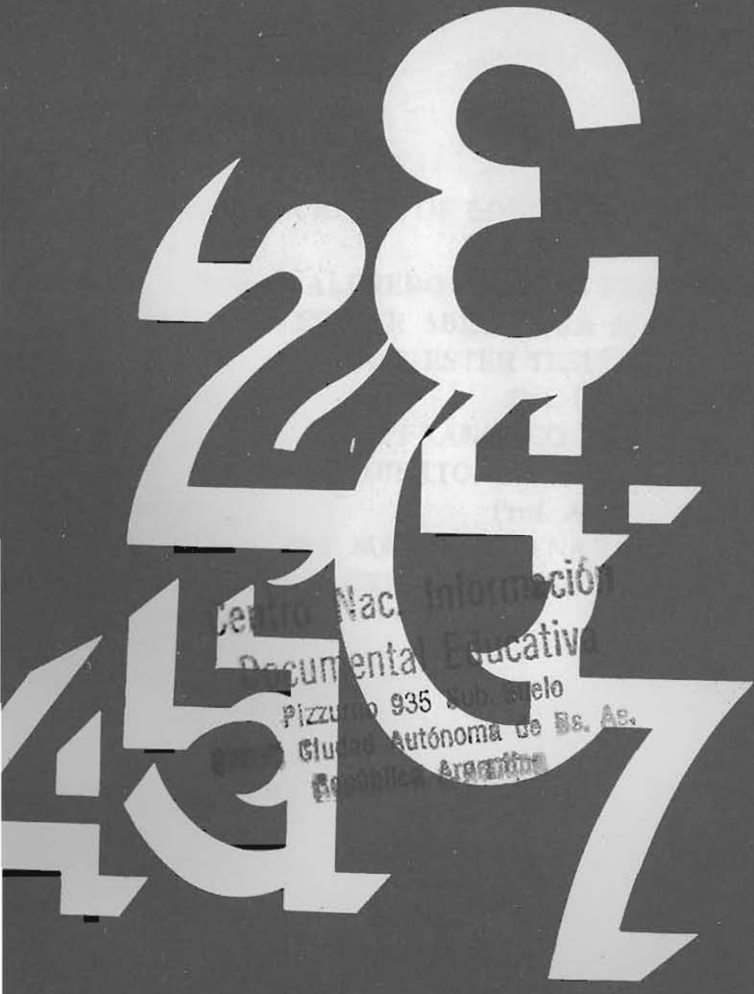
Ministerio de Cultura y Educación

Consejo Nacional de Educación

Educación para la Reconstrucción

Nº 9

Matemática 3



El Consejo Nacional de Educación, con el fin de brindar a los docentes dependientes del Organismo el apoyo que les permita desarrollar su labor en forma más eficiente, pone en sus manos esta primera parte de la publicación de Geometría.

Se pretende con ella, en forma orgánica y actualizada, brindar en función unificadora, conceptos básicos que todo docente debe dominar para aplicar en el nivel primario.

Los contenidos desarrollados están dirigidos a los docentes y no a los alumnos. Para ser presentados en el aula, el maestro deberá reelaborarlos y graduarlos teniendo en cuenta el nivel de maduración de los niños con los que trabaja.

Los maestros hallarán en éste trabajo una variada ejercitación que les permitirá una evaluación luego de la lectura de cada capítulo, encontrando en las últimas hojas las respuestas a los ejercicios propuestos.

I. – ENTES GEOMETRICOS FUNDAMENTALES: PUNTO, RECTA Y PLANO

1.– CONCEPTOS PRIMITIVOS:

El punto, la recta y el plano son entes fundamentales o *conceptos primitivos*, por lo tanto no se definen.

Existen infinitos puntos, rectas y planos.

El conjunto de *todos* los puntos se llama *espacio*.

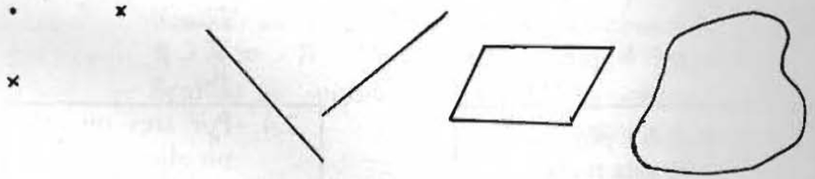
El espacio es el conjunto referencial en Geometría.

Los *planos* y las *rectas* son subconjuntos del espacio.

1.1.– Representación y notación:

Como el punto, la recta y el plano son entes fundamentales que no se definen, se conviene en representarlos así:

Puntos **Rectas** **Planos**

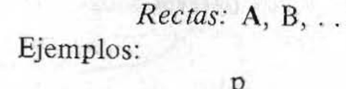


Acostumbramos a designar los puntos con letras mayúsculas de imprenta y las rectas con minúsculas.

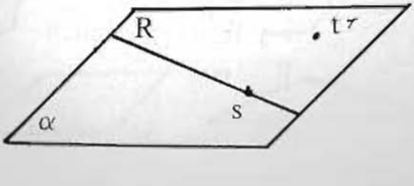
Sin embargo, conforme con los conceptos expresados en 1.–, la notación que adoptaremos es la siguiente:

Puntos: a, b, ... (elementos)
Rectas: A, B, ... (conjuntos)

Ejemplos:



$p \in A$

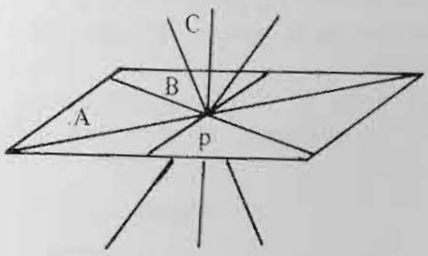


$$R \subset \alpha \quad \begin{cases} s \begin{cases} \in \alpha \\ \in R \end{cases} \\ t \begin{cases} \in \alpha \\ \notin R \end{cases} \end{cases}$$

Toda recta del plano es un conjunto incluido en él, y por consiguiente R es un *subconjunto* de α.

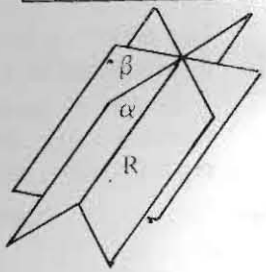
2.– Propiedades fundamentales:

2.1.– Por un punto pasan infinitas rectas



$p \in A; p \in B; p \in C$

2.2.– Por una recta pasan infinitos planos

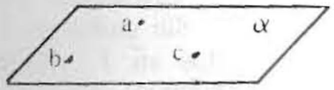


$R \subset \alpha; R \subset \beta$ . . . . . .

2.3.– Por dos puntos pasa una sola recta

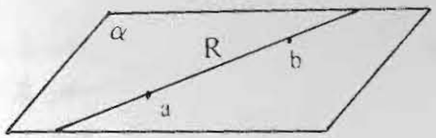
por a y b pasa R
R está determinada por a y b

2.4.– Por tres puntos no alineados pasa un plano único



por a, b y c pasa α
α está determinado por a, b y c

2.5.– La recta determinada por dos puntos de un plano está *incluida en el plano*



$a \in \alpha ; b \in \alpha$
a y b determinan R
$R \subset \alpha$

3.– Ordenación de los puntos de la recta:

Los puntos de una recta pueden relacionarse de acuerdo a dos *ordenamientos naturales opuestos* o *sentidos*, tales que:

- en ninguno de los dos sentidos existe un primer o último punto.
- entre dos puntos diferentes existe siempre otro punto, por eso se dice que la recta es *densa*.
- dados dos puntos diferentes *a* y *b*, según el sentido que se considere, resulta que *a* precede al punto b, o bien *b* precede al punto a.

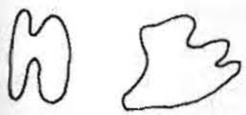
Ejemplo:

Sentido ab: sentido en el cual *a* precede a b o bien *b* sigue a *a*

Sentido ba: sentido en el cual *b* precede a *a* o bien *a* sigue a *b*

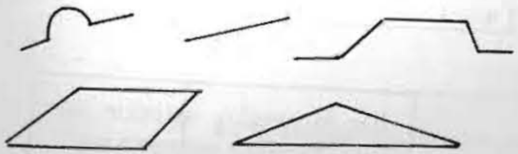
II. – FIGURAS

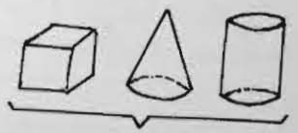
Todo conjunto de puntos es una figura.
Ejemplos:



Figuras en el plano

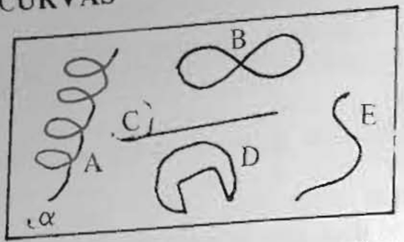
Figuras en el espacio





cuerpos geométricos

1.– CURVAS



Cada una de las figuras dibujadas en α es una *curva*.

1.1.– *Curvas abiertas y cerradas*

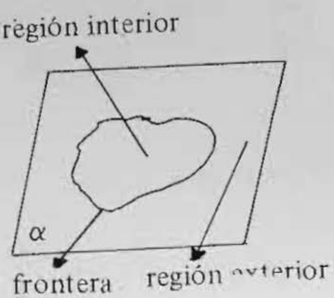
Las curvas pueden ser:

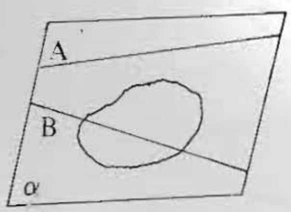
abiertas
- simples (ejemplo: C, E)
- cruzadas (ejemplo: A)

cerradas
- simples (ejemplo: D)
- cruzadas (ejemplo: B)

1.2.– *Región interior. Región exterior. Frohtera*

Toda curva cerrada simple separa al plano en dos regiones: una *interior* y otra *exterior*. La curva es la *frontera*.





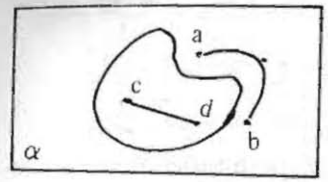
A ⊂ región exterior

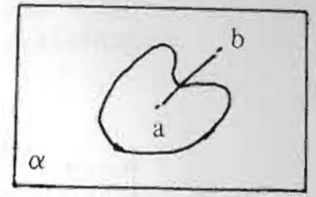
B ⊄ región interior

> En la región interior no está incluida ninguna recta

Dos puntos de una misma región siempre pueden unirse mediante una curva que no corta la frontera.

Dos puntos de regiones diferentes pueden unirse mediante una curva que corta la frontera.





2.– IGUALDAD Y CONGRUENCIA DE FIGURAS:

2.1.– *Igualdad:*

Recordar:

Conjuntos iguales son los que están formados por los mismos elementos, es decir que *un conjunto solamente es igual a sí mismo.*

Por lo tanto, la igualdad de conjuntos es la identidad.

Ejemplos:

$A = \{\text{vocales}\}$

$B = \{a, e, i, o, u\}$ $\quad A = B = C$

$C = \{x/x \text{ es vocal}\}$

A, B y C son nombres distintos para designar *el mismo conjunto.*

Ya que toda figura es un conjunto de puntos la definición de igualdad de conjuntos es válida para definir figuras iguales.

En consecuencia, el concepto de igualdad *sólo es aplicable a una figura relacionada consigo misma,* es decir que *toda figura solamente es igual a sí misma.*

> La igualdad de figuras es la identidad

Si una figura cualquiera se designa F, resulta:

$$\boxed{F = F}$$

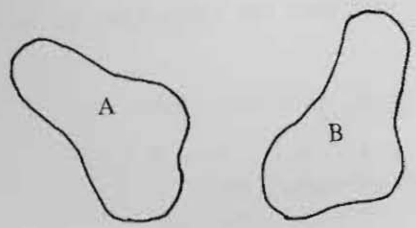
En caso de que a dicha figura se la llame también A, resulta:

$$\boxed{F = A}$$

porque F y A son nombres distintos para designar la misma figura.

2.2.– *Congruencia:*

Dos figuras son congruentes si mediante un movimiento se pueden superponer de modo que todos los puntos de una de ellas se correspondan ordenadamente uno a uno con los de la otra.



Notación: $A \cong B$
y $B \cong A$.
se lee: A congruente con B
B congruente con A

Forma práctica de comprobar la congruencia de figuras:

Para determinar si las figuras A y B son congruentes, es suficiente calcar una de ellas sobre una hoja de papel, recortarla y superponerla sobre la otra, moviendo el calco procurando lograr una perfecta adaptación. Si se logra esta perfecta adaptación, las figuras son congruentes.

Por este procedimiento práctico podemos establecer intuitivamente que *las figuras congruentes tienen la misma forma y el mismo tamaño.*

De las consideraciones anteriores resulta que *toda figura*, además de igual, *es congruente consigo misma.*

Por ejemplo:

$$A = A \text{ y } A \cong A$$
$$B = B \text{ y } B \cong B$$

pero

$$A \neq B$$

Propiedades de la congruencia:

1º – *Reflexiva:* $F \cong F$

2º – *Simétrica:* $F \cong R \iff R \cong F$

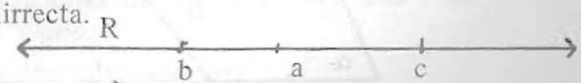
3º – *Transitiva:* $\left.\begin{array}{l} F \cong R \\ R \cong S \end{array}\right\} \Rightarrow F \cong S$

La congruencia de figuras es relación de equivalencia. Por lo tanto, en todo conjunto de figuras, al aplicar la relación "es congruente con", se determina una partición en clases de equivalencia.

III. – SEMIRRECTA, SEMIPLANO Y SEMIESPACIO

1.– SEMIRRECTA:

La figura formada por un punto de una recta y todos los que le siguen en un sentido, se llama semirrecta.



Notación: $\overrightarrow{ab}$: semirrecta de origen *a* que contiene *b*

$\overrightarrow{ac}$: semirrecta de origen *a* que contiene *c*

$$\overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{ac} = \{a\}$$

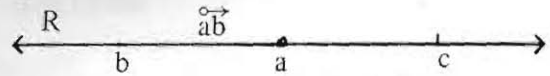
$\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ac}$: semirrectas opuestas

> Todo punto de la recta es origen de dos semirrectas opuestas.

Observación:

a) Considerada la recta como conjunto de puntos resulta que al efectuar la diferencia entre R y $\overrightarrow{ac}$, *se obtiene una semirrecta ab sin el orgien a,* llamada semirrecta abierta.

Notación:

b) 

Todo punto *a* separa a los puntos de la recta en dos semirrectas abiertas opuestas: $\overset{\circ\rightarrow}{ab}$ y $\overset{\circ\rightarrow}{ac}$. Por lo tanto en R se produce una partición en los tres siguientes subconjuntos:

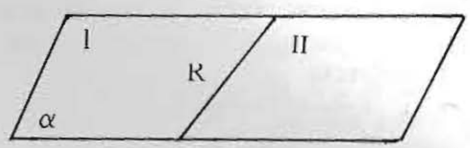
$$\boxed{\overset{\circ\rightarrow}{ab} \quad ; \quad \{a\} \quad ; \quad \overset{\circ\rightarrow}{ac}}$$

2.– SEMIPLANO:

Semiplano abierto y semiplano cerrado:

Toda recta R de un plano separa los puntos del mismo en dos regiones llamadas:

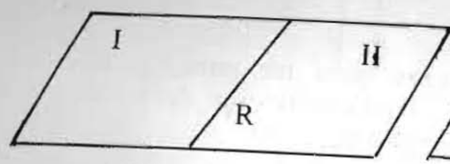
semiplanos abiertos



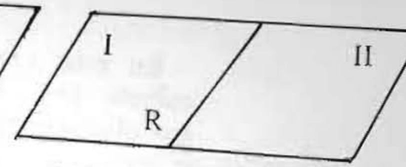
Cada una de las regiones I y II del plano, situadas a ambos lados de R, es un *semiplano abierto.*

R: *borde* o *frontera* de cada semiplano abierto

La *unión* de cada semiplano abierto con la recta R es un *semiplano cerrado* o simplemente *semiplano.*

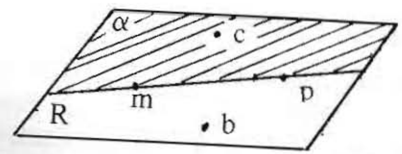


I ∪ R: s/p cerrado



II ∪ R: s/p cerrado

Notación:



a) $s/p_{(R,c)}$: semiplano de borde R que contiene a *c*
o bien:
$s/p_{(mp,c)}$: semiplano de borde mp que contiene a *c*

b) $s/p_{(R,c)}$ ab.: semiplano abierto determinado por R que contiene a *c*
o bien:
$s/p_{(mp,c)}$ ab.: semiplano abierto determinado por mp que contiene a *c*.

2.1.– *Particiones determinadas por una recta R en un plano:*

En dos subconjuntos:

Se presentan dos casos:

a) $\begin{cases} s/p_{(R,c)} \\ s/p_{(R,b)}\text{ ab.} \end{cases}$ b) $\begin{cases} s/p_{(R,c)}\text{ ab.} \\ s/p_{(R,b)} \end{cases}$

En tres subconjuntos:

Se presenta un solo caso $\left\{ \begin{array}{l} s/p_{(R,c)}ab. \\ R \\ s/p_{(R,b)}ab. \end{array} \right.$

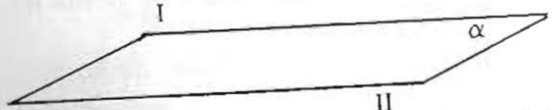
En este caso, para un punto p de α se cumple una y solamente una de las tres siguientes posibilidades:

$p \in s/p_{(R,c)}ab.$ o bien $p \in s/p_{(R,b)}ab.$ o bien $p \in R$

3.–SEMIESPACIO:

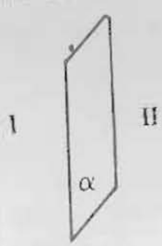
Semiespacio abierto y semiespacio cerrado:

Todo plano α separa a los puntos del espacio exteriores a él, en dos regiones I y II llamadas *semiespacios abiertos.*

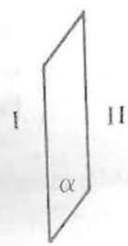


De acuerdo con este criterio los puntos del plano α no pertenecen a ninguna de las dos regiones I y II.

La unión de cada semiespacio abierto con el plano α es un *semiespacio cerrado* o simplemente *semiespacio.*



$I \cup \alpha$ = semiespacio cerrado



$II \cup \alpha$ = semiespacio cerrado

Notación:

s/e α que contiene p.
s/e α que no contiene p.
α: cara de cada semiespacio

3.1. *Particiones determinadas por un plano α en el espacio.*

Todo plano α determina en el espacio una partición:

a) *en dos subconjuntos* $\left\{ \begin{array}{l} \text{s/e } \alpha \text{ que cont. p} \\ \text{s/e abierto } \alpha \text{ que no contiene p.} \end{array} \right.$ o bien $\left\{ \begin{array}{l} \text{s/e abierto } \alpha \text{ que cont. p} \\ \text{s/e } \alpha \text{ que no cont. p} \end{array} \right.$

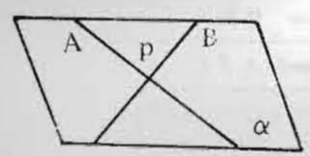
b) *en tres subconjuntos* $\left\{ \begin{array}{l} \text{s/e abierto } \alpha \text{ que cont. p} \\ \text{plano } \alpha \\ \text{s/e abierto } \alpha \text{ que no cont. p} \end{array} \right.$

IV. – POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

1.– RECTAS COPLANARES:

Dadas dos rectas A y B de un plano α, pueden presentarse las siguientes situaciones:

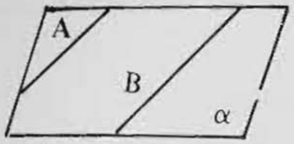
1.1.– A y B tienen solamente un punto común.



A y B determinan en α cuatro regiones llamadas *ángulos* — A y B *secantes*

$A \cap B = \{ p \}$

1.2.– a) A y B no tienen ningún punto común.

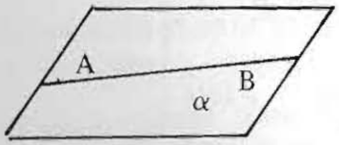


A y B disjuntas

$A \cap B = \phi$

b) A y B tienen todos los puntos comunes.

A y B *paralelas*



$A \cap B = A = B$

A y B coincidentes

> Dos rectas paralelas *no tienen ningún punto común o son coincidentes.*
>
> Dos rectas coplanares son paralelas cuando *no son secantes.*
>
> Toda recta es paralela a sí misma.

Propiedades del paralelismo de rectas:

– *Reflexiva:* $A \parallel A$

– *Simétrica:* $A \parallel B \iff B \parallel A$

– *Transitiva:* Si $\left.\begin{matrix} A \parallel B \\ B \parallel C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \parallel C$

El parapelismo entre rectas es una relación de equivalencia.

Dirección:

En el conjunto de rectas la relación "...es paralela a..." determina una partición. Cada subconjunto de la partición es una clase de equivalencia que define una *dirección*, de modo que dos rectas tienen la misma dirección si pertenecen a una misma clase.

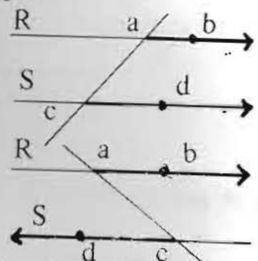
Semirrectas del mismo sentido:

Dos semirrectas incluidas en la misma recta son del mismo sentido si una incluye a la otra.

$\vec{bc} \subset \vec{ac}$

Dos semirrectas incluidas en rectas paralelas diferentes tienen el mismo sentido si están incluidas en el mismo semiplano con respecto a la recta determinada por los orígenes.

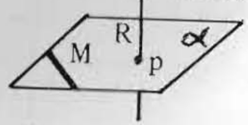
Ejemplo:



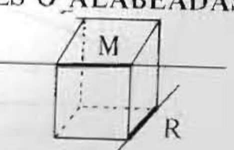
$\left.\begin{matrix} R \parallel S \\ \vec{ab} \subset s/p_{(ac,b)} \\ \vec{cd} \subset s/p_{(ac,b)} \end{matrix}\right\}$ $\vec{ab} \parallel \vec{cd}$ y del mismo sentido

$\left.\begin{matrix} R \parallel S \\ \vec{ab} \subset s/p_{(ac,b)} \\ \vec{cd} \subset s/p_{(ac,d)} \end{matrix}\right\}$ $\vec{ab} \parallel \vec{cd}$ y de sentido contrario

2.– RECTAS NO COPLANARES O ALABEADAS:



$M \cap R = \phi$



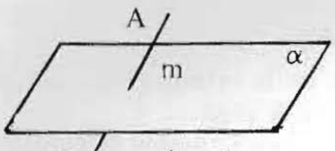
M y R *alabeadas*

> Dos rectas son *alabeadas* cuando no son coplanares.
>
> Dos rectas *alabeadas no son secantes ni paralelas.*

V. – POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO

Dados un plano α y una recta A, pueden presentarse los siguientes casos:

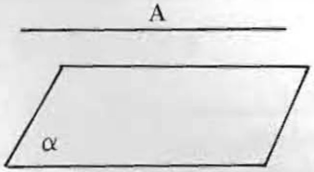
1.– A y α tienen solamente un punto común.



