azul del bol A que del bol B?



3. En las situaciones analizadas, ¿de qué depende que un resultado o suceso sea más, igual o menos probable que otro?
¿Por qué?

A hand-drawn diagram on a light blue background. It features several overlapping circles and arcs. A prominent dashed line with square markers curves across the center. A dotted line forms a smaller arc at the bottom right. Two large, thick white arrows point downwards from the upper left towards the center. The equation $2+2$ is written in a white, cursive font in the upper right quadrant. The overall style is that of a sketch or a conceptual drawing.
$$2+2$$

LOS CAMBIOS DE PATENTES EN LA ARGENTINA

España fue el primer país que introdujo en el año 1900 la matriculación obligatoria de automóviles utilizando un sistema de letras y números. Para el año 1971, su sistema de numeración ya se estaba agotando en las ciudades de Madrid y Barcelona: las matrículas B-918387 y M-960985 fueron las últimas de este sistema.

En el proceso de matriculación de automóviles en la Argentina se identifican dos fases, una descentralizada y otra centralizada. En la primera, que transcurrió entre 1916 y 1969, cada provincia emitía sus propias patentes. En la segunda, que comenzó en 1964 (y sigue en vigencia), se promovió la unificación, regularización y estandarización de las diferentes identificaciones de automotores. En esta fase se han utilizado hasta el momento tres diseños distintos de las chapas patentes que se muestran en la siguiente imagen: el primer diseño es de 1964; el segundo, de 1994, y el tercero (y vigente), de 2015.



Cada uno de los modelos de patentes fue diseñado para poder patentar millones de automóviles. Sin embargo, a medida que aumenta el número de patentes emitidas y entregadas, se hace necesario pensar en un nuevo modelo. Cabe entonces preguntarse: ¿qué características en el diseño permiten generar el mayor número posible de patentes?, ¿cuántos patentamientos de automóviles permite el actual diseño?

TAREA 1. Evolución de las patentes. ¿Qué ha cambiado?

1. Desde los años sesenta hasta la segunda década del siglo XXI, se han realizado tres modelos de patentes de automóviles en Argentina que se muestran en las imágenes que están a continuación. El cambio más reciente (hecho en el 2015) incluso implica la creación de un sistema único de identificación para todos los países del MERCOSUR.³



- Describí cada uno de los diseños de patente.
- ¿Han cambiado con el tiempo los modelos de patentes? Si la respuesta es afirmativa, ¿qué ha cambiado en las patentes? Indicá las diferencias y similitudes entre los modelos.
- En tu carpeta, construí dos patentes para cada modelo. ¿En qué te fijaste para construir las patentes?

2. Considerá las siguientes patentes y analizá las preguntas propuestas:



PATENTE 1994

PATENTE 2015

- ¿Cuál es el cambio realizado entre la patente de 1994 y la patente de 2015?

3. El Mercado Común del Sur, más conocido como MERCOSUR, es un importante proceso de integración regional, integrado por Argentina, Brasil, Paraguay, Uruguay y Venezuela.

b) ¿Por qué considerás que al agregar un nuevo caracter a la patente, las autoridades correspondientes decidieron colocar una letra y no un número?



3. A continuación, se presentan algunas patentes. Identificá si la patente pertenece a algún modelo: de 1964, de 1994 o de 2015. En cada caso describí en qué te fijaste para decidir si la patente pertenece o no pertenece a algún modelo.

PATENTE	¿PERTENECE A ALGÚN MODELO? ¿POR QUÉ?	¿A CUÁL MODELO PERTENECE?

TAREA 2. ¿Cada cuánto cambia algún carácter de la patente? ¿Cómo se puede saber?

1. a) Sin hacer cuentas, hacé una estimación: ¿cuántas patentes permite construir el diseño de 2015?

Antes de determinar el número total de patentes posibles que permite el diseño de 2015, analizá cuáles son todas las formas posibles para una patente más pequeña formada por tres caracteres alfanuméricos: específicamente, una letra seguida de dos números.

b) ¿Cuáles son las patentes posibles si solamente se utilizan las letras A y B, y los números 0 y 1? ¿Qué estrategia seguiste para describir todas las combinaciones posibles?

