Ministerio de Educación y Justicia
República Argentina

Organización
de los Estados Americanos

DIRECCION NACIONAL DE EDUCACION SUPERIOR

PROYECTO DE FORMACION DEL PERSONAL DE EDUCACION PARA LA RENOVACION, REAJUSTE Y PERFECCIONAMIENTO DEL SISTEMA Y DEL PROCESO EDUCATIVO

MATEMATICAS

Buenos Aires
República Argentina
1987

1

NOMINA DE AUTORIDADES

MINISTERIO DE EDUCACION Y JUSTICIA

Ministro de Educación y Justicia:

Dr. Julio Raúl Rajneri

Secretario de Educación:

Dr. Adolfo Stubrin

Subsecretario de Gestión Educativa:

Prof. Nilo Fulvi

Director Nacional de Educación Superior y del Proyecto:

Dr. Ovide J. Menin

Subdirectora Nacional de Educación Superior:

Prof. Sulma Guridi Flores

Coordinadora del Proyecto:

Prof. Emilce E. Botte

SECRETARIA GENERAL DE LA ORGANIZACION DE LOS ESTADOS AMERICANOS

Director a.i. del Departamento de Asuntos Educativos:

Dr. Oswaldo Kreimer

Jefe de la División de Mejoramiento de Sistema Educativos:

Prof. Luis Osvaldo Roggi

Representante de la Secretaría General de la O.E.A. en la Argentina:

Dr. Benno Sander

Coordinador del Area Educación, Ciencia y Cultura:

Sr. Guillermo Corsino

Ministerio de Educación y Justicia
República Argentina

Organización
de los Estados Americanos

APRENDIZAJE Y MATEMATICA

I

Prof. NORMA SANGUINETI de SAGGESE

1. ¿Para qué enseñamos matemática?

La sociedad actual tiende aceleradamente hacia una cultura tecnológica de base fuertemente matemática.

La escuela, como institución social asume el compromiso de contribuir a la formación de hombres capaces de proyectarse como protagonistas de los avances tecnológicos de su tiempo, sin que el desarrollo científico implique deshumanización

La Didáctica de la Matemática es una disciplina de desarrollo muy reciente. Ello se debe, entre otras causas, a que/ la enseñanza masiva de la matemática es un fenómeno nuevo, // particularmente en nuestro subcontinente. Entendida la Didáctica como el proceso dialéctico entre las teorías del aprendizaje y la enseñanza y la práctica pedagógica que enriquece y/ realimenta las teorías, sólo se puede hablar de Didáctica /// cuando se hace referencia a alumnos reales, puestos en situación de aprendizaje escolar bajo la acción de un agente educativo.

En los inicios de la Didáctica de la Matemática, como / en toda ciencia, los especialistas de las disciplinas próxi-/ mas tuvieron a su cargo abrir el debate: ellos tenían una visión de los objetivos de los que trataría la nueva ciencia. / Los matemáticos cumplieron esta función dando sus opiniones / sobre la mejor manera de enseñar Matemática. Pero la Didáctica de la Matemática es una ciencia social que recibe los aportes de la Pedagogía, la Psicología, la Epistemología, la Lingüística, la Sociología y por supuesto, de la Matemática misma.

Surge entonces la necesidad de profundizar en el conocimiento de los procesos de aprendizaje, tanto individual como/ social, y al propio tiempo rever la vinculación entre las teorías de enseñanza vigentes y los aportes de la investigación/ pedagógica en cuanto a evaluación de los aprendizajes.

"En este marco, la evaluación de los aprendizajes vista como una congruencia entre los objetivos propuestos y los resultados individuales, es sólo una parte de la información/ que permite evaluar un aspecto del quehacer educativo. La / complejidad de los logros de aprendizaje no se agota en la/ observación de conductas manifiestas, pues aprender es un / proceso interior que no siempre es fácilmente observable.
En lo que se refiere, en particular, a los aprendizajes matemáticos, compartimos la opinión de H. Winter (1975), que/ postuló cuatro condiciones para una educación matemática // significativa. En esta perspectiva, la escuela debe brindar al niño la posibilidad de:

1. Ser una persona activa.
2. Participar en discusiones racionales.
3. Tomar conciencia de la utilidad de la Matemática.
4. Adquirir habilidades formales.

Para hacer del escolar **"una persona activa"**, la escuela le/ facilitará que trabaje en forma exploratoria y constructiva realizando observaciones (de relaciones) elaborando conjeturas y planes para la solución de problemas, yendo más allá/ de la información dada intencionalmente por el maestro y generando problemas "nuevos" vinculados con las situaciones / exploradas.
Las **"discusiones racionales"** que se promueven en un contexto educativo tienen como base la cooperación. Así el niño aprenderá a discutir con sus compañeros, a comparar y eva- /

luar resultados, a explicar sus conjeturas, a mostrar ejem-/
plos y contraejemplos que las ilustren, en un clima de mutuo respeto.
Un chico va tomando conciencia de la **"utilidad de la Matemática"** a medida que aprende a matematizar situaciones dentro/ y fuera de la escuela. Cuando recoge datos midiendo, estimando, cuando los organiza y representa, cuando interpreta da-/ tos numéricos o representaciones gráficas, está construyendo modelos matemáticos.
Por último, la **"adquisición de habilidades formales"** se re-/ fiere al aprendizaje de hechos, de notaciones convenciona- / les, de técnicas de representación, de algoritmos, etc., que la sociedad espera que los niños dominen". (1)

Está claro que la formación de matemáticos no es un objetivo de la escuela primaria. Sin embargo, la educación matemática que en ella reciban los niños facilitará no sólo su inser-/ ción social sino también el desarrollo de futuras vocaciones /// científicas.

2. La idea de número natural

"Dios creó los números naturales, el resto es obra de los hombres".

Leopold Kroenecker (1823 - 1891)

2.1. ¿Qué es el número natural?

La respuesta a tan importante interrogante no es/ única y dependerá del contexto en el que se haya formulado la pregunta.

---

(1) Diseño Curricular para la Escuela Primaria Común, Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires, pág. 189, 1986.

Las teorías que fundamentan el conocimiento matemático son numerosas. Podemos intentar un análisis de / esas teorías según diferentes criterios. Un primer enfoque que permitirá distinguir las teorías no genéticas, que/ consideran al conocimiento como verdades permanentes // que se alcanzan con independencia de toda construcción, de las teorías genéticas para las que el conocimiento / es fruto de una construcción progresiva. Las teorías no genéticas conciben al pensamiento como anterior a la acción y a ésta como una explicación de aquél. En cambio, para la teorías genéticas la acción es constitutiva del conocimiento: el conocimiento depende de la acción y la acción es productora de conocimiento.

Puede profundizarse el análisis clasificando además estas teorías según que pongan el acento en el objeto de conocimiento, o en el sujeto cognoscente, o bien/ en la interrelación sujeto-objeto.

El concepto de número, así como el de espacio, es una de las preocupaciones fundamentales de todas estas/ teorías pero es claro que en teorías diferentes hay // también concepciones diferentes.

La frase de Kroenecker que hemos propuesto como epígrafe, muestra que aún a fines del siglo pasado, la / adquisición del concepto de número natural, propia de / la especie humana, estaba ligada a lo religioso o más / bien a lo metafísico y que aún hoy la última palabra depende del marco teórico en el que se plantee la cues- /

tión.

En el siglo XIX, Peano (1858-1932) enunció una teoría, rigurosa desde el punto de vista lógico, para fundamentar el concepto de número natural partiendo del **aspecto ordinal**, es decir de la factibilidad de concebir un número como el suceso del anterior. En cambio Cantor (1845-1918), que enunció la Teoría de Conjuntos en 1880, definió el mismo concepto de número en su aspecto **cardinal** // partiendo del cálculo de clases y la noción de correspondencia uno a uno entre conjuntos.

Hacer matemática en un contexto educativo es muy // distinto a enseñar matemática como disciplina eminentemente deductiva. Por eso no tomamos como referente para este trabajo ninguna teoría matemática en especial, sino que / nos basamos en la teoría psicogenética de Piaget que fundamenta la construcción del número desde una perspectiva/ genética poniendo el énfasis en la interacción entre el / sujeto y el medio social como objeto de conocimiento. Para esta teoría el número es una categoría, **una particular síntesis entre la ordinación y la cardinación**, que el niño no generaliza enseguida a toda la serie numérica, sino que la construye lenta y progresivamente.

Las investigaciones atropológicas confirman día a / día que todos los hombres -aún los que pertenecen a culturas primitivas- poseen una capacidad para cuantificar que les permite reconocer cambios en una pequeña colección si a ella se agrega, o de ella se quita, algún objeto.

