Programa Nacional de Resolución de Problemas

MATEMÁTICA

PROGRAMA NACIONAL

DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

NIVEL PRIMARIO

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN

Presidente de la Nación
DR. CARLOS SAÚL MENEM

Ministro de Cultura y Educación
ING. AGR. JORGE ALBERTO RODRÍGUEZ

Secretaria de Programación y Evaluación Educativa
LIC. SUSANA BEATRIZ DECIBE

Subsecretaria de Programación y Gestión Educativa
LIC. INÉS AGUERRONDO

Subsecretario de Evaluación de Programas
PROF. SERGIO ESPAÑA

Subsecretario de Evaluación de la Calidad Educativa
LIC. HORACIO NÉSTOR SANTÁNGELO

La XVIII Asamblea Extraordinaria del Consejo Federal de Cultura y Educación puso énfasis en generar instrumentos alternativos de acción que apuntaran a fortalecer los aprendizajes de Matemática y Lengua.

En esa línea se inscriben los materiales que aquí se presentan a cada institución escolar con la intención de aportar al mejoramiento de la Calidad de la Educación y proporcionar a las docentes elementos innovadores para enriquecer la práctica educativa.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Sabemos que estos son tiempos de sociedades dinámicas, en rápida evolución. Preparar a nuestros alumnos-as para su inserción en la sociedad es, entre otras cosas, ayudarlos a formar una actitud independiente que les permita, a cada paso, evaluar hechos y elegir caminos. Es decir, desde la escuela, tenemos el compromiso de enseñarles a resolver problemas.

Un trabajo sistemático respecto a la resolución de problemas, ayuda a que:

- *se entrenen en la lectura e interpretación de textos,*
- *se familiaricen con el lenguaje matemático,*
- *se capaciten para traducir un mensaje coloquial a una expresión matemática donde se pongan de manifiesto las premisas establecidas y los resultados a obtener,*
- *puedan elaborar sus propias estrategias de resolución,*
- *se sientan estimulados para verbalizar los caminos empleados, por ellos o por otros, para llegar a la meta,*
- *realicen intercambios de interpretaciones de enunciados y estrategias utilizadas,*
- *logren una actitud positiva hacia lo novedoso,*
- *puedan decidir si cuentan con suficientes herramientas como para encarar el problema y de no ser así, a qué fuentes de información confiables pueden recurrir, y*
- *se apropien de contenidos matemáticos y lógicos.*

En resumen, este tipo de trabajo es valioso porque logra integrar en un todo armonioso los polos alrededor de los que gira la enseñanza: los contenidos y los procesos.

El "Programa Nacional de Resolución de Problemas" organizado por el Ministerio de Cultura y Educación de la Nación se acerca a los docentes con esta colección de problemas, con la intención de brindar una opción más para que la tarea del aula sea ágil y productiva.

Los problemas que se presentan podrán ser utilizados como parte de la enseñanza y el aprendizaje escolar y también en espacios extra-áulicos que no involucren un desarrollo curricular sistemático (la hora de problemas, club de ciencias, olimpíadas, campamentos, etc.). Sin embargo, deben tener asignado un tiempo semanal concreto que permita un trabajo sistemático ya que sin esto es imposible que se desarrollen las capacidades operativas en los alumnos.

Ing. Agr. Jorge Alberto Rodríguez, Ph. D.
Ministro de Cultura y Educación de la Nación

- **Capítulo III - Invitación a la Estadística**
- **Capítulo IV - Invitación a la Geometría**
- **Bibliografía**

En cada una de las "Invitaciones" hay una:

a) _fundamentación matemática_ que pretende ampliar o profundizar los contenidos que se abordan. Está pensada para el docente. A él le corresponde, si lo cree conveniente, hacer las adecuaciones para transferir esto a sus alumnos. En algunos casos también hay orientaciones didácticas que creemos conveniente incluir.

b) _colección de problemas_ del tema del que se ocupa el Capítulo. Están categorizados en dos grupos sugeridos para 3°, 4° y 5° (Grados Medios) y 6° y 7° (Grados Superiores).

Cada problema está dentro de un recuadro. Para identificarlo se han utilizado letras y números: El primer número (romano) corresponde al **Capítulo**. El segundo número (arábigo) al orden dentro del **Capítulo**.

Por último la letra, indica el nivel de escolaridad en el que se sugiere su uso: M = grados medios, S = grados superiores.

Muchos de los problemas que se presentan admiten variantes, a través de los cuales pueden ser utilizados en distintos grados o con grupos heterogéneos. El campo numérico, el orden en el que están dados los datos y las preguntas, si se piden respuestas para casos concretos o se pretenden generalizaciones, son algunas de las variables didácticas que pueden simplificar o complejizar una situación problemática.

Para un mejor aprovechamiento, es conveniente que el docente haga una apropiación previa y total del material y luego se disponga a trabajarlo con sus alumnos.

Considérense estas sugerencias tan sólo a título orientativo, pues la última palabra en el aula la tiene el docente. Él es el que conoce al grupo y a los objetivos específicos del trabajo.

Se ha confeccionado un material similar a éste, destinado a profesores del nivel secundario. Invitamos a los maestros a que le presten atención. Sería un elemento más para lograr la articulación, desde la perspectiva curricular, metodológica y de la formación docente, entre estos dos niveles de escolaridad.

SUGERENCIAS PARA EL MEJOR APROVECHAMIENTO DEL MATERIAL

◩ Elegir cuidadosamente el problema teniendo en cuenta el tema, el grado de dificultad, la función que debe cumplir (generación o reinversión de conocimientos, control de los aprendizajes, diagnóstico, etc.).

◩ Hacer que los alumnos lean comprensivamente el problema y propiciar el intercambio de interpretaciones, sin señalar estrategias de resolución. Este trabajo debe estar orientado a establecer qué es lo que se pide y cuáles son los datos del problema.

Es frecuente que los alumnos, quieran saber de antemano, cómo encarar la resolución; no faltará quien pregunte: "¿es de más o de por?", "¿qué fórmula uso?".

Una buena estrategia ante esto es abstenerse. Hay que mantener un delicado equilibrio con respecto a la ayuda. Tener siempre presente que es el alumno el que debe realizar la parte importante del trabajo y que al maestro le compete orientar y coordinar, dosificando la información en relación con las características del alumno o del grupo.

◩ Al plantear problemas, es importante estar dispuestos a escuchar distintas alternativas de solución (muchas veces diferentes de las nuestras), hay que aprovecharlas, nunca rechazarlas.

◩ Es valioso dejar que algunos alumnos o grupos (no siempre los mismos), expongan su solución (no sólo las correctas) al resto de la clase. Esto ayudará a lograr mayor claridad expositiva, a valorar distintas estrategias de resolución y a utilizar al error en su rol constructivo.

◩ Es imprescindible que el docente, terminado el trabajo con las situaciones problemáticas, provoque o haga una síntesis vinculada con los conceptos y los procedimientos que condujeron a la resolución del problema, a efectos de que queden contextualizados los saberes (matemáticos y lógicos).

ORGANIZACIÓN DEL MATERIAL

Consta de las siguientes partes:

- **Presentación**
- **Sugerencias para el mejor aprovechamiento del material**
- **Capítulo I - Invitación a la Matemática**
- **Capítulo II - Invitación a la Aritmética**

- **Capítulo III - Invitación a la Estadística**
- **Capítulo IV - Invitación a la Geometría**
- **Bibliografía**

En cada una de las "Invitaciones" hay una:

a) *fundamentación matemática* que pretende ampliar o profundizar los contenidos que se abordan. Está pensada para el docente. A él le corresponde, si lo cree conveniente, hacer las adecuaciones para transferir esto a sus alumnos. En algunos casos también hay orientaciones didácticas que creemos conveniente incluir.

b) *colección de problemas* del tema del que se ocupa el Capítulo. Están categorizados en dos grupos sugeridos para 3º, 4º y 5º (Grados Medios) y 6º y 7º (Grados Superiores).

Cada problema está dentro de un recuadro. Para identificarlo se han utilizado letras y números: El primer número (romano) corresponde al **Capítulo**. El segundo número (arábigo) al orden dentro del **Capítulo**.

Por último la letra, indica el nivel de escolaridad en el que se sugiere su uso: M = grados medios, S = grados superiores.

Muchos de los problemas que se presentan admiten variantes, a través de los cuales pueden ser utilizados en distintos grados o con grupos heterogéneos. El campo numérico, el orden en el que están dados los datos y las preguntas, si se piden respuestas para casos concretos o se pretenden generalizaciones, son algunas de las variables didácticas que pueden simplificar o complejizar una situación problemática.

Para un mejor aprovechamiento, es conveniente que el docente haga una apropiación previa y total del material y luego se disponga a trabajarlo con sus alumnos.

Considérense estas sugerencias tan sólo a título orientativo, pues la última palabra en el aula la tiene el docente. Él es el que conoce al grupo y a los objetivos específicos del trabajo.

Se ha confeccionado un material similar a éste, destinado a profesores del nivel secundario. Invitamos a los maestros a que le presten atención. Sería un elemento más para lograr la articulación, desde la perspectiva curricular, metodológica y de la formación docente, entre estos dos niveles de escolaridad.

CAPÍTULO I

INVITACIÓN A LA MATEMÁTICA

¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA?

¿Por qué la Matemática es muy importante en la educación? ¿Por qué se destina mucho dinero en algunos países para formar o contratar matemáticos? ¿Es verdad que las computadoras pueden resolver los problemas matemáticos con mayor rapidez y precisión que las personas y ello elimina la necesidad de matemáticos?

Para responder estas preguntas es necesario saber qué es la Matemática y cómo opera. La Matemática es mucho más que la Aritmética, que es la ciencia del número y del cálculo. Es más que el Álgebra, que es el lenguaje de los símbolos, de las operaciones y de las relaciones. Es más que la Geometría que es el estudio de las formas y de las dimensiones. Es más que la Estadística, que es la ciencia de la interpretación de los datos y de los gráficos. La Matemática comprende estas cosas y mucho más.

La Matemática es un modo de pensar, un estilo de razonar. Sirve para decidir si una idea es razonable o al menos para establecer si una idea es probablemente adecuada para lo que se busca. La Matemática es un campo abierto a la exploración y a la investigación y todos los días se producen ideas nuevas y fecundas. Es un modo de pensar que sirve para resolver los problemas de la ciencia, de la administración, del comercio, de la industria, etc.

