MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION
DE LA NACION

DIRECCION NACIONAL DE INVESTIGACION,
EXPERIMENTACION Y PERFECCIONAMIENTO EDUCATIVO

PROYECTO MULTINACIONAL PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS O.E.A.

Serie Matemática

Documento n°3

Nuevas tendencias en las aplicaciones de la Matemática

(Separata de "Las aplicaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la Escuela secundaria. Reunión de Montevideo (Uruguay), 8 al 17 de Agosto de 1974.)

BUENOS AIRES
Febrero 1977

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION

Ministro:
Prof. Ricardo P. Bruera

Secretario de Estado de Educación:
Contraalmirante (R.E.) Enrique L. Carranza

Subsecretario de Estado de Educación:
Prof. Benicio C. A. Villarreal

DIRECCION NACIONAL DE INVESTIGACION, EXPERIMENTACION Y PERFECCIONAMIENTO EDUCATIVO (D. I. E. P. E.)

Director:
Dr. Bruno L. Carpineti

Directora del Proyecto Multinacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias:
Insp. Mabel Stokle

ORGANIZACION DE LOS ESTADOS AMERICANOS

PROGRAMA REGIONAL DE DESARROLLO EDUCATIVO

Director del Departamento de Asuntos Educativos:
Dr. Hugo Albornoz

División Desarrollo del Curriculum:
Dr. Ovidio De León

Especialista del Departamento de Asunto Educativos en la República Argentina:
Dra. Inés C. de Lajmanovich

NUEVAS TENDENCIAS EN LAS APLICACIONES DE LA MATEMATICA

1. LISTA DE TOPICOS

Una de las características de la matemática del último cuarto de siglo, ha sido el gran aumento, en extensión, de su campo de acción. Muchas disciplinas, como la economía, la psicología y la mayoría de las ciencias naturales, que antes usaban poco la matemática, o por lo menos su uso estaba restringido a algunos de sus capítulos especiales, actualmente la usan como herramienta común. Esto ocurre en todos los niveles de la matemática. En el caso de la matemática de la escuela secundaria, sin apenas modificar su contenido, caben nuevas aplicaciones que permiten darle mayor actualidad y mostrar, en aspectos muy variados, la eficacia de sus métodos.

Por otra parte, los avances en la sistematización y en la metodología, han hecho posible que temas antes considerados como exclusivos de la matemática de nivel terciario, puedan actualmente darse a nivel secundario, lo cual permite incrementar notablemente, por disponer de más medios, el campo de las aplicaciones.

Sin pretender que sea completa, se puede señalar la siguiente lista de temas propicio para las aplicaciones de la matemática al nivel secundario. En cada tema, es posible encontrar abundantes ejemplos, tanto para motivar la enseñanza de ciertos tópicos, como para ejercitar los conocimientos adquiridos.

- Matemática comercial. Nociones de matemática financiera y actuarial.
- Cálculo numérico. Nociones de cálculo gráfico y monográfico.
- Aplicaciones geométricas y trigométricas.
- Aplicaciones de los elementos de la teoría de funciones reales.
- Algebra lineal. Nociones de cálculo matricial.
- Programación lineal. Matrices de producción. Programación dinámica.
- Teoría de los juegos.
- Investigación operativa.
- Teoría de Grafos y aplicaciones a problemas de transporte o flujo y a genética.

- Criptografía.
- Teoría de la información.
- Simulación.
- Matrices de decisión.

Es evidente que algunos de estos temas son muy generales y se refieren a extensas teorías. Se ha querido indicar, únicamente, que los fundamentos esenciales y algunos ejemplos muy simples, caben al nivel de la enseñanza secundaria, sin pretensiones de desarrollar, ni tan solo superficialmente, la teoría general.

Los cuatro primeros temas señalados en la lista precedente son los más conocidos y tradicionales. No hace falta dar ejemplos de ellos, por ser bien conocidos de los docentes y encontrarse en abundancia en la mayoría de los textos escolares. Unicamente puede ser útil indicar, brevemente, algunos de los puntos que comprenden, para mejor dar idea de su contenido:

Matemática comercial. Porcentajes. Interés. Descuento (no olvidar la tasa de inflación). Repartos proporcionales. Mezclas. Rentas. Empréstitos. Seguros. Tablas de mortalidad.

Cálculo numérico. Sentido de la aproximación. Errores absoluto y relativo. Cálculo con números aproximados. Resolución gráfica de ecuaciones e inecuaciones. Determinación de leyes empíricas. Resolución numérica de ecuaciones: uso de calculadoras de mesa o de bolsillo. Uso de tablas.

Aplicaciones geométricas y trigométricas. Construcciones gráficas. Dibujo decorativo: búsqueda de simetrías. Grupos de transformaciones que dejan invariante un triángulo, cuadrado, cubo o tetraedro. Transformaciones lineales y matrices correspondientes. Trigonometría práctica: cálculo de distancias y ángulos sobre el terreno. Problemas de persecución y encuentro. Estática del sólido.

Aplicaciones de los elementos de la teoría de funciones reales. Representación gráfica y estudio analítico de funciones. Crecimiento. Máximos y mínimos. Curvatura. Cinemática del punto. Caída de los cuerpos; proyectiles. Movimientos armónicos. Cálculo de áreas y volúmenes.

En cuanto a los restantes tópicos de la lista anterior, que son más novedosos, se formulan a continuación unos cuantos ejemplos, siempre a nivel secundario, con la finalidad de ilustrarlos, pudiendo cada profesor elaborar situaciones análogas a las mostradas, auxiliándose en todo caso de la Bibliografía mencionada al final.

Es muy importante destacar que tanto los temas expuestos, como los ejemplos mencionados a continuación, no deben tomarse de ninguna manera como temás básicos de los programas e incluírlos sistemáticamente en ellos, sino tan solo como ejemplos entre otros muchos que se podrían incluir en el momento que el profesor lo estime oportuno, para interesar a la clase o a determinado grupo de alumnos.

Una de las dificultades de la escuela secundaria es la heterogeneidad de los alumnos en cuanto a vocación, capacidad e interés. Por esto, para cada alumno o grupo de alumnos conviene elegir las aplicaciones que mejor se adapten a su manera de ser.

2. EJEMPLOS DE APLICACIONES

1. Radicación cuadrada.

La iteración de ciertas operaciones conduce muchas veces a resultados interesantes, en los cuales cabe discutir problemas de convergencia. Por otra parte, con el uso de las actuales computadoras de bolsillo, los cálculos son fáciles e instructivos y muchas veces prácticos para llegar a la solución numérica de ciertos problemas.

Vamos a considerar el ejemplo del cálculo de la raíz cuadrada, siguiendo a T.J. Fletcher, L'Algèbre Linéaire par ses Applications, CEDIC, 1972.

Partiendo del par (1,1) calcular los valores sucesivos de (x,y) reemplazando en cada etapa (x,y) por (x+2y, x+y). Construir entonces la siguiente tabla:

x	y	x^2	y^2	x^2/y^2	x/y
1	1	1	1	1	1
3	2	9	4	2,25	1,5
7	5	49	25	1,96	1,4
17	12	289	144	2,0069	1,4167
41	29	1681	841	1,9988	1,4138
99	70	9801	4900	2,0002	1,4143

Se observa, como cosa experimental, que x^2/y^2 tiende a 2 y, por tanto, que x/y tiende a la raíz cuadrada de 2. Se desea justificar este hecho.

Llamando (x_n, y_n) a los valores de x,y, después de n pasos se tiene:

$$x_n = x_{n-1} + 2\, y_{n-1} \qquad y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$$

de donde

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{(x_{n-1}/y_{n-1}) + 2}{(x_{n-1}/y_{n-1}) + 1}$$

Suponiendo que la sucesión x_n/y_n es convergente y que el límite es L, debe ser:

$$L = \frac{L + 2}{L + 1}, \text{ de donde } L^2 = 2.$$

Si se quiere expresar la sucesión (x_n, y_n) en forma de matriz, se tiene:

$$(x_n\ y_n) = (x_{n-1}\ y_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y de aquí, empezando para n = 1,2,3,... y llamando A a la matriz del segundo miembro de la igualdad anterior, resulta:

$$(x_n\ y_n) = (1\ 1)\, A^{n-1}$$

Otra manera de obtener la raíz cuadrada de un número $a > 0$ por iteración es la siguiente. Sean $x_1, x_2, \ldots$ las aproximaciones sucesivas. Si para x_n el error es e_n, se tiene:

$$(x_n + e_n)^2 = x_n^2 + 2\, x_n\, e_n + e_n^2 = a$$

Suponiendo que e_n es pequeño, de esta igualdad se deduce que, aproximadamente, es $e_n = (a - x_n^2) / 2x_n$ y por consiguiente podemos tomar como la aproximación siguiente a x_n,

$$x_{n+1} = x_n + e_n = \frac{a + x_n^2}{2\, x_n} = \frac{a}{2x_n} + \frac{x_n}{2}$$

Esta es la sucesión recurrente que a partir de $x_1 = 1$ permite calcular la cuadrada de a. Por ejemplo, para a = 2 se obtiene:

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 1{,}6 \ , \ x_3 = 1{,}417 \ , \ x_4 = 1{,}4142.. \ , \ ...$$

y para a = 3 ,

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 2 \ , \ x_3 = 7/4 = 1{,}75 \ , \ x_4 = 1{,}732 \ , \ ...$$

Hay que discutir la convergencia. Para ello, recordando que la media aritmética es siempre igual o mayor que la geométrica, resulta:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right) \geqslant \sqrt{a} \quad \text{(para } n \geqslant 1\text{)}.$$

Además, la sucesión x_n es decreciente, puesto que para n 2 es:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n}{2} - \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geqslant 0$$

Las dos desigualdades anteriores aseguran la convergencia.

No es difícil y se puede proponer a los alumnos que los busquen, encontrar otros métodos iterativos para calcular la raíz cuadrada. Basta tomar una función f (x,a) tal que la ecuación x = f (x,a) tenga por solución la raíz cuadrada de a y entonces tomar $x_{n+1} = f(x_n, a)$. Por ejemplo, se puede tomar $f = px + q/x$, con p,q dos números reales cualesquiera que cumplan la condición $q/(1-p) = a$.

2. Aplicaciones de la química.

Los elementos del álgebra lineal, permiten ser ejemplificados con clásicos problemas que aparecen continuamente en química. He aquí dos ejemplos.

Problema de mezclas. Una fábrica de pinturas dispone para la fabricación de las mismas de dos soluciones de solvente que contienen substancias "selladoras" y "fijadoras" en las siguientes cantidades (expresadas en gramos por litro)

	Sellador	Fijador
Solvente S_1	a_1	b_1
Solvente S_2	a_2	b_2

El laboratorio de la fábrica descubre un nuevo tipo de pintura que requiere el mismo solvente, pero tal que contenga a_3 gramos de sellador y b_3 gramos de fijador por litro de solvente. No siendo separables los selladores y fijadores, se desea saber si mezclando convenientemente S_1 y S_2 puede conseguirse el solvente con las cantidades de sellador y fijador establecidas para la nueva pintura.

