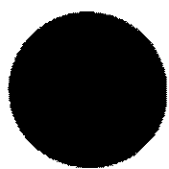


F¹¹
372.85
1

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION
DE LA NACION

DIRECCION NACIONAL DE INVESTIGACION,
EXPERIMENTACION Y PERFECCIONAMIENTO EDUCATIVO



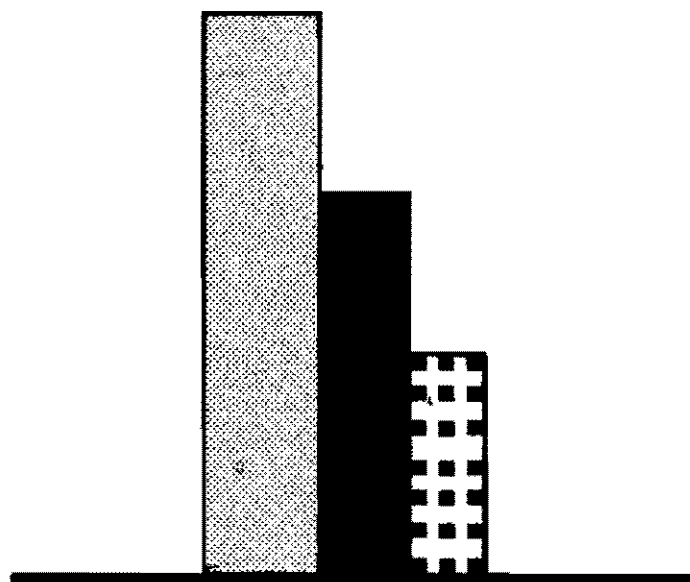
PROYECTO MULTINACIONAL PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS O.E.A.

Serie Matemática

Documento nº4

Aplicaciones de la Estadística y de la Probabilidad

(Separata de "Las aplicaciones en la enseñanza
y el aprendizaje de la Matemática en la Escue-
la secundaria. Reunión de Montevideo (Uru-
guay), 8 al 17 de Agosto de 1974.)



BUENOS AIRES

Febrero 1977

INV	019743
SIG	Foll 372.85
LIB	1

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION

Ministro:

Prof. Ricardo P. Bruera

Secretario de Estado de Educación:

Contraalmirante (R.E.) Enrique L. Carranza

Subsecretario de Estado de Educación:

Prof. Benicio C. A. Villarreal

**DIRECCION NACIONAL DE INVESTIGACION, EXPERIMENTACION
Y PERFECCIONAMIENTO EDUCATIVO (D. I. E. P. E.)**

Director:

Dr. Bruno L. Carpineti

Directora del Proyecto Multinacional para el Mejoramiento de
la Enseñanza de las Ciencias :

Insp. Mabel Stokle

ORGANIZACION DE LOS ESTADOS AMERICANOS

PROGRAMA REGIONAL DE DESARROLLO EDUCATIVO

Director del Departamento de Asuntos Educativos:

Dr. Hugo Alborno

División Desarrollo del Curriculum:

Dr. Ovidio De León

Especialista del Departamento de Asunto Educativos
en la República Argentina:

Dra. Inés C. de Lajmanovich

APLICACIONES DE LA ESTADISTICA Y DE LA PROBABILIDAD

1. SUGERENCIAS REFERENTES A CONTENIDOS Y METODOS

1.1. Ciclo elemental

Las nociones de probabilidad y estadística deben introducirse en todos los ciclos de la enseñanza.

En la primera enseñanza se pueden considerar dos etapas:

Niños de 6 a 9 años: Se propone que en esta fase, se realicen experiencias de recolección y tabulación de datos provenientes de situaciones del medio ambiente del educando.

Niños de 10 a 11 años: Utilizando los conocimientos sobre fracciones (quebrados), se pueden determinar e interpretar fenómenos estadísticos introduciendo los conceptos de media, moda y mediana. Además podrá introducirse paulativamente la idea de probabilidad, primero en su forma cualitativa, para ir llegando a su expresión cuantitativa mediante experimentos con monedas, dados, bolitas de colores en una bolsa, etc. Con los resultados obtenidos podrán elaborarse los gráficos respectivos. Son muy útiles los gráficos en árbol para el recuento de casos posibles y favorables. La idea de probabilidad puede aprovecharse para motivar y afianzar el concepto de fracción.

1.2. Ciclo medio básico (12 a 15 años).

Se sugiere que en esta fase se incorporen a los programas de matemática, los primeros conceptos de estadística descriptiva y probabilidades. El tratamiento de estos temas deberá ser de una manera intuitiva. Se propone recolectar datos o presentarlos ya recolectados. Por ejemplo: tamaños, pesos, resultados de juegos preferidos, número de hermanos y hermanas, listas de resultados en juegos de azar, etc.

A continuación, deberán ordenarse los datos y tratarlos con técnicas estadísticas introduciendo distintos diagramas tales como: poligonales, de columnas, etc.

Posteriormente, se interpretarán los datos mostrando lo que se puede deducir de ellos y como pueden compararse entre sí.

Con estas nociones, se introducirá el concepto de medida empírica de probabilidad o frecuencia relativa, ampliando los resultados obtenidos en la primera etapa.

Es importante advertir que los conceptos a incorporar, no deben necesariamente constituir uno o más capítulos específicos de un curso de matemática, sino que deben ser presentados como aplicación inmediata de conceptos matemáticos introducidos o como motivación de los mismos. Por ejemplo, conocida la idea de número racional, se puede definir la media y a partir de ello, discutir al experimento estadístico que consiste en sacar el promedio de notas de los estudiantes en el curso de matemáticas.

En líneas generales, una lista de contenidos puede ser la siguiente:

- 1.2.1. Recolección de datos. Población o colectivo. Muestra.
 - 1.2.2. Ordenación de datos. Distribución de los datos en clase, frecuencia y distribución de frecuencia de una clase.
 - 1.2.3. Representación de datos. Diagramas poligonales, de barras, histogramas, acumulativos, de círculos, sectoriales, etc.
 - 1.2.4. Interpretación de datos. Estadígrafos de posición o índices de tendencia central: media, mediana y moda. Estadígrafos o índices de dispersión, amplitud de datos, desviación media, desviación estándar.
 - 1.2.5. Correlación. Coeficiente de correlación.
 - 1.2.6. Combinatoria. Triángulo de Pascal. Nociones elementales de probabilidad. Frecuencia relativa o medida empírica de probabilidad.
 - 1.2.7. Tablas de números aleatorios. Ejemplos de simulación.
- 1.3. Ciclo medio superior (16 a 18 años).

En este ciclo, como continuación de los conocimientos ya adquiridos por el alumno, se puede introducir una fundamentación axiomática de probabilidad basada en la teoría de conjuntos. Todos los temas deberán ser intercalados en

los programas de matemática de manera progresiva y a medida que se dispone de los elementos necesarios.

Se sugiere el siguiente tratamiento metodológico.

A modo de motivación, cada vez que se presente la oportunidad, se hará una descripción histórica de las ideas que contribuyeron a formar los primeros conceptos de probabilidad y estadística.

Presentar la noción de espacio muestral finito a partir de la noción de conjunto finito. Presentar la probabilidad como caso particular de una medida de conjuntos, es decir como una función que hace corresponder a cada subconjunto del espacio muestral un número real no negativo, que goza de ciertas propiedades.

Presentar el concepto de variable aleatoria discreta, como una función cuyo conjunto de valores es finito; y dar una idea intuitiva de variable aleatoria continua. De igual manera, desarrollar los conceptos de función de probabilidad y función de distribución.

