Ministerio de Cultura y Educación

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCACION
DIRECCION NACIONAL DE INVESTIGACION, EXPERIMENTACION Y PERFECCIONAMIENTO EDUCATIVO

Comisión Hábitos de Estudio y Evaluación

15. DOCUMENTO DE APOYO PARA EL DOCENTE

Nivelación (I)

Matemática

Buenos Aires
República Argentina

1979

NIVELACION

En la primera etapa de nuestra tarea nos hemos propuesto dar a los alumnos variadas oportunidades para pensar, conscientes de que la experiencia es lo que contribuye de manera más significativa al proceso de maduración del individuo.

Los docentes no podemos garantizar que determinada actividad se ha de convertir en una experiencia para nuestros alumnos, pero sí podemos proporcionarles una amplísima gama de oportunidades valiosas para desarrollar el pensamiento.

Oportunidades para pensar y para compartir sus pensamientos son metas en nuestra actividad con los alumnos.

El rendimiento no es el mismo en todos los jóvenes. Por ello nos proponemos reconsiderar nuestros puntos de partida y ubicarnos en las circunstancias actuales.

Se trata de analizar los resultados de nuestra tarea.

Dirigimos nuestra atención al proceso de pensar y a que nuestros alumnos detallen los pasos de su propio camino.

La evaluación nos da una pauta de lo conseguido, sobre esta base trataremos de que los alumnos que han tenido dificultades serias alcancen el mínimo razonable.

Nuestra sugerencia al respecto es: detenerse, realizar una revisión en una quincena y, en esta suerte de repaso, solicitar la ayuda de los alumnos aventajados.

Ministerio de Cultura y Educación

En la ejercitación que adjuntamos con carácter de sugerencia, y que será adecuada según el grupo y la modalidad de la escuela, cada enunciado está acompañado de un pequeño cuestionario o lista de tareas a realizar. Se trata de pasos que están graduados en cuanto a sus dificultades, de manera que pueda proponerse el mismo trabajo a todos.

Los más capacitados podrán contestar a la lista completa. Con un plazo suficiente y después de un control de las primeras respuestas a las que, todos (o casi todos) habrán llegado, puede proponerse el trabajo en grupos, para que los que ya completaron su tarea ayuden, expliquen u orienten a los demás.

Otra propuesta es que, los que alcanzaron satisfactoriamente los objetivos de aprendizaje, preparen ejercitación (con su resolución) y la planteen a su grupo. Su estilo, que es más sencillo que el del profesor en sus justificaciones, puede facilitar la comprensión a los que tienen mayores dificultades.

Como reflexión final decimos: es fácil ahogar el pensamiento, es mucho más difícil estimularlo. Si lo logramos, estaremos presenciando su tránsito hacia la madurez.

Ejercicio N° 1

Dados: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{A,5,10\}$ se pide:

a) Responder si es verdadero (V), o falso (F), o incorrecto (I)

$2 \in A$; $2 \in B$; $A \in B$

b) Lo mismo para:

$2 \subset A$, $A \subset B$

c) ¿Qué elementos hay que agregar al B para que $B \supset A$?

d) Indicar la diferencia entre el significado de A y $\{A\}$.

e) ¿Cuál es la expresión correcta?

$A \subset \{A\}$ o $A \in \{A\}$

JUSTIFICAR LAS RESPUESTAS.

Ministerio de Cultura y Educación

Ejercicio N° 2

Dadas:

1) $A \supset \emptyset$ 2) $\emptyset \subset A$ 3) $A \cup \emptyset = A$

4) $B \cap \emptyset = \emptyset$ 5) $\emptyset \subset (A \cup B)$ 6) $\emptyset \subset (A \cap B)$

7) $\emptyset \subset (\emptyset \cup A)$

a) Las expresiones anteriores son verdaderas cualesquiera sean los conjuntos A y B : Pensar acerca de esas aseveraciones analizando el propio proceso.

b) Dar un ejemplo para dos de esas expresiones.

c) Con los conjuntos elegidos en b) escribir una proposición V y otra F.

d) Enunciar en palabras dos propiedades del conjunto vacío que se deducen de las expresiones dadas.

