Plan Nacional
Aprender Matemática

Comparar y equivaler

NIVEL PRIMARIO

Secretaria de Innovación
y Calidad Educativa

Ministerio de Educación,
Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación

Presidente de la Nación
Mauricio Macri

Jefe de Gabinete de Ministros
Marcos Peña

Ministro de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología
Alejandro Finocchiaro

Secretario de Gobierno de Cultura
Pablo Avelluto

Secretario de Gobierno de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva
Lino Barañao

Titular de la Unidad de Coordinación General
del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología
Manuel Vidal

Secretaria de Innovación y Calidad Educativa
Mercedes Miguel

Plan Nacional
Aprender Matemática

Comparar y equivaler

¿Cuánto me toca? ¿Es justo?

NIVEL PRIMARIO

Secretaría de Innovación y Calidad Educativa

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación

Secretaria de Innovación y Calidad Educativa
Mercedes Miguel

Directora Nacional de Planeamiento de Políticas Educativas
Inés Cruzalegui

Director de Diseño de Aprendizajes
Hugo Labate

Desarrollo de contenido: Equipo del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. Coordinadora: Daniela Reyes. Diseño: Ricardo Cantoral, Javier Lezama, Rebeca Flores, Angélica Moreno, Gabriela Buendía, Cristian Paredes, Wendolyne Ríos, Viridiana García, Selvin Galo. Revisión: Claudia Rodríguez
Revisión técnica: Equipo de Matemática de la Dirección de Diseño de Aprendizajes

Plan Nacional de Lectura y Escritura / Coordinación de Materiales Educativos
Coordinadora: Alicia Serrano
Responsable de publicaciones: Gonzalo Blanco
Documentación gráfica: Javier Rodríguez
Diseño, armado y diagramación: Clara Batista, Juan De Tullio, Alejandra Mosconi, Mario Pesci, Paula Salvatierra, Elizabeth Sánchez
Producción de gráficos: Fabián Ledesma
Fotografía: Gastón Garino, Santiago Radosevich
Edición y corrección: Viviana Herrero, Myriam Ladcani, Daniela Parada, Jennifer Pochne
Ilustraciones: Mariano Pais
Cartografía: José Pais

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología
Comparar y equivaler : ¿Cuánto me toca? ¿Es justo?. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019.
48 p. ; 28 x 21 cm. - (Plan Nacional Aprender Matemática)

ISBN 978-987-784-005-6

1. Matemática. 2. Didáctica. I. Título.
CDD 510.7

PRESENTACIÓN

Bienvenidos a una etapa de trabajo compartido que nos permitirá abordar la necesidad de construir aprendizajes significativos para la vida de todos y cada uno de nuestros niños, niñas y adolescentes a lo largo de su escolaridad. Porque sabemos que viven en una sociedad donde el conocimiento es y será cada vez más la base sólida sobre la que construirán su futuro.

Nos une el objetivo de lograr que cada estudiante que ingresa al sistema educativo pueda llegar al día de su egreso con los saberes fundamentales para el futuro que lo espera.

El **Plan Nacional Aprender Matemática** es el resultado del consenso y compromiso logrado entre todos los ministros y ministras en el seno del Consejo Federal de Educación. Allí se asumió la responsabilidad de mejorar el nivel de enseñanza y aprendizaje de la matemática a lo largo de todo el país, reconociendo su trascendental importancia en la formación integral de los niños, niñas y jóvenes y en sus oportunidades de acceso a los estudios superiores y al mundo laboral.

Una de las dimensiones más importantes del plan es la formación docente continua orientada a la búsqueda de la transformación y la mejora de la práctica de la enseñanza. Es por ello que este cuadernillo presenta una estrategia alternativa para llevar a las aulas, que los docentes podrán utilizar como insumo para enriquecer su tarea cotidiana.

Este abordaje de la formación continua implica asimismo el acompañamiento en el proceso de mejora, y la elaboración de redes de aprendizaje colaborativo entre los docentes. De este modo, se busca generar un conocimiento sobre la matemática educativa basado en el trabajo entre pares, sostenible y efectivo.

Confiamos en la potencia del hacer juntos y en la visión común de los ministros y ministras que abrieron camino a esta iniciativa. Estamos seguros de que servirá para compartir las buenas prácticas, potenciar las mejores experiencias y asumir la hermosa tarea de ser agentes de cambio en nuestra querida Argentina.

Alejandro Finocchiaro
Ministro de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología

ÍNDICE

(La paginación de este anexo corresponde a la del Libro de estudiantes.)

INTRODUCCIÓN

Fracciones en el segundo ciclo de la Educación Primaria

Durante el segundo ciclo de la Educación Primaria, se busca el acercamiento entre los/as estudiantes y diversas situaciones de enseñanza que promuevan su participación en problemas relevantes para la vida.

Para alcanzar tal fin, el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología ha propuesto un conjunto de saberes primordiales: los *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP) que, recientemente, ha complementado con los *Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios* (IPAP) que son las formulaciones que expresan los aprendizajes prioritarios mínimos que se espera que puedan lograr los/as estudiantes.

En este cuadernillo se trabajarán aquellos relativos a las fracciones (representar, ordenar, sumar).

NÚCLEOS DE APRENDIZAJES PRIORITARIOS (NAP) El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales de uso social habitual en situaciones problemáticas que requieran:	**GRADO**	**INDICADORES DE PROGRESIÓN DE LOS APRENDIZAJES PRIORITARIOS (IPAP)**
Interpretar, registrar o comparar el resultado de una medición, de un reparto o una partición a través de distintas escrituras de fracciones. Interpretar la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales de uso frecuente para una misma cantidad. Sumar y restar cantidades expresadas con fracciones y decimales con distintos significados, utilizando distintos procedimientos, representaciones y evaluando la razonabilidad del resultado.	4º	Estimar, medir y registrar cantidades (longitud, peso o capacidad) con la unidad adecuada en función de la situación y usando, de ser necesario, expresiones fraccionarias y decimales de uso habitual.
Interpretar, registrar, comunicar y comparar cantidades (precios, longitudes, pesos, capacidades, áreas) usando fracciones y/o expresiones decimales usuales, ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones.	5º	Resolver situaciones que involucren sumas y restas de expresiones fraccionarias (con denominadores que sean múltiplos entre sí) y/o decimales, utilizando distintos procedimientos y representaciones (análisis de gráficos y expresiones equivalentes), evaluando la razonabilidad de la estrategia elegida.

NÚCLEOS DE APRENDIZAJES PRIORITARIOS (NAP) El reconocimiento y uso de fracciones y expresiones decimales de uso social habitual en situaciones problemáticas que requieran:	GRADO	INDICADORES DE PROGRESIÓN DE LOS APRENDIZAJES PRIORITARIOS (IPAP)
Interpretar la equivalencia entre expresiones fraccionarias y decimales para una misma cantidad. Comparar fracciones y/o expresiones decimales entre sí y con números naturales a través de distintos procedimientos (relaciones numéricas, expresiones equivalentes, representaciones gráficas) ampliando el repertorio para establecer nuevas relaciones. Sumar, restar, multiplicar y dividir cantidades expresadas con fracciones o decimales utilizando distintos procedimientos y representaciones y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.	5º	Comparar números fraccionarios y/o expresiones decimales entre sí y con el entero a través de distintos procedimientos y reconocer la equivalencia entre expresiones fraccionarias y/o decimales para una misma cantidad.
Interpretar, registrar, comunicar y comparar cantidades con fracciones y/o expresiones decimales eligiendo la representación más adecuada en función del problema a resolver. Argumentar sobre la equivalencia de distintas representaciones y descomposiciones de un número. Comparar fracciones y/o expresiones decimales a través de distintos procedimientos, incluyendo la representación en la recta numérica e intercalando fracciones y decimales entre otros números. Operar seleccionando el tipo de cálculo y la forma de expresar los números involucrados que resulten más convenientes en función de la situación y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido	6º	Argumentar acerca de la equivalencia de distintas representaciones de un número racional usando unidades de distinto orden. Resolver situaciones aditivas que involucran expresiones fraccionarias y/o decimales, situaciones multiplicativas que incluyan multiplicación de expresiones fraccionarias o decimales entre sí o con números naturales o de división entre expresiones fraccionarias y/o decimales con números naturales.

Para que los/as estudiantes reconozcan la funcionalidad y la transversalidad de la matemática para el desarrollo de argumentos y la toma de decisiones, se precisa que el significado del conocimiento matemático refiera al valor de uso (Cantoral, 2013).

Por ello, se proveen algunas reflexiones sobre el objeto matemático puesto a discusión en esta interacción.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Estructura general: ¿qué se propone?

El aprendizaje del estudiante, desde el punto de vista de la propuesta socioepistemológica, es el producto emergente de una dialéctica de construcción social del conocimiento, que parte de lo factual, articula con lo procedimental y se consolida en el nivel simbólico. Es decir, todo objeto matemático tiene un origen y una significación amplia que se apoya en prácticas, cada vez más complejas y estructuradas.

De acuerdo con la investigación socioepistemológica, se propone este material para la construcción de conocimientos específicos con el fin de identificar posibles respuestas y hacer explícitos los aspectos de la resignificación progresiva, la racionalidad contextualizada, el relativismo epistemológico y la funcionalidad del conocimiento.