Ilustrar con ejemplos sencillos, el concepto de esperanza matemática o valor esperado de una variable aleatoria discreta.

Se sugiere presentar los conceptos de media y varianza de una distribución como dos números que se puedan obtener de la función de distribución y que caracterizan ciertas propiedades generales de la misma.

Presentar y caracterizar la distribución binomial para ensayos repetidos (distribución de frecuencias teóricas para variables discretas).

Presentar y caracterizar la distribución normal (distribución de frecuencia para variable continua). Dar una idea geométrica - intuitiva de cómo puede aproximarse la distribución normal a partir de la binomial. Plantear problemas sencillos, a fin de manejar y aplicar tablas de áreas de la curva normal.

Sin entrar en detalles, una lista de contenidos puede ser la siguiente:

1.3.1. Espacios muestrales. Eventos o acontecimientos.

1.3.2. Medida de Probabilidad: Propiedades. Medida equiprobable. Probabilidad condicional. Sucesos independientes. Medida empírica de probabilidad.

1.3.3. Distribuciones de Probabilidad: Variables o Funciones aleatorias. Distribuciones discretas. Funciones de probabilidad. Función de distribución de una variable o función aleatoria. Función de distribución correspondiente a una distribución discreta.

1.3.4. Valor medio de una distribución. Varianza de una distribución. Esperanza matemática. Variable o función aleatoria estandarizada.

1.3.5. Distribuciones discretas especiales. Distribución binomial: media y varianza de una distribución binomial. Distribución de Poisson. Distribución gaussiana o normal. Paso de la distribución binomial a la de Poisson. Idea del paso de la distribución binomial a la normal.

Algunos ejercicios de estadística exigen cálculos largos que se prestan para ejercitar y justificar el uso de calculadoras (de mesa o de bolsillo) o de computadoras.

2. EJEMPLOS DE APLICACIONES

1. Iniciación a las ideas de probabilidad y estadística

En las aplicaciones de la matemática, la idea de probabilidad interviene muy a menudo en el mundo de los niños: en los juegos, en la esperanza de tener un buen tiempo para el fin de semana, en la probabilidad de llegar a tiempo a la escuela o en la probabilidad de obtener una buena clasificación en los exámenes.

Los primeros ejercicios pueden desarrollarse de muy distintas maneras, sea utilizando material didáctico destinados a otros fines (bloques multibase, regletas, varillas), sea utilizando elementos pertenecientes al alumno (libros, lápices) o mediante datos recogidos según determinado criterio. Siempre que se puedan ordenar objetos o datos según el valor de ciertas características, la comparación de la distribución de las mismas en tal ordenación, se presta a un gráfico o a un comentario de interés estadístico.

Recolección de datos. Hay que educar, desde la primera enseñanza, en la recolección de datos, que serán ordenados y guardados convenientemente. En distintas materias (Geografía, Historia, Idioma, ...) aparecen con frecuen-

cia datos numéricos que el profesor de matemática puede utilizar para ejemplificar las distintas maneras de graficar. Disponiendo de muchos gráficos se tiene también la posibilidad de "compararlos", introduciendo en la idea de una posible "correlación" entre ellos.

Cada alumno debería llevar un cuaderno especial con datos, gráficos, tablas, números al azar, todo lo cual le irá dando una idea más concreta que la corriente, del ambiente en que vive. En las revistas y periódicos de lectura común que el alumno encontrará en su casa, aparecerán muchas veces datos numéricos y gráficos que el alumno puede recortar y llevar a la escuela para discutir. Se tienen así datos que se refieren al ambiente en que el alumno vive y que, por tanto, interesarán seguramente a él y a toda la clase.

He aquí algunos ejemplos de datos y preguntas que ellos pueden originar.

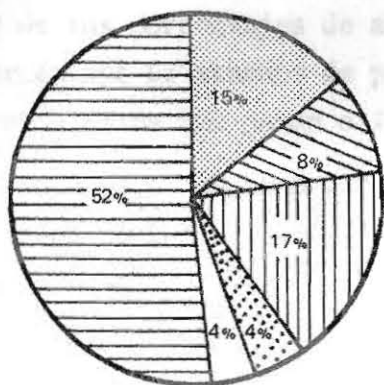
1. La extensión y el número de habitantes de los países de América del Sur son (en cifras redondas):

Colombia	1.140.000 Km ²	,	20.000.000 habitantes
Venezuela	900.000 "	,	10.000.000 "
Ecuador	260.000 "	,	6.000.000 "
Perú	1.300.000 "	,	13.000.000 "
Brasil	8.500.000 "	,	92.000.000 "
Bolivia	1.000.000 "	,	5.000.000 "
Chile	750.000 "	,	9.000.000 "
Argentina	3.000.000 "	,	24.000.000 "
Paraguay	400.000 "	,	2.500.000 "
Uruguay	180.000 "	,	3.000.000 "

a) Graficar de distintas maneras estos datos; b) ¿Cuántos son los habitantes por Km² de cada país?; c) ¿Cuántos son los habitantes por Km² en América del Sur?, este número, ¿es igual a la media aritmética del número de habitantes por Km² de cada país?; d) Hallar los porcentajes de superficie y habitantes de cada país respecto del total. Hacer el gráfico circular correspondiente (calcular los grados de cada sector para cada país).

2. Los trabajadores del Paraguay están distribuidos por sectores según

los siguientes porcentajes: agrícola (52%), industrial (15%), comercio (8%), servicios (17%), construcción (4%), transporte y comunicaciones (4%).