$A \cap \alpha = \{ m \}$

$A \not\subset \alpha$ — A y α *secantes*

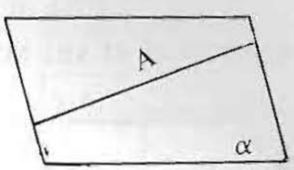
2.– a) A y α no tienen ningún punto común.



$A \cap \alpha = \phi$

$A \not\subset \alpha$

b) Todos los puntos de A pertenecen a α



$A \cap \alpha = A.$

$A \subset \alpha$

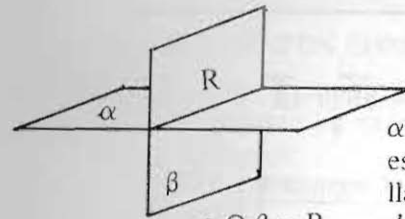
(casos a y b): A y α paralelos

Una recta y un plano son *paralelos* cuando no tienen ningún punto común o bien cuando la recta está incluida en el plano.

VI. – POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Dados dos planos α y β pueden presentarse los siguientes casos:

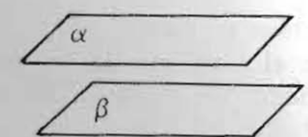
1.– α y β tienen solamente una recta común.



$\alpha \cap \beta = R$

α y β determinan en el espacio cuatro regiones llamadas *ángulos diedros*. — α y β *secantes*

2.– a) α y β no tienen ningún punto común.



$\alpha \cap \beta = \phi$

α y β *disjuntos*

b) α y β tienen todos los puntos comunes.

$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

α y β *coincidentes*

(casos a y b): α y β *paralelos*

Dos planos paralelos *no tienen ningún punto común o son coincidentes.* Todo plano es paralelo a sí mismo.

VII. – SEGMENTO

1.– DEFINICIONES:

1.1.– *Segmento:* Se llama segmento ab a la intersección de las semirrectas ab y ba.

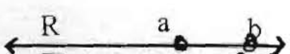
$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab} \subset \overrightarrow{ab} \\ \overline{ab} \subset \overrightarrow{ba}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{ba} = \overline{ab}$$

– a y b: extremos del segmento $\left\{\begin{array}{l} a \in \overline{ab} \\ b \in \overline{ab}\end{array}\right.$

– Todo punto de $\overline{ab}$ distinto de *a* y de *b*, es punto interior.

– Si a = b ⇒ $\overline{ab}$: segmento nulo.

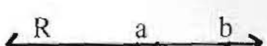
1.2.– *Segmento abierto:* es el conjunto de los puntos interiores de un segmento (se excluyen los extremos).



$\overline{ab} - \{a, b\} = \overset{\circ\!-\!\circ}{ab}$ $a \notin \overset{\circ\!-\!\circ}{ab}$ $b \notin \overset{\circ\!-\!\circ}{ab}$

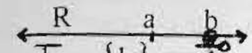
Notación
$\overset{\circ\!-\!\circ}{ab}$ o bien]ab[
se lee:
segmento abierto ab

1.3.– *Segmento semiabierto:* (se excluye un extremo).



$\overline{ab} - \{a\} = \overset{\circ\!-}{ab}$; $a \notin \overset{\circ\!-}{ab}$

Notación
$\overset{\circ\!-}{ab}$ o bien]$\overline{ab}$
se lee:
segm. semiabierto ab



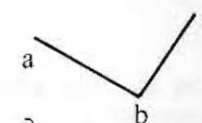
$\overline{ab} - \{b\} = \overset{-\!\circ}{ab}$, $b \notin \overset{-\!\circ}{ab}$

Notación
$\overset{-\!\circ}{ab}$ o bien $\overline{ab}$[
se lee:
segmento semiabierto ab

2.– SEGMENTOS CONSECUTIVOS:

Dos segmentos son consecutivos cuando tienen solamente un extremo común.

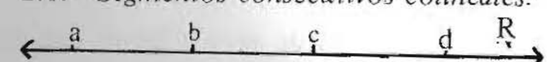
Ejemplos:



$\overline{ab} \cap \overline{bc} = \{b\}$

b: extremo común

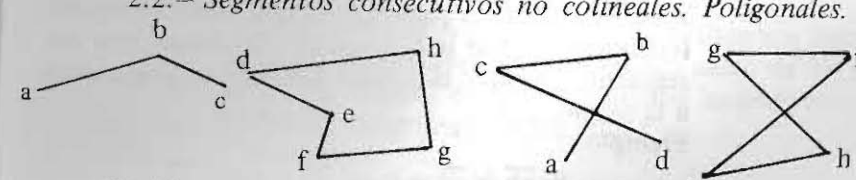
2.1.– *Segmentos consecutivos colineales:*



$\overline{ab} \subset R$; $\overline{bc} \subset R$; $\overline{cd} \subset R$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab} \text{ y } \overline{bc} \text{ consecutivos} \\ \overline{bc} \text{ y } \overline{cd} \text{ consecutivos}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}: \textit{consecutivos}$$

2.2.– *Segmentos consecutivos no colineales. Poligonales.*



abierta   cerrada

poligonal simple

abierta   cerrada

poligonal cruzada

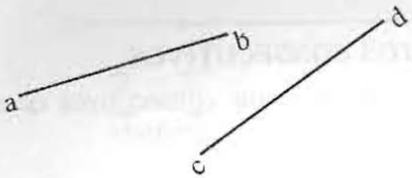
3.– COMPARACION DE SEGMENTOS:

Dados dos segmentos pueden presentarse las siguientes posibilidades:

3.1.– *Segmentos congruentes:*

Dos segmentos son congruentes cuando al transportar uno, sobre otro mediante un movimiento, coinciden sus extremos.

Ejemplo:



$\overline{ab} \cong \overline{cd}$

Propiedades de la congruencia de segmentos:

a) *Reflexiva:* $\overline{ab} \cong \overline{ab}$

b) *Simétrica:* Si $\overline{ab} \cong \overline{cd} \Leftrightarrow \overline{cd} \cong \overline{ab}$

c) *Transitiva:* $\left.\begin{array}{l}\text{Si } \overline{ab} \cong \overline{cd} \\ \text{y } \overline{cd} \cong \overline{ef}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ab} \cong \overline{ef}$

La congruencia de segmentos es una *relación de equivalencia.*

Longitud:

En el conjunto de segmentos la relación "...es congruente con..." determina una partición. Cada subconjunto de la partición es una clase de equivalencia que define una *longitud.* De modo que dos segmentos tienen la misma longitud si pertenecen a la misma clase.

Ejemplo:

Si $\overline{ab} \cong \overline{cd} \Rightarrow$ long. $\overline{ab}$ = long. $\overline{cd}$

3.2.– *Segmentos no congruentes:*

Dados dos segmentos no congruentes, resulta que uno de ellos es siempre congruente con una parte propia del otro.

$\overline{ab} \ncong \overline{cd}$

$\overline{ab} \cong \overline{cb'}$; $\overline{cb'} \subset \overline{cd}$

long. $\overline{ab}$ < long. $\overline{cd}$ long. $\overline{cd}$ > long. $\overline{ab}$

> El uso de los símbolos <, =, y > entre segmentos se refiere a la longitud de los mismos.

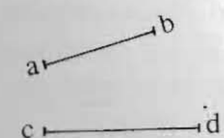
4.– OPERACIONES CON SEGMENTOS:

4.1.– *Adición:*

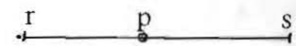
Dado que los segmentos son conjuntos de puntos y los conjuntos no se suman, es necesario aclarar qué se entiende por *adición de segmentos.*

Dados $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$, ¿ qué significa: $\overline{ab} + \overline{cd}$?

Sean por ejemplo:



Construimos:



$$\text{tal que} \left\{\begin{array}{l} \overline{rp} \cong \overline{ab} \\ \overline{ps} \cong \overline{cd} \\ \left.\begin{array}{l}\overline{rp} \\ \text{y} \\ \overline{ps}\end{array}\right\} \text{colineales}\end{array}\right.$$

La construcción geométrica que realizamos para hallar lo que comúnmente llamamos suma de $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ es la *unión* de dos segmentos *consecutivos colineales congruentes* a los dados.

Entonces:

$\boxed{\overline{ab} \cup \overline{cd} \cong \overline{rs}}$ es decir $\boxed{\overline{ab} + \overline{cd} = \overline{rs}}$

Cualquier otro segmento congruente con $\overline{rs}$ puede considerarse como resultado de la unión.

La longitud de $\overline{rs}$ es la suma de las longitudes de $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$.

4.2.– *Sustracción:*

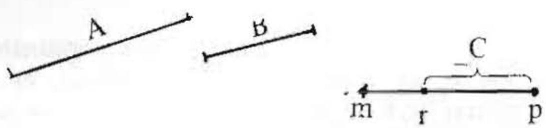
Dados dos segmentos mp y qr, tales que $\overline{mp} > \overline{qr}$, se llama *diferencia* al segmento st que sumado a $\overline{qr}$ dé por resultado $\overline{mp}$.

Entonces:

$$\boxed{\overline{mp} - \overline{qr} = \overline{st} \Leftrightarrow \overline{st} + \overline{qr} = \overline{mp}}$$

Construcción geométrica:

Sean por ejemplo: Construimos



$\overline{mp} \cong A$
$\overline{mr} \cong B$

$$\overline{A} - \overline{B} = \overline{C} \Longleftrightarrow \overline{C} + \overline{B} = \overline{A}$$

4.3.– *Producto de un segmento por un número natural:*

Se llama *producto* de $\overline{ab}$ por un número natural n a la suma de n segmentos congruentes al dado. $\overline{ab} \times 6 = \overline{as}$ tal que $\overline{as}$ es 6 veces $\overline{ab}$

4.4.– *Cociente de un segmento por un úmero natural:*

Se llama cociente de un segmento ab por un número natural n, al segmento que multiplicado por n es igual a $\overline{ab}$.

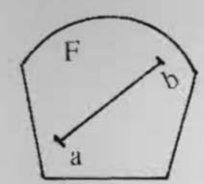
$$\overline{ab} \div 3 = \overline{as} \text{ tal que } \overline{as} \times 3 = \overline{ab}$$

VIII. – FIGURAS CONCAVAS Y FIGURAS CONVEXAS

Una figura es *convexa* cuando *todo* segmento determinado por dos puntos de la misma, está incluido en ella.

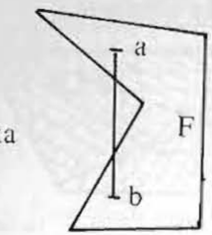
En caso contrario, es *cóncava.*

Ejemplos:



$\overline{ab} \subset F$

F → fig. convexa

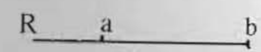


$\overline{ab} \not\subset F$

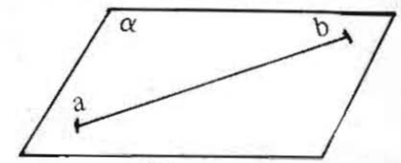
F → fig. cóncava

De acuerdo con la definición de figuras convexas resulta que:

> La recta, la semirrecta, el segmento, el plano, el semiplano, el espacio y el semiespacio, son *figuras convexas.*

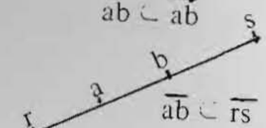


$\overline{ab} \subset R$

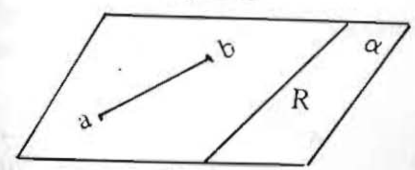


$\overline{ab} \subset \alpha$

$\overline{ab} \subset \overrightarrow{ab}$



$\overline{ab} \subset \overline{rs}$



$\overline{ab} \subset s/p_{(R,a)}$

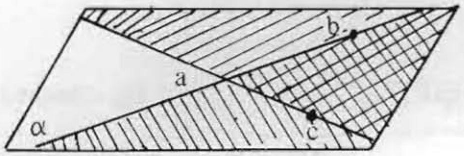
IX. – ANGULOS

Dado que las definiciones son convenciones, se pueden adoptar diferentes criterios para definir ángulos.

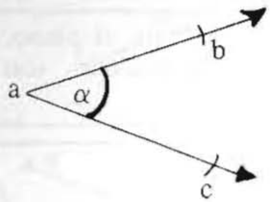
1.– CONSIDERANDO SEMIPLANOS:

1.1.– Angulos convexos:

Definición: Dados tres puntos no alineados *a, b, c,* *se llama ángulo convexo, o simplemente ángulo,* a la intersección de los semiplanos ab que contiene c y ac que contiene b.



$$s/p_{(ac,b)} \cap s/p_{(ab,c)} = \widehat{bac} \text{ convexo o simplemente ángulo}$$

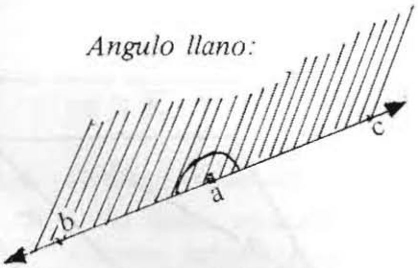


$\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ac}$: lados

$\overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{ac} = \{a\}$

a: vértice

Angulo llano:



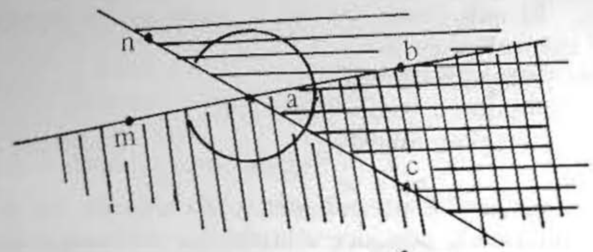
$\widehat{bac}$: llano

Los lados de un ángulo llano son semirrectas opuestas.

El ángulo llano es un semiplano cerrado y además es una figura convexa.

1.2.– *Angulos cóncavos:*

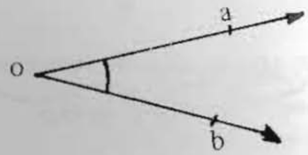
Definición: Dados tres puntos a, b, c, no alineados, se llama ángulo cóncavo a la unión de los semiplanos ab que contiene a c y ac que contiene a b.



$$s/p_{(ac,b)} \cup s/p_{(ab,c)} = \widehat{man} \text{ cóncavo}$$

2.– CONSIDERANDO SEMIRRECTAS:

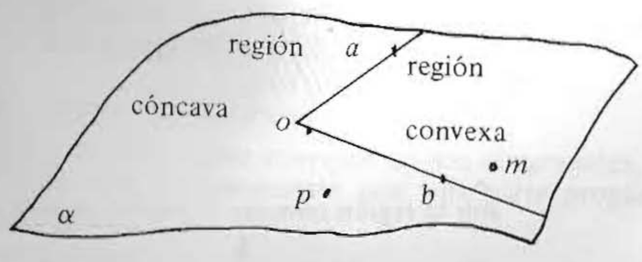
Definición: se llama ángulo a la unión de dos semirrectas de origen común.



$$\overrightarrow{oa} \cup \overrightarrow{ob} = \widehat{aob}$$

De acuerdo con este concepto el $\widehat{aob}$ está formado *solamente* por las dos semirrectas oa y ob.

El $\widehat{aob}$ separa los puntos del plano en dos regiones abiertas, una *convexa* y otra *cóncava.*



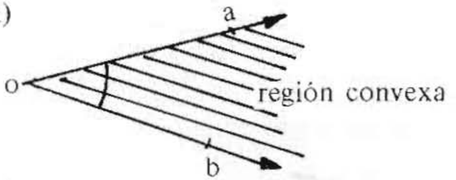
$m \notin \widehat{aob}$; $m \in$ región convexa

$p \notin \widehat{aob}$; $p \in$ región cóncava

El $\widehat{aob}$ determina en el plano α una partición en tres subconjuntos:
- región convexa
- $\widehat{aob}$
- región cóncava

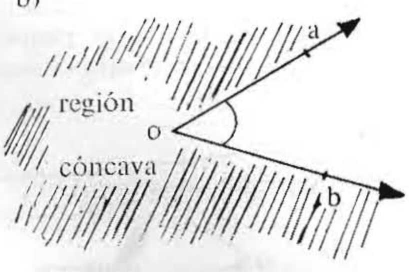
La unión de $\widehat{aob}$ con cada una de las regiones anteriores, conduce a la noción tradicional de ángulo expresada en 1.–:

a)



$$\widehat{aob} \cup \text{región convexa} = \underbrace{\text{región angular convexa}}_{\text{ángulo convexo}}$$

b)



$$\widehat{aob} \cup \text{región cóncava} = \underbrace{\text{región angular cóncava}}_{\text{ángulo cóncavo}}$$

En el desarrollo del presente trabajo se utilizará el criterio expuesto en, 1.–.

3.– COMPARACION DE ANGULOS:

Dados dos ángulos pueden presentarse las siguientes posibilidades:

3.1.– *Angulos congruentes:*

Dos ángulos convexos (o cóncavos) son congruentes cuando al transportar uno sobre el otro, mediante un movimiento, coinciden sus lados.

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$: congruentes

Notación:

$\boxed{\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}}$

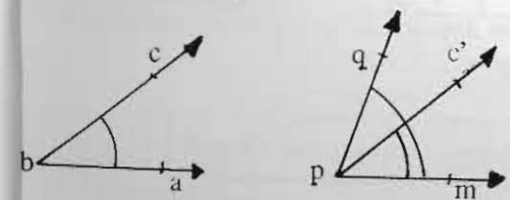
La congruencia de ángulos cumple las mismas propiedades que la congruencia de segmentos, por consiguiente es una *relación de equivalencia.*

Amplitud:

En el conjunto de ángulos convexos (o cóncavos) la relación "...es congruente con..." determina una partición. Cada subconjunto de la partición es una clase de equivalencia que define *una amplitud.* De modo que dos ángulos tienen la misma amplitud si pertenecen a la misma clase.

3.2.– *Angulos no congruentes:*

Si dos ángulos convexos no son congruentes, uno de ellos es congruente con una parte propia del otro.



$\widehat{abc} \ncong \widehat{mpq}$

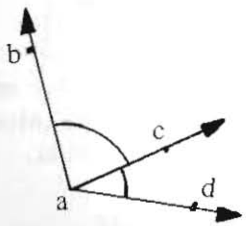
$\widehat{abc} \cong \widehat{mpc'}$ y $\widehat{mpc'} \subset \widehat{mpq}$

$$\text{ampl. } \widehat{abc} < \text{ampl. } \widehat{mpq} \Rightarrow \text{ampl. } \widehat{mpq} > \text{ampl. } \widehat{abc}$$

Debe tenerse presente que el empleo de los signos $<$, $=$ y $>$ entre ángulos se refiere a las amplitudes de los mismos.

4.– ANGULOS CONSECUTIVOS:

Dos ángulos son consecutivos cuando tienen solamente un lado común.

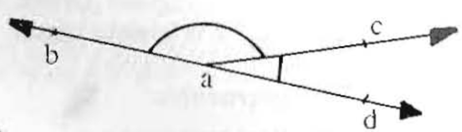


$\widehat{bac}$ y $\widehat{cad}$: consecutivos

$\widehat{bac} \cap \widehat{cad} = \overrightarrow{ac}$ (lado común)

5.– ANGULOS ADYACENTES:

Dos ángulos consecutivos son adyacentes cuando los lados no comunes son semirrectas opuestas.



$$\left.\begin{array}{l} \widehat{bac} \text{ y } \widehat{cad} : \text{consecutivos} \\ \overrightarrow{ba} \text{ y } \overrightarrow{ad} : \text{semirrectas op.} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{bac} \text{ y } \widehat{cad}: \text{adyacentes}$$

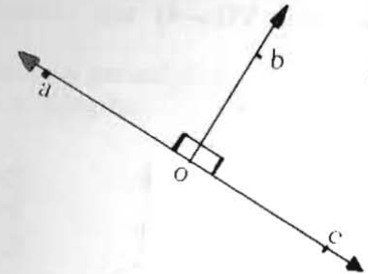
La unión de dos ángulos adyacentes es un ángulo llano.

En este caso:

$$\boxed{\widehat{bac} \cup \widehat{cad} \cong \widehat{bad} \text{ (llano)}}$$

6.– ANGULO RECTO:

Si dos ángulos adyacentes son congruentes, cada uno de ellos es un ángulo recto.



Notación:

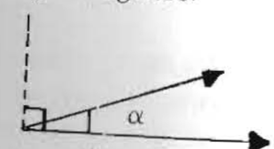
ángulo recto: 1 R

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{aob} \text{ y } \widehat{boc} : \text{adyacentes} \\ \widehat{aob} \cong \widehat{boc} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{aob} \text{ y } \widehat{boc} : \text{rectos}$$

$$\widehat{aob} = 1 \text{ R} ; \widehat{boc} = 1 \text{ R}$$

7.– ANGULOS AGUDOS Y OBTUSOS:

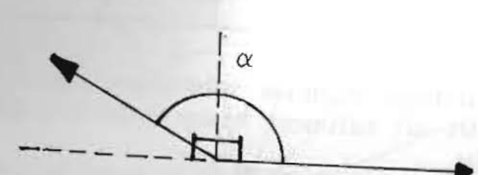
7.1.– *Angulos agudos:*



$\hat{\alpha} < 1$ R

$\boxed{\hat{\alpha} : \text{agudo}}$

7.2.– *Angulos obtusos:*



$\hat{\alpha} > 1$ R

$\hat{\alpha} < 2$ R

$\boxed{1 \text{ R} < \hat{\alpha} < 2 \text{ R}}$

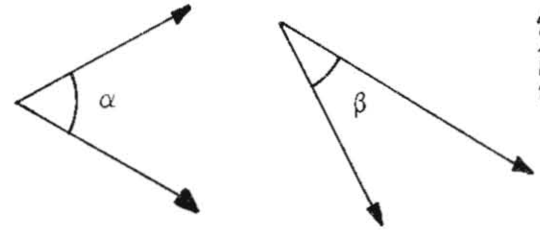
$\boxed{\hat{\alpha} : \text{obtuso}}$

8.– OPERACIONES CON ANGULOS:

8.1.– Adición:

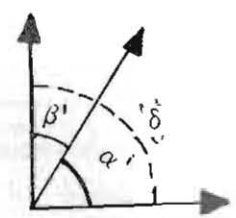
Las consideraciones hechas para adición de segmentos (ver VII.–4) son válidas para adición de ángulos.

Dados:



$\hat{\alpha}' \cong \hat{\alpha}$
$\hat{\beta}' \cong \hat{\beta}$
$\hat{\alpha}'$ y $\hat{\beta}'$: consecutivos

Se puede construir:



$$\boxed{\hat{\alpha}' \cup \hat{\beta}' \cong \hat{\delta} \text{ es decir } \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\delta}}$$

Existen infinitas soluciones, todas congruentes entre sí; entonces basta elegir una cualquiera de ellas.