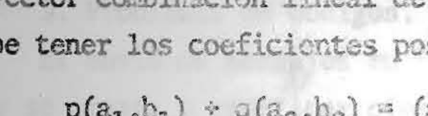
Atendiendo estrictamente a la composición en sellador y fijador, puede asociarse cada solución del solvente a un vector de R^2. En particular, sean $S_1=(a_1,b_1)$, $S_2=(a_2,b_2)$. El solvente con la nueva composición será un nuevo vector combinación lineal de S_1 y S_2, que por la naturaleza del problema debe tener los coeficientes positivos, o sea debe ser:

$$p(a_1,b_1) + q(a_2,b_2) = (a_3,b_3) \quad , \quad p,q>0$$

lo que conduce al sistema

$$pa_1 + q\, a_2 = a_3 \quad , \quad p\, b_1 + q\, b_2 = b_3$$

y la fábrica podrá fabricar la nueva pintura usando una mezcla de los dos solventes disponibles, si y sólo si el sistema anterior tiene soluciones p, q positivas.



Gráficamente, dibujando en el plano las rectas definitivas por los vectores S_1, S_2, el problema tiene solución si el vector S_3 (a_3,b_3) cae dentro del ángulo formado por S_1 S_2 o sea, dentro del área rayada en la figura.

Equilibrio de ecuaciones químicas: Sea una reacción química expresada por la relación

$$Ca + H_3\, P\, O_4 \rightarrow Ca_3\, P_2\, O_8 + H_2$$

Equilibrar la relación y obtener la ecuación respectiva, significa determinar el número de moléculas p, q, r, s de las distintas substancias interactuantes, para que tenga sentido ecuacional la expresión

$$(*) \quad p\, Ca + q\, H_3\, P\, O_4 = r\, Ca_3\, P_2\, O_8 + s\, H_2$$

Resulta el sistema

$$p = 3\, r \quad , \quad 3\, q = 2\, s \quad , \quad q = 2\, r \quad , \quad 4\, q = 8\, r$$

cuya solución es $p = 3$, $q = 2$, $r = 1$, $s = 3$, de donde

$$3\, Ca + 2\, H_3\, P\, O_4 = Ca_3\, P_2\, O_8 + 3\, H_2$$

Si se quiere dar al problema la forma usual del álgebra lineal, diríamos:

que cada elemento químico es una coordenada y cada compuesto químico es un vector. Así en el caso anterior si los elementos Ca, H, P, O son las coordenadas de los respectivos compuestos, la ecuación (*) se escribe

$$p(1,0,0,0) + q(0,3,1,4) = r(3,0,2,8) + s(0,2,0,0)$$

y la solución es la indicada.

3. Problemas de códigos.

El envío de mensajes en "clave", es un juego que interesa a los alumnos y se presta a practicar ciertas técnicas matemáticas y a desarrollar la inventiva para aumentar cada vez la "seguridad" del mensaje, es decir, la dificultad para descifrarlo.

El convenio de asignar a cada letra del alfabeto un número, aunque esta biyección no corresponda al orden alfabético natural, resulta trivial y relativamente fácil de descifrar. El producto de matrices, aún en el caso más simple de matrices 2 x 2 permite variantes de interés, que aumentan el secreto del mensaje. Sea la biyección

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	LL	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Si se trata de transmitir la orden BAJE, debiera transmitirse 2-1-10-5, cuya interpretación es elemental. Para complicar el código escribamos estos números en forma de matriz

$$u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Si el mensaje tuviera más de 4 letras, lo dividiríamos en grupos de 4 (añadiendo si fuera necesario, ceros al final) y formaríamos varias matrices del tipo anterior.

Si elige entonces una matriz "clave", que tenga inversa, por ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa C^{-1} se llama "descifrador". A partir de la matriz u, mediante la clave se forma la matriz

$$C\,u = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 17 \\ 22 & 11 \end{pmatrix} = M_C$$

y el mensaje cifrado a transmitir es 34-17-22-11. Recibido este mensaje, para descifrarlo, se multiplica M_C por C^{-1} resultando la matriz u y por tanto 2-1-10-5 que determina la orden BAJE.

Cabe realizar multitud de variantes, desde usar matrices de mayor dimensión, lo que genera cada vez mayores dificultades en el descubrimiento de la clave, hasta modificar la expresión de M_C de alguna manera, por ejemplo reduciendo sus elementos módulo 28 y luego enviar el mensaje por la letras correspondientes. En el ejemplo anterior, los elementos de M_C, módulo 28, son 6-17-22-11 y el mensaje a transmitir sería FOTK.

Como ejemplo se propone descifrar el mensaje ODKXSFKC enviado según la clave anterior.

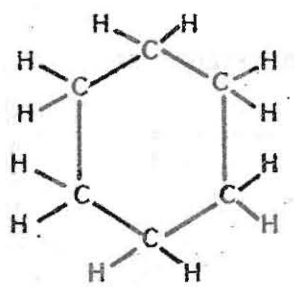
4. Grafos

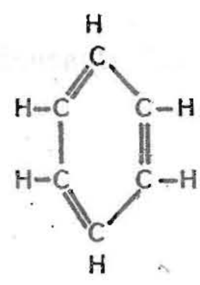
Por ser relativamente recientes las aplicaciones de la teoría de grafos en la escuela secundaria, será útil mencionar algunas definiciones y características generales.

Tanto en los problemas científicos como en ciertas situaciones de la vida diaria, es a veces conveniente unir puntos (representativos de diversos "elementos") mediante líneas, con el objeto de hacer visualizable el problema o la situación, y por ende, de más fácil comprensión.

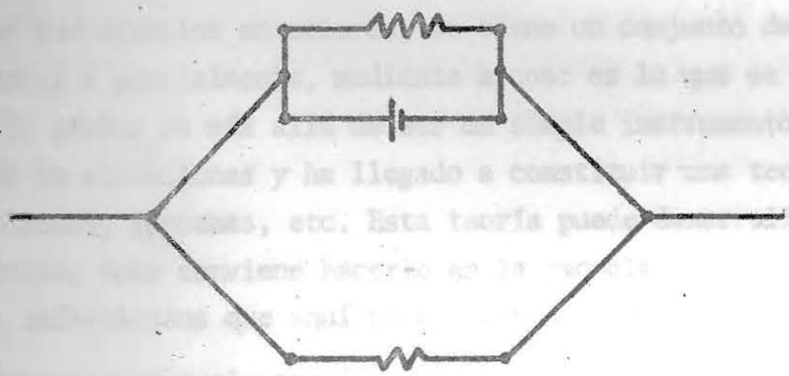
Por ejemplo, las fórmulas de la química orgánica C_6H_{14}, C_6H_{12}, C_6H_6 pueden visualizarse del modo siguiente:

```
    H - H - H - H - H - H
    |   |   |   |   |   |
H - C - C - C - C - C - C - H
    |   |   |   |   |   |
    H - H - H - H - H - H
```



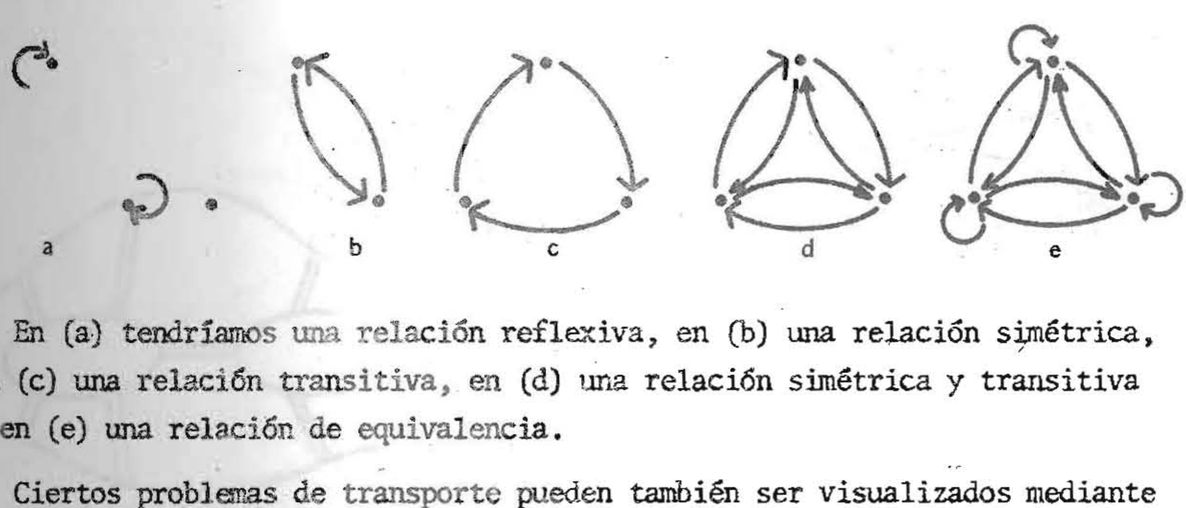


En el campo de la física, en teoría de circuitos, se recurre a métodos similares, cuando se dibuja algo del tipo



En matemáticas, si se quieren visualizar los diferentes tipos de relaciones, se recurre a representar la relación aRb por

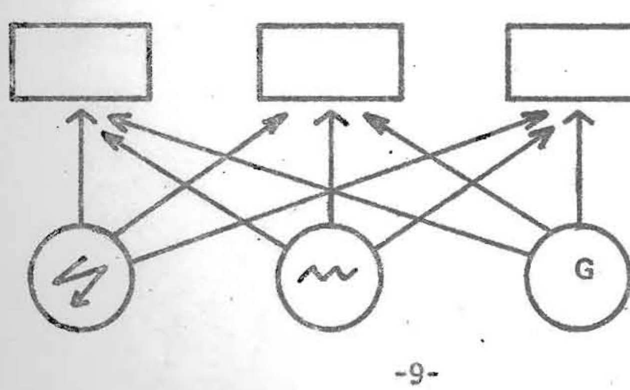
Así, sobre un conjunto de 3 elementos caben las posibilidades siguientes:



a b c d e

En (a) tendríamos una relación reflexiva, en (b) una relación simétrica, en (c) una relación transitiva, en (d) una relación simétrica y transitiva y en (e) una relación de equivalencia.