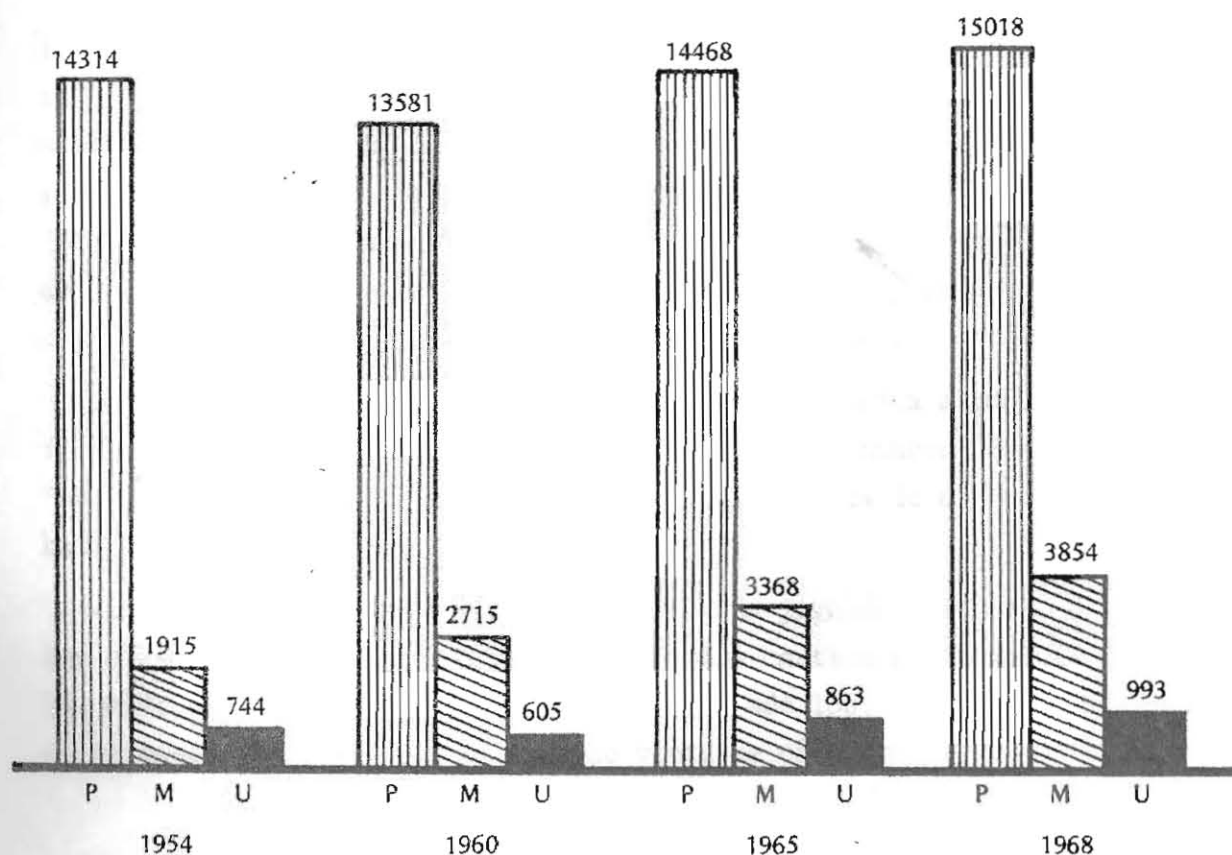


Calcular los grados que corresponden a cada sector en el gráfico adjunto.

Estos datos y gráficos son muy instructivos. Convendría que en cada escuela hubiera abundancia de ellos, pedidos a las direcciones de estadística de cada país, que suelen publicarlos anualmente.

3. En la Argentina, el gráfico de los números de alumnos inscriptos en las escuelas primarias, media y universitaria durante los últimos años, es el adjunto.

MATRICULA CADA 100 MIL HABITANTES



Deducir de este gráfico: a) Sabiendo que la población total de la Argentina es de 24 millones de habitantes, calcular el número de alumnos de cada nivel; b) Tomando un promedio de 30 alumnos por maestro de escuela primaria, calcular el número de maestros; c) Construir el gráfico circular de los porcentajes de alumnos de cada nivel para 1968; d) Calcular el porcentaje de alumnos de primaria que pasan a la enseñanza media y el número de estos que pasan a la universidad.

4. Supongamos un campeonato entre varios equipos de fútbol. Anotar los resultados de los distintos partidos y los goles de cada equipo. Ordenar los equipos por: a) partidos ganados; b) goles a favor; c) menos goles en contra; d) partidos empatados. Deducir consecuencias.

2. Ejemplos de ejercicios para graficar.

1. Anotar las calificaciones de todos los alumnos de una clase. Si éstas van de 0 a 10, graficar los números de alumnos cuya calificación está entre 0 y 2, entre 4 y 2, ..., entre 10 y 8 (gráfico de barras). Hacer también los gráficos acumulativos (números de alumnos cuya calificación es "igual o menor que" y número de alumnos cuya calificación es "igual o mayor que").

2. Distancias de la casa a la escuela. Se pide a cada alumno la distancia de su casa a la escuela, la cual, si es preciso, se calcula con la ayuda de un plano de la ciudad. Con estas distancias: a) buscar la distancia promedio; b) indicar la máxima y la mínima; c) graficar los números de alumnos que viven a una distancia "mayor que" o a una distancia "menor que" otra dada; d) sabiendo el tiempo que cada alumno tarda en ir de su casa a la escuela, calcular la velocidad media y detectar los alumnos que van más rápido, o más despacio que el promedio.

3. Construir la tabla del número de hermanos de cada alumno. Hacer gráficos análogos a los del problema anterior. Ver el número de hermanos "más probable" y la distribución de las desviaciones de este promedio. Probablemente salga una curva parecida a la normal.

4. Un vendedor de refrescos vende vasos de jugo de naranja. Durante los días de una semana vendió las siguientes cantidades: lunes 60, martes 84, miércoles 96, jueves 72, viernes 90, sábado 108, domingo 66. Graficar en barras. Buscar los porcentajes de venta de cada día respecto del total

de la semana. Discutir a qué puede ser debido que el sábado vendió tanto; se pueden hacer hipótesis y luego verificarlas por las ventas de otras semanas.

5. Un frutero vende fruta a los alumnos de una escuela. He aquí la tabla de ventas durante una semana (en kgr.):

Día	Uvas	Manzanas	Peras	Naranjas
lunes	6	10	8	20
martes	8	16	14	8
miércoles	2	24	12	18
jueves	4	12	22	16
viernes	10	16	6	10

Con estos datos: a) preparar un pictograma utilizando los dibujos de la fruta respectiva; b) mediante el pictograma, deducir: la fruta más vendida durante la semana y los porcentajes de frutas vendidas de cada clase; c) valor medio de las cantidades vendidas de cada fruta durante la semana; d) frutas más y menos vendidas.

6. Temperaturas diarias máximas y mínimas durante un mes. Con un termómetro de máxima y mínima (o bien, tomado de los datos meteorológicos de los diarios) se anotan las temperaturas máxima y mínima de cada día durante un mes. Con ello: a) graficar estas temperaturas; b) graficar las diferencias entre la máxima y la mínima; c) comparar estas gráficas con las de otros meses o con las del mismo mes de años anteriores; d) gráficos acumulativos indicando los números de días en que la temperatura máxima ha sido "mayor que" y la mínima ha sido "menor que".

7. Asistencia o inasistencia de alumnos. Anotar durante un mes el número de alumnos presentes cada día. Deducir: a) los días de máxima y mínima asistencia y averiguar la causa, tal vez comparando con otros gráficos o datos (lluvia, buen tiempo, frío); b) valor medio del número de alumnos asistentes.

3. Algunos estadígrafos y organización de los datos. En muchos casos conviene enseñar la manera práctica de organizar los datos y deducir de ellos los estadígrafos que puedan interesar. Vamos a exponer con detalle un solo caso, como modelo de la manera de proceder.

Las medidas de la estatura de los alumnos de una clase, en centímetros, son: 145, 148, 151, 152, 154, 156, 158, 159, 160, 162, 164, 165, 167, 169. Determinar la media, la moda y la mediana de la distribución.

Procederemos a organizar los datos en una tabla, observando que la amplitud de la distribución se obtendrá restando el valor mínimo presentado del valor máximo, o sea, $169 - 145 = 24$. A continuación se determinará el número de intervalos y la amplitud de cada uno de ellos. Si acordamos que la amplitud del intervalo de clase es 5, obtendremos 5 intervalos ($24:5$ aproximadamente 5).

Construimos luego una tabla de valores con las siguientes columnas: estatura, punto medio, frecuencia, frecuencia acumulada, producto de frecuencia y punto medio. Las filas de la tabla serán los intervalos de clase correspondientes: (145-149)-(150-154), (155-159), (160-164), (165-169).

Estaturas	Punto medio del intervalo	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Producto de frecuencia y punto medio
145-149	147,5	2	2	295,0
150-154	152,5	3	5	457,5
155-159	157,5	4	9	630,0
160-164	162,5	3	12	487,5
165-169	167,5	3	15	502,5
Total		15		2372,5

La media se determinará dividiendo el total del producto de frecuencia y punto medio entre el total de alumnos, que corresponde al total de frecuencia: $2372,5:15=158,1$.

La moda corresponderá al valor de mayor frecuencia en la distribución (157,5). La mediana es el valor correspondiente al caso que ocupa el punto medio de la distribución, es decir, el octavo caso, Evidentemente la mediana se encontrará en el intervalo (155-159) cuyo valor de frecuencia acumulada (9) es el más próximo al octavo caso.