Es un lenguaje de símbolos que todo el mundo entiende, y hay muchos que piensan que sería la única lengua común con los seres de otros mundos.

Es también un arte como la música, con una simetría, un orden y un ritmo que pueden ser muy bellos.

La Matemática está definida como el estudio de la regularidad, donde por regularidad se entiende **cualquier combinación de formas e ideas que se repiten sistemáticamente.** Este estudio de la regularidad tiene mucha importancia, dado que regularidad y simetría se producen en la naturaleza. La luz, el sonido, el magnetismo, la corriente eléctrica, las mareas, el recorrido de los cuerpos celestes, los cristales de la nieve y la mecánica del átomo, todos presentan una regularidad que permite sean estudiados por la Matemática

LA MATEMÁTICA EN NUESTRO MUNDO

Si damos una mirada a la historia de nuestra civilización, acordaremos que la Matemática tuvo siempre mucha importancia pues ha servido para: medir los límites de un terreno, predecir las estaciones, calcular las tasas, conducir los navíos, construir casas y puentes, diseñar cartas geográficas, proyectar armas y hacer planes de guerra, comprender el movimiento de los planetas, desarrollar el comercio, descubrir nuevos principios científicos, inventar nuevas máquinas, crear cerebros electrónicos, desarrollar estrategias en los juegos, regular el tráfico y las comunicaciones, producir aparatos para nuevas mediciones, viajar por el espacio, descubrir nuevos minerales, predecir el tiempo, predecir el aumento de la población, etc.

Día a día aumentan las aplicaciones de la Matemática y su campo de estudio. Con experimentos, fantasía y razonamientos, los matemáticos generan hechos e ideas que los gobiernos, las empresas y los hombres de acción usan para modificar la civilización.

Si pensamos por un momento en los inventos de nuestro mundo, como los satélites, los submarinos nucleares, las fábricas automáticas y los antibióticos, nos daremos cuenta de cómo la ciencia modifica nuestra vida.

Hoy en día es muy grande el requerimiento de matemáticos para la investigación, la enseñanza y las nuevas aplicaciones. No todos seremos matemáticos o científicos, pero todos debemos disponer de ciertos conocimientos matemáticos para comprender lo que ocurre en nuestro mundo. Estos conocimientos proporcionan ventajas en la escuela, la casa y el trabajo. Para ser un buen ciudadano en un país moderno y de grandes ambiciones se requiere una buena formación matemática.

¿QUÉ HACEN LOS MÁTEMÁTICOS?

La Matemática sirve a la cartografía, a la arquitectura, a la cosmonáutica, al diseño industrial, a la economía, etc. pero, el contador que resuelve problemas de finanzas o el astrónomo que mide la distancia de la Tierra a cualquier otro punto celeste no es un matemático en el sentido estricto de la palabra. Ciertamente usan ideas propuestas por matemáticos.

La tarea de los matemáticos es descubrir principios nuevos o aplicar viejos principios a problemas nuevos. Ellos se ocupan de problemas interesantes como el célebre teorema de Euler (1707-1783).

Este matemático suizo formuló una interesante relación que vincula el número de vértices (V), de aristas (A) y de caras (C) de un poliedro.

Si completamos el siguiente cuadro que se refiere a los poliedros regulares

Poliedro	C	A	V	C + V	A + 2
octaedro	8	12	6	14	14
cubo					
tetraedro					
icosaedro					
dodecaedro					

observamos que en todos los casos $C + V = A + 2$ (igualdad de Euler).

Esta igualdad se cumple para todos los poliedros convexos y aún para los no convexos siempre y cuando no tengan "agujeros" que vayan de un lado al otro (por ejemplo un marco de ventana).

"Realza el mérito de Euler haber advertido la profundidad y trascendencia de una relación tan simple como la que lleva hoy su nombre. Se puede demostrar con ella que no hay ningún otro poliedro regular aparte de los cinco que ya conocemos" (Trejo, C y Bosch, J - 1972).

Ideas tan interesantes como éstas han generado temas centrales de la investigación matemática contemporánea.

REGULARIDADES NUMÉRICAS

La habilidad del matemático para resolver un problema depende en buena medida de su sensibilidad para reconocer cierta configuración regular. Si encuentra una periodicidad interesante la estudia y busca descubrir su significado, rastrea una regla o una formula que la explique o la describa. Es por eso que para ser un buen matemático se necesita estar fascinado por la regularidad.

Un buen ejemplo de regularidad es el ideado por Blas Pascal (1623-1662). Se trata del siguiente esquema triangular de números:

```
                    1
                 1     1
              1     2     1
           1     3     3     1
        1     4     6     4     1
     1     5    10    10     5     1
```

Cada fila empieza y termina con 1, mientras que los otros números son la suma de los dos escritos sobre él en la fila anterior.

Este esquema se da en muchas situaciones. Algunas se proponen a continuación:

- **Potencias de 11:**

$11^0 = 1$

$11^1 = 1\ 1$

$11^2 = 1\ 2\ 1$

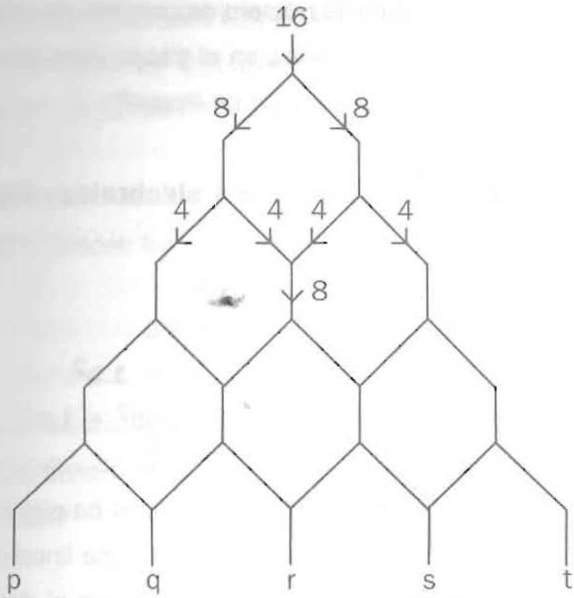
$11^3 = 1\ 3\ 3\ 1$

¿En qué paso deja esta ley de reproducir el triángulo de Pascal? ¿Por qué?

- **Laberinto hexagonal:**

16 ratas entran en un laberinto hexagonal como el del dibujo, y en cada ramificación la mitad toma un camino y la otra mitad el otro.

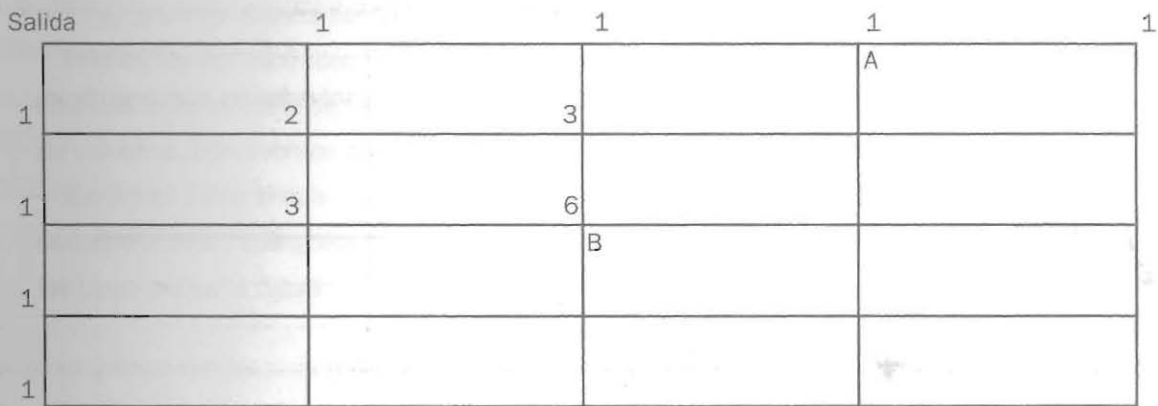
¿Cuántas salen del laberinto por p, q, r, s y t?



Se puede probar con 32 entrando en un laberinto con un paso más

- **La menor distancia entre las calles de una ciudad:**

Las calles de esta ciudad forman una red rectangular como en la figura:



Desde la salida hasta el punto A el camino más corto es ir derecho en línea recta, y no hay ningún otro camino de la misma longitud.

Sin embargo, desde la salida hasta B hay seis caminos diferentes, cada uno con dos unidades horizontales y dos verticales. El número de caminos de longitud mínima a algunas de las intersecciones entre dos calles se muestra en el dibujo. Calcúlalo para las que faltan.

¿Puedes relacionarlo con el triángulo de Pascal?

- **Cuando se desarrollan las expresiones algebraicas siguientes:**

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1.a + 1.b$$
$$(a+b)^2 = 1.a^2 + 2.ab + 1.b^2$$
$$(a+b)^3 = 1.a^3 + 3.a^2b + 3.ab^2 + 1.b^3$$

se observa que los coeficientes de los resultados de elevar un binomio a una potencia natural siempre se corresponden con los números de una línea del triángulo de Pascal.

El trabajo de los matemáticos se parece al de los poetas o al de los escritores: gustan de ocuparse de las ideas. Su tarea tiene mucho de razonamientos y reflexiones y esto se puede hacer en cualquier parte, mientras se espera el colectivo, durante un viaje, al bañarse (Arquímedes) o en la mesa de trabajo.

PROBLEMAS

A continuación se presentan situaciones problemáticas. Para resolverlas es conveniente individualizar un esquema de regularidad.

I.1.M

Diego ideó un juego.
Cuando Lucía dijo 3, Diego respondió 6.
Cuando Lucía dijo 8, Diego respondió 11.
Cuando Lucía dijo 5, Diego respondió 8.
Cuando Lucía dijo 2, ¿Qué respondió Diego?
¿Cuál es la regla del juego?

I.2.S

Pucho y su esposa Julia trabajan juntos. Cada nueve días Pucho tiene un día de franco, Julia tiene un día libre cada seis. Hoy es el día libre de Pucho y Julia lo tendrá mañana. ¿Cuándo fue la última vez que tuvieron franco el mismo día?. ¿Cuál fue el último domingo que pasaron juntos en la quinta si hoy es viernes?

I.3.S

¿Cuántos segmentos pueden formarse con 4, 5, 6..., n puntos

- a) alineados
- b) coplanares?