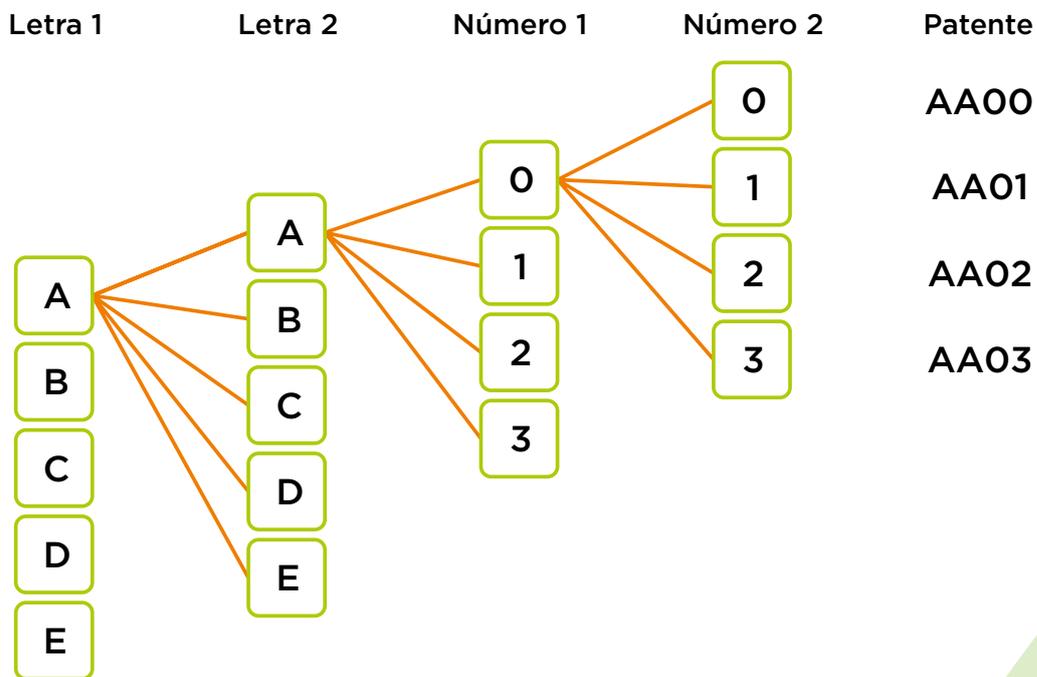
c) A continuación se presentan algunas patentes considerando dos letras posibles (A y B) y tres números posibles (0, 1 y 2). Copiá el diagrama en tu carpeta, y completalo con el resto de las combinaciones posibles.

A	0	0	B	0	1									
A	0	2	B	1	0									
A	1	1	B	1	2									
A	2	0	B	2	1									
A	2	2	B	2	2									

d) Las patentes 1A2, 02B y 1BA, ¿forman parte de los casos posibles? ¿Por qué?

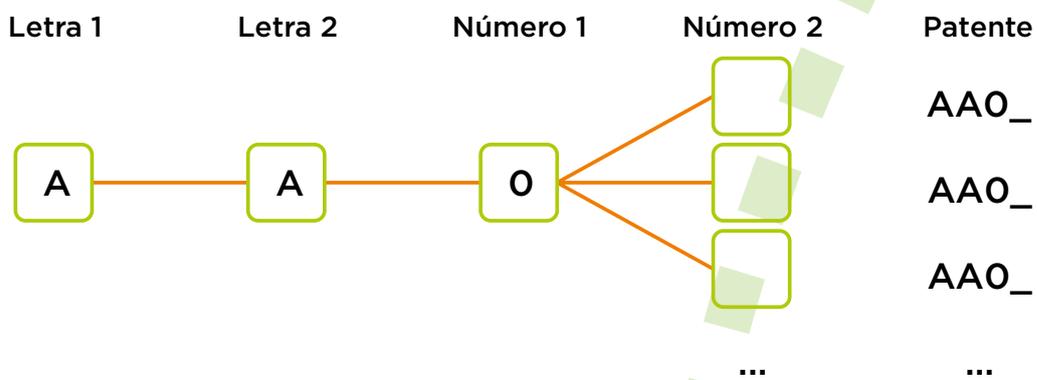
e) ¿Cómo podés saber si faltó escribir alguna patente de los casos posibles? ¿Cómo podés descartar patentes que no sean parte de los casos posibles?