La amplitud de $\hat{\delta}$ es la suma de las amplitudes de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

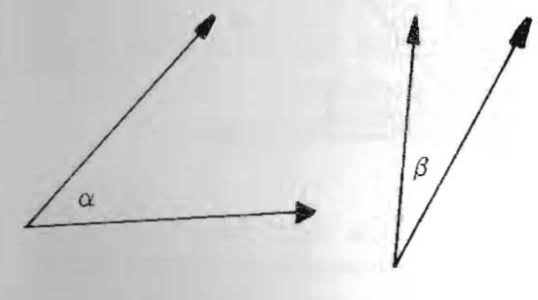
8.2.– *Sustracción:*

Dados dos ángulos α y β, tales que $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$, se

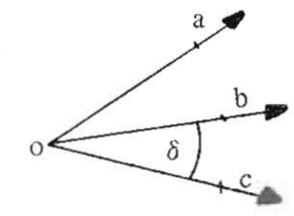
llama diferencia entre $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, al ángulo δ que sumado a $\hat{\beta}$ dé por resultado $\hat{\alpha}$.

$$\hat{\alpha} - \hat{\beta} = \hat{\delta} \Leftrightarrow \hat{\delta} + \hat{\beta} = \hat{\alpha}$$

Construcción geométrica:
Sean por ejemplo:



Construimos:



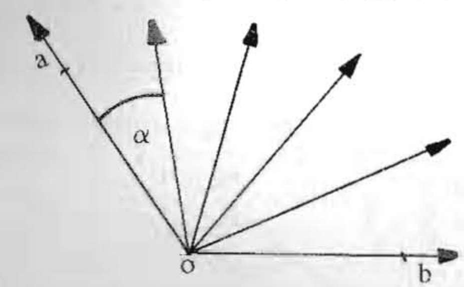
$a\hat{o}c \cong \hat{\alpha}$
$a\hat{o}b \cong \hat{\beta}$

$\hat{\alpha} - \hat{\beta} = \hat{\delta}$ porque $\hat{\delta} + \hat{\beta} = \hat{\alpha}$

8.3.– *Producto de un ángulo por un número natural:*

Se llama producto de un ángulo por un número natural n, a la suma de n ángulos congruentes al dado.

$\hat{\alpha} \times 5 = a\hat{o}b$ tal que $a\hat{o}b$ es 5 veces $\hat{\alpha}$

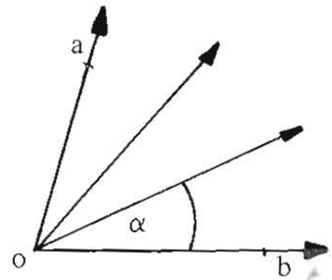


8.4.– *Cociente de un ángulo por un número natural:*

Se llama cociente de un ángulo por un número natural n, al ángulo que multiplicado por n es igual al ángulo dado.

Ejemplo:

$\widehat{aob} \div 3 \doteq \widehat{\alpha}$ porque $\widehat{\alpha} \times 3 = \widehat{aob}$



9.– MEDIDA DE ANGULOS:

A cada clase de equivalencia (ver: Amplitud, IX – 3.1.–) se le puede hacer corresponder un número que es su *medida*.

Si a cada ángulo recto se le hace corresponder el número 90, entonces 90 es la medida del ángulo recto.

Si se divide un recto por 90, se obtiene un ángulo:

$$\frac{1\ R}{90} = \widehat{u} \quad \Longrightarrow \quad 1\ R = 90\,\widehat{u}$$

Este ángulo se llama *ángulo de un grado* (1°) y es la unidad del sistema sexagesimal de medición de ángulos.

Luego: $\quad \dfrac{1\ R}{90} = 1° \qquad 1\ R = 90°$

Submúltiplos del grado:

– *minuto:* (') $\quad \dfrac{1°}{60} = 1' \Rightarrow \boxed{1° = 60'}$

– segundo: ('') $\quad \dfrac{1'}{60} = 1'' \Rightarrow \boxed{1' = 60''}$

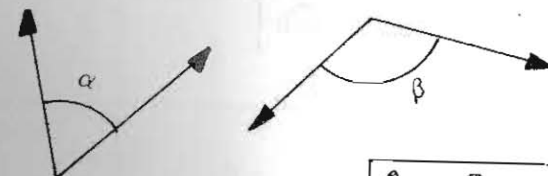
10.– ANGULOS COMPLEMENTARIOS:

Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus amplitudes es igual a la amplitud de un recto.

$$\boxed{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 1\ R}$$

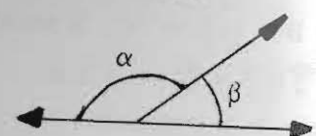
11.– ANGULOS SUPLEMENTARIOS:

Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus amplitudes es igual a la amplitud de un llano.



$$\boxed{\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = \underbrace{1\ \text{llano}}_{2\ R}}$$

Dos ángulos adyacentes son *siempre* suplementarios.



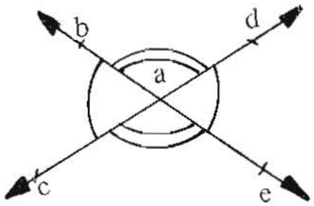
$\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$: adyacentes $\Rightarrow \widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$: suplem.

Dos ángulos suplementarios *no siempre* son adyacentes.

$\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$: suplementarios

$\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$: *no* adyacentes

12.– ANGULOS OPUESTOS POR EL VERTICE:

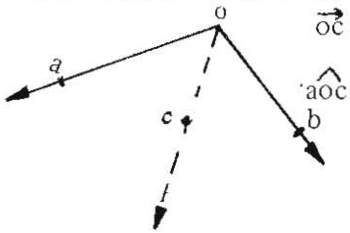


$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{ab} \text{ y } \overrightarrow{ae} \\ \overrightarrow{ac} \text{ y } \overrightarrow{ad}\end{array}\right\} \text{ semirrectas opuestas}$$

$$\left.\begin{array}{l}b\hat{a}c \text{ y } d\hat{a}e \\ b\hat{a}d \text{ y } c\hat{a}e\end{array}\right\} \text{ opuestos por el vértice}$$

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

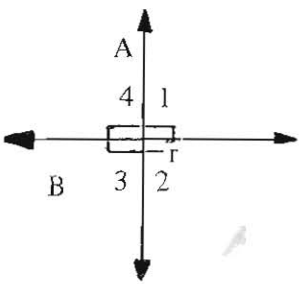
13.– BISECTRIZ DE UN ANGULO:



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{oc} \subset a\hat{o}b \\ a\hat{o}c \cong a\hat{o}b\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{oc} = \text{bisectriz de } a\hat{o}b$$

X. – PERPENDICULARIDAD

1.– RECTAS PERPENDICULARES



$A \cap B = \{r\} \Rightarrow$ A y B secantes

$\hat{1} \cong \hat{2} \cong \hat{3} \cong \hat{4} \Rightarrow A \perp B$

r : pie de la perpendicular

> Dos rectas secantes son perpendiculares cuando determinan *cuatro ángulos congruentes.*
>
> Dos rectas secantes *son oblicuas cuando no son perpendiculares.*

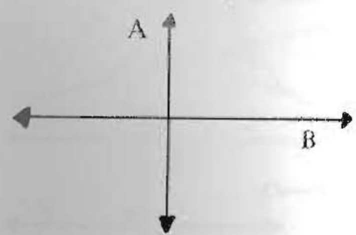
Los cuatro ángulos formados por dos rectas perpendiculares, son rectos.

En la práctica para verificar si dos rectas secantes son perpendiculares, es suficiente comprobar que uno de los ángulos formados es recto, ya que se puede demostrar que los otros tres también lo son.

Luego los lados de un ángulo recto y sus semirrectas opuestas forman rectas perpendiculares. En esta condición se basa el trazado de rectas perpendiculares con escuadra.

1.1. – *Propiedades de la relación de perpendicularidad entre rectas:*

– *Propiedad simétrica:*



$A \perp B \Leftrightarrow B \perp A$

– *No se cumplen* las siguientes propiedades:

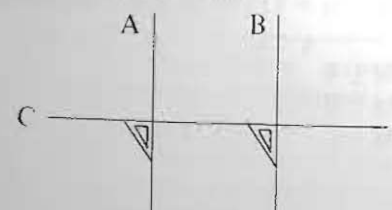
a) Reflexiva: $A \not\perp A$

b) Transitiva: $\left.\begin{array}{l}\text{si } A \perp B \\ \text{y } B \perp C\end{array}\right\} \Rightarrow A \not\perp C$

resulta: $A \parallel C$

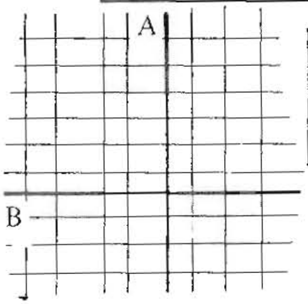
Luego la perpendicularidad *no* es relacion de equivalencia.

OBSERVACION:



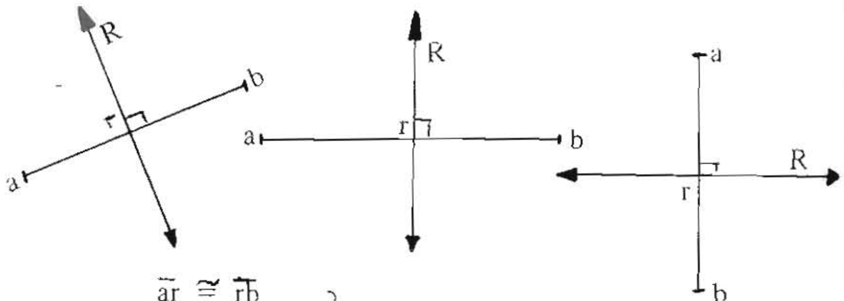
$$\left.\begin{array}{l}A \perp C \\ B \perp C\end{array}\right\} \Rightarrow A \parallel B$$

Dos rectas coplanares perpendiculares a una tercera son paralelas. (En esta propiedad se basa la construcción de rectas paralelas).



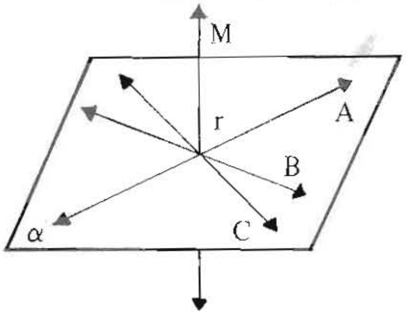
Si $A \perp B$, toda recta perteneciente a la dirección de A es perpendicular a toda recta perteneciente a la dirección de B.

1.2.– *Mediatriz de un segmento:*



$$\left.\begin{array}{l} \overline{ar} \cong \overline{rb} \\ R \perp \overline{ab} \text{ en } r \end{array}\right\} \Rightarrow R \text{ mediatriz de } \overline{ab}$$

2.– RECTA Y PLANO PERPENDICULARES



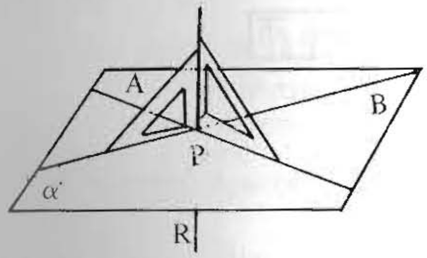
$M \cap \alpha = \{r\} \Rightarrow M$ y α : secantes

$A \subset \alpha$; $B \subset \alpha$; $C \subset \alpha$; . . . . .

$$\left.\begin{array}{l} M \perp A \\ M \perp B \\ M \perp C \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \text{ en } r \Rightarrow M \perp \alpha$$

Una recta secante a un plano es *perpendicular* al mismo, cuando es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por el punto de intersección.
Una recta secante no perpendicular a un plano, es *oblicua* al mismo.

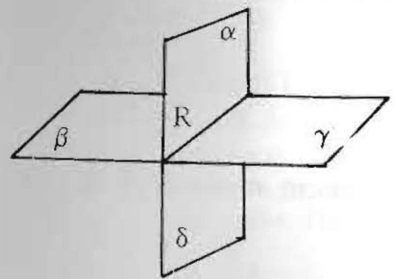
La condición necesaria y suficiente para que una recta sea perpendicular a un plano, es que sea perpendicular a dos rectas del mismo que pasen por el punto de intersección.



$A \subset \alpha$
$B \subset \alpha$
$A \cap B = \{p\}$

$$\left.\begin{array}{l} R \perp A \text{ en } p \\ R \perp B \text{ en } p \end{array}\right\} \Rightarrow R \perp \alpha$$

3.– PLANOS PERPENDICULARES



$\alpha \cap \beta = R \Rightarrow \alpha$ y β: secantes

$d\widehat{\alpha\beta} \cong d\widehat{\beta\delta} \cong d\widehat{\delta\gamma} \cong d\widehat{\gamma\alpha} \Rightarrow \alpha \perp \beta$

Dos planos secantes son *perpendiculares* cuando determinan *cuatro ángulos diedros congruentes.*
Dos planos secantes son *oblicuos* cuando no son perpendiculares.

XI. – DISTANCIA

1. – DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos dados es la longitud del segmento que tiene por extremos a dichos puntos.

Ejemplo:

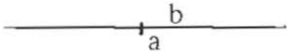
distancia entre a y b $\longrightarrow$ longitud $\overline{ab}$

notación:

$\boxed{d\,(a, b) = \text{long. } \overline{ab}}$

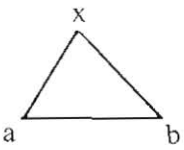
1.1. – *Propiedades:*

a) $a = b$ $\qquad d\,(a, b) = 0 \iff a = b$



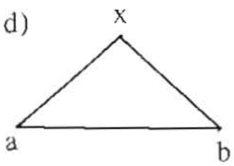
b) $d\,(a,b) = d\,(b,a)$

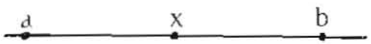
c)



$$\left.\begin{array}{l} d\,(a,b) < d\,(a,x) + d(x,b) \\ d\,(a,b) = d\,(a,x) + d(x,b) \end{array}\right\} d(a,b) \leqslant d(a,x) + d(x,b)$$

d)





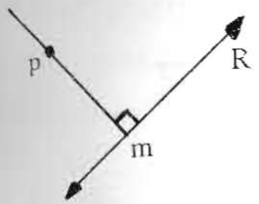
x: punto medio

Si $d(a,x) = d(x,b)$ $\qquad$ x equidista de a y b.

2. – DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

La distancia entre un punto y una recta es la distancia entre el punto y el pie de perpendicular, trazada desde dicho punto a la recta.

Ejemplo: Dados $p \notin R$; $pm \perp R$



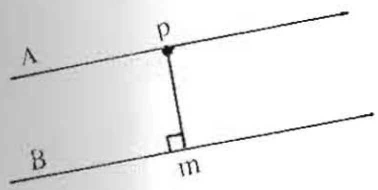
$d\,(p, R) = d\,(p, m)$

3. – DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

La distancia entre dos rectas paralelas es la distancia entre un punto cualquiera de una de ellas a la otra.

Ejemplo: Dadas $A \parallel B$

$p \in A$; $\overline{pm} \perp B$

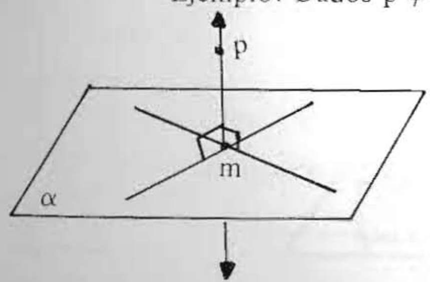


$d(A,B) = d(p,B)$

4. – DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO

La distancia entre un punto y un plano es la distancia entre el punto y el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto al plano.

Ejemplo: Dados $p \notin \alpha$; $pm \perp \alpha$

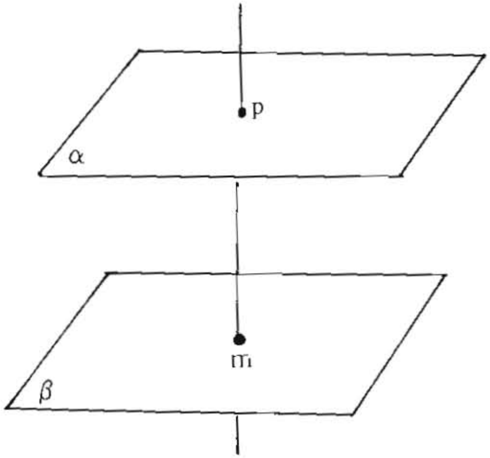


$d\,(p, \alpha) = d\,(p, m)$

5.– DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

La distancia entre dos planos paralelos es la distancia entre un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano.

Ejemplo: Dados $\alpha \parallel \beta$; $p \in \alpha$; $pm \perp \beta$



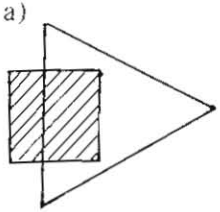
$$d(\alpha,\beta) = d(p,\beta)$$

EJERCICIOS DE APLICACION

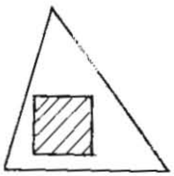
1.– En los casos posibles remarcar la intersección de A y B.

Datos: $\begin{cases} A : \text{cuadrado} \\ B : \text{borde del triángulo} \end{cases}$

a)



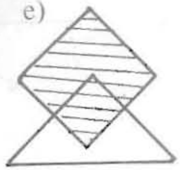
b)



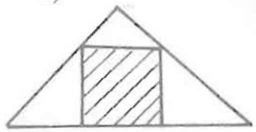
c)

d)

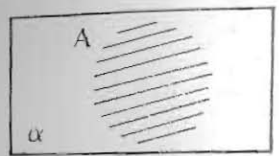
e)



f)

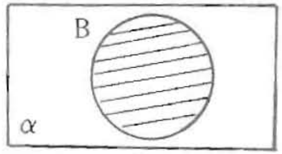


2.– Rayar la región que corresponde a la operación indicada:



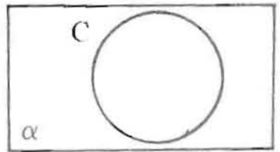
$\alpha - A$

A: círculo abierto



$\alpha - B$

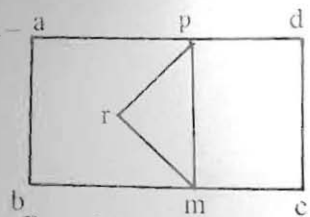
B: círculo



$\alpha - C$

C: circunferencia

3.–



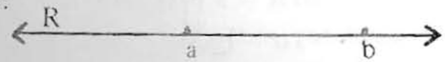
Datos: $\begin{cases} C: \boxed{\ } abmp \\ P: \text{políg. } prmcd \\ R: \overline{abcd} \end{cases}$

Completar:

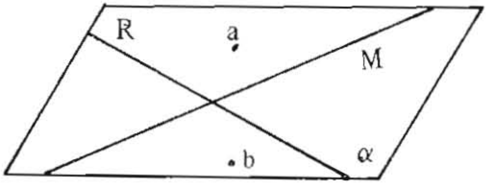
a) $C \cup P =$ b) $C \cap P =$ c) $R - C =$

d) $(C \cap P) - C =$ e) $C - (C \cap P) =$

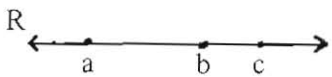
4.– Nombrar las semirrectas de origen *a* ó *b* que se determinan en R:



5.– Designar los semiplanos determinados por R o M en α:



6.– Completar:



a) $\overrightarrow{ab} \cup \overrightarrow{bc} = \dots$
b) $\overrightarrow{ab} \cap \overrightarrow{bc} = \dots$
c) $\overset{\circ}{\overrightarrow{cb}} \cup \{c\} = \dots$
d) $\overrightarrow{bc} \cup \overset{\circ}{\overrightarrow{ba}} = \dots$

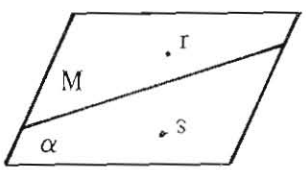
7.– Dibujar un plano α:

a) Representar la recta R y los puntos m, p, s, t, v, tal que:
$R \subset \alpha$
$m \in \alpha$; $m \notin R$
$p \in \alpha$; $p \in s/p_{(R,m)}$
$s \in \alpha$; $s \notin s/p_{(R,m)}$
$t \notin \alpha$
$v \in R$ y $v \in \overline{ps}$

b) Completar con V o F:
$\overline{mp} \subset s/p_{(R,m)}$. . . . .
$\overline{ps} \subset s/p_{(R,m)}$. . . . .

c) Completar:
$\overline{mp} \cap R = \dots\dots$
$\overline{ps} \cap R = \dots\dots$

8.– Dado:



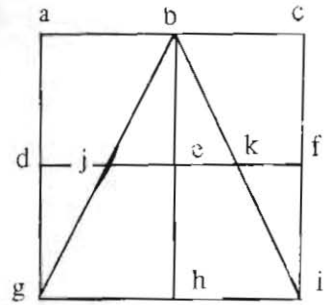
Resolver:

a) $s/p_{(M,r)} \cap s/p_{(M,s)} = \dots\dots$
b) $s/p_{(M,r)} \cup s/p_{(M,s)}ab. = \dots\dots$
c) $s/p_{(M,r)} - M = \dots\dots$
d) $\alpha - s/p_{(M,r)}ab. = \dots\dots$
e) $\alpha - [\, s/p_{(M,r)}ab. \cup s/p_{(M,s)}ab. \,] = \dots$

9.– Dado un plano α dibujar las rectas R y T de modo que cumplan las siguientes condiciones:

$$R \subset \alpha \,;\, T \not\subset \alpha \,;\, R \cap T = \{ s \}$$

10.– Dada la siguiente figura:

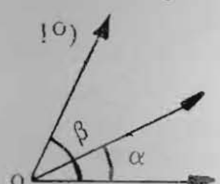


a) Determinar por extensión el conjunto S de segmentos que tienen por extremo al punto b.
b) Los segmentos bj y bg, ¿son consecutivos? SI – NO ¿por qué?
c) Considerar las poligonales acigde y jbk:
1º: Nombrar dos segmentos no consecutivos en acigde.
2º: Nombrar segmentos consecutivos en jbk.