En este cuadernillo se desarrollarán situaciones de aprendizaje proveyendo un contexto situacional real (no ficticio o fuera del contexto de los/as estudiantes) y un contexto de significancia basado en una evolución pragmática. Es decir, aprovechar las prácticas del actuar de las personas que permitan significar, mediante el uso, la noción matemática específica: las fracciones. Para ello, se considera la importancia de las prácticas socialmente compartidas como la visualización, el reparto equitativo y las equivalencias en las representaciones de las fracciones con el fin de acompañar la construcción del objeto matemático.

El propósito último es el de organizar el conocimiento en espiral, es decir, desde "la anidación de prácticas" –a partir de las acciones (el hacer) y la organización de acciones a nivel de actividad, hasta la simbología–, partiendo del entorno de quien aprende.

El diseño de cada situación de aprendizaje considera las siguientes directrices para generar un ambiente que propicie la construcción del objeto matemático *fracción*:

- Contempla distintos y diversos contextos para identificar la presencia de fracciones desde un nivel situacional.
- Pone en juego algunas prácticas asociadas a la construcción del sentido de la noción de fracción, como son visualizar, repartir y equivaler; que involucran acciones más concretas como reconfigurar, partir y comparar.
- Reconoce diferentes significados y construcciones que le son asociadas a las fracciones, esto, a partir de los referentes contextuales de cada persona.

A continuación, se presentan las intenciones de las tres etapas que constituyen la propuesta de situación de aprendizaje y, en particular, los elementos principales de cada tarea. En cada etapa, las prácticas visualizar, repartir, comparar y equivaler se hacen presentes de forma diversa.

➔ Etapa factual

En la primera situación de aprendizaje, la intención es abordar el reparto equitativo a partir de la partición equitativa y evidenciar una diversidad de estrategias que pueden presentarse al partir una misma unidad entera: 3 tabletas de chocolate.

Asimismo, se hace evidente que las formas de reparto pueden variar en función de la cantidad de personas o de cómo se elijan las partes. Estas variaciones permiten reconocer equivalencias y establecer relaciones parte-todo, ya que las diferentes formas de reparto con la misma unidad entera permiten llegar al mismo resultado matemático: $\frac{3}{4}$; aunque no precisamente el mismo desde el aspecto contextual: $\frac{3}{4}$ del mismo chocolate o $\frac{3}{4}$ de chocolates de diferente sabor.

En la segunda situación de aprendizaje se tiene como objetivo el reconocimiento de la existencia de una relación de orden a partir de una relación con la magnitud, en este caso, de tiempo: mientras más duradera es una actividad, mayor es la fracción que la representa, esto resulta importante para atender las dificultades asociadas al ordenamiento. Se busca, también, establecer relaciones y significados de la fracción del día con la cantidad de tiempo que representa y viceversa, es decir, la cantidad de tiempo que ocupa una actividad con la fracción del día que representa. Así, conceptualizar al día como el entero o el todo es la parte fundamental y la referencia para determinar las fracciones.

➔ Etapa procedimental

En la primera situación de aprendizaje, la intención es tratar con las equivalencias que se generan a partir de particiones que son múltiplos de otras, es decir, un chocolate partido en 6 y un chocolate partido en 12. Se busca también establecer el lenguaje que ayude a relacionar tales equivalencias. Estos aspectos inducen a proponer expresiones aditivas y determinar su correspondiente suma.

En la segunda situación de aprendizaje, la intención es el uso de la recta como representación de cualquier unidad entera, como lo es un día. Así, se busca analizar la fracción del día que ocupan las actividades para luego compararlas a partir de su longitud y ubicación en la recta.

➔ Etapa simbólica

En las dos situaciones, la etapa simbólica representa el trabajo con los símbolos asociados a las relaciones y representaciones previamente articuladas y significadas. Esto es, se trata con lo simbólico al nivel de los significados construidos. Cada situación presenta en toda su estructura un foco de atención particular: por un lado, la partición y la equivalencia, y por otra, la formación de unidad y el ordenamiento.

Respecto a la primera situación, el escenario del reparto de chocolates propicia la emergencia de la noción de equivalencia mediante la configuración y reconfiguración de repartos, para luego poder establecer operaciones aditivas que pueden ejecutarse desde la articulación de dichas equivalencias.

Respecto a la segunda situación, el escenario de la organización y comparación de actividades permite transitar la equivalencia de una relación de magnitud (A es más grande que B) a una relación de orden (A se encuentra después de B), para luego usar la recta para la organización de las fracciones o establecer la relación de orden que guardan.

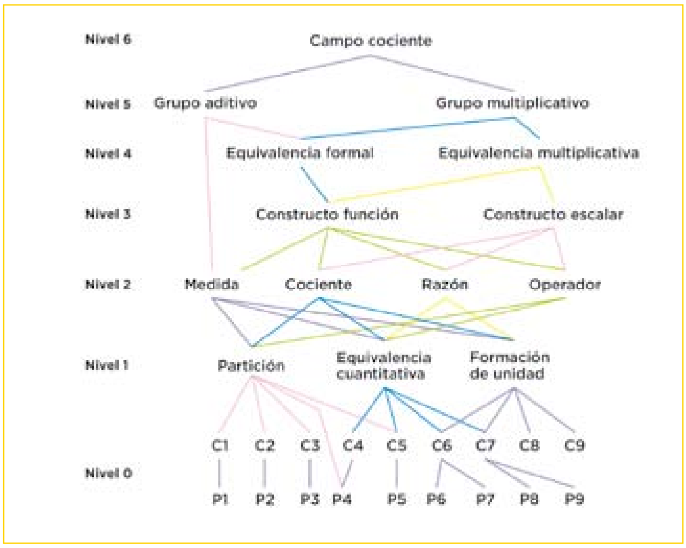
El desarrollo de estas etapas permite hacer comparaciones e interpretaciones del resultado del reparto (situación 1), además de construir la noción de equivalencia bajo la idea de diversas configuraciones del reparto (situación 1), que luego son profundizadas mediante el tránsito de una relación de magnitud a una relación de orden (situación 2).

Estos elementos son clave pues permiten evidenciar la funcionalidad de la práctica del reparto en escenarios de la vida cotidiana.

FUNDAMENTO TEÓRICO Y EXPLICACIONES DIDÁCTICAS

Fundamento teórico de las situaciones de aprendizaje

Las situaciones de aprendizaje sobre las fracciones se fundamentan en el análisis de la relación que guardan los constructos *partición, equivalencia cuantitativa* y *formación de la unidad*, que señala Kieren (1976 y 1988), en el modelo que plantea para el entendimiento de los números racionales y la comprensión de las fracciones.



Fuente: Flores (2010: 22).

Para el caso de las fracciones, se centrará la atención en los primeros dos niveles. En la base del modelo de Kieren (1976, 1988) se ubica el nivel cero, que alude a construcciones iniciales, conectadas con el plano del hecho; es decir, son construcciones sin nombre y relacionadas con "fragmentos locales de conocimiento específico de la situación" (Millsaps, 2005:19).

En el nivel 1, los constructos *partición, equivalencia cuantitativa* y *formación de la unidad* son los primeros en los que los/as estudiantes pueden solucionar algunos problemas de relaciones fraccionarias. Kieren (1988) los infiere como presentables por un lenguaje fraccional aditivo y como la base para el conocimiento de la fracción unitaria. Por otro lado, Behr, Lesh, Post y Silver (1983) conciben estos constructos como herramientas básicas de pensamiento para comprender el número racional.

Partición: alude al proceso de dividir un objeto en un número de partes ajenas y exhaustivas. Esto es, que las partes no se traslapan y que cualquier cosa está incluida en una de las partes. Además, al usar la palabra *partición* en el contexto de las fracciones, se da por hecho que las partes sean del mismo tamaño (Lamon, 1999). Asimismo, Lamon subraya que el proceso de partición descansa en el corazón de la comprensión de los números racionales y que es una acción fundamental para la producción de números, de conceptos matemáticos, de razonamiento y de operaciones. Por ello, existen fuertes razones para involucrar a los/as estudiantes en actividades de partición.

Equivalencia cuantitativa: se basa en el fundamento del constructo *contar*. Esta es una construcción fundamental que los/as estudiantes traen consigo de su trabajo con números enteros y sus operaciones (Millsaps, 2005). Además, se hace necesario que el constructo *equivalencia cuantitativa* se integre con el constructo *partición* para que los alumnos generen el concepto de fracción.

Formación de unidad: este constructo subyace al razonamiento informal sobre las fracciones y es esencial para desarrollar los conceptos más abstractos de número racional en el siguiente nivel del modelo. Al respecto, Mack (1993) señala cambios en el constructo necesarios para el concepto de número racional. Por ejemplo, la aplicación del concepto de unidad a cantidades continuas y discretas.

Los tres constructos están implicados en el razonamiento informal sobre situaciones de números racionales y, entre ellos, enlazan las experiencias iniciales de los niños con construcciones de números racionales.

En este sentido, la propuesta socioepistemológica parte de las experiencias para construir un objeto, esto es, se enfoca en acciones, actividades y prácticas situadas para hacer emerger de forma natural y gradual el objeto matemático *fracción*. Esto conlleva una significación local del objeto matemático. Así, la etapa factual se presenta para trabajar directamente con el objeto cuando éste aparece de forma natural en las situaciones; en la etapa procedimental se trabaja con los atributos del objeto para hacerlos visibles; y en la etapa simbólica se extrae su forma y las propiedades que tiene para poder operarlo.