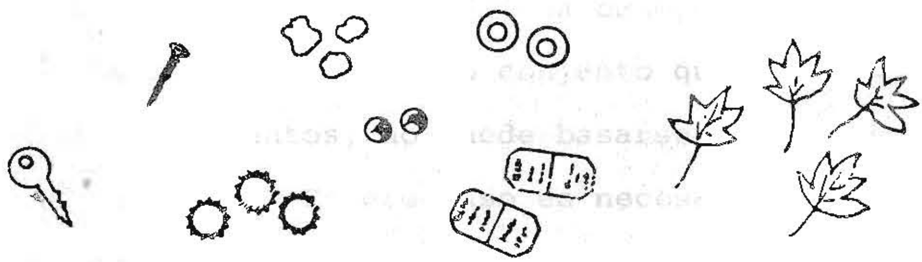
A muy temprana edad -aún antes de la adquisición // del lenguaje- puede observarse que el niño posee un senti do númerico que lo inquieta cuando en una colección que / le es familiar (por ejemplo: los utensilios en el momento de la comida) falta algún objeto. Pero es necesario esperar tres o cuatro años en su evolución para que aparezcan las primeras nociones relativas a los números naturales.

El niño que llega a la escuela primaria está provis to de algunas informaciones numéricas, pero es importante distinguir la **operación** de contar del recitado puramente/ verbal de las palabras: "uno, dos, tres, cuatro, cinco, / seis, siete, ocho, nueve, diez" que generalmente posee. / A esa edad, cuando estas verbalizaciones superan al "cinco", carecen de significación conceptual: son palabras to davía sin contenido aunque asombra oír a algunos niños // que con verdadero placer "cuentan hasta cien" o más.

Entre los tres y los cinco años el niño va incorporando muy lentamente los cinco primeros números, a los // que llamaremos **números perceptivos**. Hemos adoptado esta / denominación porque las colecciones de hasta cinco elemen tos pueden reconocerse perceptivamente, en un golpe de // vista y sin necesidad de contar.

Trataremos de analizar la noción de número observan do algunas conductas espontáneas de un niño de 5 años. // Nuestro entrevistado se llama Pablo y en el momento de la entrevista regresaba de un paseo por el parque. Volcó sobre la mesa los objetos que traía en sus bolsillos: un //

tornillo, tres piedras, dos rueditas, un par de bolitas,/ tres tapas de bebida gaseosa, dos boletos de tren, una // llave y cuatro hojas secas. Dijo entonces: "ya saqué to-/ do". Mientras extraía esos objetos de sus bolsillos obser vamos que los agrupaba espontáneamente según su naturale-za; Pablo ponía junto todo lo que él consideraba análogo, estaba **clasificando** eseuniverso. La siguiente figura mues tra la clasificación de los objetos de Pablo:



Podemos observar una natural organización de los elemen-/ tos en conjuntos ubicados en diferentes regiones de un es pacio plano. Pablo no necesitó dibujar las fronteras que/ separan un conjunto de otro para decidir claramente qué / objetos pertenecen a cada conjunto. Le preguntamos si te-nía tantas tapas como piedras y respondió inmediatamente/ que sí. Análogamente pudo decidir que había:

"tantos tornillos como llaves"

"tantas bolitas como ruedas y como boletos de tren",

que "**una** bolita es roja",

"**algunas** piedras son redondas",

"**ninguna** llave quedó en el bolsillo"

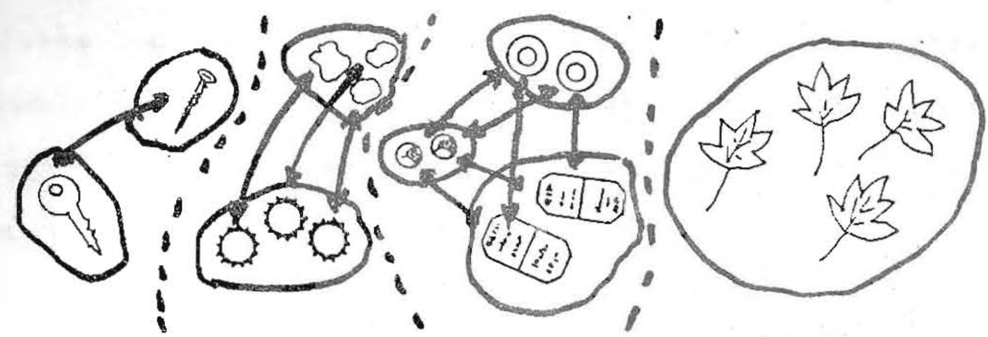
Del mismo modo pudo haber actuado ante conjuntos de cuatro o cinco elementos. Para establecer estas relacio-/ nes él tuvo en cuenta únicamente la propiedad numérica / de los conjuntos: tomó estas decisiones con independencia de la naturaleza de los objetos agrupados y de la disposi ción espacial de los mismos.

2,2, La correspondencia cardinal

Si el número de objetos de una colección fuera ma-/ yor que 5, la formación de otro conjunto que tenga la mis ma cantidad de elementos, no puede basarse solamente en / la percepción global. En ese caso es necesario apoyarse / en una correspondencia (uno a uno) que asegure la coordi- nación de ambas colecciones.

Cuando a un niño de 5 ó 6 años se le entregan ocho/ tenedores y se le pide que busque en el cajón de los cu-/ biertos "tantas cucharas como tenedores", es probable que disponga los tenedores en una hilera y coloque frente a / cada uno de ellos una cuchara, cuidando que haya una y só lo una cuchara delante de cada tenedor y que haya uno y / sólo un tenedor correspondiente a cada cuchara.

Las correspondencias (1-1) se pueden mostrar mediante dia gramas de flechas. En el caso de los objeto de Pablo:

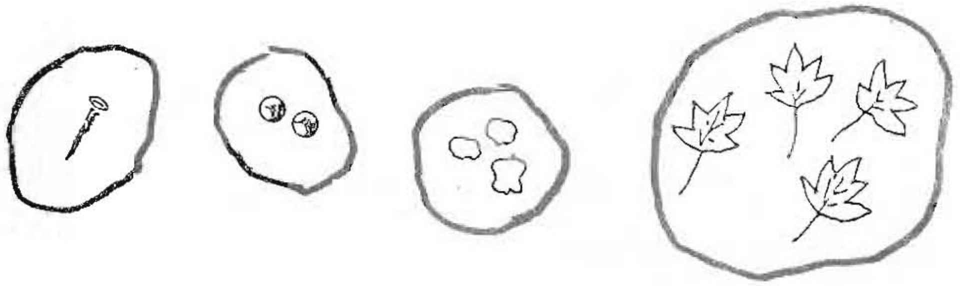


Observamos que los conjuntos quedan así organizados (clasificados) en familias o clases de conjuntos que poseen / la misma cantidad de elementos. La familia a la que pertenecen todos los conjuntos unitarios es una clase que se / representa con el símbolo "1" y la expresión oral "uno"./ Del mismo modo, la familia a la que pertenecen todos los/ conjuntos binarios es la clase "dos" representada por el/ símbolo numeral "2", etcétera.

Los nombres "uno", "dos", "tres", etc. son símbolos orales de los **números cardinales.** Cualquier número en su/ aspecto cardinal, nombra la propiedad de una clase de conjuntos entre los cuales se puede establecer correspondencia uno a uno. Pero a la vez que esa palabra es el símbolo de una clase, tiene la virtud de evocar como imagen // a cualquier modelo concreto representativo de la clase.

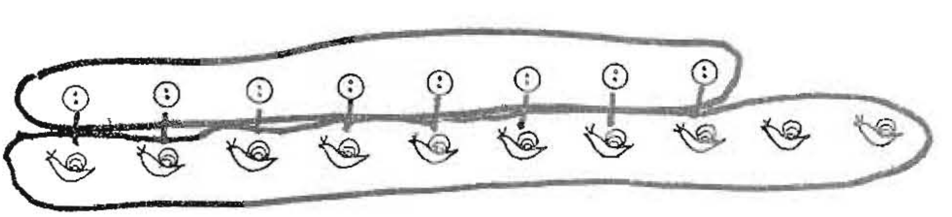
2.3. La ordinalidad

Las clases de conjuntos coordinables pueden **ordenarse naturalmente.** Si elegimos un conjunto como representan te de cada clase, se lo puede disponer colocándolo delante de todos los que tienen "más elementos" que él y detrás / de todos los que tienen "menos elementos" que él. En nues tro caso los representantes de cada clase quedarán así or denados:



Es evidente que cada conjunto, con excepción del // primero, se relaciona con el anterior por tener **un elemen to más** que él y con el siguiente por tener **un elemento me nos**.