2. Considerá que la patente se conforma por dos letras (pueden utilizarse las que van de la A a la E) y dos números (del 0 al 3). El siguiente diagrama presenta parte de las posibles patentes:

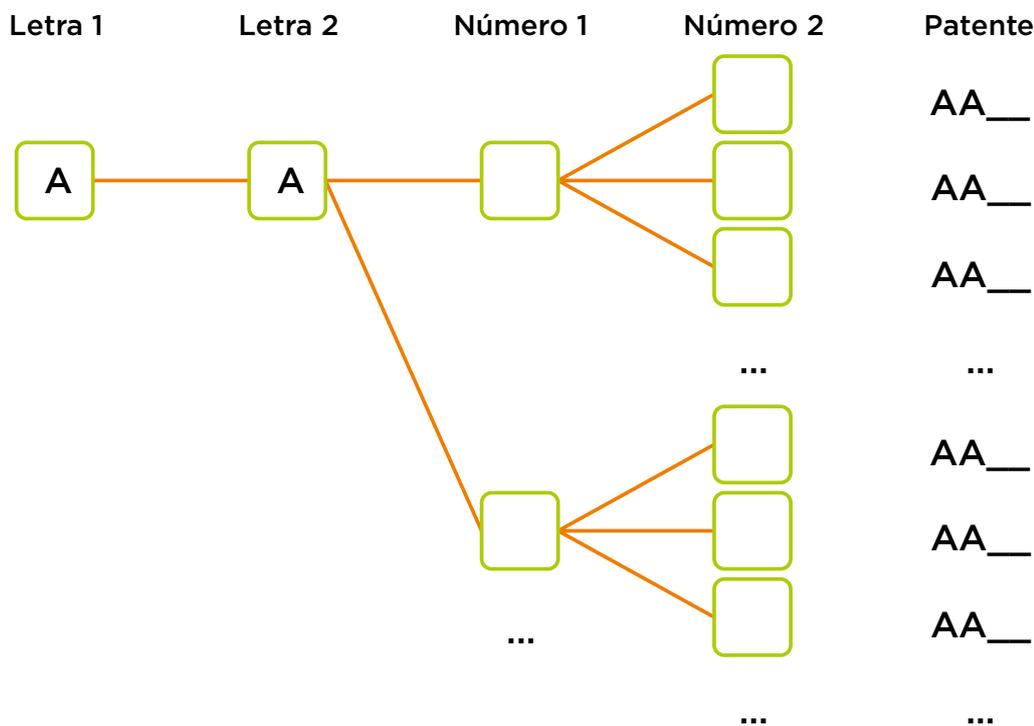


a) Si la patente cambia de derecha a izquierda, ¿cuántas posibilidades se tienen para la posición “Número 2”? ¿Cuántas para la posición “Número 1”? ¿Cuántas para “Letra 1”?

b) Si se mantienen fijos los primeros tres caracteres, ¿cuántas patentes pueden construirse? Copiá el siguiente diagrama y completalo en tu carpeta.



c) Si se mantienen fijos los primeros dos caracteres, ¿cuántas patentes pueden construirse? Copiá el siguiente diagrama y completalo en tu carpeta.



- d) Si pueden variarse los cuatro caracteres, ¿cómo influye el número de posibilidades por carácter en el cálculo del número total de patentes? ¿Cuántas patentes pueden construirse, si se utilizan todas las letras del abecedario (excepto la ñ) y todos los dígitos (del 0 al 9)?
- e) ¿Es necesario describir todos los casos posibles para determinar la cantidad de formas diferentes en que puede construirse la patente? ¿Por qué?
- f) ¿Qué estrategia proponés para determinar la cantidad total de patentes? ¿En qué te basaste?



3. ¿Cuál de las siguientes estrategias permite calcular el número total de patentes para el diseño de 2015 de la Argentina? ¿Por qué?