I.4.S

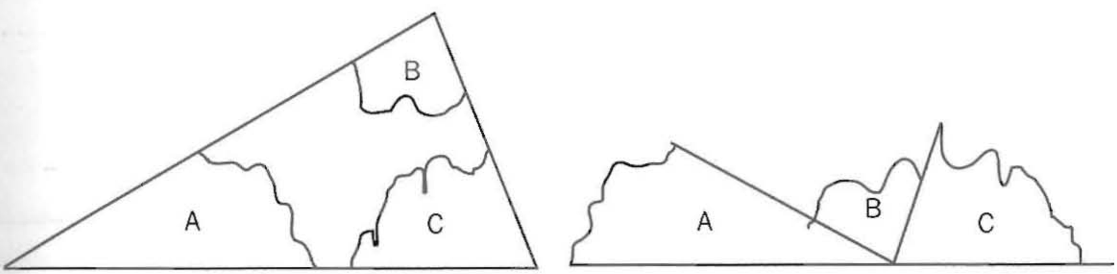
¿Cuántas diagonales tienen: un cuadrilátero, un pentágono, un exágono,...un polígono convexo de n lados?

EL MÉTODO EXPERIMENTAL

Por medio de la fantasía, la intuición y el razonamiento, los matemáticos buscan descubrir buenas ideas para resolver problemas difíciles. Es muy divertido explorar ideas nuevas, estar a la caza de una sospecha o encontrar otros caminos para resolver los mismos problemas. O, por qué no, enunciar nuevos conceptos con palabras claras y concisas.

Uno de los caminos más usados para encontrar buenas ideas consiste en completar experimentos. Este método es similar al usado por los científicos en el laboratorio. Se llama método inductivo. Observemos cómo funciona este método en la siguiente situación:

Un experimento simple ilustra una notable propiedad de los triángulos. Dibujamos sobre una cartulina algunos triángulos de distintas medidas y luego de recortarlos disponemos los ángulos como indica la figura:



El primer y el tercer ángulo se apoyan sobre una línea recta. Este experimento hace suponer que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano. Pero por muchos triángulos con los que probemos, jamás tendremos la certeza de que la suma siempre es un ángulo llano. Sólo tenemos una conjetura. Las ideas descubiertas por este método inductivo son frecuentemente verdaderas, pero no siempre.

Examinemos las siguientes operaciones aritméticas:

2 x 2 = 4	2 + 2 = 4
3/2 x 3 = 9/2	3/2 + 3 = 9/2
4/3 x 4 = 16/3	4/3 + 4 = 16/3
5/4 x 5 = 25/4	5/4 + 5 = 25/4

Si con estos ejemplos concluímos por inducción que sumando o multiplicando los mismos números se obtienen los mismos resultados, hemos concluido un disparate que puede desmentirse con un contraejemplo:

3 x 2 = 6	3 + 2 = 5

Hemos ilustrado un grave defecto del razonamiento inductivo: considerar como general algo sólo a partir de algunos casos particulares. Ello puede conducir a una confusión. Para demostrar que una afirmación es falsa basta encontrar un contraejemplo y la afirmación queda descartada.

No siempre la observación de los juicios particulares infiere la causa o la ley, o sea el juicio universal.

Es cierto que en la escuela primaria debe estar acentuado el carácter concreto y empírico de la Matemática, pero el docente ha de tener claro que el método y el rigor son objetivos fundamentales de la enseñanza y que si bien éstos no pueden ser logrados acabadamente en este nivel, se debe guiar al alumno para que lo alcance en etapas posteriores.

APLICACIONES DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO

1.5.M

Estudia cada conjunto de números y completa los espacios:

a) ......, ..., 30, 40, ..., ..., 70, ..., ..., ...

b) 40, 80, ..., ..., 200, 240, ..., ..., ..., 400

c) ......, 450, ..., ..., ..., 250, 200, ..., 100, 50

¿Por qué pudiste completar los espacios?

I.6.M

Medir la longitud de la circunferencia y del diámetro de varios objetos redondos. Dividir la longitud de la circunferencia por la del diámetro. Al confrontar los resultados, ¿Se puede sacar una conclusión?

I.7.S

Multiplicamos varios números por 9. Sumamos las cifras del producto y si el resultado tiene más de un dígito, sumamos sus cifras y así sucesivamente hasta llegar a un número de una sola cifra.

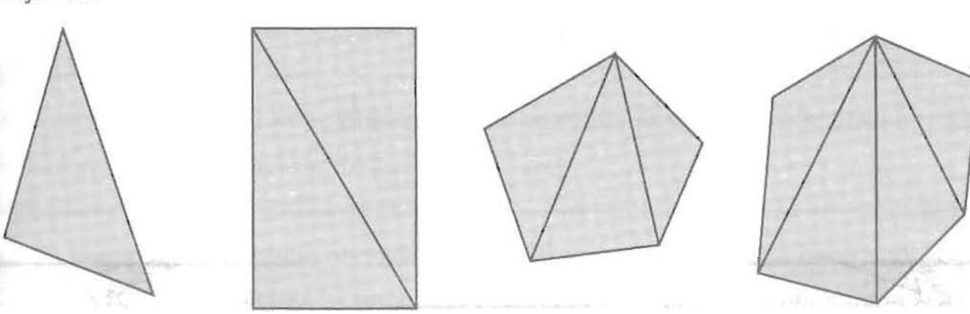
¿Qué resultados se obtienen?

I.8.S

Escribir los cuadrados de los números de 1 a 20 incluidos. ¿Qué regularidad se observa en los cuadrados de los números impares? ¿y en la de los números pares? ¿y en la de los números divisibles por 5?

DEMOSTRACIONES BASADAS EN EL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Tratemos de hacer un experimento con figuras geométricas planas y convexas, como las dibujadas.



Si admitimos la conjetura de un párrafo anterior (que es verdadera) que dice que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es el doble de un recto (2R), entonces la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo será igual al número de triángulos que pueden formarse a partir de un vértice. Esto es igual al número n de lados menos 2. Por lo tanto la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a:

$$(n - 2).\ 2R$$

Si analizamos el razonamiento anterior, hemos partido de resultados que consideramos verdaderos, como la conjetura de la suma de los ángulos de un triángulo y el supuesto (que también es verdadero) sobre el número de triángulos que puede formarse, y hemos calculado la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono convexo. Este método lógico se llama deductivo. Naturalmente la verdad de la conclusión depende de la verdad de las ideas de partida y de la corrección de los pasos lógicos empleados.

En esta forma de razonamiento una verdad particular se deriva de una verdad universal.

El método deductivo es aquél por el cual se procede lógicamente de lo universal a lo particular. Este método exige generalizaciones que son dificultosas para los niños. Por esto es conveniente que la propuesta anterior se desarrolle experimentalmente con los de grados medios y así podrán obtener que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de:

- 4 lados es igual a 360°
- 5 lados es igual a 540°,
- etc.

En grados superiores se puede intentar la generalización utilizando muchos casos particulares.

PROBLEMAS

Servirse de experimentos y razonamientos para resolverlos.

I.9.S

Un polígono tiene una cantidad impar de lados. Sabiendo además que la suma de sus ángulos está entre 300° y 800° ¿Cuántos lados tiene el polígono?

I.10.M

Si 3 gatos comen 3 ratones en 3 minutos, ¿Cuánto tiempo emplean 100 gatos para comer 100 ratones?

I.11.M

Un ascensor parte de la planta baja, sube al 2° piso, desde allí baja un piso, luego sube 7 pisos y por último baja dos pisos. ¿En qué piso se encuentra?

I.12.M

La maestra le pidió a los chicos que leyeran desde la página 5 hasta la página 12 del libro de lectura, incluyendo la 5 y la 12. ¿Cuántas páginas deben leer?

Para el fin de semana, les dio como tarea que leyeran desde la 13 hasta la 30. ¿Cuántas son?

I.13.S

En el fondo de un pozo profundo de 30 metros hay un sapo que cada hora sube 3 metros y retrocede 2 metros. Continuando a este ritmo, ¿Cuántas horas demorará en llegar al borde?

I.14.S

¿Cómo se puede hacer para medir 5 litros de agua si sólo se tienen dos recipientes, uno de 4 litros y otro de 9 litros? ¿Y para medir un litro?

I.15.S

Un libro tiene 110 páginas. ¿Cuántos dígitos se necesitaron imprimir para numerarlas? (Por ej: Para numerar la página 78 se usan dos dígitos, para la página 100 se usan 3 dígitos, etc.)

I.16.S

Pedro presume que es joven. Si se divide su edad por 2, 3, 4, 5 ó 6, el resto siempre es 1 ¿Cuál es la edad de Pedro?

a) 51 años b) 71 años c) 41 años d) 61 años

CAPÍTULO II

INVITACIÓN A LA ARITMÉTICA

ALGO SOBRE LA ARITMÉTICA

La Aritmética nació como el lenguaje destinado a responder preguntas de la vida cotidiana. Para contestar a estos requerimientos fue necesario inventar los números y el modo de combinarlos, de confrontarlos y de operar con ellos. De esta manera se llegó al desarrollo de la ciencia del número o Aritmética.

EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

El sistema de numeración que usamos actualmente utiliza diez símbolos o cifras:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Combinándolos respetando ciertas reglas se pueden representar todos los números naturales. Una de esas reglas es que las unidades se agrupan de diez en diez. Diez unidades de cada orden representan una unidad del orden inmediato superior.

Por estas razones se llama sistema decimal.

Además cada símbolo tiene un valor relativo que depende del lugar que ocupa en el número

Así en el 3 3 3

3 (tres)
30 (treinta)
300 (trescientos)

Por esto el sistema decimal es posicional.

En los sistemas posicionales se usa el 0, que se escribe en el lugar correspondiente cuando no figuran unidades.

En el sistema de numeración romano cada símbolo tiene un valor absoluto que no depende del lugar que ocupa en el número. Ejemplo:

IV — 1 (uno)

VI — 1 (uno)

Este sistema no es posicional. No usa el cero. Tiene símbolos y reglas distintas del decimal.

La humanidad demoró muchos siglos en crear el sistema numérico decimal. No es sorprendente que algunos niños se muestren muy lentos a la hora de captar todas las implicaciones de la notación y de la estructura conceptual subyacente.

PROBLEMAS

a) Con números naturales:

II.1.M

Juan escribió un número. En la cifra de las decenas escribió un 4 y la cifra de las unidades es el doble del de las decenas. La cifra de las centenas es la mitad de la de las unidades. ¿Qué número escribió Juan?