De esta forma, el tratamiento del conocimiento tiene fundamento en las prácticas asociadas. Para el caso de fracciones, las que se identifican son: *visualizar*, *repartir* y *equivaler*.

Al igual que De León (1998), esta postura se sustenta en la psicología genética de Piaget, donde el conocimiento consiste en actuar sobre los objetos y transformarlos, a partir de la interacción directa con ellos o con materiales puestos en juego. Por tanto, el aprendizaje abordará al menos una dimensión cognitiva, una epistemológica y una social, en tanto se involucra al aprendiz en la generación de su conocimiento.

La práctica de visualizar, o la visualización, se hace presente en las actividades cuando el tamaño y la forma de la unidad entera o la parte juegan un rol en la manera en que se parte o se equivale.

Esta posibilidad de partir o no de cierta manera está asociada también a las experiencias que se tengan sobre los objetos, y que facilitan la acción, el sentido y la significación. Esto es, el tamaño del dibujo de un chocolate determina en el niño la posibilidad de partir o no; es decir, desde el momento en que el niño mira el objeto e interactúa con él, pone en juego sus experiencias y evalúa sus posibilidades.

Por ejemplo, en la experimentación de estas actividades, se identificó que el tamaño del chocolate que se iba a partir era relevante para poder definir la partición. También, la forma representó una variable relevante, ya que los niños no podían partir un chocolate de forma circular entre 8 personas, pero sí una pizza. En ambos casos, sus argumentos indicaron que los chocolates conocidos para ellos son pequeños, mientras que la pizza es de tamaño considerable para la partición solicitada.

Repartir lleva asociada la noción de justicia en tanto se busca que la partición sea en partes iguales para corresponderse con un tipo de reparto justo. De esta forma, que el estudiante haga la partición en las situaciones significa darle oportunidad de comprender lo que está pasando para elegir la forma de partir la unidad en partes iguales.

En las actividades de la situación de aprendizaje se solicita de forma directa e indirecta que se haga una partición o se determine cuál fue a partir del reparto establecido o la parte que se trabaja. Es decir, existe en las actividades la necesidad de reconstruir la unidad entera a partir de sus partes (la unidad de medida). Estas acciones de partición y reconstrucción de la unidad llevan involucradas prácticas de equivalencia.

La práctica de equivaler se hace presente al comparar y establecer relaciones entre la parte y el todo, entre partes de diferentes unidades o entre representaciones, en las acciones de repartir o reconstruir la unidad entera. La práctica de equivaler se presenta así de forma transversal.

De esta manera, el nivel de abstracción alcanzado estará acompañado del significado y sentido para quien hace las acciones de partir y repartir, equivaler (comparar e igualar), o formar la unidad. Es decir, del conocimiento situado puesto en juego.

Así, se da cuenta de que los procesos cognitivos no son los únicos responsables del aprendizaje, sino que las acciones y actividades articuladas en prácticas, contribuyen también al desarrollo del concepto de fracción.

Esto quiere decir que el aprendizaje de las fracciones no solo está en el plano cognitivo, sino también en otros planos que permiten trascender el tratamiento escolar basado en objetos sin significado hacia un tratamiento basado en prácticas con significado situado.

El énfasis en las relaciones de la unidad entera con la unidad de medida, o la parte, permiten que se trabaje con objetos con diferentes formas, tamaños y dimensiones, que son el primer tipo de interacciones que se ponen en juego en las situaciones. De esta forma, las actividades de reconstrucción de la unidad entera conceptualizan en mejor grado a la unidad de medida, porque ésta no se presenta aislada o desprendida, sino que es la que permite obtener la unidad entera asociada.

Explicaciones didácticas de las situaciones de aprendizaje

A continuación, se hace una descripción de la intencionalidad de las diferentes etapas de la situación de aprendizaje propuesta, cuyo objetivo consiste en construir significados para las fracciones a partir de un tratamiento que va de las prácticas que se desarrollan en una situación contextual, a los objetos matemáticos escolares, además de robustecer las nociones partición, formación de unidad y equivalencia al tratar con fracciones.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: PARTIR, REPARTIR Y COMPARTIR… SIN QUE SOBRE

➔ Etapa factual

Tarea 1. ¿Cómo repartir los chocolates de Facundo?

MOMENTO 1

Intención. Se pretende que el estudiante determine una estrategia de partición para repartir las 3 tabletas de chocolate con el fin de promover preguntas acerca de las características físicas de las tabletas. Es a través de la representación del dibujo de las tabletas de chocolate, que se configurará en el estudiante la conformación de una unidad entera a repartir y se evidenciará la partición elegida. La idea de reparto justo estará ligada a la elección de la partición, ya que es un rasgo que determinará la forma de partir las tabletas.

> Formen grupos de 3 o 4 integrantes y resuelvan las siguientes actividades.
>
> **1.** Facundo llevó chocolates a la escuela para compartir entre sus 5 amigos: Lucía, Malena, Sebastián, Diego y Matías. La mamá le dio 3 tabletas grandes de chocolate porque sabe que les encanta.
>
> a) Si fueran Facundo, ¿cómo harían el reparto para que les toque a todos (incluido él) la misma cantidad sin que sobre chocolate?
>
> b) ¿Cuánto le tocaría a cada uno?
>
> c) Dibujen las tabletas de chocolate y muestren a los demás grupos cómo las partirían.

MOMENTO 2

Intención. Se pretende considerar distintas maneras de reparto equitativo conservando la unidad a repartir, pero modificando la cantidad de personas a las que se reparten las tabletas de chocolate. Dos tipos de comparaciones se ponen en juego: primero, de la forma de partir las tabletas dadas las condiciones iniciales, que en el caso anterior fue de menor dificultad por el número de personas que había; segundo, que las particiones pueden ser diferentes entre los compañeros, aunque se tenga la misma unidad y el mismo número de personas. Al presentarse esto, la noción de equivalencia comienza a tomar forma.

2. Al día siguiente, Facundo llevó otras 3 tabletas de chocolate, pero en esta ocasión Sebastián y Diego no fueron a la escuela.

a) ¿Repartirían de la misma forma que antes? ¿Por qué?

b) ¿Cuánto le tocaría a cada uno?

c) ¿Piensan que es la única manera de partir las tabletas de chocolate? Pregunten a los compañeros de los otros grupos cómo las partirían ellos.

d) Compartan en un dibujo cómo lo harían.

Intención. Se pretende hacer una reflexión inversa sobre la relación entre las cantidades. Se dan como datos la unidad a repartir (3 tabletas de chocolate) y las características de la fracción a la cual se quiere llegar en la repartición (la cantidad de tabletas que toque: una tableta o mayor a una). Asimismo, se pregunta por la cantidad de personas a las cuales se reparte y así descubrir las características que debe tener el denominador de la fracción.

3. La mamá de Facundo le da, otra vez, 3 tabletas de chocolate.

a) ¿Cuántos de sus amigos tendrían que estar ese día en la escuela para recibir una tableta sin necesidad de partirla?

b) ¿Y para recibir más de una tableta?

c) Dibujen el reparto y compárenlo con el de los demás grupos.

d) ¿Todos propusieron los mismos repartos? ¿Por qué?

MOMENTO 3

Intención. Una de las consideraciones hechas en este momento, se encuentra ligada a la confrontación de estrategias al comparar $\frac{3}{4}$ de un mismo sabor de chocolate con $\frac{3}{4}$ obtenido de la suma de distintos sabores de chocolates. Se cuestiona la naturaleza de la obtención de los $\frac{3}{4}$ de una y otra estrategia ya que depende si se considera que tener sabores distintos está en juego o no y, además, propicia la reflexión sobre si las tabletas de chocolate se consideran o no del mismo tamaño. Si no fueran del mismo tamaño, entonces, los $\frac{3}{4}$ no representarían la misma cantidad en estas estrategias.

4. Como faltaron dos amigos, Facundo pensó una estrategia para repartir los chocolates entre Lucía, Malena, Matías y él. Se la mostró a su mamá y ella le propuso otra manera de repartirlos. Observá las dos estrategias. Considerá que los chocolates son distintos.

Estrategia de reparto propuesta por Facundo.

Tomar $\frac{1}{4}$ de chocolate blanco.

Tomar $\frac{1}{4}$ de chocolate amargo.

Tomar $\frac{1}{4}$ de chocolate semiamargo.

Es decir: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ a cada uno recibiría 3 pedacitos de chocolate, uno de cada sabor.

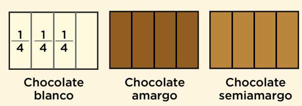
Estrategia de reparto propuesta por la mamá de Facundo.

Tomar:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ del chocolate blanco,

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ del chocolate amargo,

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ del chocolate semiamargo,



$\frac{1}{4}$ del chocolate blanco + $\frac{1}{4}$ del chocolate amargo + $\frac{1}{4}$ del chocolate semiamargo.

