BUENOS AIRES — REPUBLICA ARGENTINA

Ministerio de Cultura y Educación

Consejo Nacional de Educación

Educación para la Reconstrucción

Nº 10

Matemática 4

El Consejo Nacional de Educación se complace en hacer llegar a sus docentes el presente trabajo.

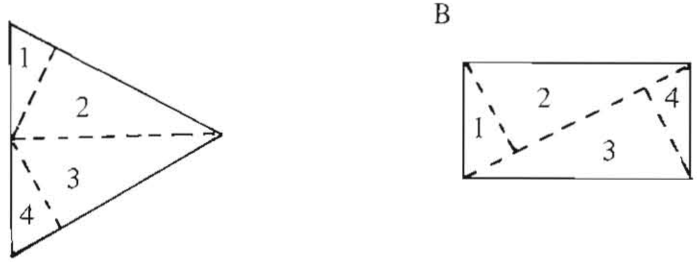
En esta segunda parte de la publicación de Geometría, se completan los conocimientos básicos de la materia que todo docente debe poseer en su formación profesional para desempeñarse en el nivel primario.

Aunque ya se manifestó en la primera parte, se reitera en ésta que el mismo está dirigido, por su nivel, a los maestros y no a los alumnos.

También hallarán los maestros en este trabajo una variada ejercitación que les permitirá una evaluación luego de la lectura de cada capítulo, encontrando en las últimas hojas las respuestas a los ejercicios propuestos.

I. – SUPERFICIE

1. – FIGURAS EQUICOMPUESTAS:



La figura A puede separarse en los triángulos 1, 2, 3, 4.

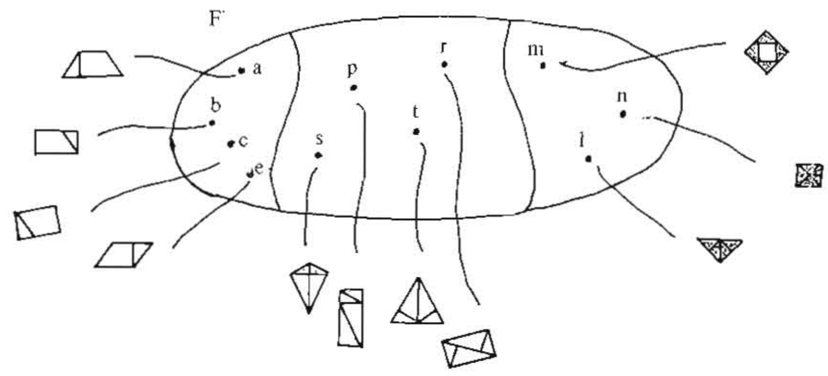
Con la unión de estos triángulos puede formarse un rectángulo B.

A y B son figuras equicompuestas porque resultan de la unión del mismo número de polígonos respectivamente congruentes, sin puntos interiores comunes.

2. – RELACION DE EQUIVALENCIA: SUPERFICIE

R = . . . "es equicompuesta con". . .

es una relación que clasifica los elementos de un conjunto F de figuras:



En F se produce una partición.

Cada subconjunto de la partición es una clase de equivalencia que define una superficie.

Las figuras que pertenecen a una misma clase son equivalentes en cuanto a su superficie.

> Las figuras equicompuestas, llamadas también equivalentes, tienen la misma superficie.

En una clase de equivalencia, si se conoce el valor de la superficie de una figura, se conoce también él de la superficie de todos los demás polígonos de la misma.

3. – COMPARACION INTUITIVA DE SUPERFICIE DE FIGURAS:

Dadas las figuras A y B:

3.1. – Si $A \cong B$

Se pueden descomponer en el mismo número de polígonos respectivamente congruentes. Son figuras equivalentes.

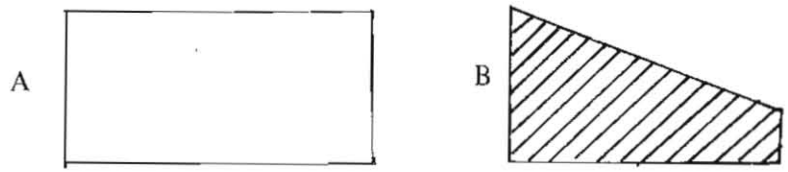
Se indica: $A \doteq B$

luego: Sup. A = Sup. B

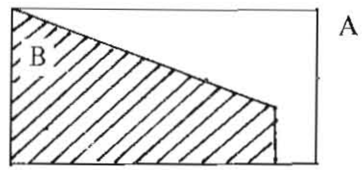
> Las figuras congruentes tienen la misma superficie.

3.2. – Si $A \ncong B$ pueden presentarse entre otros, los siguientes casos:

a)



Para comparar la superficie de A con la superficie de B, se puede calcar B y superponer sobre A. En este caso la figura A queda separada en dos partes: la cubierta por B y la que no está cubierta por B. Resulta B congruente con una parte propia de A.



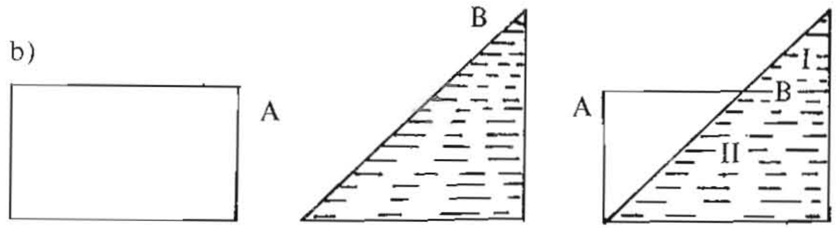
Se dice:

Sup. de A > Sup. de B

o bien:

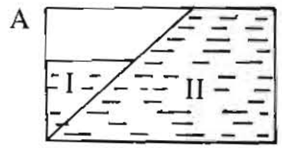
Sup. de B < Sup. de A

b)



Si se superponen las figuras A y B, ninguna de ellas contiene totalmente a la otra.

Se corta la parte sobrante de la figura B y se adapta a la figura A.



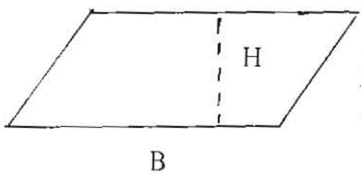
Se repite la situación del caso anterior:

Sup. A > Sup. B
Sup. B < Sup. A

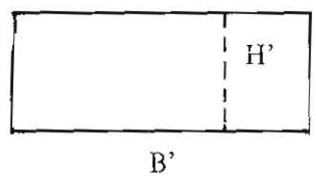
4. – CONDICIONES PARA QUE SE CUMPLA LA EQUIVALENCIA ENTRE:

4.1. – Dos paralelogramos:

Dados dos paralelogramos de bases y alturas respectivamente congruentes:



$\overline{B} \cong \overline{B'}$
$\overline{H} \cong \overline{H'}$



al superponer uno sobre otro se observa que:

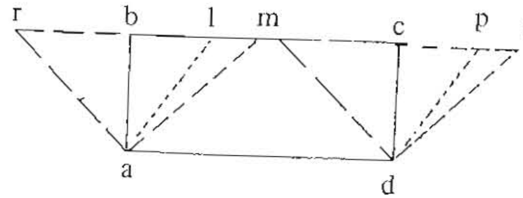
$\hat{1} \cong \hat{2}$

paralelogramo (B, H) y paralelogramo (B', H') son figuras equicompuestas.

Por lo tanto:

paralel. (B, H) ≐ paralel. (B', H')

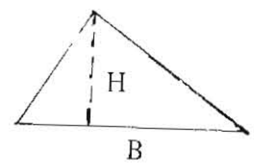
Dos paralelogramos son equivalentes si sus bases y alturas son respectivamente congruentes.



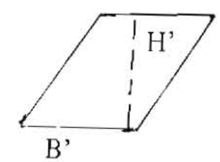
abcd ≐ alpd ≐ amqd ≐ . . .

4.2. – Un triángulo y un paralelogramo:

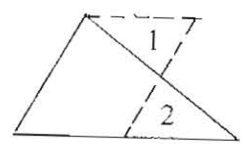
Dados un triángulo y un papalelogramo de alturas congruentes y tal que la base del paralelogramo sea congruente con la mitad de la base del triángulo:



$\overline{H} \cong \overline{H'}$
$\overline{B'} \cong \frac{1}{2}\overline{B}$



se puede superponer al triángulo un paralelogramo equivalente al dado, de base y altura respectivamente congruentes a B' y H'.



Se observa: $\hat{1} \cong \hat{2}$

triáng. (B, H) y paralel. (B', H') son figuras equicompuestas.

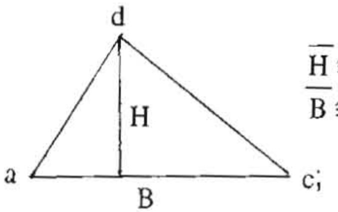
Por lo tanto:

triáng. (B. H) ≐ paralel. (B', H')

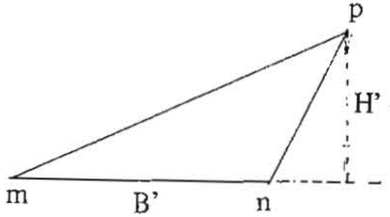
> Un triángulo y un papalelogramo de alturas congruentes son equivalentes si la base del paralelogramo es congruente con la mitad de la base del triángulo.

4.3. – **Dos triángulos:**

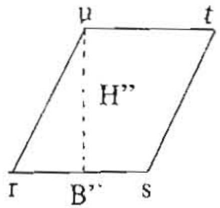
Dados dos triángulos de bases y alturas respectivamente congruentes:



$$\overline{H} \cong \overline{H'}$$
$$\overline{B} \cong \overline{B'}$$



Se construye:



Tal que:

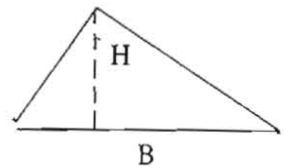
$$\overline{H} \cong \overline{H'} \cong \overline{H''}$$
$$\overline{B} \cong \overline{B'} \cong 2\,\overline{B''}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{acd} \doteq \overset{\square}{rstu} \\ \overset{\triangle}{mnp} \doteq \overset{\square}{rstu}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{acd} \doteq \overset{\triangle}{mnp}$$

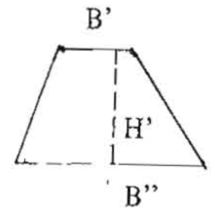
> Si dos triángulos tienen bases y alturas respectivamente congruentes, son equivalentes.

4.4. – **Un triángulo y un trapecio:**

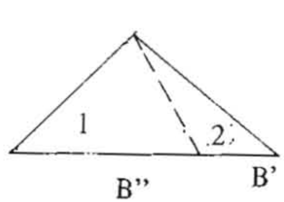
Dados un triángulo y un trapecio de alturas congruentes y tal que la base del triángulo sea igual a la suma de las bases del trapecio:

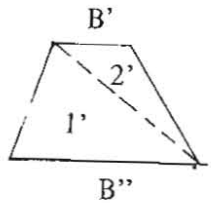


$$\overline{H} \cong \overline{H'}$$
$$\overline{B} = \overline{B'} + \overline{B''}$$



se puede dividir cada una de las figuras en dos triángulos de la siguiente manera:



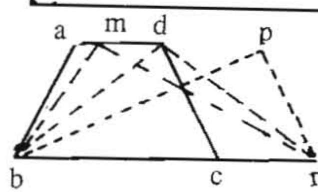


$$\left.\begin{array}{l}\hat{1} \doteq \hat{1'} \\ \hat{2} \doteq \hat{2'}\end{array}\right\}$$ por ser triángulos de bases y alturas respectivamente congruentes.