II.2.M

Tacha lo que no corresponde:

En el número 326, el 2 representa 2

a) unidades

b) decenas

c) centenas

En el número 709, el 7 representa 7

a) unidades

b) decenas

c) centenas

En el número 120, el 0 representa 0

a) unidades

b) decenas

c) centenas

II.3.M

Halla el número de cuatro cifras más grande que tenga entre sus dígitos a 1 y 7, y que no tenga dos dígitos iguales.

II.4.S

Tengo un número de dos cifras: el dígito de las decenas es d y el de las unidades es u. Si a la derecha de este número se coloca el dígito 1 formando un número de tres cifras, el nuevo número es

a) $d + u + 1$

b) $10\,d + u + 1$

c) $100\,d + 10\,u + 1$

d) ninguno de los anteriores.

II.5.S

¿Cuál es el mayor número de cuatro cifras que no tiene dígitos repetidos? ¿Cuál es el menor?

II.6.S

Calcula la diferencia que hay entre el mayor número de cuatro cifras distintas entre sí y el menor número de cuatro cifras distintas entre sí?

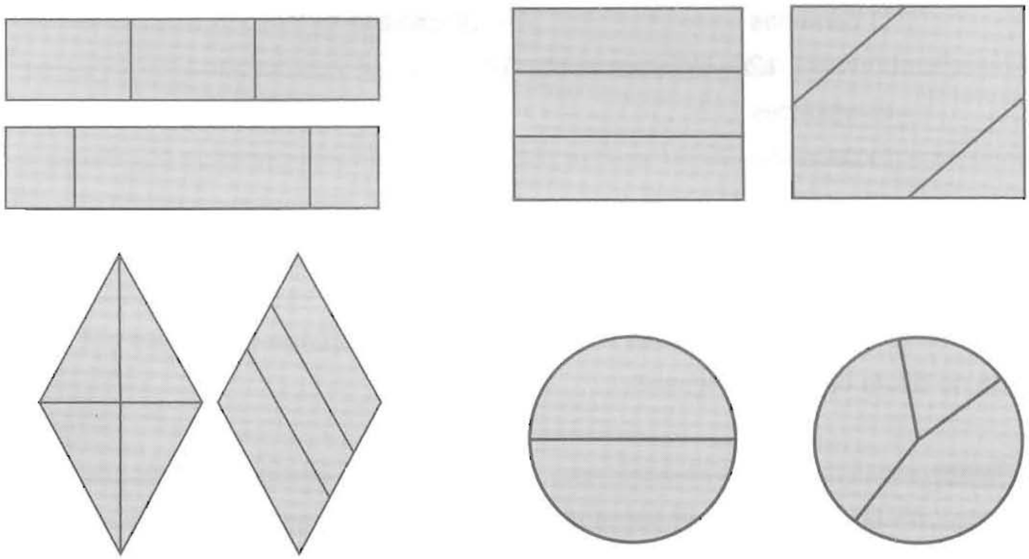
b) Con números fraccionarios:

II.7.M

¿Cuál es la mitad de la mitad de 4?

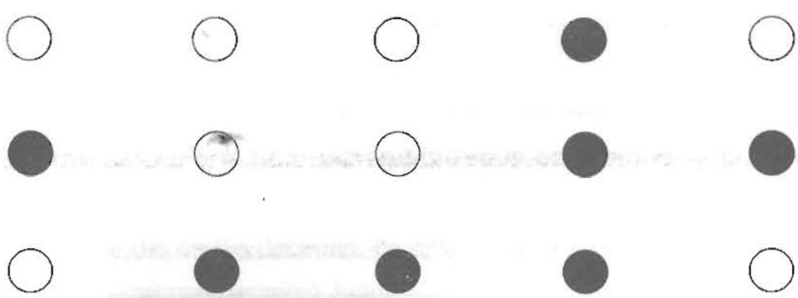
II.8.M

Marca los objetos divididos en tercios.



II.9.M

Observa la figura y escribe: La fracción que indica qué parte del total de los puntos son negros y la fracción que indica qué parte del total de los puntos son blancos.



El estudio del número resultó siempre un argumento efectivo para sugerir algoritmos, cuestiones o conceptos nuevos. Veamos como ejemplo, el siguiente método para calcular una división

552		23
- 230	=	10 x 23
322		
- 230	=	10 x 23
92		
- 92	=	4 x 23
		24

$$552 : 23 = 10 + 10 + 4 = 24$$

CURIOSIDADES NUMÉRICAS

Frecuentemente se encuentran números que se descomponen y se reagrupan con insólita regularidad, lo que permite generar nueva luz sobre las relaciones entre ellos.

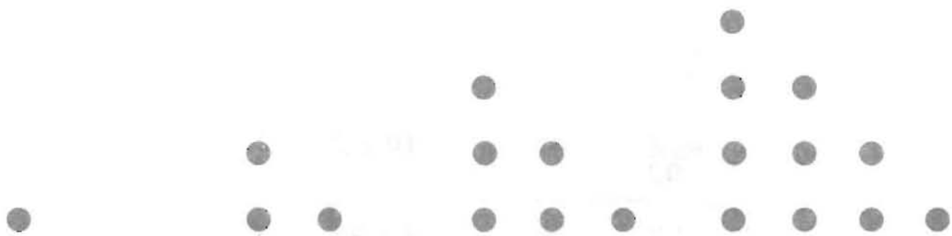
Un ejemplo es el del esquema de los múltiplos de nueve.

1 x 9 = 9	0 + 9 = 9
2 x 9 = 18	1 + 8 = 9
3 x 9 = 27	2 + 7 = 9
4 x 9 = 36	3 + 6 = 9
5 x 9 = 45	4 + 5 = 9
6 x 9 = 54	5 + 4 = 9
7 x 9 = 63	6 + 3 = 9
8 x 9 = 72	7 + 2 = 9
9 x 9 = 81	8 + 1 = 9
10x 9 = 90	9 + 0 = 9

Obsérvese que la cifra de la decena aumenta de 1 a 9 mientras que la cifra de la unidad disminuye de 9 a 0. Después de 45 los productos tienen los mismos números que los precedentes pero escritos al revés.

Hay muchas otras configuraciones de números, algunas de ellas muy interesantes. Así por ejemplo:

- Los números 1, 3, 6 y 10 se pueden representar por un esquema triangular:



1 3 6 10

- Los números 1, 4, 9 y 16 se pueden representar en un esquema cuadrado:

1 4 9 16

- Los cuadrados tienen la extraña propiedad de ser iguales a la suma de números impares consecutivos. Así:

$$4 = 1 + 3$$
$$9 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

- Algunos números como 6, 10 y 15 se pueden representar en un esquema rectangular:

$2 \times 3 = 6$ $2 \times 5 = 10$ $3 \times 5 = 15$

- Con otros números como 2, 3, 5, 7, 11 y 13 no se pueden formar ni cuadrados ni rectángulos. Estos números sólo pueden dividirse por sí mismos y por la unidad, se llaman números primos. Desde hace siglos los matemáticos buscan una relación entre los números primos que permita enunciar una fórmula que los describa y que permita encontrarlos a todos. Ninguno ha hallado una fórmula que individualice a todos los números primos. Este es un ejemplo para ilustrar que una buena parte de la teoría de números es todavía inductiva.

Estas configuraciones muestran cómo la regularidad que se encuentra en las relaciones numéricas interesa a los matemáticos. La teoría de números, rama de la Matemática que se ocupa del estudio de las configuraciones numéricas, ha conducido a importantes resultados y descubierto conceptos matemáticos nuevos. Se ve ahí cómo la más simple Aritmética puede conducir a una multiplicidad de ideas sugerentes.

DIVISIBILIDAD EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Relación de múltiplo y de divisor

Los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son divisores de 12.

Esto también se puede expresar diciendo que 12 es divisible por 1, por 2, por 3, por 4, por 6 y por 12. Los números 4, 8, 12, 16.....son múltiplos de 4.

En general para obtener los múltiplos de un número natural *a* efectuamos 0 x *a*; 1 x *a*; 2 x *a*; 3 x *a*;...etc.

Un múltiplo de *a* es el producto de *a* por cualquier número natural.

Un múltiplo de *a* se puede escribir como un producto *k* x *a*, siendo *k* un número natural.

Si un número natural *b* es múltiplo de *a* entonces *a* es divisor de *b*. Por ejemplo:

8 es múltiplo de 2, por lo tanto 2 es divisor de 8.
861 es múltiplo de 7, por lo tanto 7 es divisor de 861.

¿Es cierto este último ejemplo? Sí, es cierto porque 861 dividido 7 es 123 y el resto de esa división entera es 0.

Los criterios de divisibilidad permiten reconocer si un número es o no divisible por otro sin necesidad de hacer la cuenta.

Los criterios más usados en la escuela primaria son los de 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100.

Recordemos el criterio de divisibilidad por 11: "Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de las cifras de los lugares pares y la suma de los valores absolutos de los lugares impares es múltiplo de 11".

Ejemplos:

$$253 \longrightarrow (2+3)-5 = 0, \text{ 0 es múltiplo de 11.}$$
$$3817 \longrightarrow (8+7)-(3+1) = 11, \text{ 11 es múltiplo de 11.}$$

Hay otros criterios pero, en general, son tanto o más complicados que hacer la comprobción directa por división. Un ejemplo de esto es el criterio de divisibilidad por 7.

PROBLEMAS

II.10.M

Encuentra el menor de los números de dos cifras que es múltiplo de 6 y de 8 a la vez.

II.11.M

Habíamos partido un chocolate en partes iguales cuando llegaron unos amigos. Para convidarles debimos partir cada trozo en tres partes. Ahora somos 12. ¿Cuántos éramos en el momento de realizar la primera partición?

II.12.S

a) ¿Cuál es el mayor número, menor de 3035, que es múltiplo de 11?

b) ¿Cuál es el menor número, mayor que 2201, que es múltiplo de 11?

II.13.S

Claudia hizo una lista con los múltiplos de 3, comenzando con 3. Sofía hizo una lista con los múltiplos de 5 comenzando con 5. Luego marcaron cada uno de los números que estaban en las dos listas. ¿Cuál es el menor?