11.– Dados los siguientes pares de ángulos:

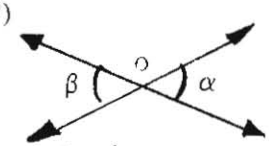
a) Completar:

1º)



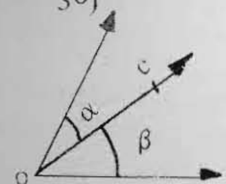
$\hat{\alpha} \cap \hat{\beta} = \boxed{}$

2º)



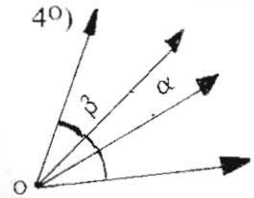
$\hat{\alpha} \cap \hat{\beta} = \boxed{}$

3º)



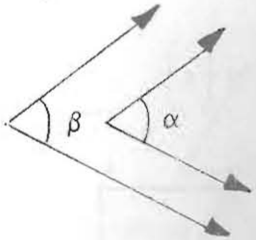
$\hat{\alpha} \cap \hat{\beta} = \boxed{}$

4º)



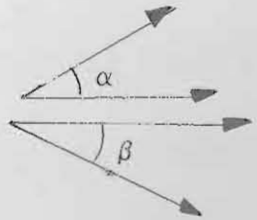
$\hat{\alpha} \cap \hat{\beta} = \boxed{}$

5º)



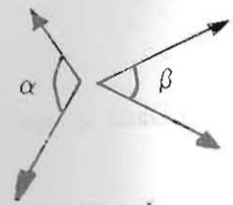
$\hat{\alpha} \cap \hat{\beta} = \square$

6º)



$\hat{\alpha} \cap \hat{\beta} = \square$

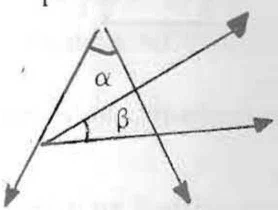
7º)



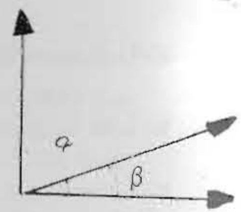
$\hat{\alpha} \cap \hat{\beta} = \square$

b) Rayar en cada caso la zona que corresponde a: $\hat{\alpha} \cap \hat{\beta}$

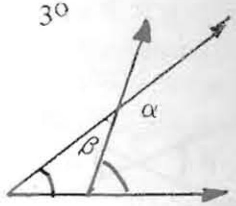
1º



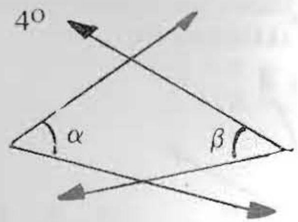
2º



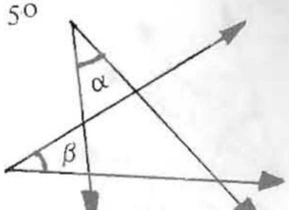
3º



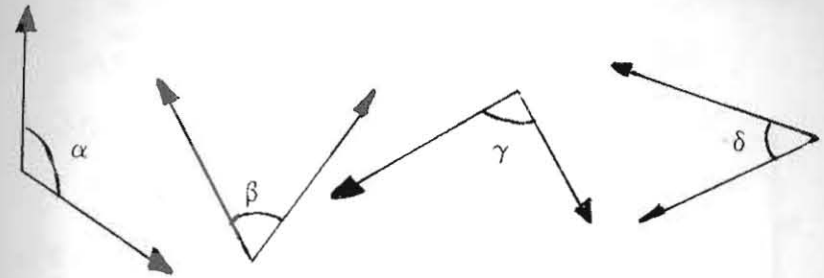
4º



5º



12.– Dados los siguientes ángulos:



a) Construir:

1º.- Angulos consecutivos, respectivamente congruentes a cada uno de los dados.

2º. Angulos del mismo vértice, congruentes respectivamente a cada uno de los dados, tal que:

$$\hat{\delta} \subset \hat{\beta} \subset \hat{\gamma} \subset \hat{\alpha}$$

b) Elegir pares de ángulos de modo que su unión sea:

1º.– Un ángulo convexo.

2º. – Un ángulo cóncavo.

13.– En la figura del ejercicio 10:

a) Considerar los ángulos de vértice *b* y nombrar:

1º) ángulos agudos.

2º) ángulos rectos.

3º) pares de ángulos complementarios.

4º) pares de ángulos suplementarios.

5º) ángulos consecutivos con $\widehat{abj}$.

b) Nombrar los pares de ángulos opuestos por el vértice.

c) Completar con $\cong$ ó $\ncong$ según corresponda:

$\widehat{djb}$ . . . . . . $\widehat{bkf}$ $\qquad$ $\widehat{djb}$ . . . . . . $\widehat{eki}$

$\widehat{gbh}$ . . . . . . $\widehat{gbi}$ $\qquad$ $\widehat{gbh}$ . . . . . . $\widehat{hbi}$

d) Expresar el resultado en grados:

1°) $\widehat{djb} + \widehat{bje} = \ldots\ldots\ldots$

2°) $\widehat{hik} + \widehat{kif} = \ldots\ldots\ldots$

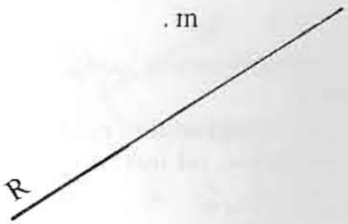
3°) $\widehat{bgi} + \widehat{gib} + \widehat{ibg} = \ldots\ldots$

e) Completar las siguientes expresiones:

1°) $\widehat{abj} \cup \widehat{jbe} \cong \ldots\ldots$

2°) $\widehat{abe} \cup \widehat{jbe} \cong \ldots\ldots$

14.– Dados en un plano:



a) ¿Cuántas rectas se pueden trazar por m?
b) ¿Cuántas rectas oblicuas a R se pueden trazar por m?
c) ¿Cuántas rectas perpendiculares a R se pueden trazar por m?
d) ¿Cuántas rectas paralelas a R se pueden trazar por m?

15.– Dados:

Rectas: A y B no coincidentes

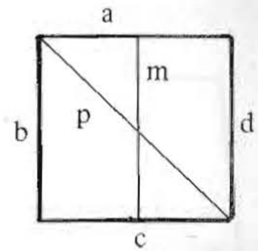
Puntos: m, p, tales que: $\begin{cases} m \in A \; ; \; m \in B \\ p \in A \; ; \; p \in B \end{cases}$

a) ¿Qué se puede decir de m y p?
b) ¿Qué se puede decir de A y B?

16.– Dadas en α: A, B y C
Suponiendo que: A y B: fijas,
y $A \not\perp B \; ; \; B \not\perp C$

a) Representar gráficamente las distintas posibilidades en que puede encontrarse C respecto de A y expresarlas simbólicamente.
b) Indicar en qué casos se cumple la transitividad.

17.– Dada la siguiente figura:



Aplicar en $C = \{a, b, c, d, m, p\}$:

a) R_1 . . . . . "es oblicuo a" . . . . .
b) R_2 . . . . . "es paralelo a" . . . . .
c) R_3 . . . . . "es perpendicular a" . . . . .

1º: Representarlas en un diagrama de Venn.
2º: Determinar el conjunto de pares ordenados que cumplen cada relación.
3º: Indicar las propiedades que se cumplen.

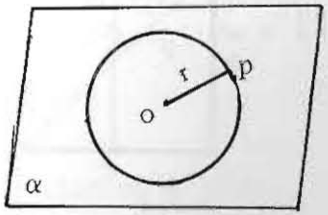
18.– Completar el cuadro con: // ó ⊥, según corresponda:

	A	B	C	D
A		⊥		
B			⊥	
C				⊥
D				

XII. – FIGURAS CIRCULARES

1.– CIRCUNFERENCIA

Se llama circunferencia de centro *o* y radio *r* al conjunto de puntos del plano cuya distancia al punto *o* es igual a *r*.

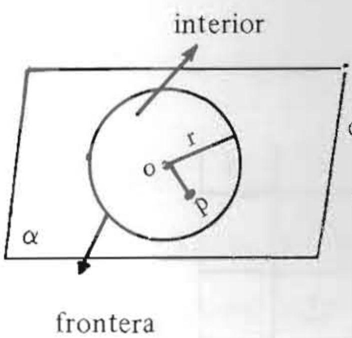


$C_{(o,r)}$: circunferencia de centro *o* y radio *r*

$C_{(o,r)}: = \{ p/p \in \alpha, d(o,p) = r \}$

La circunferencia es la frontera que separa al conjunto de puntos del plano en dos regiones: una interior y otra exterior.

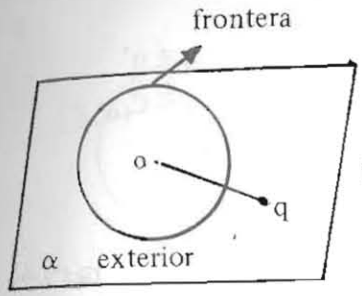
La región interior es el conjunto de puntos cuya distancia al centro es menor que el radio.



$d(p, o) < r \Leftrightarrow$ p es punto interior a $C_{(o, r)}$

Región interior $= \{ p/p \in \alpha, d(p,o) < r \}$

La región exterior es el conjunto de puntos cuya distancia al centro es mayor que el radio.

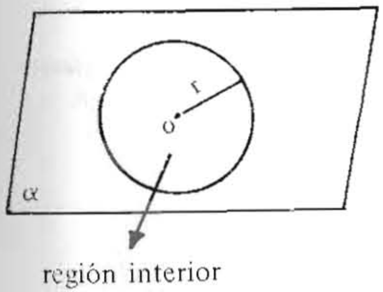


$d(q, o) > r \Leftrightarrow$ q es punto exterior a $C_{(o, r)}$

Región exterior $= \{ q/q \in \alpha, d(p, o) \leqslant r \}$

2.– CIRCULO

Se llama círculo de centro *o* y radio *r*, al conjunto de puntos del plano cuya distancia al punto *o* es menor o igual a *r*.



$Círc._{(o,r)}$: círculo de centro *o* y radio *r*

$Círc._{(o,r)} = \{ p/p \in \alpha, d(p, o) \leqslant r \}$

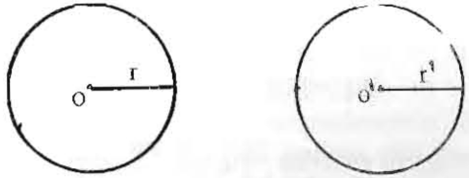
Otra forma de definir círculo:

Se llama círculo de borde C y radio r al conjunto unión de los puntos de la circunferencia con los puntos de la región interior.

$$Círc._{(o,r)} = C_{(o,r)} \cup \text{Región interior}$$

3.– CONGRUENCIA DE CIRCUNFERENCIAS

Dos circunferencias de distintos centros son congruentes cuando sus radios son iguales.



$o \neq o'$

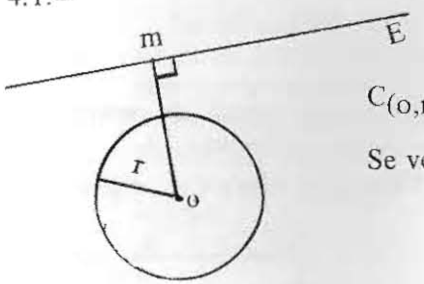
$C_{(o,r)} \cong C_{(o',r')}$

Si $r = r'$

4.– POSICIONES RELATIVAS DE UNA CIRCUNFERENCIA Y UNA RECTA

Dadas una circunferencia y una recta en un mismo plano, pueden presentarse las siguientes situaciones:

4.1.–

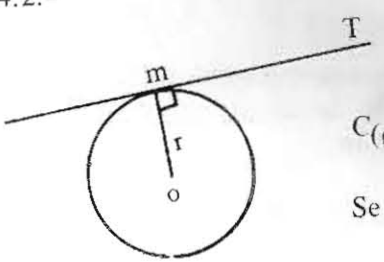


$C_{(o,r)} \cap E = \phi \Rightarrow E$: *Recta exterior*

Se verifica que:

$d(o,E) > r$

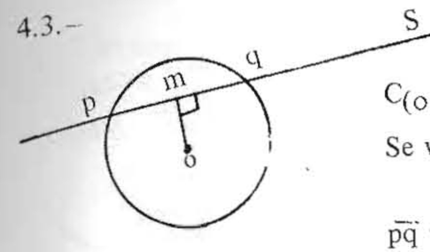
4.2.–



$C_{(o,r)} \cap T = \{m\} \Rightarrow T \left\{ \begin{array}{l} \textit{recta tangente} \\ \textit{en } m \end{array} \right.$

Se verifica que:
$d(o,T) = r$

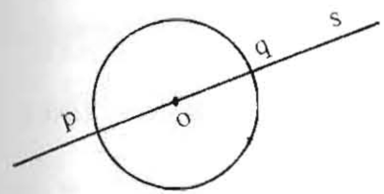
4.3.–



$C_{(o,r)} \cap S = \{p,q\} \Rightarrow S$: *recta secante*

Se verifica que:
$d(o,S) < r$

$\overline{pq} \subset S \Rightarrow \overline{pq}$: *cuerda*



Si $o \in \overline{pq} \Rightarrow \overline{pq}$: *diámetro*

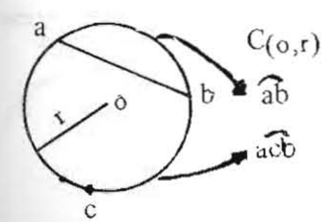
5.– ARCOS Y SEGMENTOS CIRCULARES

Toda cuerda determina:

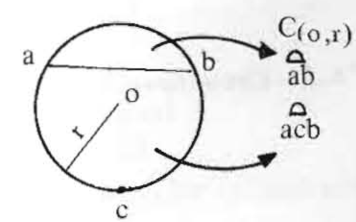
dos *arcos* en la circunferencia

dos *segmentos circulares* en el círculo

Ejemplo:



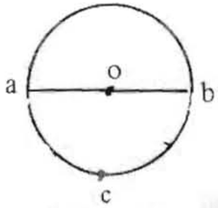
Ejemplo:



Cuerda: $\overline{ab}$
arcos: $\widehat{ab}$ y $\widehat{acb}$

cuerda: ab
segmentos circulares: ab y acb

Cuando la cuerda es un diámetro:

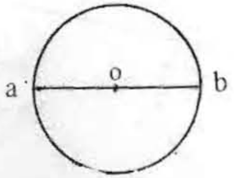


$C_{(o,r)}$

$\overline{ab}$: diámetro

$\widehat{ab} \cong \widehat{acb}$

$\widehat{ab}$ y $\widehat{acb}$: *semicircunferencias*



Círc.$_{(o,r)}$

$\overline{ab}$: diámetro

$\widehat{ab} \cong \widehat{acb}$

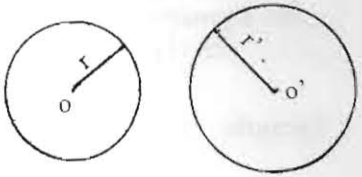
$\widehat{ab}$ y $\widehat{acb}$: *semicírculos*

6.– POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN EL PLANO

Dadas $C_{(o,r)}$ y $C_{(o',r')}$ pueden presentarse las siguientes situaciones:

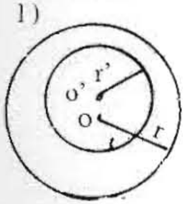
6.1.– *Circunferencias disjuntas:* $C_{(o,r)} \cap C_{(o',r')} = \phi$

a) *Exteriores*

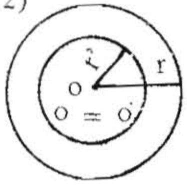


b) *Interiores*

1)



2)



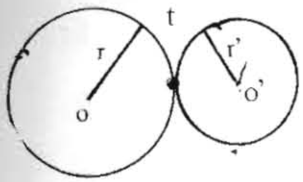
Concéntricas
o = o'

6.2.– *Circunferencias no disjuntas:* $C_{(o,r)} \cap C_{(o',r')} \neq \varphi$

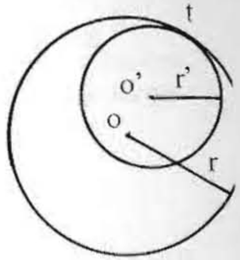
a) *Circunferencias tangentes*

$C_{(o,r)} \cap C_{(o',r')} = \{t\}$

1) *Exteriores*

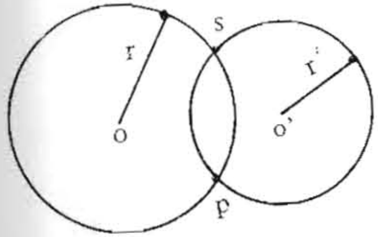


2) *Interiores*



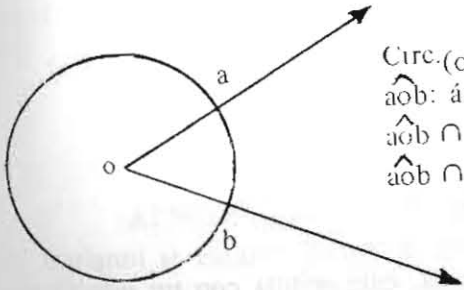
b) *Circunferencias secantes*

$C_{(o,r)} \cap C_{(o',r')} = \{s,p\}$



7.– ANGULO CENTRAL

Angulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia y sus lados pasan por dos puntos de la misma.



Circ.$_{(o,r)}$

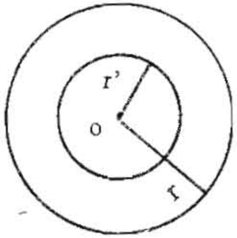
$\widehat{aob}$: ángulo central

$\widehat{aob} \cap C_{(o,r)} = \widehat{ab}$

$\widehat{aob} \cap C_{(o,r)}$ = *sector circular aob*

Si aob = 2 Rectos ⇒ sector circular aob; *semicírculo.*

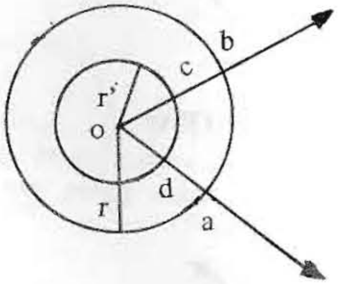
8.– CORONA CIRCULAR



Corona circular$_{(o,r,r')}$ =

= Círc.$_{(o,r)}$ − $\left\{\text{puntos int. Círc.}_{(o,r')}\right\}$

9.– TRAPECIO CIRCULAR



Trapecio circular abcd =
= Corona circular$_{(o,r,r')} \cap$ aob

10.– LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA:

Concretamente se puede obtener la longitud de una circunferencia, cubriéndola con un hilo (hipo-

téticamente inelástico). La longitud del hilo extendido representa la longitud de la circunferencia.

10.1.– *El número* π

Matemáticamente se demuestra que la relación entre la longitud de una circunferencia y la longitud de su diámetro es un número constante.

$$\frac{\text{long. circunfer.}}{\text{long. diámetro}} = 3{,}14159\ldots$$

d: longitud del diámetro

se expresa $\dfrac{C_{(o,r)}}{d} = 3{,}14159\ldots$

Este número constante se designa con la letra π. Usualmente el valor que se toma de π es:

$$\boxed{\pi = 3{,}14}$$

De la expresión anterior se deduce:

$$\boxed{\text{long. } C_{(o,r)} = \pi \underbrace{d}_{2r} \quad \text{o bien long. } C_{(o,r)} = 2\pi . r}$$

10.2.– *Longitud de un arco de circunferencia.*

Partiendo de las relaciones entre arcos y ángulos centrales, se puede calcular la longitud de cualquier arco de ángulo central α.

Considerando a la circunferencia el mayor de los arcos cuyo ángulo central es de 360°, es:

$$360 \text{ ——— } 2\pi r$$

$$1 \text{ ——— } \frac{2\pi r}{360}$$

$$\alpha \text{ ——— } \frac{2\pi r \alpha}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180}$$

$$\boxed{\text{long. arco} = \frac{\pi r \alpha}{180}}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

19.– Indicar en los enunciados siguientes con V si es verdadero y con F si es falso:

a) Una recta que interseca a una circunferencia en un punto, la interseca en dos. (   )

b) La intersección de una recta y una circunferencia puede ser vacía. (   )

c) Una circunferencia y una recta pueden tener tres puntos comunes. (   )

d) Circunferencia de radios congruentes son congruentes. (   )

e) Si dos cuerdas de una circunferencia se intersecan en su punto medio, dicho punto es el centro de la circunferencia. (   )

f) Una circunferencia puede contener 3 puntos alineados. (   )

g) Dos tangentes a la misma circunferencia pueden ser perpendiculares entre sí. (   )

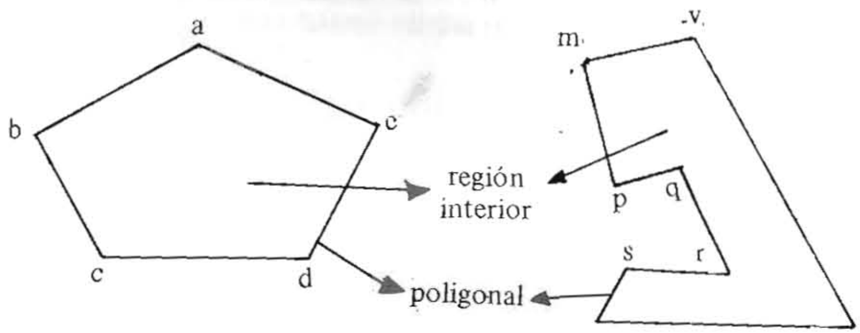
20.– Si $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ son diámetros de Circ. (o,r), completar:

a) $\overline{ab} \cap \overline{cd} = \{\ldots\ldots\}$

b) $\overline{ab} \cong \square$

XIII. – POLIGONOS

1.– DEFINICION



La unión de cada poligonal abcde y mpqrstuv con su correspondiente región interior, se llama *polígono*.

Ejemplo:

poligonal abcde ∪ región interior = polígono abcde
poligonal mpqrstuv ∪ región interior = polígono mpqrstuv

De acuerdo con la clasificación de figuras convexas y cóncavas (ver VIII.–), resulta:

polígono abcde ⟶ *convexo*
polígono mpqrstuv ⟶ *cóncavo*

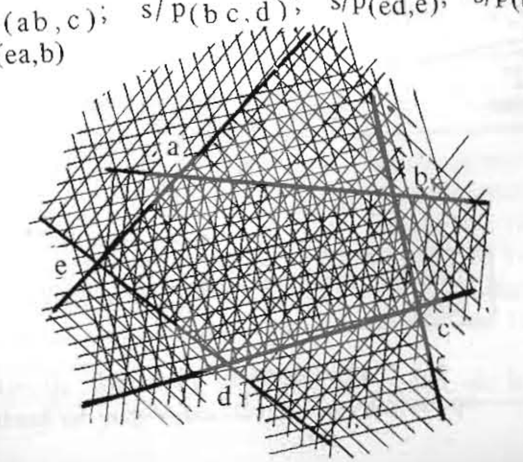
2.– POLIGONO CONVEXO

Además del criterio enunciado en 1.–, se pueden adoptar otros criterios para definir polígonos convexos.

Dados en un cierto orden tres o más puntos, por ejemplo: a, b, c, d, e, ... tal que tres cualesquiera no estén alineados y que la recta determinada por dos consecutivos deje a los restantes en un mismo semiplano, se llama polígono convexo abcde:

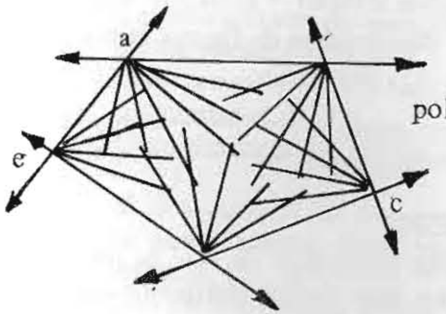
2.1.– *a la intersección de*

s/p(ab,c); s/p(bc,d); s/p(ed,e); s/p(de,a) y s/p(ea,b)



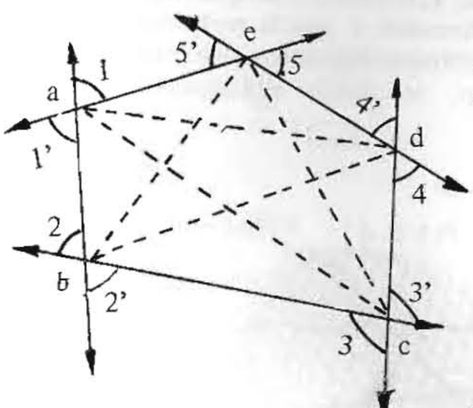
$$\text{políg. } abcde = s/p_{(ab,c)} \cap s/p_{(bc,d)} \cap s/p_{(cd,e)} \cap s/p_{(de,a)} \cap s/p_{(ea,b)}$$

2.2.– *a la intersección de* $\widehat{abc}$, $\widehat{bcd}$, $\widehat{cde}$, $\widehat{dea}$ y $\widehat{eab}$



$$\text{políg. } abcde = \widehat{abc} \cap \widehat{bcd} \cap \widehat{cde} \cap \widehat{dea} \cap \widehat{eab}$$

3.– ELEMENTOS DEL POLIGONO CONVEXO:



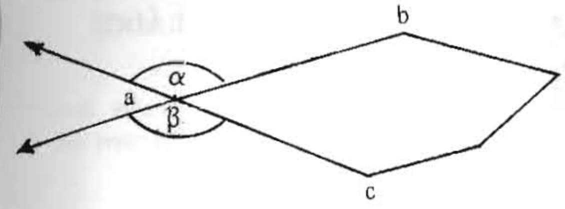
vértices: a, b, c, d, e
lados: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, $\overline{ea}$
ángulos interiores: $\widehat{bae}$, $\widehat{abc}$, $\widehat{bcd}$, $\widehat{cde}$, $\widehat{dea}$

ángulos exteriores: $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$

diagonales: $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, $\overline{bd}$, $\overline{be}$, $\overline{ce}$

> *Angulo exterior:* ángulo adyacente a uno interior.