La **seriación** de los conjuntos es inmediata si se // trata de números perceptivos (1 a 5). Si los cardinales / de los conjuntos que se comparan fueran mayores que cin-/ co, habría que recurrir a una correspondencia del tipo:



donde el conjunto de botones está en correspondencia uno/ a uno con una **parte propia** del conjunto de caracoles, lo cual revela que hay menos botones que caracoles.

Resulta claro que cualquiera sea el número cardinal que corresponda a un conjunto, ese conjunto tiene un lu-/

gar bien determinado en la seriación natural de todas /// las clases. Así al decir "uno" o "primera clase"
"dos" o "segunda clase"
"tres" o "tercera clase", etc., /
se destaca el aspecto **ordinal** del número cardinal.

2.4. La categoría de número

Todo número natural es una **categoría**, una particu-/lar síntesis de sus dos aspectos: cardinal y ordinal. Es/ la **propiedad** de una clase de conjuntos, que se abstrae // (por cardinación), con independencia de toda cualidad física de los elementos que la componen y es a la vez la // propiedad que permite ordenar naturalmente a todas las // clases (por seriación).

El número resulta de la coordinación de las opera-/ciones lógicas de clasificación y seriación:

coordinación

clasificación de conjuntos — por equivalencia

seriación de conjuntos — por diferencia

El concepto de número implica un largo proceso de / construcción que parte de los esquemas sensomotores y, a/ través de la representación interiorizada, llega a la abs-tracción.

El análisis de las observaciones que hemos realizado muestra que las conductas implícitas en ese proceso de construcción son:

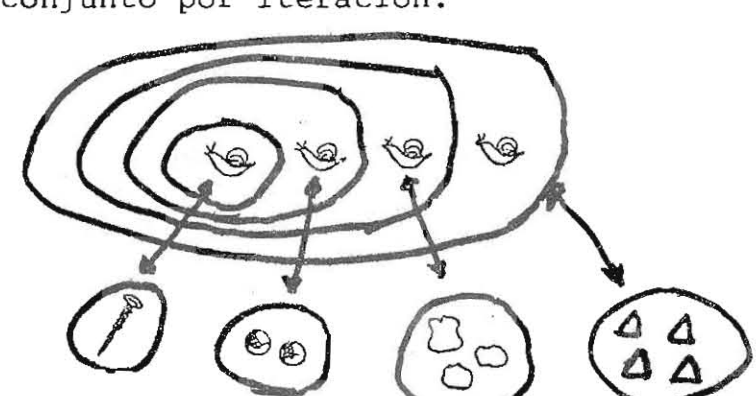
* manipular objetos concretos
* observar atributos de objetos tales como su co- / lor, forma, sustancia, etc.
* comparar unos objetos con otros mediante relaciones de semejanza y diferencia.
* agrupar objetos formando conjuntos
* describir situaciones mediante "cuantificadores / brutos" tales como: todos, ninguno, algunos, uno.
* percibir el espacio organizado topológicamente en regiones bien diferenciadas.
* comparar pares de conjuntos mediante la relación/ "tiene tantos como".
* establecer correspondencias uno a uno
* conservar la equivalencia entre dos conjuntos /// coordinables, aún cuando se modifique la disposición espacial de sus elementos.
* relacionar una parte propia con el todo
* clasificar conjuntos según el número de elementos
* seriar conjuntos

La enumeración de estas conductas no responde a un/ orden cronológico, ni tampoco evolutivo pues todas ellas/ se interrelacionan. La categoría de número tiene la misma evolución que la clasificación y la seriación y se cons-/ truye simultáneamente con ellas.

2.5. La operación de contar

La enumeración verbal es para el niño una acción relativamente fácil. Los miembros de su familia generalmente le hacen repetir -en un orden estricto- los nombres de los números, en la creencia de que basta apoyar el dedo en cada uno de los objetos de una colección, recitando al mismo tiempo "uno", "dos", ... etc., para que la última palabra pronunciada al señalar el último objeto se transforme en el nombre de toda la colección. Pero esta enumeración, simplemente mecánica, es muy poco fecunda y no debe confundirse con la verdadera **iteración**, que es la característica numérica que permite construir el siguiente de cualquier número.

Trataremos de ilustrar mediante un ejemplo, el contenido operatorio implícito en la acción de iterar: un caracol puede pensarse como un conjunto de un solo elemento cuyo nombre es "uno". Si se agrega a él otro caracol -que también es "uno"- se forma un nuevo conjunto llamado "dos", que incluye al anterior y así sucesivamente. El siguiente diagrama muestra las sucesivas modificaciones de un conjunto por iteración:



El conteo puede comenzar por cualquiera de los obje tos de la colección pues cada elemento:

* es **equivalente**, en unicidad, a todos los demás // por pertenecer al mismo conjunto.
* puede **distinguirse** de los demás, solamente por el orden en que se lo considere.

El agregado de un objeto transforma:

* al conjunto en otro que tiene "uno más que" el an terior.
* a la propiedad numérica (n) en (n+1)

En cada iteración, el conjunto de cardinal (n) que da **incluído** en el conjunto cardinal (n+1).

Así por ejemplo, la palabra "cuatro" no designa al/ objeto que se ha colocado un cuarto lugar sino a la **pro-/ piedad numérica** del nuevo conjunto, al que pertenecen los tres objetos anteriores y el último considerado. En el // diagrama anterior hemos querido mostrar que todo número / es a la vez **cardinal**, graficando correspondencias (1-1) / con otros modelos, y **ordinal** por el rango que ocupa en u- na serie naturalmente ordenada.

3. El pasaje a la expresión simbólica

La palabra asociada a una clase de conjuntos coordina- // bles constituye en cada lengua, un **símbolo** del concepto de nú- mero. Así las palabras "cinco", "cinq", "five", "fünf", etc.,/

evocan el mismo concepto en diferentes regiones geográficas. / En el lenguaje escrito, esas palabras pueden representarse también por **cifras**, formas gráficas de los números, que reciben / el nombre de cifras "numerales" para distinguirlas del concepto de "número". En todas las lenguas las cifras numerales se / leen ideográficamente, de tal modo que una cifra puede ser interpretada igualmente por dos personas que hablen diferente // lengua, pues para su comprensión no es necesaria la traducción oral.

La identificación de los signos numerales y su lectura no siempre asegura la posesión del concepto de número. Es frecuente observar que los niños pequeños dan nombre a los signos numéricos de las calles, de los ómnibus, etc., pero no hacen más que leerlos, es decir asociar una palabra con un signo escri-/ to. Esta lectura, en general, es previa a la correcta escritura de un numeral que supone mucho más que eso: implica la **cardinalidad**, ya que la misma cifra se adjudica a todos los con-/ juntos coordinables entre sí; la **ordinalidad**, pues cada nume-/ ral está ordenado en una sucesión infinita y además la **interiorización de ciertas reglas** que permiten, dada una cifra cual-/ quiera, escribir la siguiente.

La construcción de un sistema de numeración es un hecho evolutivo; históricamente es por lo menos tan antiguo como el / lenguaje escrito, aunque algunos estudios recientes aseguran / que lo precedió. Al aparecer la escritura los pueblos primitivos tienden a simbolizar cada número, pero ante la imposibilidad de crear infinitos símbolos, combinan unos pocos creando /

ciertas reglas. Según documentos que se conservan hasta hoy, / la aparición de la escritura numérica se remonta al sigo 35 // a.C. entre los babilonios. Todos los pueblos antiguos poseen/ sistemas de numeración basados en el mismo principio: para simbolizar hasta nueve se repite el mismo signo, en tanto que para unidades de orden superior tales como decenas, centenas, // etc., se usan signos especiales.

El sistema romano de numeración, que hoy tiene un valor / meramente histórico, es un sistema que sustituye los símbolos numerales más antiguos por letras mayúsculas. Si bien este sistema puede describir el cardinal de una colección, no permite/ realizar operaciones tan sencillas como adición o multiplica-/ción. Ese tipo de cálculos era resuelto mediante el uso de instrumentos denominados **ábacos**. El uso del ábaco estaba muy di-/fundido en Grecia -Herodoto ya lo menciona en su Historia- y / en la mayoría de los pueblos antiguos. Los diferentes modelos/ de ábacos se basan en el mismo principio y sólo difieren en // los materiales con que se los construye o en el tipo de fichas usadas. Los ábacos de tipo griego y romano tenían fichas sueltas mientras que los suan-pan chinos de hoy día son cerrados:/ tienen bolillas perforadas que se deslizan sobre delgadas ca-/ñas de bambú. Actualmente, este tipo de contador se sigue usando en zonas rurales de Rusia y en toda China, donde persiste a pesar de la introducción de las máquinas calculadoras. Más adelante nos ocuparemos del uso de ábacos como un importante re-/curso didáctico en los primeros grados.

