

7011
373.512.14
4



Ministerio de Cultura y Educación

INV 011784
SIG <i>Foll</i> 373.512.14
LIB 4

BIBLIOTECA	
Envió	8/7/81
Revisó	<i>any</i>
Almacén	<i>m</i>

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION
SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCACION
DIRECCION NACIONAL DE INVESTIGACION,
EXPERIMENTACION Y PERFECCIONAMIENTO
EDUCATIVO

Comisión Hábitos de Estudio
y Evaluación

29. DOCUMENTO DE APOYO PARA
EL DOCENTE

Nivelación II

Matemática

Ejemplar: 2 17147

Buenos Aires
República Argentina

1980

CENTRO NACIONAL
DE DOCUMENTACIÓN E INFORMACIÓN EDUCATIVA
Piso - Buenos Aires - Rep. Argentina

Mediante las sugerencias presentadas en los anteriores documentos para profesores de matemática, hemos querido orientar la tarea con miras a que nuestros alumnos manejen repetidamente operaciones del proceso de pensar, como son: observar, comparar, interpretar, relacionar y otras.

Decíamos: se trata de darles oportunidades para que se hagan hábiles en la resolución de problemas analizando los pasos del proceso. Y proponíamos algunas pautas para evaluar los logros: que enuncien con precisión definiciones y propiedades, que expresen con claridad lo que han comprendido, tanto como las dudas que se les han presentado, que interpreten y manejen correctamente símbolos, discriminen datos e incógnitas, planteen y analicen hipótesis posibles en problemas sencillos.

En otro aspecto, proponíamos evaluar sus relaciones de convivencia y sus responsabilidades.

Ya desarrollada la mayor parte del curso, la evaluación nos informa con respecto a los logros y a las dificultades. Por ello, con el mismo criterio e intención de Nivelación I presentamos los siguientes ejercicios.

•



Ministerio de Cultura y Educación

Decir si la suma de dos números naturales consecutivos puede ser 90, o puede ser 26.

Para justificar la respuesta cumplir con los siguientes pasos:

- Observar (enunciado - datos).
- Analizar la posibilidad de que sea número par o impar.
- Enunciar una consecuencia de ese análisis (la suma de dos números naturales consecutivos es siempre impar pues ...).
- Expresar simbólicamente la justificación:

$$\begin{array}{ccccccc} \underbrace{x} & + & \underbrace{x+1} & = & \underbrace{2x} & + & 1 \\ n^{\circ} & & n^{\circ} \text{ consecutivo} & & \text{duplo es par,} & & \text{par} + 1 \\ & & & & & & = \text{impar} \\ & & & & & & = \text{impar} \end{array}$$

Trabajar análogamente con:

La suma de tres números naturales consecutivos.

La suma de cuatro números naturales consecutivos.

La suma de dos números naturales pares y consecutivos.

La suma de tres números naturales pares y consecutivos.

La suma de tres números naturales impares y consecutivos.

La suma de cuatro números naturales impares consecutivos.

La suma de dos números naturales impares cualesquiera.

La suma de tres números naturales impares cualesquiera.

Pasar a expresiones simbólicas.

Hacer resumen de las conclusiones.

Los ángulos tienen sus medidas expresadas por $9x$ y $6x$. Calcular el valor de x y el de cada ángulo si:

- a) son complementarios
- b) su diferencia es 75°

R: a) $9x + 6x = 90 \Rightarrow 15x = 90 \Rightarrow x^\circ = 6^\circ$

y los ángulos son de 54° y 36° .

Hallar dos ángulos suplementarios sabiendo que sus medidas son números impares consecutivos.

R: 1er. ángulo: x , 2º ángulo: $x+2 \Rightarrow x+x+2 = 180 \Rightarrow x^\circ = 89^\circ$

Los ángulos valen 89° y 91°

Calcular tres ángulos sabiendo que sus medidas están expresadas por $3x$, $5x$, $10x$ y son tales que:

- a) pertenecen a un triángulo
- b) la suma de los tres es 270°
- c) los dos menores son suplementarios
- d) los dos mayores son agudos en un triángulo rectángulo. Decir si en este caso pueden además cumplir la condición a).

Pedir a los alumnos que preparen un ejercicio similar.



Ministerio de Cultura y Educación

Demostrar que las bisectrices de los ángulos alternos internos entre paralelas pertenecen a rectas paralelas.