Por lo tanto:

triáng. (B, H) $\doteq$ trapecio (B', B'', H')

> Un triángulo y un trapecio de alturas congruentes son equivalentes si la base del triángulo es igual a la suma de las bases del trapecio.



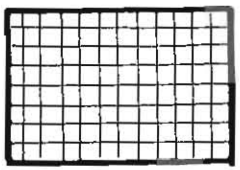
$$\overline{br} = \overline{bc} + \overline{ad}$$
$$\overset{\square}{abcd} \doteq \overset{\triangle}{bmr} \doteq \overset{\triangle}{bdr}$$

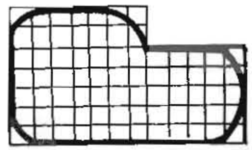
5. – MEDIDA DE LA SUPERFICIE: AREA:

Como en el caso de la medida de la longitud, el primer paso es la elección de una unidad.

Con suficientes figuras congruentes con la unidad elegida, colocadas de manera que encajen sin superponerse, se puede cubrir cualquier figura ya sea exactamente o no.

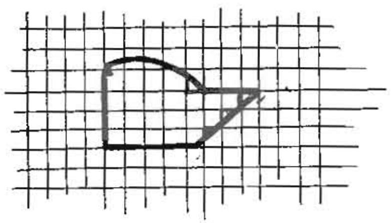
Ejemplos:



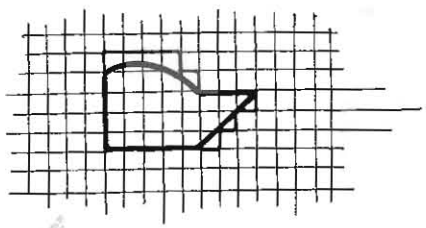


Se puede usar una cuadrícula para calcular la medida de la superficie de una figura superponiéndola a ella. El número que resulte de contar las regiones unitarias es la *medida* de la superficie estimada o *área*.

por defecto: 22

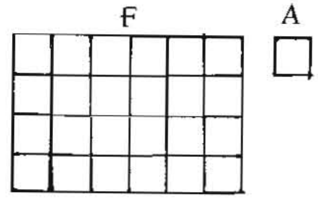


por exceso: 30

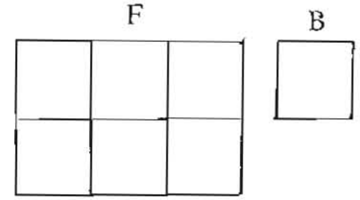


Cuanto más pequeña es la unidad elegida, más aproximada es la medida estimada.

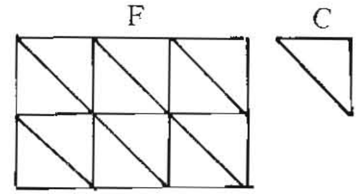
La misma figura puede ser medida con distintas unidades:



Med. Sup. $F_A = 24$



Med. Sup. $F_B = 6$



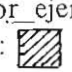
Med. Sup. $F_C = 12$

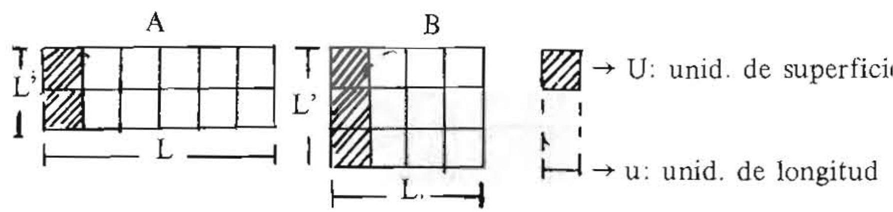
La superficie es la misma; no depende de la unidad.

La *medida* de la superficie es un *número* que varía de acuerdo con la unidad elegida y que se llama *área*.

5.1. – Area del rectángulo:

Si con varios cuadrados unidad, convenientemente dispuestos, se forma un rectángulo, el número de cuadrados utilizados es la *medida de la superficie* del rectángulo o *área* del mismo.

Por ejemplo, con 12 cuadrados congruentes con:  formamos diferentes rectángulos:



En ambos casos el lado del cuadrado unidad, funciona como unidad de longitud de sus lados.

En el caso A

$$\underbrace{\text{Nº de columnas}}_{6 \text{ veces}} \quad \underbrace{\text{Nº de U por columna}}_{2} = 12$$

med. de L_u × med. de L'_u = Med. A_U

En el caso B

$$\underbrace{\text{Nº de columnas}}_{4 \text{ veces}} \quad \underbrace{\text{Nº de U por columna}}_{3} = 12$$

med. de L_u × med. de L'_u = Med. B_U

$$\boxed{\text{Med. L} \times \text{Med. L'} = \text{Area}}$$

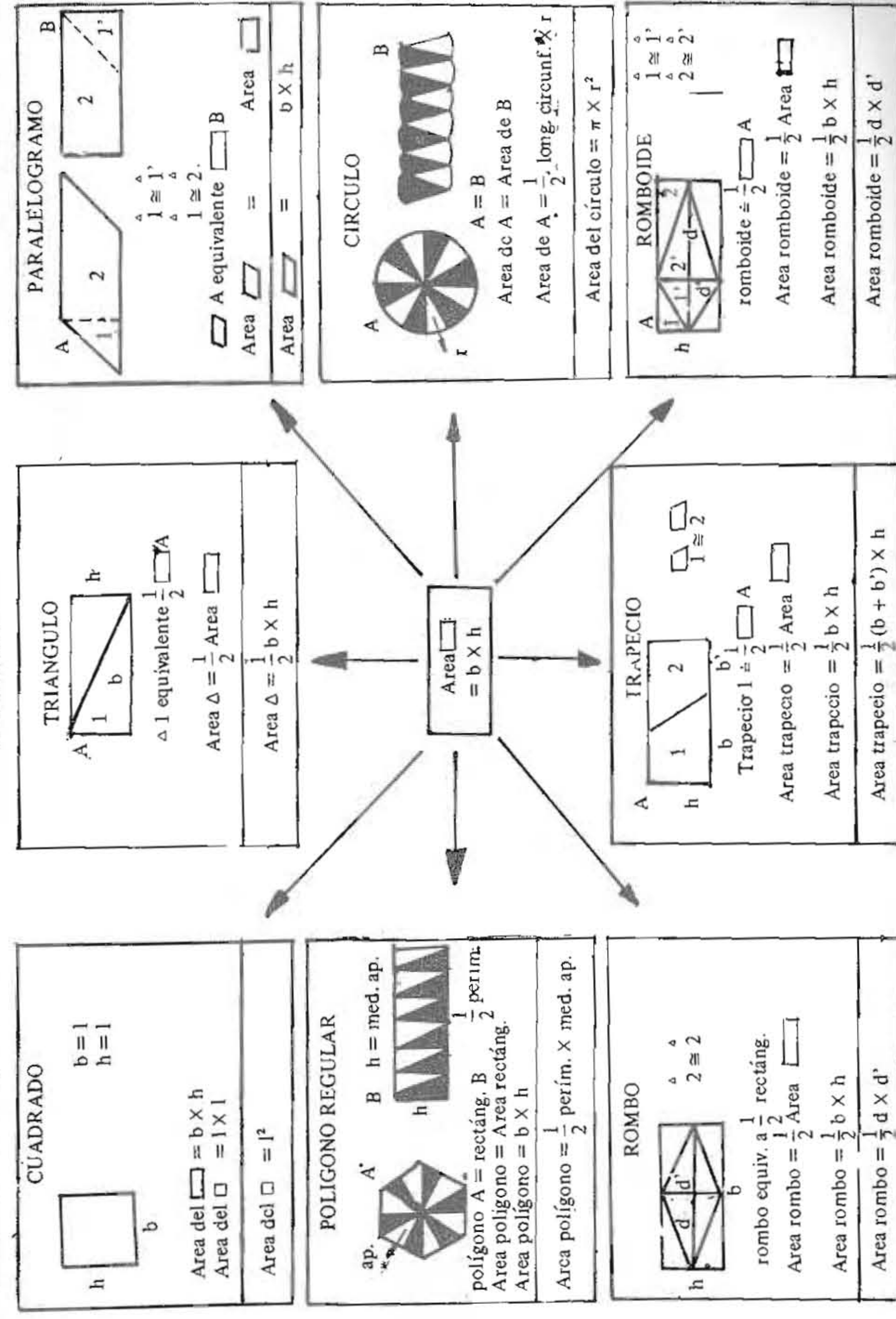
Se acostumbra a llamar respectivamente base y altura a cada uno de dos lados consecutivos de un rectángulo.

Si designamos b a la medida de la base y h a la medida de la altura, resulta:

$$\boxed{\text{Area del} \ \square = b \times h}$$

5.2. – Areas de otras figuras

l: med. lado   b: med. base
h: med. altura   d: med. diagonal
r: med. radio

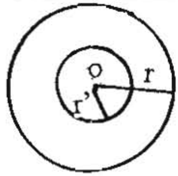


5.3. – Area de las figuras circulares

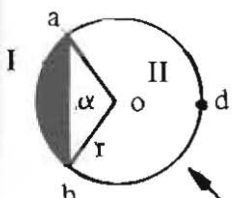
CORONA CIRÇULAR

$$\text{Area} = \pi r^2 - \pi r'^2$$

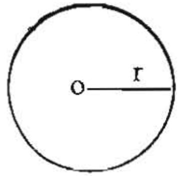
$$\boxed{\text{Area} = \pi\,(r^2 - r'^2)}$$



SEGMENTO CIRCULAR

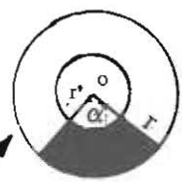


CIRCULO



$$\boxed{\text{Area} = \pi r^2}$$

TRAPECIO CIRCULAR



$$\text{Area} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} - \frac{\pi r'^2 \alpha}{360}$$

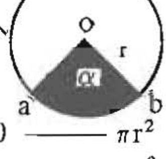
$$\boxed{\text{Area} = \frac{\pi \alpha}{360}\,(r^2 - r'^2)}$$

Area I = Area sect. aob – Area $\overset{\triangle}{\text{aob}}$

Area II = Area sect. aob, d + Area aob

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Area I} &= \frac{\pi r^2\ \alpha}{360} = \frac{b\ .\ h}{2} \\ \text{Area II} &= \frac{\pi r^2 \alpha}{360} + \frac{b\ .\ h}{2} \end{aligned}}$$