Ejercicio N° 3

a) Elegir un conjunto L tal que $A \cap L = \emptyset$ siendo $A = \{5\}$.

b) Elegir un conjunto X tal que $X \cap A = \emptyset$ cualquiera sea A.

c) ¿Puede ser $A \cup \emptyset = \emptyset$, $\forall$ A?

d) Decir por qué $A \subset (A \cup B) \; \forall A \wedge \forall B$.

e) Decir por qué $(A \cup B) \subset \{(A \cup B) \cup C\} \; \forall A, \forall B, \forall C$.

f) Decir por qué $(A \cap B) \subset A$.

g) Decir por qué $(A - B) \subset A$.

JUSTIFICAR LAS RESPUESTAS.

Ejercicio N° 4

Clasificar el conjunto de números:

$$A = \{ x/x \in N \wedge 15 < x < 30 \}$$

en subconjuntos cuyos elementos sean:

$A_1 = \{$números pares$\}$

$A_2 = \{$números enteros$\}$

$A_3 = \{$números primos$\}$

$A_4 = \{$múltiplos de 5$\}$

$A_5 = \{$números mayores que 10$\}$

$A_6 = \{$números menores que 23$\}$

Ejercicio N° 5

a) Comparar el número dos con el número tres.

b) Comparar el conjunto de múltiplos de dos con el conjunto de múltiplos de tres.

c) Comparar el conjunto de múltiplos de dos con el conjunto de múltiplos de seis.

d) Comparar el conjunto de múltiplos de tres con el conjunto de múltiplos de seis.

e) De las comparaciones anteriores deducir una propiedad para conjuntos.

Ministerio de Cultura y Educación

Ejercicio N° 6

a) En las siguientes expresiones indicar si x es variable o incógnita:

1) $x + 5$; 2) $x - 6$; 3) $x - 10 = 14$; 4) $2x = 10$

b) Dar el conjunto solución (en N):

1) $x + 5 = 8$; 2) $x - 6 = 9$; 3) $x > 5$; 4) $x \leqslant 9$

5) $6 \geqslant x$; 6) $12 < x$; 7) $60 + x < 65$; 8) $3x + 2 \leqslant 50$

c) Escribir la lectura de las siguientes igualdades refiriéndose a x como a un cierto número, y luego enunciar un problema en el que la resolución se efectúe mediante la igualdad respectiva en cada caso:

1) $x + 12 = 27$ 2) $3x - 60 = x$

d) Escribir un enunciado y la expresión correspondiente y resolverla refiriéndose a un ángulo o a un par de ángulos.

e) Decir si es correcto o no, escribir:

1) $6 \leqslant 8$ 2) $5x \geqslant 3x$

Justificar las respuestas y dar el valor de x en la 2) para que se cumpla la igualdad.

f) Decir qué conjunto representa la expresión $a \geqslant 0$.

g) Decir para que número se verifica que $a = -a$.

Ejercicio N° 7

a) Expresar simbólicamente el conjunto de números mayores que cinco.

b) Expresar simbólicamente el conjunto de números menores que o iguales a veinte.

c) Expresar simbólicamente que el duplo de un número disminuído en seis es mayor que diez.

d) Expresar simbólicamente que el número quince es mayor que el triplo de cierto número.

e) Enunciar un problema en cuya resolución figure una inecuación del tipo de las anteriores y dar el conjunto solución.

f) Expresar mediante una relación de mayor o de menor el siguiente conjunto:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

g) Expresar con doble relación de mayor y menor el conjunto:

$$\{6, 7, 8, 9\}$$

Ministerio de Cultura y Educación

Ejercicio N° 8

Trazar una recta r, en ella determinar dos puntos arbitrarios A y B, luego otros puntos C y D tales que C esté comprendido entre A y B, y D entre C y B.

a) Nombrar la recta de ocho maneras diferentes.

b) Nombrar dos segmentos tales que su intersección sea $\emptyset$.

c) Nombrar un segmento y una semirrecta tales que su intersección sea $\emptyset$.

d) Nombrar dos semirrectas tales que su intersección sea $\emptyset$.

e) Indicar una operación tal que su resultado sea r .

Ejercicio N° 9

Dados los puntos A, B, C, D y E que pertenecen a r y en ese orden,

intercalar el símbolo conveniente para que el resultado sea el que se indica:

1) $\overline{AB}$ ---- $\overline{BC}$ = $\overline{AC}$

2) $\overrightarrow{BD}$ ---- $\overrightarrow{DE}$ = $\overrightarrow{BC}$

3) $\overrightarrow{CA}$ ---- $\overrightarrow{BD}$ = $\overline{BC}$

4) $\overline{DE}$ ---- $\overrightarrow{CB}$ = $\emptyset$

5) $\overleftarrow{AC}$ ---- $\overrightarrow{AC}$ = r

Ministerio de Cultura y Educación

Ejercicio N° 10

a) ¿Cuál de las siguientes respuestas es la correcta?

