

Aproximar y optimizar



NIVEL
PRIMARIO

Presidente de la Nación

Mauricio Macri

Jefe de Gabinete de Ministros

Marcos Peña

Ministro de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología

Alejandro Finocchiaro

Secretario de Gobierno de Cultura

Pablo Avelluto

Secretario de Gobierno de Ciencia, Tecnología e Innovación Productiva

Lino Barañao

**Titular de la Unidad de Coordinación General
del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología**

Manuel Vidal

Secretaria de Innovación y Calidad Educativa

Mercedes Miguel

Aproximar y optimizar

¿Qué hacés con
lo que sobra?

**NIVEL
PRIMARIO**

Secretaría de Innovación y Calidad Educativa
Mercedes Miguel

Directora Nacional de Planeamiento de Políticas Educativas
Inés Cruzalegui

Director de Diseño de Aprendizajes
Hugo Labate

Desarrollo de contenido: Equipo del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. **Coordinadora:** Daniela Reyes. **Diseño:** Ricardo Cantoral, Javier Lezama, Rebeca Flores, Angélica Moreno, Gabriela Buendía, Cristian Paredes, Wendolyne Ríos, Viridiana García, Selvin Galo. **Revisión:** Claudia Rodríguez

Revisión técnica: Equipo de Matemática de la Dirección de Diseño de Aprendizajes

Plan Nacional de Lectura y Escritura / Coordinación de Materiales Educativos

Coordinadora: Alicia Serrano

Responsable de publicaciones: Gonzalo Blanco

Documentación gráfica: Javier Rodríguez

Diseño, armado y diagramación: Clara Batista, Juan De Tullio, Alejandra Mosconi, Mario Pesci, Paula Salvatierra, Elizabeth Sánchez

Producción de gráficos: Fabián Ledesma

Fotografía: Gastón Garino, Santiago Radosevich

Edición y corrección: Viviana Herrero, Myriam Ladcani, Daniela Parada, Jennifer Pochne

Ilustraciones: Mariano Pais

Cartografía: José Pais

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología

Aproximar y optimizar : ¿Qué hacés con lo que sobra?. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019.
48 p. ; 28 x 21 cm. - (Plan Nacional Aprender Matemática)

ISBN 978-987-784-004-9

1. Matemática. 2. Didáctica. I. Título.
CDD 510.7

PRESENTACIÓN

Bienvenidos a una etapa de trabajo compartido que nos permitirá abordar la necesidad de construir aprendizajes significativos para la vida de todos y cada uno de nuestros niños, niñas y adolescentes a lo largo de su escolaridad. Porque sabemos que viven en una sociedad donde el conocimiento es y será cada vez más la base sólida sobre la que construirán su futuro.

Nos une el objetivo de lograr que cada estudiante que ingresa al sistema educativo pueda llegar al día de su egreso con los saberes fundamentales para el futuro que lo espera.

El **Plan Nacional Aprender Matemática** es el resultado del consenso y compromiso logrado entre todos los ministros y ministras en el seno del Consejo Federal de Educación. Allí se asumió la responsabilidad de mejorar el nivel de enseñanza y aprendizaje de la matemática a lo largo de todo el país, reconociendo su trascendental importancia en la formación integral de los niños, niñas y jóvenes y en sus oportunidades de acceso a los estudios superiores y al mundo laboral.

Una de las dimensiones más importantes del plan es la formación docente continua orientada a la búsqueda de la transformación y la mejora de la práctica de la enseñanza. Es por ello que este cuadernillo presenta una estrategia alternativa para llevar a las aulas, que los docentes podrán utilizar como insumo para enriquecer su tarea cotidiana.

Este abordaje de la formación continua implica asimismo el acompañamiento en el proceso de mejora, y la elaboración de redes de aprendizaje colaborativo entre los docentes. De este modo, se busca generar un conocimiento sobre la matemática educativa basado en el trabajo entre pares, sostenible y efectivo.

Confiamos en la potencia del hacer juntos y en la visión común de los ministros y ministras que abrieron camino a esta iniciativa. Estamos seguros de que servirá para compartir las buenas prácticas, potenciar las mejores experiencias y asumir la hermosa tarea de ser agentes de cambio en nuestra querida Argentina.

Alejandro Finocchiaro
Ministro de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 7

La división con análisis del resto en el segundo ciclo de la Educación Primaria..... 7

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 9

Estructura general: ¿qué se propone? 9

Etapa factual..... 11

Etapa procedimental 11

Etapa simbólica 11

FUNDAMENTO TEÓRICO Y EXPLICACIONES DIDÁCTICAS 13

Fundamento teórico de las situaciones de aprendizaje 13

Explicaciones didácticas de las situaciones de aprendizaje 16

Situación de aprendizaje: ¿Qué se reparte? ¿cómo se reparte?
¿Cuántas veces se reparte? ¿Sobra? 16

Etapa factual: Tarea 1. ¿Cuántos caramelos caben en cada frasco?... 16

Etapa procedimental: Tarea 2. ¿Cuántos caramelos para
cada amigo?..... 17

Etapa simbólica: Tarea 3. Los elementos del reparto 19

Situación de aprendizaje: ¿Cómo comprar más...? 21

Etapa factual: Tarea 1. ¿Para qué te alcanza?..... 21

Etapa procedimental: Tarea 2. ¿Cómo comprar más? 21

Etapa simbólica: Tarea 3. Comparar cantidades 22

CÓMO EVALUAR LOS PROCESOS DE PRODUCCIÓN DE LOS/AS ESTUDIANTES 24

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 27

ANEXO. LIBRO DE ESTUDIANTES 29

(La paginación de este anexo corresponde a la del Libro de estudiantes.)

INTRODUCCIÓN

La división con análisis del resto en el segundo ciclo de la Educación Primaria

Durante el segundo ciclo de la Educación Primaria, se busca el acercamiento entre los/as estudiantes y diversas situaciones de enseñanza que promuevan su participación en problemas relevantes para la vida.

Para alcanzar tal fin, el Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología ha propuesto un conjunto de saberes primordiales: los *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios* (NAP) que, recientemente, ha complementado con los *Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios* (IPAP), que son las formulaciones que expresan los aprendizajes prioritarios mínimos que se espera que puedan lograr los/as estudiantes.

En este cuadernillo se trabajarán aquellos relativos a la *división con análisis del resto*.