SECTOR CIRCULAR



$$360 \ \text{———} \ \pi r^2$$

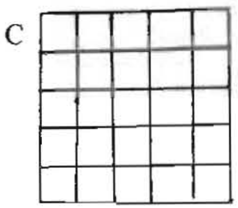
$$\alpha \ \text{———} \ \frac{\pi r^2 . \alpha}{360}$$

$$\boxed{\text{Area} = \frac{\pi r^2 . \alpha}{360}}$$

6. – TEOREMA DE PITAGORAS

6.1. – Raíz cuadrada:

$$\boxed{\text{Area del cuadrado} = \ell^2}$$



Area de C: $\underbrace{5 \times 5}_{5^2} = 25$

$5^2 = 25$

Medida del lado: 5

Decimos que 5 es la raíz cuadrada de 25, porque $5^2 = 25$ (téngase en cuenta que se trabaja con números naturales)

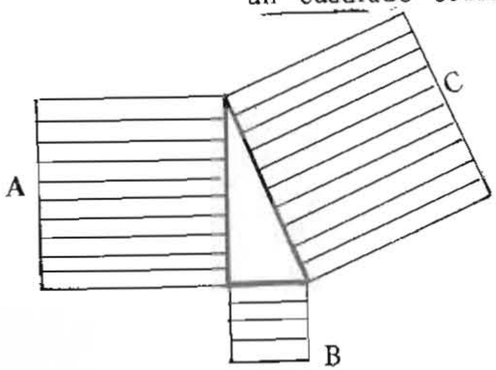
Notación:

$\sqrt{25} = 5$ porque $5^2 = 25$

La medida del lado del cuadrado es la raíz cuadrada de su área.

$$\boxed{\text{Medida del lado del } \square = \sqrt{\text{área}}}$$

6.2. – Dado un triángulo rectángulo, se puede construir un cuadrado sobre cada uno de sus lados.



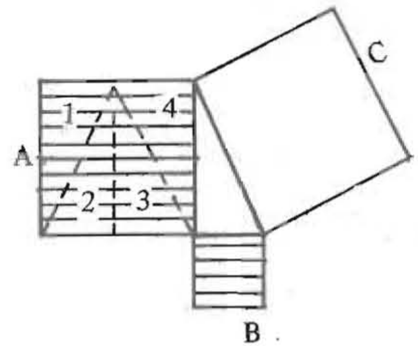
Los cuadrados A, B y C tienen por lados respectivamente a cada uno de los catetos y la hipotenusa del triángulo.

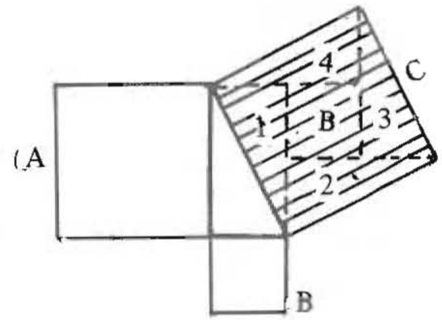
6.3. – a)

Si se dibujan en A cuatro triángulos congruentes, de acuerdo a la siguiente figura:

b)

pueden ser ubicados de manera tal que con B, se cubra totalmente el cuadrado C.





Las figuras: A ∪ B (formada por los cuadrados que tienen por lados los catetos del triángulo rectángulo)

y: C (formada por el cuadrado que tiene por lado la hipotenusa del cuadrado)

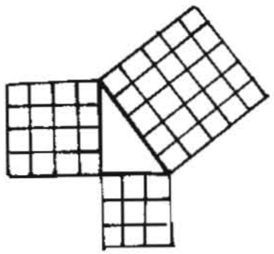
son equicompuestas y, por lo tanto, equivalentes por su superficie.

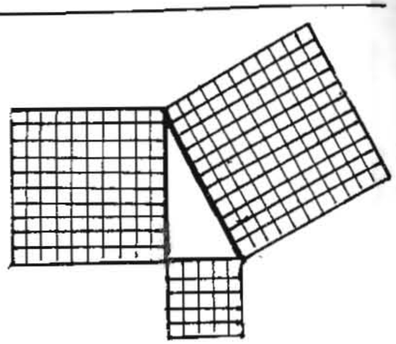
> El cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la unión de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos.

6.4. – Dados los triángulos rectángulos I y II tales que:

– Medida de los catetos de I: 3 y 4 respectivamente,

– medida de los catetos de II: 5 y 12 respectivamente, construimos:





Resulta:

Area A	Area B	Area C
↓	↓	↓
25 =	16 +	9

Area A	Area B	Area C
↓	↓	↓
169 =	144 +	25

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

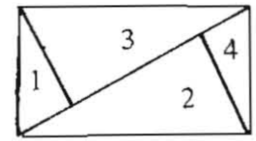
a: medida hipotenusa
b y c: medida de los respectivos catetos

Esta comprobación permite conocer la medida de un lado de un triángulo rectángulo, conociendo la medida de los otros dos:

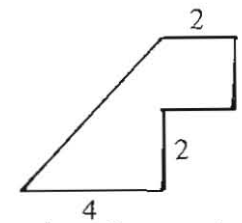
$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad a = \sqrt{c^2 + b^2}$$
$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

EJERCICIOS DE APLICACION

1. – Recortar los triángulos y formar figuras equicompuestas con el rectángulo:

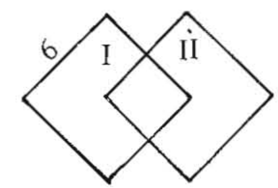


2. – Dada la siguiente figura obtener otras dos de igual área:



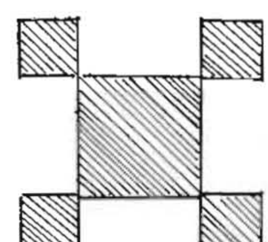
3. – a) Hallar el área de cada una de las figuras resultantes de las siguientes operaciones:

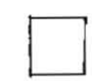
1º) I ∪ II
2º) I ∩ II
3º) I – II



b) Comparar el área de I ∪ II con el área de I + área de II.

4. – Hallar el área de la figura sombreada:

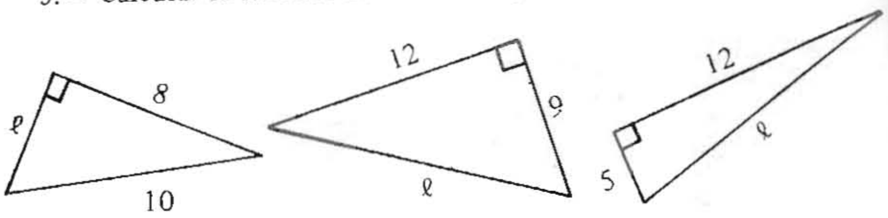


a) Con respecto a la unidad: 

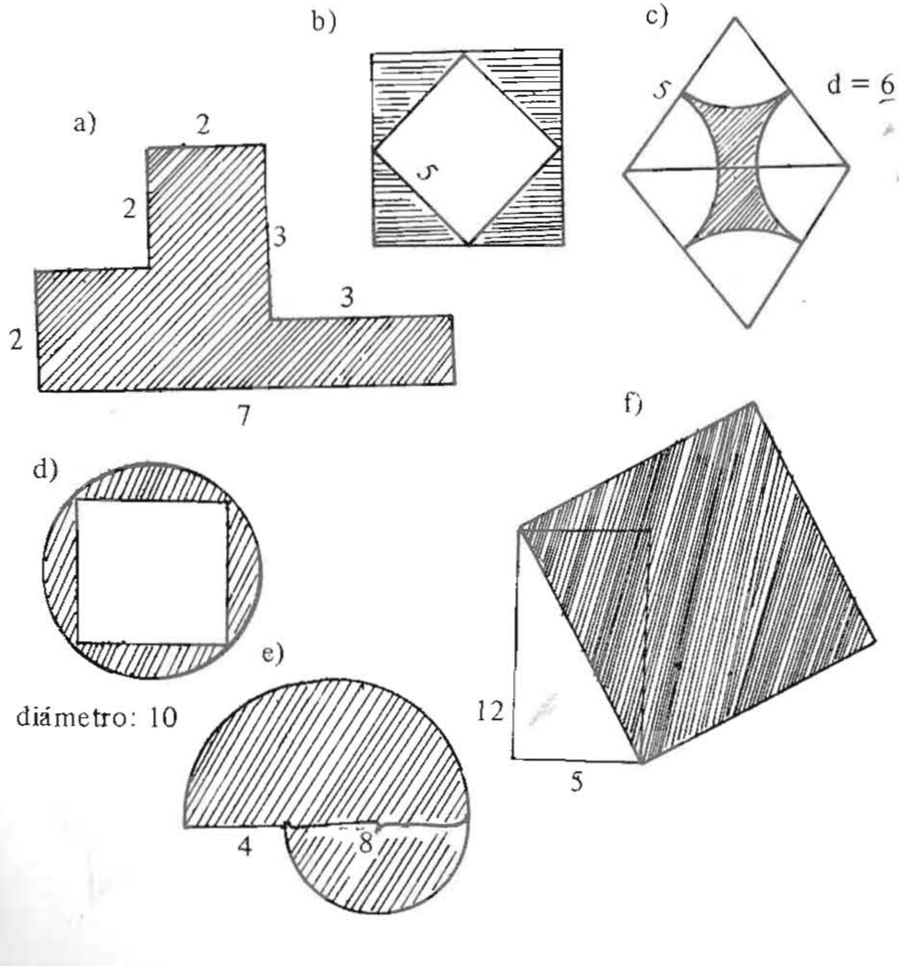
b) Con respecto a la unidad: 

c) Con respecto a la unidad: 

5. – Calcular la medida de ℓ en los siguientes casos:



6. – Determinar el área de las siguientes figuras sombreadas:



7. – a) Un rectángulo es equivalente a un cuadrado de 9 m de lado. Si el ancho es de 3 m ¿cuál es el largo?

b) Un triángulo es equivalente a un cuadrado de 81 m². Si la base del triángulo es congruente con el lado del cuadrado ¿cuál es la longitud de su altura?

8. – a) Un triángulo y un rectángulo son equivalentes y tienen la misma altura. ¿Cómo es la base del triángulo con respecto a la del rectángulo?

b) Un trapecio y un rectángulo son equivalentes y tienen misma altura. ¿Qué condición cumplen las bases del trapecio?

c) La altura de un rectángulo tiene la misma longitud que una de las diagonales de un rombo. La longitud de la base es la mitad de la longitud de la otra diagonal. ¿Cómo son las superficies de estas figuras?

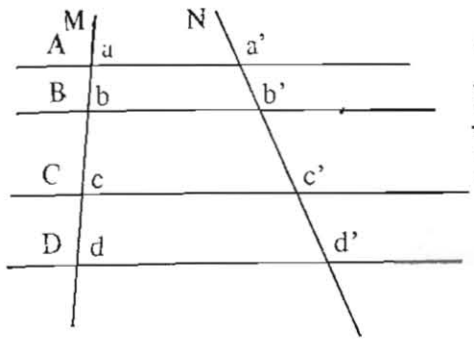
d) Un rectángulo y un paralelogramo tienen la misma base y la longitud de la altura del paralelogramo es la mitad de la del rectángulo. ¿Qué relación guarda el área del rectángulo con respecto a la del paralelogramo?