Observaciones:

Intervalo. El límite superior de cada intervalo, por ejemplo (145-149) que corresponde a 149, incluye a los alumnos con estatura hasta 149,9, es decir, todas las estaturas menores que 150.

Punto medio del intervalo. Se obtiene como semisuma de los límites de cada intervalo de clase, considerando el límite superior según la consideración anterior, Ejemplo: para el intervalo de clase (145-149) el punto medio es $147,5 = (145 + 150)/2$.

Frecuencia. Representa el número de veces que aparece un determinado valor en la distribución.

Frecuencia acumulada. Representa el número total de casos desde el primer intervalo, hasta el intervalo correspondiente. Se obtiene utilizando sucesivamente las frecuencias de cada intervalo.

Producto de frecuencia y punto medio. Representa la suma de las alturas de los alumnos que componen cada intervalo.

Total. El total de frecuencia indica el número de casos de la distribución y debe coincidir con la frecuencia acumulada del último intervalo.

Para un análisis más completo hay que calcular también la varianza y la desviación estandar.

La distribución de las alturas de los alumnos de una clase es un caso típico en que casi siempre resulta una distribución muy próxima a la normal. vale decir, que si se grafican las frecuencias en función de las alturas, la curva resultante tiene la forma de campana típica de la ley normal.

Una manera de constatar este hecho, sin necesidad de cálculos, es la siguiente. Considerar el total de alumnos de la clase y pedir que 5 alumnos de estaturas diferentes, representativos de los alumnos bajos, medianamente bajos, medianos, medianamente altos y altos se ubiquen en este orden en una fila. Cumplido este trámite, pedir que el resto de los alumnos del cur-

so se ubiquen detrás de aquel alumno cuya estatura es más próxima a la suya de los 5 antes elegidos. Podrá observarse que como resultado de esta distribución, las estaturas de los alumnos se distribuyen aproximadamente según la curva "normal". Es decir, de las 5 filas que se forman, las longitudes dibujan la forma de campana de dicha curva.

Otra manera de ejemplificar la ley normal consiste en recoger al azar en el patio unas 50 hojas de un determinado árbol (o de árboles de la misma especie). Se toman 5 hojas de diferentes tamaños y las restantes se van colocando sobre la que tiene el tamaño más próximo al suyo. Se formarán 5 montones y los números de hojas de cada uno presentan visiblemente la distribución normal.

4. La distribución normal. Después de haber constatado que en muchos ejemplos la curva de frecuencia toma la forma de campana, con un máximo en el valor medio, conviene estudiar con más exactitud la distribución normal.

En los últimos años de la enseñanza media, el alumno debe aprender a manejar esta distribución, con sus tablas y características fundamentales. Es una herramienta, dentro del campo de las aplicaciones de la matemática, conceptualmente importante y prácticamente indispensable en muchos campos. Vamos a dar un ejemplo de aplicación que puede usarse en una gran variedad de situaciones análogas. El ejemplo está tomado del curso de Probabilidades y Estadística para el 6° año del Bachillerato, preparado en el Instituto de Ciencias de la Universidad Nacional de Asunción (Paraguay) por J. G. Miller y A. A. de Silvero, 1974.

Un campesino cosecha sandías para vender en el mercado. El precio depende del peso y como tiene varios miles de sandías y no las puede pesar una por una, eligió 64 de tamaños variables, para que constituyeran una "muestra" de la cosecha, y obtuvo los siguientes pesos y frecuencias: 1 kgr. - 1 sandía, 2 kgr. - 6 sandías, 3 kgr. - 15 sandías, 4 kgr. - 20 sandías, 5 kgr. - 15 sandías, 6 kgr. - 6 sandías, 7 kgr. - 1 sandía. Aquí, al decir, por ejemplo, 3 kgr., se entiende "entre 2,5 kgr. y 3,5 kgr."

Con estos datos se trata de saber como se distribuyen los pesos de las sandías en la cosecha del campesino.

Consultados un matemático y un botánico, ambos coincidieron en que po-

día suponerse que la distribución de los pesos seguía la ley normal y que por tanto, bastaba saber el valor medio y la desviación estandar, para saber todos los detalles de esta distribución. Por otra parte, se puede su-
poner que el valor medio y la desviación estandar de toda la cosecha coin-
ciden con los mismos valores de la muestra, Sentado esto se calcula:

1. El valor medio de los pesos de la muestra es $M = 256/64 = 4$ kgr.
2. La desviación estandar se calcula así:

$$\text{varianza} = \sum (x_i - M)^2 / 64 = 96/64 = 1,5, \quad s = \sqrt{1,5} = 1,2$$

representado por s a la desviación estandar.

3. Se sabe, o se deduce de la tabla de frecuencia de la ley normal, que entre $M + s = 5,2$ y $M - s = 2,8$ está el 68% de la población, en este caso, las sandías. Si el campesino tenía, por ejemplo, 8000 sandías, pue-
de calcular que el 68% de ellas, o sea, 5440 tienen su peso entre 2,8 y 5,2 kgr.

4. Se sabe también que entre $M + 2s$ y $M - 2s$ está el 96% de la pobla-
ción, es decir, en el caso actual, el 96% de las sandías tendrán su peso
entre 1,6 y 6,4 kgr. Las sandías, cuyo peso cae fuera de estos límites,
constituyen sólo el 4% de la cosecha.

Con estos datos y los que se pueden deducir de una tabla de la distri-
bución normal, se pueden hacer distintos planes de venta y ver cuál es el
más conveniente para el campesino. Por ejemplo: a) vender todas las sandías
a \$ 20 por kgr.; b) como las sandías medianas son las más solicitadas, se
puede decidir que aquellas cuyo peso esté entre 2,8 y 5,2 kgr. (el 68%) se
cobrarán \$ 10 más que el correspondiente según su peso, y las que pesan fue-
ra de este intervalo, se cobrarán \$ 10 menos de lo que correspondería según
su peso.

Disponiendo de una tabla, es fácil calcular el número de sandías de ca-
da peso y por tanto calcular el producto de la venta en cada plan. Se tie-
ne así un ejemplo de la utilidad de la estadística para problemas prácticos
y frecuentes en la vida diaria.

5. Gráficos en árbol. Los primeros problemas de probabilidad, con un

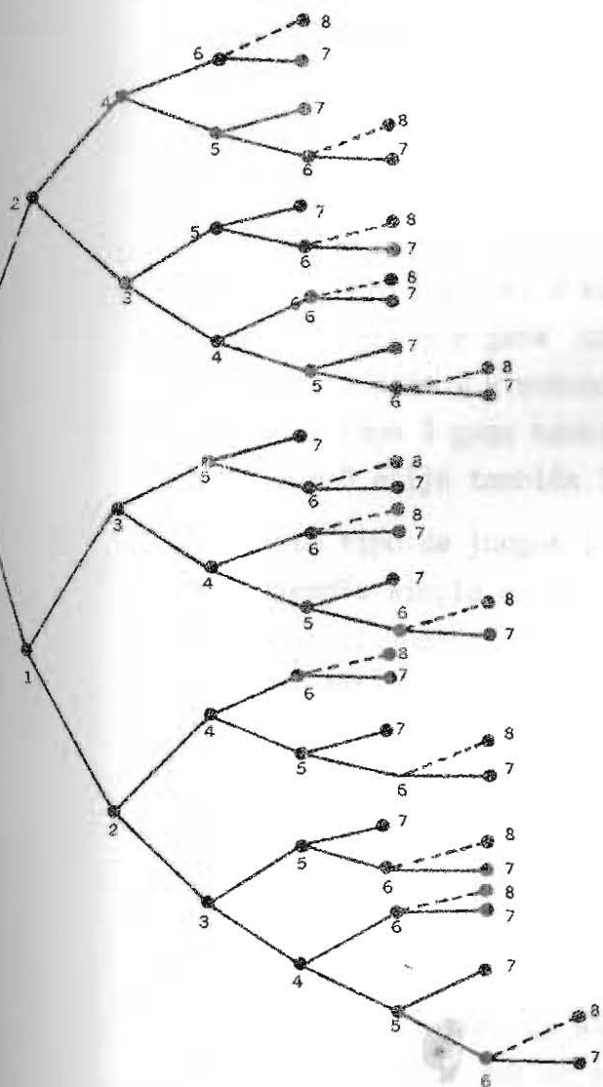
Al principio, sin embargo, más que la combinatoria que supone cierto entrenamiento en el manejo de fórmulas, es recomendable el uso de "gráficos en árbol" para graficar y luego contar los casos posibles y favorables. Vamos a exponer un ejemplo típico.