NÚCLEOS DE APRENDIZAJES PRIORITARIOS (NAP)	G R A D O	INDICADORES DE PROGRESIÓN DE LOS APRENDIZAJES PRIORITARIOS (IPAP)
El reconocimiento y uso de las operaciones entre números naturales y la explicitación de sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran:		
Multiplicar y dividir con distintos significados, utilizando distintos procedimientos –con y sin calculadora–, decidiendo si se requiere un cálculo exacto o aproximado y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.	4º	Resolver situaciones aditivas y multiplicativas con distintos significados que involucren sumar, restar, multiplicar y/o dividir números naturales, decidiendo si se requieren cálculos exactos o aproximados, usando distintos procedimientos (con o sin calculadora) y evaluando la razonabilidad del resultado obtenido.
Explicitar relaciones numéricas vinculadas a la división y a la multiplicación (múltiplo, divisor, $D = d \times c + r$)	5º	Explicitar relaciones numéricas vinculadas a la multiplicación y división (múltiplos, divisores).
Producir y analizar afirmaciones sobre relaciones numéricas vinculadas a la divisibilidad y argumentar sobre su validez.	6º	Resolver situaciones que propongan explicitar y usar múltiplos y divisores y la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto de una división y producir, analizar y argumentar acerca de la validez de afirmaciones sobre las relaciones numéricas vinculadas a la divisibilidad.

Para que los/as estudiantes reconozcan la funcionalidad y la transversalidad de la matemática para el desarrollo de argumentos y la toma de decisiones, se precisa que el significado del conocimiento matemático refiera al valor de uso (Cantoral, 2013). Con esta idea como base es que se comienza a reflexionar sobre el objeto matemático puesto a discusión en esta interacción.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE

Estructura general: ¿qué se propone?

El aprendizaje del estudiante, desde el punto de vista de la propuesta socioepistemológica, es el producto emergente de una dialéctica de construcción social del conocimiento, que parte de lo factual, articula con lo procedimental y se consolida en el nivel simbólico. Es decir, todo objeto matemático tiene un origen y una significación amplia que se apoya en prácticas, cada vez más complejas y estructuradas.

De acuerdo con la investigación socioepistemológica, se propone este material para la construcción de conocimientos específicos con el fin de identificar posibles respuestas y hacer explícitos los aspectos de la resignificación progresiva, la racionalidad contextualizada, el relativismo epistemológico y la funcionalidad del conocimiento.

En este cuadernillo se desarrollarán situaciones de aprendizaje proveyendo un contexto situacional real (no ficticio o fuera del contexto de los/as estudiantes) y un contexto de significancia basado en una evolución pragmática. Es decir, aprovechar las prácticas del actuar de las personas que permitan significar, mediante el uso, la noción matemática específica: la división con análisis del resto. Para ello, se considera la importancia de las prácticas socialmente compartidas como la comparación, la aproximación, la agrupación y la optimización, en la significación del análisis del resto, con el fin de acompañar la construcción del objeto matemático.

El propósito último es el de organizar el conocimiento en espiral, es decir, desde “la anidación de prácticas” –a partir de las acciones (el hacer) y la organización de acciones a nivel de actividad, hasta la simbología–, partiendo del entorno de quien aprende.

El diseño de cada situación de aprendizaje considera las siguientes directrices para generar un ambiente que propicie el análisis del resto:

- La promoción de estrategias más cercanas a las acciones que siguen los/as estudiantes en el desarrollo de prácticas que evidencien el uso del conocimiento matemático. En el caso de la división con análisis del resto, tales prácticas son: comparación, agrupación, aproximación, optimización.
- El tratamiento de los elementos participantes en las tareas de división: ¿qué es lo que divide?, ¿cuántas veces divide?, ¿con qué divide?, ¿cuánto sobra?
- La toma de decisiones como parte del carácter funcional del conocimiento matemático.



Esquema 1. Prácticas asociadas al análisis del resto

Con estas directrices, se pretende significar los elementos del reparto y articularlos mediante las relaciones aritméticas existentes entre ellos; es decir, que el estudiante sepa identificar la naturaleza del sobrante en términos de lo que se usa para dividir (divisor) y lo que se divide (dividendo), cuando estos elementos son fijos y cuando se modifican.

A continuación, se presentan las intenciones de las tres etapas que constituyen la propuesta de situación de aprendizaje y, en particular, los elementos principales de cada tarea.

→ Etapa factual

El objetivo de esta etapa es construir un lenguaje común que permita desarrollar un vínculo entre lo que el estudiante sabe hacer, mediante acciones como comparar o aproximar, y lo que se hace cuando se ponen en marcha los mecanismos asociados a la divisibilidad.

En la primera situación de aprendizaje, a través de las preguntas *¿qué se reparte?*, *¿qué se usa para repartir?*, *¿cuántas veces se reparte?*, *¿sobra?*, se busca que los/as estudiantes reconozcan los elementos del reparto mediante una tarea que involucra compartir caramelos. En la segunda situación de aprendizaje, el enfoque va dirigido al uso del reparto en una situación de compra de alfajores.

En estas actividades, es de particular interés que el estudiante reconozca al resto como una cantidad susceptible de ser completada y no como un elemento aislado del resultado de una operación.

→ Etapa procedimental

En esta etapa, se realizan una serie de preguntas que buscan identificar las relaciones existentes entre cada uno de los componentes de la división. El objetivo principal es establecer conjeturas respecto al comportamiento del dividendo, el divisor, el cociente y el resto.

En el caso de la primera situación de aprendizaje, primero se deja fijo el valor del dividendo (cantidad de caramelos) y se analiza el comportamiento del resto (caramelos sobrantes) cuando el divisor cambia (capacidad de los frascos de caramelos). Al final, se cambia el valor del dividendo y se analiza cómo varía el resto.

En el caso de la segunda situación de aprendizaje, en cambio, se deja fijo el divisor (precio del alfajor) y se varía el dividendo (dinero disponible para la compra). Con estos elementos en articulación, se estudia el cambio del resto y su complemento, es decir, la cantidad faltante para completar un múltiplo.

→ Etapa simbólica

Si bien, en las etapas previas, el contexto sirve para dar sentido y significado a los componentes de la división mediante las ideas de reparto, en la fase simbólica, es posible desprenderse del contexto y pasar a la generalización de las relaciones entre divisor, dividendo, cociente y residuo.

Así, la Tarea 3 en ambas situaciones se orienta hacia el reconocimiento de distintas estrategias para encontrar el cociente y el resto en una división entera.

Como las tareas previas fueron diseñadas con base en la significación de los elementos del reparto mediante las preguntas *¿qué se reparte?*, *¿qué se usa para repartir?*, *¿cómo se reparte?*, y *¿sobra?*, es posible reflexionar acerca de la toma de decisiones, cuándo se requiere un cálculo exacto y cuándo uno aproximado, así como reconocer las relaciones existentes entre los elementos del reparto (dividendo, divisor, cociente y resto).