II. – SEMEJANZA

1. – SEGMENTOS PROPORCIONALES

1.1. – Segmentos correspondientes:

Dadas varias rectas paralelas cortadas por dos transversales, se llaman *segmentos correspondientes* a los comprendidos entre las mismas paralelas.

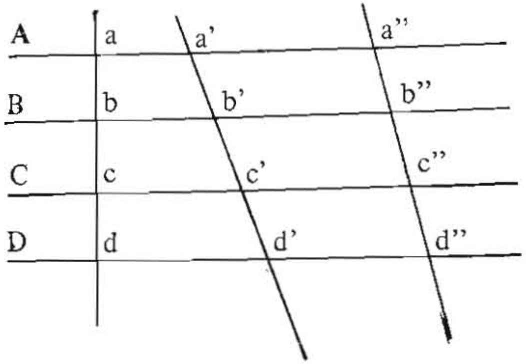


A // B // C // D

$\left.\begin{array}{l}\overline{ab} \text{ y } \overline{a'b'} \\ \overline{bc} \text{ y } \overline{b'c'} \\ \overline{cd} \text{ y } \overline{c'd'}\end{array}\right\}$ *segmentos correspondientes*

1.2. – **Propiedades de los segmentos correspondientes entre paralelas:**

Si tres o más paralelas son cortadas por dos o más transversales, a segmentos congruentes sobre una de las transversales corresponden segmentos congruentes en cada una de las otras.



$A \parallel B \parallel C \parallel D$

Si $\overline{ab} \cong \overline{bc} \cong \overline{cd}$

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{a'b'} \cong \overline{b'c'} \cong \overline{c'd'} \\ \overline{a''b''} \cong \overline{b''c''} \cong \overline{c''d''} \end{cases}$

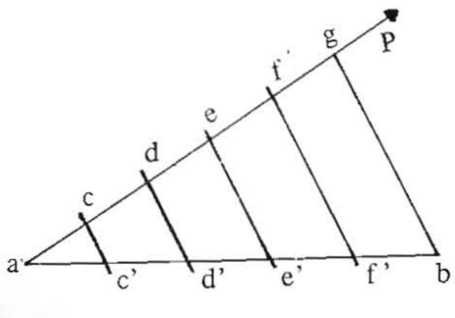
– **Aplicaciones:**

a) **División de un segmento en partes congruentes:**

La clásica división de un segmento en partes congruentes, se fundamenta en la propiedad enunciada.

ejemplo:

Dividir $\overline{ab}$ en 5 partes congruentes.



Procedimiento:

Se traza:

1º: $\overrightarrow{ap}$, tal que $\overline{ab} \not\subset \overrightarrow{ap}$

2º: en $\overrightarrow{ap}$, a partir del origen, 5 segmentos consecutivos: $\overline{ac} \cong \overline{cd} \cong \overline{de} \cong \overline{ef} \cong \overline{fg}$

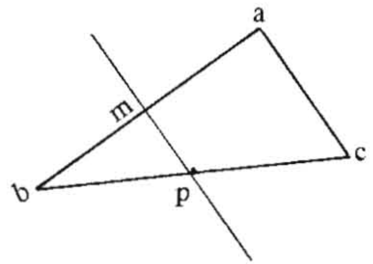
3º: $\overline{gb}$

4º: $cc' \parallel dd' \parallel ee' \parallel ff' \parallel gb$

Resulta:

$\overline{ac'} \cong \overline{c'd'} \cong \overline{d'e'} \cong \overline{e'f'} \cong \overline{f'b}$

b) La paralela a un lado de un triángulo, trazada por el punto medio de uno de los otros dos lados, corta al tercero en su punto medio. Ejemplo:



$\overset{\triangle}{abc}$

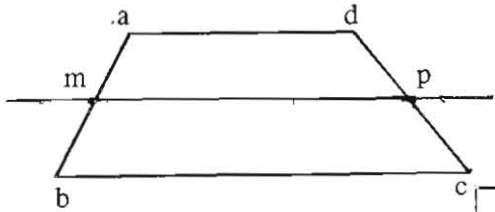
m punto medio de $\overline{ab}$

$mp \parallel \overline{ac}$

Resulta:

p punto medio de $\overline{bc}$

c) La paralela a las bases de un trapecio trazada por el punto medio de uno de los lados oblicuos corta al otro lado en su punto medio. Ejemplo:



trapecio abcd

m punto medio de $\overline{ab}$

$mp \parallel \overline{ad} \parallel \overline{bc}$

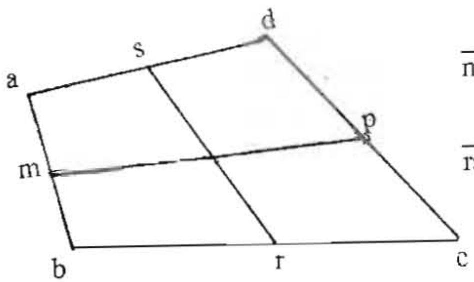
Resulta:

p punto medio de $\overline{cd}$

1.3. – **Bases medias:**

a) *Bases medias de un cuadrilátero:*

Son cada uno de los segmentos determinados por los puntos medios de los pares de lados opuestos.



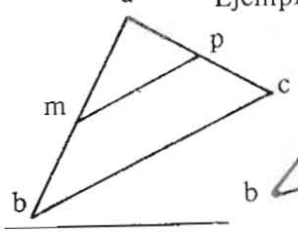
$\overline{mp}$: base media correspondiente a los lados $\overline{ad}$ y $\overline{bc}$

$\overline{rs}$: base media correspondiente a los lados $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$

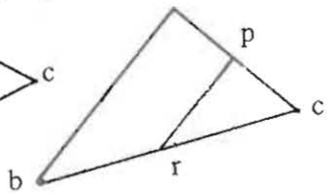
b) *Bases medias de un triángulo:*

Son cada uno de los segmentos determinados por los puntos medios de un par de lados.

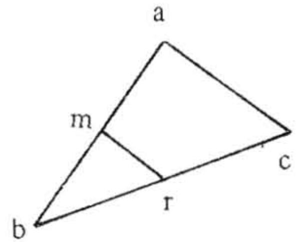
Ejemplo:



$\overline{mp}$: base media correspondiente a $\overline{bc}$



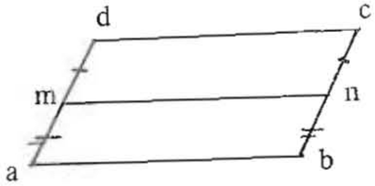
$\overline{pr}$: base media correspondiente a $\overline{ab}$



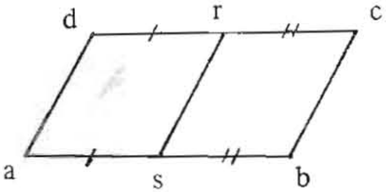
$\overline{mr}$: base media correspondiente a $\overline{ac}$

c) *Propiedades de las bases medias de los:*

1º) *paralelogramos:*



$\overline{mn}$ base media corresponde a $\overline{ab} \parallel \overline{cd}$



$\overline{rs}$ base media corresponde a $\overline{ad} \parallel \overline{bc}$

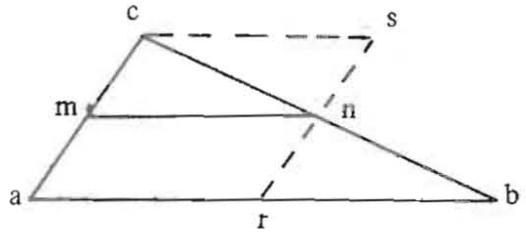
En todo paralelogramo cada base media es paralela al par de lados correspondientes y congruente con ellos. Por lo tanto:

La longitud de una base media es igual a la longitud de cada una de las bases correspondientes.

2º) *triángulos.*

Cada base media de un triángulo es paralela al lado correspondiente y congruente con su mitad. Por lo tanto:

La longitud de cada base media de un triángulo es igual a la mitad de la longitud del lado correspondiente.



Justificación:

$\overline{mn}$: base media de $\overset{\triangle}{abc}$ correspondiente a $\overline{ab}$

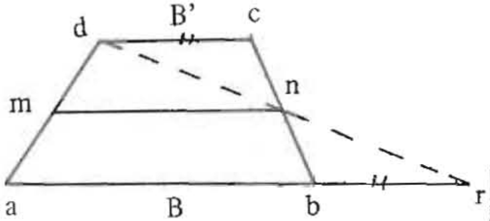
r: punto medio de $\overline{ab}$

$\overline{mn} = \overline{ar}$ base media $\overset{\square}{arsc}$

$$\boxed{\overline{mn} = \frac{1}{2}\,\overline{ab}}$$

3º) *trapecios:*

La base media de un trapecio correspondiente a las bases, es paralela a ellas y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las mismas.



$\overline{ar} = \overline{B} + \overline{B'}$

$\overline{mn}$: base media de $\overset{\triangle}{ard}$

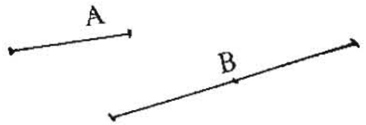
$\overline{mn} \parallel \overline{ar}$

$\overline{mn} = \dfrac{\overline{ar}}{2}$

$$\boxed{\overline{mn} = \frac{B + B'}{2}}$$

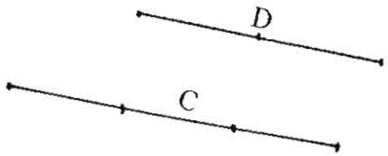
1.4. – Razón entre segmentos:

La razón de dos segmentos es la razón entre sus medidas tomadas respecto a una misma unidad.



razón entre $\overline{A}$ y $\overline{B}$: $\frac{1}{2}$

$$\frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{1}{2}$$

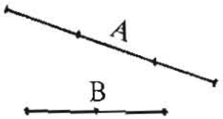


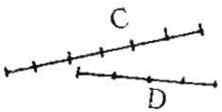
razón entre $\overline{C}$ y $\overline{D}$: $\frac{3}{2}$

$$\frac{\overline{C}}{\overline{D}} = \frac{3}{2}$$

1.5. – Proporción entre segmentos:

Dados en un cierto orden cuatro segmentos **A, B, C** y **D,** tal que la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos, se dice que dichos segmentos son proporcionales.





$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overline{A}}{\overline{B}} = \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{\overline{C}}{\overline{D}} = \dfrac{3}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{\overline{C}}{\overline{D}}$$

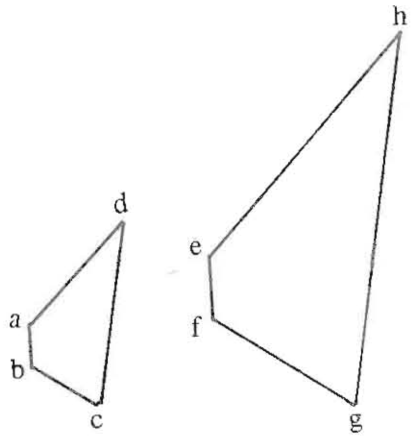
Se lee:
$\overline{A}$ es a $\overline{B}$
Como $\overline{C}$ es a $\overline{D}$

La igualdad entre las razonez $\frac{\overline{A}}{\overline{B}}$ y $\frac{\overline{C}}{\overline{D}}$ se llama

proporción

2. – SEMEJANZA DE POLIGONOS:

La semejanza es una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos polígonos convexos o entre los vértices de un solo polígono convexo con ellos mismos, tal que los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes son congruentes.