En los primeros siglos de nuestra era se crea en la India un sistema decimal de registro **posicional** que incorpora como / novedad la simbolización del **cero**. En el siglo X los árabes adoptan ese sistema indio y a partir de entonces se va conociendo en Europa, aunque recién se lo acepta definitivamente en el siglo XV con la creación de la imprenta.

Nuestro actual sistema escrito de numeración, de origen / indoarábigo, tiene base "diez". Es además un sistema posicio-/nal que permite escribir cualquier número combinando adecuadamente diez grafías: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0. Cada vez // que se reúnen diez unidades, se las agrupa formando una decena. De esa manera el numeral 10 significa que hay una decena (1) / y no se registran unidades sueltas (0). Análogamente cuando se agrupan 10 decenas -tantas como indica la base diez- el nume-/ral que corresponde es 100, vale decir una centena, ninguna decena y ninguna unidad suelta. Las mismas consideraciones son / válidas para las unidades de los órdenes superiores. Por ejemplo, el numeral mil ciento once indica:

1111
- una unidad suelta
- una decena o bien **diez** unidades agrupadas
- una centena o bien **diez** decenas agrupadas
- una unidad de mil o bien **diez** centenas agrupadas

Conviene destacar la importancia de la posición que una / cifra ocupa en un numeral, pues de esa posición depende el **valor relativo** que ella representa con independencia de su **valor absoluto**.

4. La adición y la sustracción

En el parágrafo 5 vimos que todo número natural se puede/ construir por agregado de una unidad al anterior, proceso al / que hemos llamado **iteración.** En él está implícita la adición. Se trata de la transformación de un estado inicial (N), producida por un transformador (+1) para dar por resultado un estado final (siguiente de n).

En símbolos:

$$n \xrightarrow{+1} \text{siguiente de } n$$

Llamaremos **problemas de tipo aditivo** a aquellas situaciones cuya solución implica solamente sumas y restas. La itera-/ ción es un caso particular en el campo de los problemas aditivos.

Algunos problemas tienen un desarrollo temporal que puede esquematizarse:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Estado}\\\text{inicial}\end{array}} \xrightarrow[\text{u operador}]{\text{tranformador}} \boxed{\begin{array}{c}\text{Estado}\\\text{final}\end{array}}$$

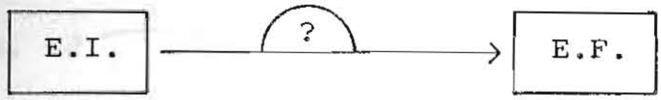
pues se relacionan con las acciones de "agregar", "recibir", / "comparar", etc.

De este tipo de problemas surgen otros que ponen de manifiesto la reversibilidad de la adición:

1. Conociendo el estado final y la transformación, encontrar / el estado inicial.

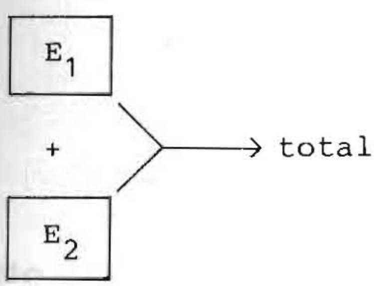
$$\boxed{?} \xrightarrow{T} \boxed{\text{E.F.}}$$

2. Conociendo el estado inicial y el final, encontrar la transformación.



La complejidad de las situaciones dependerá además de los valores absolutos y relativos de los números involucrados, de que éstos sean enteros o decimales, del orden en que se mencionan los datos en el enunciado, etc.

Hay otros problemas aditivos vinculados a las acciones de recibir, asociar, juntar, etc., en los que inicialmente se vinculan dos estados para obtener el total de elementos sin que se involucre un desarrollo temporal.



Por ej.: Alrededor de la mesa hay 2 nenas y 3 varones, ¿cuántos chicos hay en total?

Puede resultar interesante, como ejercicio, escribir todos los problemas que se pueden enunciar a partir de una situación tan sencilla como la siguiente:

"Laura tenía 2 figuritas, ganó 3 y ahora tiene 5".

Ejemplo 1: Observe los siguientes esquemas y complete los problemas que faltan.

a. $2 \xrightarrow{3} ?$ ....

b. $2 \xrightarrow{?} 6$ Laura tenía 2 figuritas, ahora // tiene 5, ¿cuántas ganó?

c. $? \xleftarrow{3} 5$ ....

d. $2 \xrightarrow{?} 5$ ....

e. $2 \xrightarrow{3} ?$ Laura ganó 3 figuritas y tenía 2, ¿cuántas tiene ahora?

f. $? \xleftarrow{3} 5$ ....

Ejemplo 2: Complete las operaciones que resuelven cada uno de/ los problemas anteriores.

a.	d.
b.	e. 3 + 2 = ...
c. 5 - 3 = ...	f.

Usted puede observar que una misma expresión simbólica // se corresponde con enunciados distintos. Parece razonable entonces hacerse cargo de la dificultad que representa, para un/

niño pequeño, la traducción simbólica de problemas como éstos, aparentemente sencillos.

A modo de ilustración transcribiremos un párrafo de Gaston Mialaret.(1)

"Nos permitimos afirmar que para el niño no hay una concordancia perfecta entre el proceso psicológico y el proceso matemático que tienen en mente el educador o el matemático.
Podríamos todavía ir más lejos, ya que en ciertos casos hay una verdadera oposición entre la realidad y su traducción matemática. Sea el problema: Me gasto 30 fr. por la mañana y 26 // por la tarde. ¿Cuánto he gastado en total? En realidad son muchos los niños que viven el gasto como una resta y, en cierto/ sentido, tienen razón. Su perplejidad es grande cuando se les/ pide hacer una suma. Aunque hay que reconocer que en verdad / la operación a realizar es:

$$-(37) - (26) = -63$$

y el signo - significa concretamente: lo que ha salido de mi / portamonedas. Es igual en los problemas donde se trata de objetos fragmentados: la suma de los números corresponde a dos restas sucesivas.
Hemos insistido sobre estas cuestiones preliminares con el fin de comenzar poniendo en evidencia la no concordancia de la progresión psicológica y la progresión matemática. Una misma operación matemática puede recurrir a problemas situados a nive-/ les psicológicos muy diferentes y puede ser necesario articu-/ lar nuestras progresiones teniendo en cuenta las dos clases de exigencias. Es un punto sobre el que volveremós con frecuencia pero era necesario resaltarlo a propósito de las primeras actividades matemáticas.

La suma. Es en general, la operación que parece más simple para el niño, pero las diferencias de porcentaje en los aciertos a problemas diferentes señalan claramente que no todos los problemas psicológicos están resueltos alrededor de los 8-9 años.

(1) Gastón Mialaret. Las Matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan. Aprendizaje. Visor, Madrid, 1984.

En el siguiente cuadro el lector encontrará los resultados obtenidos en el curso de la encuesta de la que hablábamos anteriormente. Los porcentajes indicados tienen el significado que señalábamos antes.

	CE1*		CE2*	
	♂	♀	♂	♀
1. En un rebaño hay 13 vacas blancas y 8 vacas rojizas. ¿Cuántas vacas hay en esta manada?	91,4	92,3	96,4	95
2. Por la mañana he recorrido 12 km. en bicicleta y por la tarde 3 km. a pie. ¿Cuántos kilómetros he hecho durante el día?	75,3	73,5	86,4	81,6

* En Francia, el Curso Elemental 1 (CE1) y el Curso Elemental 2 (CE2) corresponden aproximadamente a nuestros 2º y 3º grado.

El campo de los problemas aditivos y su complejidad psicogenética ha sido investigado por muchos pedagogos. Dice Gérard Vergnaud y C. Durand.(1)

6. CALCULOS RELACIONALES Y PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS

Así pues, la aritmética elemental aditiva no forma un bloque homogéneo, sino que se compone de relaciones heterogéneas que son tratadas de distinta forma por los niños. Esta diferenciación no es exclusiva de los niños de primer grado, sino que se encuentra también en los de segundo grado e incluso en los adultos.
El análisis en términos de transformación y de estado, y la importancia de las diferencias encontradas entre las diversas clases de problemas, permite considerar el tema bajo una perspectiva muy amplia, válida para todas las situaciones que impliquen la solución de un problema, y no solamente para la solución de problemas de aritmética.

---

(1) César Coll. Psicología Genética y Aprendizajes Escolares. Capítulo VII, pág. 124. Siglo XXI, Madrid,1983.

Sobre la misma operación aritmética se proyectan cálculos relacionales distintos que están muy lejos de ser equivalentes entre sí; la misma resta, 6 − 4 = 2, puede corresponder a la solución de problemas tan distintos como los siguientes, de los que indicamos el esquema correspondiente y el cálculo relacional que implican sus soluciones.