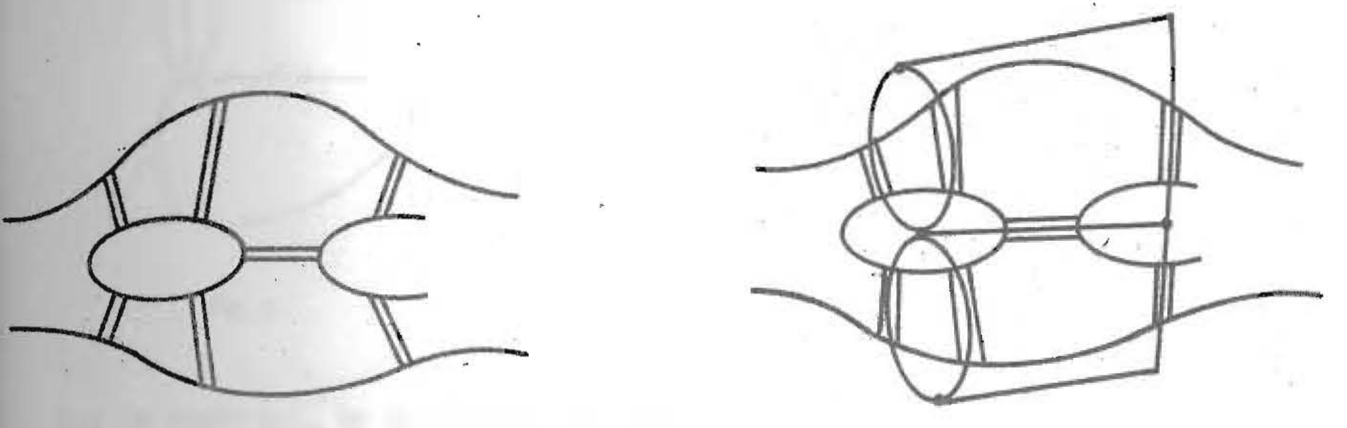
Ciertos problemas de transporte pueden también ser visualizados mediante este método. Por ejemplo, el problema de las 3 fábricas a las cuales hay que proveer de agua, corriente eléctrica y gas, se ilustra mediante la figura



En este ejemplo particular, si se agrega la condición adicional de que las líneas de conducción no deben intersecarse, entonces se demuestra que el problema (en el plano) no tiene solución.

En todos los ejemplos anteriores, se tiene un conjunto de puntos unidos entre sí total o parcialmente, mediante arcos: es lo que se llama un grafo. La teoría de grafos va más allá de ser un simple instrumento para una mejor comprensión de situaciones y ha llegado a constituir una teoría matemática con definiciones, teoremas, etc. Esta teoría puede desarrollarse sobre una base intuitiva, como conviene hacerlo en la escuela secundaria o bien por medios más sofisticados que aquí no nos van a interesar.

Históricamente se suele considerar que la teoría de grafos nació con el "problema de los puentes de Konigsberg" resuelto por Euler (1707-1783). Consiste en ver si se podrán recorrer los 7 puentes dispuestos como indica la figura, mediante un solo recorrido, sin pasar dos veces por el mismo puente. El problema equivale, esquemáticamente, a ver si es posible recorrer de un solo trazo, sin repetir los arcos, el grafo indicado en la segunda figura.



Se plantea así el problema de saber, dado un grafo, si será posible recorrerlo mediante un solo trazo. El resultado es que para que un grafo pueda recorrerse de un solo trazo, es necesario y suficiente que sea conexo y que, además, se cumpla una de las dos condiciones: a) en todos los vértices concurren un número par de lados (en este caso se puede empezar el recorrido por cualquier vértice y terminar en el mismo); b) existen exactamente dos vértices a los que concurren un número impar de lados (en este caso, se debe empezar por uno de estos vértices y terminar en el otro).

En el caso de los puentes de Konigsberg, como no se cumple ninguna de estas condiciones, el recorrido no es posible. En cambio, añadiendo un octavo puente adicional como el indicado de puntos en la figura 1, el recorrido ya es posible, puesto que entonces existen dos vértices de grado impar (grado de un vértice es el número de arcos, o lados, o aristas, que concurren en el mismo). Si se impone la condición adicional de que se debe entrar y salir por el mismo puente, entonces todos los vértices tienen que

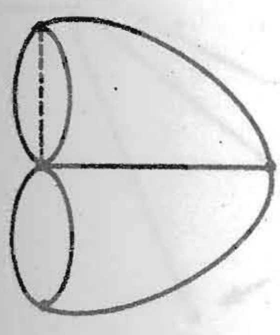


Fig. 1

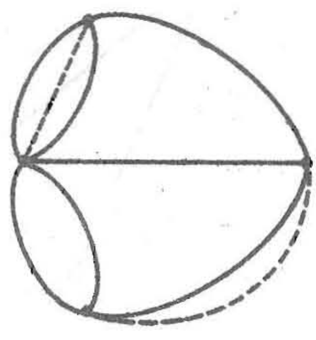


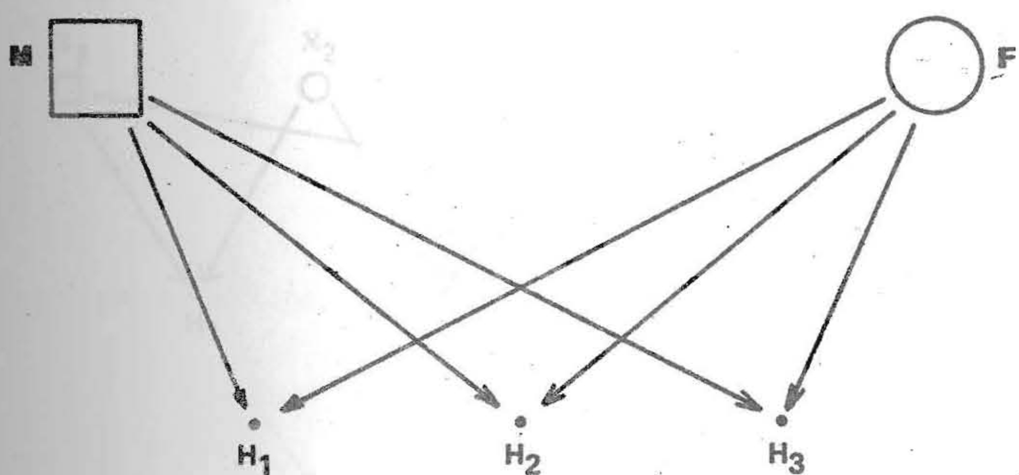
Fig. 2

ser de grado par, lo cual obligaría a construir no sólo uno, sino dos nuevos puentes, como los indicados en la figura 2.

Ejercicio: investigar si es posible recorrer cada uno de los grafos que se dan a continuación, mediante un solo trazo, sin pasar dos veces por el mismo lado.

Nótese que lo fundamental no es la "forma" del grafo, sino el número de vértices (o nudos) que contiene y el grado de los mismos.

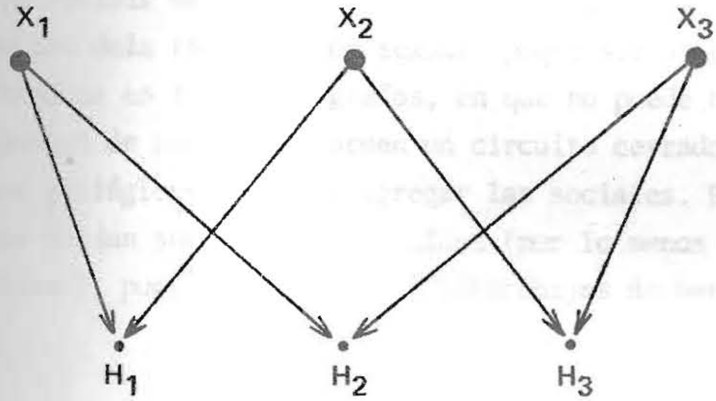
Aplicaciones de los grafos a la genética. En la reproducción sexual, cada individuo tiene dos padres, uno masculino y otro femenino. Así pues, si un vértice debe representar un hijo, en él deben incidir dos aristas, o sea, cada hijo debe ser un vértice de grado 2 (podría ser de grado 1 si se admite la posibilidad de que algún padre no sea conocido y no se desee representarlo en el grafo). Conviene representar los grafos "dirigidos", con una flecha que indique la dirección padre-hijo o madre-hijo. Así el grafo.



expresa que H_1, H_2, H_3 son hermanos, hijos todos ellos del padre M y de la madre F.

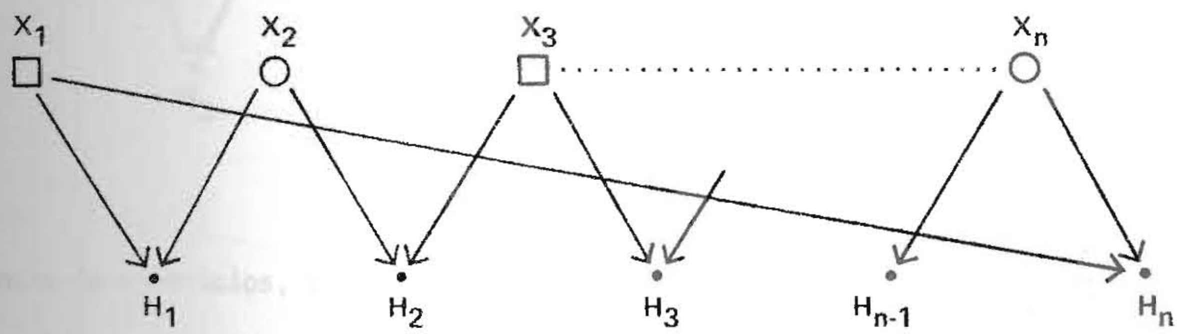
Supongamos ahora que tenemos un grafo en el cual en cada punto inciden dos arcos. Preguntamos: ¿será posible dividir los vértices en conjuntos (masculino y femenino) de tal modo que en cada punto incida un arco que proviene de un punto masculino a otro que proviene de un punto femenino?

Para responder al problema consideramos el grafo siguiente



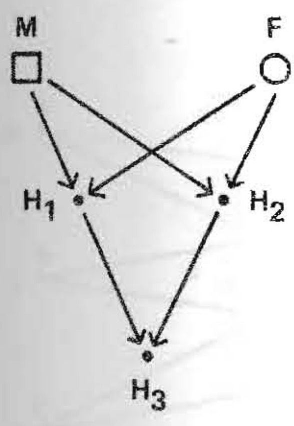
Este grafo nos muestra que la división propuesta no es siempre posible, ya que si suponemos que X_1 es masculino, entonces X_2 será a fortiori femenino ya que ambos tiene el hijo H_1. Como X_2 y X_3 tienen también el hijo H_3, siendo X_2 femenino, debe ser X_3 masculino, pero entonces H_2 no puede tener dos padres masculinos.