Pedirles a los alumnos que realicen el trabajo como teorema, partiendo de lo propuesto como enunciado del mismo, y ver al menos dos formas diferentes de demostración que pueden surgir de la comparación de los distintos trabajos.

Idem para ángulos alternos externos.

Demostrar que las bisectrices de los ángulos conjugados internos entre paralelas pertenecen a rectas perpendiculares.

Idem para conjugados externos.

Como teoremas y al menos, de dos maneras distintas.

En un triángulo, trazar una paralela a uno de sus lados y marcar pares de ángulos congruentes y suplementarios.

(Considerar las rectas que contienen a los lados).

En un triángulo ABC, por un punto R que pertenece a AB, trazar las paralelas a las rectas de los otros dos lados.

Marcar en la figura siete ángulos congruentes con C. Justificar las respuestas.

Observar los ángulos interiores de un trapecio.

Relacionarlos por pares.

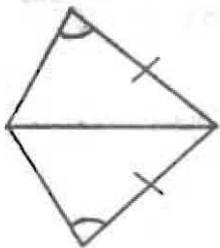
Enunciar una propiedad para algunos de esos pares. (Hay conjugados entre paralelas).

Obtener el valor de la suma de los cuatro ángulos interiores de un trapecio.

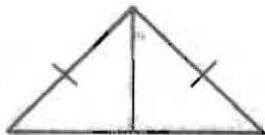
Analizar casos particulares de trapecio isósceles y trapecio rectángulo.

Dados dos triángulos tales que un ángulo del 1° es adyacente a un ángulo del 2° , decir si pueden ser triángulos congruentes; y en caso afirmativo, en qué condiciones.

Presentar distintas figuras de pares de triángulos para que digan si pueden asegurar que según los datos son congruentes y, en caso afirmativo, que enuncien el criterio que aplican.



(Deben agregar el lado común, que es congruente en ambos por propiedad reflexiva)



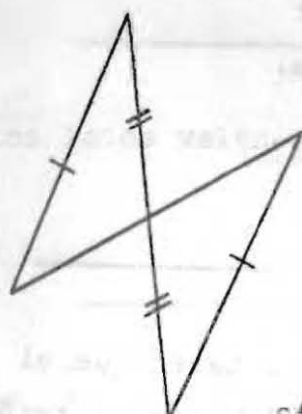
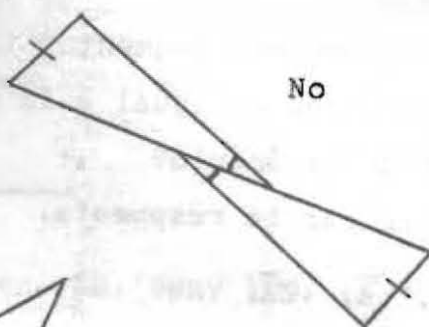
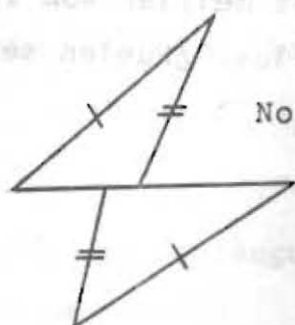
No. (Pues pueden no ser rectángulos)



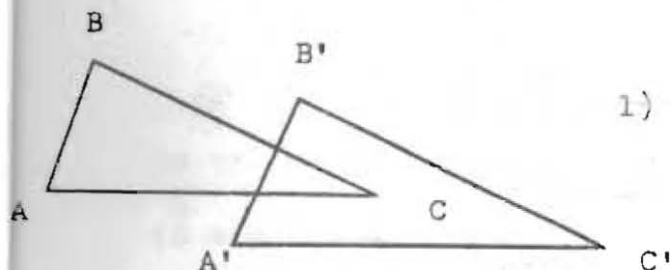
Sí. (lados congruentes por propiedad reflexiva y adyacente de recto, es recto)



Ministerio de Cultura y Educación



sí. (Deben agregar ángulos congruentes por opuestos por el vértice)



- 1) $AB \parallel A'B'$
 $BC \parallel B'C'$

- 2) Idem con
además
 $AC \parallel A'C'$

No.

No.