Es decir, el primero recibe $\frac{3}{4}$ del chocolate blanco; el segundo, $\frac{3}{4}$ del chocolate amargo; el tercero, $\frac{3}{4}$ del chocolate semiamargo y el cuarto, recibe $\frac{1}{4}$ de cada sabor de chocolate.

a) ¿Qué estrategia de reparto elegirías? Justificá tu respuesta.

b) ¿Será diferente lo que propone Facundo con respecto a lo que propone su mamá? ¿Acaso no reciben lo mismo en los dos casos? Justificá tu respuesta.

c) ¿Encontrás diferencias entre los $\frac{3}{4}$ a compartir considerando la primera o la segunda estrategia?

Etapa procedimental

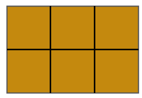
Tarea 2. Distintas particiones... ¿misma cantidad de chocolate?

MOMENTO 1

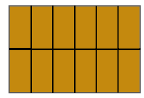
Intención. La actividad procura trabajar con unidades que conserven el tamaño, pero en las que se modifique la cantidad de particiones: chocolates de tamaños iguales, cuyas porciones son diferentes. El objetivo es significar la idea de fracciones equivalentes. Para ello, la tableta 1 se divide en sextos mientras que la tableta 2 se divide en doceavos. La asociación del lenguaje será fundamental para articular las representaciones que se muestran y fortalecer la idea de equivalencia e introducirse a la adición de fracciones.

El papá de Facundo encontró en el supermercado tabletas de chocolate de igual peso y tamaño, que ya vienen divididas. ¡Así son más fáciles para repartir! Observá las formas de las tabletas.

Tableta 1



Tableta 2



1. Si Facundo reparte entre sus 5 amigos la tableta 1, ¿les toca lo mismo que si reparte la tableta 2? ¿Por qué? Recordá que a Facundo también le gusta el chocolate y hay que incluirlo en el reparto.

2. Dibujá tabletas de chocolate en cartulina y dividilas como las tabletas 1 y 2 de la actividad anterior. Recortalas. Experimentá algunos repartos con tus compañeros para que les toque lo mismo de cada tableta, sin que sobre. Luego, resolvé las actividades.

a) Copiá la tabla y anotá los datos de cada reparto.

Cantidad de personas	¿Cuánto chocolate reciben de la tableta 1?	¿Cuánto chocolate reciben de la tableta 2?
1		
2		
3		
6	1 pedacito de 6	2 pedacitos de 12

b) ¿En cuántas partes está dividida cada tableta?

c) Cuando la cantidad de personas es 6, ¿es lo mismo decir que cada una recibe 1 pedacito de 6 de la tableta 1 o que recibe 2 pedacitos de 12 de la tableta 2? ¿Por qué?

MOMENTO 2

Intención. En esta actividad se proporcionan elementos para abrir el camino hacia la suma de fracciones equivalentes, evidenciando que al significar que $\frac{1}{6}$ equivale a $\frac{2}{12}$, es posible entonces reunir $\frac{1}{6} + \frac{2}{12}$. El número de personas elegidas no fue al azar, se procuró elegir un número que fuera sencillo de convertir a sextos y doceavos. El propósito final es que se articulen los significados construidos a las fracciones y sus equivalencias.

3. Tené en cuenta la tabla que completaste en la actividad anterior para responder.

a) Copiá esta tabla y completala.

Cantidad de personas	¿Cuánto chocolate reciben de la tableta 1?	¿Cuánto chocolate reciben de la tableta 2?	Si se junta la cantidad recibida de las dos tabletas hay...
1			
2			
3			
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{6} + \frac{2}{12}$

MOMENTO 3

Intención. Se continúa con la construcción de fracciones equivalentes y sus respectivas sumas. Con base en una misma unidad dividida en partes diferentes (sextos y doceavos), se solicita de manera explícita tener que elegir fracciones con denominador diferente y proceder a su suma. Así, se pondrán en juego tres ideas nodales: las comparaciones parte–todo, las equivalencias y la suma.

b) Si las dos tabletas se repartieran entre Facundo y dos amigos, ¿cómo se haría el reparto? ¿Cuánto recibirían de cada tableta?

- Tableta 1:
- Tableta 2:

c) ¿Cuánto chocolate recibirían en total?

MOMENTO 4

Intención. Con esta actividad, se reflexiona sobre la estrategia para realizar la suma de fracciones equivalentes y se confronta con la Tarea 1 en la que los chocolates tenían una partición igual, es decir, fracciones con igual denominador. Además, permite reflexionar sobre las diferencias de contar con las características de la forma y el tamaño de la unidad ya que robustece las nociones parte-todo y repartos equitativos.

4. Los chocolates tienen el mismo tamaño, pero no divisiones iguales. La tableta 1 tiene 6 pedazos. La tableta 2 tiene 12 pedazos.

a) ¿Cómo reuniste los pedazos de cada tableta para saber cuánto recibe cada uno?

b) ¿Considerás que en esta forma de repartir cada uno recibe lo mismo que en la tarea 1? Explicá tu respuesta.

→ Etapa simbólica

Tarea 3. De los repartos de chocolate a las fracciones

MOMENTO 1

Intención. Con esta actividad, se muestran las comparaciones entre el todo (la unidad) y las partes, así como una escritura en forma de un cociente $\frac{a}{b}$ para indicar cuántas partes de la unidad le toca a cada persona según sea el caso.

1. En la tabla se muestran varias representaciones que se pueden usar para hacer referencia a las fracciones. En grupos, completen la tabla.

2. Observá el ejemplo de las representaciones de la tabla, copiala y completala.

	Representaciones		
Cantidad de personas en las que se repartió la tableta de chocolate	Expresión coloquial de lo que le tocó a cada uno	Representación de la parte en la unidad entera, o sea, del chocolate	Representación en fracción
6	1 pedacito de 6		$\frac{1}{6}$
4	1 pedacito de 4		
			$\frac{1}{3}$
	2 pedacitos de 6		$\frac{2}{6}$
4	2 pedacitos de 8		

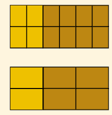
MOMENTO 2

Intención. Se propone una actividad que consolide la noción de fracciones equivalentes y las diferentes representaciones, haciendo hincapié en que la fracción es un solo número y no la idea de "un número sobre otro". El propósito de esta actividad es propiciar la suma de fracciones equivalentes al representar los sextos y los doceavos de tal manera que se observe que conservan el mismo tamaño de la parte que se considera. En este momento, son las relaciones establecidas y los significados construidos los que dan sentido a la operatividad de tales equivalencias.

MOMENTO 3

Intención. En esta actividad se modifican los denominadores de las fracciones para que se ponga en juego lo aprendido y se realicen sumas de fracciones equivalentes. Se concluye con una pregunta que permita hacer explícito cómo se realiza la suma de fracciones.

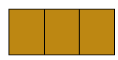
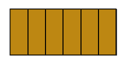
3. Observá el ejemplo que te proponemos:

REPRESENTACIÓN EN FRACCIÓN	REPRESENTACIÓN EN PORCIONES DE CHOCOLATE
$\frac{1}{6}$	
$\frac{2}{12}$	
$\frac{1}{6} + \frac{2}{12}$	 + 
$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$	

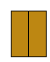
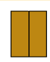
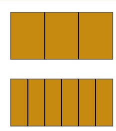
Las dos primeras representaciones son iguales, por lo tanto $\frac{1}{6}$ equivale a $\frac{2}{12}$.
Por ejemplo, es posible expresar la cantidad de un reparto de esas dos formas:
$\frac{2}{6}$ o $\frac{4}{12}$.
Entonces, $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ y $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$.

a) De acuerdo con la información proveniente de la tabla anterior, ¿qué otros pares de fracciones representan la misma cantidad de chocolate?

4. Observá estas nuevas tabletas y resolvé las actividades.

Tableta 1	Tableta 2
	

a) En grupos, copien y completen la tabla.

Representación en fracción	Representación en porciones de chocolate
	
	
	 + 
	

- ¿Cuáles son las equivalencias halladas?

b) ¿Cómo le explicarían a un compañero qué hacer para sumar fracciones?

Etapa factual

Tarea 1. ¿Qué actividades hacés en un día?

MOMENTO 1

Intención. Se busca que el estudiante reconozca sus actividades diarias en un escenario susceptible de ser medido e a través del tiempo, en particular, tomando como unidad entera el día de 24 horas. Se profundiza sobre la noción de formación de unidad, en donde la comparación y el ordenamiento juegan un papel importante (discusión que se profundiza en las actividades del próximo momento).

1. Anotá las 4 actividades que hiciste ayer. En todos los casos, usá números enteros para indicar las horas que les dedicaste. Por ejemplo, si hiciste actividad física durante 45 minutos, anotá 1 hora para esa actividad.

Actividad 1:

Actividad 2:

Actividad 3:

Actividad 4: Dormir

2. ¿Cuántas horas le dedicaste a cada una? Copiá y marcá en la franja que representa un día completo, la región que corresponde al tiempo que le dedicaste a cada una de las actividades.

MOMENTO 2

Intención. Esta actividad tiene la intención de evidenciar que las actividades diarias pueden ordenarse según la fracción del día que se le dedica (tiempo en horas). Su importancia radica en que, a través de la representación en la línea verde, el estudiante establece relaciones longitud-horas para determinar un orden. La articulación de representaciones, relaciones y significados entre la cantidad de horas, la fracción que ello representa y su representación pictórica, es el objetivo central de esta actividad.

3. Ordená las actividades de mayor a menor según el tiempo dedicado, sumando todas las horas que usaste durante el día para esa actividad.