Una recta puede determinarse por un punto.
Una recta puede determinarse por dos puntos.
Una recta puede determinarse por tres puntos cualesquiera.

b) ¿Cómo puede determinarse un plano?

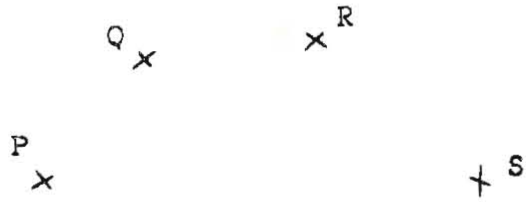
1) Dar dos respuestas correctas.
2) Dar tres respuestas correctas.

c) ¿Cuántas semirrectas determinan dos rectas que se cortan? Dibujarlas y nombrarlas.

d) Dos semirrectas con origen común ¿pueden determinar un segmento? Justificar la respuesta.

Ejercicio N° 11

a) Dados los puntos P, Q, R y S trazar las seis rectas que ellos determinan.



b) ¿Cuántas rectas determinan cinco puntos tales que cada tres no pertenecen a la misma recta?

c) Expresar el número de rectas que determinan n puntos en las mismas condiciones. Justificar.

d) Dados cuatro puntos como en la parte a) dibujar dos figuras que pasen por ellos: una convexa y otra cóncava.

e) Ubicar cuatro puntos en un plano de manera que no sea posible dibujar una figura convexa que pase por ellos.

Ejercicio N° 12

a) Trazar una recta y en ella ubicar los puntos L, M, N, O de manera que las siguientes proposiciones sean ciertas.

1) L está entre O y M.
2) N está entre O y M.
3) N está entre L y M.

b) En el caso anterior, ¿bastarían las proposiciones 1) y 2) para poder ubicar sin variantes los puntos? ¿Y la 1) y 3)?

c) ¿$\overrightarrow{LN}$ contiene a M?

d) ¿$\overleftarrow{LN}$ contiene a O?

e) Ubicar un punto P tal que no pertenezca a $\overrightarrow{OL}$ ni a $\overrightarrow{LM}$.

f) Ubicar un punto Q tal que pertenezca a $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{NO}$, pero no al $\overline{OL}$.

Ejercicio N° 13

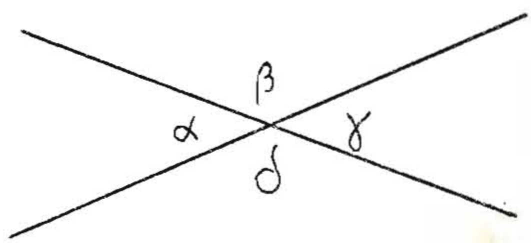
a) Dar los nombres de los siguientes pares de ángulos según su posición.

α y β

δ y γ

β y δ

γ y α



b) Si $\gamma = 55°$, calcular los restantes ángulos.

c) Trazar las bisectrices de un par de ángulos opuestos por el vértice.

d) Trazar las bisectrices de un par de ángulos adyacentes.

e) Enunciar y justificar la propiedad de las bisectrices en los casos c) y d).

Ministerio de Cultura y Educación

Ejercicio N° 14

a) Decir cuándo dos ángulos son complementarios.

b) Decir cuándo dos ángulos son suplementarios.

c) Calcular el complemento y el suplemento de los siguientes ángulos:

$\alpha = 30°$ $\quad \beta = 68°$ $\quad \gamma = 47° \, 12'$

d) Calcular la diferencia entre el suplemento y el complemento de cada uno de esos ángulos.

e) Enunciar la propiedad que se observa en la parte d) .

f) Dibujar un ángulo $\alpha = 30°$, su complemento, su suplemento y verificar geométricamente la propiedad enunciada en e) .

g) Justificar esa propiedad.

Ejercicio N° 15

a) Si $\alpha + \beta = 80°$ ¿cómo puede ser α con respecto a β ?
¿La respuesta cambia si $\alpha + \beta = 250°$?

b) Si $\alpha - \beta = 100°$ ¿cómo puede ser α con respecto a β ?

c) Si $\pi + \varphi = 120°$ y $\pi \leq 40°$, ¿entre qué valores puede variar φ ? Expresar simbólicamente la relación que indica esa posibilidad.