En cada vértice hay *dos ángulos exteriores*, opuestos por el vértice y por lo tanto congruentes.



$\widehat{bac}$: ángulo interior
$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ ángulos exteriores
$\hat{\alpha} \cong \hat{\beta}$

En general, al hablar de ángulos exteriores de un polígono, se considera *uno por cada vértice.*

> *Diagonal:* segmento determinado por dos vértices *no consecutivos.*

4.– CLASIFICACION DE LOS POLIGONOS SEGUN EL NUMERO DE SUS LADOS:

Cuando en el conjunto de los polígonos se aplica la relación: "tiene tantos lados como", se produce una partición en clases de equivalencia que da lugar a la siguiente clasificación:

Nº de lados	nombre
3	triángulo
4	cuadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono

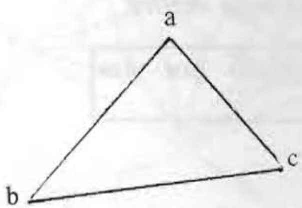
Nº de lados	nombre
11	undecágono
12	dodecágono
13	políg. de 13 lados
14	políg. de 14 lados
15	pentadecágono
16	políg. de 16 lados
. . .	. . . .
n	políg. de n lados

5.– TRIANGULOS: POLIGONOS DE TRES LADOS

5.1.– *Vértices y lados opuestos:*

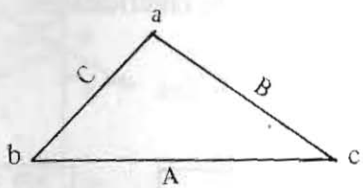
Un vértice y un lado de un triángulo son opuestos cuando el vértice no es extremo de dicho lado:

Ejemplo:

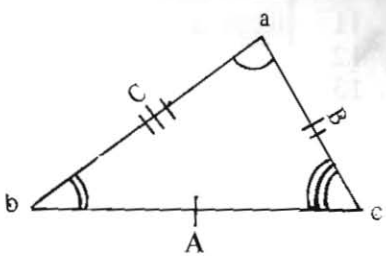


vértices		*lados*	
a	y	$\overline{bc}$	opuestos
b	y	$\overline{ac}$	
c	y	$\overline{ab}$	

Generalmente se designa cada lado con la letra mayúscula correspondiente al vértice opuesto.



5.2.– *Angulos y lados opuestos:*



ángulos		*lados*	
$\hat{a}$	y	$\overline{A}$	opuestos.
$\hat{b}$	y	$\overline{B}$	
$\hat{c}$	y	$\overline{C}$	

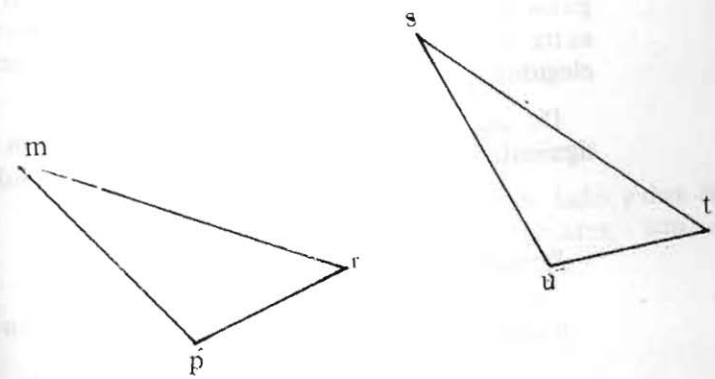
5.3.– *Suma de los ángulos interiores de un triángulo:*

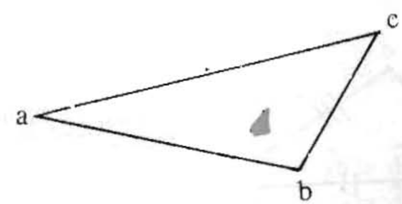
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a un ángulo llano o dos rectos.

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 2\ R$$

5.4.– *Congruencia de triángulos:*

Dos triángulos son congruentes, cuando al superponerlos, mediante un movimiento, coinciden sus pares de vértices correspondientes.





Estos triángulos son congruentes.

Por ejemplo:

$\overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{mpr}$ $\Big\}$ pueden coincidir mediante un movimiento $\left\{\begin{array}{l} a - m \\ b - p \\ c - r \end{array}\right.$

De donde resulta:

lados	*ángulos*
$\overline{ab} \cong \overline{mp}$	$\hat{a} \cong \hat{m}$
$\overline{bc} \cong \overline{pr}$	$\hat{b} \cong \hat{p}$
$\overline{ac} \cong \overline{mr}$	$\hat{c} \cong \hat{r}$

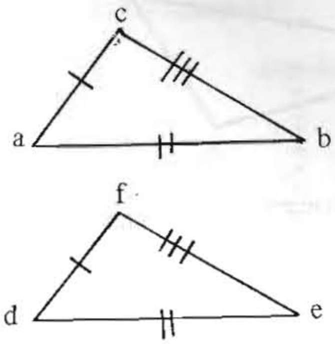
> Si dos triángulos tienen sus lados y ángulos ordenadamente congruentes, entonces los triángulos son congruentes.

Para establecer la congruencia entre dos triángulos es suficiente que se cumpla la congruencia entre tres pares de elementos, convenientemente elegidos.

De acuerdo con lo expresado se enuncian los siguientes criterios de congruencia de triángulos:

– *Primer criterio:*

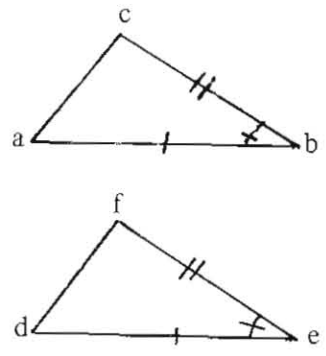
Si dos triángulos tienen sus tres lados ordenadamente congruentes, son congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab} \cong \overline{de}\\ \overline{bc} \cong \overline{ef}\\ \overline{ac} \cong \overline{df}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{def}$$

– *Segundo criterio:*

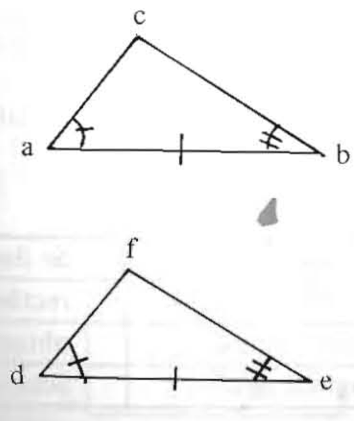
Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido ordenadamente congruentes, son congruentes.



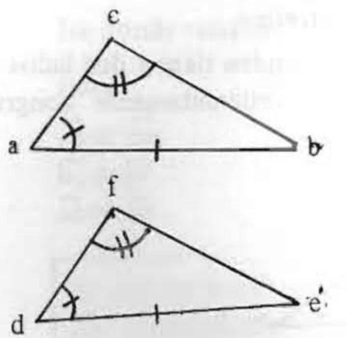
$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab} \cong \overline{de}\\ \overline{bc} \cong \overline{ef}\\ \hat{b} \cong \hat{e}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{def}$$

– *Tercer criterio:*

Si dos triángulos tienen un lado y dos ángulos ordenadamente congruentes, son congruentes.



$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab} \cong \overline{de}\\ \hat{a} \cong \hat{d}\\ \hat{b} \cong \hat{e}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{def}$$



$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab} \cong \overline{de}\\ \hat{a} \cong \hat{d}\\ \hat{e} \cong \hat{f}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{abc} \cong \widehat{def}$$

Para recordar los criterios se puede recurrir al siguiente esquema:

Primer criterio	L	L	L
Segundo criterio	L	a	L
Tercer criterio	L	a	a

L : lado
a : ángulo

5.5.– Clasificación de triángulos:

a) Según los lados:

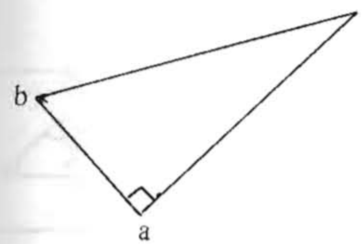
– *Triángulos isósceles:*
Si un triángulo tiene por lo menos dos lados congruentes, es *isósceles.* En el caso particular de que el triángulo isósceles tenga los tres lados congruentes, se llama *equilátero.*

– *Triángulo escaleno:*
El triángulo que no es iósceles se llama *escaleno.*

b) Según sus ángulos:

Si el triángulo tiene:	Se llama:
un ángulo recto	rectángulo
un ángulo obtuso	obtusángulo
tres ángulos agudos	acutángulo

– *Triángulo rectángulo:*
El lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa;* los otros dos lados, *catetos.*



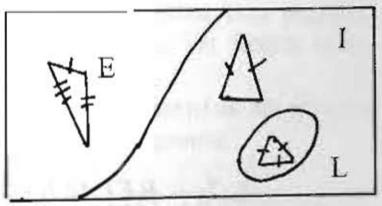
$\hat{a}$: recto; $\hat{b}$ y $\hat{c}$: agudos
$\overline{bc}$: hipotenusa
$\overline{ba}$ y $\overline{ac}$: catetos

La suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 1 R.

$\hat{b} + \hat{c} = 1$ R

5.6.– *Diagramas de clasificación de triángulos:*

a) Por los lados:
T = { triángulos }
E = { escalenos }
I = { isósceles }
L = { equiláteros }



$E \cup I = T$
$E \cap I = \phi$

Esta clasificación produce en el conjunto de triángulos, una partición en dos subconjuntos: E e I.

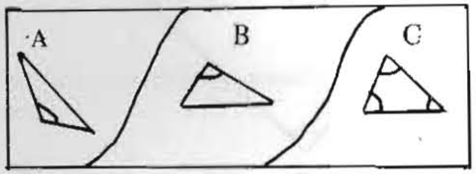
b) Por los ángulos:

T = { triángulos }

A = { obtusángulos }

B = { rectángulos }

C = { acutángulos }



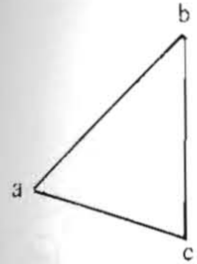
$$A \cup B \cup C = T$$

$$A \cap B = B \cap C = A \cap C = \phi$$

Esta clasificación produce una partición en tres subconjuntos: A, B, C.

5.7.- *RELACION ENTRE LOS LADOS DE UN TRIANGULO* (Propiedad triangular):

Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.



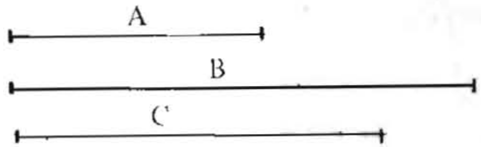
Ej.: Para el lado $\overline{ab}$ es:

$$\overline{ab} < \overline{bc} + \overline{ca}$$

$$\overline{ab} > \overline{bc} - \overline{ca}$$

De esta relación surge la condición necesaria y suficiente para que sea posible la construcción de un triángulo con tres segmentos dados.

Para que tres segmentos puedan ser lados de un triángulo basta que el mayor de ellos sea menor que la suma de los otros dos.



$$\overline{B} < \overline{A} + \overline{C}$$

Observación:

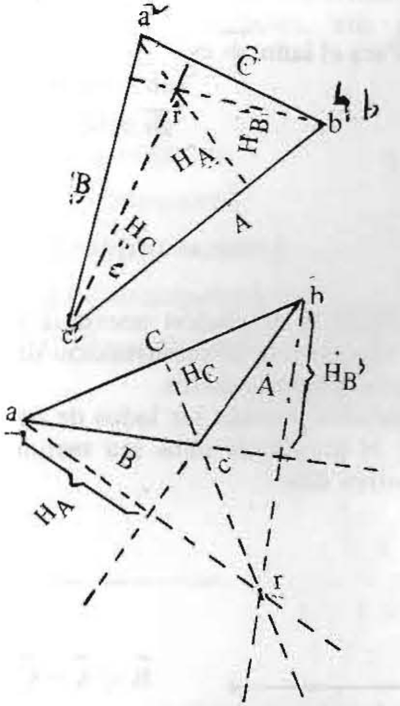
Es importante destacar que dados tres segmentos se puede construir con ellos un único triángulo.

En cambio, dados cuatro segmentos se pueden construir con ellos distintos polígonos.

5.8.- *OTROS ELEMENTOS DE LOS TRIANGULOS:*

a) *Alturas de un triángulo:*

Altura de un triángulo, correspondiente a uno de sus lados, es el segmento de perpendicular, trazada desde el vértice a la recta que incluye el lado opuesto.



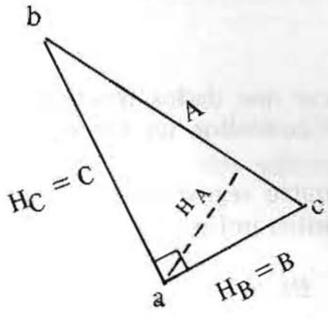
H_A : altura corresp. lado $\overline{A}$

H_B : altura corresp. lado $\overline{B}$

H_C : altura corresp. lado $\overline{C}$

$H_A \cap H_B \cap H_C = \{r\}$

r : ortocentro



H_A : altura corresp. a la hipotenusa

$H_B = \overline{B}$

$H_C = \overline{C}$

$H_A \cap H_B \cap H_C = H_A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{a\}$

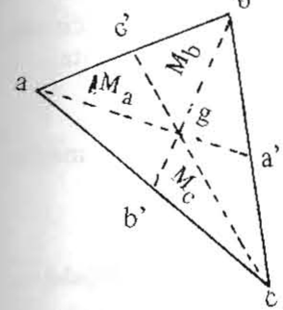
a : ortocentro

Las rectas que incluyen a las alturas concurren en un punto llamado *ortocentro.*

b) *Medianas de un triángulo:*

Mediana de un triángulo es cada uno de los segmentos determinados por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

5.9.–



$\overline{aa'}$: mediana corresp. al lado $\overline{bc}$

$\overline{bb'}$: mediana corresp. al lado $\overline{ac}$

$\overline{cc'}$: mediana corresp. al lado $\overline{ab}$

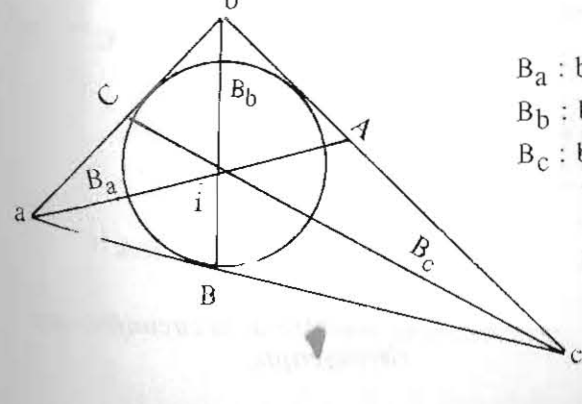
Las medianas concurren en un punto que se llama *baricentro* del triángulo.

$M_a \cap M_b \cap M_c = \{g\}$

g : *baricentro*

5.10.– *Bisectrices de un triángulo:*

Bisectrices de un triángulo son los segmentos de bisectriz de cada uno de los ángulos interiores, comprendidos entre el vértice y el lado opuesto.



B_a : bisectriz corresp. al $\hat{a}$

B_b : bisectriz corresp. al $\hat{b}$

B_c : bisectriz corresp. al $\hat{c}$

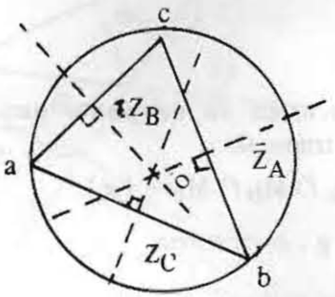
Las bisectrices de un triángulo concurren en un punto equidistante de los lados llamado *in-centro.*

$Ba \cap B_b \cap B_c = \{i\}$

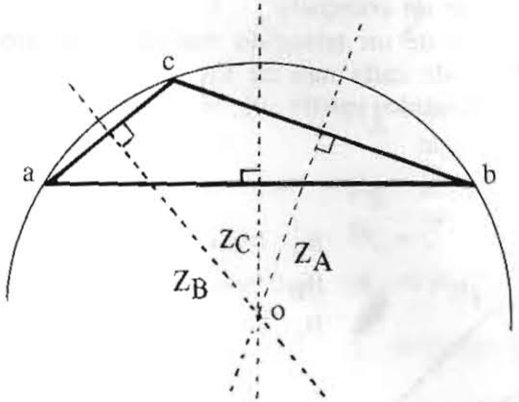
i : equidista de A, B y C
i : incentro
i : es centro de la circunferencia inscripta.

5.11.– *Mediatrices de un triángulo:*

Mediatrices de un triángulo son las mediatrices de cada uno de sus lados.



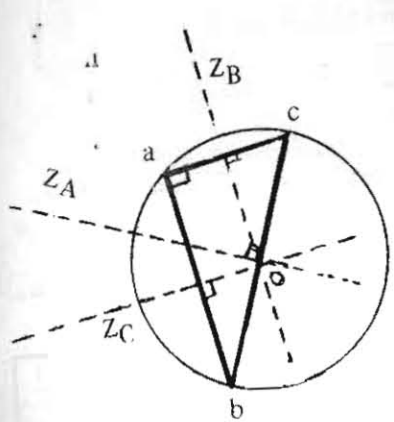
Z_A : mediatriz corresp. al lado $\overline{bc}$
Z_B: mediatriz corresp. al lado $\overline{ac}$
Z_C: mediatriz corresp. al lado $\overline{ab}$



$Z_A \cap Z_B \cap Z_C = \{o\}$

o : equidista de los vértices a, b y c.

o: es el centro de la *circunferencia circunscripta.*



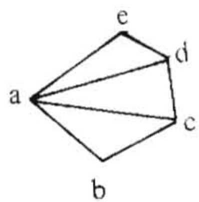
6.– *PROPIEDADES DE LOS POLIGONOS CONVEXOS DE MAS DE TRES LADOS:*

6.1.– *Número de diagonales desde un vértice:*

Dado un polígono de *n lados:*

a) Desde cada vértice se pueden trazar *n-3 diagonales.*

Ejemplo:



pentágono abcde

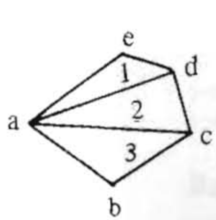
$\left.\begin{array}{l}\overline{ac}\\ \overline{ad}\end{array}\right\}$ diagonales desde a

Nº de diagonales desde a: 5 – 3 = 2

$\boxed{\text{nº de diagonales desde un vértice} = n - 3}$

b) Si desde un vértice de un polígono se trazan todas las diagonales posibles se obtienen *n-2 triángulos.*

Ejemplo:



pentágono abcde

$\left.\begin{array}{l}\overline{ac}\\ \overline{ad}\end{array}\right\}$ diagonales desde a

n^{o} de triángulos : $5 - 2 = 3$

6.2.– *Número total de diagonales de un polígino de n lados:*

Se obtiene aplicando la siguiente fórmula:

$$\boxed{\text{n}^{o}\text{ total de diagonales} = \frac{n\,(n-3)}{2}}$$

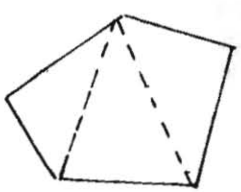
n: n^{o} de vértices

$n - 3$ (n^{o} de diagonales que concurren en un vértice)

6.3.– *Suma de los ángulos interiores de un polígono:*

La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual al producto de 2R por el número de triángulos que se obtienen al trazar todas las diagonales posibles desde un vértice.

Ej.



$$\boxed{\text{Suma de los áng. del políg.} = 2R\ .\ \underbrace{3}_{5-2}}$$

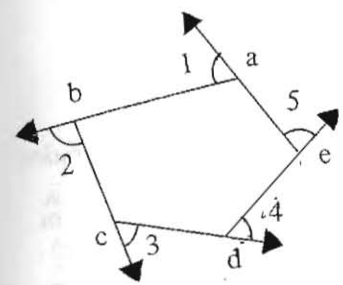
En general:

$$\boxed{\text{Suma de los ángulos interiores del políg.} = 2\,R\,(n-2)}$$

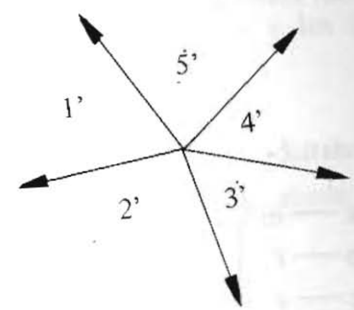
6.4.– *Suma de los ángulós exteriores:*

$$\boxed{\text{Suma de los ángulos exteriores del políg.} = 4R}$$

Dado:



Construimos con vértice o:



Tal que:

$\hat{1} \cong \hat{1}$
$\hat{2} \cong \hat{2}$
$\hat{3} \cong \hat{3}$
$\hat{4} \cong \hat{4}$
$\hat{5} \cong \hat{5}$

Resulta: $\boxed{\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} = 4\,R}$

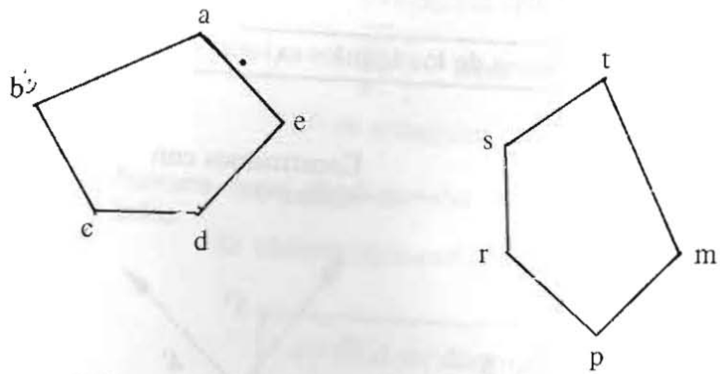
6.5.– *Propiedad de los lados:*

En todo polígono cada lado es menor que la suma de los restantes (generalización de la propiedad triangular).

7.– **CONGRUENCIA DE POLIGONOS:**

Dos polígonos son congruentes cuando al superponerlos mediante un movimiento, coinciden sus pares de vértices tomados en un cierto orden.

Ejemplo:



vértices		lados	y	ángulos
a — m		$\overline{ab} \cong \overline{mt}$		$\hat{a} \cong \hat{m}$
b — t		$\overline{bc} \cong \overline{ts}$		$\hat{b} \cong \hat{t}$
c — s	$\iff$	$\overline{cd} \cong \overline{sr}$		$\hat{c} \cong \hat{s}$
d — r		$\overline{de} \cong \overline{rp}$		$\hat{d} \cong \hat{r}$
e — p		$\overline{ea} \cong \overline{mp}$		$\hat{e} \cong \hat{p}$

7.1.– *Definición:*

Dos polígonos son congruentes cuando sus lados y sus ángulos correspondientes son respectivamente congruentes.