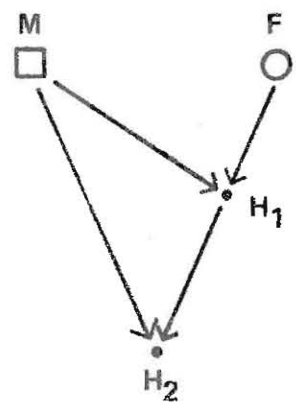
Este problema puede ser generalizado a X_n padres y H_n hijos, según el grafo



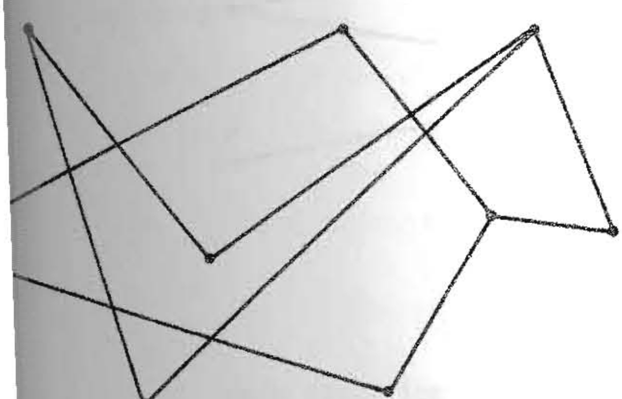
Se obtiene entonces lo que se llama un "camino circular alternado" y se puede probar el siguiente "teorema de la condición sexual": Sea un grafo dirigido en el cual el grado de cada vértice es igual o menor que 2. Si es posible dividir los puntos del grafo en dos grupos (sexos), entonces cada secuencia de padres X_1, X_2 ....., X_n que forme un camino circular alternado debe tener un número par de miembros.

Al aplicar conceptos de la teoría de grafos a la genética hay que tener en cuenta ciertas restricciones evidentes, tanto biológicas como sociales (tabúes), Así por ejemplo, puesto que no puede ningún ser tener más de dos padres, ningún vértice puede recibir más de dos arcos. Otra restricción es que ningún ser viviente (dentro dela reproducción sexual) puede ser su propio antepasado, lo cual se traduce en teoría de grafos, en que no puede haber grafos cíclicos (con conjuntos de arcos que formen un circuito cerrado). Además de estas restricciones biológicas, hay que agregar las sociales. Por ejemplo, los grafos siguientes quedan socialmente excluídos (por lo menos dentro del marco occidental cristiano), puesto que no puede haber hijos de hermanos ni de padres e hijos:





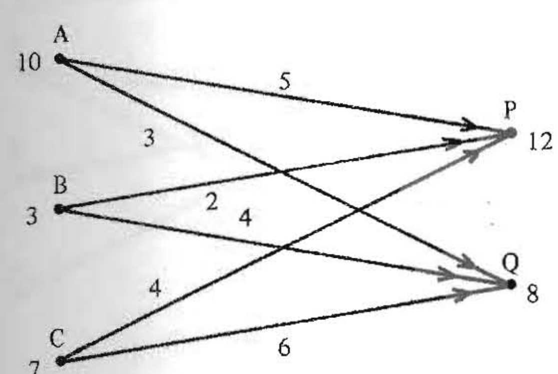
A manera de ejercicios, se sugiere los siguientes:

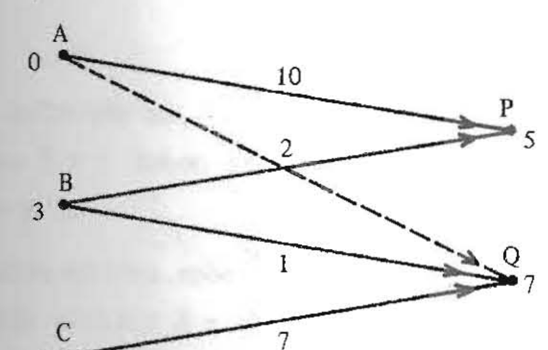


a) Hacer el grafo correspondiente a las relaciones familiares de cada alumno: primos, tíos, abuelos, sobrinos, bisabuelos, etc.

b) Dado un grafo, como el que se indica al lado, asignar sexos a los puntos de manera que el grafo tenga sentido a)desde el punto de vista puramente biológico; b) desde el punto de vista biológico y social.

Grafos y un problema de transporte. Se quiere resolver el problema de transporte, con mínimo costo, un cierto número de unidades de mercadería desde los orígenes (por ejemplo fábricas o almacenes) A, B, C hasta los destinos (lugar de venta o distribución) P, Q, por rutas AP, AQ, BP, BQ, CP, CQ sobre las cuales se conocen los precios de transporte por unidad de mercadería. Se conocen también las cantidades de mercadería disponible en los orígenes y las demandas de los destinos. El problema se deja visualizar en el grafo adjunto en el cual están indicados los costos de transporte (grafo valorado), el número de unidades disponibles en los orígenes y las demandas de los destinos. Así, por ejemplo, el precio del transporte de A a P es 5, la cantidad disponible en el origen C es 7, la demanda en Q es 8, etc.





Solución. Se comienza con una solución inicial básica correspondiente a un árbol cualquiera en el cual se anotan en los arcos (caminos) el número de unidades transportadas (por ejemplo, en el árbol de la figura adjunta estas unidades son 10, 2, 1, 7) y se indican en los vértices ciertos precios asociados artificiales, el primero de los cuales se fija arbitrariamente (por ejemplo 0) y los demás se deducen por ser

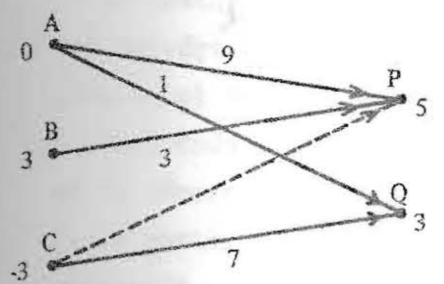
(*) Precio en el destino = precio en el origen + precio de transporte.

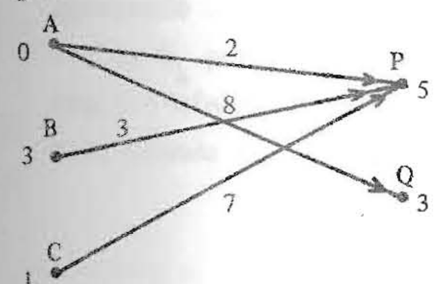
Según esto, los precios asociados serán: en P (0 + 5), en B (5 - 2= 3) en Q (3 + 4 = 7) y en C (7 - 6 = 1). Para este plan de transporte, el costo total es 10.5 + 2.2 + 1.4 + 6.7 = 100.

Para mejorar este costo construimos un ciclo agregando por ejemplo el arco AQ de modo que:

(**) precio del transporte precio en el destino - precio en el origen.

Así, en el presente caso, tenemos 3 7 - 0. Sis sustituímos por AQ un arco del ciclo APBQA, por ejemplo BQ, con el mismo criterio anterior queda el grafo adjunto, pues debiendo ir 8 unidades a Q, por AQ irán 1, con lo cual de A a P irán 9 y de B a P irán 3. El costo para este nuevo proyecto es 9.5 + 1.3 + 3.2 + 7.6 = 96, es decir, ya se ha disminuído el costo.

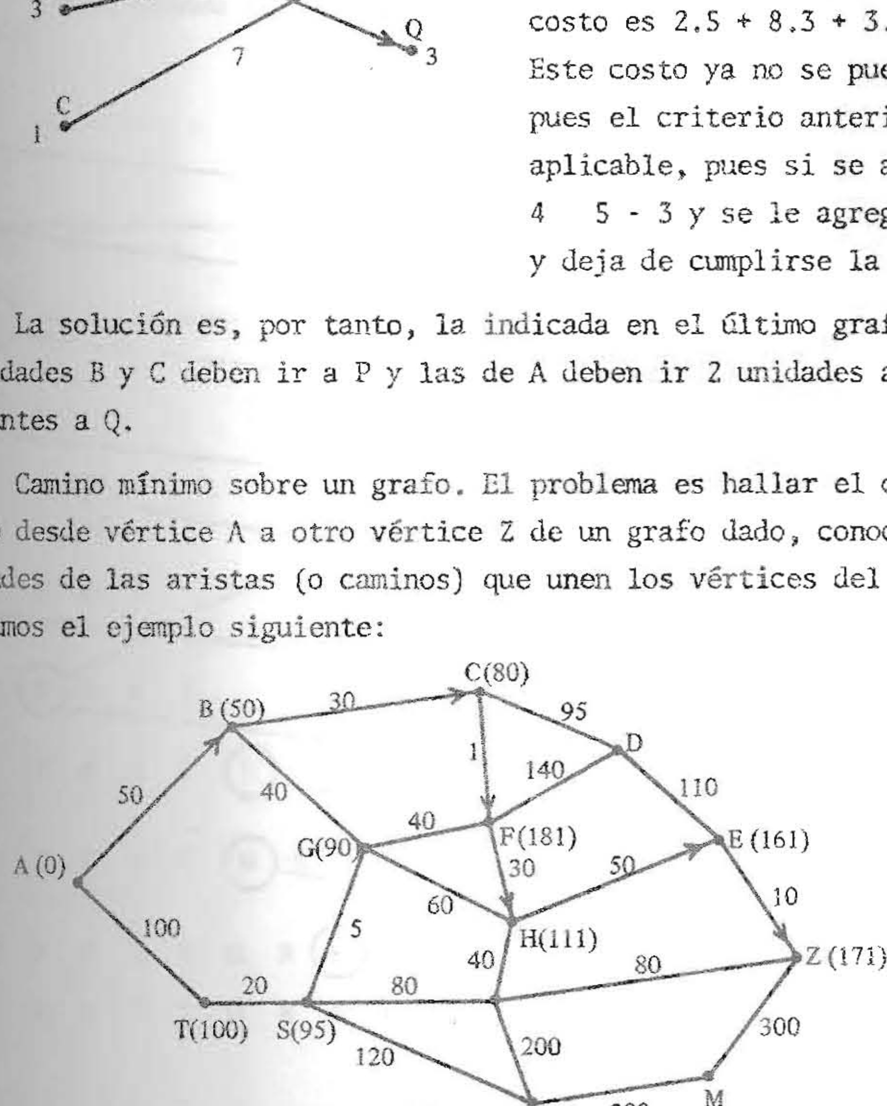




Introduciendo el nuevo arco CP y suprimiendo CQ se obtiene el nuevo árbol indicado, para el cual el cual el costo es 2.5 + 8.3 + 3.2 + 7.4 = 68. Este costo ya no se puede disminuir, pues el criterio anterior deja de ser aplicable, pues si se agrega BQ es 4 5 - 3 y se le agrega CQ es 6 5-1 y deja de cumplirse la condición (**).