Naturalmente que lo esencial en el enunciado es que se trata de un proceso con dos alternativas de probabilidad $1/2$ cada una; en vez de una moneda, podría tratarse de un bolillero con dos bolillas iguales, una marcada con 1 y la otra con 2, que fueran sacándose sucesivamente, reponiendo cada vez la bolilla sacada.

Las sumas obtenidas en las primeras 7 jugadas se representan en este árbol.

De este árbol se deducen varias cosas, por ejemplo:

a) ¿De cuántas maneras puede obtenerse la suma 7 en 1, 2, ..., 7 jugadas?



Según el gráfico es: 0 en 1, 2 ó 3 jugadas; 4 en 4 jugadas; 10 en 5 jugadas; 6 en 6 jugadas y 1 en 7 jugadas.

De aquí, puesto que el número total de posibilidades en i jugadas es 2^i resulta que las probabilidades p_i de llegar a 7 en "exactamente" i jugadas, son:

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0, \quad p_4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25, \quad p_5 = \frac{10}{32} = 0,31...$$

$$p_6 = \frac{6}{64} = 0,093.., \quad p_7 = \frac{1}{128} = 0,007..$$

b) A y B juegan de la siguiente manera. Uno empieza, sea A, y elige un número entre 1 y 2. El otro jugador B puede añadirle 1 ó 2 al número elegido por A y así sucesivamente. El jugador que llega primero a 7 gana. ¿Cuál es la estrategia a seguir?

Mirando al gráfico se observa que si A elige 1 y sabe jugar, B está perdido, puesto que si B elige 2, entonces A elige otra vez 1, con lo cual llega a 4 puntos y gana cualquiera que sea la elección de B. Si B elige 1, se tiene la suma 2 y entonces si A elige 2, se tiene la suma 4 y tanto si B elige 1 como 2 gana también A. En cambio, si el primer jugador elige 2, basta que B elija también 2 para sumar 4 y A está perdido.

Este tipo de juegos interesan al alumno y agilizan el razonamiento. Otro ejemplo simple es el siguiente: hay 2 pilas de objetos con 2 objetos cada una; el jugador A empieza sacando 1 ó 2 objetos de la misma pila; a continuación el jugador B hace lo mismo. El jugador que saca el último objeto pierde. Se puede hacer el gráfico en árbol de las distintas posibilidades y se observa que, si juega bien, siempre gana el jugador que juega segundo, o sea, B.

Naturalmente que cambiando los números y las reglas, este tipo de juegos se puede complicar tanto como se desee.

6. Tabla de números al azar: aplicaciones. Conviene que los alumnos practiquen, aunque sea en ejemplos simples, el uso de las tablas de números aleatorios o números al azar. Es el fundamento del "método de Monte Carlo" muy usado en tecnología y en muchas ramas de la informática. Conviene que cada alumno se construya su propia tabla (de unos 500 dígitos), de mane

ra que, si hace falta, juntando las distintas tablas de todos los alumnos, se tendrá una cantidad ya considerable de números para ser utilizados en la clase.

Para construir una de estas tablas, se puede tomar una ruleta con 10 divisiones (de 0 a 9) y hacerla girar sucesivamente al azar. O bien, tomar un bolillero con 10 bolillas enumeradas de 0 a 9. Otros métodos elementales se indican en el libro de Glaymann-Varga, "Les probabilités à l'école", CEDIC, 1973. De este libro tomamos la tabla de 400 dígitos que figura en la página siguiente.

Vamos a dar algunos ejemplos de aplicación de la tabla de números aleatorios. Naturalmente que la confianza en los resultados depende de la cantidad de números tomada; en general hay que tomar muchos más de los que aquí vamos a tomar (lo que se suele hacer con una computadora), pero nuestro objeto es dar únicamente una idea del método.

1. Consideremos el mismo problema del ejemplo del n° anterior, consistente en sumar números 1 ó 2 según salga cara o cruz una moneda lanzada al azar, hasta llegar a la suma 7.

0 6 5 5	8 4 5 3	4 4 6 7	3 3 8 4	5 3 2 0
5 2 5 5	5 1 6 1	4 8 8 9	7 4 2 9	4 6 4 7
6 3 1 4	8 9 5 1	2 3 3 5	0 1 7 4	6 9 9 3
3 1 5 7	9 7 6 4	4 8 6 2	5 8 4 8	6 9 1 9
9 0 5 2	9 5 6 5	4 6 3 5	0 6 5 3	2 2 5 4
4 1 0 5	4 1 0 5	3 1 8 7	4 3 1 2	1 5 9 6
1 4 3 7	2 8 5 1	6 7 2 7	5 5 8 0	0 3 6 8
4 0 6 4	4 1 7 1	7 0 1 3	4 6 3 1	8 2 8 8
1 0 3 7	5 7 6 5	1 5 6 2	9 8 6 9	0 7 5 6
5 7 1 8	8 7 9 1	0 7 5 4	2 2 2 2	2 0 1 3
5 1 2 7	2 3 0 2	1 3 9 2	4 4 1 3	9 6 5 1
9 4 0 1	2 4 2 3	6 3 0 1	2 6 1 1	0 6 5 0
4 0 6 4	5 2 2 8	4 1 5 3	2 5 4 4	4 1 2 5
5 4 5 8	1 4 0 2	9 8 4 9	9 8 8 6	5 5 7 9
2 4 6 1	3 4 9 7	9 7 8 5	5 6 7 8	4 4 7 1
4 3 2 0	4 5 5 8	2 5 4 5	4 4 3 6	9 2 6 5
3 4 6 6	8 2 6 9	9 9 2 6	7 4 2 9	7 5 1 6
9 3 1 3	7 4 8 9	2 4 6 4	2 5 7 5	9 2 8 4
5 1 7 9	8 0 8 1	3 3 6 1	0 1 0 9	7 7 3 0
3 0 1 0	5 0 8 1	3 3 0 0	9 9 7 9	1 9 7 0

Para simular la situación, suponemos que un dígito par de la tabla (el 0 incluido) vale 1 y que un dígito impar vale 2. Vamos a tomar los números de la tabla por filas y contamos el número de ellos que hace falta para llegar exactamente a 7; si pasamos de 7 indicamos con una estrella. Por ejemplo, los primeros números de la tabla (0,6,5,5,8) dan $1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 7$ y por tanto anotamos 5 (número de jugadas para llegar a 7); siguen después (4,5,3,4,4) que dan $1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$ y anotamos otra vez 5 jugadas; siguen después (6,7,3,3) que dan $1 + 2 + 2 + 2 = 7$ y anotamos 4 jugadas. Así sucesivamente e indicando con una estrella las veces que no se llega "exactamente" a 7, se obtiene la sucesión:

5 - 5 - 4 - 5 - * - 4 - 5 - 6 - 4 - * - 4 - 5 - * - * - 6
 6 - 5 - * - 5 - * - * - 5 - 4 - 4 - 4 - * - 5 - 4 - 4 - 6
 * - 5 - 5 - * - 4 - * - 4 - 4 - * - 4 - 6 - 4 - * - * - 5
 4 - 5 - 5 - 5 - 4 - 6 - 5 - 5 - * - 5 - * - 5 - 4 - 5 - *
 * - 5 - * - 5 - 5 - * - * - * - * - 4 - 4 - 6 - * - 5 - 4

De este resultado se deduce que de los 75 casos considerados hay 20 cuatros, 24 cincos, 7 seis y 24 estrellas. Por lo tanto las probabilidades p_i de que se necesiten i jugadas resultan, respectivamente.