FUNDAMENTO TEÓRICO Y EXPLICACIONES DIDÁCTICAS

Fundamento teórico de las situaciones de aprendizaje

Se propone fomentar estrategias de solución ligadas a las acciones que siguen los/as estudiantes cotidianamente y que evidencien el uso del conocimiento matemático en el desarrollo de prácticas. Este enfoque de significación desde el valor de uso del conocimiento precisa un cambio de mirada: el significado no es intrínseco al objeto, sino que es un derivado (consecuencia) de su uso.

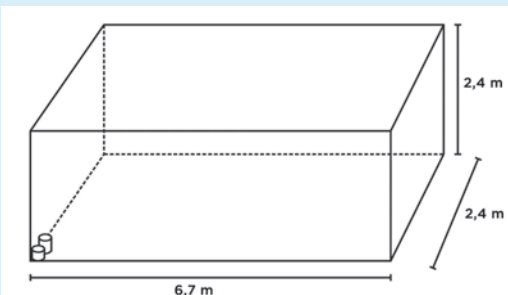
La enseñanza que privilegia únicamente estrategias de solución basadas en algoritmos y técnicas memorísticas –centración en los objetos matemáticos– produce ausencia de significados útiles en la toma de decisiones. Además, las ideas germinales que sustentan la construcción social del conocimiento matemático quedan relegadas. Por ejemplo, en el caso particular de la enseñanza de la división con análisis del resto, estas ideas germinales involucran prácticas de aproximación durante “la búsqueda del valor más cercano pero que no se pase”, asociado al cálculo estimativo. De igual modo, existen ideas germinales detrás de las prácticas de optimización, pues no es suficiente determinar un valor que divida sino aquel que “mejor lo haga” (Roig, Llinares y Penalva, 2010) y analizar qué hacer con eso que “sobra”.

Las tareas propuestas en las situaciones de aprendizaje promueven estrategias más cercanas a las acciones que siguen los/as estudiantes en el desarrollo de prácticas que evidencien el uso del conocimiento matemático; en este caso, la comparación, la agrupación, la aproximación y la optimización.

A continuación, se ejemplifica la distinción entre resolver un problema desde una postura centrada en los objetos y resolverlo desde lo vivencial y a partir de las prácticas situadas.

Problema

Se desea colocar latas de atún dentro de un contenedor en forma de prisma rectangular cuyas dimensiones se especifican en la siguiente figura:



Si cada una de las latas mide 12 cm de diámetro y 7 cm de altura, ¿en qué intervalo se encuentra, aproximadamente, el número de latas de atún que caben en el contenedor de acuerdo al acomodo que se muestra en la imagen?

Considera $\pi \approx 3,14$.

- A) 11.000 a 13.000
- B) 23.000 a 25.000
- C) 36.000 a 38.000
- D) 48.000 a 50.000

Fuente: (Planea, 2015)

Estrategia 1. División de la capacidad total por la capacidad de la unidad (estrategia matemáticamente incorrecta).

El volumen total del contenedor es:

$$670 \text{ cm} \times 240 \text{ cm} \times 240 \text{ cm} = 38.592.000 \text{ cm}^3.$$

El volumen aproximado de cada lata es:

$$3,14 \text{ cm} \times 36 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} = 791,28 \text{ cm}^3.$$

El número de latas que caben en el contenedor es:

$$\frac{38.592.000}{791,28} \approx 48.771$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la D.

Si bien el problema planteado es de división, la estrategia de dividir el volumen total por el volumen de una lata no es matemáticamente correcta, pues no se considera el espacio que queda sin ocupar al acomodar las latas.

Ahora bien, si el problema se vuelve vivencial, cuando se sitúa a las/os estudiantes en la reflexión sobre el acomodo, las estrategias seguidas se tornan distintas.

Estrategia 2. Distribución del espacio.

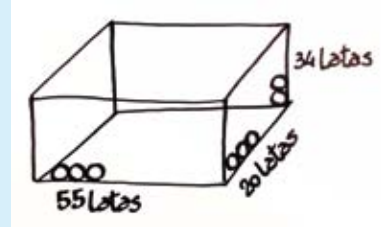
Comparo las longitudes de largo, ancho y alto del contenedor y las de las latas para determinar cuántas caben.

A lo largo del contenedor $\frac{670}{12} \approx 55$ caben latas y sobra un poco de espacio.

A lo ancho, caben $\frac{240}{12} = 20$ latas y no sobra espacio.

En altura, caben $\frac{240}{12} \approx 34$ latas apiladas y sobra un poco de espacio.

Por tanto, en el contenedor le caben, aproximadamente, $55 \times 20 \times 34 = 37.400$ latas. La respuesta correcta sería C).



Pero, ¿es posible analizar el resto en el problema del contenedor? Por ejemplo, se puede agregar al problema un cuestionamiento sobre la optimización del espacio una vez realizado el acomodo. Es decir, la pregunta *¿caben más latas?*, podría generar en los/as estudiantes la necesidad de analizar el resto, como en el siguiente ejemplo.

Al acomodar 20 latas a lo ancho sí se cubre totalmente el espacio, pero ni las 55 latas acomodadas a lo largo ni las 34 latas a lo alto lo cubren totalmente. Esto permite acomodar las latas en otra posición de manera que quepan más.

A lo largo, por ejemplo, sobran 10 cm por lo que pueden acomodarse latas “paradas” ya que su altura es de 7 cm.

Entonces, ¿cuántas latas caben a lo ancho y alto con este nuevo acomodo?

A lo ancho, caben $\frac{240}{12}$ latas. A lo alto, también $\frac{240}{12} = 20$:

Por tanto, se pueden agregar $1 \times 20 \times 20 = 400$ latas en el espacio restante.

Este análisis abona la idea de que la optimización es la que motiva la división con análisis del resto, apoyada de la aproximación, la comparación y la agrupación. Cabe destacar que, en el último caso, el interés no está en la respuesta correcta (puesto que no se modifica), sino que lo que se busca es el análisis de una situación real sustentada en una práctica socialmente compartida como lo es la optimización. Son estas prácticas las que potencian el uso del conocimiento para la toma de decisiones y, desde allí, se da pie a su construcción formal.

Explicaciones didácticas de las situaciones de aprendizaje

A continuación, se describe la intencionalidad de las diferentes etapas de la situación de aprendizaje propuesta. Su objetivo es significar los elementos del reparto. Es decir, que el estudiante sepa identificar la naturaleza del sobrante en términos de lo que se usa para dividir (divisor) y lo que se divide (dividendo), cuando estos elementos son fijos y cuando se modifican.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: ¿QUÉ SE REPARTE? ¿CÓMO SE REPARTE? ¿CUÁNTAS VECES SE REPARTE? ¿SOBRA?

→ Etapa factual

Tarea 1. ¿Cuántos caramelos caben en cada frasco?