- 3) Idem con además $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ sí.
(ángulos de lados paralelos)

Dadas las medidas 3, 50, 7, 2, 29, 40, 36, 8, 15 y 5 elegir dos ternas que puedan ser medidas de lados de un triángulo y dos ternas que no.

Justificar las respuestas.

(Ej.: 3, 2, 7 no, pues: $2 + 7 = 9 < 3$.
50, 40, 36 sí).

Se tienen tres segmentos tales que dos de sus medidas son iguales y la 3ra. es igual a la suma de las otras dos. ¿Pueden ser lados de un triángulo?

Justificar la respuesta.

($\bar{a}$, $\bar{a}$, $2\bar{a}$. No)

Se tienen tres segmentos tales que el 2° es duplo del 1°, y el 3° es triplo del 1°. ¿Pueden formar triángulo?

Justificar la respuesta.

($\bar{a}$, $2\bar{a}$, $3\bar{a}$. No)

En $\triangle ABC$ es $\hat{A} = \hat{C}$, ¿Puede ser $\frac{\bar{b}}{2} = \bar{a}$?

($\bar{a} = \bar{c}$ por opuestos a ángulos congruentes

$\bar{b} = 2\bar{a}$ del dato, $\Rightarrow$ Los lados son $\bar{a}$, $2\bar{a}$, $\bar{a}$.

R es no.)

Solicitar a los alumnos que preparen un ejercicio similar.

Resumen: si los segmentos son: $\bar{a}$, $2\bar{a}$, $3\bar{a}$, o $\bar{a}$, $\bar{a}$, $3\bar{a}$, etc., no se forma triángulo.



Ministerio de Cultura y Educación

Comparar un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Comparar los dos catetos (dar posibilidades).

$\triangle ABC$ es rectángulo, los lados valen $8u$, $6u$ y $10u$, ¿cuáles son los catetos?

En $\triangle ACB$ rectángulo es $\hat{C} > \hat{A} > \hat{B}$. ¿Qué par de ángulos resultan complementarios?

En $\triangle ABC$ es $2\hat{A} = \hat{B}$, $\hat{A}$ y $\hat{C}$ son complementarios, ¿de qué clase de triángulo se trata?

$(\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ \wedge \hat{C} = 45^\circ. \text{ R: es rectángulo e isósceles}).$

En $\triangle ABC$ $\hat{A}$ es el mayor de los ángulos y $\overline{BC} = 10u$. Dar ejemplos de medidas para los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

(Si $\hat{A}$ es el mayor ángulo $\Rightarrow \overline{BC}$ es el mayor de los lados $\Rightarrow \overline{AB}$ y $\overline{AC}$ deben ser < 10 y deben cumplir la propiedad triangular. Ej. 9 y 9 ; 6 y 7).

¿Puede ser que los ángulos de un triángulo valgan x , $2x$, $3x$?

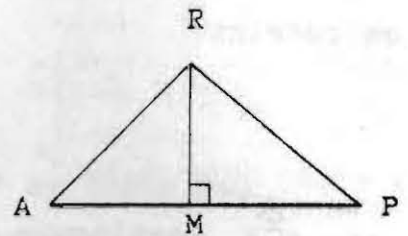
(Si: $x + 2x + 3x = 180 \Rightarrow 6x = 180 \Rightarrow x^\circ = 30^\circ$)

Comparar con el caso de los lados: $\bar{a}$, $2\bar{a}$, $3\bar{a}$: No

Dado el $\triangle ARP$

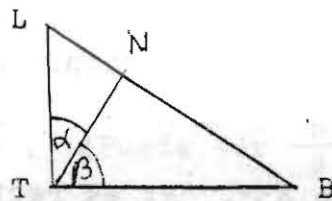
Si $\overline{AM} = \overline{MP}$ y $\hat{M}$ es recto

¿qué clase de triángulo es?



(R: isósceles pues coinciden mediana y altura)

Dado $\triangle LTB$



$\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$

y $\overline{LN} = \overline{NB}$

(R: rectángulo e isósceles pues coinciden mediana y bisectriz, y $\hat{T}$ es recto).

Pedir a los alumnos que preparen ejercicios similares.

Clasificar los siguientes triángulos:

$\triangle ABC$ tiene dos ángulos congruentes.

$\triangle DEF$ tiene las tres alturas segmentos congruentes.



Ministerio de Cultura y Educación

$\triangle$ GHI tiene dos ángulos complementarios.