Enunciado	*Esquema*	*Cálculo relacional*
Tenía 6 canicas y pierdo 4. ¿Cuántas tengo ahora?	$\boxed{6} \xrightarrow{-4} \square$	Aplicación de una transformación a un estado.
Tenía 4 canicas. Ahora tengo 6. ¿Qué ha sucedido?	$\boxed{4} \xrightarrow{\bigcirc} \boxed{6}$	Búsqueda de una transformación mediante la diferencia de dos estados (cuando $T>0$).
Tengo 6 canicas. Acabo de ganar 4. ¿Cuántas tenía antes de jugar?	$\square \xrightarrow{+4} \boxed{6}$	Aplicación de una transformación recíproca (−4) a un estado final para encontrar el estado inicial.
Tenía 6 canicas. Ahora tengo 4. ¿Qué ha sucedido?	$\boxed{6} \xrightarrow{\bigcirc} \boxed{4}$	Búsqueda de una transformación mediante la diferencia de dos estados (cuando $T<0$).
He ganado 6 canicas en una primera partida y perdido 4 en la segunda. ¿Qué ha sucedido en total?	$\underbrace{\square \xrightarrow{+6} \square \xrightarrow{-4} \square}_{\bigcirc}$	Composición de dos transformaciones elementales.
He perdido 6 canicas en la primera partida y he ganado 4 en la segunda. ¿Qué ha sucedido en total?	$\underbrace{\square \xrightarrow{-6} \square \xrightarrow{+4} \square}_{\bigcirc}$	Composición de dos transformaciones elementales (caso diferente al anterior).
He perdido 4 canicas en la primera partida y he jugado una segunda, perdiendo 6 canicas en total. ¿Qué ha sucedido en la segunda partida?	$\underbrace{\square \xrightarrow{-4} \square \xrightarrow{\bigcirc} \square}_{-6}$	Búsqueda de una transformación elemental mediante la diferencia entre dos transformaciones.
He perdido 6 canicas en la primera partida y he jugado una segunda. He perdido 4 canicas en total. ¿Qué ha pasado en la segunda partida?	$\underbrace{\square \xrightarrow{-6} \square \xrightarrow{\bigcirc} \square}_{-4}$	Búsqueda de una transformación elemental mediante la diferencia entre dos transformaciones (caso diferente al anterior).
Debía 6 canicas a mi compañero de clase. Le devuelvo 4. ¿Cuántas le debo todavía?	$(-6) \xrightarrow{+4} \bigcirc$	Aplicación de una transformación a un estado relativo.

Los casos que hemos presentado están muy lejos de agotar todos los casos posibles, con lo que se evidencia la amplitud de experiencias que serían precisas.

Por otra parte, no existe una sola vía para resolver un problema de una clase determinada: el cálculo relacional indicado en cada caso no corresponde más que a uno de los procedimientos posibles. Los niños acuden con frecuencia a procedimientos no canónicos cuyo estudio resulta muy interesante, ya que muestran una cierta comprensión de las relaciones en juego y constituyen el paso previo a la solución canónica válida para todos los casos. Se constata también por otra parte una evolución genética de los proeedimientos.

Para ampliar estos conceptos, se recomienda especialmente a los profesores de matemática la lectura del capítulo completo.

5. ¿Cómo hacer para que los futuros maestros reflexionen sobre // sus propios aprendizajes?

La respuesta no es fácil. No es frecuente que los adultos podamos evocar nuestros propios procesos de aprendizaje. Se // trata entonces, de reconstruir situaciones que por su novedad, promuevan en estos alumnos, futuros maestros, aprendizajes similares a los de los niños.

Como dice Eleanor Duckworth (1)

> "Cuando los métodos de enseñanza son totalmente nuevos no basta con suministrar el libro del maestro y hacerlo aplicar. Antes de iniciar su aplicación es preciso también formar a los / maestros. Sin entrar en detalles, se pueden señalar tres aspectos principales de esta formación. El primero consiste en que/ los maestros aprendan de una forma análoga a la que los niños/ experimentarán más tarde en sus clases. Casi todas las unida-/ des elaboradas en este programa son tan eficaces para los adultos como para los niños. Los maestros aprenden las materias a/ enseñar utilizando ellos mismos algunas de estas unidades. De/ esta forma se dan cuenta de lo que representa aprender de esta manera. Un segundo aspecto consiste en trabajar con uno o dos / niños a la vez, de manera que el maestro pueda observarlos de/ cerca para percibir lo que es necesario en este tipo de ense-/ ñanza. Un tercer aspecto consiste en la visión de films o la asistencia a demostraciones en vivo en una clase para que los /

---

(1) Scwebel, M. y Raph. J. Piaget en el aula. Huemul, Buenos Aires, pág. / 333, 1981.

maestros puedan ver que realmente es posible proceder de este modo en sus clases. Existe un cuarto aspecto de naturaleza ligeramente diferente. Algunos profesores, más bien pocos, se basan solamente en un curso y algunos libros del maestro para aplicar este método. Para la gran mayoría, es importante disponer del apoyo de otras personas que intentan hacer lo mismo y con las cuales es posible mantener un intercambio de opiniones. Es también recomendable que haya alguna persona experta a la que se pueda consultar en caso de dificultad".

En especial y con referencia a los temas específicos tratados en este documento: sistema de numeración, adición y sustracción, un recurso adecuado para promover la reflexión de los futuros maestros consiste en construir un sistema de numeración en una base no decimal, concreto, en variedad de modelos de la misma estructura.

Por ejemplo:

I) porotos para las unidades, cajitas de fósforos o platitos para las agrupaciones de primer orden (de cinco porotos), paquetes de cajitas (cinco) para las agrupaciones de segundo orden, etc.

II) palillos sueltos para la unidades
atados de primer orden (5 palillos)
atados de segundo orden (5 atados de 5 palillos cada uno)
etc.

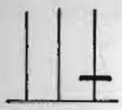
III) material plano: recortes de cartón o cartulina.

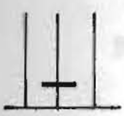
 para las unidades

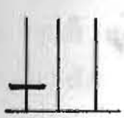
 barras (de 5 unidades) para las agrupaciones de primer orden.


cuadrados (de 5 barras) para las agrupaciones de/ segundo orden.

IV) Abacos: clavos sobre listones de madera


arandelas verdes en el primer clavo de la derecha para las unidades.


arandelas rojas (equivalen a 5 verdes) en el clavo siguiente para las agrupaciones de primer or-/ den.


arandelas azules (equivalen a 5 rojas) en el clavo siguiente para las agrupaciones de segundo orden.

En este documento reflexionamos acerca de la construcción de un sistema de numeración que es un largo proceso en el que/ están implícitas las operaciones de adición y sustracción aplicables a cantidades homogéneas.

Las correspondencias 1 a 1, del tipo "para cada persona / una silla" o "para cada ojal un botón" y viceversa, están en / la base de la noción de número natural pues permiten asegurar/ que las colecciones relacionadas tienen la misma cantidad de / objetos.

Las relaciones multívocas, del tipo "para cada masita, // tres frutillas" o "tres pares de medias cuestan 10 ₳", vincu-/ lan cantidades, en general no homogéneas, entre las que se establece una proporcionalidad directa. De este tipo de relaciones nos ocuparemos en el próximo documento.

Con estos materiales, proponemos para los alumnos del magisterio, la resolución (individual o grupal) de la Guía Notación Decimal de los Números Naturales.

Notación Decimal de los Números Naturales

1. Organizar un puñado de porotos de forma tal que, a simple vista, pueda percibirse el número exacto de ellos.
   ¿En qué se basó la organización? Registrar la configuración / obtenida.

2. Reunidos varios jugadores, tiran por turno un dado y anotan / el puntaje obtenido con porotos. A medida que transcurre el / juego y cada jugador agrega más puntos, hay que ir mostrando/ el total en agrupamientos de a cinco en cinco. Suspender después que cada jugador haya realizado diez tiros.

   Repetir el juego cumpliendo cinco tiros cada jugador y agru-/ pando de 3 en 3.

3. Analizar el contenido de una caja de palillos estructurados./ Anotar la base de los agrupamientos. Base: .....

   Completar: Cada atadito menor tiene ... palillos.

   Cada atado de segundo orden tiene ... ataditos de/ orden menor.

   Cada atado de segundo orden tiene ... unidades.

   Cada atado de tercer orden tiene ... atados de segundo orden.

   Cada atado de tercer orden tiene ... unidades.

   ¿Cree que esta organización puede continuarse? En tal caso, / ¿cómo continuaría?

4. Repetir el juego de dados del ejercicio 2. entre dos personas usando palillos para anotar el puntaje. Realizar canjes cada/ vez que se posible.

Completar:

Con Base ..., la regla de canje es "no más de ..."