II.14.S

Queremos embaldosar un patio de 360 cm. de largo por 324 cm. de ancho, con baldosas cuadradas iguales, sin fraccionar ninguna baldosa. Podemos disponer de baldosas de 10, 11, 12, ..., hasta 40 cm. de lado. ¿Podemos resolver el problema? ¿Con qué baldosas?

II.15.S

Elige un número. Multiplícalo por 9. Borra una cifra cualquiera que no sea un 0. Suma las cifras que quedan y dime la suma, yo te diré la cifra que has borrado. ¿Cómo podré hacerlo?

LAS CLAVES SECRETAS

Desde tiempos inmemoriales, los espías, los amantes y los políticos han usado claves secretas para enviar sus mensajes para que sólo el destinatario pudiera comprenderlos, procurando evitar que fueran descifrados por el enemigo, el rival o el adversario. Poetas y científicos han llenado páginas sobre estos temas que se vinculan con el misterio, el secreto y la seguridad.

Con el advenimiento de las telecomunicaciones y la informatización de la sociedad, la criptografía ha dejado de ser el curioso divertimento de generales y científicos excéntricos. Hoy en día todo el mundo está pendiente de sus avances, pues sin ellos las comunicaciones electrónicas pueden ser tan inseguras que todas las ventajas de celeridad y comodidad que ofrecen se tornan irrelevantes.

Los niños de "Juegos de Guerra" están más cerca de la vida cotidiana que de la ciencia-ficción. Los cajeros automáticos de los bancos y todas las transacciones que se realizan simplemente mediante órdenes a una computadora deben ser protegidos de la acción de los delincuentes informáticos, cada vez más frecuentes.

LOS MENSAJES DEL CÉSAR

Julio César, para gobernar su enorme imperio debió utilizar claves secretas muy seguras para la época. Él simplemente transmitía su mensaje y un número entre 0 y 27, llamado la cifra de César. Sus generales sabían que cada letra del alfabeto correspondía inicialmente a un número entre 1 y 27.

espacio	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12

M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Recibido el mensaje, sustituían las letras y los espacios por el número correspondiente. Luego le sumaban a cada número la cifra del César y por último, sustituían cada uno de los números así obtenidos por sus correspondientes restos en la división por 28. Ahora sí, reemplazaban estos números por letras, según la asignación original y podían leer las órdenes del César.

Si la cifra del César es 12 y el mensaje es GTVGTHTOPOGDAP (el mensaje no tenía ningún espacio), los pasos que hemos descripto son

07212307210821161716070401 17
19333519332033282928191613 29
19050719052005000100191613 01
R E G R E S E - A - R O M A

Este código aumenta considerablemente su seguridad si en lugar de mandar una cifra del César para todo el mensaje se manda una cifra del César para cada letra. Lo complicado es transmitir las cifras del César sin que el enemigo se entere.

II.16.S

¿Cuál es el siguiente mensaje secreto del César si la cifra secreta es 17?

DEKDLWMSOXKMBEDZ

II.17.S

¿Cómo hay que codificar QUIÉN GANÓ para que se pueda descifrar usando la cifra secreta 18?

MÁS JUEGOS ARITMÉTICOS

II.18.S

¿En qué día de la semana será (o fue) tu cumpleaños este año? ¿En qué día de la semana caerá el año que viene? ¿Por qué?

II.19.S

En cierto mes, tres domingos son días pares. ¿Qué día de la semana será el 20 de ese mes?

II.20.S

Un alambre de 524 cm. es cortado desde uno de sus extremos *A* en trozos de 26 cm. y desde el otro de sus extremos *B* en trozos de 32 cm. Si los obreros que realizan estos cortes proceden alternadamente, comenzando el obrero del extremo *A* ¿qué obrero efectuará el último corte?

II.21.S

Un juego conocido tiene las reglas siguientes:

1) Juegan alternadamente 2 jugadores.
2) Cada jugador en su turno escribe un número entero entre 1 y 10 inclusive. Ese número se adiciona a la suma de los números escritos en las jugadas precedentes, (salvo naturalmente que se trate de la primera jugada).
3) Pierde el jugador cuyo número hace que la suma sea 100 o más.

El jugador que comienza el juego, si su contrincante juega bien, pierde. Explique cómo y por qué.

II.22.S

Jaimito se jacta de ser el que suma más rápido y para demostrarlo le pide a un compañero que escriba un número de 7 cifras, que escribe:

6.991.542

A otro compañero le pide que escriba debajo otro número de 7 cifras, que escribe:

8.201.533

Él propone un tercer número:

3.008.457

Le pide a un tercer compañero que escriba un número de 7 cifras, que escribe:

2.318.776

Por último, él escribe:

1.798.466

Jaimito traza la línea y empezando desde la izquierda escribe la suma:

22.318.774

¿Cómo eligió Jaimito sus números?

LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Este tema ha sido desde siempre abordado por la escuela. En algunos casos se lo ha jerarquizado a tal punto que se han descuidado otros contenidos tan importantes como él y en otros casos sólo se han trabajado algunos de sus aspectos (por ejemplo los algoritmos o "cuentas").

Para lograr el conocimiento que un niño de la escuela primaria debe adquirir respecto de las operaciones, es imprescindible que se trabajen los siguientes aspectos:

- Resolución de situaciones problemáticas que impliquen distintas acciones para que se comprenda que una misma operación matemática resuelve una amplia gama de problemas. Por ejemplo: la sustracción de quitar o comparar, la división de repartir o partir, la adición de juntar o agregar, etc.
- La escritura simbólica convencional. La construcción significativa de una operación no debe comenzar con su simbolización. Después de reflexionar sobre las acciones que se han realizado para resolver experiencias informales el maestro conducirá a los niños hacia la necesidad de comunicar por escrito sus resultados mediante una escritura simbólica convencional.
- La definición y sus propiedades aunque teniendo en cuenta que en este nivel de escolaridad importa más el uso de ellas que su formalización.
- La relación que vincula a las operaciones fundamentales entre sí. Esto dará mayores posibilidades operacionales. Por ejemplo la adición y la sustracción son operaciones inversas. La potenciación es un caso especial de multiplicación ya que $2^3 = 2 \times 2 \times 2$.
- Los procedimientos de cómputo. Es necesario que el niño aprenda a discernir frente a una situación, si es necesario un cálculo exacto o aproximado. Si el cálculo exacto es necesario podrá ser resuelto mentalmente, con calculadora o con lápiz y papel. Si una respuesta aproximada es suficiente basta el cálculo estimativo. La estimación también debería ser utilizada como forma de control de las otras maneras de calcular.
- Resignificación de la interpretación de cada operación en distintos contextos numéricos (naturales, decimales, fraccionarios). Por ejemplo no se puede pensar en una "suma repetida" como con los naturales con otro "tipo" de número.
  ($3 \times 2 = 2 + 2 + 2$; 3,1*b*x 2,8 = 2,8 + ...?; $1/2 \times 3/4 = 1/2 + ...?$)

PROBLEMAS

II.23.M

Juan, María y Pedro ayudaron a don Florencio a trabajar en su jardín. Cada chico recogió cuatro bolsas de hojas secas. ¿Cuántas bolsas recogieron en total?

II.24.M

Completa los casilleros con los números correspondientes.

1		■	2	3
4		■		
	■	5		■
6			■	7

HORIZONTALES

1.- 19 + 58

2.- 84, 87, 90,...

4.- Número de días del mes de Mayo.

5.- Tres veces el doble de tres.

6.- Ochocientos veintinueve.

VERTICALES

1.- Setenta y tres centenas más ocho unidades.

2.- El número anterior al mayor número de tres cifras.

3.- 7 + 7 + 7 + 7 + 7.

7.- El mayor de los dígitos.

II.25.M

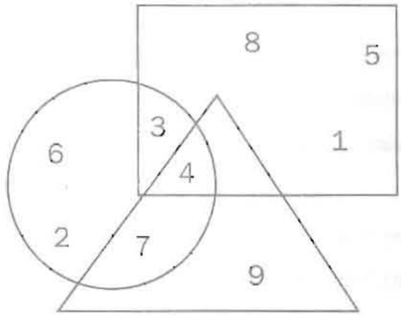
Pablo tiene 15 figuritas

Lucas tiene 10 figuritas más que Pablo

¿Cuántas figuritas tiene Lucas?

¿Cuántas figuritas tienen los dos juntos?

II.26.S



a) Calcula la suma de los números que están dentro del triángulo.

b) Calcula la suma de los números que están dentro del círculo pero fuera del triángulo.

c) Calcula la suma de los números que están dentro del círculo y del cuadrado a la vez.

II.27.M

En básquetbol cada doble vale 2 puntos y cada tiro libre vale 1 punto. El equipo "A" encestó 46 dobles y 13 tiros libres. ¿Cuál fue su puntaje final?

II.28.M

Como las teclas +, - , x y / no funcionaban, Ana dibujó un □ cada vez que tenía que escribir alguno de esos símbolos.

¿Qué símbolo corresponde a cada □ ?

8 □ 5 = 13	15 □ 3 = 5
8 □ 5 = 40	8 □ 3 = 24
8 □ 5 = 3	4 □ 7 = 11

II.29.M

Diego fue al quiosco con 60 centavos. Como es muy chiquito no sabe qué puede comprar. Quiere gastar toda la plata.

¿Lo ayudamos a elegir? Cuenta todas las posibilidades:

Esta es la lista de precios

Bocadito	10 centavos
Alfajor	30 centavos
Chupetín	20 centavos

II.30.M

Me pagaron $ 11.- por día, durante 20 días por mes, durante 6 meses.
¿Cuánto dinero recibí en total?

II.31.M

Hugo tiene 231 monedas.
Su álbum numismático tiene espacio para 9 monedas en cada página.
¿Cuántas páginas puede llenar?
¿Cuántas monedas le quedarán para otra página?

II.32.M

Lucas tenía una bolsa con 24 bolitas.
Dio la mitad de ellas a Ignacio y un cuarto a Diego.
¿Cuántas bolitas conservó Lucas?

II.33.M

¿De cuántas maneras se puede cambiar un billete de $ 1.- por monedas, usando al menos una moneda de cada valor?. Recuerda que hay monedas de 5, 10, 25 y 50 centavos.

II.34.M

En una escuela hay 240 chicos.
24 chicos comen en su casa, y los restantes lo hacen en el comedor de la escuela repartidos en partes iguales, en 9 mesas.
¿Cuántos chicos comen en cada mesa?

II.35.M

Un sobre de azúcar contiene 2 g. Estos se envasan en cajas que contienen 150 sobres cada una. Con 30 kg. de azúcar ¿cuántas de esas cajas se obtienen?