MOMENTO 1

Intención. Este momento se divide en secciones con preguntas orientadas a las prácticas de agrupación y de aproximación, para dar un significado a los componentes de la división sin hacer explícita su simbolización. En el ítem b se pone en juego la noción de reparto en una situación de optimización, pues se busca que Laura pueda compartir los caramelos con más amigos, buscando que se reconozca la unidad de medida óptima. En el ítem a, la pregunta está orientada hacia la elección del divisor que minimice el resto y finalmente, la pregunta del ítem c tiene el objetivo de cuestionar la racionalidad del resto con base en el comportamiento del divisor y el dividendo.

Laura compró un paquete de 75 caramelos redondos, y quiere repartirlos en frascos para cada uno de sus amigos. En la tienda solamente encontró frascos de dos tamaños, *grande* y *mediano*.



1. Laura se dio cuenta de que en el frasco grande caben exactamente 15 caramelos y en el mediano, 9. Respondé.

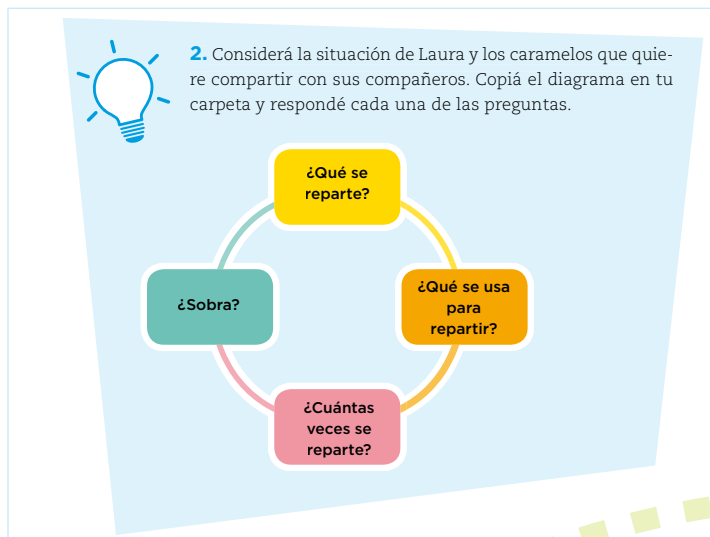
a) Si Laura no quiere que sobren caramelos, ¿qué frasco es la mejor opción? Explicá tu respuesta.

b) ¿Qué tipo de frasco debería elegir Laura para compartir los caramelos con más amigos? ¿Por qué?

c) Laura repartió en partes iguales el paquete de caramelos en 5 frascos grandes y le sobraron 3 caramelos. ¿Es esto posible? ¿Por qué?

MOMENTO 2

Intención. Se busca propiciar un momento de identificación explícita de los elementos de la división, mediante un lenguaje que se ha comenzado a construir en esta etapa usando las preguntas: ¿qué se reparte?, en alusión al dividendo; ¿qué se usa para repartir?, para hablar del divisor; ¿cuántas veces se reparte?, en referencia al cociente y ¿sobra?, para el caso del resto.



→ Etapa procedimental

Tarea 2. ¿Cuántos caramelos para cada amigo?

MOMENTO 1

Laura compró dos paquetes más de caramelos, es decir, ahora puede repartir tres paquetes de 75 caramelos cada uno entre sus amigos. Pero, ¿qué significa esto? ¡Habrá más caramelos para cada amigo! O... ¡más amigos podrán recibir caramelos!

1. Con la nueva información, completá la tabla.

Total de caramelos a repartir	Cantidad de caramelos por frasco	¿Cuántos frascos se pueden llenar?	¿Sobran? ¿Cuántos?
	15		
	9		

a) ¿Cambiarías tu respuesta a la tarea 1 (actividad 1, consigna a)?
¿Por qué?

MOMENTO 2

2. En la siguiente tabla, se muestra una forma de organizar las opciones que Laura tiene para repartir en partes iguales y de modo que sobre la menor cantidad de caramelos posible. Completá los datos faltantes. Luego, respondé.

Total de caramelos	Cantidad que le cabe a un frasco	Número de frascos	Sobran
218	15		
219	15		
220	15		
221	15		
222	15		
223	15		
224	15		
225	15		

- a) Explicá qué sucede con el sobrante cuando aumenta el total de caramelos a repartir.
- b) ¿Qué sucede con el sobrante cuando disminuye el total de caramelos a repartir? En los dos casos, ¿siempre sucede eso?
- c) ¿Cuánto sobraría si se reparten 232 caramelos en frascos de 15? ¿Cuántos caramelos le faltarían a Laura para completar otro frasco?

MOMENTO 3



3. ¿Tus respuestas de la actividad 2 cambian si Laura reparte los caramelos en el frasco mediano, es decir, en el que solo caben 9 caramelos? ¿Por qué?

4. Completá la tabla. Luego, respondé.

Fascos	Sobrantes posibles	Similitudes en el procedimiento	Diferencias en el procedimiento
Grande			
Mediano			

a) Compará el sobrante al usar el frasco mediano o el grande, ¿son iguales o distintos? Explicá por qué.

5. Según tus respuestas de la actividad anterior, lo que sobra al repartir los caramelos en los frascos, ¿puede ser cualquier número? ¿Cuáles podrían ser?

Intención. En los momentos 1, 2 y 3 se provoca en el estudiante un tránsito que lo lleve entre lo factual y lo procedimental. Para ello, se realizan una serie de preguntas que permiten identificar las relaciones existentes entre cada uno de los componentes de la división. El objetivo es establecer conjeturas respecto al comportamiento del dividendo, divisor, cociente y resto para llegar a las siguientes conclusiones:

- Cuando lo que se reparte aumenta en cierta cantidad, el resto aumenta de la misma forma, siempre que el cociente y el divisor no se modifiquen.
- El resto siempre es menor que el divisor.

→ Etapa simbólica

Tarea 3. Los elementos del reparto

MOMENTO 1

1. Discutí con tus compañeros/as sobre los elementos de este reparto y uní con flechas los elementos de las columnas.

- | | |
|--|-------------------------------|
| I. Hay 3 caramelos de más. | a. ¿Qué se reparte? |
| II. Se llenaron 15 frascos. | b. ¿Qué se usa para repartir? |
| III. Tengo 228 caramelos. | c. ¿Cuántas veces se reparte? |
| IV. A cada frasco le caben 15 caramelos. | d. ¿Sobra? |

MOMENTO 2

2. Identificá en la cuenta las respuestas a estas preguntas.

- ¿Qué se reparte?
- ¿Qué se usa para repartir?
- ¿Cuántas veces se reparte?
- ¿Sobra?