4. Completá la tabla con lo que respondiste en la actividad anterior. Revisá el ejemplo. Considerá que el día tiene 24 horas.

ACTIVIDAD	¿Cuántas horas le dedicaste?	¿Qué parte del día le dedicaste a esta actividad?	¿Cómo se representa en fracción?
Ejemplo de Nico Dormir	10	10 de 24 horas	$\frac{10}{24}$
$\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{24}$			
Actividad 1:			
Actividad 2:			
Actividad 3:			
Actividad 4: Dormir			

MOMENTO 3

Intención. El cierre de la etapa factual tiene la intención de reflexionar sobre el orden establecido poniendo en duda si el orden ha sido el correcto. La noción de orden será un elemento fundamental que contribuirá en la representación de fracciones en la recta.

a) ¿Ubicaste correctamente la actividad "dormir"? ¿Es a la actividad que le dedicás más tiempo en el día?
b) Comentá con tu familia acerca de cuánto tiempo le dedicás a cada actividad.

➔ Etapa procedimental
Tarea 2. Organizar actividades

MOMENTO 1

Intención. En los ítems a y b de esta actividad se pone en juego la idea de partición, formación de unidad, equivalencia y orden. Por una parte, en el primer ítem se promueve la formación de la unidad: un conjunto de actividades dadas en términos de horas es trasladada a un sistema de referencia distinto, donde la unidad de referencia pasa de ser la hora a ser una región en la franja propuesta. Esta transición podría parecer inmediata, sin embargo, requiere del uso simultáneo de las tres primeras nociones relativas al aprendizaje de las fracciones. Por otra parte, en el segundo ítem se tiene la intención de correlacionar la noción de orden con lo que posteriormente será representado como una "parte del día" en términos de un total (el día entero), es decir, representar la equivalencia entre el tiempo y el entero mediante una fracción propia (menor que un entero).

1. Leé la siguiente situación. Luego, respondé.

Jorge, el papá de Carla, comentó por teléfono con su hermana las actividades que tenía que hacer el día siguiente: ir a buscar a sus hijos a la escuela, preparar la comida, ir a trabajar, hacer ejercicio, entre otras.
Antes de cortar la llamada dijo: "¡No me alcanzan las horas del día para hacer todo!".
Carla, que estaba escuchando a su papá, anotó todas las actividades y la cantidad de horas que le dedicará a cada una para intentar ayudarlo a organizarse.

a) Copiá la franja que representa la duración del día y marcá los tiempos y las actividades planeadas por el papá de Carla.

6 horas para trabajar	3 horas para cocinar
1 hora para almorzar	8 horas para dormir
2 horas para hacer ejercicio	4 horas para compartir con la familia

b) Ordená las actividades de mayor a menor según el tiempo que le dedicará a cada actividad.

c) Copiá la tabla y escribí una fracción que represente qué parte del total del día le dedicará a cada actividad. Recordá que el día tiene 24 horas.

Actividad	Fracción del día que la representa
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

MOMENTO 2

Intención. En el momento anterior, se propició un avance en el siguiente sentido: se parte de la formación de una unidad, se construye una equivalencia y se establece un orden entre las partes del todo analizado (lo que hace en un día). En este segundo momento, el sentido de las preguntas es inverso: dada una partición, se pide hacer la equivalencia correspondiente para reconocer la parte que le corresponde al todo (el día entero) y, finalmente, dar argumentos acerca del porqué la equivalencia es esa y no otra. Se introduce la recta numérica como parte de la actividad luego de haber pasado por distintas representaciones.

2. Observá la tabla con las actividades que hace la tía de Carla en un día. Luego, respondé.

Actividades	Parte del total del día
Dormir	$\frac{1}{3}$
Leer	$\frac{1}{6}$
Hacer las compras	$\frac{1}{24}$
Hacer ejercicio	$\frac{1}{8}$
Cocinar	$\frac{1}{12}$
Trabajar	$\frac{1}{4}$

a) Representá cada una de las actividades según la parte del día que le corresponde. Recordá que el entero es el día completo.

b) ¿Cuántas horas dedica a cada actividad?

c) ¿Cómo hacés para calcular el tiempo destinado a cada actividad? Explicalo.

MOMENTO 3

Intención. El cierre de la etapa procedimental promueve la comparación de partes obtenidas: las actividades del papá de Carla y las de su tía. El objetivo es reconocer la diferencia y el orden entre dos partes de diferentes unidades, pero de la misma naturaleza.

3. De acuerdo con la organización del día del papá y de la tía de Carla, contestá las siguientes preguntas:

a) ¿Quién le dedica más tiempo a cocinar?

b) ¿Quién duerme más tiempo?

c) ¿Cuál es la actividad a la que le dedica la mayor parte del día cada uno de ellos? ¿A cuál le dedican menos tiempo?

Etapa simbólica

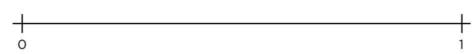
Tarea 3. Acordar medidas

MOMENTO 1

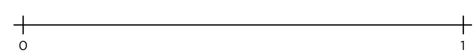
Intención. Esta tercera etapa busca alcanzar la representación del orden analizado en las etapas anteriores a través de una recta. Es

1. Tené en cuenta las actividades del papá y de la tía de Carla de tarea anterior. Las siguientes líneas representan un día entero. Copialas y marcá sobre cada una de ellas, la parte que corresponde a cada una de las actividades.

Papá de Carla



Tía de Carla



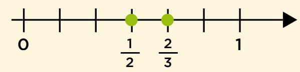
a) ¿De qué manera podés determinar que a una actividad se le dedica más tiempo que a otra?

decir, la parte pero situada en un sistema de referencia común. El objetivo es identificar el orden de las actividades de acuerdo con su duración respecto de un total (el día de 24 horas), lo que hace poner en juego, nuevamente, el significado asociado al orden de las fracciones.

MOMENTO 2

Intención. Esta actividad persigue dos objetivos específicos: el establecimiento de una relación de magnitud y de una relación de orden. Es decir, interesa que el estudiante identifique, en magnitud, qué fracción es mayor que otra; y en orden, qué fracción se encuentra antes que otra en la recta. Son estas relaciones las que permiten transitar entre las representaciones y articular la unidad entera con la recta numérica como representación.

2. En los siguientes casos, respondé qué relación (más grande, más pequeña o igual que) guardan cada una de las fracciones:

Parte	Relación	Parte	Representación en la recta
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	
$\frac{3}{12}$		$\frac{1}{4}$	
	es más grande que	$\frac{1}{2}$	
$\frac{4}{24}$		$\frac{1}{8}$	

3. Rodeá la opción correcta para completar las siguientes oraciones.

a) Si $\frac{1}{2}$ es más grande que $\frac{1}{3}$, entonces, en la recta numérica $\frac{1}{2}$ está a la **derecha/izquierda** de $\frac{1}{3}$. Es decir, $\frac{1}{2}$ se encuentra **antes/después** que $\frac{1}{3}$.

b) Si $\frac{3}{6}$ es equivalente a $\frac{4}{8}$, entonces, $\frac{4}{8}$ se encuentra **después/en el mismo lugar que** $\frac{1}{3}$ en la recta numérica.

CÓMO EVALUAR LOS PROCESOS DE PRODUCCIÓN DE LOS/AS ESTUDIANTES

Con el correr de los años, la evaluación en la escuela se convirtió en un criterio de acreditación y quedó relegada a la "prueba escrita". Sin embargo, la evaluación tiene distintos aspectos importantes en la escuela que no solo implican la acreditación.

> Sin desconocer que cada maestro tomará decisiones de promoción y acreditación en función de acuerdos institucionales y jurisdiccionales sobre criterios y parámetros, queremos poner énfasis en la idea de que un sentido fundamental de la evaluación es recoger información sobre el estado de los saberes de los alumnos, para luego tomar decisiones que permitan orientar las estrategias de enseñanza.
>
> Las producciones de los niños dan cuenta tanto de los resultados derivados de nuestras propias estrategias de enseñanza, como de lo que aprendieron y de sus dificultades. (ME, 2012)

Se considera entonces la evaluación formativa. Se llama así a un procedimiento usado por los/as docentes para adaptar un proceso didáctico a los progresos y necesidades observados en los/as estudiantes. De este modo se puede recoger información mientras los procesos se desarrollan con el fin de detectar logros, puntos débiles, identificar errores y posibles causas y poder tomar así decisiones respecto a lo que se enseña, cuándo y cómo se lo enseña.

Desde este punto de vista, cuando el/la estudiante no aprende no es solo debido a que no estudia, sino que puede ser atribuido y analizado desde múltiples factores como las actividades propuestas, los recursos utilizados, etc.

La evaluación formativa se construye a partir de la observación y conversación con los/as estudiantes y también analizando sus producciones. Esta evaluación brinda a los/as alumnos/as información para desarrollar una mayor autonomía y autorregulación de sus aprendizajes. También permite a los/as docentes adaptar las estrategias de enseñanza y los recursos utilizados a las características y necesidades individuales de los/as estudiantes.

En síntesis, la evaluación formativa sirve para que:

- los/as docentes
  - conozcan mejor a los/as estudiantes;
  - planifiquen su enseñanza ajustando el ritmo y presentación de los desafíos de aprendizajes a las características de los/as estudiantes;

- los/as estudiantes
  - comprendan la forma en la que aprenden mejor;
  - mejoren su aprendizaje;
  - se autoevalúen y comprendan cuán bien aprendieron.