Registrar gráficamente los resultados. ¿Cómo se descubre, sin contar, quién ganó?

5. Ahora hay que disponer de hojas grandes con casillas. De dere cha a izquierda.

   la primera casilla es para los palillos,
   la segunda casilla es para los ataditos de la base,
   la tercera casilla es para los atados de segundo orden,
   la cuarta casilla es para los atados de tercer orden.

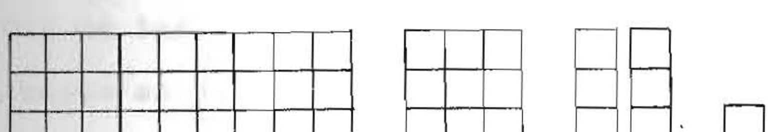
   Si es necesario, se pueden agregar casillas.

   Repetir el juego de dados del ejercicio 4. Registrar los re-/ sultados. Se recomienda usar material en distintas bases.

6. Otra posibilidad es la de estructurar un material plano como/ se indica a continuación:

   Recortar cuadraditos de cartón, todos del mismo tamaño, para/ representar las unidades y barras para representar las bases, cuadrados para representar los cuadrados y agrupaciones de // cuadrados para representar los cubos.

   Así por ejemplo, cuarenta y tres unidades agrupadas en base / tres quedarían representadas por:



b^3	b^2	$\overbrace{b}^{\text{tres}}$	u
1	1	2	1

7. ¿Qué tienen en común los dos sistema: el de palillos y el de/

bloques planos? Elegir un conjunto de piezas del sistema de / palillos y mostrar su equivalencia con material plano.

Hacer una traducción en sentido inverso.

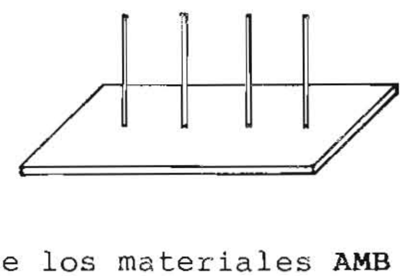
Convendremos en llamar:

unidades a las piezas sueltas
bases a los agrupamientos de primer orden
cuadrados a los agrupamientos de segundo orden
cubos a los agrupamientos de tercer orden

para los agrupamientos de orden mayor usaremos el lenguaje // de las potencias: cuarta, quinta, ... potencia, etc.

8. Un **Abaco Abierto** consta de una base de madera u otro mate- // rial apropiado que permita sostener cuatro (o más) clavos. El sistema se completa con argollas de colores (o cuentas, o fichas ensartables) donde cada color debe corresponder a un determinado clavo.

Construir un ábaco como el de la figura y su correspondiente juego de piezas ensartables (9 de / cada color).



El ábaco tiene la misma estructura que los materiales **AMB** (aritmética multibase) que hemos usado en ejercicios anterio- / res. De derecha a izquierda, cada clavo corresponde a las unidades, bases, cuadrados y cubos respectivamente. El color de/ cada argolla representa el orden de agrupamiento que corres-/ ponde a su clavo.

¿Qué ventajas y qué desventajas ofrece el uso del ábaco en lugar de los sistemas **AMB** anteriores?

Juegue en distintas bases (5, 6, 10, ...) para comprobarlo.

Registre sus resultados dibujando los ábacos.

9. Registre los resultados de los juegos realizados en el ejerci

cio 8., númericamente.

10. Un jugador en base (5) obtuvo 2 0 0; muestre tantos porotos// como debe haber usado el jugador para anotar su puntaje. Re-/ gistre gráficamente la agrupación correspondiente.

    Escriba númericamente el resultado en base diez.

11. Un juego en base (10) resultó 55. Escriba ese resultado númericamente en base (3), base (4) y base (6).

12. Leer cuidadosamente:

    La escritura decimal de los números naturales tiene como fundamento el **valor posicional de las cifras:** una cifra vale según el lugar que ocupa en la escritura de un numeral. Las nociones subyacentes son:

    * agrupamiento de objetos en conjuntos de igual cardinal/ (diez).
    * agrupaciones sucesivas: en conjuntos de conjuntos, etc.
    * canje obligatorio según la consigna: "menos que la base (diez) en cada lugar".
    * uso de diez cifras diferentes, tantas como indica la base:

      0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

El uso de bases distintas de diez permite comparar diferentes sistemas regidos por las mismas reglas de agrupamiento y canje y abstraer de ellas al número como lo que permanece inva-/ riante cuando cambia la base que caracteriza a los agrupa-/ mientos. (Ver Anexo 1 desde "valor posicional").

ANEXO Nº 1

Conferencia presentada en el 4º Encuentro Anual del Capítulo Norteamericano / del Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática. 23 al 25 de Octubre, 1982, Universidad de Georgia.

Los niños de 1º grado inventan la aritmética

La teoría de Piaget en la clase

Constance Kamii

Universidad de Illinois en Chicago

Yo formulo la hipótesis, basado en la teoría de Piaget, de que la adición no debe ser enseñada puesto que los niños construyen el número por sí / mismos, y el número en sí contiene la adición (la serie numérica se construye con la operación +1). Esta afirmación la experimenté eliminando la ins- / trucción y usando solamente dos clases de actividades: situaciones de la vida diaria tales como el recuento de votos y juegos grupales. El grupo experimental que solamente realizó este tipo de actividades memorizó la suma ligeramente mejor al final del primer grado en comparación con el grupo que tuvo instrucción por escrito. Los datos que se presentan muestran que el valor posicional es un objetivo inapropiado para el primer grado. Puesto que los niños de primer grado están todavía construyendo el número por la operación // +1, es para ellos imposible construir simultáneamente un segundo nivel de unidades de orden superior a diez.

ADICION

Tradicionalmente se asumió que la adición debe ser enseñada a los ni-/ ños de primer grado. Sin embargo trazaré algunas implicaciones desde la teoría de Piaget:

1. La adición no debe enseñarse a los niños, hasta que ellos constru-/ yan el número por sí solos, y el número mismo contiene la adición /

(la serie numérica se construye con la operación +1).

2. La retroalimentación de parte del maestro sobre la corrección o no/ de una respuesta es innecesaria en el conocimiento lógico-matemático, pues la última fuente de retroalimentación es la coherencia interna del sistema.

La interacción social con otros niños y adultos es importante para el/ desarrollo del conocimiento lógico-matemático pues estimula la actividad mental a través de la confrontación de puntos de vista en un contexto que obliga al niño a ser coherente (Piaget, 1947; Inhelder, 1974; Perret-Clermont, / 1980).

Basada en esta teoría, experimenté con niños de primer grado una a- // proximación a la aritmética que elimine la instrucción y usé dos clases de / actividades: las situaciones de la vida diaria y los juegos grupales. Un e-/ jemplo de las primeras: la clase debe decidir si continuar o no con una actividad y 13 niños votan a favor de continuar. Un niño dijo inmediatamente: // "no necesitamos votar por la otra opción". El maestro preguntó: ¿Cómo lo sabés? y el niño explicó: "13 + 13 = 26, y hoy hay solamente 24 niños". Muchos niños no entendieron este razonamiento y el maestro preguntó a la clase si / quería votar la otra opción. Los que no habían entendido el razonamiento estuvieron contentos con este método empírico. Los que lo habían entendido no/ perdieron tiempo en afirmar: "ya sabemos que ganaron los 13".

Un ejemplo de juego grupal es la Doble Guerra. Este juego se juega como la guerra, excepto que la suma de las dos cartas se compara con la suma / de las cartas del oponente y la persona que tiene mayor puntaje toma las cuatro cartas. Al principio del año se tomaron las cartas de 2 mazos con los números hasta 4. Se repartían entre dos jugadores, en 2 pilas para cada uno. El niño de turno tomaba la carta superior de cada pila y se comparaba su suma / y la del compañero. Ganaba la persona que tenía más cartas al terminar.

La tabla 1 muestra los resultados del test individual en que cada niño respondió oralmente. Como se puede ver inmediatamente, el"grupo experimen- / tal" había aprendido la suma sin instrucción.

Los maestros usan situaciones de la vida diaria y juegos pero frecuentemente los consideran suplementos de la instrucción. Yo pienso que son superiores a la instrucción (en hojas de papel) por las siguientes razones:

1. Promueven el desarrollo de la autonomía en los niños, socialmente,/ intelectualmente y moralmente. En los juegos y las situaciones cotidianas, los niños tomas las decisiones, y los niños ejecutan las reglas. Ellos también chequean las respuestas de los otros. En la instrucción tradicional, por contraste, el maestro decide lo que se aprende y es quien dice si la respuesta es correcta. Los niños aprenden a ser obedientes y dependientes del maestro que es quien tiene/ la verdad, es decir, a ser gobernados por otro.
2. Hacen que los niños sean mentalmente más activos.