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r|l}
 273 & 7 \\
 \hline
 210 & 30 \\
 \hline
 63 & + \quad 9 \\
 \hline
 63 & 39 \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \end{array}$$

MOMENTO 3



3. Copiá y completá la tabla, si es posible. Si no es posible explicá por qué.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto	¿Es posible?	¿Por qué? ¿Hay otras opciones correctas de completar la tabla?
	4		12		
	8		0		
	7		3		
	5		9		
	6		6		

Intención. Si bien en las etapas previas el contexto sirvió para dar sentido y significado a los componentes de la división mediante las ideas de reparto, en la *etapa simbólica*, es posible desprenderse del contexto y pasar a la generalización de las relaciones entre divisor, dividendo, cociente y resto

Por ello, la Tarea 3 se orienta hacia el reconocimiento de los elementos de la división para bosquejar su formato y estructura.

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE: ¿CÓMO COMPRAR MÁS...?

→ Etapa factual

Tarea 1. ¿Para qué te alcanza?

MOMENTO 1

Intención. Esta tarea se compone de preguntas orientadas a la toma de decisiones a través del análisis de los elementos de la división. Busca reconocer las acciones a realizar para enfrentar situaciones de compra en las que la cantidad total no es suficiente.

1. Si querés comprar dos unidades de tu alfajor favorito, ¿cuánto dinero necesitás?

2. Si tenés \$32 y querés comprar dos unidades de tu alfajor favorito, ¿qué decisión tomás?



3. Cinco amigos juntan el dinero que tienen y reúnen \$150. Si cada alfajor cuesta \$32, ¿qué proponés hacer?

→ Etapa procedimental

Tarea 2. ¿Cómo comprar más?

MOMENTO 1

1. En la siguiente tabla, los 5 amigos anotan el dinero que juntan cada día de la semana para comprar alfajores (cada alfajor cuesta \$32).

Día	Dinero
Lunes	\$150
Martes	\$158
Miércoles	\$171
Jueves	\$189
Viernes	\$210

- a) ¿Cuántos alfajores pueden comprarse en cada día?
- b) Si el grupo de amigos quiere comprar un alfajor para cada uno, ¿qué proponés hacer el lunes? ¿Qué propones hacer el miércoles?
- c) Los 5 amigos quieren invitarle a Leandro, otro compañero, un alfajor. En cada día, ¿qué necesitan hacer para poder comprar los 6 alfajores?

MOMENTO 2

2. Si los chicos reúnen \$161, ¿les alcanza para comprar 5 alfajores? ¿Con qué otras cantidades podrían comprar exactamente 5 alfajores y tener vuelto?



3. ¿Qué sucede con el vuelto cuando aumenta la cantidad de dinero que juntan? ¿Cómo es la relación *dinero-vuelto*?

Intención. En esta etapa, se presenta una relación de cooperación entre un grupo de amigos, intencionalmente elegida, para que cada día se disponga de una mayor cantidad de dinero y así analizar qué sucede con el resto. Las preguntas de los ítems a y b tienen la intención de reconocer el cociente y el resto, respectivamente.

Mientras que la pregunta principal, en tanto brinda argumentos para el reconocimiento del patrón, sería la del ítem c ya que busca que se analice la variación del resto cuando varía el cociente. Como consecuencia de esto, se espera que los argumentos para las preguntas 2 y 3 (Momento 2) se basen en las discusiones sobre la relación de aumento entre el dividendo y el resto.

→ Etapa simbólica

Tarea 3. Comparar cantidades

MOMENTO 1

1. La siguiente semana, los 5 amigos se organizan y deciden establecer una regla: cada día de la semana aumentarán \$3 a la cantidad reunida el día anterior. Si el lunes reúnen \$170, ¿cuánto dinero reúnen el resto de la semana?

Intención. Se busca la verbalización por parte de los/as estudiantes de los patrones identificados durante el análisis del resto en la situación de compra. Para ello, se plantea una situación contradictoria: dada la regla de cooperación (\$3 más que el día anterior), se pide argumentar si es posible que el segundo día tuvieran \$15 de resto si el día anterior sobraron \$10.

El interés del ítem b es que el estudiante proponga cuál debería ser el resto para el segundo día y concluya que: “el resto del segundo día es 13 porque se aumenta de 3 en 3 la cantidad reunida” o “el resto del segundo día es 3 porque se aumenta en 3 la cantidad que se da cada día” (en la segunda frase sólo se considera la relación entre el dividendo y el resto, sin considerar que ya había un resto previo).

Día	Dinero
Lunes	\$170
Martes	
Miércoles	
Jueves	
Viernes	

2. Con las observaciones que hiciste en la tarea anterior sobre lo que sucede con el vuelto si aumenta el dinero disponible, decidí si la siguiente afirmación es correcta. Explicá por qué.

Lucas dice que el primer día compraron 5 alfajores y tuvieron \$10 de vuelto, pero el segundo día compraron lo mismo y tuvieron \$15 de vuelto.

a) ¿Es correcto lo que menciona Lucas? Explicá por qué.

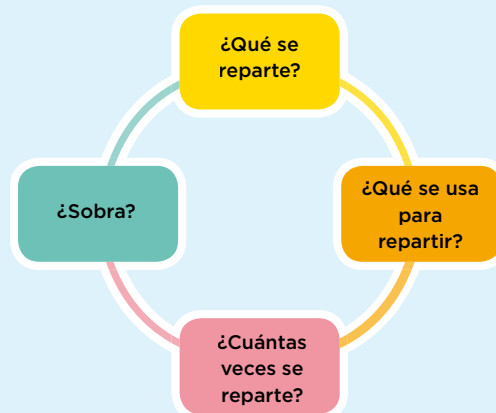
b) ¿Qué cantidad es la que sobra el segundo día?

MOMENTO 2

Intención. La verbalización sobre las relaciones de los elementos de la división.



3. Si en una situación como la de los chicos de la actividad anterior querés comprar más alfajores, ¿cómo analizás los elementos del reparto? Copiá el diagrama en tu carpeta y respondé las preguntas.



CÓMO EVALUAR LOS PROCESOS DE PRODUCCIÓN DE LOS/AS ESTUDIANTES

Con el correr de los años, la evaluación en la escuela se convirtió en un criterio de acreditación y quedó relegada a la “prueba escrita”. Sin embargo, la evaluación tiene distintos aspectos importantes en la escuela que no solo implican la acreditación.

Sin desconocer que cada maestro tomará decisiones de promoción y acreditación en función de acuerdos institucionales y jurisdiccionales sobre criterios y parámetros, queremos poner énfasis en la idea de que un sentido fundamental de la evaluación es recoger información sobre el estado de los saberes de los alumnos, para luego tomar decisiones que permitan orientar las estrategias de enseñanza.