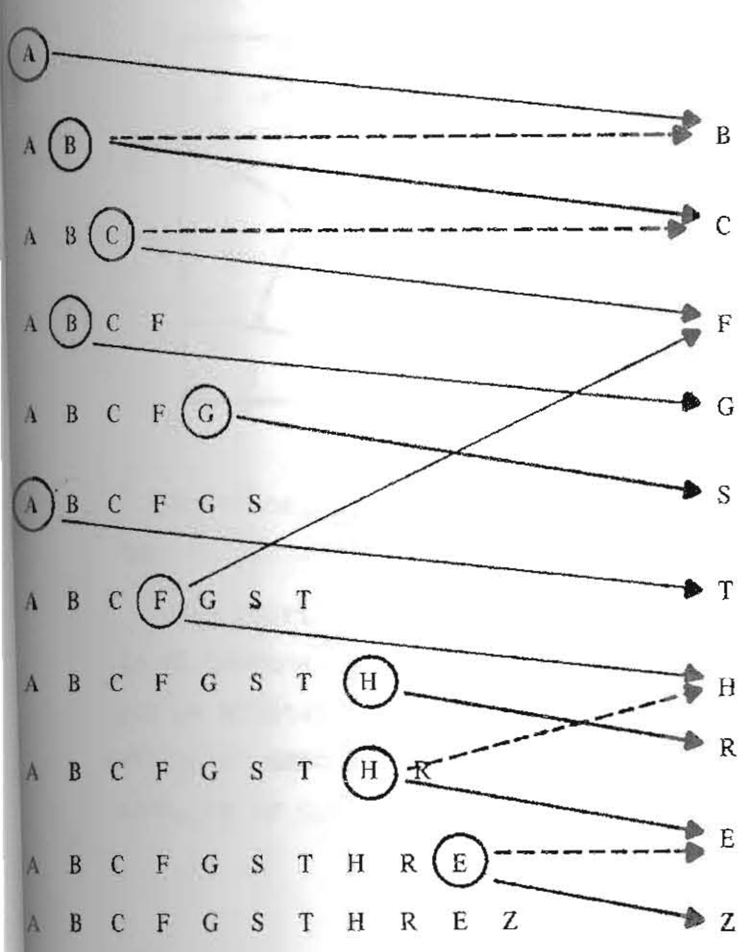
La solución es, por tanto, la indicada en el último grafo: todas las unidades B y C deben ir a P y las de A deben ir 2 unidades a P y las 8 restantes a Q.

Camino mínimo sobre un grafo. El problema es hallar el camino más corto desde vértice A a otro vértice Z de un grafo dado, conocidas las longitudes de las aristas (o caminos) que unen los vértices del grafo. Sonsideramos el ejemplo siguiente:



Para la solución se puede seguir el método siguiente (basado en las ideas de la llamada Programación Dinámica). Obsérvese que en la figura anterior, los números entre las aristas indican las longitudes de ellas y son datos del problema; en cambio los números en cada vértice, entre paréntesis, no son datos, sino que se calculan como vamos a indicar. El grafo no está, evidentemente, dibujado a escala.

Se trata de formar una sucesión finita monótona creciente de conjuntos de vértices $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \subset E_k$, tales que el primero contenga solamente el vértice inicial A, es decir, $E_1 = (A)$ y el último contenga a Z. Para cada miembro de cada E_k se obtiene la distancia mínima a A, que es el número indicado entre paréntesis. Para ellos se procede por recurrencia a partir de E_1, con el criterio de que E_k+1 se obtiene a partir de E_k agregando un vértice de modo que se obtenga el camino más corto para salir de E_k partiendo de A (este cálculo se simplifica porque todas las distancias mínimas desde A hasta los puntos E_k ya están calculadas previamente). Cuando se llega al conjunto E_n que incluye a Z el proceso termina.



Es conveniente registrar la composición de los conjuntos E_k y la última arista del camino mínimo para salir de E_k y formar E_{k+1} (flechas llenas) tal como se hace en el diagrama adjunto.

Por ejemplo, de E_4 = (A,B.C.F) se obtiene E_5 = (A,B,C.F,G) agregando el vértice G al cual se llega desde E_4 por la arista BG (flecha llena B G en el diagrama). Después de alcanzar E_{11}, que contiene Z, se obtienen los vértices del camino mínimo (en orden inverso) por el siguiente proceso:

(i) de Z se pasa al origen E de la flecha llena.

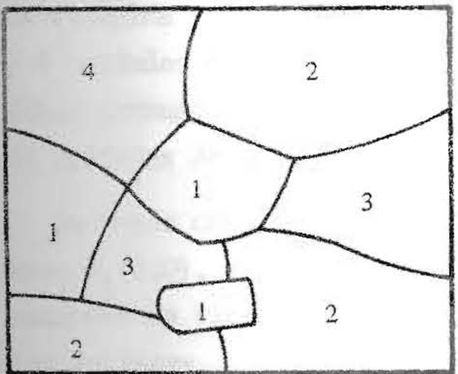
(ii) Se busca E en la fila del diagrama que contiene Z (flechas de puntos) y se repite la operación hasta llegar a A.

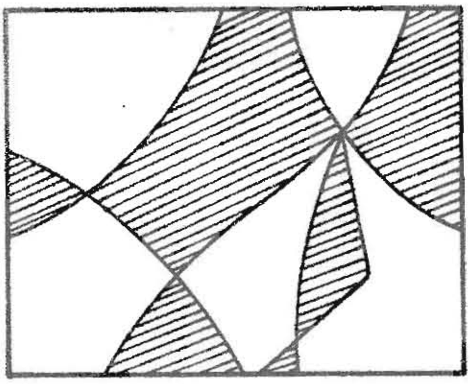
De este modo se obtiene Z E H F C B A y el camino mínimo buscado es A B C F H E Z.

Para este tipo de problema se puede ver G.B.Dantzig, Linear Programming and Applications, Princeton University Press, 1961. También el artículo de J y J.C. Coulon en el volumen La Mathématique et ses Applications, CEDIC, Paris, 1972.

Se sugiere al lector como problema de interés construir un algoritmo para el camino máximo (naturalmente sin ciclos) desde A hasta Z.

Grafos y coloración de mapas. Un mapa es un grafo que divide al plano en regiones (países) limitadas por aristas (fronteras). La experiencia parece probar que para colorear cualquier mapa, de manera que no resulten de igual color dos países que tengan frontera común (de más de un punto) bastan 4 colores. Por ejemplo, el mapa adjunto puede ser coloreado con los colores 1, 2, 3, 4 como se indica en el mismo.





Sin embargo, no se conoce una demostración de este hecho, que constituye el llamado "problema de los 4 colores".

Para ciertos tipos de mapas el problema es más fácil. Por ejemplo, vale el teorema: "Si en los vértices de un mapa concurren siempre un número par de aristas, el mapa puede ser coloreado con sólo 2 colores". Así ocurre en el caso de la 2da. figura. Nótese que los bordes del mapa, en este caso, no se consideran aristas del mismo y por tanto, en ellos, los vértices pueden tener un número impar de aristas. La demostración del teorema es inmediata: dando un color cualquiera a un país, se toma uno de sus vértices y se colorean alternativamente los países ya coloreados, no se puede llegar a contradicción, pues en cada vértice concurren un número par de países (se consideran siempre mapas dibujados en el plano).

La construcción y coloreo de mapas es una actividad instructiva. Lo dicho para mapas del plano, vale para mapas de la esfera, o sea colorear cualquier división de la esfera en países, bastan siempre 4 colores (se supone). En cambio, para la superficie del toro (anillo) no bastan 4 colores, pero se puede demostrar que bastan siete colores. Se puede proponer, como actividad extraescolar, obtener sobre el toro distintos mapas que lo cubran totalmente y para colorear los cuales hagan falta 2, 3, 4, 5, 6, 7 colores.

5. Problemas de dietas.

Un caso simple. Supongamos que se dispone de dos substancias alimenticias S_1 y S_2, la primera de las cuales provee, por kilogramo, 10 unidades de vitamina V_1 y 6 unidades de vitamina V_2 y la segunda 5 unidades de V_1 y 8 unidades de V_2. Se desea calcular las cantidades de S_1 y de S_2 que deben consumirse en una dieta equilibrada que provea 40 unidades de V_1 y 44 unidades de V_2.

Se puede considerar el espacio vectorial engendrado por los vectores-base $V_1(1,0)$, $V_2(0,1)$. Los vectores de este espacio son todas las combinaciones de victaminas V_1, V_2. Por ejemplo, las substancias S_1, S_2 son los vectores.

$$S_1 = 10\, V_1 + 6\, V_2 \qquad , \qquad S_2 = 5\, V_1 + 8\, V_2 .$$

Llamando x_1, x_2 a las cantidades de S_1, S_2 necesarias para proveer 40 unidades de V_1 y 44 de V_2, se tendrá

$$x_1\, S_1 + x_2\, S_2 = 40\, V_1 + 44\, V_2$$

Es decir, resolver el problema equivale a expresar el vector $40\, V_1 + 44\, V_2$ en la base (S_1, S_2). Sustituyendo en la última expresión los valores de S_1 y S_2 anteriores, se tiene

$$(10\ x_1 + 5\ x_2)\ V_1 + (6\ x_1 + 8\ x_2)\ V_2 = 40\ V_1 + 44\ V_2$$

lo que conduce al sistema

$$10\ x_1 + 5\ x_2 = 40 \qquad , \qquad 6\ x_1 + x_2 = 44$$

cuya solución es $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Un ejemplo de programación lineal: problema de la dieta óptima.

El llamado "problema de la dieta óptima" no es tan simple como el del caso anterior. Es un caso típico de programación lineal, que en el caso más simple puede formularse de la manera siguiente:

Dos tipos de alimentos I y II contienen vitaminas de las clases A, B, C en cantidades conocidas por unidad de cada alimento (indicadas en las dos primeras filas de la tabla adjunta). Los precios unitarios de I y II son también conocidos (última columna de la tabla), así como los requerimientos mínimos de vitaminas necesarios para una dieta sana (última fila de la tabla). El problema consiste en satisfacer los requerimientos indicados con un costo mínimo, es decir encontrar las cantidades de alimentos I y II necesarios para satisfacer los requerimientos vitamínicos con un costo mínimo.