- a) $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 24 \times 23$
- b) $\frac{26^2 \times 10^3 \times 26^2}{7}$
- c) $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 26 \times 26$



TAREA 3. ¿Cuántos automóviles pueden patentarse?

1. En 1993, el gobierno argentino, a través de la Dirección Nacional del Registro de la Propiedad del Automotor (DNRPA), decretó que todos los automóviles nuevos vendidos a partir del 1° de enero de 1995 serían incorporados a un nuevo sistema de patentamiento. El formato propuesto para las nuevas patentes consistió en tres letras y tres dígitos numéricos.

A su vez, la DNRPA determinó que a los vehículos de inscripción inicial (0 Km), se les otorgarían los dominios consecutivos desde la patente AAA 000, mientras que a los reinscriptos se les otorgarían los consecutivos desde el dominio RAA 000 en adelante.

a) Considerando la información emitida por la DNRPA, ¿cuántos automóviles de inscripción inicial (0 Km) podrían entrar al proceso de patentamiento? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la última patente posible de emitir para automóviles de inscripción inicial (considera que se emiten en orden cambiando de derecha a izquierda)? ¿En qué te basaste?

c) ¿La patente ORE 629 forma parte de las patentes a emitir para automóviles reinscriptos? ¿Por qué?

2. La nueva patente de la Argentina (2015) va avanzando de derecha a izquierda: las dos primeras posiciones son letras, las tres siguientes son números y las dos restantes son de nuevo letras. Ejemplifiquemos:

Primera patente: AA 000 AA

Segunda patente: AA 000 AB

Tercera patente: AA 000 AC

a) ¿Cuántos automóviles para patentamiento se requieren para cambiar la letra de la segunda posición desde la derecha, considerando que el modelo inicial es AA 000 AA?

- b)** ¿Cada cuántos patentamientos cambia la letra de la segunda posición desde la izquierda, es decir, pasa de AA a AB, luego a AC y así sucesivamente? ¿Por qué?
- c)** ¿Cuántos patentamientos de automóviles se requieren para que comience a circular la patente con las iniciales AD (primeras dos posiciones de la izquierda)?
- d)** ¿Cuántos automóviles tienen que patentarse para que se cambie la letra inicial A de este modelo de patente?



3. En 1995 comenzó el sistema de patentamiento argentino con la patente AAA 000. Los autos con patentes viejas que se repatentaban comenzaban desde RAA 000. En 2013 ya circulaban por las calles de Argentina automóviles con patente cuyas letras eran NKA.

- a)** ¿Cuáles son las letras iniciales que quedaron en el 2013 para generar patentes para vehículos de inscripción inicial?
- b)** Si la última patente fue NKA 999, ¿cuántas patentes quedaban por generarse en su momento e implicaba pensar en un cambio de diseño de la patente? ¿Qué consideraste para realizar el cálculo?
- c)** En el diseño de un modelo de patente, ¿por qué sería mejor recurrir al uso de mayor cantidad de letras que de números?

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

ACTIVIDAD 1.

¿Cuánto es la probabilidad?

1. Gastón tiene dos fichas. El color de las caras de cada una de estas se muestra en el siguiente esquema:



FICHA 1



FICHA 2

Gastón lanza ambas fichas. La probabilidad de que la cara sea roja en la ficha 1 es:

- a) El doble de la probabilidad de que sea verde.
- b) La mitad de la probabilidad de que sea azul.
- c) Igual a la probabilidad de que sea azul.
- d) La cuarta parte de la probabilidad de que sea amarilla.

ACTIVIDAD 2.

Analizá afirmaciones

1. Una máquina de dulces contiene 100 caramelos, todos del mismo tamaño, pero de distintos colores: azules, rosas, amarillos y verdes, todos mezclados y en cantidades iguales. La máquina entrega un caramelo cada vez que se gira una palanca.

Margarita giró la palanca y obtuvo un caramelo rosado. Después Pedro giró la palanca. ¿Qué probabilidad hay de que Pedro obtenga un caramelo rosa?

Leé atentamente los siguientes enunciados y argumentá a favor o en contra de cada uno de ellos.