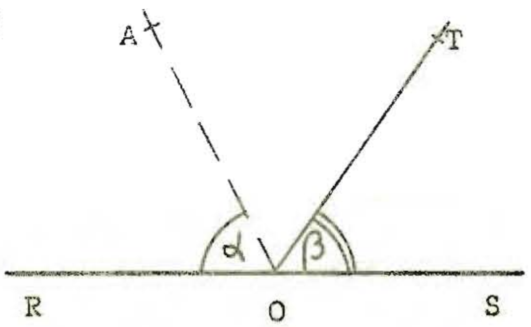
d) Si $\varepsilon \leq 20°$, ¿entre qué valores puede variar su complemento? Expresar simbólicamente.

e) $2\alpha < \beta \implies \alpha < \beta$ ¿V o F? Justificar la respuesta.

f) $\alpha + \beta < 150°$ y $\alpha = 2\beta$ ¿Qué valores puede tomar β ? Expresarlo simbólicamente.

Ejercicio N° 16

a)



$\widehat{ROT}$ y $\widehat{TOS}$ adyacentes.

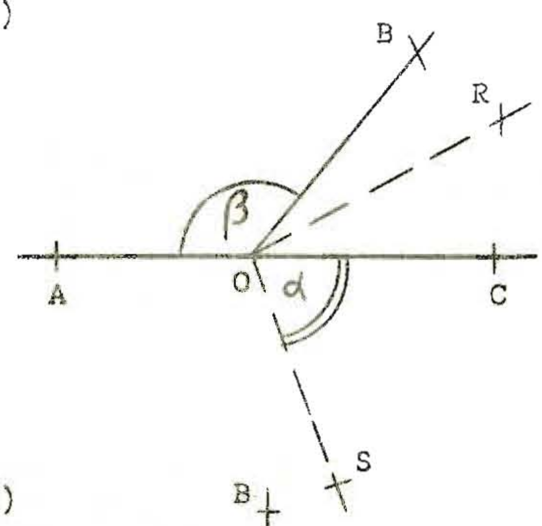
$\overrightarrow{OA}$ es bisectriz de $\widehat{ROT}$.

Siendo $\alpha = 62°$, calcular la mitad del β , e indicar cómo se calculó.

b) α y β son ángulos consecutivos, su suma vale 127° y $\alpha = 41°$. Calcular el valor del ángulo mitad de β y el que forman las bisectrices de α y β .

(Hacer gráfico)

c)



$\widehat{AOB}$ es adyacente al $\widehat{BOC}$.

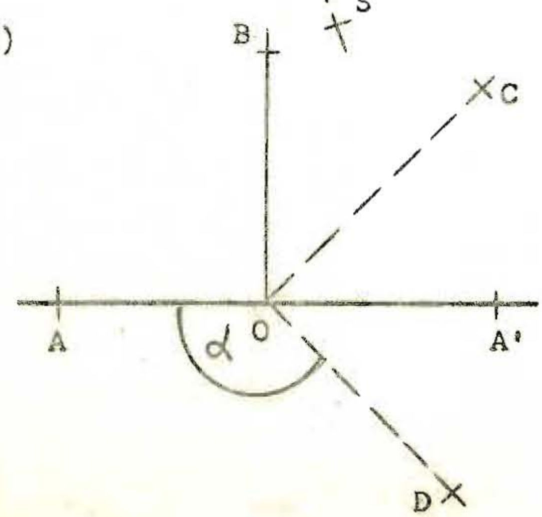
$\overrightarrow{OR}$ es bisectriz del $\widehat{BOC}$.

$OR \perp OS$

$\alpha = 55°$

Calcular β , e indicar cómo se calculó.

d)



$AA' \perp BO$

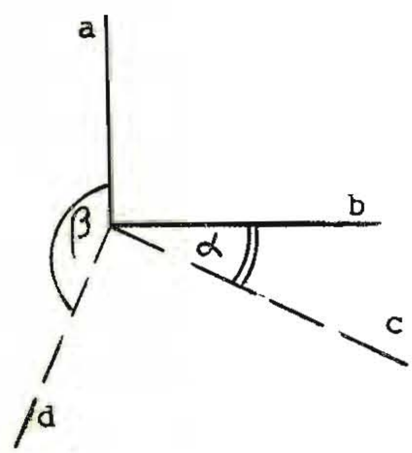
$CO \perp OD$

$\overrightarrow{OC}$ es bisectriz del $\widehat{BOA}$.

Calcular α y justificar la respuesta.