En la Doble Guerra, los niños supervisan al otro constantemente y se / pueden ver situaciones como se muestran en la figura 1 (a) en la que el pensamiento lógico es a veces mejor que en la adición mecánica. Por esa razón / ven que el 2 es el mismo y que solo tiene que comparar "3" y "4". Por lo contrario, cuando trabajan sobre el papel, llegan a trabajar en una forma mecánica, pues tienen que producir respuestas siempre.

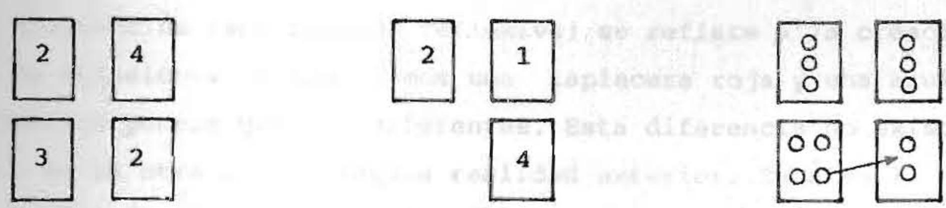


Figura 1 (a) (b) (c)

Al mismo tiempo, ellos deciden no dar vuelta la segunda carta en si-// tuaciones como (b). En este caso ellos dicen que no hace falta porque "4" es siempre más que "2 + 1". Aprendiendo a sumar, es deseable ser mentalmente activo y saber cuándo no es necesario sumar.

Un niño que no sabía de memoria 3 + 3 y 4 + 2 dijo inmediatamente "es/ los mismo". Cuando el maestro le preguntó cómo supo tan pronto que las sumas eran iguales el niño explicó que si se saca un símbolo de "4" y se pone en / "2", es lo mismo que "3" y "3". Este es otro ejemplo de pensamiento activo.

Finalmente, algunas veces los niños deciden contar las cartas a distribuir. Los niños de primer grado no siempre pueden imaginarse que pasa cuando encuentran números desiguales y a algunos ni les importa.

Esto es sin ninguna duda el comienza de la división y las mentes activas comienzan a trabajar en división en su nivel y a su modo.

Nótese que la evaluación anterior no está basada en la comparación del

del grupo experimental con otro grupo.

No creo que un método que produzca una mayor memorización al final del primer grado sea necesariamente el mejor. Sin duda es interesante comparar// el grupo experimental y el otro en la tabla 1. Se pueden hacer las siguien-/ tes observaciones:

1. La diferencia entre los dos grupos no es consistente cuando se trabajan sumandos hasta 6.
2. El grupo experimental es consistentemente superior cuando se usan / números mayores (de 7 a 10).

Los resultados aquí discutidos conciernen a respuestas dadas oralmente por los niños. ¿Qué pasa con su habilidad en respuestas escritas? Los niños/ del grupo experimental hacen aritmética sin lápices. La decisión que no re-/ quiere escritura se hizo teniendo en cuenta la distinción que hace Piaget entre **abstracción y representación** me permite enfatizar el pensamiento (abs- / tracción) sobre la producción de respuestas escritas (representación).

La abstracción (abstracción reflexiva) se refiere a la creación y coordinación de relaciones. Cuando vemos una lapiecera roja y una azul, por e-/ jemplo, podemos pensar que son diferentes. Esta diferencia no existe en una/ lapicera o en la otra ni en ninguna realidad exterior. Está en la relación / creada por el individuo que puso los dos objetos en relación. Las dos lapiceras pueden considerarse también similares. Esta es otra relación creada por/ el individuo a través de la abstracción reflexiva. El individuo puede aún // poner las lapiceras en la relación "dos". Cuando él pone "dos" y "dos" en una relación aditiva, esto es también una abstracción reflexiva.

Un individuo que haya creado estas relaciones puede representarlas de/ diferentes maneras. La relación "dos", por ejemplo, puede representarse oralmente por la palabra "dos" o gráficamente por "o o" ó "2".

Estas diferencias entre abstracción y representación me permiten elaborar la hipótesis de que una vez que el niño construye sumas (por abstracción reflexiva) él está en condiciones de representar ese conocimiento en el pa-/ pel con la mayor facilidad. Por eso, yo dejo que los niños estén libres para pensar y hablar, sin recargarlos con que tengan que dar respuestas por escrito. Cuando les doy como test hojas de trabajo, ellos no tienen dificultad en volcar su conocimiento de las sumas en el papel.

VALOR POSICIONAL

Todos los programas de aritmética de primer grado que yo conozco enseñan el valor posicional (dando atados de 10 pajitas, y haciendo decir a los/ niños y escribirlo: "2 diez y 6 unos", etc.)

Sin embargo, el valor posicional es cognitivamente imposible de entender para niños de primer grado y por lo tanto, es un objetivo inapropiado. / Yo baso esta afirmación en las investigaciones que hice y en la teoría de // Piaget en la investigación del número.

El método que yo usé fue una adaptación del creado por Mieko Kamii /// (1980-82). Con esta técnica, ella encontró los porcentajes que se muestran / en la tabla 2 de niños de distintas edades que interpretan el "1" de "16" // con sentido posicional.

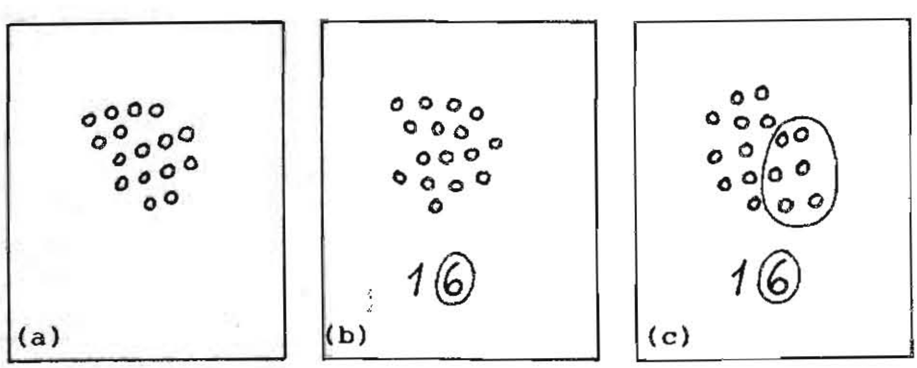
1. Puse 16 chapitas y pedí al niño que las contara e hiciera un dibujo con "todas ellas". Casi todos los niños hacen un dibujo como se muestra en la figura 2 (a) (Por supuesto, se les había enseñado el valor posicional).

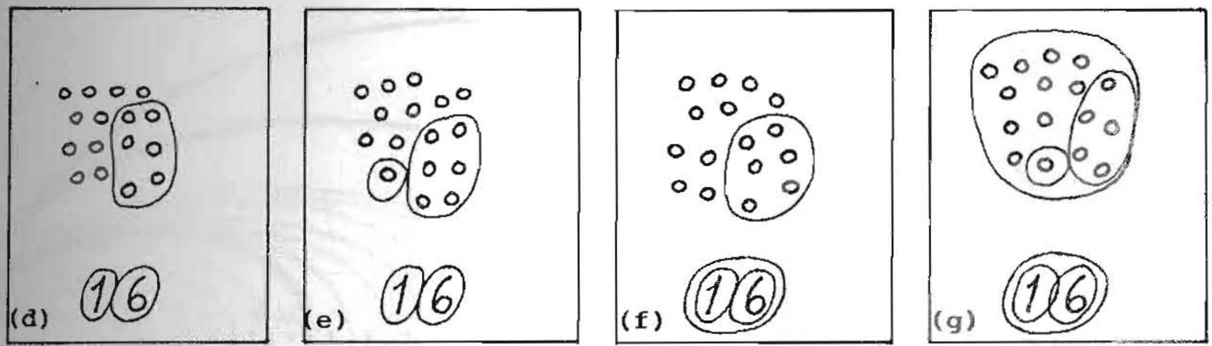
Tabla 2

Edad	Porcentaje
6	0
7	12
8	17
9	46

2. Luego le pedí que escribiera "dieciséis en número" en la misma hoja para que mostrara que allí había dieciséis chapitas. Ningun chico, aún de primer grado, tuvo dificultad en escribir "16".

Figura 2





3. Luego pregunté al niño qué parte significa ésto, marcando el "6" de "16" como se muestra en la figura 2 (b), pidiéndole que indique en/ el dibujo lo que "6" quiere decir. Los niños casi siempre responden encerrando 6 tapitas (figura 2 (c)).

4. Luego pregunté al niño qué parte significa ésto, marcando el "1" de "16" como se indica en la figura 2 (d). Es típico que los niños de/ primer grado encierren una tapita como se muestra en la figura 2 // (e).