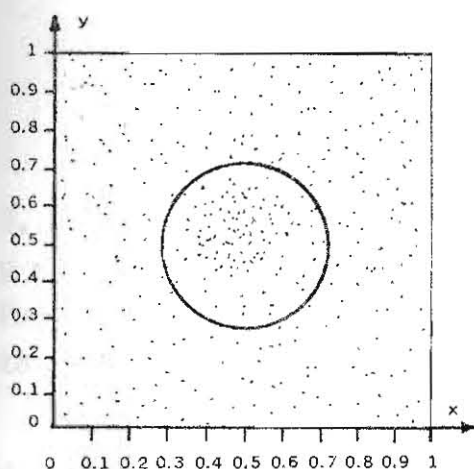
$$p_4 = \frac{20}{75} = 0,26.. \quad , \quad p_5 = \frac{24}{75} = 0,32.. \quad , \quad p_6 = \frac{7}{75} = 0,09..$$

Los resultados son muy coincidentes con los verdaderos antes obtenidos. En realidad hay "demasiada" coincidencia: en general, dada la cantidad de números tomados, no era de esperar tanta aproximación. Convendría, en la clase, seguir con más números, para ver si los resultados se estabilizan.

2. La tabla de números aleatorios puede servir para tomar números al azar en el plano. Por ejemplo, tomando cuaternas de números sucesivos (0,6, 5,5), (8,4,5,3), (4,4,6,7),... ellos pueden definir los puntos de coordenadas (0,06; 0,55), (0,84; 0,53), (0,44; 0,67) dentro del cuadrado de lados $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

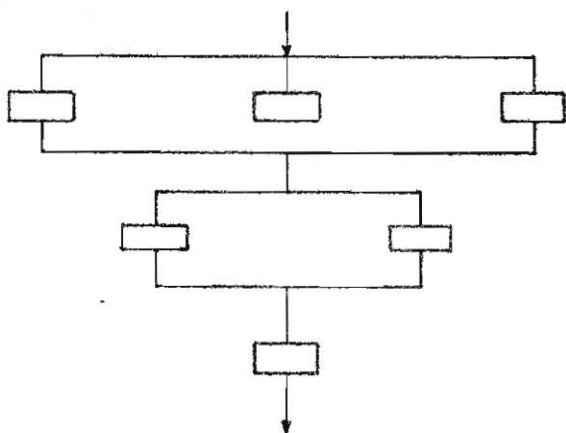
Si dentro de este cuadrado de lado unidad se tiene una figura de área F , la probabilidad de que un punto dado al azar dentro del cuadrado, caiga dentro de la figura, es igual a F (cociente del área de la figura por el área del cuadrado). Por tanto, si se toman muchos puntos al azar y se divide el número de los que han caído dentro de la figura por el número total, se tendrá un valor aproximado de F , aproximación que crecerá con el número de puntos tomados.

En la figura, los puntos son puntos al azar tomados según la tabla anterior (prolongada hasta 1200 dígitos, como se encuentra en el libro mencionado de Glaymann-Varga). Son en total 300 puntos. Dado el círculo de radio $1/4$ que está en la figura, el número de puntos que han caído en su interior es 66. Por tanto el área del círculo, por este método, resulta igual a $66/300 = 0,22...$ La verdadera área es $3,14/16 = 0,19..$ La aproximación no



es muy grande, pero es aceptable. Naturalmente que el método es útil para figuras de forma irregular, cuya área no puede calcularse por una simple fórmula como en el caso considerado, que se ha tomado para poder comparar el grado de aproximación obtenido por el método.

3. Consideremos el circuito de la figura adjunta. Los interruptores pueden estar abiertos o cerrados con probabilidad $1/2$. Para que pase corriente,



lo menos un interruptor de cada fila horizontal. El número de casos en que esto ocurre es $(2^3 - 1)(2^2 - 1) = 21$ y el número de casos posibles es $2^6 = 64$. Por tanto, la probabilidad de que pase corriente es $p = 21/64 = 0,33$.

¿Cómo simular esta situación y resolver el problema con una tabla de números aleatorios? Podemos agrupar

los números de la tabla en grupos de 6 dígitos, correspondiendo cada número a un interruptor del circuito. Interpretamos los números pares (incluidos el 0) como indicadores de que no pasa corriente (interruptor abierto) y los impares de que sí pasa corriente (interruptor cerrado). Para que pase corriente por el circuito, entre los tres primeros números del grupo debe haber por lo menos uno que sea impar, entre los dos siguientes debe haber por lo menos uno que también sea impar y el sexto debe ser impar. Analizando según este criterio los 66 grupos de 6 números que se pueden formar con los 400 dígitos de la tabla anterior, se encuentra que indicando con N que no pasa corriente y por S que sí pasa corriente por el circuito, la sucesión resultante es:

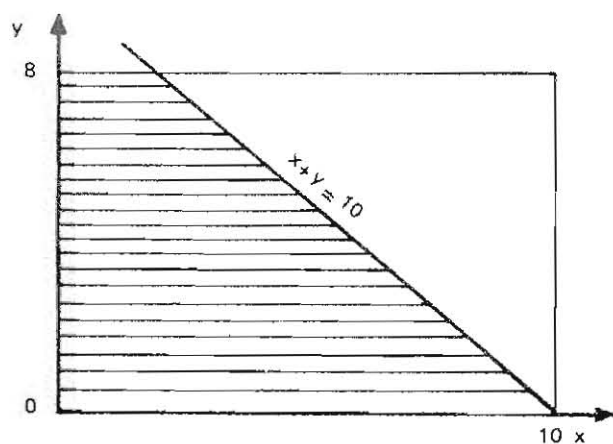
S, S, S, N, N, N, N, N, N, N, N, N, N, N, S, N, S, N, S, N, N, N, S, N, N, N, S, S, N, S, S,
N, S, S, N, N, S, N, N, N, N, N, S, N, N, N, N, N, N, S, S, N, N, N, S, S, S, S, N, N, N, N, S

Es decir, se tienen 66 casos de los cuales 22 corresponden a la letra S. La probabilidad buscada, medida por este método experimental resulta $p = 22/66 = 0,33$. La aproximación con el resultado teórico es muy notable. Parecería que nos hemos detenido en una posición favorable; para ver si éste ha sido el caso, convendría seguir con la tabla de números al azar.

Insistimos en que en estos casos en que se puede calcular la probabilidad teóricamente de manera simple, el método de Monte Carlo no tiene interés práctico, pero hemos puesto ejemplos simples para hacer comprender el método. En casos en que el cálculo exacto es difícil o imposible, el método es de mucho valor.