Ejercicio N° 16

e)



$a \perp b$

$c \perp d$

$\alpha = 35°$

Calcular β.

Justificar la respuesta.

Ministerio de Cultura y Educación

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

Ejercicio N° 1

a) $2 \in A$ es V pues 2 es un elemento del conjunto A.

$2 \in B$ es F pues 2 no es un elemento del conjunto B.

$A \in B$ es V pues A es elemento del conjunto B.

b) $2 \subset A$ es I, un elemento $\in$ o $\notin$ a un conjunto.

$A \subset B$ es F, los elementos de $A \notin B$.

c) $B = \{5, A, 10, 1, 2, 3\}$.

d) A es un conjunto. $\{A\}$ es un conjunto cuyo elemento es A.

e) $A \in \{A\}$.

Respuestas del

Ejercicio N° 2

b) $A = \{8, m\}$ 3) $\{8, m\} \cup \emptyset = \{8, m\}$

$B = \{1, 3, 5\}$ 5) $\emptyset \subset [\{8, m\} \cup \{1, 3, 5\}]$

en efecto: $\emptyset \subset \{8, m, 1, 3, 5\}$

c) $A - B = A$ es V ; $A \cap B = A$ es F .

d) El conjunto vacío está incluído en todo conjunto.

El conjunto vacío está incluído en el resultado de operación entre conjuntos.

Ministerio de Cultura y Educación

Respuestas del

Ejercicio N° 3

a) $L = \{8\}$ pues $\{5\} \cap \{8\} = \emptyset$

b) $X = \emptyset$ o $X = A'$ pues $\emptyset \cap A = \emptyset$ y $A' \cap A = \emptyset$ o $A_1 \subset A'$

c) No, salvo para $A = \emptyset$.

d) Porque a $(A \cup B)$ pertenecen todos los elementos de A y todos los de B.

e) Porque a $[(A \cup B) \cup C]$ pertenecen todos los de A, B y C.

f) Porque todos los elementos que pertenecen a $(A \cap B)$ son elementos de A.

g) Idem.

Respuestas del

Ejercicio N° 4

$A = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\}$.

$A_1 = \{16, 18, 20, 22, 24, 26, 28\}$.

$A_2 = A$

$A_3 = \{17, 19, 23, 29\}$.

$A_4 = \{20, 25\}$.

$A_5 = A$

$A_6 = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$.

Ministerio de Cultura y Educación

Respuestas del

Ejercicio N° 5

Las respuestas son probables.

	Semejanzas	Diferencias
a)	- son naturales - son primos - son < 5 - son > 1 - no son divisores de 7. - son divisores de 30.	- son desiguales $2 < 3$ - 2 tiene por múltiplo a 4, 3 no. - 3 tiene por múltiplo a 9, 2 no. - sus mitades no son iguales. - sus dobles no son iguales.
b)	- tienen infinitos elementos. - ordenados de $<$ a $>$ su 1er. elemento es 0. - no tienen último elemento. - tienen elementos comunes (los $\dot{6}$) - son subconjuntos de N.	- tienen elementos no comunes. - a $\dot{2}$ pertenecen todos los números pares, a $\dot{3}$ algunos. - a $\dot{3}$ pertenecen algunos números impares, a $\dot{2}$ ninguno. - la diferencia entre $\{\dot{2}\}$ y $\{\dot{3}\}$ es un subconjunto del conjunto de los números pares, y la diferencia entre $\{\dot{3}\}$ y $\{\dot{2}\}$ es un subconjunto del conjunto de los números impares.

Respuestas del

Ejercicio N° 6

a) En 1) y 2) es variable, en 3) y 4) es incógnita.

b) 1) $x = 3$ o bien $\{x/x \in N \wedge x = 3\}$

c) 1) La suma de cierto número y doce es igual a veintisiete.

e) 1) $6 \leq 8$ es correcto porque se cumple la relación $6 < 8$.

2) $5x \geq 3x$ es correcto en N porque se cumple:

$5x > 3x \quad \forall \; x > o \quad \wedge \quad 5x = 3x$ para $x = 0$.

f) conjunto N

g) Para $a = 0$.