Si:

$a \leftrightarrow e$
$b \leftrightarrow f$
$c \leftrightarrow g$
$d \leftrightarrow h$

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ef}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{fg}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{gh}} = \frac{\overline{da}}{\overline{he}}$$

$\hat{a} \cong \hat{e}$
$\hat{b} \cong \hat{f}$
$\hat{c} \cong \hat{g}$
$\hat{d} \cong \hat{h}$

Resulta:

políg. abcd $\sim$ políg. efgh

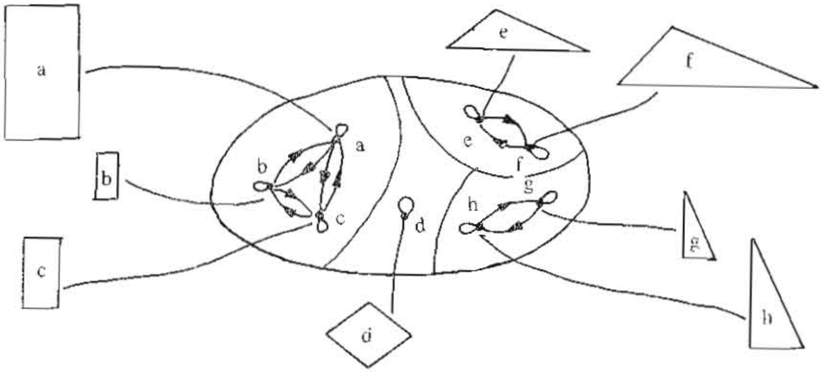
Se lee:

políg. abcd *semejante* políg. efgh

Si en el siguiente conjunto de figuras se aplica la relación . . ."es semejante a". . . se obtiene una partición:

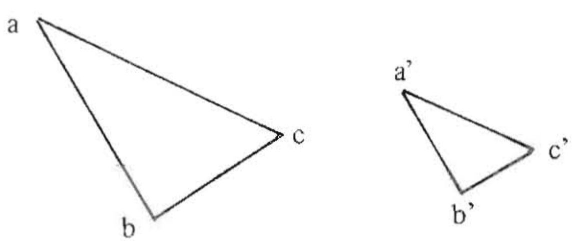
Cada subconjunto de la partición es una clase de equivalencia.

Las figuras que pertenecen a una misma clase de equivalencia tienen la misma forma.



2.1. – **Semejanza de triángulos:**

a) Dados dos triángulos abc y a'b'c'



por definición es:

$$\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{a'b'c'}$$

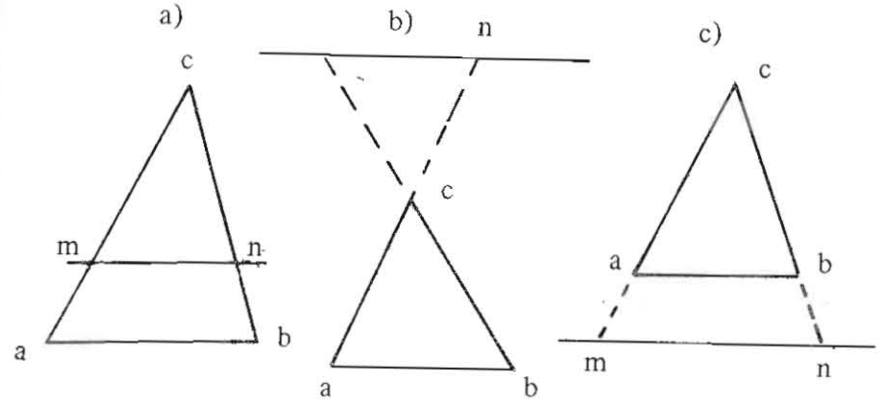
si:

$$\begin{array}{lccc} a \to a' & & & \hat{a} \cong \hat{a}' \\ b \to b' & \dfrac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \dfrac{\overline{bc}}{\overline{b'c'}} = \dfrac{\overline{ca}}{\overline{c'a'}} & & \hat{b} \cong \hat{b}' \\ c \to c' & & & \hat{c} \cong \hat{c}' \end{array}$$

b) Dado un triángulo se puede obtener otro semejante, trazando una recta paralela a uno de sus lados.

Ejemplo:

Dado $\overset{\triangle}{abc}$ y $\overline{mn} /\!/ \overline{ab}$, pueden presentarse las siguientes situaciones:

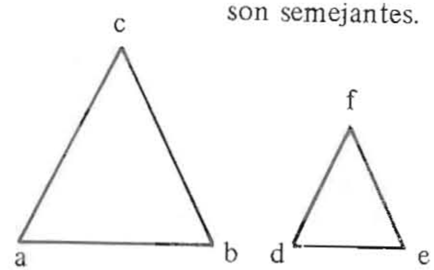


en todas resulta:

$$\overset{\triangle}{mcn} \sim \overset{\triangle}{abc}$$

– *Criterios de semejanza de triángulos:*

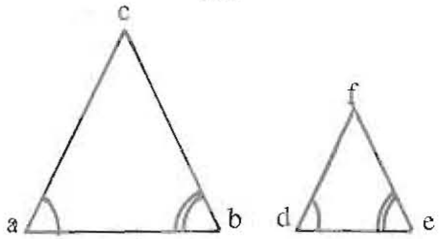
1º) Si dos triángulos tienen dos pares de lados homólogos proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos congruentes, entonces son semejantes.



$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\overline{ab}}{\overline{de}} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{df}} \\ \\ \hat{a} \cong \hat{d} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{def}$$

De acuerdo con este criterio resulta que: "Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus catetos son proporcionales".

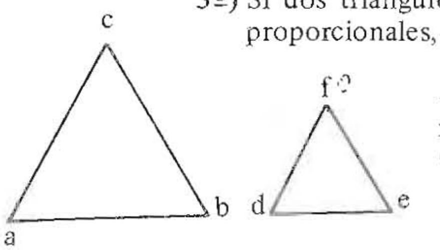
2º) Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente congruentes, entonces son semejantes.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{a} \cong \hat{d} \\ \hat{b} \cong \hat{e}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{def}$$

Resulta así que:
"Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo congruente, son semejantes".

3º) Si dos triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales, entonces son semejantes.

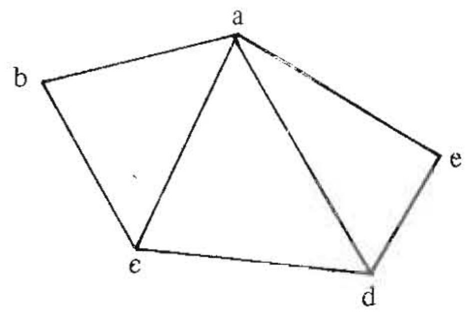


$$\frac{\overline{ab}}{\overline{de}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ef}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{fd}} \Rightarrow \overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{def}$$

2.2. – **Obtención de un polígono semejante a otro dado:**

a) Dado un polígono, se pueden ordenar sus vértices a partir de uno cualquiera de ellos. Determinado el primer vértice, quedan ordenados sus lados y las diagonales que concurren a dicho vértice.

Ejemplo:
Dado el polígono abcde

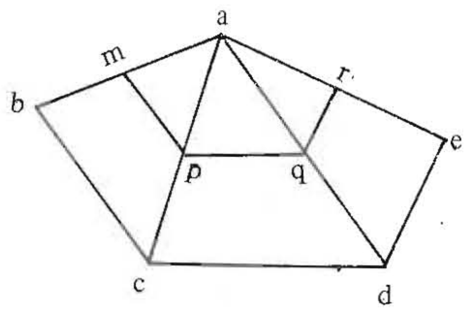


$\bar{a}$: primer vértice

$\overline{ab}$: primer lado

$\overline{ac}$: primera diagonal

b) Para obtener un polígono semejante al abcde se procede así:
– Se determina un punto cualquiera del primer lado ab.



– Se traza:
1º) $\overline{mp} \parallel \overline{bc}$
2º) $\overline{pq} \parallel \overline{cd}$
3º) $\overline{qr} \parallel \overline{de}$

Resulta:

$$\boxed{\overset{\pentagon}{ampqr} \sim \overset{\pentagon}{abcde}}$$

Justificación:
Si:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{mp} \parallel \overline{bc} \Rightarrow \overset{\triangle}{map} \sim \overset{\triangle}{bac} \\ \overline{pq} \parallel \overline{cd} \Rightarrow \overset{\triangle}{paq} \sim \overset{\triangle}{cad} \\ \overline{qr} \parallel \overline{de} \Rightarrow \overset{\triangle}{qar} \sim \overset{\triangle}{dae}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{políg. ampqr} \sim \text{políg. abcde}$$

3. – ESCALAS

La semejanza de polígonos se aplica en la construcción de planos y mapas, ya que estos son figuras semejantes a los objetos reales.

La razón de semejanza se llama *escala.*

Por ejemplo: si en una habitación el largo (l) es 4 m y en el plano se representa con un segmento (s) de 4 cm, la *escala* correspondiente se obtiene así:

$$\frac{\overline{s}}{\overline{l}}$$

Expresados ambos en la misma unidad, resulta:

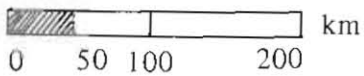
$$\frac{4}{400} = \frac{1}{100}$$

Recíprocamente, en la misma escala, un segmento de 2,5 cm representará otro real de 250 cm o 2,50 m, porque:

$$\frac{1}{100} = \frac{2{,}5}{x} \qquad x = 2{,}5 \cdot 100 = 250$$

En algunos mapas la escala se representa gráficamente.

Ejemplo:



Para calcular la distancia real entre dos ciudades A y B separadas por 4 cm en un mapa dibujado en la escala anterior se procederá así:

$$\frac{1}{50} = \frac{4}{x} \qquad x = 4 \cdot 50 \qquad x = 200$$

La distancia entre A y B es de 200 km.

EJERCICIOS DE APLICACION

9. – Indicar los pares de conjuntos cuyos elementos pueden ser medidas de lados de triángulos semejantes:

$A = \{2, 3, 4\}$ $\qquad$ $C = \{8, 16, 12\}$

$B = \{9, 12, 20\}$ $\qquad$ $D = \{3, 4, 6,\}$

10. – Si $\overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{a'b'c'}$, ¿es $\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{a'b'c'}$? ¿por qué?