7.2.– *Criterios:*

a) Si dos polígonos de n lados tienen $n - 1$ lados y $n - 2$ ángulos comprendidos respectivamente congruentes, son congruentes.

b) Si dos polígonos de n lados tienen $n - 2$ lados consecutivos y los $n - 1$ ángulos adyacentes a ellos respectivamente congruentes, son congruentes.

Observación: En los polígonos de más de tres lados, *la congruencia de lados no asegura la congruencia de las figuras.*

7.3.– De acuerdo con los criterios anteriores, para decidir si dos polígonos son congruentes es suficiente comprobar la congruencia entre:

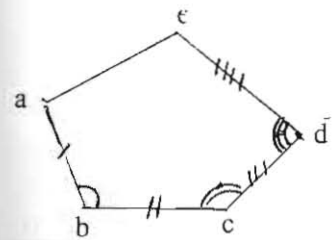
a) los pares de lados correspondientes menos uno y los pares de ángulos comprendidos entre ellos.

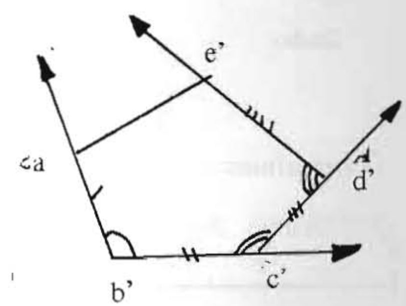
b) los pares de lados correspondientes menos dos, siempre que sean consecutivos y los pares de ángulos adyacentes a ellos.

Por Ejemplo:
Dato: polígono abcde.
Construir: políg. a'b'c'd'e' ≅ políg. abcde

1ª construcción:

Dato:





1º) $\hat{b}' \cong \hat{b}$
$\overline{b'a'} \cong \overline{ba}$
$\overline{b'c'} \cong \overline{bc}$

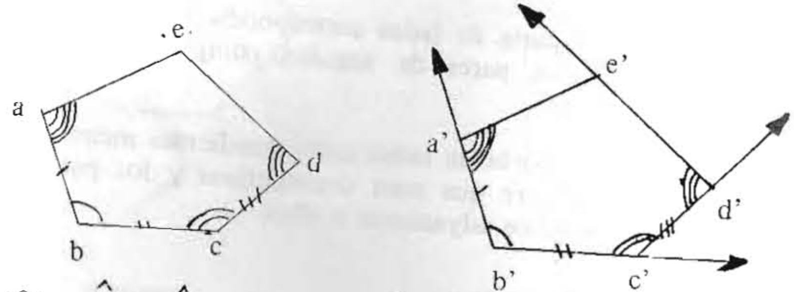
2º) $\hat{c}' \cong \hat{c}$
$\overline{c'd'} \cong \overline{cd}$

3º) $\hat{d}' \cong \hat{d}$
$\overline{d'e'} \cong \overline{de}$

4º) $\overline{a'e'}$

2ª construcción:

Dato:



1°) $\hat{b'} \cong \hat{b}$

$\overline{b'a'} \cong \overline{ba}$

$\overline{b'c'} \cong \overline{bc}$

2°) $\hat{c'} \cong \hat{c}$

$\overline{c'd'} \cong \overline{cd}$

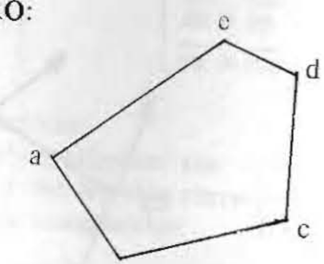
3°) $\hat{d'} \cong \hat{d}$

4°) $\hat{a} \cong \hat{a'}$

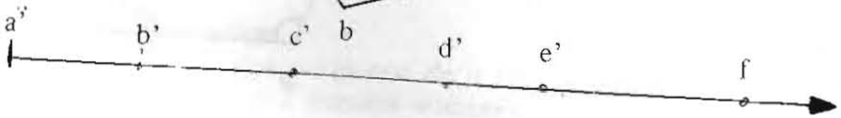
5°) $\overline{a'c'} \cap \overline{d'e'} = \{e'\}$

8.– PERIMETRO:

Dado:



Construímos:



Tal que:

$\overline{a'b'} \cong \overline{ab}$ $\quad$ $\overline{c'd'} \cong \overline{cd}$ $\quad$ $\overline{e'f} \cong \overline{ea}$

$\overline{b'c'} \cong \overline{bc}$ $\quad$ $\overline{d'e'} \cong \overline{de}$

Resulta:

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ea} = \overline{a'f}$$

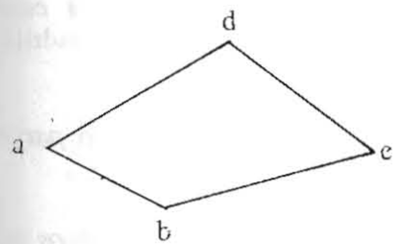
La longitud de $\overline{a'f}$ es el perímetro del polígono.

Perímetro del políg. = *suma* de las longitudes de los lados

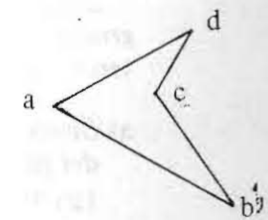
9.– CUADRILATEROS: POLIGONOS DE CUATRO LADOS

9.1.– *CLASIFICACION:*

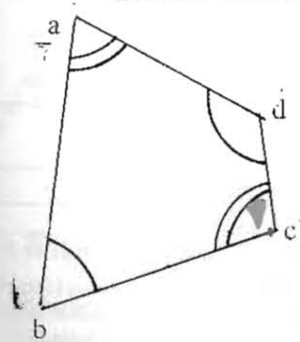
a) *Cuadrilátero convexo*



b) *Cuadrilátero cóncavo*



9.2.– *LADOS; VERTICES Y ANGULOS OPUESTOS DE UN CUADRILATERO:*



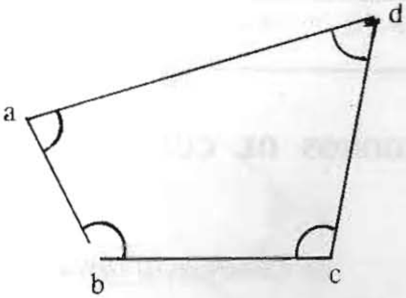
cuadrilátero: abcd

lados opuetoss $\begin{cases} \overline{ab} \text{ y } \overline{cd} \\ \overline{bc} \text{ y } \overline{ad} \end{cases}$

vértices opuestos $\begin{cases} a \text{ y } c \\ b \text{ y } d \end{cases}$

ángulos opuestos $\begin{cases} \hat{a} \text{ y } \hat{c} \\ \hat{b} \text{ y } \hat{d} \end{cases}$

9.3.– *Suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero:*



De acuerdo con la fórmula dada en 6.3.–:

$$S = 2\,R\,(n - 2)$$

resulta:

$$\widehat{abc} + \widehat{bcd} + \widehat{cda} + \widehat{dab} = 4\,R$$

9.4.– *Cuadriláteros especiales:*

Según se considere el *paralelismo* o la *congruencia* de los lados, se pueden obtener cuadriláteros especiales:

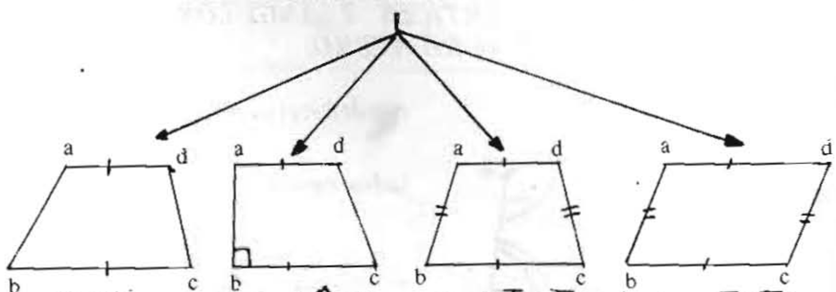
a) *Generación de cuadriláteros especiales a partir del paralelismo de lados:*

1º) *Trapecio:*

Si un cuadrilátero tiene *por lo menos* un par de lados paralelos, es un trapecio.

trapecio $\Longleftrightarrow$ un par de lados paralelos

$$\boxed{\overline{ad} \,/\!/\, \overline{bc} \Longleftrightarrow abcd : \text{trapecio}}$$



trapecio escaleno

además $\hat{b} = 1\,R$
trapecio rectángulo

además $\overline{ab} \cong \overline{ac}$
trapecio isósceles

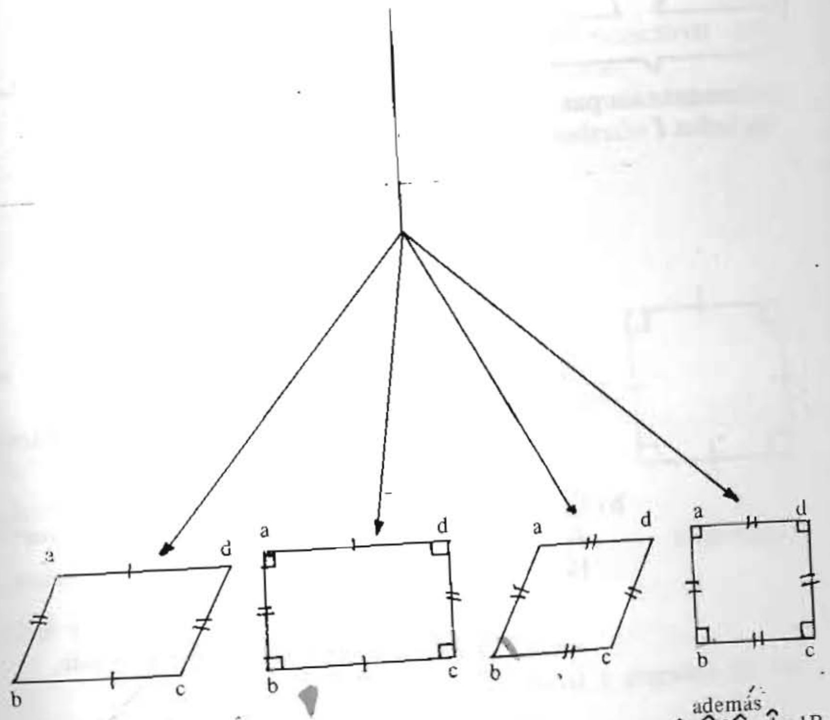
además $\overline{ab} \,/\!/\, \overline{cd}$
paralelogramo (doblemente trapecio)

2º) *Paralelogramo:*

Si un cuadrilátero tiene sus *dos pares de lados opuestos paralelos*, es paralelogramo.

paralelogramo $\Longleftrightarrow$ dos pares de lados opuestos paralelos

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\overline{ab} \,/\!/\, \overline{cd}\\ \overline{bc} \,/\!/\, \overline{ad}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow abcd : \text{paralelogramo}}$$



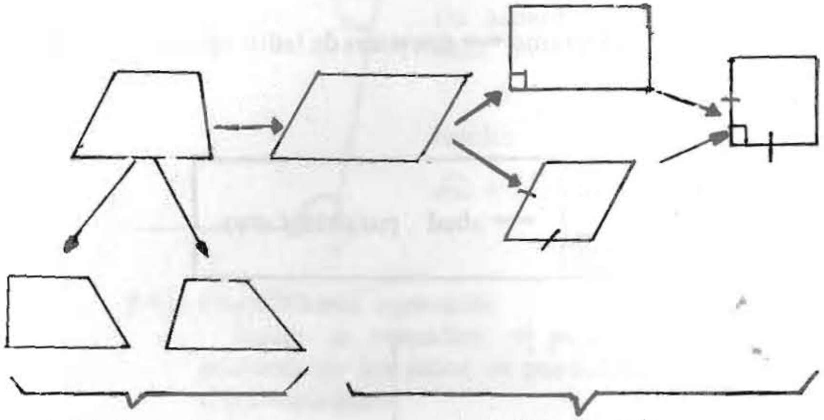
paralelogramo

además $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d} = 1\,R$
rectángulo

además $\overline{ab} \cong \overline{bc} \cong \overline{cd} \cong \overline{da}$
rombo

además $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d} = 1\,R$
$\overline{ab} \cong \overline{bc} \cong \overline{cd} \cong \overline{da}$
cuadrado

Representando 1º) y 2º) en un esquema, resulta:



solamente un par de lados //

dos pares de lados //

Si un paralelogramo tiene:
- un ángulo recto, es: *rectángulo.*
- dos lados consecutivos congruentes, es: *rombo.*
- un ángulo recto y dos lados consecutivos congruentes, es: *cuadrado.*

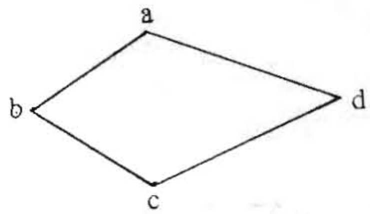
b) *Generación de cuadriláteros especiales a partir de la congruencia de lados consecutivos:*

1º) *Romboide:*

Si un cuadrilátero tiene *dos pares de lados consecutivos congruentes*, es romboide.

romboide ⇔ dos pares de lados consecutivos congruentes

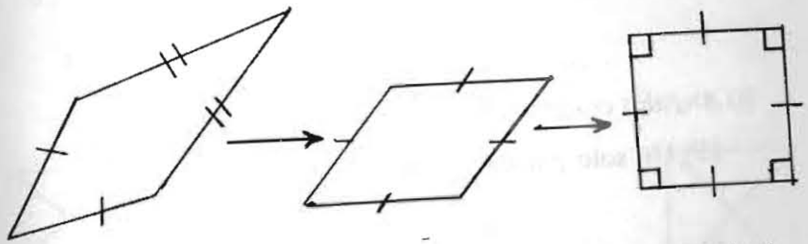
$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\overline{ab} \cong \overline{bc} \\ \overline{ad} \cong \overline{cd}\end{array}\right\} \iff abcd : \text{romboide}}$$



Resulta:
$\hat{a} \cong \hat{c}$
$\hat{b} \ncong \hat{d}$

Si el romboide tiene:
- sus *pares de lados consecutivos congruentes entre sí*, es: rombo.
- Si el rombo tiene *dos ángulos consecutivos congruentes*, es: cuadrado.

2º) *Esquema:*



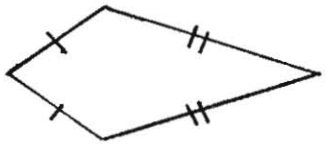
romboide *rombo* *cuadrado*

9.5.– *Propiedades de lados y ángulos y ángulos de los cuadriláteros:*

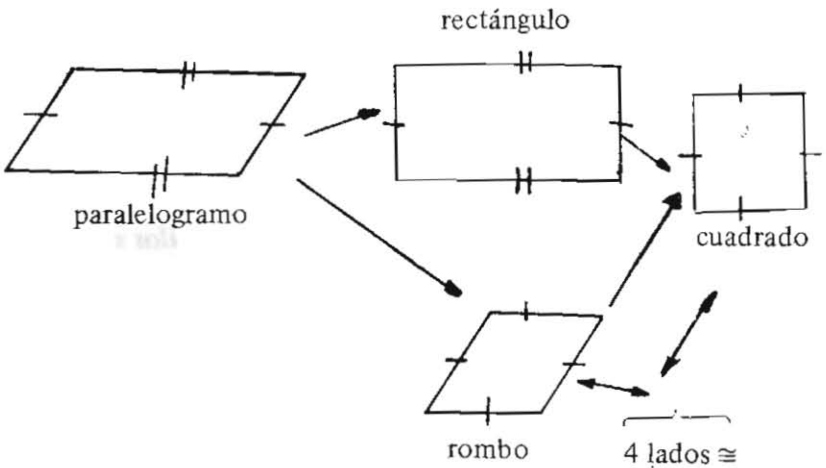
a) *Lados congruentes:*

1º) Dos pares de lados consecutivos congruentes.

2º) Dos pares de lados opuestos congruentes.

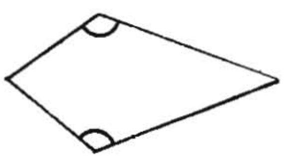


romboide

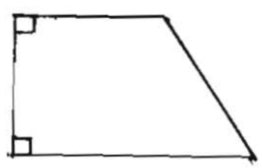


b) *Angulos congruentes*

1º) Un solo par de ángulos congruentes.

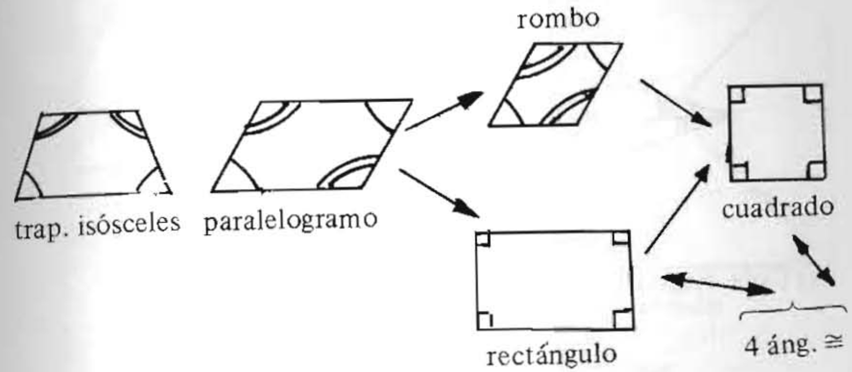


romboide



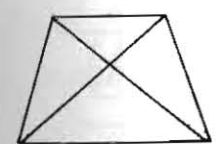
trapecio-rectángulo

2º) Dos pares de ángulos congruentes.

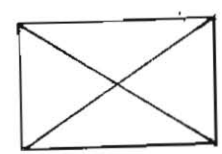


9.6.– *Propiedades de las diagonales:*

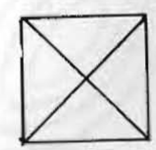
a) *Diagonales congruentes:*



trapecio isósceles

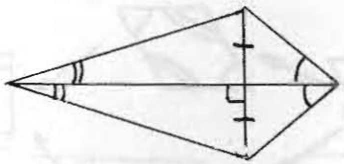


rectángulo



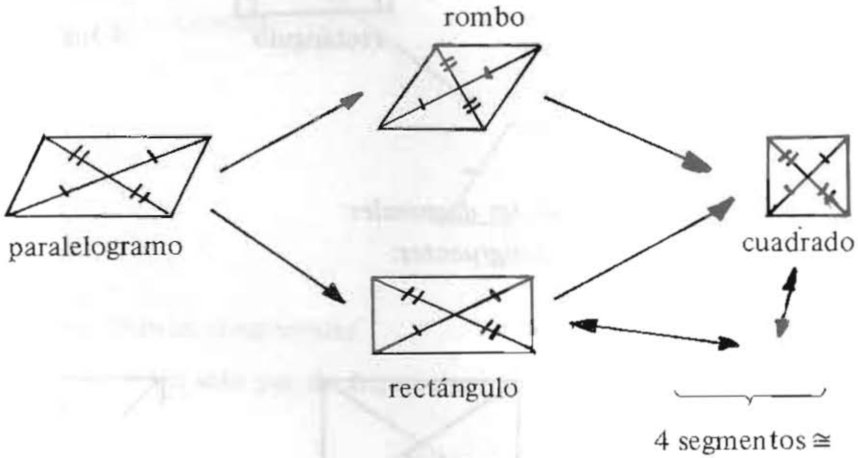
cuadrado

b) *Determinan al cortarse segmentos congruentes:*
1º) Una sola diagonal.

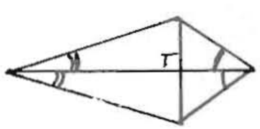


romboide

2º) Cada diagonal.

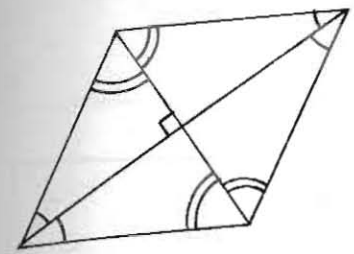


c) *Diagonales perpendiculares y bisectrices de ángulos opuestos:*
1º) Una sola diagonal es bisectriz.