Uno de los objetivos a lograr es entonces proponer actividades que permitan apropiarse de la metacognición, es decir, la capacidad de autorregular los procesos de aprendizaje. Para ello es necesario presentar a los/as estudiantes actividades que les permitan dar cuenta de sus aprendizajes. Es posible pensar en preguntas como:

- ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que te resultaron claves para resolver la actividad?
- ¿Cuáles son las estrategias que te resultaron complejas? ¿Cuáles te resultaron fáciles?
- ¿Qué aspectos de esta actividad podés guardarte para usarlos en otras?
- ¿Cuáles son las consignas que te resultaron difíciles? ¿Podrías descubrir el motivo por la que fueron difíciles?
- ¿Qué aprendiste hoy? ¿Qué conceptos no terminaste de entender?

Es fundamental que los/as estudiantes contesten estas preguntas de modo escrito y puedan recurrir a ellas luego de distintas secuencias didácticas. De este modo, todo lo expuesto se vuelve parte de sus aprendizajes y favorece el logro de la autonomía en la resolución.

Finalmente, para que la evaluación permita lograr los objetivos planteados, es necesario explicitar los criterios adoptados a los/as estudiantes. Según Toranzos (2014), esto permite:

> a. la necesaria transparencia de los procesos de evaluación;
> b. el resaltar el papel de la evaluación como un elemento que contribuye al desarrollo de procesos metacognitivos, es decir de reflexión activa de los alumnos sobre su propio proceso de aprendizaje.

Una forma de lograr todos los objetivos propuestos anteriormente es mediante el armado de rúbricas. Una rúbrica es una guía usada en la evaluación del desempeño de los/as estudiantes que describe las características específicas de un producto, proyecto o tarea en varios niveles de rendimiento. Se arma para clarificar lo que se espera del trabajo del estudiante y facilitar así la retroalimentación.

A partir de una rúbrica bien hecha, se logra:

- informar a los/as estudiantes acerca de sus saberes;
- fomentar el aprendizaje autónomo y la autoevaluación;
- anticipar los criterios de evaluación;
- promover la responsabilidad de los/as estudiantes frente a sus aprendizajes.

Para estos materiales, una rúbrica posible podría ser:

	Siempre	Casi siempre	A veces	Nunca
Entiende los enunciados de las situaciones				
Puede leer la información escrita en distintos registros de representación				
Comprende la relación entre una parte de un objeto y una fracción				
Entre dos fracciones puede decidir cuál es mayor				
Comprende la relación de equivalencia que existe entre dos representaciones de la misma fracción				
Puede relacionar el resultado de un reparto equitativo con una fracción				
Puede relacionar la ubicación de una fracción con la recta numérica				
Escucha y aprende de los debates áulicos				
Argumenta sus posturas con claridad				
Logra comprender sus errores y comenzar a partir de ellos				

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver, E. (1983). “Rational number concepts”. En Lesh, R. y Landau, M. (eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes*, pp. 91-126. New York: Academic Press.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa

De León, H. (1998). “Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1 (2), 5-28. Disponible en: https://clame.org.mx/relime/199901a.pdf.

Flores, R. (2010). *La enseñanza de las fracciones en la escuela secundaria.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México.

Kieren, T. (1976). “On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers”. En Lesh, R. (ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop*, pp. 101-144. Ohio: ERIC/SMEAC..

Kieren, T. (1988). “Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development”. En Hiebert, J. y Behr, M. (eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, pp. 162-181. Virgina: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associate.

Millsaps, G. M. (2005). *Interrelationships between teacher’s content knowledge of rational number, their instructional practice, and students’ emergent conceptual knowledge of rational number.* Tesis de doctorado no publicada, Ohio State University, Columbus.

Ministerio de Educación (2011). *Núcleos de aprendizajes prioritarios*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación (2012). *Cuadernos para el aula. Matemática 4*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación (2018). *Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios de Matemática*. Buenos Aires: Ministerio de de Educación.

Secretaría de Educación Pública (2013). ENLACE. Primaria, cuarto grado. México: SEP.

Toranzos, L. V. (2014). “Evaluación educativa: hacia la construcción de un espacio de aprendizaje”. *Propuesta Educativa*, 41, 9-19. Buenos Aires: FLACSO.

Comparar y equivaler

PARTIR, REPARTIR Y COMPARTIR… SIN QUE SOBRE

¿Alguna vez compartiste figuritas con tus amigos? Si pudiste repartirlas, ¿cómo lo hiciste? ¿Compartiste alguna vez chocolates con tus amigos? ¿Cómo lo hiciste? ¿Podés repartir equitativamente las figuritas cuando tenés más figuritas que amigos? ¿Por qué? ¿Y si en lugar de figuritas fueran chocolates?
¿Cuáles son las diferencias entre repartir equitativamente figuritas que chocolates?
¿Qué es más fácil: repartirlos cuando son más chocolates que amigos, o cuando son más amigos que chocolates?

TAREA 1. ¿Cómo repartir los chocolates de Facundo?

Formen grupos de 3 o 4 integrantes y resuelvan las siguientes actividades.

1. Facundo llevó chocolates a la escuela para compartir entre sus 5 amigos: Lucía, Malena, Sebastián, Diego y Matías. La mamá le dio 3 tabletas grandes de chocolate porque sabe que les encanta.

a) Si fueran Facundo, ¿cómo harían el reparto para que les toque a todos (incluido él) la misma cantidad sin que sobre chocolate?

b) ¿Cuánto le tocaría a cada uno?

c) Dibujen las tabletas de chocolate y muestren a los demás grupos cómo las partirían.

2. Al día siguiente, Facundo llevó otras 3 tabletas de chocolate, pero en esta ocasión Sebastián y Diego no fueron a la escuela.

a) ¿Repartirían de la misma forma que antes? ¿Por qué?

b) ¿Cuánto le tocaría a cada uno?

c) ¿Piensan que es la única manera de partir las tabletas de chocolate? Pregunten a los compañeros de los otros grupos cómo las partirían ellos.

d) Compartan en un dibujo cómo lo harían.

3. La mamá de Facundo le da, otra vez, 3 tabletas de chocolate.

a) ¿Cuántos de sus amigos tendrían que estar ese día en la escuela para recibir una tableta sin necesidad de partirla?

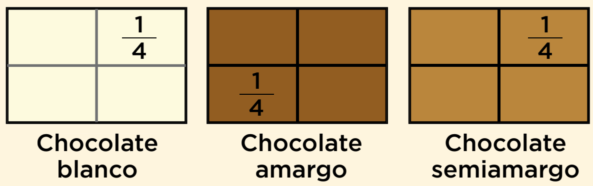
b) ¿Y para recibir más de una tableta?

c) Dibujen el reparto y compárenlo con el de los demás grupos.

d) ¿Todos propusieron los mismos repartos? ¿Por qué?

4. Como faltaron dos amigos, Facundo pensó una estrategia para repartir los chocolates entre Lucía, Malena, Matías y él. Se la mostró a su mamá y ella le propuso otra manera de repartirlos. Observá las dos estrategias. Considerá que los chocolates son distintos.

Estrategia de reparto propuesta por Facundo.



Tomar $\frac{1}{4}$ de chocolate blanco.

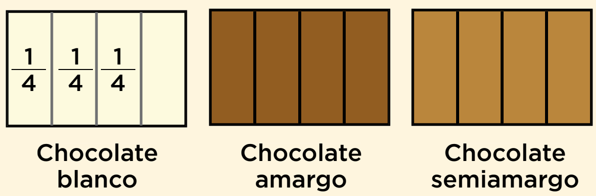
Tomar $\frac{1}{4}$ de chocolate amargo.

Tomar $\frac{1}{4}$ de chocolate semiamargo.

Es decir: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ a cada uno recibiría 3 pedacitos de chocolate, uno de cada sabor.

Estrategia de reparto propuesta por la mamá de Facundo.

Tomar:



$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ del chocolate blanco,

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ del chocolate amargo,

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ del chocolate semiamargo,

$\frac{1}{4}$ del chocolate blanco + $\frac{1}{4}$ del chocolate amargo + $\frac{1}{4}$ del chocolate semiamargo.

Es decir, el primero recibe $\frac{3}{4}$ del chocolate blanco; el segundo, $\frac{3}{4}$ del chocolate amargo; el tercero, $\frac{3}{4}$ del chocolate semiamargo y el cuarto, recibe $\frac{1}{4}$ de cada sabor de chocolate.

a) ¿Qué estrategia de reparto elegirías? Justificá tu respuesta.

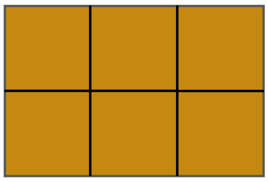
b) ¿Será diferente lo que propone Facundo con respecto a lo que propone su mamá? ¿Acaso no reciben lo mismo en los dos casos? Justificá tu respuesta.

c) ¿Encontrás diferencias entre los $\frac{3}{4}$ a compartir considerando la primera o la segunda estrategia?

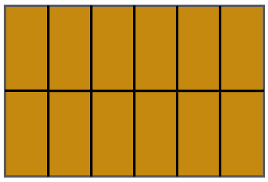
TAREA 2. Distintas particiones... ¿misma cantidad de chocolate?