II.36.M

Una marca de café se vende en paquetes de 1/4 kg., 1/2 kg. y 1 kg.
Con 200 kg. de café se envasaron 150 paquetes de 1/4 kg. y 80 de 1 kg.
El resto se envasará en paquetes de 1/2 kg. ¿Cuántos paquetes de 1/2 kg. se obtendrán?

II.37.M

En la librería del pueblo se puede leer el siguiente cartel:

1 libro de aventuras	$ 25.-
3 libros de aventuras	$ 60.-

¿Cuánto rebaja el precio de cada libro si uno adquiere 3?

II.38.S

Un álbum de fotos tiene 32 páginas y en cada una se pueden pegar 4 fotos. Si tenemos 136 fotos. ¿Cuántas quedan sin pegar?

II.39.S

Un filatelista decide ordenar su colección de estampillas pegándolas en un álbum. Tiene 2137 estampillas. Cada álbum tiene 30 páginas y en cada una entran 24 estampillas. ¿Cuántos álbumes deberá comprar? ¿Cuántos lugares libres le quedan?

II.40.S

Pedro compra en un quiosco 3 alfajores que cuestan $ 0,45 cada uno, y un chocolate que cuesta $ 0,80. si paga con $ 3.-, ¿Cuánto vuelto recibió?

II.41.S

En un supermercado hay una oferta de 8 alfajores por $ 3,60.
En otro, la misma marca se ofrece en paquetes de 12 alfajores por $ 5,20.
¿Cuál oferta conviene más?

II.42.S

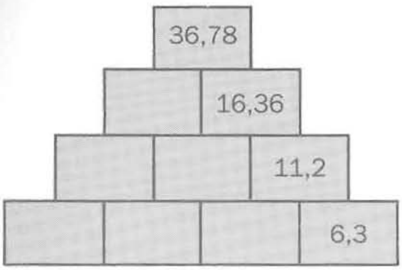
Para plastificar un piso se cobra $ 12.- el m^2.
¿Cuánto costará plastificar el piso de una habitación rectangular de 6 m por 4,5 m?

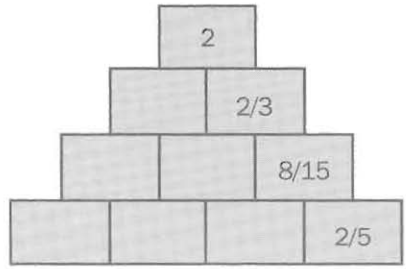
II.43.S

Un productor tiene una plantación de frutales de 18 ha, que rinde anualmente 1500 kg. de fruta por cada ha. Si la ganancia por kg. de fruta es $ 0,20, ¿Cuánto gana anualmente?

II.44.S

Completa con números los cuadros vacíos de manera que en cada uno de ellos quede la suma de los números de los dos cuadros que están debajo de él.





II.45.S

Un taxi cobra 96 centavos la bajada de bandera y 12 centavos por cada 200 metros recorridos ¿Cuál es el costo de un viaje de 5,5 kilómetros?

II.46.S

Se quiere sembrar con pasto una superficie rectangular de 8,5 m de largo por 5,5 m de ancho. Cada paquete de semillas alcanza para sembrar 12 m^2. ¿Cuántos paquetes hay que comprar?

II.47.S

Si multiplicamos un número por 15 y luego sumamos 18 al resultado obtenemos 393. ¿Cuál es el número de partida?

II.48.S

En una escuela las 5 horas de clase duran 45 minutos cada una y hay recreos de 5 minutos, 10 minutos, 15 minutos y 5 minutos. La primera hora de clases comienza a las 8 hs. ¿A qué hora termina la última hora de clase?

CAPÍTULO III

INVITACIÓN A LA ESTADISTÍCA

EL SENTIDO DE LAS COINCIDENCIAS: LA PROBABILIDAD

La probabilidad entra en nuestras vidas de muchas maneras diferentes. Quizás el primer encuentro sea a través de los juegos de azar: dados, naipes, ruleta,.... Pronto nos damos cuenta de que los nacimientos, las defunciones, los accidentes, las transacciones económicas y los vínculos personales admiten un tratamiento estadístico. Más adelante advertimos que muchos fenómenos complejos, algunos sumamente determinísticos, sólo podrán tratarse mediante el cálculo de probabilidades.

En nuestro mundo complejo, lleno de coincidencias aparentemente sin sentido, lo que hace falta muchas veces, no es el análisis de más hechos verídicos, sino un dominio mejor de los hechos conocidos. Para ello las probabilidades son de un valor incalculable.

La *probabilidad*, como la lógica, ya no es algo exclusivo de los matemáticos. Impregna nuestra vida.

El amplio espectro que va desde lo imposible hasta la certeza

Cuando algo no puede suceder, su probabilidad es 0. Si indudablemente ocurrirá, su probabilidad es 1. ¿Y entre ambos extremos qué pasa? ¿Qué significa la probabilidad 1/2? ¿Cómo se refleja en la realidad?

Al lanzar 200 veces una moneda, es de esperar que la cantidad de veces que cae cara sea aproximadamente 100, o sea, en el 50% de los casos. Decimos entonces que la probabilidad de que al arrojar una moneda caiga cara es una de cada dos, o sea 1/2.

Hay una manera muy simple de calcular la probabilidad de sucesos, que evita hacer tantos experimentos: cuando se realiza una experiencia aleatoria (lanzar una moneda, arrojar un dado, sacar bolillas de un bolillero, sacar cartas de un mazo,.....) en la que todos los resultados son igualmente probables, la probabilidad de cada uno de ellos es "uno dividido el número de resultados posibles".

En la ruleta hay 37 números (del 0 al 36). La probabilidad de que salga el 8 es 1/37. Si un jugador hizo apuestas en el 8, el 11 y el 15 (en tres números), su probabilidad de ganar es:

$$\frac{\text{cantidad de números a los que apostó}}{\text{cantidad de resultados de la ruleta}} = \frac{3}{37}$$

En general, la probabilidad de un suceso se calcula como

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

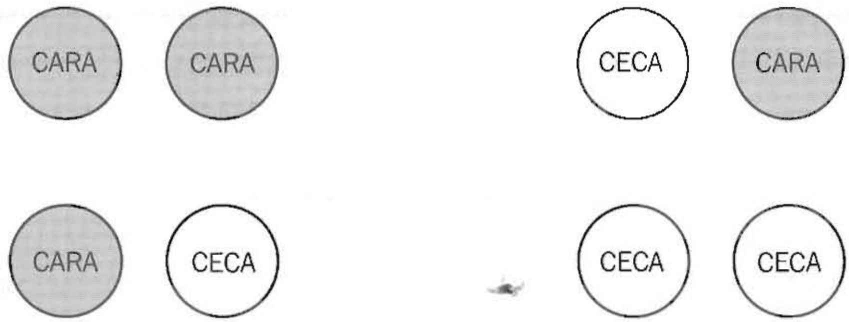
Así, para determinar la probabilidad de un suceso, hay que responder bien a tres preguntas:

¿Cuántos son los resultados posibles?
¿Son igualmente probables?
¿Cuántos son los casos favorables?

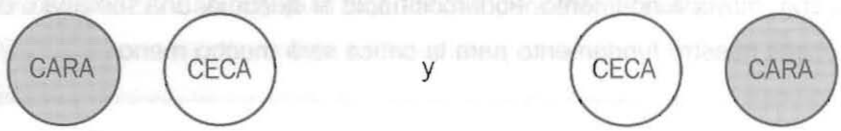
Comprenderemos mejor la importancia de estas preguntas con algunos ejemplos.

Se arrojan dos monedas, una de 5 centavos y una de 10 centavos. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una cara y una ceca?

Uno se ve tentado de decir: hay tres casos, dos caras, dos cecas ó una cara y una ceca, de modo que la probabilidad que quiero calcular es 1/3. Esto es **Falso**. Los tres resultados mencionados no son igualmente probables. Al tirar las dos monedas se presentan cuatro posibilidades:



Estos cuatro resultados sí son equiprobables. Para que salga una cara y una ceca, los casos favorables son dos:



Su probabilidad es 2/4 = 1/2.

PROBLEMAS

III.1.M

En el periódico del día 12 de mayo de 1990 decía:

"60 por ciento de probabilidades de lluvia"

¿Qué quiere decir esa expresión?

¿Nos permite asegurar que ese día llovió?

III.2.S

El Servicio Meteorológico publica todos los días un pronóstico para la jornada, con una estimación de la temperatura, la nubosidad, los vientos y a veces una probabilidad de lluvia.

Es muy frecuente escuchar que los pronosticadores se equivocan mucho.

Desarrollamos la siguiente actividad: diariamente registramos en una planilla la fecha, la probabilidad de lluvia anunciada (ponemos 0 si no habla de lluvias el pronóstico) y si llovió o no.

Fecha	Probabilidad de lluvia	¿Llovió?

Con esta información a lo largo de un año podremos criticar o no a nuestros pronosticadores con mayor fundamento. Podemos hacer el ejercicio, una semana o un mes, pero entonces nuestro fundamento para la crítica será mucho menor.

III.3.S

Redacta un enunciado para cada caso:

$p = 4/5$

$p = 1$

$p = 0$

$p = 0,5$

$p = 3/3$

III.4.S

Se lanzan dos monedas simultáneamente y se quiere saber la probabilidad de que por lo menos una de ellas sea ceca.

III.5.S

Se lanza un dado al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un nº par? Mostrar los casos posibles y los casos favorables.

III.6.S

¿Cuál es la probabilidad de sacar un 4 y un 6 con dos dados lanzados al azar?

III.7.S

Cuatro urnas contienen, cada una, una bolilla roja (r) y una bolilla blanca (b). Se saca al azar una bolilla de cada urna.

¿Cuál es la probabilidad de haber sacado 3 rojas y una blanca?

Mostrar todos los casos posibles e individualizar los favorables.

III.8.S

Se lanzan dos dados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el puntaje obtenido sea 7?; ¿y 6?; ¿y 5?; ¿y 4?; ¿y 3?; ¿y 2?; ¿y 1?

III.9.S

Se lanzan tres dados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los puntos obtenidos sea 12? Averiguar la probabilidad para otros valores.

III.10.S

De una familia de 3 hijos se quiere saber la probabilidad de que 2 sean varones y 1 mujer.