Ministerio de Cultura y Educación

Respuestas del

Ejercicio N° 7

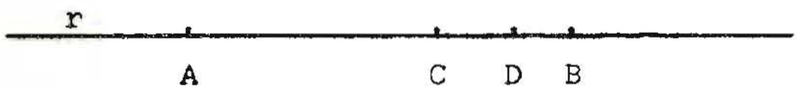
a) $x > 5$ o $\{x/x \in N \wedge x > 5\}$ o $x \geq 6$

f) $x < 8$ o $x \leq 7$ o $0 \leq x < 8$

g) $5 < x < 10$

Respuestas del

Ejercicio N° 8



a) AC, AD, ---- BA.

b) $\overline{AC} \cap \overline{DB}$

c) $\overline{AD} \cap \overleftarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{DB}$

e) $\overrightarrow{AC} \cup \overrightarrow{DA}$

Respuestas del

Ejercicio N° 9

1) $\overline{AB} \cup \overline{BC} = \overline{AC}$

2) $\overrightarrow{BD} \cup \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$

3) $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{BD} = \overline{BC}$

4) $\overline{DE} \cap \overrightarrow{CB} = \emptyset$

5) $\overleftarrow{AC} \cup \overrightarrow{AC} = r$

Respuestas del

Ejercicio N° 10

a) Una recta puede determinarse por dos puntos.

b) 2) Por tres puntos que no pertenecen a una recta.
Por dos rectas que se cortan.
Por una recta y un punto que no pertenece a ella.

c) cuatro

d) No. Porque, o sólo tienen el origen común (segmento nulo) o son coincidentes.

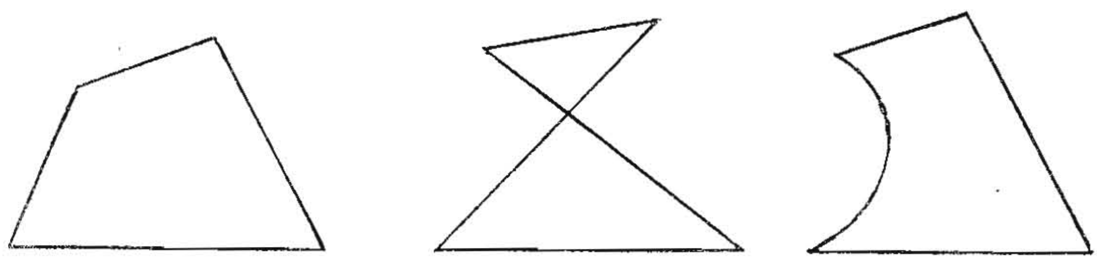
Respuestas del

Ejercicio N° 11

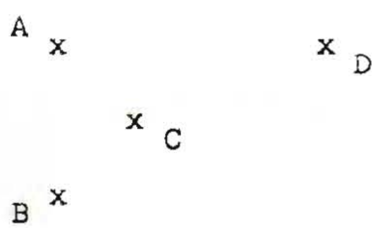
b) diez

c) $(n-1) + (n-2) + -- + 1$. Con el primer punto se determinan $(n-1)$ rectas y con cada uno de los siguientes una menos que en el anterior. (Hay otra espresión válida).

d)



e)



Ministerio de Cultura y Educación

Respuestas del

Ejercicio N° 13

a) α y β son adyacentes.
δ y γ son adyacentes.
β y δ son opuestos por el vértice.
γ y α son opuestos por el vértice.

b) $\beta = 135°$ por adyacentes.
$\delta = 135°$ por adyacentes.
$\alpha = 55°$ por opuestos por el vértice.

e) Las bisectrices de los ángulos opuestos son semirrectas opuestas.

Las bisectrices de los ángulos adyacentes son perpendiculares.

Respuestas del

Ejercicio N° 14

e) La diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es 90°.

g) Si α_1 es el complemento de $\alpha \Rightarrow \alpha + \alpha_1 = 90°$ (1)

y α_2 es el suplemento de $\alpha \Rightarrow \alpha + \alpha_2 = 180°$ (2)

restando miembro a miembro (2) - (1) :

$$\alpha + \alpha_2 - (\alpha + \alpha_1) = 180° - 90°$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha + \alpha_2 - \alpha - \alpha_1 = 90°$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_2 - \alpha_1 = 90°$$

d) Por ser $\overrightarrow{OC}$ bisectriz de $\widehat{BOA}$, y $\widehat{BOA} = 90°$

por rectas perpendiculares

es $\widehat{COA'} = 45°$; $\widehat{AOD} = 135°$

e) $= 360° - (90° + 90° + 35°)$

$= 145°$

NOTA: Se recomienda pedir en todos los casos posibles el análisis del proceso del pensar.

No se adjuntan ejercicios de cálculo operatorio.