El papá de Facundo encontró en el supermercado tabletas de chocolate de igual peso y tamaño, que ya vienen divididas. ¡Así son más fáciles para repartir! Observá las formas de las tabletas.

Tableta 1



Tableta 2



1. Si Facundo reparte entre sus 5 amigos la tableta 1, ¿les toca lo mismo que si reparte la tableta 2? ¿Por qué? Recordá que a Facundo también le gusta el chocolate y hay que incluirlo en el reparto.

2. Dibujá tabletas de chocolate en cartulina y dividilas como las tabletas 1 y 2 de la actividad anterior. Recortalas. Experimentá algunos repartos con tus compañeros para que les toque lo mismo de cada tableta, sin que sobre. Luego, resolvé las actividades.

a) Copiá la tabla y anotá los datos de cada reparto.

Cantidad de personas	¿Cuánto chocolate reciben de la tableta 1?	¿Cuánto chocolate reciben de la tableta 2?
1		
2		
3		
6	1 pedacito de 6	2 pedacitos de 12

b) ¿En cuántas partes está dividida cada tableta?

c) Cuando la cantidad de personas es 6, ¿es lo mismo decir que cada una recibe 1 pedacito de 6 de la tableta 1 o que recibe 2 pedacitos de 12 de la tableta 2? ¿Por qué?

3. Tené en cuenta la tabla que completaste en la actividad anterior para responder.

a) Copiá esta tabla y completala.

Cantidad de personas	¿Cuánto chocolate reciben de la tableta 1?	¿Cuánto chocolate reciben de la tableta 2?	Si se junta la cantidad recibida de las dos tabletas hay...
1			
2			
3			
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{6} + \frac{2}{12}$

b) Si las dos tabletas se repartieran entre Facundo y dos amigos, ¿cómo se haría el reparto? ¿Cuánto recibirían de cada tableta?

- Tableta 1:
- Tableta 2:

c) ¿Cuánto chocolate recibirían en total?

4. Los chocolates tienen el mismo tamaño, pero no divisiones iguales. La tableta 1 tiene 6 pedazos. La tableta 2 tiene 12 pedazos.

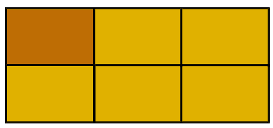
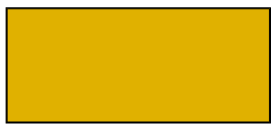
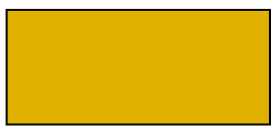
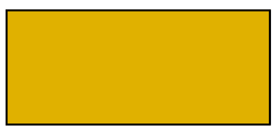
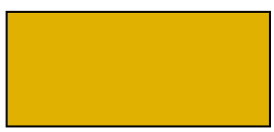
a) ¿Cómo reuniste los pedazos de cada tableta para saber cuánto recibe cada uno?

b) ¿Considerás que en esta forma de repartir cada uno recibe lo mismo que en la tarea 1? Explicá tu respuesta.

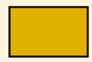
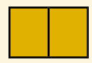
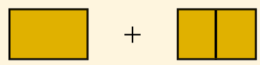
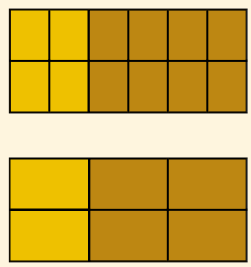
TAREA 3. De los repartos de chocolate a las fracciones

1. En la tabla se muestran varias representaciones que se pueden usar para hacer referencia a las fracciones. En grupos, completen la tabla.

2. Observá el ejemplo de las representaciones de la tabla, copiala y completala.

	Representaciones		
Cantidad de personas en las que se repartió la tableta de chocolate	**Expresión coloquial de lo que le tocó a cada uno**	**Representación de la parte en la unidad entera, o sea, del chocolate**	**Representación en fracción**
6	1 pedacito de 6		$\frac{1}{6}$
4	1 pedacito de 4		
			$\frac{1}{3}$
	2 pedacitos de 6		$\frac{2}{6}$
4	2 pedacitos de 8		

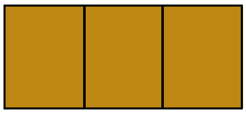
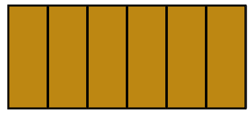
3. Observá el ejemplo que te proponemos:

REPRESENTACIÓN EN FRACCIÓN	REPRESENTACIÓN EN PORCIONES DE CHOCOLATE
$\frac{1}{6}$	
$\frac{2}{12}$	
$\frac{1}{6} + \frac{2}{12}$	
$\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$	

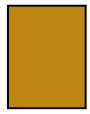
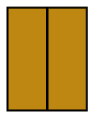
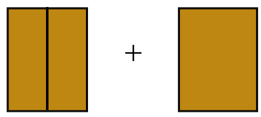
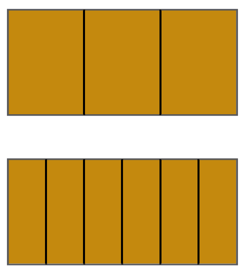
Las dos primeras representaciones son iguales, por lo tanto $\frac{1}{6}$ equivale a $\frac{2}{12}$.
Por ejemplo, es posible expresar la cantidad de un reparto de esas dos formas: $\frac{2}{6}$ o $\frac{4}{12}$.
Entonces, $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ y $\frac{2}{6} = \frac{4}{12}$.

a) De acuerdo con la información proveniente de la tabla anterior, ¿qué otros pares de fracciones representan la misma cantidad de chocolate?

4. Observá estas nuevas tabletas y resolvé las actividades.

Tableta 1	**Tableta 2**
	

a) En grupos, copien y completen la tabla.

Representación en fracción	Representación en porciones de chocolate
	
	
	
	

- ¿Cuáles son las equivalencias halladas?

b) ¿Cómo le explicarían a un compañero qué hacer para sumar fracciones?

COMPARAR Y ORDENAR

Seguramente, te resulte más fácil contar cosas "completas" o enteras. No obstante, en la vida cotidiana es mucho más común tener "partes de cosas completas", por ejemplo: media hora, medio día, un cuarto de queso, entre otros.
Es importante no perder de vista esas partes y saber cómo compararlas.

TAREA 1. ¿Qué actividades hacés en un día?

1. Anotá las 4 actividades que hiciste ayer. En todos los casos, usá números enteros para indicar las horas que les dedicaste. Por ejemplo, si hiciste actividad física durante 45 minutos, anotá 1 hora para esa actividad.

Actividad 1:

Actividad 2:

Actividad 3:

Actividad 4: Dormir

2. ¿Cuántas horas le dedicaste a cada una? Copiá y marcá en la franja que representa un día completo, la región que corresponde al tiempo que le dedicaste a cada una de las actividades.

3. Ordená las actividades de mayor a menor según el tiempo dedicado, sumando todas las horas que usaste durante el día para esa actividad.

4. Completá la tabla con lo que respondiste en la actividad anterior. Revisá el ejemplo. Considerá que el día tiene 24 horas.

ACTIVIDAD	¿Cuántas horas le dedicaste?	¿Qué parte del día le dedicaste a esta actividad?	¿Cómo se representa en fracción?
Ejemplo de Nico Dormir	10	10 de 24 horas	$\frac{10}{24}$
			
Actividad 1:			
			
Actividad 2:			
			
Actividad 3:			
			
Actividad 4: Dormir			
			

a) ¿Ubicaste correctamente la actividad "dormir"? ¿Es a la actividad que le dedicás más tiempo en el día?

b) Comentá con tu familia acerca de cuánto tiempo le dedicás a cada actividad.

TAREA 2. Organizar actividades

1. Leé la siguiente situación. Luego, respondé.

Jorge, el papá de Carla, comentó por teléfono con su hermana las actividades que tenía que hacer el día siguiente: ir a buscar a sus hijos a la escuela, preparar la comida, ir a trabajar, hacer ejercicio, entre otras.

Antes de cortar la llamada dijo: "¡No me alcanzan las horas del día para hacer todo!".

Carla, que estaba escuchando a su papá, anotó todas las actividades y la cantidad de horas que le dedicará a cada una para intentar ayudarlo a organizarse.

a) Copiá la franja que representa la duración del día y marcá los tiempos y las actividades planeadas por el papá de Carla.

6 horas para trabajar	3 horas para cocinar
1 hora para almorzar	8 horas para dormir
2 horas para hacer ejercicio	4 horas para compartir con la familia

b) Ordená las actividades de mayor a menor según el tiempo que le dedicará a cada actividad.

c) Copiá la tabla y escribí una fracción que represente qué parte del total del día le dedicará a cada actividad. Recordá que el día tiene 24 horas.

Actividad	Fracción del día que la representa
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

2. Observá la tabla con las actividades que hace la tía de Carla en un día. Luego, respondé.

Actividades	Parte del total del día
Dormir	$\frac{1}{3}$
Leer	$\frac{1}{6}$
Hacer las compras	$\frac{1}{24}$
Hacer ejercicio	$\frac{1}{8}$
Cocinar	$\frac{1}{12}$
Trabajar	$\frac{1}{4}$

a) Representá cada una de las actividades según la parte del día que le corresponde. Recordá que el entero es el día completo.

b) ¿Cuántas horas dedica a cada actividad?

c) ¿Cómo hacés para calcular el tiempo destinado a cada actividad? Explicalo.