5. Luego pregunté al niño que quería decir "todo", marcando "16" figura 2 (f). Todos los niños de primer grado rodean el grupo entero de objetos (figura 2 (g)). Cuando pregunté por qué éstos (los nueve dibujos de arriba a la izquierda) no habían sido encerrados antes, la respuesta típica es: "no necesitamos encerrarlos ... porque escri-/ bir dieciséis es con un "1" y un "6".

La tabla 3 muestra el porcentaje de niños de varios grados que mues- / tran 10 chapitas para lo que quiere decir "1" en "16". La razón para esta dificultad es que la tarea requiere la construcción de 2 niveles de estructura mental (como se muestra en la figura 3).

Tabla 3

Grado	Porcentaje	Edad
1	0	6
4	51	9
6	60	11
8	78	13

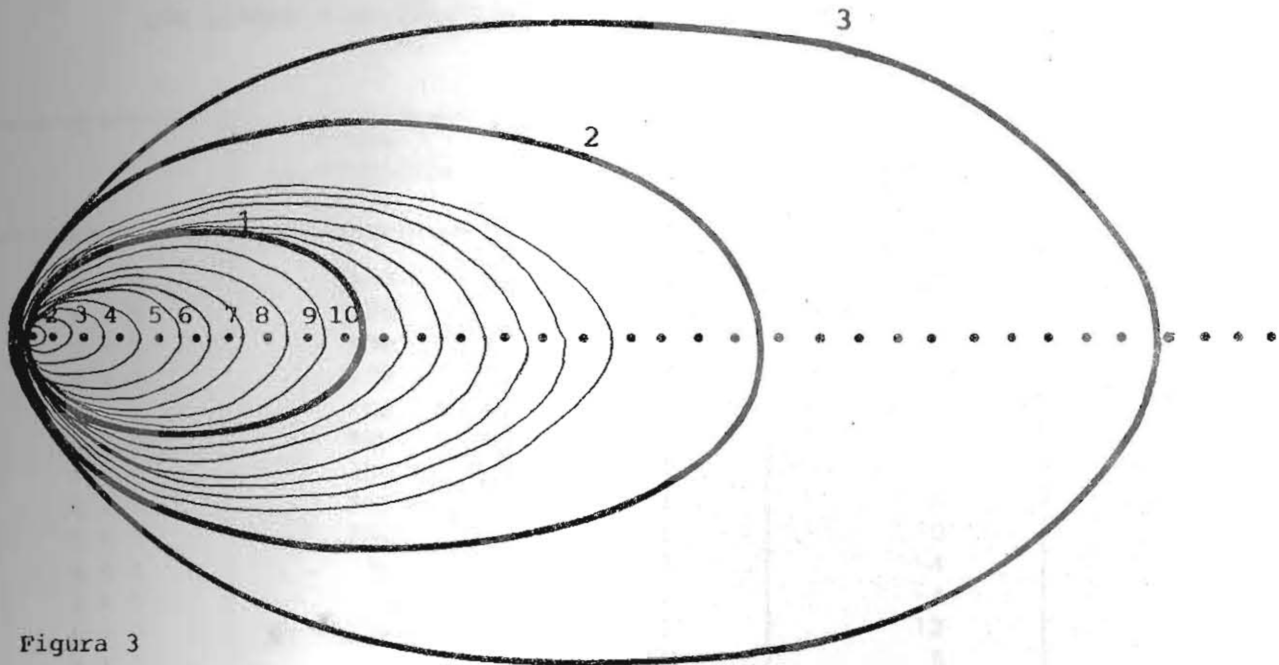


Figura 3

Puesto que los niños de primer grado están todavía construyendo el primer nivel con la operación +1 (por abstracción reflexiva) ellos no pueden // construir simultáneamente el segundo nivel que implica unidades de mayor orden (de 10). Para los que no creen en las estructuras mentales, les ofrezco/ este otro argumento adicional: el valor posicional implica **división** (26:10 = 2, y sobran 6) y **multiplicación** (el "2" en "26" quiere decir 2 x 10). Estas/ operaciones son demasiado difíciles para niños de primer grado. Ellos, por / lo tanto, no pueden asimilar el sistema escrito representativo y convencio-/ nal.

Hacer, empíricamente, atados de palillos, dibujar círculos alrededor / de grupos de 10 objetos, y escribir "2 dieces y 6 unos" es una cosa. La construcción mental de una estructura jerárquica es otra cosa. (Kamii, 1982).

TABLA 1

PORCENTAJE DE NIÑOS DE PRIMER GRADO

QUE DIERON RESPUESTA CORRECTA INMEDIATAMENTE

	Grupo Experimental n= 24	Grupo Testigo n= 12	Diferencia
2 + 2	100	100	0
5 + 5	100	92	8
5 + 5	100	100	0
4 + 1	100	100	0
6 + 1	100	100	0
5 + 1	100	100	0
1 + 4	100	100	0
2 + 3	100	92	8
5 + 2	100	92	0
4 + 4	96	100	-4
1 + 5	96	100	-4
6 + 6	88	75	13
4 + 2	88	83	5
5 + 2	88	92	-4
2 + 5	88	92	-4
6 + 2	88	83	5
2 + 6	88	67	21
6 + 3	79	67	12
6 + 5	75	92	-17
2 + 4	75	92	-17
5 + 4	71	83	-12
4 + 3	71	83	-12
3 + 4	71	75	-4
4 + 6	67	50	17
5 + 3	63	83	-20
3 + 6	63	67	-4
3 + 5	63	75	-12
6 + 5	54	58	-4
5 + 6	50	58	-8
9 + 1	100	100	0
7 + 2	100	83	17
1 + 10	100	92	8
10 + 10	100	75	25
2 + 8	88	67	21
7 + 3	83	67	16
9 + 2	79	67	12
9 + 9	63	58	5
8 + 5	54	42	12
8 + 8	54	42	12
7 + 7	50	50	0
5 + 7	50	58	-8
7 + 8	38	25	13

Actividad de aprendizaje Nº 1

A partir de las reflexiones surgidas de la lectura de este Documento de trabajo:

a) Analice las propuestas didácticas correspondientes al/ Primer Ciclo de los "Lineamientos Curriculares de /// 1971" (u otro de la década del 70 utilizado en su re-/ gión) y otra más reciente.

b) Confróntelas y registre analogías y diferencias.

Actividad de aprendizaje Nº 2

a) Observe y registre 1 clase de Matemática del Primer Ciclo referida a temas abordados en el presente Documento de trabajo/ (numeración - adición - sustracción).

b) Trate de inferir el modelo didáctico subyacente en ella (relacione con el Documento de trabajo Nº 4).

c) Luego, en el grupo, compare su registro con el de los otros / participantes, tratando de detectar el modelo didáctico utilizado habitualmente en la práctica.

Actividad de aprendizaje Nº 3

El grupo llegó a detectar el modelo didáctico utilizado / en las clases de Matemática en el Primer Ciclo (Actividad de a-/ prendizaje Nº 2).

Compare este modelo con el propuesto en el presente Documento y discuta en torno a los aspectos metodológicos:

* coincidentes
* contradictorios
* diferentes

La Profesora Norma Sanguineti de Saggese, autora de este Documento de trabajo, es egresada del Instituto Nacional Superior del Profesorado en la carrera de Matemática y Cosmografía.

Participó en la evaluación del Diseño Curricular para la Escuela Primaria/1981 y en la elaboración de la asignatura Matemática del Diseño Curricular de la Escuela Primaria Común/1986, ambos de la Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.

Es coautora de "Aprendizaje y Matemática: La medida" libros para el maestro y para los alumnos de Editorial Plus Ultra.

Ha participado en Congresos Nacionales y Extranjeros referidos a su especialidad.

Es profesora de Matemática y su Didáctica en la Escuela Normal Superior Nº 4, de Capital Federal.

Actualmente se desempeña como Subdirectora Nacional de Enseñanza Media.

Asesoró pedagogicamente la profesora Celia Mendez de D'Alessio.

Redactaron y organizaron las actividades del presente documento, las licenciadas:

Lamboglia, Susana (Pedagoga)

Pires Mateus, Susana (Socióloga)

BIBLIOGRAFIA

Piaget, Jean y Szeminska, A. Génesis del número en el niño. Guadalupe, Buenos Aires, 1975.

Labinowicz, E. "Introducción a Piaget". Fondo Educativo Interamericano, 1982.

Kamii, Constance El número en la educación preescolar. Visor, Madrid.

Mialaret, Gastón Las Matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan. Aprendizaje. Visor, Madrid, 1984.

Vergnaud, Gerard y Durand C. en César Coll "Psicología Genética y aprendizajes escolares". Siglo XXI, Madrid, 1983.