Las producciones de los niños dan cuenta tanto de los resultados derivados de nuestras propias estrategias de enseñanza, como de lo que aprendieron y de sus dificultades. (ME, 2012)

Se considera entonces la evaluación formativa. Se llama así a un procedimiento usado por los/as docentes para adaptar un proceso didáctico a los progresos y necesidades observados en los/as estudiantes. De este modo se puede recoger información mientras los procesos se desarrollan con el fin de detectar logros, puntos débiles, identificar errores y posibles causas y poder tomar así decisiones respecto a lo que se enseña, cuándo y cómo se lo enseña.

Desde este punto de vista, cuando el/la estudiante no aprende no es solo debido a que no estudia, sino que puede ser atribuido y analizado desde múltiples factores como las actividades propuestas, los recursos utilizados, etc.

La evaluación formativa se construye a partir de la observación y conversación con los/as estudiantes y también analizando sus producciones. Esta evaluación brinda a los/as alumnos/as información para desarrollar una mayor autonomía y autorregulación de sus aprendizajes. También permite a los/as docentes adaptar las estrategias de enseñanza y los recursos utilizados a las características y necesidades individuales de los/as estudiantes.

En síntesis, la evaluación formativa sirve para que:

- los/as docentes
 - conozcan mejor a los/as estudiantes;
 - planifiquen su enseñanza ajustando el ritmo y presentación de los desafíos de aprendizajes a las características de los/as estudiantes;
- los/as estudiantes
 - comprendan la forma en la que aprenden mejor;
 - mejoren su aprendizaje;
 - se autoevalúen y comprendan cuán bien aprendieron.

Uno de los objetivos a lograr es entonces proponer actividades que permitan apropiarse de la metacognición, es decir, la capacidad de autorregular los procesos de aprendizaje. Para ello es necesario presentar a los/as estudiantes actividades que les permitan dar cuenta de sus aprendizajes. Es posible pensar en preguntas como:

- ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que te resultaron claves para resolver la actividad?
- ¿Cuáles son las estrategias que te resultaron complejas? ¿Cuáles te resultaron fáciles?
- ¿Qué aspectos de esta actividad podés guardarte para usarlos en otras?
- ¿Cuáles son las consignas que te resultaron difíciles? ¿Podrías descubrir el motivo por la que fueron difíciles?
- ¿Qué aprendiste hoy? ¿Qué conceptos no terminaste de entender?

Es fundamental que los/as estudiantes contesten estas preguntas de modo escrito y puedan recurrir a ellas luego de distintas secuencias didácticas. De este modo, todo lo expuesto se vuelve parte de sus aprendizajes y favorece el logro de la autonomía en la resolución.

Finalmente, para que la evaluación permita lograr los objetivos planteados, es necesario explicitar los criterios adoptados a los/as estudiantes. Según Toranzos (2014), esto permite:

- a. la necesaria transparencia de los procesos de evaluación;
- b. el resaltar el papel de la evaluación como un elemento que contribuye al desarrollo de procesos metacognitivos, es decir de reflexión activa de los alumnos sobre su propio proceso de aprendizaje.

Una forma de lograr todos los objetivos propuestos anteriormente es mediante el armado de rúbricas. Una rúbrica es una guía usada en la evaluación del desempeño de los/as estudiantes que describe las características específicas de un producto, proyecto o tarea en varios niveles de rendimiento. Se arma para clarificar lo que se espera del trabajo del estudiante y facilitar así la retroalimentación.

A partir de una rúbrica bien hecha, se logra:

- informar a los/as estudiantes acerca de sus saberes;
- fomentar el aprendizaje autónomo y la autoevaluación;
- anticipar los criterios de evaluación;
- promover la responsabilidad de los/as estudiantes frente a sus aprendizajes.

Para estos materiales, una rúbrica posible podría ser:

	Siempre	Casi siempre	A veces	Nunca
Entiende los enunciados de las situaciones				
Puede leer la información escrita en distintos registros de representación				
Comprende la regularidad que se observa en los múltiplos de un mismo número				
Puede analizar las características que tiene el resto de una división entera				
Comprende lo que significa cada número en una división entera				
Puede relacionar un reparto equitativo con el concepto de división				
Escucha y aprende de los debates áulicos				
Argumenta sus posturas con claridad				
Logra comprender sus errores y comenzar a partir de ellos				

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). “Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 18 (1), pp. 19-48.
- Bodí, S., Valls, J. y Llinares, S. (2005). “El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción del instrumento”. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 60, pp. 3-24.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.
- Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (1991). *En la vida diez en la escuela cero*, México D. F.: Siglo XXI.
- Ministerio de Educación (2011). *Núcleos de aprendizajes prioritarios*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.
- Ministerio de Educación (2012). *Cuadernos para el aula. Matemática 4*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.
- Ministerio de Educación (2018). *Indicadores de Progresión de los Aprendizajes Prioritarios de Matemática*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.
- Planea (2015). *Prueba del alumno 2015: Matemáticas*. Ciudad de México: Instituto Nacional para la evaluación de la Educación.
- Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Barcelona: Gedisa.
- Roig, A., Llinares, S. y Penalva, M. (2010). “Construcción del concepto múltiplo común en el dominio de los números naturales”. *Enseñanza de las ciencias*, 28 (2), pp. 261-274.
- Toranzos, L. V. (2014). “Evaluación educativa: Hacia la construcción de un espacio de aprendizaje”. *Propuesta Educativa*, 41 (1), pp. 9-19. Buenos Aires: FLACSO.

Aproximar y optimizar

¿QUÉ SE REPARTE? ¿CÓMO SE REPARTE? ¿CUÁNTAS VECES SE REPARTE? ¿SOBRA?

Muchas veces es necesario repartir. Por ejemplo, objetos en cajas, figuritas entre algunas personas, etc. ¿Cómo se puede hacer el reparto?

Supongan que tienen 27 figuritas y las quieren repartir entre tres amigos. Analicen estos repartos y decidan cuáles son justos y por qué.

Jorge

Dale 2 a Pedro, 5 a Manuel y 20 para mí.

Pedro

Dale 5 a Jorge, 5 a Manuel y 5 a mí. Quedate con las que sobran.

Manuel

Danos 9 a cada uno.

1. ¿Con el reparto de Jorge, ustedes se quedan con figuritas? ¿Y con el de Manuel?
2. ¿Los tres reparten las 27 figuritas?
3. ¿Cómo cambiarían el texto para que solo el reparto de Manuel fuera el correcto?

TAREA 1. ¿Cuántos caramelos caben en cada frasco?

Laura compró un paquete de 75 caramelos redondos, y quiere repartirlos en frascos para cada uno de sus amigos. En la tienda solamente encontró frascos de dos tamaños, *grande* y *mediano*.