- a) Con toda certeza, el caramelo que obtenga Pedro será rosa.
- b) Es más probable que Pedro obtenga un caramelo rosa de lo que era para Margarita.
- c) La probabilidad de que Pedro obtenga un caramelo rosa es igual a la de Margarita.
- d) La probabilidad de que Pedro obtenga un caramelo rosa es menor que la de Margarita.

ACTIVIDAD 3.

Patentes en el Mercosur: ¿iguales o diferentes?

1. A continuación, se presentan los diseños correspondientes a las patentes de cada uno de los países que forman parte del Mercosur:



- a) ¿Los diseños de las patentes son iguales o diferentes? ¿Por qué?
- b) De acuerdo con los diseños, ¿cada país genera el mismo número total de patentes? ¿Por qué?
- c) De acuerdo con los diseños, ¿Argentina, Venezuela y Brasil generan las mismas patentes? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 4.

¿Qué color de medias es más probable?

1. Fausto y Fernanda tienen dos hijos: David, que está en sexto grado, y Carlos, que aún no empezó la primaria. Cada mañana, David saca un par de medias del primer cajón de su placard sin encender la luz para no despertar a Carlos, se viste y se va a la escuela. Las medias que están en el cajón son de tres colores distintos: blancas, negras y azules; sin embargo, todas tienen la misma textura. A la hora del recreo David se fija de qué color son sus medias.

Cada mañana hay cuatro pares de medias de cada color dentro del primer cajón del placard de David, porque en su casa se lava la ropa interior a diario.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que David use medias blancas los lunes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al día siguiente (martes) use medias negras o azules?

2. Suponé que David tiene en total seis pares de medias, dos de cada color (azul, negro y blanco):

a) Si su papá le regala tres pares de medias, dos pares negros y un par de color blanco, ¿cuál de las siguientes probabilidades cambia: la de sacar un par de medias blancas, la de sacar un par de medias negras o la de sacar un par de medias azules? ¿Cómo cambia dicha probabilidad? ¿Por qué?

b) Si David regala dos pares de medias del mismo color, ¿cómo cambia la probabilidad de sacar un par de medias del color que regaló?

ACTIVIDAD 5.

Las patentes

1. Observá atentamente cada una de las siguientes patentes. Luego, indicá si las afirmaciones con respecto a ellas son verdaderas o falsas:



- a) Considerando sus diseños, el número total de patentes que se pueden generar en la Argentina, el Uruguay y el Paraguay es la misma, ya que en los tres países todas las patentes tienen siete caracteres.
- b) Los diseños de la Argentina y el Paraguay generan el mismo número total de patentes, ya que tienen el mismo número de caracteres: cuatro letras y tres números.
- c) El número total de patentes que genera el diseño del Uruguay es menor al número total de patentes que genera el diseño de la Argentina.
- d) Las patentes que se pueden generar en la Argentina son las mismas que las que se pueden generar en el Paraguay, ya que en ambos casos se permite el uso de los mismos caracteres: tres números y cuatro letras.

ACTIVIDAD 6.

Probabilidad y genética

1. En los seres humanos, el sexo de un individuo lo determina el tipo de espermatozoide que participe en la fecundación. Si el espermatozoide que fecunda al óvulo es portador del cromosoma X, el cigoto resultante dará lugar a un organismo de sexo femenino (XX), mientras que si el espermatozoide que fecunda al óvulo es portador

del cromosoma Y, el cigoto resultante dará lugar a un organismo de sexo masculino (XY).

a) Una madre tiene cromosomas $X_A X_B$ y el padre, $X_C Y$. ¿Cuántas formas posibles de combinarse existen para formar un embrión humano?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que resulte un individuo de sexo femenino? ¿Y de que resulte un individuo de sexo masculino?

ACTIVIDAD 7.

Venta de boletos

1. Para la rifa de un ventilador, en la comunidad se vendieron 150 boletos numerados del 1 al 150 y cuestan 10 pesos cada uno.

a) ¿Qué es más probable: que gane un número de tres dígitos o uno de dos dígitos?

b) ¿Qué es más probable: que gane un número par o uno impar?

c) ¿Qué número comprarías? ¿Por qué?

Inferir

NIVEL
SECUNDARIO