11. – Señalar en cuáles de estos casos resulta $\overset{\triangle}{abc} \sim \overset{\triangle}{a'b'c'}$:

a) $\overset{\triangle}{abc}$: $\overline{ab} = 9$ cm; $\overline{bc} = 6$ cm; $\overline{cd} = 12$ cm
$\overset{\triangle}{a'b'c'}$: $\overline{a'b'} = 3$ cm; $\overline{b'c'} = 2$ cm; $\overline{c'd'} = 4$ cm

b) $\overset{\triangle}{abc}$: triángulo rectángulo; $\hat{b} = 60°$
$\overset{\triangle}{a'b'c'}$: triángulo rectángulo; $\hat{b}' = 60°$

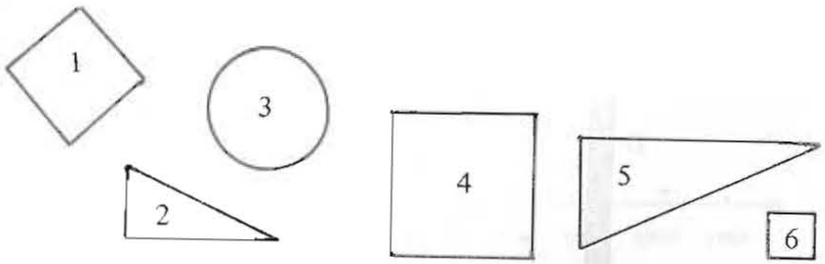
c) $\overset{\triangle}{abc}$: $\overline{ab} = 8$ cm; $\overline{bc} = 7$ cm; $\overline{cd} = 4$ cm
$\overset{\triangle}{a'b'c'}$: $\overline{a'b'} = 4$ cm; $\overline{b'c'} = 7$ cm; $\overline{c'd'} = 6$ cm

12. – ¿Son semejantes estos triángulos?

$\overset{\triangle}{abc}$: $\hat{a} = 40°$; $\hat{b} = 60°$

$\overset{\triangle}{a'b'c'}$: $\hat{c}' = 80°$; $\hat{b}' = 60°$

13. – Dado el conjunto F de figuras



Aplicar la relación: ..."es semejante a"...

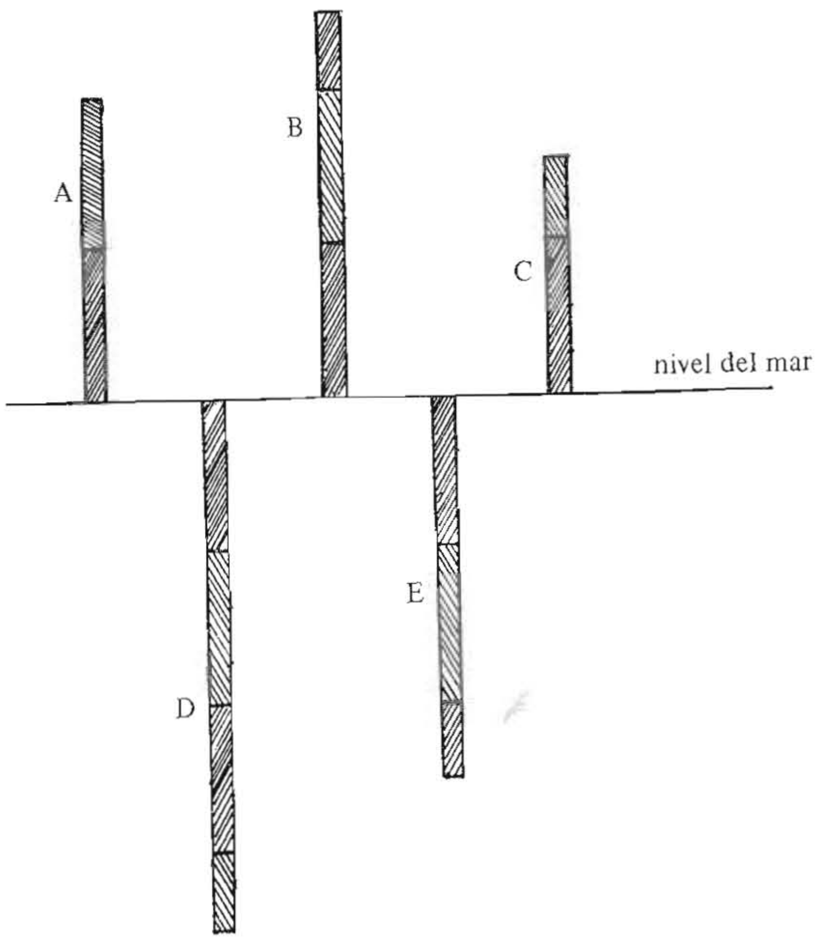
a) Hacer el diagrama vinculando los pares ordenados.

b) Escribir los subconjuntos de la partición.

14. – Representar un segmento de 25 cm según la escala $\frac{1}{10}$

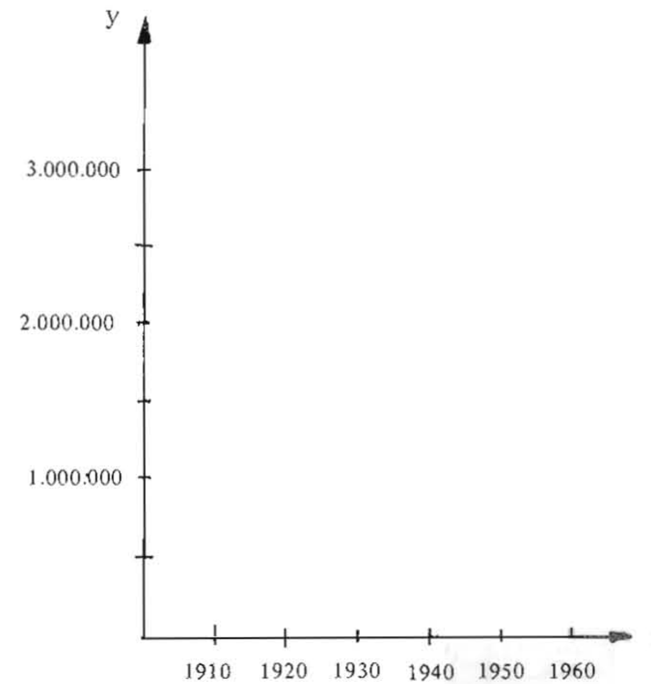
15. – En un mapa la distancia de la ciudad M hasta la ciudad S es de 20 cm. ¿Cuál es la distancia real si la escala correspondiente es 1/1.000.000?

16. – A, B y C representan elevaciones terrestres; D y E, profundidades marinas. ¿Cuántos metros corresponden a cada una según la escala 1/100.000?



17. – Datos:

Año	Nº de habitantes
1910	500.000
1920	750.000
1930	1.250.000
1940	1.625.000
1950	2.250.000
1960	3.000.000



a) Representar los datos de la tabla de crecimiento demográfico.
b) Dibujar la curva de crecimiento.
c) Indicar la escala utilizada en el eje y.

18. – Representar en un gráfico de barras, en el orden dado, el área aproximada de cada una de las siguientes provincias:

Buenos Aires:	300.000 km^2
Mendoza:	150.000 km^2
Jujuy:	50.000 km^2
Santa Cruz:	200.000 km^2
Chaco:	100.000 km^2

Escala:  = 50.000 km^2

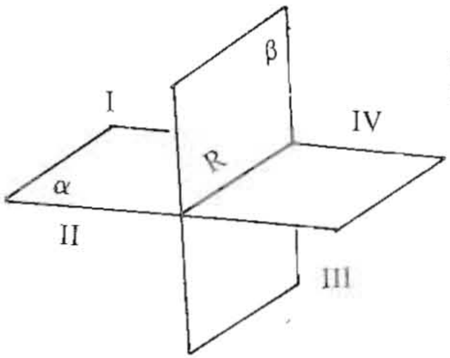
III. – ANGULOS DIEDROS Y POLIEDROS

1. – ANGULOS DIEDROS

1.1. – Definiciones:

Se exponen a continuación distintos criterios para definir ángulos diedros.

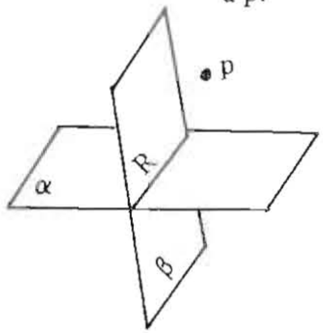
a) Dos planos secantes determinan en el espacio cuatro regiones cada una de las cuales recibe el nombre de *ángulo diedro convexo* o simplemente *diedro.*



$\alpha \cap \beta = R$
regiones I, II, III, IV: diedros

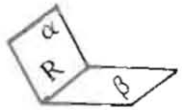
b) Dados dos planos α y β secantes en R y un punto p que no pertenece a ellos:

1º) Se llama *diedro $\alpha\beta$ convexo o simplemente diedro $\alpha\beta$* a la intersección de los semiespacios determinados por α y β que contiene a p.



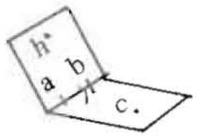
s/e $(\alpha, p) \cap$ s/e $(\beta, p) =$ d. $\widehat{\alpha\beta}$

Notación:



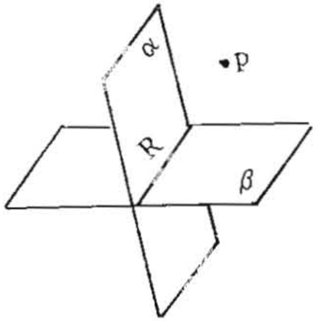
d. $\widehat{\alpha\beta}$ $\begin{cases} \textit{arista:}\ R \\ \textit{caras:}\ s/p\ \alpha;\ s/p\ \beta \end{cases}$

o bien:



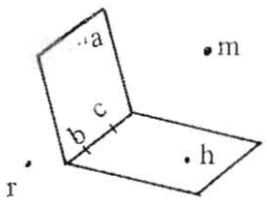
d $\widehat{habc}$ $\begin{cases} \textit{arista:}\ ab \\ \textit{caras:}\ s/p\ (ab, c);\ s/p\ (ab, h) \end{cases}$

2º) Se llama *diedro $\alpha\beta$ cóncavo* a la unión de los semiespacios determinados por α y β que contienen al punto p.



s/e (α, p) ∪ s/e (β, p) = d. $\widehat{\alpha\beta}$ cóncavo

c) Se llama *ángulo diedro* a la unión de dos semiplanos de borde común.



d. $\widehat{abch}$ = s/p (bc, a) ∪ s/p (bc, h)

De acuerdo con esta definición el diedro está formado solamente por los puntos de las caras. El d. $\widehat{abch}$ separa a los puntos del espacio en dos regiones abiertas, una cóncava y otra convexa.

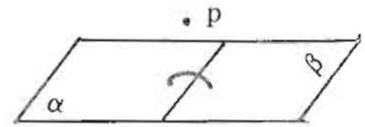
m $\notin$ d. $\widehat{abch}$: m $\in$ región convexa o interior.
r $\notin$ d. $\widehat{abch}$: r $\in$ región cóncava o exterior.

La unión del d. $\widehat{abch}$ con cada una de las regiones anteriores conduce a la noción de diedro expresada en b).

d. $\widehat{abch}$ ∪ región interior = diedro convexo.
d. $\widehat{abch}$ ∪ región exterior = diedro cóncavo.