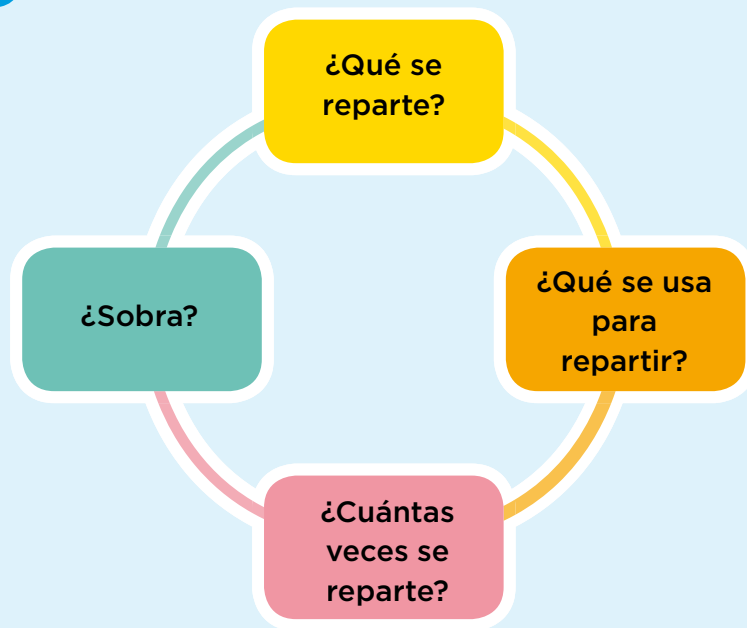


1. Laura se dio cuenta de que en el frasco grande caben exactamente 15 caramelos y en el mediano, 9. Respondé.

- a)** Si Laura no quiere que sobren caramelos, ¿qué frasco es la mejor opción? Explicá tu respuesta.
- b)** ¿Qué tipo de frasco debería elegir Laura para compartir los caramelos con más amigos? ¿Por qué?
- c)** Laura repartió en partes iguales el paquete de caramelos en 5 frascos grandes y le sobraron 3 caramelos. ¿Es esto posible? ¿Por qué?



2. Considerá la situación de Laura y los caramelos que quiere compartir con sus compañeros. Copiá el diagrama en tu carpeta y respondé cada una de las preguntas.



TAREA 2. ¿Cuántos caramelos para cada amigo?

Laura compró dos paquetes más de caramelos, es decir, ahora puede repartir tres paquetes de 75 caramelos cada uno entre sus amigos. Pero, ¿qué significa esto? ¡Habrá más caramelos para cada amigo! O... ¡más amigos podrán recibir caramelos!

1. Con la nueva información, completá la tabla.

Total de caramelos a repartir	Cantidad de caramelos por frasco	¿Cuántos frascos se pueden llenar?	¿Sobran? ¿Cuántos?
	15		
	9		

a) ¿Cambiarías tu respuesta a la tarea 1 (actividad 1, consigna a)? ¿Por qué?

2. En la siguiente tabla, se muestra una forma de organizar las opciones que Laura tiene para repartir en partes iguales y de modo que sobre la menor cantidad de caramelos posible. Completá los datos faltantes. Luego, respondé.

Total de caramelos	Cantidad que le cabe a un frasco	Número de frascos	Sobrante
218	15		
219	15		
220	15		
221	15		
222	15		
223	15		
224	15		
225	15		

- a) Explicá qué sucede con el sobrante cuando aumenta el total de caramelos a repartir.
- b) ¿Qué sucede con el sobrante cuando disminuye el total de caramelos a repartir? En los dos casos, ¿siempre sucede eso?
- c) ¿Cuánto sobraría si se reparten 232 caramelos en frascos de 15? ¿Cuántos caramelos le faltarían a Laura para completar otro frasco?



3. ¿Tus respuestas de la actividad 2 cambian si Laura reparte los caramelos en el frasco mediano, es decir, en el que solo caben 9 caramelos? ¿Por qué?

4. Completá la tabla. Luego, respondé.

Frascos	Sobrantes posibles	Similitudes en el procedimiento	Diferencias en el procedimiento
Grande			
Mediano			

a) Compará el sobrante al usar el frasco mediano o el grande, ¿son iguales o distintos? Explicá por qué.

5. Según tus respuestas de la actividad anterior, lo que sobra al repartir los caramelos en los frascos, ¿puede ser cualquier número? ¿Cuáles podrían ser?

TAREA 3. Los elementos de la división

1. Discutí con tus compañeros/as sobre los elementos de este reparto y uní con flechas los elementos de las columnas.

- | | |
|--|-------------------------------|
| I. Hay 3 caramelos de más. | a. ¿Qué se reparte? |
| II. Se llenaron 15 frascos. | b. ¿Qué se usa para repartir? |
| III. Tengo 228 caramelos. | c. ¿Cuántas veces se reparte? |
| IV. A cada frasco le caben 15 caramelos. | d. ¿Sobra? |

2. Identificá en la cuenta las respuestas a estas preguntas.

- ¿Qué se reparte?
- ¿Qué se usa para repartir?
- ¿Cuántas veces se reparte?
- ¿Sobra?

$$\begin{array}{r|l} 273 & 7 \\ \hline 210 & 30 \\ \hline 63 & + 9 \\ \hline 63 & 39 \\ \hline 0 & \end{array}$$



3. Copiá y completá la tabla, si es posible. Si no es posible explicá por qué.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto	¿Es posible?	¿Por qué? ¿Hay otras opciones correctas de completar la tabla?
	4		12		
	8		0		
	7		3		
	5		9		
	6		6		



¿CÓMO COMPRAR MÁS...?

Muchas veces se junta dinero para comprar algo juntos.

¿Cómo harían para juntar dinero para un picnic el día de la primavera? ¿Qué necesitarían saber? ¿Cómo organizarían las recaudaciones?

Si quieren comprar alfajores para todos y estas son las opciones que ofrece la panadería, ¿qué elegirían? ¿Por qué?



TAREA 1. ¿Para qué te alcanza?

1. Si querés comprar dos unidades de tu alfajor favorito, ¿cuánto dinero necesitás?
2. Si tenés \$32 y querés comprar dos unidades de tu alfajor favorito, ¿qué decisión tomás?



3. Cinco amigos juntan el dinero que tienen y reúnen \$150. Si cada alfajor cuesta \$32, ¿qué proponés hacer?

TAREA 2. ¿Cómo comprar más?

1. En la siguiente tabla, los 5 amigos anotan el dinero que juntan cada día de la semana para comprar alfajores (cada alfajor cuesta \$32).

Día	Dinero
Lunes	\$150
Martes	\$158
Miércoles	\$171
Jueves	\$189
Viernes	\$210

- a) ¿Cuántos alfajores pueden comprarse en cada día?
- b) Si el grupo de amigos quiere comprar un alfajor para cada uno, ¿qué proponés hacer el lunes? ¿Qué propones hacer el miércoles?
- c) Los 5 amigos quieren invitarle a Leandro, otro compañero, un alfajor. En cada día, ¿qué necesitan hacer para poder comprar los 6 alfajores?