$\triangle$ JKL la suma de dos de sus ángulos es $< 90^\circ$.

$\triangle$ MNO una altura y mediana coinciden.

$\triangle$ PQR las tres bisectrices son segmentos congruentes.

$\triangle$ STU tiene dos ángulos de 45° .

$\triangle$ VWX dos alturas coinciden con dos lados.

$\triangle$ YZA una altura y un lado coinciden.

$\triangle$ BCD las tres mediatrices pasan por los vértices opuestos a los lados respectivos.

(R: Isósceles: $\triangle$ ABC, $\triangle$ MNO, $\triangle$ STU

Equilátero: $\triangle$ DEF, $\triangle$ PQR, $\triangle$ BCD,

Rectángulo: $\triangle$ GHI, $\triangle$ STU, $\triangle$ VNX, $\triangle$ YZA

Obtusángulo: $\triangle$ JKL)

Preguntar a los alumnos si, por ejemplo, $\triangle$ ABC podría ser también equilátero, o rectángulo, u obtusángulo. Hacerles notar la diferencia entre lo cierto y lo posible.

Repetir el análisis con otros de los triángulos.

Pedirles a los alumnos enunciados similares para que se agregue uno más en cada grupo.

Dadas las siguientes clasificaciones indicar los criterios utilizados en cada caso.

$$A = \{ 5, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18 \}$$

$$\underline{1a.} \begin{cases} A_1 = \{ 5, 8, 9 \} & (\text{dígitos}) \\ A_2 = \{ 10, 12, 15, 16, 18 \} & (\text{polidígitos}) \end{cases}$$

$$\underline{2a.} \begin{cases} A_1 = \{ 5, 8, 9, 10, 12 \} & (<13) \\ A_2 = \{ 15, 16, 18 \} & (>13) \end{cases}$$

$$\underline{3a.} \begin{cases} A_1 = \{ 5, 10, 15 \} & (5) \\ A_2 = \{ 9, 18 \} & (9) \\ A_3 = \{ 8, 12, 16 \} & (4) \end{cases}$$

$$\underline{4a.} \begin{cases} A_1 = \{ 9, 12, 18, 15 \} & (\text{divisibles por 3}) \\ A_2 = \{ 5, 8, 10, 16 \} & (\text{no divisibles por 3}) \end{cases}$$

$$\underline{5a.} \begin{cases} A_1 = \{ 8, 10, 12, 16, 18 \} & (\text{pares}) \\ A_2 = \{ 5, 9, 15 \} & (\text{impares}) \end{cases}$$

$$\underline{6a.} \begin{cases} A_1 = \{ 5 \} & (\text{primos}) \\ A_2 = \{ 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18 \} & (\text{compuestos}) \end{cases}$$

Pedir a los alumnos que elijan otro criterio de clasificación y lo apliquen.



Ministerio de Cultura y Educación

Observar las siguientes ecuaciones e indicar:

1° el conjunto al que pertenecen los términos y coeficientes de cada una.

2° a qué conjunto pertenece cada solución.

$$x + 5 = 1 \quad ; \quad x - 8 = 10 \quad ; \quad x + 7 = -4$$

$$2x = 10 \quad ; \quad 3x = 4 \quad ; \quad 8x - 1 = 15 \quad ; \quad 2x + 6 = -5$$

Dada una serie de ecuaciones sencillas como las que siguen, pedir a los alumnos que al resolverlas, vayan observando y comparando esas resoluciones para opinar al final, sobre las dificultades. (Posiblemente coincidirán en que son cada vez más complejas).

Entonces, que preparen una secuencia similar.

Luego, que ordenen con el mismo criterio, un conjunto de ejercicios dados.

Que preparen una secuencia en la que el valor de x sea siempre el mismo.

1) $x - 10 = 1$

7) $\frac{3x}{5} = 10$

14) $\sqrt[3]{x} = 10$

2) $2x = 5$

8) $\frac{1+x}{2} = 6$

15) $6 + \sqrt[4]{x} = -2$

3) $3x = -4$

9) $5 + \frac{x}{3} = -1$

16) $\sqrt[5]{x} - 4 = 9$

4) $\frac{x}{5} = 3$

10) $x^3 = 125$

17) $\sqrt[3]{x-2} = 3$

5) $4x + 1 = 7$

11) $x^4 - 10 = 6$

18) $\sqrt{2x-7} = 5$

6) $\frac{x}{8} + 2 = 4$

12) $2x^2 + 7 = 57$

19) $\frac{3 - \sqrt{10+x}}{2} = -1$

13) $\frac{3}{4}x^3 - 16 = 32$

Hacer un trabajo similar con inecuaciones.