1.2. – **Diedro llano:**

Un *ángulo diedro es llano* si sus caras son semiplanos opuestos.

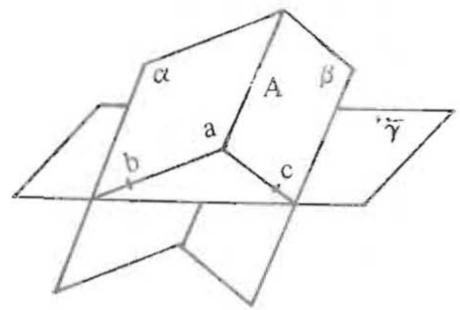


diedros llanos $\begin{cases} \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \text{ que contiene a p} \\ \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \text{ que no contiene a p.} \end{cases}$

Un diedro llano es un semiespacio

1.3. – **Sección de un diedro:**

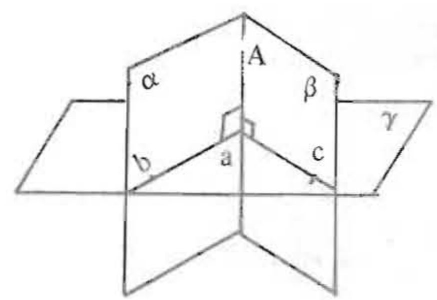
Todo plano que corta a la arista de un diedro determina con las caras del mismo un ángulo plano llamado sección del diedro.



$\widehat{bac}$: sección d. $\widehat{\alpha\beta}$

$\gamma \cap A = \{a\} \begin{cases} \gamma \cap \alpha = \overrightarrow{ab} \\ \gamma \cap \beta = \overrightarrow{ac} \end{cases}$

Si γ es perpendicular a la arista A, $\widehat{abc}$ es la *sección normal del diedro.*



$A \perp \gamma \Rightarrow \begin{cases} A \perp \overrightarrow{ab} \\ A \perp \overrightarrow{ac} \end{cases}$

$\widehat{bac}$: sec. normal d. $\widehat{\alpha\beta}$

> Para obtener la sección normal de un diedro basta trazar en cada cara la perpendicular a la arista en un mismo punto.

La medida de un diedro es la medida de su sección normal.

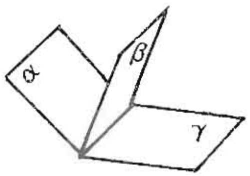
$$\text{med. d. } \widehat{\alpha\beta} = \text{med. } \widehat{bac}$$

1.4. – **Congruencia de diedros:**

Dos diedros son congruentes si sus secciones normales son congruentes.

1.5. – **Diedros consecutivos:**

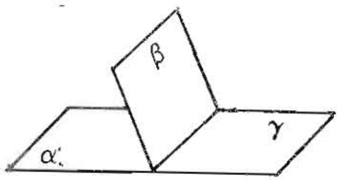
Dos diedros son consecutivos cuando tienen solamente una cara común.



d. $\widehat{\alpha\beta} \cap$ d. $\widehat{\beta\gamma} = \beta$ (cara común)
d. $\widehat{\alpha\beta}$ y d. $\widehat{\beta\gamma}$: *consecutivos*

1.6. – **Diedros adyacentes:**

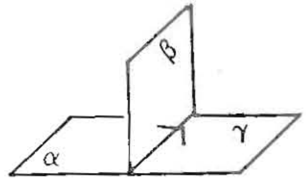
Dos diedros consecutivos son *adyacentes* si las caras no comunes son semiplanos opuestos.



d. $\widehat{\alpha\beta}$ y d. $\widehat{\beta\gamma}$: consecutivos
α y γ : s/p opuestos
d. $\widehat{\alpha\beta}$ y d. $\widehat{\beta\gamma}$: *adyacentes*

1.7. – **Diedro recto:**

Si dos diedros adyacentes son congruentes, cada uno de ellos es un *diedro recto.*

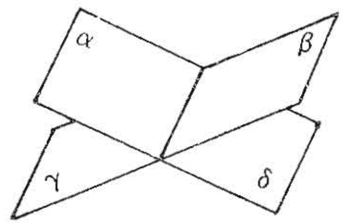


$$\left.\begin{array}{r} \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \text{ y d. } \widehat{\beta\gamma}\text{: adyacentes} \\ \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \cong \text{d. } \widehat{\beta\gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \text{ y d. } \widehat{\beta\gamma} \\ \text{rectos} \end{array}$$

La sección normal de un diedro recto es un ángulo recto.

1.8. – **Diedros opuestos por la arista:**

Dos diedros son opuestos por la arista si las caras de uno son semiplanos opuestos a las caras del otro.



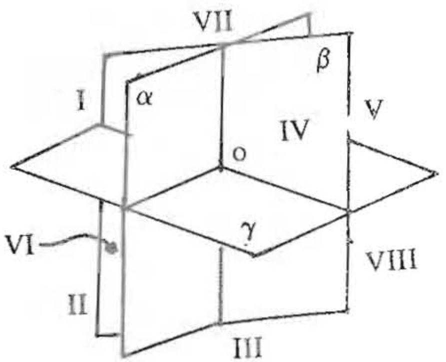
$$\left.\begin{array}{r} \alpha \text{ y } \delta \\ \beta \text{ y } \gamma \end{array}\right\} \text{semiplanos opuestos}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \text{ y d. } \widehat{\gamma\delta} \\ \text{d. } \widehat{\alpha\gamma} \text{ y d. } \widehat{\beta\delta} \end{array}\right\} \text{opuestos por las aristas}$$

2. – ANGULOS POLIEDROS

2.1. – Definiciones:

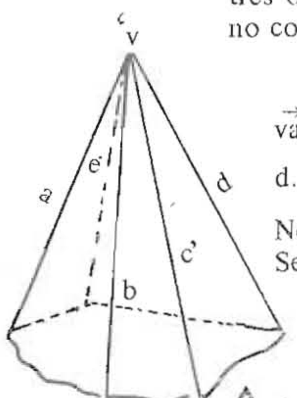
a) Se llama *ángulo poliedro convexo,* o simplemente *ángulo poliedro* a cada una de las regiones del espacio determinadas por tres o más planos que se intersecan mutuamente.
Si se trata de tres planos se obtiene un ángulo *triedro convexo* o simplemente *triedro.*



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{o\}$

$$\underbrace{\text{regiones: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII}}_{\text{ángulos triedros}}$$

b) Se llama ángulo poliedro a la intersección de tres o más diedros, cuyas aristas son semirrectas no coplanares de origen común.



$\vec{va}, \vec{vb}, \vec{vc}, \vec{vd}, \vec{ve}$: no coplanares

d. $\hat{a} \cap$ d. $\hat{b} \cap$ d. $\hat{c} \cap$ d. $\hat{d} \cap$ d. $\hat{e}$ = *áng. poliedro*

Notación: $\hat{v}$. abcde
Se lee: ángulo poliedro de vértice v
y aristas abcde

$\hat{v}$. abcde
- vértice: v
- caras: $\widehat{avb}$, $\widehat{bvc}$, $\widehat{cvd}$, $\widehat{dve}$, $\widehat{eva}$
- diedros: d.$\hat{a}$, d. $\hat{b}$, d. $\hat{c}$, d. $\hat{d}$, d. $\hat{e}$

2.2. – Suma de las caras de un poliedro:

La suma de las caras de un ángulo poliedro es menor que 360°.
Ejemplo: Ej. $\hat{v}$. abcde

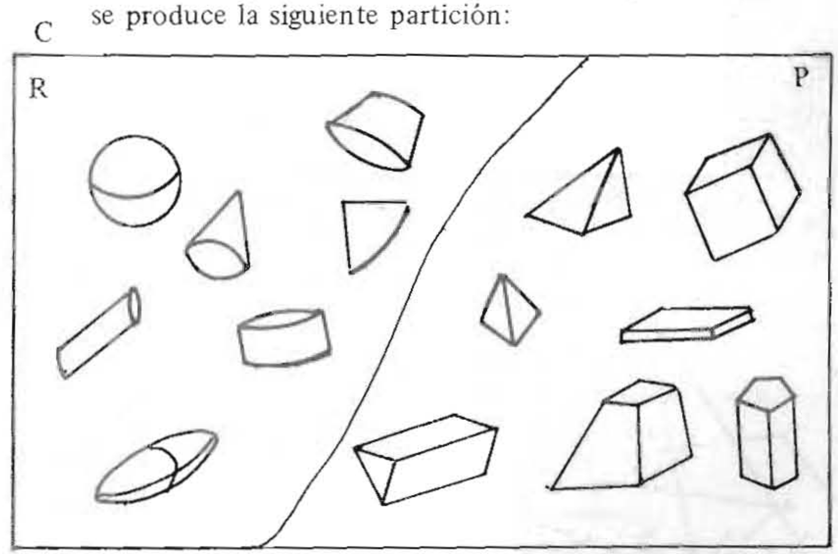
$$\boxed{a\hat{v}b + b\hat{v}c + c\hat{v}d + d\hat{v}e + e\hat{v}a < 360°}$$

IV. – CUERPOS GEOMETRICOS

Toda figura del espacio limitada por polígonos es un *poliedro.* Cada uno de los polígonos es una *cara* del poliedro.

Toda figura del espacio limitada por superficies curvas o superficies curvas y planas, es un *cuerpo redondo.*

En el conjunto universal C de los cuerpos geométricos se produce la siguiente partición:



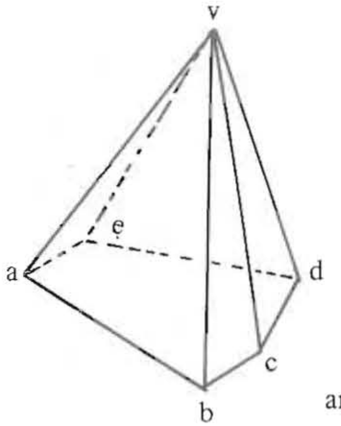
C = {cuerpos geométricos}
R = {cuerpos redondos}
P = {poliedros}

R ∪ P = C
R ∩ P = ϕ

1. – POLIEDROS:

1.1. – Pirámides:

a) 1º) Se llama pirámide al poliedro en que una de sus caras es un polígono cualquiera y las demás son triángulos que concurren en un vértice.