2. Si los chicos reúnen \$161, ¿les alcanza para comprar 5 alfajores? ¿Con qué otras cantidades podrían comprar exactamente 5 alfajores y tener vuelto?



3. ¿Qué sucede con el vuelto cuando aumenta la cantidad de dinero que juntan? ¿Cómo es la relación *dinero-vuelto*?

TAREA 3. Comparar cantidades

1. La siguiente semana, los 5 amigos se organizan y deciden establecer una regla: cada día de la semana aumentarán \$3 a la cantidad reunida el día anterior. Si el lunes reúnen \$170, ¿cuánto dinero reúnen el resto de la semana?

Día	Dinero
Lunes	\$170
Martes	
Miércoles	
Jueves	
Viernes	

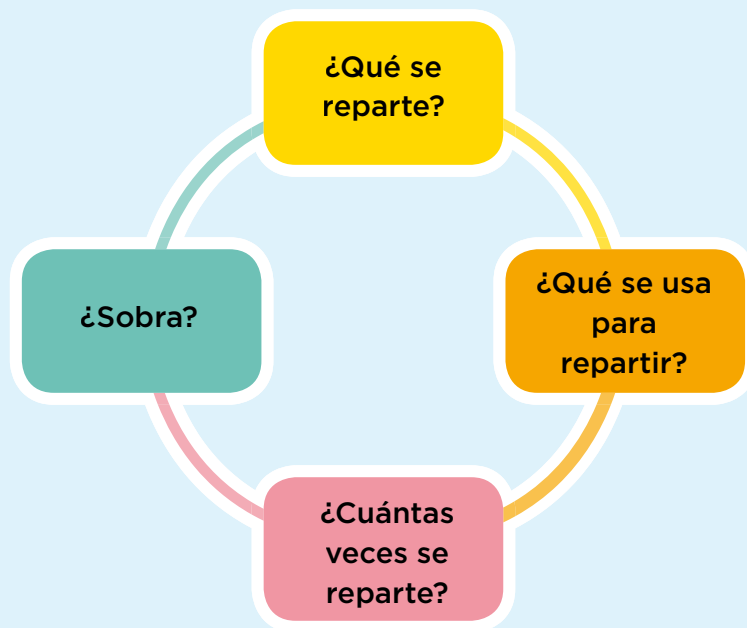
2. Con las observaciones que hiciste en la tarea anterior sobre lo que sucede con el vuelto si aumenta el dinero disponible, decidí si la siguiente afirmación es correcta. Explicá por qué.

Lucas dice que el primer día compraron 5 alfajores y tuvieron \$10 de vuelto, pero el segundo día compraron lo mismo y tuvieron \$15 de vuelto.

- a) ¿Es correcto lo que menciona Lucas? Explicá por qué.
- b) ¿Qué cantidad es la que sobra el segundo día?



3. Si en una situación como la de los chicos de la actividad anterior querés comprar más alfajores, ¿cómo analizás los elementos del reparto? Copiá el diagrama en tu carpeta y respondé las preguntas.



ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

ACTIVIDAD 1.

Comparar múltiplos

.....

1. ¿Cuánto hay que sumarle al número 1.421 para obtener el múltiplo de 4 más cercano?

- a) 1 b) 3 c) 4 d) 7

ACTIVIDAD 2.

Organizar el trabajo

.....

1. Juan tiene que trabajar 29 horas esta semana. ¿Cuántas horas tiene que trabajar por día si quiere ir solamente 4 días y trabajar todos los días la misma cantidad de horas?

ACTIVIDAD 3.

Analizar elementos del reparto

1. Copiá las oraciones y subrayá con color rojo qué es lo que se reparte; con verde, lo que se usa para repartir; con amarillo, las veces que se reparte y con azul, lo que sobra. Además, en caso de faltar algún elemento, agregalo al texto en forma de pregunta o información.

a) La encargada de una purificadora reparte 34 litros de agua en recipientes de igual capacidad. Al final, logra llenar 8 recipientes y le sobran 2 litros.

b) Arturo tiene cajas de alfajores de 20 piezas cada una, sabe que en total hay 85 alfajores.

c) Daniel compró tres jugos de \$32 y le sobraron \$4, ¿cuánto dinero llevaba antes de comprar?

d) Luisa tiene \$250 y decide comprar turrone para sus 6 amigos. Los turrone cuestan \$20. Si ella decide comprar todos los turrone posibles, ¿cuánto dinero le sobra?

ACTIVIDAD 4.

Decidir cuánto más

1. Lisandro dividió 103 por 12 y obtuvo cociente 8 y resto 7. Ahora tiene que dividir 104, 105, 106 y 107 por 12.

a) ¿Puede Lisandro determinar el resto de esas cuentas sin hacerlas? Si es posible, explicá cómo puede hacerlo. Si no, explicá por qué no.

b) ¿En cuánto tiene que modificar Lisandro el dividendo de la cuenta que hizo para obtener de cociente 9 y resto 0, manteniendo el mismo divisor?

c) ¿Cuántas cuentas puede escribir que tengan como divisor 12, como cociente 9 y como resto no necesariamente 0?

ACTIVIDAD 5.

¿Cuál es el sobrante?

1. Verónica hizo la cuenta $87 : 6$ y en el visor de la calculadora apareció el siguiente resultado: “14,5”. ¿Cuál de las siguientes opciones representa el resto de la división?

a) 0,5

b) 5

c) 3

d) 7

ACTIVIDAD 6.

Reacomodar espacios

1. Para la ceremonia de egresados hay que colocar 288 sillas en el auditorio. Se sabe que cada grupo de chicos que egresa tiene entre 14 y 17 estudiantes. ¿Cómo acomodaría los grupos para que estén juntos y no se vea un acomodo diferente entre filas?

ACTIVIDAD 7.

Repartir caramelos

1. Leé la siguiente situación. Luego, respondé.

Lisandro llevó una bolsa con 315 caramelos para compartir con sus compañeros y su docente porque era su cumpleaños. Le dijo al docente:

–Estos caramelos son para compartir entre mis compañeros, compañeras y yo, que somos 30. Para cada uno la misma cantidad. Los que sobran son para vos, profe.

Marcelo, su amigo, para saber cuántos caramelos le tocaba a cada uno, tomó la calculadora e hizo el cálculo $315 : 30$. Al apretar el signo “=”, en el visor de su calculadora apareció el número “10.5”. Luego, dijo:

–Son 10 caramelos para cada uno de nosotros y 5 para vos.

- a) ¿La solución de Marcelo es correcta? ¿Por qué?

+INNOVACIÓN



+CREATIVIDAD



+EVOLUCIÓN