III.11.S

Si se lanza un icosaedro regular, con las caras numeradas de 1 a 20, ¿cuál es la probabilidad de:

a) sacar el nº 3?

b) sacar un nº par?

c) sacar un nº compuesto?

d) sacar el 0?

Responder las mismas preguntas si se lanza:

1) un dodecaedro regular

2) un octaedro regular

3) un tetraedro regular

Dos ejemplos sumamente ilustrativos.

Hay infinidad de problemas cuyo resultado teórico es exacto pero en la práctica es imposible de lograr. En muchos de estos casos se puede aplicar el método de las "muestras". Veremos con cuidado dos situaciones distintas.

LAS ENCUESTAS O SONDEOS DE OPINIÓN

Se puede comprender muy bien cómo funcionan realizando experiencias en el aula. Para ello hay que disponer de 800 fósforos y una bolsa no transparente.

Se separan 200 fósforos y se les hace una marca con marcador rojo. Se separan otros 100 y se les hace una marca azul. Tendremos así 500 fósforos blancos (los que quedaron sin marcar), 200 rojos y 100 azules.

El número de fósforos de cada clase es desconocido para los alumnos. El docente pone los 800 fósforos en la bolsa, bien mezclados. La clase debe calcular el porcentaje de fósforos rojos, de fósforos azules y de fósforos blancos que hay en la bolsa.

Cada alumno, a su turno, sacará un puñado de fósforos de la bolsa y contarán cuántos son rojos, cuántos son azules y cuántos son blancos, registrando el porcentaje de cada clase que hay en el puñado. Por ejemplo, si un alumno sacó 56 fósforos, de los cuales 16 son rojos, 6 son azules y 34 son blancos, registrará 28%, 10% y 60%. Luego regresa su puñado a la bolsa y extrae el siguiente alumno. (Los porcentajes no suman 100 pues se han redondeado a números enteros).

Cuando varios alumnos hayan hecho la experiencia, se procede a contar todos los fósforos de la bolsa y calcular los porcentajes reales de cada color: 25%, 12,5% y 62,5%. Se observará luego el grado de aproximación obtenido en cada caso.

¿Qué pasa si se promedian los porcentajes de un color que obtuvieron los alumnos?

Con este procedimiento se hacen las encuestas con las que nos bombardean los medios de comunicación. Las más serias se preocupan de tomar cuidadosamente los "puñados" de personas, asegurándose de que sea realmente al azar. Esto quiere decir variedad de nivel sociocultural, nivel económico, sexo, edad, etc.

ESTIMACIÓN DEL TAMAÑO DE UNA POBLACIÓN

Si tenemos la bolsa con 400 fósforos sin marcar, trataremos de averiguar cuántos fósforos hay en la bolsa.Se toma cierto número de ellos, por ejemplo 80, y se les hace una marca que permita distinguirlos de los demás, por ejemplo con un marcador azul. Luego se los regresa a la bolsa y se los mezcla bien. A continuación, cada alumno, por turno, saca un puñado de fósforos de la mezcla, cuenta los marcados y los blancos y establece la proporción. Hecho esto, regresa el puñado a la bolsa y hace su extracción el siguiente alumno.

Si un alumno contó 12 azules y 50 blancos, su planteo es

$$\frac{\text{azules sacados (12)}}{\text{total sacado (62)}} = \frac{\text{total de azules (80)}}{\text{total de la bolsa (x)}}$$

Este alumno estimará que en la bolsa hay:

$$x = \frac{80.62}{12} = 413 \text{ fósforos}$$

Si se promedian las estimaciones obtenidas por varios alumnos se obtiene una estimación mejor.

Con este procedimiento los biólogos estiman el número de peces que hay en una laguna: pescan una cantidad determinada, les hacen una marca y luego los regresan a la laguna. Dejan pasar un tiempo para que los peces marcados se diseminen y mezclen con los peces sin marcar. Luego pescan algunos peces (éste es el "puñado") y establecen la proporción entre marcados y sin marcar, tal como hicimos en el ejemplo de los fósforos.

Los alumnos que estudian Estadística al finalizar este nivel deben ser capaces de:

- Recolectar datos de hechos simples sobre una población pequeña y bien definida,
- establecer una muestra aleatoria de una población pequeña,
- muestrear a partir de distribuciones (como las logradas por el lanzamiento de un dado),
- efectuar, interpretar y extraer conclusiones de tablas de frecuencia,
- realizar, leer y establecer inferencias de gráficos de barras, de pictogramas y circulares,
- hallar la moda, la mediana y la media de un conjunto,
- asignar probabilidades en el caso de equiprobabilidad,
- emplear datos estadísticos para estimar probabilidades futuras o corroborar pronósticos realizados,
- usar un lenguaje oral y escrito, especializado.

Para iniciarse en este tema recomendamos a los maestros el libro: "**De educación y estadística**" , de los autores Santaló, L., Palacios, A. y Giordano, E., Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1994.

CAPÍTULO IV

INVITACIÓN A LA GEOMETRÍA

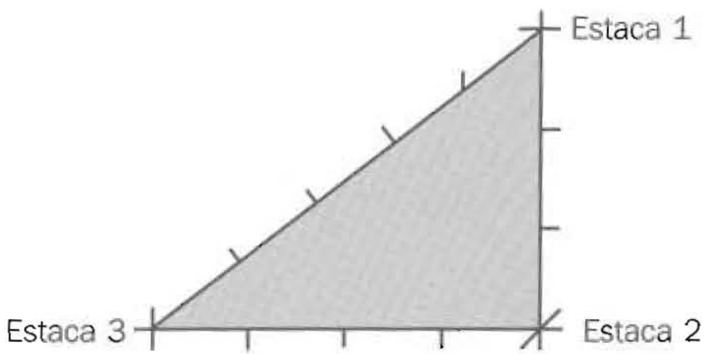
UN POCO DE HISTORIA ANTIGUA

La Geometría surge como una ciencia empírica, en la que los esfuerzos están al servicio del hombre para que pueda controlar su espacio circundante.

En el antiguo Egipto, en cada primavera las aguas del Nilo superaban los terraplenes y los diques. Anegaban las tierras por kilómetros y kilómetros. Los egipcios acogían con gusto esta inundación anual porque sus tierras eran muy áridas y éste era el único medio efectivo para regar los campos. Pero el anegamiento también traía contratiempos pues el agua borraba la división de las tierras. Por eso, después de que las aguas se retiraban había que dividir nuevamente los campos.

En esos tiempos el sistema de medidas era muy rudimentario. Hubo que desarrollar mucha Matemática para que las medidas alcanzaran la extensión y la precisión que tienen hoy.

La Geometría empírica o física, sobre la que están basadas muchas actividades humanas necesitó el ángulo recto y los agrimensores egipcios procedían de la siguiente manera. Sobre una soga de cierta longitud hacían 13 nudos a intervalos regulares. Fijaban la soga con estacas como indica la figura.



El ángulo formado en la estaca 2 es recto. Los catetos miden 3 y 4 unidades y la hipotenusa 5 unidades.

Los egipcios, satisfechos con este sistema, no se cuestionaron por qué. Sólo les importó que si los lados de un triángulo son proporcionales a 3, 4 y 5 el triángulo es rectángulo.

En la misma época los hindúes necesitaban construir ángulos rectos y encontraron otras ternas pitagóricas que formaban triángulos rectángulos, como las siguientes:

12, 16 y 20	15,20 y 20
5, 12 y 13	15, 36 y 39
8, 15 y 17	12, 35 y 37

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

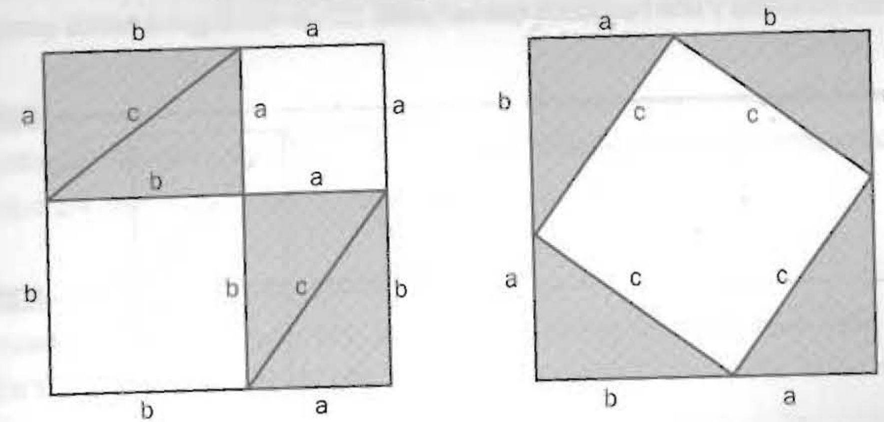
La primera respuesta al por qué de esta relación la dio Pitágoras en el siglo VI antes de Cristo y su nombre será siempre recordado por la importante relación que demuestra el teorema de Pitágoras.

En cualquier triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos se llaman catetos. La relación puede enunciarse así: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

El maestro que está leyendo este material se preguntará si hay que trabajar con el teorema de Pitágoras en la enseñanza primaria.

Es cierto que en la mayoría de los programas y textos vigentes no aparece, pero consideramos oportuno proponerlo para mostrar con un ejemplo, cómo una compleja relación matemática puede trabajarse experimentalmente con los niños y así preparar el tránsito que va desde

Se cree que la primera demostración fue sugerida por el diseño que se ilustra en las figuras:



Se construyen dos cuadrados grandes de lado a + b. Tenemos por otra parte cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b. Las áreas no ocupadas por triángulos rectángulos deben ser iguales o sea que $a^2 + b^2 = c^2$ que es el teorema de Pitágoras expresado en términos algebraicos.

PROBLEMAS

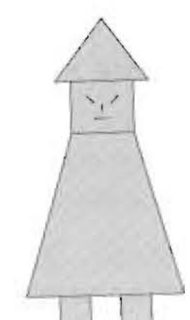
IV.1.M

Ana dibujó 6 círculos, la mitad arriba de la línea y la otra mitad abajo. Reproduce el dibujo de Ana

IV.2.M

Matías hizo este dibujo. Trazó sólo líneas horizontales, verticales y oblicuas.