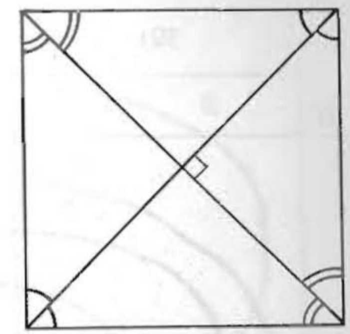


romboide

2º) Cada diagonal es bisectriz.



rombo

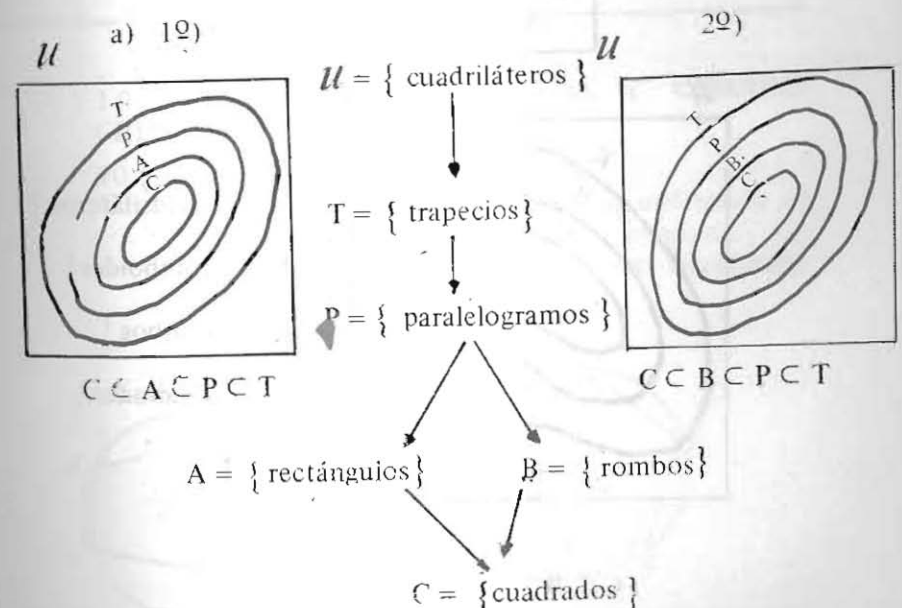


cuadrado

9.7.- *Representación en diagramas de Venn:*

Considerando como conjunto universal, al conjunto de todos los cuadriláteros resulta:

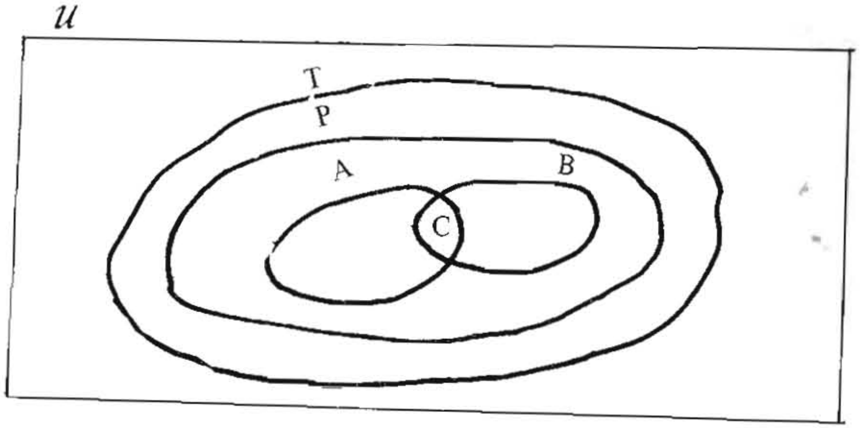
a) 1º)



$C \subset A \subset P \subset T$ $\qquad$ $C \subset B \subset P \subset T$

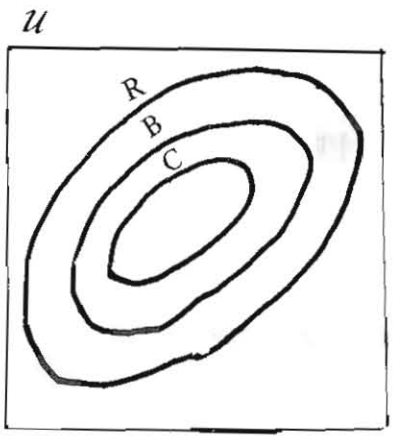
Los diagramas 1º) y 2º) pueden representarse en un único esquema:

3º)



$A \cap B = C$

b)



$\mathcal{U}$ = {cuadriláteros}

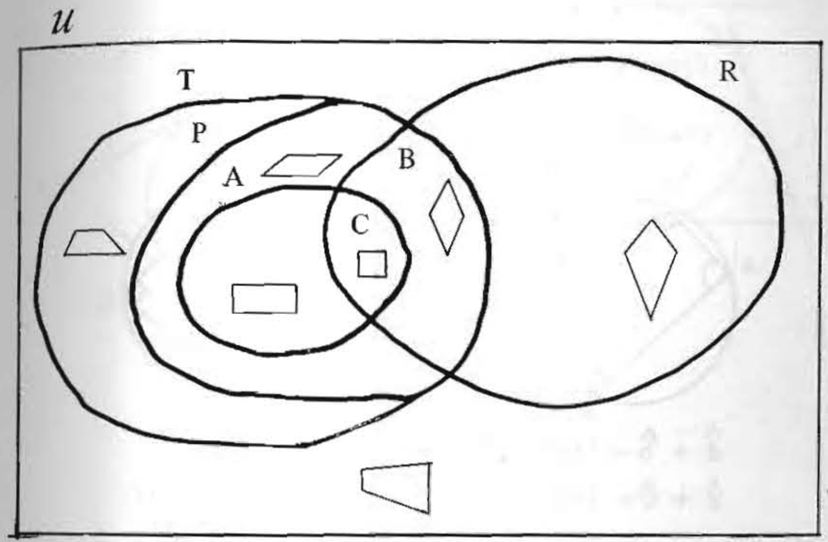
R = {romboides}

B = {rombos}

C = {cuadrados}

$C \subset B \subset R$

Los diagramas de a) y b) de 9.7.– se pueden presentar en un esquema único:

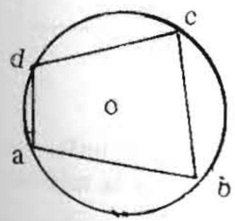


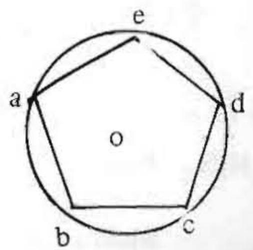
10.– POLIGONOS INSCRIPTOS Y CIRCUNSCRIPTOS:

10.1.– *Polígonos inscriptos:*

Polígono inscripto en una circunferencia es aquel cuyos vértices pertenecen a la misma.

La circunferencia se dice que está circunscripta al polígono.



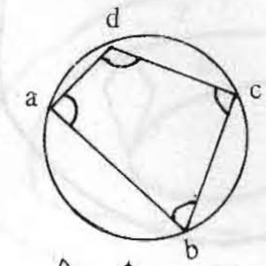


10.2.– *Cuadriláteros inscriptos:*

En todo cuadrilátero inscripto los ángulos opuestos son suplementarios.

Ejemplos:

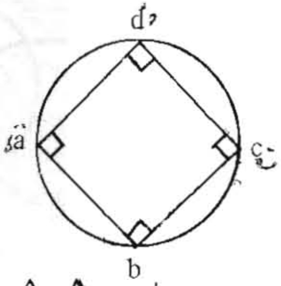
cuadrilátero



$\hat{d} + \hat{b} = 180°$

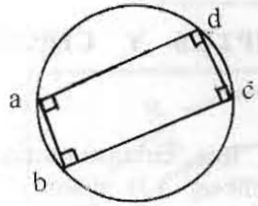
$\hat{a} + \hat{c} = 180°$

cuadrado



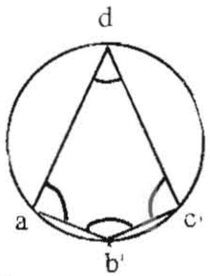
$\hat{d} + \hat{b} = 180°$

$\hat{a} + \hat{c} = 180°$



$\hat{d} + \hat{b} = 180°$

$\hat{a} + \hat{c} = 180°$



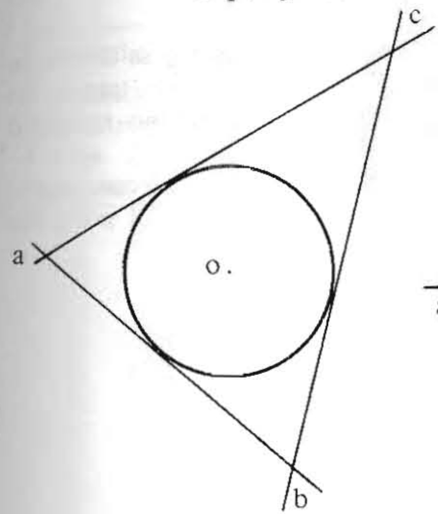
$\hat{d} + \hat{b} = 180°$

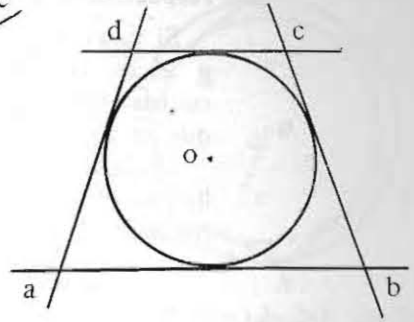
$\hat{a} + \hat{c} = 180°$

10.3.– *Polígonos circunscriptos:*

Polígono circunscripto a la circunferencia es aquel cuyos lados son tangentes a la misma.

La circunferencia se dice que está inscripta en el polígono.

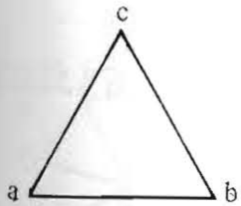




11.– POLIGONOS REGULARES

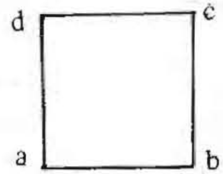
11.1.– Un polígono convexo es regular si todos sus lados y todos sus ángulos son respectivamente congruentes.

Polígono regular $\Longleftrightarrow$ políg. equilátero y equiángulo



$\overline{ab} \cong \overline{bc} \cong \overline{ca}$

$\hat{a} \cong \hat{b} \cong \hat{c}$



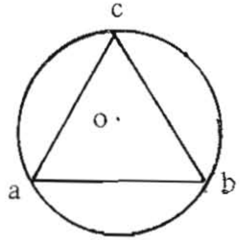
$\overline{ab} \cong \overline{bc} \cong \overline{cd} \cong \overline{da}$

$\hat{a} \cong \hat{b} \cong \hat{c} \cong \hat{d}$

El triángulo equilátero y el cuadrado son los únicos polígonos regulares de tres y cuatro lados respectivamente.

Si una circunferencia de centro o se divide en n arcos congruentes $(n > 2)$, y se trazan las cuerdas correspondientes, el polígono inscripto que se obtiene es *regular*.

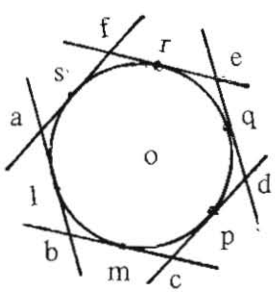
El centro de la circunferencia circunscripta, llamado circuncentro, es el centro del polígono regular.



$$\widehat{ab} = \widehat{bc} = \widehat{ca} = \frac{C(o,r)}{3}$$

$\overline{ab} \cong \overline{bc} \cong \overline{ca}$: cuerdas

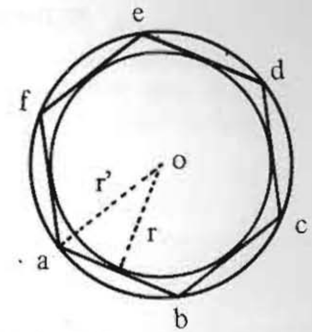
Si una circunferencia de centro o se divide en n arcos congruentes $(n > 2)$, y por los puntos de división se trazan tangentes a la misma, el polígono circunscripto que se obtiene, es *regular*.



$$\widehat{lm} = \widehat{mp} = \widehat{pq} = \widehat{qr} = \widehat{rs} = \widehat{sl} = \frac{C(o,r)}{n}$$

ab tangente en l
bc tangente en m
cd tangente en p
de tangente en q
ef tangente en r
fa tangente en s

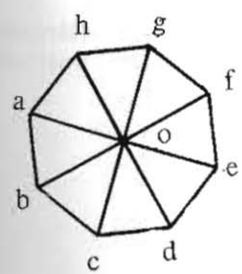
Todo polígono regular es inscriptible en una circunferencia y circunscriptible a otra, ambas del mismo centro.

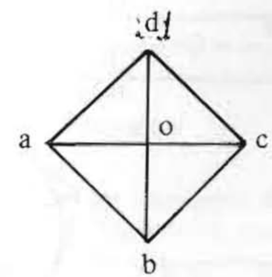


hexágono abcdef: regular
inscripto en C(o,r')
circunscripto en C(o,r)

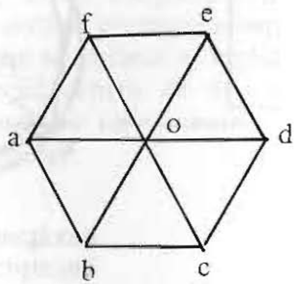
11.2.– *Elementos del polígono regular:*

a) El *centro* del polígono regular equidista de sus vértices y de sus lados.
Un polígono regular se puede descomponer en tantos triángulos isósceles congruentes con vértice en el centro, como lados tiene el polígono.



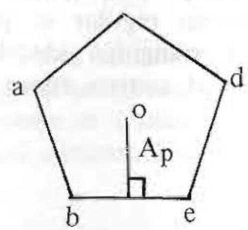


Elhexágono es el único polígono regular que se puede separar en triángulos equiláteros.



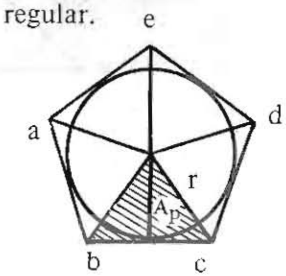
b) *Apotema del polígono regular:*

Segmento de perpendicular trazada desde el centro a uno cualquiera de los lados.



La longitud de la apotema es igual al radio de la circunferencia inscripta.

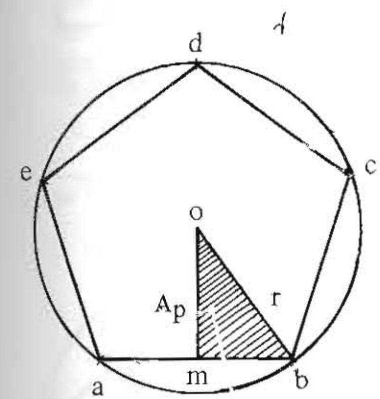
La altura de uno cualquiera de los triángulos isósceles de vértice o es la apotema del polígono regular.



c) *Radio:*

El *radio* de la circunferencia circunscripta, es el *radio* del polígono regular correspondiente.

La apotema es siempre menor que el radio porque es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio.



$\overset{\triangle}{omb}$: rectángulo

$Ap < r$

d) *Angulo central:*

Angulo central del polígono regular es el que tiene como vértice el centro del polígono y sus lados pasan por dos vértices consecutivos.

Políg. de n lados $\boxed{\text{ángulo central} = \dfrac{4\,R}{n}}$

11.3.– *Angulo interior del polígono regular:*

Como la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados igual a $2R(n-2)$, resulta:

$$\boxed{\text{áng. interior del políg. reg.} = \frac{2\,R\,(n-2)}{n}}$$

11.4.– *Angulo exterior del polígono regular:*

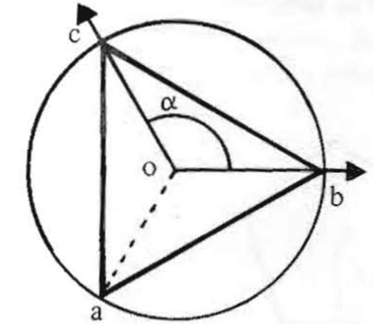
Como la suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados es igual a 4R, resulta:

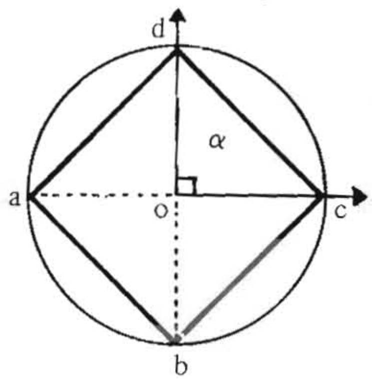
$$\text{áng. exterior del políg. reg.} = \frac{4\,R}{n}$$

11.5.– *Inscripción de polígono regulares a partir del ángulo central:*

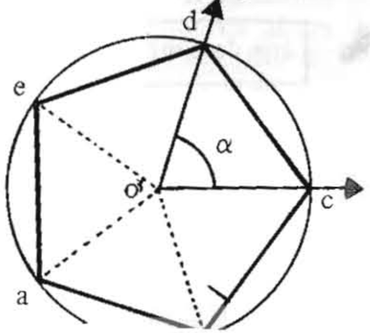
a)

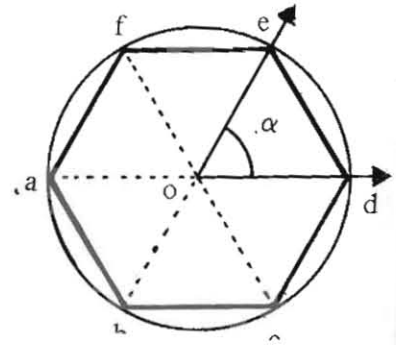
Triángulo: $\alpha = \dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ *Cuadrado:* $\alpha = \dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$





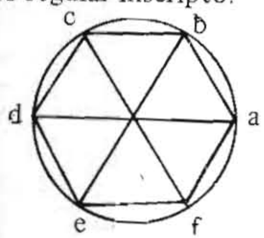
Pentágono: $\alpha = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ Hexágono: $\hat{\alpha} = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$



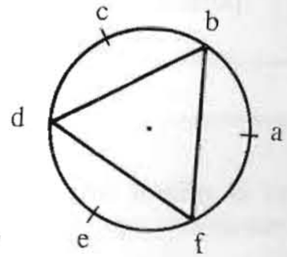


b) Otro procedimiento para inscribir el hexágono regular y el triángulo equilátero:

– *Héxagono regular:*
Con el radio de la circunferencia, a partir de un punto de la misma, se determinan 6 arcos consecutivos congruentes. Las cuerdas correspondientes son los lados del hexágono regular inscripto.



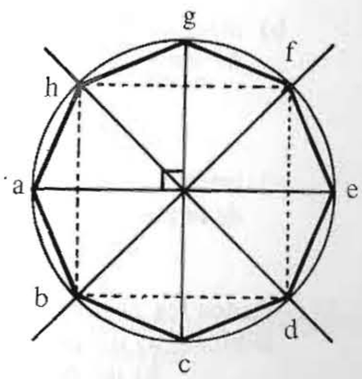
– *Triángulo equilátero:*
Una vez inscripto un exágono regular, se puede obtener un triángulo equilátero trazando las cuerdas correspondientes a cada dos arcos consecutivos.



c) A partir de cualquiera de las construcciones anteriores, bisecando los ángulos centrales se obtienen nuevos polígonos regulares inscriptos. Ejemplo: del pentágono, se obtiene el decágono.

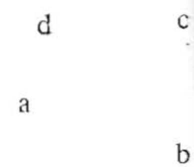
Otro ejemplo:

– *Octógono:*
Se puede obtener trazando las bisectrices de los ángulos centrales de un cuadrado inscripto.



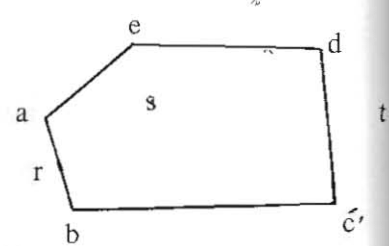
EJERCICIOS DE APLICACION

21.– Dados:



Expresar el polígono abcd:
a) como intersección de semiplanos
b) como intersección de ángulos.

22.– Completar con $\in$ ó $\notin$ según corresponda, considerando el polígono abcde definido como:

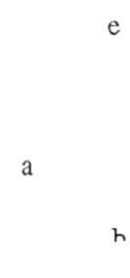


a) unión de la poligonal con su región interior
- 1º) r. . . Poligonal
- 2º) s. . . Poligonal
- 3º) t. . . Región exterior
- 4º) s. . . Región interior
- 5º) s. . . abcde

b) intersección de semiplanos
- 1º) r. . . abcde
- 2º) s. . . abcde
- 3º) t. . . abcde

c) intersección de ángulos
- 1º) s. . . abcde
- 2º) s. . . $\widehat{cde}$
- 3º) t. . . abcde
- 4º) t. . . $\widehat{eab}$
- 5º) t. . . $\widehat{cde}$

23.– Dados los puntos abcde:
Dibujar: a) un polígono convexo
b) un polígono cóncavo.



24.– Completar:

	Número de lados del polígono	Número de diagonales desde a	Número de total de diagonales	Suma de los ángulos interiores
a	3			
b				900°
c	12			
d		16		

25.– Analizar y decidir, en cada caso, si es posible la construcción de pentágonos cuyos lados tengan las siguientes longitudes:

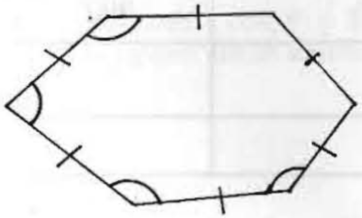
a) 5 cm ; 3 cm ; 10 cm ; 6 cm ; 2 cm
b) 95 mm ; 25 cm ; 1 m ; 3 dm ; 38 cm

26.– Nombrar los elementos necesarios que hagan posible la congruencia entre:
a) dos cuadriláteros
b) dos octógonos
c) dos triángulos

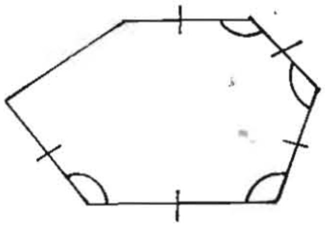
27.– Indicar en cada caso con:
A: si se señalan los elementos necesarios y suficientes,
B: si están mal señalados los elementos,

C: si se señalan más elementos que los necesarios, para construir un polígono congruente a cada uno de los dados:

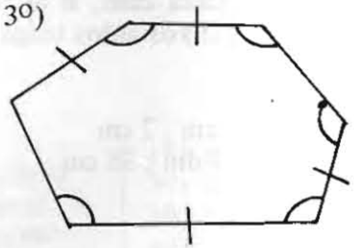
1º)



2º)



3º)



28.– Completar la tabla con V (verdadero) o F (falso):

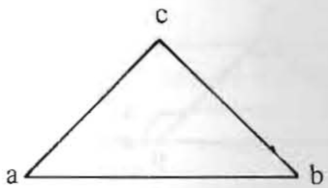
	equilátero	isósceles	escaleno
acutángulo			
rectángulo			
obtusángulo			

29.– Dados los triángulos abc y def señalar con V o F si las condiciones indicadas aseguran la congruencia:

a) $\left.\begin{array}{l} \overline{ab} \cong \overline{de} \\ \overline{bc} \cong \overline{ef} \\ \overline{ca} \cong \overline{fd} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{def}$ ☐

b) $\left.\begin{array}{l} \hat{a} \cong \hat{d} \\ \hat{b} \cong \hat{e} \\ \hat{c} \cong \hat{f} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{def}$ ☐

30.– *Dato.* $\overset{\triangle}{abc}$: isósceles



a) Trazar las alturas, medianas, bisectrices y mediatrices.

b) Indicar con V o F:

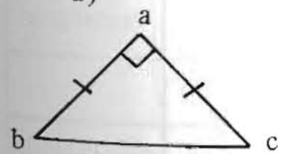
1º) H_a; B_a; M_a → coincidentes ☐

2º) H_b; B_b; M_b → coincidentes ☐

3º) H_c; B_c; M_c → coincidentes ☐

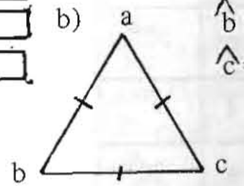
31.– Calcular los ángulos:

a)



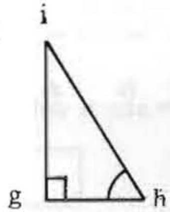
$\hat{a} =$ ☐
$\hat{b} =$ ☐
$\hat{c} =$ ☐

b)



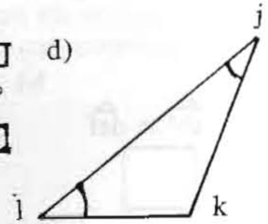
$\hat{a} =$ ☐
$\hat{b} =$ ☐
$\hat{c} =$ ☐

c)



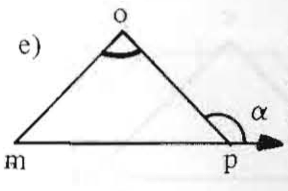
$\hat{g} = \square$
$\hat{h} = 60°$
$\hat{i} = \square$

d)



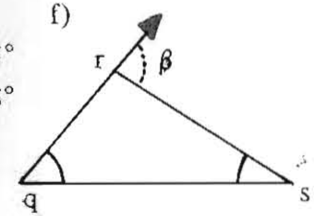
$\hat{j} = 28°$
$\hat{k} = \square$
$\hat{l} = 35°$

e)



$\hat{\alpha} = 115°$
$\hat{o} = 85°$
$\hat{m} = \square$
$\hat{p} = \square$

f)



$\hat{q} = 55°$
$\hat{s} = 32°$
$\hat{r} = \square$
$\hat{\beta} = \square$

32.– Completar la siguiente tabla:

	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$	Clase de triángulo	
Ejemplo: a	30°	80°	70°	escaleno	acutángulo
b		30°	30'		
c	25°		50°		
d				isósceles	rectángulo
e	35°				rectángulo
f				equilátero	
g	32°			isósceles	obtusángulo

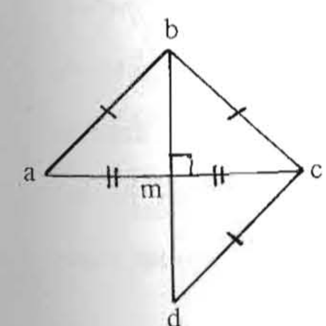
33.– Dados:
$\overline{ab}$; $\overline{bc}$; $\overline{ac}$: lados de un triángulo

Completar la tabla con los valores en cm que hagan posible la existencia de cada uno de los triángulos.
En los casos en que la solución no sea única, indicar entre qué valores está comprendida.