7. Dos ejemplos de probabilidades continuas. Cuando los casos posibles y favorables se pueden representar por los puntos de un intervalo o de una figura del plano o del espacio, se trata de un problema de probabilidades continuas y la probabilidad se define entonces (suponiendo los casos igualmente probables) como el cociente de las medidas (longitudes, áreas o volúmenes). Vamos a dar un ejemplo.

1. Para ir a la escuela tengo que tomar dos ómnibus. La espera máxima para el primero es de 10 minutos y para el segundo de 8 minutos. Sabiendo que el tiempo de viaje efectivo es de 20 minutos, ¿qué probabilidad tengo de llegar a la hora si salgo de casa 30 minutos antes?



Solución. Llamando x al tiempo de espera para el primer ómnibus e y al tiempo de espera del segundo, tenemos las condiciones $x \leq 10$, $y \leq 8$. Los casos posibles son, por tanto, todos los puntos del área del rectángulo de lados 10, 8, o sea 80. Los casos favorables corresponden a los puntos para los cuales es $x + y \leq 10$, los cuales son los que constituyen el área

rayada en la figura. Por tanto la probabilidad buscada es:

$$p = (2 \cdot 8 + 8 \cdot 8/2) / 80 = 48/80 = 0,6.$$

2. Supongamos el plano rayado con líneas paralelas a distancia a . Si sobre el mismo se arroja al azar un segmento (aguja, palillo) de longitud $s \leq a$, la probabilidad de que corte a alguna paralela es:

$$P = \frac{2s}{\pi a}$$

La condición $s < a$ se impone para que el segmento no pueda cortar a más de una paralela. Si es $s > a$, entonces la fórmula anterior da el "valor medio" del número de puntos de intersección del segmento con las paralelas.

La fórmula anterior no se puede demostrar a nivel secundario. Sin embargo, se puede dar sin demostración y comprobarla experimentalmente. El haz de rectas paralelas se puede dibujar en el suelo o sobre una mesa. En vez de arrojar sucesivamente un segmento y dividir el número de veces que corta por el número total de veces, se puede también arrojar de una sola vez un manojo de segmentos (palillos o agujas) y dividir el número de los que cortan a alguna paralela por el número total. Se puede también arrojar un segmento de longitud cualquiera, mayor que a ; entonces al dividir la suma de los puntos de intersección por el número de veces que se ha arrojado se tiene el mismo valor de la fórmula dada, que ya no es la probabilidad sino el valor medio.

Si en la fórmula dada se despeja $\pi = 2s/PA$, y se calcula p por el método experimental anterior, se tiene una manera de calcular al azar el número π . Este problema se conoce con el nombre de "problema de la aguja" de Buffon.

Hay otras muchas maneras de calcular π como resultado de la probabilidad de un hecho al azar. Otra manera es la siguiente: consideremos en el plano marcado todos los puntos de coordenadas enteras, o sea, los vértices de la división del plano en cuadrados de lado unidad. Recortemos un círculo de radio unidad y arrojémoslo al azar sobre el plano un número grande de veces. Anotemos cada vez el número de vértices del cuadrículado que quedan cubiertos por el círculo. Sumando estos números y dividiendo por el número total de veces que se ha arrojado el disco, se tendrá el "valor medio" del número de puntos cubiertos. Se puede demostrar que este

valor medio es igual a $\bar{\mu}$, de manera que al proceder experimentalmente, también deberán obtenerse valores aproximados de este número.

8. Crecimiento de poblaciones. El estudio y cálculo de "valores medios" se suele hacer en estadística, si bien puede hacerse, y a veces conviene hacerlo, en otros varios capítulos de la matemática.

La fórmula clásica del interés compuesto puede interpretarse también como la fórmula del "crecimiento" de una población (ciudad, país), bajo la hipótesis de que la tasa de crecimiento es proporcional a la población misma, es decir, que el número total de nacimientos es mayor cuanto mayor es la población total. Entonces, si r es la tasa de crecimiento anual y N_n la población al cabo de n años (N_0 es la población inicial), se tiene:

$$N_n = N_0 (1 + r)^n$$

Para $n/2$ años, la fórmula se escribe:

$$N_{n/2} = N_0 (1 + r)^{n/2}$$

y de ambas fórmulas resulta:

$$N_{n/2} = (N_n N_0)^{1/2}$$

es decir, la población a la mitad de un período es igual a la media geométrica de población en los extremos, independientemente de la tasa de crecimiento.

Por ejemplo, si en una ciudad en 1960 tenía 10^5 habitantes y en 1970 tenía $1,6 \cdot 10^5$, se calcula que en 1965 debía tener $10^5 (1,6)^{1/2} = 1,24 \cdot 10^5$ habitantes. Otro ejemplo: una población de 60.000 habitantes hace 5 años que tenía 40.000 ¿cuántos se estima que tendrá dentro de 5 años? Se tiene la ecuación $60.000 = (40.000 \cdot x)^{1/2}$, de donde $x = 90.000$.

En general, la hipótesis hecha de que las poblaciones crecen como la fórmula del capital en el interés compuesto, se ajusta bastante a la realidad, siempre que no haya motivos de excepción que perturben esta ley de crecimiento.

Cuando se estudian límites y aparece el número e , hay que vincular

el resultado con el "interés continuo" (interés compuesto en que la capitalización se hace instantáneamente). La fórmula resulta entonces:

$$N_t = N_0 e^{rt}$$

y vale también para cualquier fenómeno de crecimiento en el que se suponga que la tasa de crecimiento total (límite de N/t , para t tendiendo a cero) es proporcional a N . Si r es negativo, se escribe:

$$N_t = N_0 e^{-rt}$$

y es la fórmula del "decrecimiento" de poblaciones. Esta fórmula aparece en muchas situaciones. Si se pregunta en cuanto tiempo N_0 se habrá reducido a la mitad, poniendo $N = N_0/2$, resulta $t = (1/r) \log. 2$. Este valor se llama la "vida media" de la población y es curioso observar que no depende de N_0 .

9. Miscelánea. Vamos a dar algunos ejemplos de ejercicios variados, como modelos de situaciones frecuentes. Cada profesor debería ir coleccionando ejercicios análogos, adaptados al medio ambiente de la clase.

1. Correlación. Estudio comparativo de las calificaciones de los alumnos en diferentes disciplinas. Se anotan las calificaciones de los alumnos de la clase en matemáticas y en otra materia (por ejemplo física o música) y se representan en el plano tomando estos pares de números como las coordenadas cartesianas de los puntos. Hay que ver luego si estos puntos están o no, más o menos en línea recta. Se puede calcular el coeficiente de correlación y dibujar la recta de regresión. Haciendo lo mismo con otros pares de materias, se puede comparar el mayor o menor grado de correlación entre ellas.

Conviene dar ejemplos en que no existe la correlación: nota en matemáticas y distancia a que el alumno vive de la escuela, peso del alumno y día del mes en que nació, ... Es conveniente llevar al aula estadísticas del país o de la ciudad en que se vive (cantidades fabricadas de ciertos productos, resultado de cosechas, temperaturas, índices de enfermedades,...) y analizar posibles correlaciones entre ellas. En general los cálculos son engorrosos, pero se hace fácilmente con una computadora, aunque sea de bolsillo.

2. Probabilidad compuesta. Para obtener un cierto cargo o para ser seleccionado para formar parte de un equipo, se presentan 12 candidatos, de los cuales hay que elegir primero una terna y después, dentro de esta terna, se elegirá el candidato. Suponiendo que todos los candidatos tienen los mismo méritos ¿cuál es la probabilidad de ser elegido?