Marca con rojo las horizontales, con azul las verticales y con verde las oblicuas

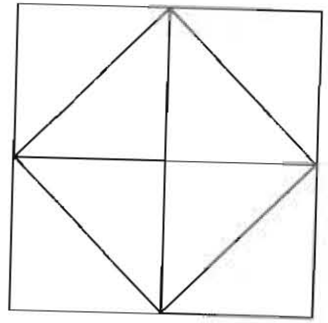


IV.3.M

Dibuja dos verticales y una horizontal que las corte. ¿Cuántos ángulos rectos quedan?

IV.4.M

¿Cuántos cuadrados ves en la figura?

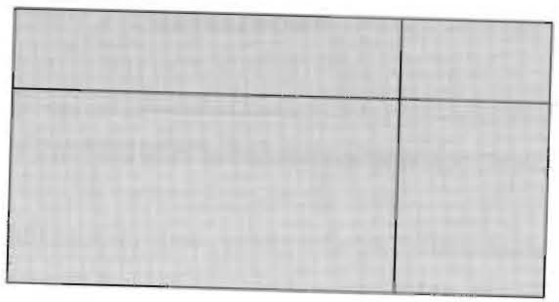


IV.5.M

Dibuja un cuadrilátero que tenga un lado horizontal, otro vertical y dos oblicuos. ¿Cuántos ángulos rectos tiene el cuadrilátero que dibujaste?

IV.6.M

¿Cuántos rectángulos hay en la figura?



a) 9 b) 7 c) 5 d) 4

LA GEOMETRÍA Y LA MEDIDA

Los objetos tienen atributos como la forma, el color, el tamaño, la textura, etc. Algunas de esas cualidades son medibles, por ejemplo la longitud, la capacidad, la superficie, el volumen, el peso. Estos son ejemplos de magnitudes.

Entre los pasos a seguir para conceptualizar las magnitudes está el de expresar su medida, es decir el número de veces que la unidad está contenida en la cantidad a medir (ya sea por conteo, ya usando instrumentos de medición, ya con fórmulas).

PROBLEMAS

IV.7.M

Un triángulo isósceles tiene un lado de 6 cm. y otro de 10 cm. Su perímetro es mayor que 1/4 metro. ¿Cuál es la longitud del otro lado?

IV.8.M

Un cuadrado tiene igual perímetro que un rectángulo en el cual la base mide 7,8 y la altura 6,2 cm. ¿Qué longitud tiene el lado del cuadrado?

IV.9.M

Juguemos a ser agrimensores egipcios: Construir cuerdas divididas por nudos que al ser dobladas en ellos se formen triángulos rectángulos.

IV.10.S

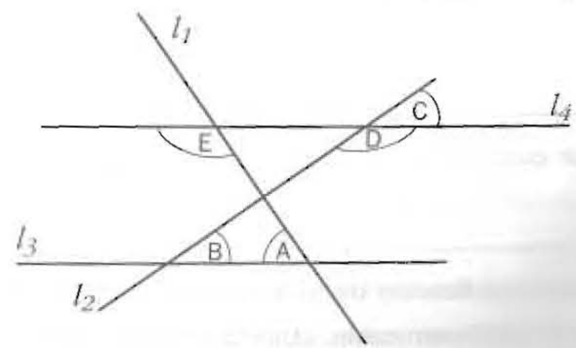
En el triángulo ABC, el lado AB mide 12 cm.; el lado BC mide 3 cm. menos que AB y el lado AC mide 2 cm. más que BC ¿Cuál es el perímetro de ABC?

IV.11.S

En un triángulo isósceles los dos lados iguales miden 12,7 cm. c/u. Si el perímetro del triángulo es 36,9 cm. ¿Cuánto mide el otro lado?

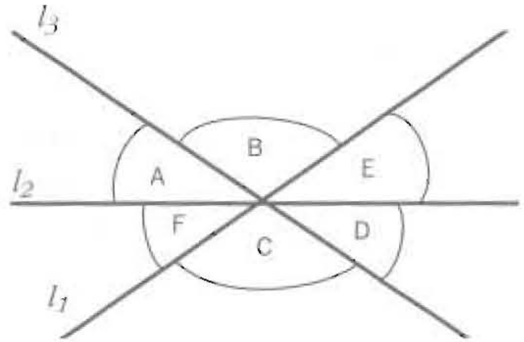
IV.12.S

En la figura las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares mientras que las rectas l_3 y l_4 son paralelas. Sabiendo que el ángulo A vale 40° calcula los demás ángulos indicados.



IV.13.S

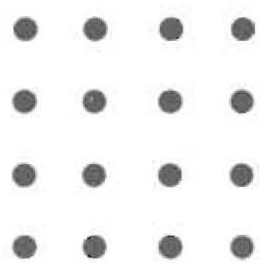
Las rectas del dibujo concurren en el punto O. Sabiendo que l_2 es bisectriz del ángulo que forman las rectas l_1 y l_3 y que el ángulo B mide 120° calcula todos los ángulos indicados en la figura.



¿Cuánto vale la suma de todos los ángulos? (A+B+C+D+E+F)

IV.14.M

¿Cuántos cuadrados se pueden dibujar con vértice en los puntos señalados? Calcula el área de cada uno de ellos si la distancia entre cada punto y su consecutivo fuera de 1 dm

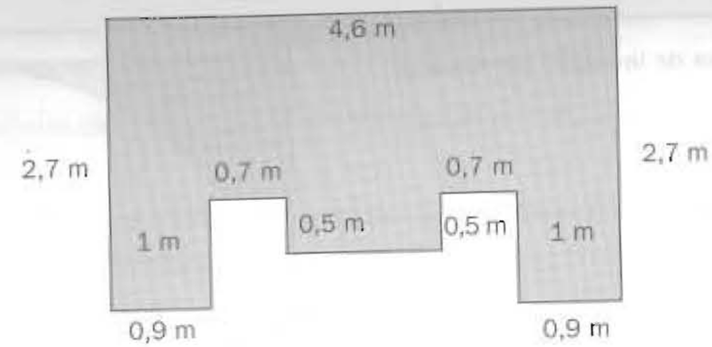


IV.15.S

El perímetro de un cuadrado es de 15,2 cm. ¿Cuál es su superficie?

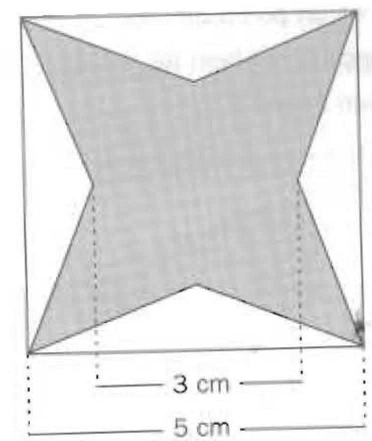
IV.16.S

La figura muestra la superficie del techo de un galpón. Se lo quiere cubrir con una doble capa de membrana impermeable. ¿Cuántos m2 de material deben colocarse?



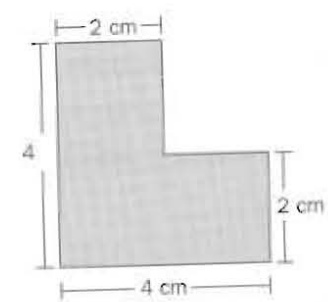
IV.17.S

Calcula el área de la región sombreada dentro del cuadrado.



IV.18.S

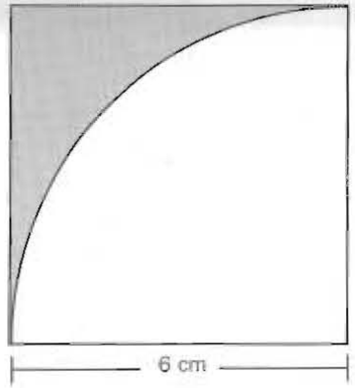
Con 12 módulos de la forma:



se puede formar un cuadrado. ¿Cuál será el área del mismo? Fabrica 12 de estos módulos e intenta armar el cuadrado.

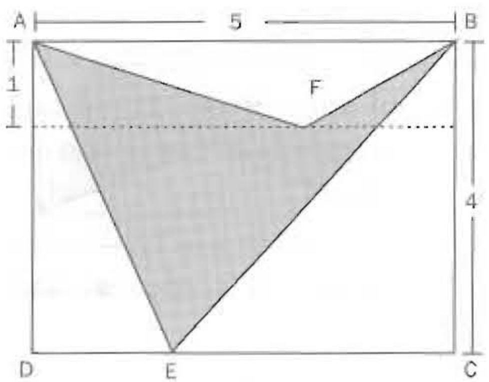
IV.19.S

Calcula el área de la región sombreada:



IV.20.S

En el rectángulo ABCD, E es un punto del lado DC y F es un punto interior del triángulo AEB que está a distancia 1 del lado AB. ¿Cuál es el área de la región sombreada? (los números se refieren a cm.).



IV.21.S

Se pliega una hoja de papel rectangular cuyos lados miden 96 cm. y 64 cm. respectivamente, por el medio de su lado más largo. Se repite el procedimiento con el rectángulo resultante. ¿Cuál es la superficie del rectángulo que se obtiene?

BIBLIOGRAFÍA

- BOLT, B.: Actividades Matemáticas, Editorial Labor S.A., Barcelona, 1988.
- CHARNAY, Roland: Aprender (por medio de) la resolución de problemas, del libro Didáctica de la Matemática, compilación de Parra, C. y Saiz, I., Editorial Paidós, Buenos Aires, 1994.
- Curricula y textos escolares en vigencia
- DICKSON, L. y otros: El aprendizaje de las Matemáticas, Editorial Labor, España, 1991.
- GUZMÁN, Miguel de,: Para pensar mejor, Editorial Labor S.A., Barcelona, 1991.
- GUZMÁN, Miguel de,: Tendencias innovadoras en educación matemática, O.M.A., Buenos Aires, 1991.
- ORTON, A.: Didáctica de las Matemáticas, Editorial Morata S.A., Madrid, 1990.
- POLYA, G.: Cómo plantear y resolver problemas, Editorial Trillas, México, 1972.
- SANTALÓ, L. y colaboradores: De educación y estadística, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1994.
- SANTALÓ, L. y colaboradores: Enfoques hacia una didáctica humanista de la Matemática, Editorial Troquel, Bs. As., 1994.
- SCHOENFELD, Alan: Ideas y tendencias en la resolución de problemas, O.M.A., Buenos Aires, 1991.
- WHIMBEY, A. y LOCKHEAD, J.: Comprender y resolver problemas, Aprendizaje Visor, Madrid, 1993.