	A	B	C	
I	3	4	1	25
II	1	3	3	50
	9	19	7	

Cualquier plan de alimentación aceptable debe corresponder a valores no negativos x, y de alimento ingerido de los tipos I y II respectivamente, que satisfaga las condiciones siguientes:

(1) $x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad 3\ x + y \geq 9 \quad , \quad 4\ x + 3\ y \geq 19 \quad , \quad x + 3\ y \geq 7$

Si el plano debe ser óptimo (mínimo costo) debe cumplirse, además,

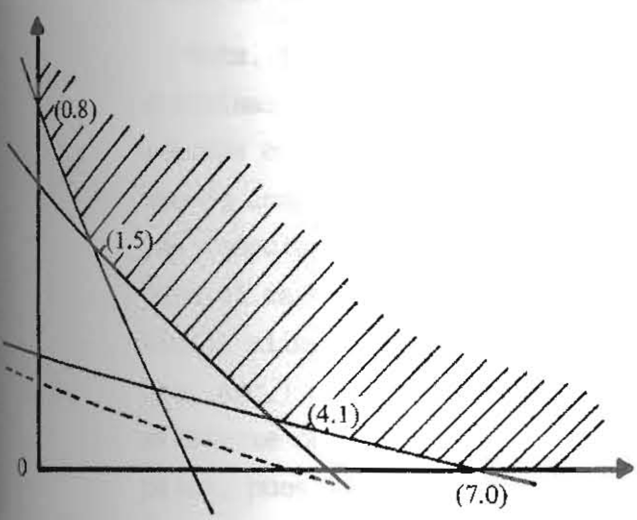
(2) $F\ (x,y) = 25\ x + 50\ y = \text{mínimo}.$

El problema consiste en hallar x,y de manera que se cumplan todas las condiciones anteriores. Es un problema típico de "programación lineal". En este caso de incógnitas, puede seguirse el método gráfico que vamos a exponer, que tiene la ventaja, desde el punto de vista didáctico, que obliga a repasar cuestiones elementales de la geometría en coordenadas del plano, o motiva el estudio de las mismas.

Las condiciones (1), por ser intersección de semiplanos, determinan un polígono convexo (puede se ilimitado como en el presente caso) y la condición (2) obliga que el punto incógnita (x,y) corresponda a uno de los vértices. Haciendo el gráfico, resulta que los vértices del área poligonal que responde a las condiciones (1) son (0,8), (1,5), (4,1), (7,0) para los cuales es

$$F(0,8) = 400 \quad , \quad F(1,5) = 275 \quad , \quad F(4,1) = 150 \quad , \quad F(7,0) = 175$$

Por tanto la solución buscada corresponde a x = 4, y = 1 y el costo mínimo es F (4,1) = 150.



En el caso de un problema como el anterior, de dimensión 2 (o sea, de dos incógnitas) es posible hallar el resultado gráficamente. En efecto, la función lineal F toma valores constantes sobre cada recta de ecuación 25 x + 50 y = k (en la figura se ha dibujado de puntos la recta para k = 100), con valores de k crecientes cuando la recta se traslada paralelamente alejándose del origen. Moviendo la recta de tal modo, el primer vértice encontrado es el (4,1) que da la solución.

Dualidad. Conviene resolver varios problemas de este tipo para ejercitar la geometría lineal en coordenadas y aprovechar para dar algunas propiedades de los conjuntos convexos, como son los polígonos que aquí aparecen. Es interesante observar también que todo problema de este tipo tiene su "dual", el cual, en el ejemplo anterior corresponde al sistema

(1)* $u \geq 0$, $v \geq 0$, $w \geq 0$, $3u + 4v + w \leq 25$, $u + 3v + 3w \leq 50$

con la condición

$$F^* (u,v,w) = 9u + 19v + 7w = \text{máximo}.$$

Dentro de las limitaciones del esquema, este problema dual representa el interés del vendedor de vitaminas, que desea fijar los precios u, v, w de A, B, C de modo que maximice su ingreso total.

Este problema dual se puede resolver siguiendo la misma técnica utilizada para hallar la solución del problema original.

En notación matricial, los problemas de programación lineal son sistemas de ecuaciones de la forma

$$x \quad 0 \quad , \quad A\,x \quad b \quad , \quad c\,x = \text{mínimo}$$

y entonces, el problema dual es

$$u \quad 0 \quad , \quad A^t\,u \quad c^t \quad , \quad b^t\,u = \text{máximo}$$

donde el exponente t indica "matriz traspuesta".

Nota. El problema de la dieta, cuando el número de alimentos o el de vitaminas u otros constituyentes es muy grande, conduce a cálculos muy pesados o casi imposible de hacer a mano. Son ejemplos ideales para el uso de computadoras o calculadoras. Existen programas ya preparados para las computadoras. Se trata de un problema de mucha importancia práctica para el caso de alimentación de ganado. En vez de vitaminas, aparecen distintos alimentos posibles (forrajes de distintas clases, granos, proteínas, etc.) y el problema es siempre el mismo de obtener una alimentación eficiente con el mínimo costo. En el caso de personas, el problema se complica, pues la combinación puede dar lugar a comidas no agradables al paladar.

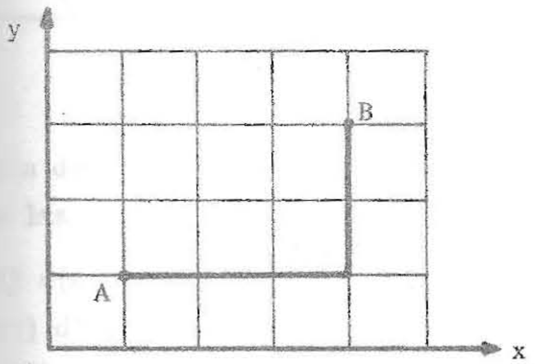
6. Aplicaciones del concepto de distancia.

Distancia del taxista. Desde la primera enseñanza, el concepto de distancia entre dos puntos A, B va unido al de longitud del segmento AB. Sin embargo, conviene ampliar este concepto, viendo distintas definiciones de distancia y haciendo resaltar la parte esencial común a todas ellas (axiomas de la distancia).

En una ciudad cuadriculada, no se puede ir directamente de A a B, sino que es preciso recorrer paralelas a dos ejes coordenados, separados entre sí por una distancia constante (longitud de las cuadras, que supondremos igual a la unidad). La verdadera distancia es entonces

(1) $d_T(A,B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$

donde x_A, y_A son las cordenadas del punto A y análogamente las de B. Esta distancia, que puede realizarse por distintos caminos se llama la distancia del taxista.



Problema 1. ¿Cuántos caminos diferentes hay para ir de A a B, todos de la misma longitud $d_T(A,B)$?

En el caso de la figura son 10: indicarlos. Si $|x_B - x_A| = m$, $|y_B - y_A| = n$, el número es igual al de combinaciones de m + n objetos, tomados m a m.

Prescindiendo del caso de una ciudad cuadriculada y considerando el plano referido a las coordenadas ortogonales x,y, se puede tomar (1) como "definición" de la distancia entre los puntos A y B. La distancia ordinaria, longitud del segmento AB, está dada por

(2) $d_E(A,B) = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^{1/2}$

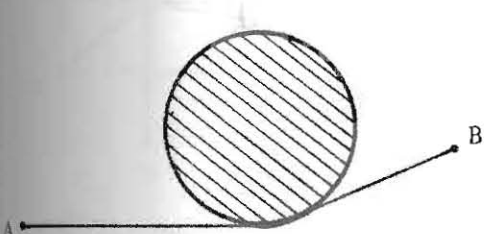
y se llama la distancia euclidiana.

Problema 2. Probar que $d_E(A,B) \leq d_T(A,B)$, valiendo el signo igual únicamente si $x_A = x_B$ o bien $y_A = y_B$.

Basta elevar (1) y (2) al cuadrado y comparar.

Problema 3. Con la distancia (1) dibujar en el plano los puntos X tales que $d_T(A,X) = r$, siendo r una constante y A un punto fijo. El resultado es la "circunferencia" de centro A y radio r, según la métrica (1), y resulta ser el cuadrado de centro A cuyas diagonales son paralelas a los ejes. Lon puntos X tales que $d_T(A,X) \leq r$, cubren el "círculo" de centro A y radio r en la métrica (1).

El plano con obstáculos. El caso de una ciudad cuadriculada es un caso particular del plano en el cual están distribuidos ciertos obstáculos que no se pueden atravesar y hay que rodear para ir de un punto a otro. En dicho caso, los obstáculos son las manzanas de casas. Más generalmente,



si se supone que en el plano de los puntos A, B hay ciertos obstáculos, por ejemplo la parte rayada de la figura adjunta, la distancia entre A y B puede definirse como el extremo inferior de las longitudes de todas las líneas del plano que unen A y B sin atravesar el obstáculo.

Esta definición general de distancia, que comprende la (1) y la (2), tiene las siguientes propiedades:

(i) $d(A,B) \geq 0$ y sólo $= 0$ si $A = B$;

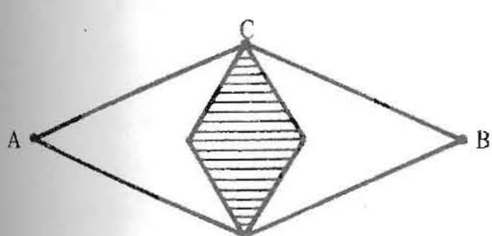
(ii) $d(A,B) = d(B,A)$;

(iii) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$, cualesquiera que sean los tres puntos A, B, C.

Esta última propiedad se llama la "propiedad triangular" de la distancia. Siempre que se tenga una biyección $R^2 \times R^2 \to R$ de los pares de puntos del plano en los reales que satisfaga las condiciones (i), (ii), (iii), se dice que se tiene definida una distancia en R^2.

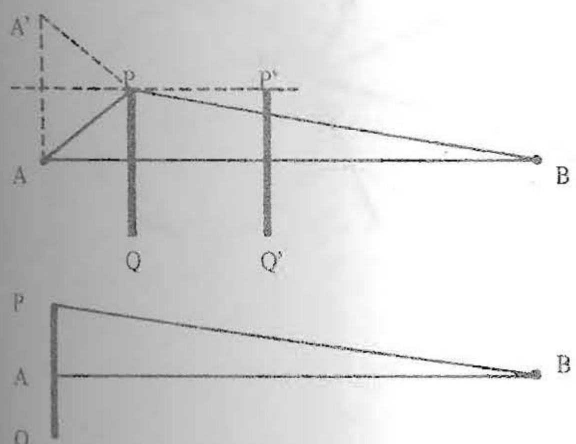
Problema 4. Probar que la definición anterior de distancia en el plano con obstáculos, cumple las propiedades (i), (ii), (iii).

Las dos primeras son evidentes y la tercera es una consecuencia de ser la distancia el "extremo inferior" y por tanto no puede haber otro camino de longitud menor.



La única diferencia con la distancia usual, sin obstáculos, es que ahora puede valer la igualdad sin estar A, B, C sobre un mismo camino mínimo, como en el caso de la figura, con el obstáculo rayado.