Para ser puesto en la primera terna, la probabilidad es $3/12 = 1/4$ y para la segunda elección la probabilidad es $1/3$. Por tanto la probabilidad pedida es $1/12$. Obsérvese que se podría haber razonado así: puesto que los 12 candidatos son igualmente probables, la probabilidad de ser elegido es $1/12$, independientemente de las eliminaciones parciales, cualesquiera que estas sean.

3. Independencia. Al recolectar datos para muestras de las cuales se quieran deducir resultados probabilísticos, hay que cuidar mucho la "independencia", así como el tamaño, o número de los mismos.

En el capítulo destinado a Probabilidad y Estadística del libro "Nuevas tendencias en la Enseñanza de la Matemática, vol. III" (UNESCO, 1973), se cita un ejemplo curioso de Engel, según el cual para los alumnos de dos clases de 5º grado en una escuela de Stuttgart, resultó que el conjunto de mujeres de sus familias (hermanas) era tan sólo la mitad del conjunto de varones (hermanos). Como se sabe que en la población total, en todos los países, los números de varones y mujeres son prácticamente iguales, se tiene un ejemplo de que las muestras, por ser demasiado pequeñas o por tener algún "sesgo" subyacente, pueden conducir a resultados erróneos. La estadística de métodos para deducir, en cada caso, el grado de confiabilidad del resultado.

Respecto de la independencia, se puede observar que 3 variables aleatorias x, y, z pueden ser independientes entre sí dos a dos, y no ser independientes en su conjunto. He aquí el siguiente ejemplo de Freudenthal (Probability and Statistics, Elsevier, Amsterdam, 1965):

Una lámpara está controlada por dos interruptores A, B. Cuando los dos están abiertos o los dos cerrados, la lámpara está apagada y si uno está abierto y el otro cerrado, la lámpara está prendida. Se sabe que A y B se usan con la misma frecuencia y que la lámpara está prendida la mi-

tañ del día. Sea x la variable aleatoria del interruptor A, tal que $x = 0$ si A está abierto y $x = 1$ si está cerrado. Análogamente, sea y la variable aleatoria que con los mismos valores se refiere a B y sea z la que se refiere a la lámpara ($z = 0$ si está apagada y $z = 1$ si está prendida).

Se tienen las siguientes probabilidades

$$p(z = 0 | x = 0) = p(z = 0 | x = 1) = p(z = 1 | x = 0) = p(z = 1 | x = 1) = 1/2$$

$$p(z = 0 | y = 0) = p(z = 0 | y = 1) = p(z = 1 | y = 0) = p(z = 1 | y = 1) = 1/2$$

lo que prueba que los pares (x,z) , (y,z) son independientes, así como, por hipótesis el par (x,y) .

En cambio es

$$p(z = 0 | x = y) = 1, \quad p(z = 0 | x \neq y) = 0$$

lo que prueba que x,y,z en su conjunto no son independientes.

4. Distribución de las letras en el idioma castellano, La frecuencia de las letras en el idioma castellano, es una fuente de ejercicios de estadística y probabilidad interesante porque se tiene siempre el material a mano y permite vinculaciones con la lingüística. Contando el número de veces que aparece una determinada letra en una página de un libro y dividiendo por el número total de letras, se tiene la "frecuencia" correspondiente a dicha letra. Se puede proponer a los alumnos que lo hagan con distintas letras y en distintas páginas. Ver si, para una misma letra, los resultados son bastantes coincidentes y, para distintas letras, ordenarlas por su frecuencia de aparición.

Puede ser útil, para comparar, la siguiente tabla de frecuencia (los números indican el tanto por ciento) calculada por A. García del Busto (Acta Mexicana de Ciencia y Tecnología, vol. IV. 1970, págs. 94-133):

a 9,87	h 0,59	ñ 0,13	u 3,47
b 0,97	i 5,94	o 7,69	v 0,80
c 3,89	j 0,29	p 2,20	w 0,00
d 4,12	k 0,01	q 0,82	x 0,18
e 11,24	l 4,51	r 5,40	y 0,71
f 0,61	m 2,40	s 6,45	z 0,30
g 0,85	n 5,92	t 3,83	espacio 16,69

El último dato "espacio" significa el espacio entre palabras.

Obsérvese que en este cálculo la letra "ll" ha sido considerada como dos veces el símbolo "l".

Con estos datos se puede pedir: ¿Cuál es el número de veces que una determinada letra aparecerá, en promedio, en una página? Hay que estimar el número de letras de cada página (contando el espacio entre palabras como un símbolo) y tener en cuenta el porcentaje anterior.

En este tipo de análisis del idioma se puede pedir también calcular el número de letras promedio de las palabras. En el artículo citado, García del Busto da también las frecuencias de los diagramas (pares de letras) y los trigramas (ternas de letras) más frecuentes, así como la frecuencia de cada letra cuando se conoce la anterior o las dos anteriores.

BIBLIOGRAFIA

- ANDERSON, R.D. Matemáticas para el primer ciclo secundario, Vol. I-II. Grupo de Estudio de la Matemática Escolar (MSG). Stanford University Press. Palo Alto, California, U.S.A., 1962.
- ARBOGAST, G. et al. Recopilación, organización e interpretación de datos. Trillas, México, 1970 (traducción del Booklet n° 16, The National Council of Teachers of Mathematics, publicada con la ayuda del Centro Regional de Ayuda Técnica (RTAC) de la Agencia para el Desarrollo Internacional (AID)
- BRADLEY, J.I; McCLELLAND, J.N. Conceptos básicos de estadística. Manual Moderno, México, 1972 (traducción de Basic Statistical Concepts --- A Self-Instructional Text, publicado con la ayuda del Centro Regional de Ayuda Técnica (RTAC) de la Agencia para el Desarrollo Internacional (AID).
- CRÁMER, H. Elementos de la teoría de probabilidades y aplicaciones. Aguilar, Madrid, 1963.
- FELLER, W. An introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. I. John Wiley & Sons, Nueva York, 1950.
- FERNANDEZ, P. Probabilidades. Publicaciones del Instituto de Matemáticas Puras y Aplicadas de Río de Janeiro. Río de Janeiro, Brasil, 1973.
- FREEMAN, H. Introduction to Statistical Inference. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963.
- GLAYMANN, M.; VARGA, T. Les probabilités à l'école. CEDIC, Lyon, Francia, 1973.
- KREYSZIG, E. Introducción a la estadística matemática. Editorial Limusa-Wiley, México, 1973.
- SANTALO, L.A. Probabilidad e inferencia estadística. Monografías de la OEA, n° 11, Washington, D.C., U.S.A., 1970
- SHERLOCK, A.J. Estadísticas y probabilidades. Editorial Vicens Vives. Barcelona 1969.

- SPIECHEL, M. Estadística. McGraw-Hill Book Co., Panamá, 1969.
- UNESCO. Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática, Vol. III. 1973 (traducción castellana por la Oficina de Ciencias para América Latina, Montevideo).

INSTITUTO VENEZOLANO DE INVESTIGACIONES EDUCATIVAS
 Unidad de Investigación y Desarrollo dentro
 de la Organización de los Estados Americanos
 Impreso y distribuido por el Servicio Reprográfico de
 la Comisión Nacional de Investigación, Experimentación y
 Perfeccionamiento Educativo.
 (DIEPE)

Caracas, 1977

La diagramación de esta publicación fue realizada por el personal de Graficación y Diseño contratado por la Organización de los Estados Americanos, e impreso en el Servicio Reprográfico de la Dirección Nacional de Investigación, Experimentación y Perfeccionamiento Educativo.

(DIEPE)

Febrero 1977