Ejemplo:

	$\overline{ab}$	$\overline{bc}$	$\overline{ac}$	Clase de triángulo
a	4	entre 2,5 y 10,5	6,5	escaleno
b		8		equilátero
c		5,5	2_	isósceles
d		3	3	
e	5		14	escaleno

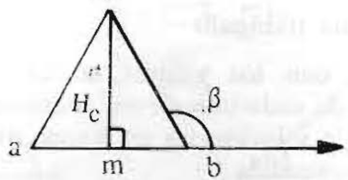
34.– *Datos:*



Considerando cada triángulo como conjunto de puntos, completar las siguientes igualdades:

a) $\widehat{abc} \cap \widehat{bdc} = \square$
b) $\widehat{abm} \cap \widehat{bdc} = \square$
c) $\widehat{abc} \cap \widehat{mbc} = \square$
d) $\widehat{abm} \cap \widehat{dmc} = \square$
e) $\widehat{abc} \cap \widehat{dmc} = \square$
f) $\widehat{abm} \cup \widehat{bmc} = \square$
g) $\widehat{abm} \cup \widehat{bmc} \cup \widehat{mcd} = \square$

35.– *Datos:*



$\overset{\triangle}{abc}$: equilátero

H_c : altura

Considerando las longitudes de los segmentos y amplitudes de los ángulos, completar con >, = o < según corresponda:

a) $\overline{am}$ ○ $\overline{mb}$ c) $\hat{a}$ ○ $\widehat{acm}$

b) $\widehat{acm}$ ○ $\widehat{mcb}$ d) $\hat{\beta}$ ○ $\hat{a}+\hat{c}$

36.– Completar con V (verdadero) o F (falso):

a) Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos, entonces es un trapecio. ( )
b) En un paralelogramo, las diagonales se cortan mutuamente en partes congruentes. ( )
c) Un cuadrilátero que tiene 2 ángulos opuestos rectos es un rectángulo. ( )
d) Si un cuadrilátero es equilátero, entonces sus ángulos son congruentes. ( )
e) Las diagonales de un rombo son bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen. ( )
f) Cada diagonal de un romboide es bisectriz de los ángulos cuyos vértices unen. ( )
g) El cuadrado es un rombo. ( )
h) En un cuadrilátero inscriptible los ángulos opuestos son suplementarios. ( )

37.– En cada caso, nombrar el cuadrilátero que cumple la condición indicada:

a) Diagonales que se intersecan en el punto medio.
b) Diagonales perpendiculares.
c) Dos pares de lados consecutivos congruentes.
d) Solamente un par de ángulos congruentes.
e) Angulos opuestos congruentes.
f) Cuatro ángulos congruentes.

38.– Indicar cuáles de estas propiedades son suficientes para definir un paralelogramo:

a) Diagonales congruentes.
b) Un par de lados opuestos congruentes.
c) Diagonales perpendiculares.
d) Un par de lados opuestos congruentes y paralelos.
e) Un par de lados paralelos.
f) Cuatro lados congruentes.
g) Cuatro ángulos congruentes.

39.– Responder *sí* o *no*:

a) ¿Son inscriptibles los rombos?
b) ¿Son inscriptibles los rectángulos?

40.– Indicar si es posible que los lados de un cuadrilátero tengan las siguientes longitudes:

a) 1/4 m; 2 m; 1/4 m; 1 m
b) 16 cm; 24 cm; 30 cm; 10 cm
c) 2,5 cm; 0,8 dm; 1 cm; 3 dm

41.– Dadas las amplitudes de los ángulos del cuadrilátero abcd, tachar lo que no corresponda:

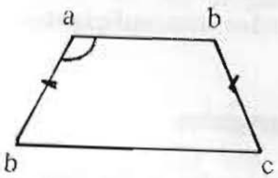
a) $\hat{a} = 75°$
$\hat{b} = 80°$
$\hat{c}$

abcd es: abcd es : $\boxed{\text{rombo}}$ $\boxed{\text{cuadrado}}$ $\boxed{\text{cuadril. general}}$

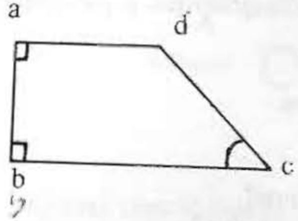
b) $\hat{a} = 90°$
$\hat{b} = 110°$
$\hat{c} = 50°$
$\hat{d} = 110°$

abcd es: $\boxed{\text{paralelogramo}}$ $\boxed{\text{romboide}}$ $\boxed{\text{trapecio}}$

42.– Completar con los valores correspondientes:

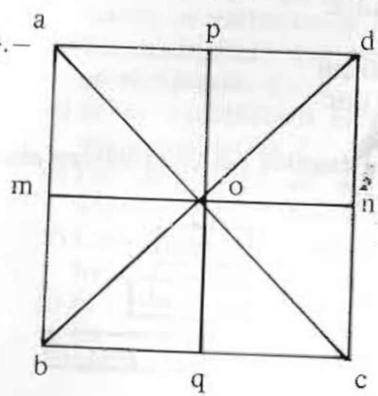
a) 

$\hat{a} = 120°$
$\hat{b} = \ldots\ldots$
$\hat{c} = \ldots\ldots$
$\hat{d} = \ldots\ldots$

b) 

$\hat{a} = \ldots\ldots$
$\hat{b} = \ldots\ldots$
$\hat{c} = 40°$
$\hat{d} = \ldots\ldots$

43.– Si $\hat{a} = 1/2\,\hat{b}$; $\hat{b} = 1/2\,\hat{c}$; $\hat{c} = 1/3\,\hat{d}$; y $\hat{a} = 216°$. ¿Es posible que sean los ángulos de un cuadrilátero?

44.– 

E = {puntos del cuadrado abcd}
A = {puntos del trapecio mbco}
B = {puntos del triángulo amo}
C = {puntos del triángulo abd}
D = {puntos del rectángulo pqcd}

Resolver:

a) $A \cup B =$
b) $A \cup C =$
c) $(C \cup D) \cup A =$
d) $A \cap C =$
e) $A \cap B =$
f) $B \cap D =$

45.– Completar con =; < o > según corresponda:

a) triángulo equilátero
Suma de los ángulos int. ◯ Suma de los ángulos ext.

b) cuadrado:
Suma de los ángulos int. ◯ Suma de los ángulos ext.

c) pentágono regular:
Suma de los ángulos int. ◯ Suma de los ángulos ext.

d) hexágono regular:
Suma de los ángulos int. ◯ Suma de los ángulos ext.

46.– Completar:

	Suma de los ángulos interiores en grados	Número de lados del polígono regular
a	1080	
b	2700	
c	900	
d	1980	

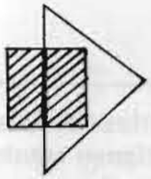
47.– Completar:

número de lados del polígono	Suma de los ang. interiores	Angulo interior	Angulo exterior
8			
6			
5			

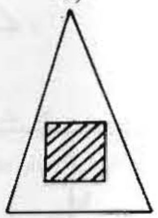
RESULTADOS DE LOS EJERCICIOS DE APLICACION

1.–

a)

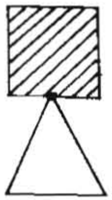


b)



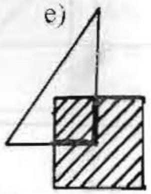
$A \cap B = \phi$

c)



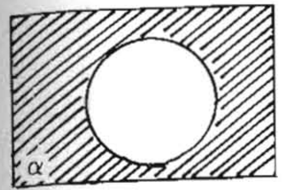
d)

e)

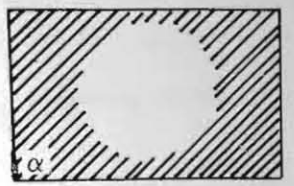


f)

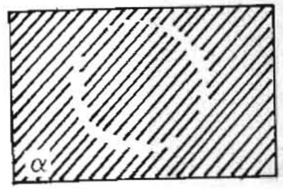
2.– a) $\alpha - A$



b) $\alpha - B$



c) $\alpha - C$



3. – a) R b) $\overset{\triangle}{mpr}$ c) $\overset{\square}{pmcd}$ d) ϕ

e) polígono cóncavo abmrp

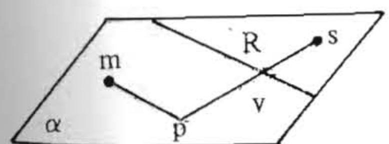
4.– $\overrightarrow{ab}$; s/r de origen *a* que no contiene *b*;

$\overrightarrow{ba}$; s/r de origen *b* que no contiene *a*.

5.– $s/p_{(M,a)}$; $s/p_{(M,b)}$; $s/p_{(R,a)}$; $s/p_{(R,b)}$.

6.– a) $\overrightarrow{ac}$; b) $\overrightarrow{bc}$; c) $\overrightarrow{cb}$; d) R

7.– a)

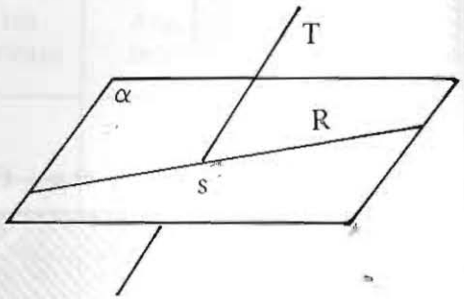


b) 1º) V
2º) F

c) 1º) ϕ
2º) v

8.– a) M; b) α; c) $s/p_{(M,r)}ab.$;
d) $s/p_{(M,s)}$; e) M.

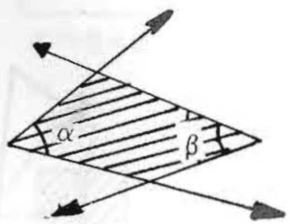
9.– Ejemplo de solución:



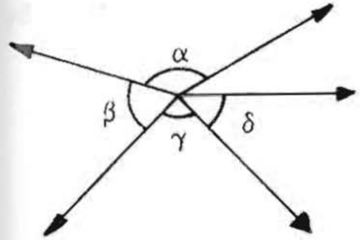
10.– a) S = { $\overline{ba}$; $\overline{bj}$; $\overline{bg}$; $\overline{be}$; $\overline{bh}$; $\overline{bk}$; $\overline{bi}$; $\overline{bc}$ }
b) NO, $\overline{bj} \subset \overline{bg}$
c) 1º: $\overline{ac}$ y $\overline{gi}$ o $\overline{ci}$ y $\overline{gd}$ o $\overline{de}$ y $\overline{ac}$. . .etc.
2º: $\overline{jb}$ y $\overline{bk}$

11.– a) 1º: $\hat{\alpha}$ 2º: $\{o\}$ 3º: $\vec{oc}$
4º: $\hat{\alpha}$ 5º: $\hat{\alpha}$ 6º: ϕ
7º: ϕ

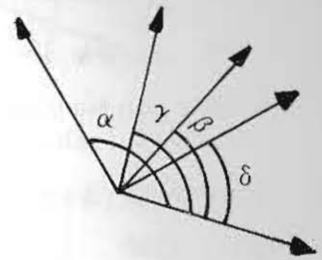
b) Ejemplo: 4º:



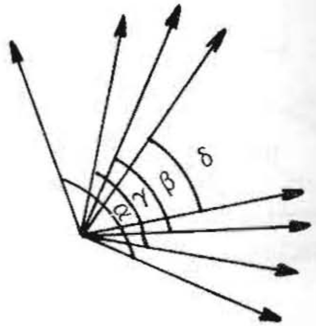
12.– a) Soluciones posibles:
1º



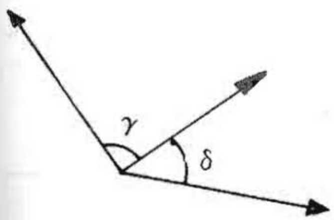
2º



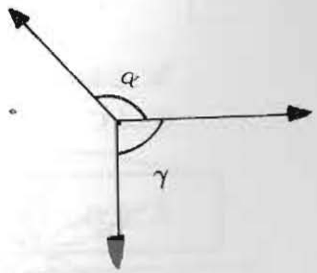
o bien:



b) Soluciones posibles:
1º:



2º:



13.– a) 1º: $a\hat{b}j$; $j\hat{b}e$; $j\hat{b}k$; $e\hat{b}k$; $k\hat{b}c$
2º: $a\hat{b}e$; $e\hat{b}c$.
3º: $a\hat{b}j$ y $j\hat{b}e$; $e\hat{b}k$ y $k\hat{b}c$; $a\hat{b}j$ y $e\hat{b}k$; $j\hat{b}e$ y $k\hat{b}c$
4º: $a\hat{b}j$ y $j\hat{b}c$; $a\hat{b}e$ y $e\hat{b}c$; $a\hat{b}k$ y $k\hat{b}c$; $a\hat{b}j$ y $a\hat{b}k$; $k\hat{b}c$ y $j\hat{b}c$
5º: $j\hat{b}e$; $j\hat{b}k$; $j\hat{b}c$

b) $d\hat{j}b$ y $g\hat{j}e$; $b\hat{j}e$ y $d\hat{j}g$; $j\hat{e}b$ y $h\hat{e}k$; $b\hat{e}k$ y $j\hat{e}h$; $e\hat{k}b$ y $f\hat{k}i$; $b\hat{k}f$ y $e\hat{k}i$

c) $d\hat{j}b \cong b\hat{k}f$; $d\hat{j}b \cong e\hat{k}i$; $g\hat{b}h \ncong g\hat{b}i$; $g\hat{b}h \cong h\hat{b}i$

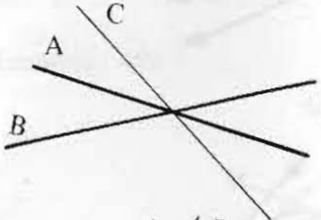
d) 1º) 180°
2º) 90°
3º) 180°

e) 1º) $a\hat{b}e$
2º) $a\hat{b}c$

14.– a) infinitas. b) infinitas c) una d) una

15.– a) m y p representan el mismo punto.
b) A y B son rectas secantes.

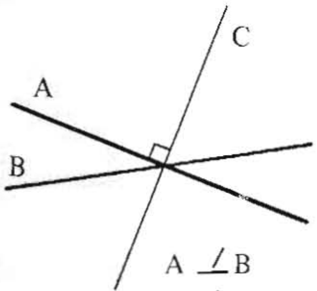
16.–



$A \not\perp B$
$B \not\perp C$

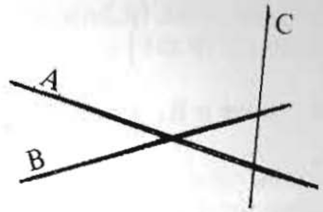
$A \not\perp C$

Transitiva



$A \not\perp B$
$B \not\perp C$

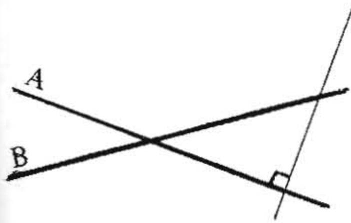
$A \perp C$



$A \not\perp B$
$B \not\perp C$

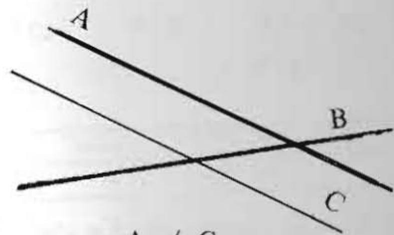
$A \not\perp C$

Transitiva



$A \not\perp B$
$B \not\perp C$

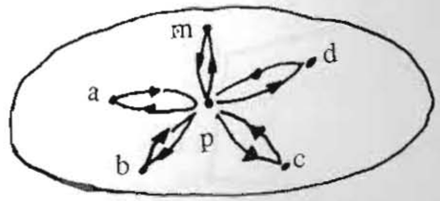
$A \perp C$



$A \not\perp C$
$B \not\perp C$

$A \parallel C$

17.– Ejemplo: a) R_1 : . . . . "es oblicuo a" . . . .
1º:



2º: $R_1 = \{(a,p); (p,a); (b,p); (p,b); (c,p); (p,c); (d,p); (p,d); (m,p); (p,m)\}$

3º: Simétrica: $a\,R_1\,p \Longleftrightarrow p\,R_1\,a$; etc.

18.–

	A	B	C	D
A	//	⊥	//	⊥
B	⊥	//	⊥	//
C	//	⊥	//	⊥
D	⊥	//	⊥	//

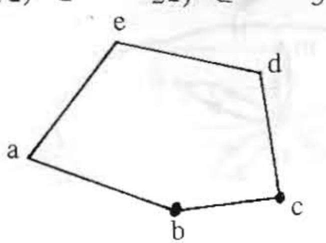
19.– a) F b) V c) F d) V e) V f) F
g) V

20.– a) $\{o\}$
b) $\overline{cd}$

21.– a) polig. abcd = s/p (ab,c) $\cap$ s/p (bc,d) $\cap$ s/p (cd,a) $\cap$ s/p (ad,b)
b) políg. abcd = $a\hat{b}c \cap b\hat{c}d \cap c\hat{d}a \cap d\hat{a}b$

22.– a) 1º) $\in$ 2º) $\notin$ 3º) $\in$ 4º) $\in$ 5º) $\in$
b) 1º) $\in$ 2º) $\in$ 3º) $\notin$
c) 1º) $\in$ 2º) $\in$ 3º) $\notin$ 4º) $\in$ 5º) $\notin$

23.– a)



b) No es posible

24.– a) 3; 0; 0; 180
b) 7; 4; 14; 900
c) 12; 9; 54; 1800
d) 19; 16; 152; 3060

25.– a) Es posible, porque el lado de mayor longitud (10 cm) es menor que la suma de los restantes.
b) No es posible, porque 1 m es mayor que la suma de la longitud de los demás lados.

26.– a) 3 lados y 2 ángulos comprendidos ó 2 lados consecutivos y 3 ángulos.
b) 7 lados y 6 ángulos comprendidos ó 6 lados consecutivos y 7 ángulos adyacentes.
c) 2 lados y el ángulo comprendido ó 1 lado y 2 ángulos, o tres lados.

27.– 1º C; 2º) A; 3º) B.

28.–

	equilátero	isósceles	escaleno
acutángulo	V	V	V
rectángulo	F	V	V
obtusángulo	F	V	V

29.– a) V; b) F

30.– b) 1º) F; 2º) F; 3º) V

31.– a) $\hat{a} = 90°$, $\hat{b} = 45°$, $\hat{c} = 45°$ b) $\hat{a} = 60°$, $\hat{b} = 60°$, $\hat{c} = 60°$ c) $\hat{g} = 90°$, $\hat{i} = 30°$ d) $\hat{k} = 117°$

e) $\hat{m} = 30°$, $\hat{p} = 65°$ f) $\hat{r} = 93°$, $\hat{\beta} = 87°$

32.– b) $\hat{a} = 120°$; isósceles – obtusángulo.
c) $\hat{b} = 105°$; escaleno – obtusángulo.
d) Ejemplo: si $\hat{a} = 90° \Rightarrow \hat{b} = \hat{c} = 45°$
e) Ejemplo: si $\hat{b} = 90° \Rightarrow \hat{c} = 55°$; escaleno - obtusángulo.
f) $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = 60°$; acutángulo.
g) Ejemplo: si $\hat{b} = 32° \Rightarrow \hat{c} = 116°$.

33.– b) 8 y 8 c) 5,5 d) entre 0 y 6
e) entre 9 y 19

34.– a) $\overset{\triangle}{bmc}$ b) $\overline{bm}$ c) $\widehat{mbc}$ d) $\{ m \}$
e) $\overline{mc}$ f) $\widehat{abc}$ g) polígono cóncavo abcde

35.– a) = b) = c) > d) =

36.– a) V c) F e) V g) V
b) V d) F f) F h) V

37.– a) paralelogramos
b) romboides
c) romboides
d) trapecios, rectángulos y romboides
e) paralelogramos
f) rectángulos

38.– d); f) ; g).

39.– a) En general, no. El único rombo inscriptible es el cuadrado.
b) Sí.

40.– a) no; b) sí; c) no.

41.– Se tacha: a) rombo y cuadrado
b) paralelogramo y trapecio.

42.– a) $\hat{b} = 60°$; $\hat{d} = 120°$
b) $\hat{a} = 90°$; $\hat{b} = 90°$; $\hat{d} = 140°$

43.– No.

44.– a) $\overset{\triangle}{abc}$
b) polígono cóncavo abcod
c) $\overline{abcd}$
d) $\overset{\triangle}{mbo}$
e) $\overline{mo}$
f) $\{ o \}$

45.– a) <
b) =
c) >
d) >

Solución de a):
Suma $\measuredangle$ int. = $180° \underbrace{(5-2)}_{3}$

Suma $\measuredangle$ int. = 540°
Suma $\measuredangle$ ext. = 360°
Suma $\measuredangle$ int. > Suma $\measuredangle$ ext.

46.– a) 8
b) 17
c) 7
d) 13

Solución de a):
Suma $\measuredangle$ int.: $180\ (n-2) = 1080$

$$n - 2 = \frac{1080}{180}$$
$$n - 2 = 6$$
$$n = 6 + 2$$
$$\boxed{n = 8}$$

47.–

Nº de lados del polígono	Suma $\measuredangle$ int.	$\measuredangle$ int.	$\measuredangle$ ext.
8	1080°	135°	45°
6	720°	120°	60°
5	540°	108°	72°

Solución de a):
Suma $\measuredangle$ int. = 1080°

$$\measuredangle \text{ int.} = \frac{1080°}{8}$$
$$\measuredangle \text{ int.} = \boxed{135°}$$
$$\measuredangle \text{ ext.} = \frac{360°}{8}$$
$$\measuredangle \text{ ext.} = \boxed{45°}$$

BIBLIOGRAFIA

- Matemática Moderna – Tomo I
  Papy
  E.U.D.E.B.A. – Bs. Aires
- Los primeros pasos en Matemática. 3: exploración del espacio y práctica de la medida.
  Dienes – Golding
  Ed. Teide – Barcelona, España
- Curso de Geometría Métrica – Tomo I; Fundamentos
  Pedro Puig Adam
  Ed. Biblioteca Matemática – Madrid, España
- Ciclo Medio de Matemática Moderna – I
  Trejo – Bosch
  E.U.D.E.B.A. – Bs. Aires
- Estudios de Matemática – Volumen IX: Curso conciso en Matemática para los profesores de Escuela Primaria
  Grupo de Estudio de la Matemática Escolar
  Traducción al español – EE.UU.
- Matemática intuitiva
  Houssay – Romero – Vicente
  Ed. Troquel – Bs. Aires
- Geometría Intuitiva
  Nelly Vázquez de Tapia – Elsa De Martino
  Ed. Cuarta Dimensión – Bs. Aires
- Matemática I
  Rojo – Sánchez – Greco
  Ed. El Ateneo – Bs. Aires
- Matemática I y II
  Ferrari – López Henríquez – Magariños – Massa
  Ed. Losada – Bs. Aires
- Matemática Dinámica I y II
  Varela – Foncuberta
  Ed. Kapelusz – Bs. Aires
- Algebra y Geometría del Espacio – 2
  González – Mancill
  Ed. Kapelusz – Bs. Aires
- Matemática, 1º y 2º
  Cárdenas, Curriel, López Pineda y otros
  Ed. Compañía Editorial Continental – México

INDICE