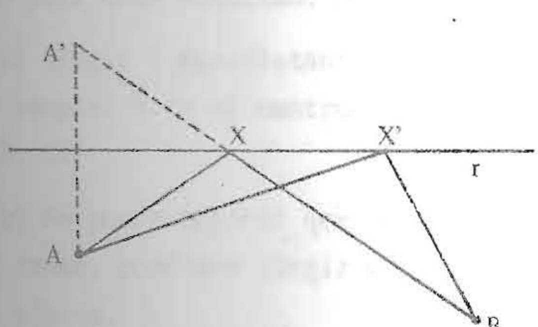
Problema 5. Entre dos puntos A, B hay que colocar un muro PQ de longitud PQ dada, de manera que la distancia BA (o sea BP + PA) sea máxima.



Por simetría, el punto medio de PQ debe estar sobre AB y como BP+PA = BP+PA (A' = simétrico de A respecto de la paralela a AB a distancia (1/2)PQ, figura adjunta), resulta que la máxima distancia se obtiene cuando el muro está pegado a A o pegado a B.

Suponiendo que el muro debe ser perpendicular a AB y que su punto medio debe estar sobre AB, la distancia mínima se obtiene en la posición P'Q', perpendicular en el punto medio de AB.

Problema 6. Sean dos pueblos A,B y una ruta r. Se quiere construir un camino que una A con B, tocando la ruta. Se pide el punto X de la misma tal que AX + XB sea de longitud mínima.

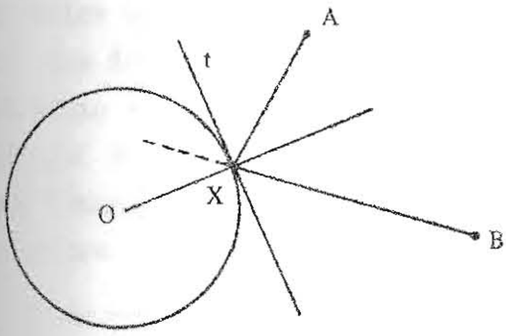


El punto X es la intersección de r con la recta BA' que une B con el punto A' simétrico de A respecto de re. Para cualquier otro camino BX' + X'A es:

$$BX' + X'A = BX' + X'A' \geq BA' = BX + XA$$

Obsérvese que el punto X que da la solución es tal que la recta r es la bisectriz del ángulo AXA'.

Si en vez de la recta r se tiene una circunsferencia de centro O que no contenga en su interior a ningu-



no de los puntos A, B, el camino mínimo AX + XB que une A con B tocando a la circunsferencia, será el correspondiente al punto X tal que la tangente a la misma sea bisectriz del ángulo exterior formado por XA y la prolongación de BX. En efecto, por el problema anterior si X se desplaza sobre la tangente de AX + XB aumenta y con mayor razón aumentará si X se desplaza sobre la circunsferencia, que está a distinto lado que A, B de la tangente t.

Si se quiere dar enunciado atractivo al problema se puede decir que el círculo es una laguna y se quiere construir un camino mínimo que vaya desde su borde a los pueblos A y B.

Problema 7. Sean tres pueblos A, B, C. Se desea construir una escuela en un punto X para que acudan a ella los ninos de los tres pueblos. ¿Cómo elegir X?

Se puede preguntar la opinión de los alumnos respecto a posibles criterios para esta elección. He aquí algunos posibles:

a) Elegir X equidistante de los tres pueblos. Entonces la solución es muy simple: X es el centro de la circunsferencia que pasa por los tres puntos A, B, C.

b) Se puede suponer que hay que construir los caminos XA, XB, XC y que, por tanto, conviene elegir el punto X de manera que la suma XA + XB + XC sea mínima.

En este caso, fijando por ejemplo AX, o sea, permitiendo que X varíe sobre la circunsferencia de centro A y radio AX, la suma XC + XB será mínima cuando la recta AX sea bisectriz del ángulo BXC (según el problema anterior)

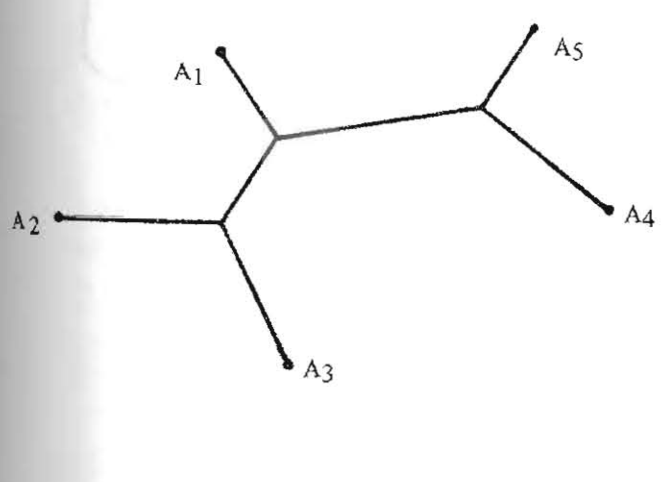
Como lo mismo debe ocurrir al fijar BX o CX, resulta que XA, XB, XC deben ser tales que cada recta bisequel el ángulo formado por las otras dos. O sea, los ángulos AXB, BXC y CXA deben valer 120°, Con esto, la construcción del punto X es fácil, pues basta construir sobre dos de los lados del triángulo ABC los arcos capaces de 120° y la intersección es el punto buscado. Esto supone que el triángulo ABC tiene sus ángulos menores de 120° . En caso contrario, X coincide con el vértice correspondiente al ángulo obtuso.

c) Se puede pedir también que las longitudes XA, XB, XC dependan del número de alumnos de cada pueblo, de manera que el camino total recorrido por todos los alumnos sea mínimo. En este caso, si n_A, n_B, n_C son los números de alumnos de cada pueblo, el punto X deberá ser tal que la suma $n_A XA + n_B XB + n_C XC$ sea mínima.

La solución en este caso no es tan fácil. Se puede demostrar que los ángulos AXB, BXC, CXA deben ser iguales a los ángulos exteriores del triángulo auxiliar cuyos lados sean proporcionales a los números n_A, n_B, n_C. Admitido esto, la construcción se hace, como antes, mediante los arcos capaces de estos ángulos construídos sobre los lados AB, BC, CA.

Este problema se remonta a Jacobo Steiner (1796-1836); más detalles y generalizaciones se pueden ver en H. Steinhaus, Mathematics Snapshots, Oxford University Press, 1969, y también en R. Courant y H. Robbins, ¿Qué es la Matemática?, traducción castellana en Ed. Aguilar, Madrid, 1955.

Un problema difícil, que puede plantearse y resolverse en algunos casos particulares simples, es el de hallar la mínima red de carreteràs que unen varias ciudades.

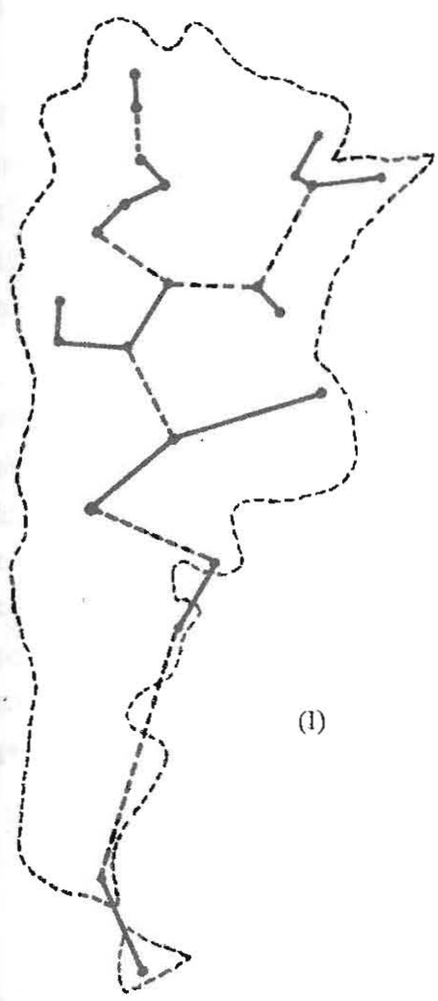


Por ejemplo, en el caso de la figura, dadas las 5 ciudades A_1, A_2,.... A_5, la red de longitud mínima es la indicada, la cual presenta intersecciones triples.

7. Dendritas.

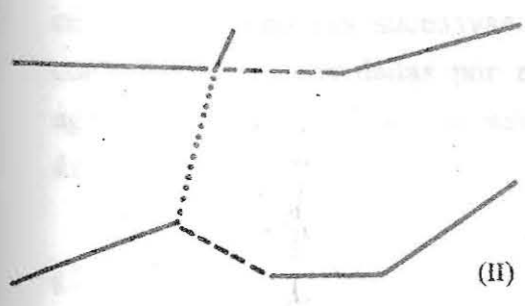
Un problema interesante a distancias, análogo al último considerado, pero más simple e interesante didácticamente por sus vinculaciones con la geografía y otras ciencias, es el siguiente.

Problema 1. Se tiene un cierto número de ciudades en un mapa y se trata de unirlas entre sí por caminos de longitud mínima. La diferencia con el problema anterior, es que ahora se quiere que todos los vértices del grafo resultante sean ciudades don conjunto dado.


(I)

Se procede de siguiente manera. Primero se une cada ciudad con la más próxima. Se tiene así un conjunto de arcos y cada subconjunto conexo del mismo se llama una "dendrita" de primer orden. En el caso de la figura adjunta (I), cuyos puntos están situados como las capitales de las provincias argentinas, las dendritas de primer orden están formadas por los segmentos dibujados gruesos.

Como segundo paso, cada dendrita de primer orden se une con la ciudad más próxima de otra dendrita. Son los segmentos dibujados de puntos en la figura. Cada parte conexa del grafo resultante se llama una dendrita de segmento orden. En el caso de la figura, resulta una sola dendrita de segundo orden, pues el grafo resultante ya es conexo. Podría haber resultado no conexo, en cuyo caso se repetiría la operación, uniendo cada dendrita de segundo orden con la ciudad más próxima no perteneciente a ella. Tal es el caso de la figura II en la cual las dendritas de primer orden forman el grafo de arcos gruesos, las de segundo orden el grafo de arcos



(II)

gruesos y rayados y la de tercer orden es el grafo total. En cualquier caso, el proceso se puede proseguir hasta llegar a una dendrita que sea un grafo conexo (siempre de tipo árbol) que es la dendrita final.

Las dendritas de distintos órdenes dan un criterio para agrupar las ciudades en grupos que, en cierto modo, tienen en cuenta su distancia mutua. Dar unos cuantos puntos al azar en el plano, es un ejercio útil, por el razonamiento que significa, dibujar las dendritas de distintos órdenes que determinan.

Hasta aquí hemos considerado distancias geográficas, pero el concepto de distancia es más general. A veces, entre los elementos de un conjunto, que ya no necesitan ser ciudades o puntos de un mapa, se puede definir cierta "distancia" (O sea, una función entre cada par de ellos que cumpla las condiciones (i), (ii), (iii) antes mencionadas) y con ella definir dendritas de manera análoga a la anterior.