Victoria tenía algunos lápices de colores, le regalaron el doble de los que tenía y ahora tiene 24, ¿cuántos tenía?

(Designamos x al n° de lápices que tenía: $x + 2x = 24 \dots$)

Pedir a los alumnos que enuncien y resuelvan un problema similar, pero con adquisiciones y pérdidas.

Una persona destina una cantidad de dinero de su sueldo para transportes y gasta \$ 2.400.- por día. ¿Cuánto tenía cinco días antes, si ahora tiene \$ 48.000.- ?

$$(48000 + 5 \cdot 2400 = 60000)$$

Pedir a los alumnos que enuncien un problema similar en cuya resolución aparezca una resta.

En un día de otoño, a partir de 14°C de temperatura hubo un aumento de 7°C , luego un descenso de 5°C y por último, un aumento de 2°C . Hallar la variación y la temperatura final.

$$(14^{\circ} + 7^{\circ} - 5^{\circ} + 2^{\circ} = 18^{\circ}. \text{ Variación } + 4^{\circ}\text{C}, \text{ temperatura final } 18^{\circ}\text{C})$$



Ministerio de Cultura y Educación

Pedir a los alumnos que den un enunciado similar y lo resuelvan, en lo posible cambiando la variable.

Un avión parte de un aeródromo y llega a una altura de 9000 m, desciende 1000 m y luego, 400 m más, después recupera 800 m en altura y vuelve a descender 300 m. Por fin, vuelve a su altura de 9000 m. ¿Qué pasó en el último tramo?, ¿Ascendió o descendió y cuánto?

$$(9000 - 1000 - 400 + 800 - 300 + x = 9000)$$

$$x = 900 \quad \text{R. ascendió 900 m.}$$

C tiene 27 piedras en su colección y quiere llegar a tener 75. ¿Cuántas tiene que conseguir semanalmente, si el número de semanas de que dispone es:

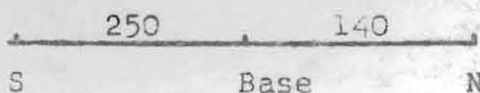
a) 16 semanas $\left(\frac{75 - 27}{16} = 3 \text{ cada semana} \right)$

b) 4 semanas $\left(\frac{48}{4} = 12 \text{ cada semana} \right)$

c) Calcular el número de semanas para que la respuesta sea 8 cada semana.

$$\left(\frac{48}{x} = 8 \Rightarrow x = 6 \right)$$

Un avión parte de un punto situado a 140 Km al norte de su base, vuela hacia el sur hasta un punto situado a 250 Km al sur de su base. ¿Qué distancia recorrió? (Sugerir la confección de un gráfico).



Dos amigos ganaron 130.000 pesos, uno ganó 35.000 menos que el otro. ¿Cuánto ganó cada uno?

(Designamos x a la ganancia del 1°:

$$(x + x - 35000 = 130000 \Rightarrow \dots$$

R.: Uno ganó 82.500 pesos; el otro, 47.500 pesos)

Tres amigos perdieron en conjunto, 11 partidos, A perdió 2 menos que B; y C perdió 3 más que A. ¿Cuántos perdió cada uno?

$$(B \text{ perdió } x \Rightarrow A \text{ perdió } x - 2 \quad C \text{ perdió } x - 2 + 3 = x + 1$$

$$(x - 2) + x + (x + 1) = 11 \Rightarrow 3x - 1 = 11 \Rightarrow x = 4$$

A perdió 2, B perdió 4, C perdió 5)

Pedir a los alumnos que preparen otros enunciados.

Dos automotores participan de una carrera. El coche A llega a destino antes que el B. ¿Puede deducirse que el coche A es el más veloz?

(Analizar los supuestos para dar la respuesta).

Una vendedora tiene un cesto con huevos, dos veces llevó la mano a la canasta y cada vez extrajo cuatro huevos. ¿Cuántos huevos había en la canasta? Indicar los supuestos que se estiman para dar la respuesta.