3. De acuerdo con la organización del día del papá y de la tía de Carla, contestá las siguientes preguntas:

a) ¿Quién le dedica más tiempo a cocinar?

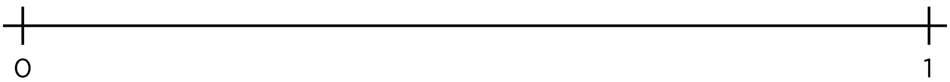
b) ¿Quién duerme más tiempo?

c) ¿Cuál es la actividad a la que le dedica la mayor parte del día cada uno de ellos? ¿A cuál le dedican menos tiempo?

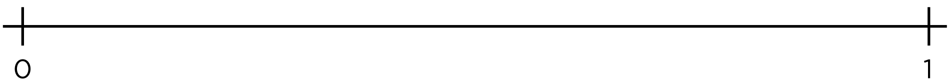
TAREA 3. Acordar medidas

1. Tené en cuenta las actividades del papá y de la tía de Carla de tarea anterior. Las siguientes líneas representan un día entero. Copialas y marcá sobre cada una de ellas, la parte que corresponde a cada una de las actividades.

Papá de Carla

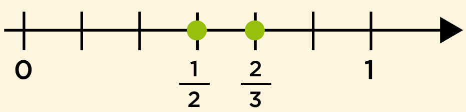


Tía de Carla



a) ¿De qué manera podés determinar que a una actividad se le dedica más tiempo que a otra?

2. En los siguientes casos, respondé qué relación (más grande, más pequeña o igual que) guardan cada una de las fracciones:

Parte	Relación	Parte	Representación en la recta
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	
$\frac{3}{12}$		$\frac{1}{4}$	
	es más grande que	$\frac{1}{2}$	
$\frac{4}{24}$		$\frac{1}{8}$	

3. Rodeá la opción correcta para completar las siguientes oraciones.

a) Si $\frac{1}{2}$ es más grande que $\frac{1}{3}$, entonces, en la recta numérica $\frac{1}{2}$ está a la **derecha/izquierda** de $\frac{1}{3}$. Es decir, $\frac{1}{2}$ se encuentra **antes/después** que $\frac{1}{3}$.

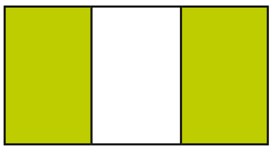
b) Si $\frac{3}{6}$ es equivalente a $\frac{4}{8}$, entonces, $\frac{4}{8}$ se encuentra **después/en el mismo lugar que** $\frac{1}{3}$ en la recta numérica.

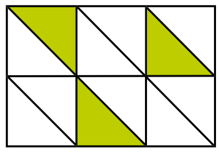
ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

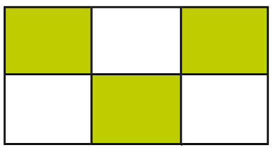
ACTIVIDAD 1.

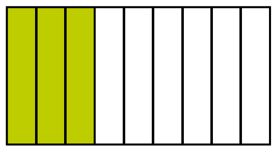
Misma figura pintada de maneras distintas

Javier pintó cada uno de los siguientes rectángulos de diferente forma. ¿En cuál de ellos pintó un tercio del rectángulo con color verde?

a) 

b) 

c) 

d) 

ACTIVIDAD 2.

¿Quién recibió más?

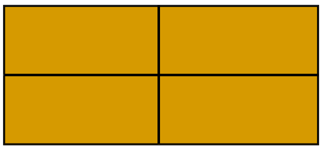
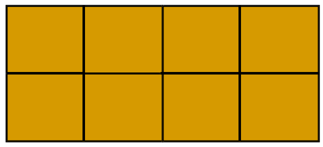
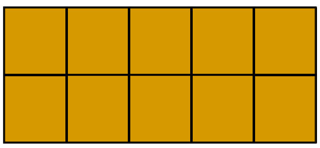
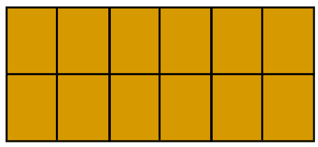
1. En la fiesta de cumpleaños de Manuel se repartió la torta y cada chico recibió las siguientes cantidades: Malena, $\frac{1}{3}$ de la torta; Mila, $\frac{1}{6}$; Daniela, $\frac{2}{9}$ y Manuel recibió $\frac{1}{9}$. ¿Quién recibió más torta? ¿Se comieron toda la torta?

ACTIVIDAD 3.

Más chocolates para repartir

1. A Sofi se le antojó comer chocolates y buscó las tabletas que tenía en casa. Pidió a sus 5 amigas que repartieran las 4 tabletas de chocolates que encontró, entre todas por igual. ¿Entre cuántas personas repartieron el chocolate?

2. Estos son los chocolates que Sofi encontró en su casa.

Tableta 1 	**Tableta 2** 
Tableta 3 	**Tableta 4** 

a) ¿Son todos los chocolates iguales? Completá la lista de similitudes y diferencias en tu carpeta.

- Similitudes: mismo sabor, mismo peso ____________________.
- Diferencias:

b) ¿A alguien le tocará más de una tableta? ¿Por qué?

c) ¿Qué porción de cada tableta de chocolate le corresponde a cada una?

d) Representá en forma de fracción la parte que le corresponde a Sofi.

e) Reuní la parte que le corresponde a Sofi de cada chocolate y escribila en una sola fracción.

ACTIVIDAD 4.

Repartir sin que sobre

1. Se repartieron 5 alfajores entre 4 chicos de manera equitativa y sin que sobre nada. ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones indican cuánto le tocó a cada uno de los chicos?

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

b) $1 + \frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

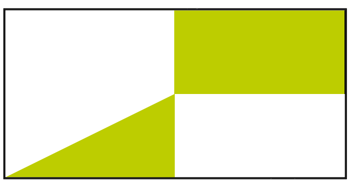
d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

ACTIVIDAD 5.

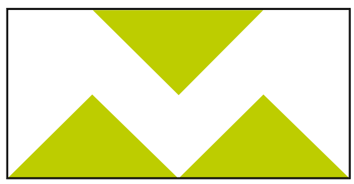
Partes iguales

2. Analizá las siguientes figuras y señala cuáles de las porciones sombreadas de verde aparentan ser $\frac{3}{8}$ del área del rectángulo. Argumentá tu respuesta.

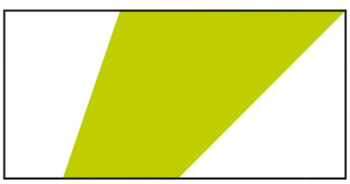
a)



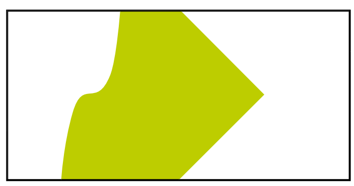
b)



c)



d)

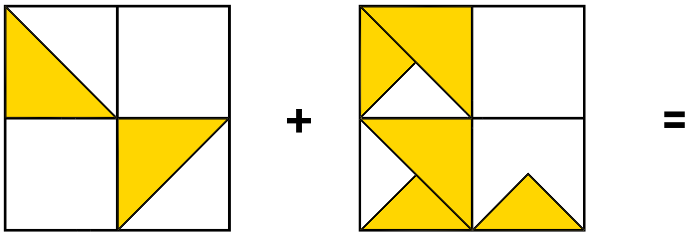


ACTIVIDAD 6.

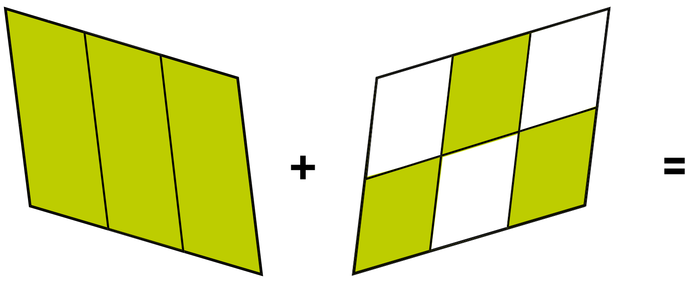
Equivalencias

1. Encontrá la fracción que sea el resultado de sumar las fracciones que se representan gráficamente en cada caso.

a)



b)

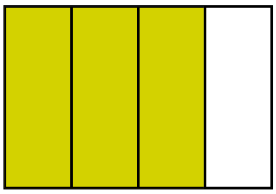


ACTIVIDAD 7.

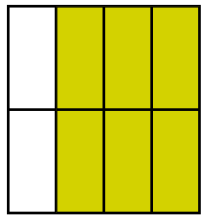
Fracciones de área

1. ¿Cuáles son las dos figuras que tienen sombreada la misma fracción de su área?

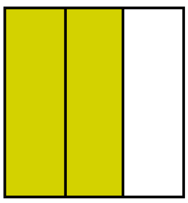
I



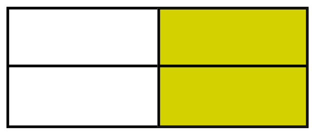
II



III



IV



a) I y IV.

b) II y III.

c) I y II.

d) III y IV.

+INNOVACIÓN

+CREATIVIDAD

+EVOLUCIÓN

Ministerio de Educación,
Cultura, Ciencia y Tecnología
Presidencia de la Nación