Consideremos, por ejemplo, el caso de varios bosques con distintas especies vegetales y una distancia entre ellos que mida, en cierto modo, la diferencias entre las especies de un bosque y otro. Por ejemplo, Marczewski y Steinhaus han definido la siguiente (ver Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática III, pag. 105, Oficina de Ciencias de la UNESCO para América Latina, Montevideo, 1973): sean dos bosques A, B que contengan, respectivamente, a y b especies de árboles, de las cuales w_{ab} especies comunes a ambos bosques. Una distancia conveniente, que naturalmente no tiene nada que ver con la distancia geográfica entre los dos bosques, puede ser la siguiente:

$$d_S(A,B) = \frac{a + b - 2w_{ab}}{a + b - w_{ab}}$$

Esta distancia cumple evidentemente las propiedades $d_S(A,B) \geq 0$, $d_S(A,A) = 0$ y, además, $d_S(A,B) \leq 1$, siendo $d_S(A,B) = 1$ si y sólo si $w_{ab} = 0$, o sea, si los dos bosques no tienen especies comunes. La condición $d_S(A,B) = 0$ significa que los dos bosques tienen las mismas especies. La desigualdad $d_S(A,B) \leq d_S(A,C) + d_S(C,B)$ es cierta, pero no fácil de demostrar.

De esta manera, definida la distancia por la fórmula anterior u otra cualquiera, se pueden representar los distintos bosques por puntos del plano y construir luego las sucesivas dendritas, análogamente al caso anterior, pero con las distancias dadas por el criterio actual. De esta manera se pueden agrupar los bosques por su mayor o menor coincidencia entre las especies de árboles que contienen.

Lo mismo se puede aplicar a cuestiones de ecología, lingüística, arqueología, etc. (ver, Hodson-Kendall-Tantu, Mathematics in the Archeological Sciences, Edinburgo University Press, Edinburgh, 1971).

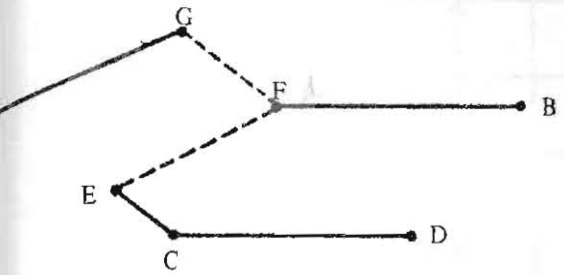
En lingüística, el problema se presenta al considerar las relaciones de parentesco entre distintos dialectos o idiomas, Entre ellos puede definirse una "distancia" que tenga en cuenta, por ejemplo, el porcentaje de palabras iguales del vocabulario básico de cada idioma o bien las diferencias entre sus reglas gramaticales. En genética, el problema aparece al comparar poblaciones por ciertas características entre sus grupos sanguíneos. Siempre que las diferencias o analogías se puedan definir por ciertas características, con las cuales pueda definirse una distancia, se tendrá la posibilidad de construir dendritas que pongan de manifiesto las agrupaciones en subconjuntos del conjunto total.

Ejemplo. Sean A, B, C, D, E, F, G siete dialectos de un mismo idioma hablado por distintas poblaciones. Supongamos que comparando los porcentajes de palabras básicas comunes u otras características, se ha logrado definir entre ellos las "distancias" expresadas en la matriz adjunta (matriz simétrica).

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	7	9	15	10	6	3
B	7	0	5	10	6	2	8
C	9	5	0	9	1	5	10
D	15	10	0	0	11	10	16
E	10	6	1	11	0	4	9
F	6	2	5	10	4	0	5
G	3	8	10	16	9	5	0

Se pide construir las dendritas correspondientes.

El resultado es de la forma:



Obsérvese que la posición de los puntos en el grafo es arbitraria. Lo importante es que los 7 dialectos se clasifican en 3 subconjuntos (A, G), (F, B) y (E , C , D) que son las dendritas de primer orden. Otros ejemplos se pueden ver en el libro citado de Steinhaus.

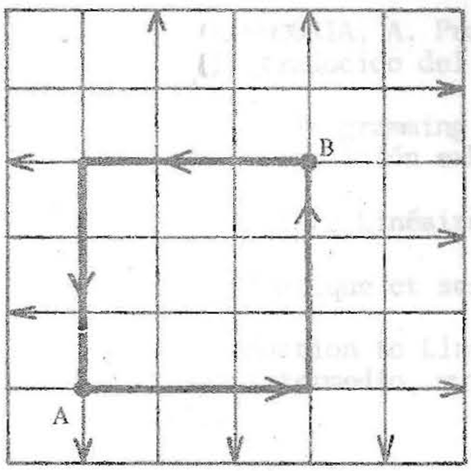
Distancias no simétricas. En general, a toda definición de distancia, se le exige la condición simétrica $d(A,B) = d(B,A)$. Sin embargo hay casos simples en que esto no ocurre. Conviene incitar a los alumnos a dar ejemplos de distancias simétricas y no simétricas.

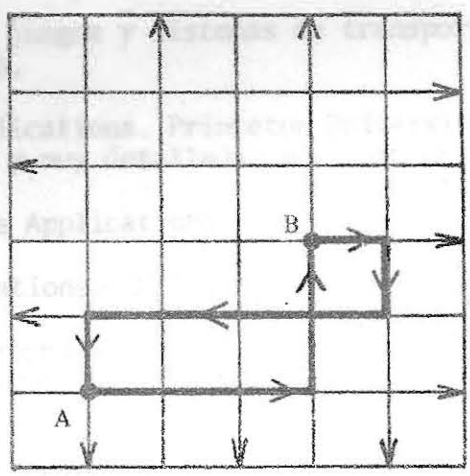
Por ejemplo, la distancia del taxista, para una ciudad con calles de dirección única, no es simétrica.

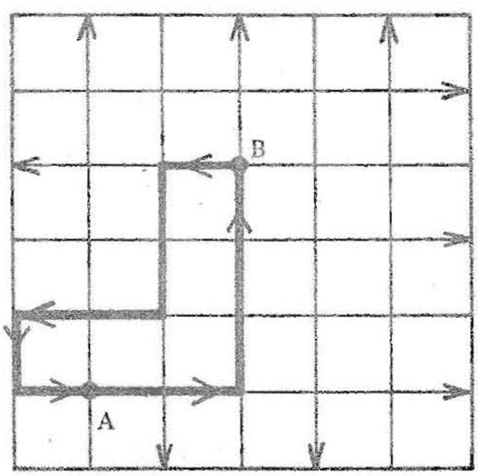
Problema. a) En una ciudad cuadriculada, fijar una dirección única en cada calle y hallar la distancia del taxista para ir de A a B y para ir de B a A, ¿en qué casos son iguales?

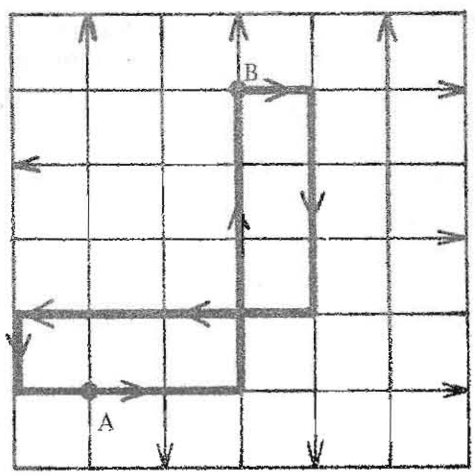
b) Si las direcciones únicas de las calles son alternativamente de un sentido y de otro, tanto para las paralelas al eje de ordenadas como para las paralelas al eje de abscisas, probar que la diferencia máxima es de 4 cuadras. Dar ejemplos en que la diferencia sea 0, 2 ó 4 y probar que esta diferencia no puede ser un número impar de cuadras.

He aquí unos ejemplos:









BIBLIOGRAFIA

- BERGE, C. Teoría de las redes y sus aplicaciones. CECSA, 1967 (traducido del francés).

- BERGE, C.; GHOUILA-HOURIA, A. Programas, juegos y sistemas de transportes. CECSA, 1965 (traducido del francés).

- DANTZIG, G.B. Linear Programming and Applications. Princeton University Press, 1961 (exposición exhaustiva y muy detallada; muy informativo).

- FLETCHER, T.J. L'Algèbre Linéaire par ses Applications. CEDIC, 1972.

- GALION, E. La Mathématique et ses Applications. CEDIC, 1972.

- GARVIN, W.W. Introduction to Linear Programming. McGraw-Hill, Nueva York, 1960 (Nivel intermedio, muy recomendable desde el punto de vista didáctico).

- GASS, I. Programación Lineal. Métodos y Aplicaciones. CECSA, 1969 (4a. edición, traducción castellana). (Nivel secundario o superior. Trae abundante bibliografía sobre las aplicaciones de la programación lineal a problemas concretos).

- HARARY, F. Graph Theory. Addison-Wesley, Reading, Massachusetta, 1969.

- KAUFMANN, A.; FAURE, R.; LE GARFF, A. Los juegos de empresa. Cuaderno n° 157 de Eudeba, 1966 (traducido del francés).

- KAUFMANN, A.; DESBAZEILLE, G. Méthode du chemin critique. Dunod, París,1964.

- KEMENY, J.G.; MIRKIL, H.; SNELL, J.L.; THOMSON, G.L. Estructuras matemáticas finitas. Eudeba, Buenos Aires, 1970 (traducción del inglés. Libro muy recomendable por su contenido variado, con numerosos ejemplos y ejercicios. Muy didáctico).

- KEMENY, J.G.; SNELL,J.L. Mathematical Models in the Social Sciences. Mit Press.

- KONIG, D.Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936 (reproducido por Chelsea en 1950).

- Matemáticas en el mundo moderno. Selecciones de Scientific American, con introducciones de M. Kline, Ed. Blume, Madrid, Espana.

- MATTHEWS, G. Matrices 1 y Matrices 2. Editorial Vicens Vives, Barcelona, España (traducción del inglés. Contiene aplicaciones sencillas del álgebra lineal a situaciones matemáticas y de otras disciplinas, como la física y la criptografía; contiene muchos ejercicios con la solución).

- McKINSEY, J. Introduction to the Theory of Games. McGraw-Hill, Nueva York, 1952. (versión española "Introducción a la teoría matemática de los juegos". Aguilar, Madrid. Exposición detallada y muy didáctica de la teoría de juegos de estrategia, con muchas aplicaciones).

La diagramación de esta publicación fue realizada por el personal de Graficación y Diseño contratado por la Organización de los Estados Americanos, e impreso en el Servicio Reprográfico de la Dirección Nacional de Investigación, Experimentación y Perfeccionamiento Educativo.

(DIEPE)

Febrero 1977