Notación:

pir. v. abcde

base: políg. abcde

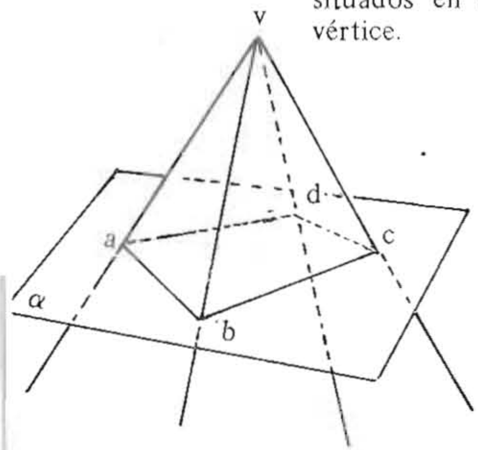
caras laterales: $a\hat{v}b$; $b\hat{v}c$; $c\hat{v}d$; $d\hat{v}e$; $e\hat{v}a$

vértice: v

aristas laterales: $\overline{va}$; $\overline{vb}$; $\overline{vc}$; $\overline{vd}$; $\overline{ve}$;

aristas de la base: $\overline{ab}$; $\overline{bc}$; $\overline{cd}$; $\overline{de}$; $\overline{ea}$

2º) Dada un ángulo poliedro y un plano que seccione a todas sus caras, se llama pirámide al conjunto de puntos del ángulo poliedro situados en el semiespacio que contiene el vértice.



pir. v. abcd

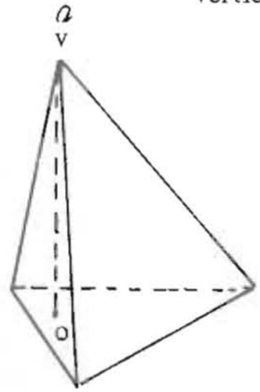
$\hat{v}$. abcd: ángulo poliedro

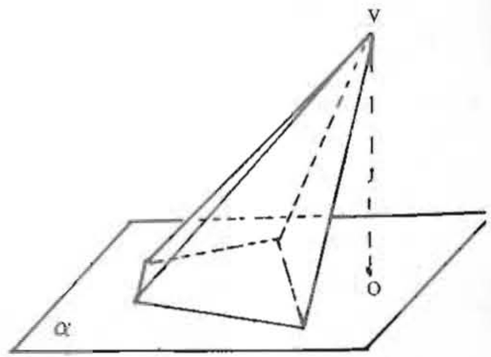
$\alpha \cap \hat{v}$. abcd: políg. bcd

b) De acuerdo al polígono de la base, las pirámides reciben el nombre de: *triangulares, cuadrangulares, pentagonales,* etc.

c) *Altura de la pirámide:*

Segmento de perpendicular trazado desde el vértice al plano que incluye a la base.

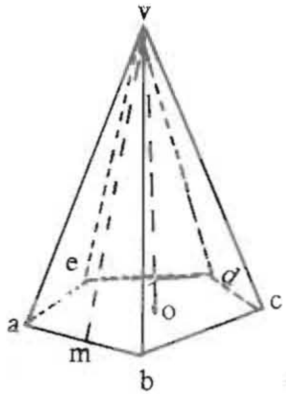




$\overline{vo}$: altura

d) *Pirámide regular:*

Una pirámide es regular cuando su base es un polígono regular y el pie de la altura es el centro de la base.



pir. v. abcde

base: políg. regular abcde

centro de la base: o

altura: $\overline{vo}$

caras laterales.

$a\hat{v}b \cong b\hat{v}c \cong c\hat{v}d \cong d\hat{v}e \cong e\hat{v}a$

aristas laterales:

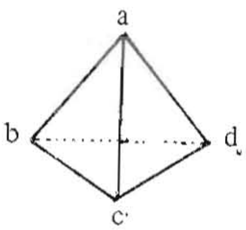
$\overline{va} \cong \overline{vb} \cong \overline{vc} \cong \overline{vd} \cong \overline{ve}$

apotema: $\overline{vm}$

– *Apotema de la pirámide regular* es la altura de una cualquiera de las caras laterales de la pirámide regular.

– *Tetraedro:*

Pirámide triangular cuyas caras laterales y base son triángulos equiláteros.

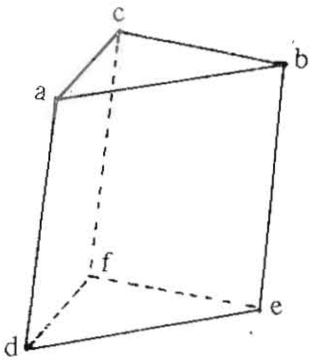


pir. a. bcd: *tetraedro*

$\overset{\triangle}{dab} \cong \overset{\triangle}{bac} \cong \overset{\triangle}{cad} \cong \overset{\triangle}{dbc}$

1.2. – **Prisma:**

a) Se llama prisma al poliedro que tiene dos caras congruentes situadas en planos paralelos y las demás son paralelogramos.



Notación:

prisma abcdef

bases: $\overset{\triangle}{abc} \cong \overset{\triangle}{def}$

caras laterales:

abed; ebcf; adfc

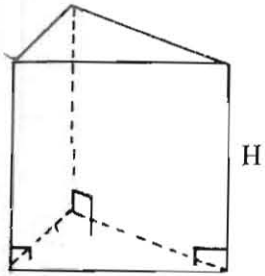
vértices: a, b, c; d, e, f

aristas laterales: $\overline{ad}$; $\overline{be}$; $\overline{cf}$

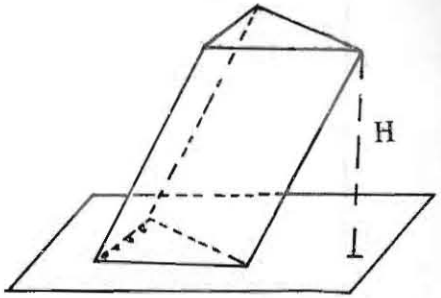
aristas de las bases: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ac}$, $\overline{de}$, $\overline{ef}$, $\overline{fd}$

b) Un prisma es triangular, cuadrangular, pentagonal, etc., según que sus bases sean respectivamente: triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.

c) Un prisma es *recto* u ***ublicuo,*** según que las aristas laterales sean perpendiculares u oblicuas a los planos de las bases.



Prisma recto



Prisma oblicuo

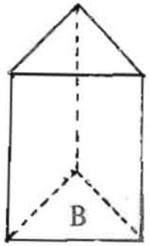
d) *Altura del prisma:*

Segmento de perpendicular comprendido entre los planos de las bases.

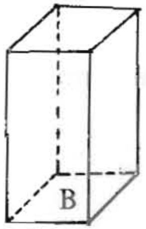
En un prisma recto, cualquiera de las aristas laterales puede ser considerada como altura.

e) *Prisma regular:*

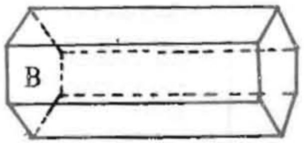
Prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.



B: triáng. equilátero



B: cuadrado

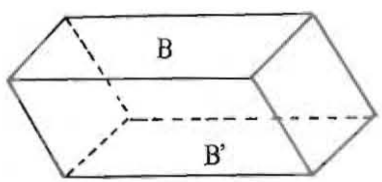


B: hexágono regular

f) *Paralelepípedos:*

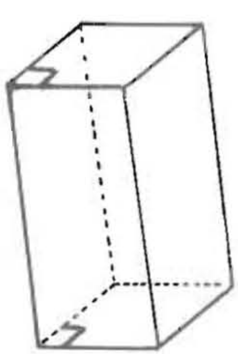
1º)

Paralelepípedos
bases: paralelogramos

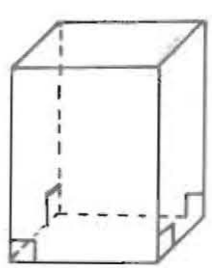


B y B': paralelogramos

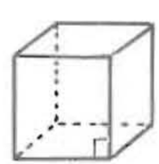
Paralelepípedos rectángulos
bases: rectángulos



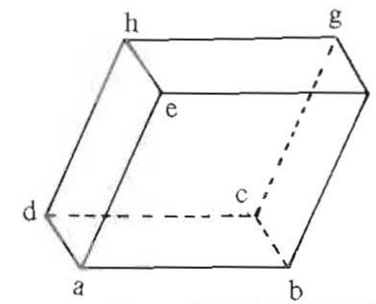
Paralelepípedos rectos rectángulos
caras laterales: rectángulos



Cubo
caras: cuadrados



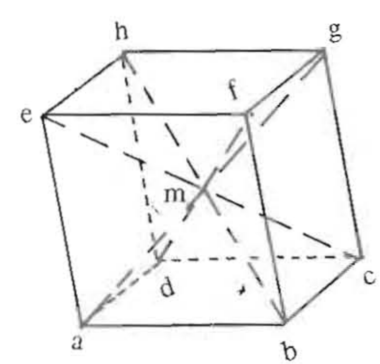
2º) *Elementos opuestos del paralelepípedo:*



Caras opuestas no tienen puntos comunes	*Vértices opuestos* no pertenecen a la misma cara	*Aristas opuestas* no están incluidas en la misma cara
abfe y dcgh aehd y bfgc	*a* y *g*; *b* y *h* *c* y *e*; *d* y *f*	$\overline{ae}$ y $\overline{cg}$ $\overline{bf}$ y $\overline{dh}$ $\overline{ab}$ y $\overline{hg}$ $\overline{ad}$ y $\overline{fg}$

3º) *Diagonales de un paralelepípedo:*

Cada par de vértices opuestos determina una diagonal.



$\overline{ag}$, $\overline{bh}$, $\overline{ce}$, $\overline{df}$:

diagonales

– *Propiedades:*

I. – Las diagonales de un paralelepípedo se cortan mutuamente en partes congruentes.

$$\overline{ag} \cap \overline{bh} \cap \overline{ce} \cap \overline{df} = \{m\}$$

$$\overline{am} \cong \overline{mg}$$

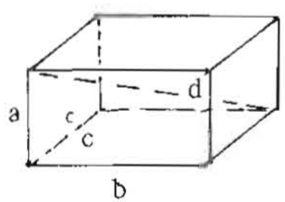
$$\overline{bm} \cong \overline{mh}$$

$$\overline{cm} \cong \overline{me}$$

$$\overline{dm} \cong \overline{mf}$$

II. – Las diagonales de un paralelepípedo recto rectángulo son *congruentes.*

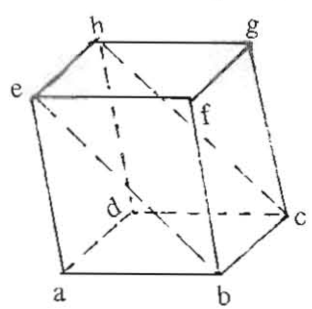
III. – El cuadrado de la longitud de una diagonal de un paralelepípedo recto rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de tres aristas que concurren en un vértice.



$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

d) *Plano diagonal:*

Cada par de aristas opuestas determinan un *plano diagonal.*



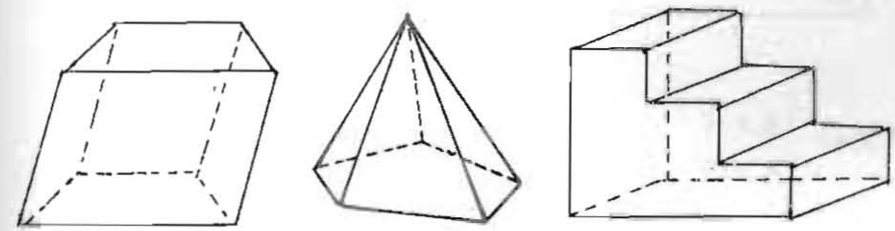
bche: plano diagonal

1.3. – **Número de vértices y aristas de un poliedro:** Relación de Euler.

En todo poliedro la suma del número de caras y el número de vértices es igual a la suma del número de aristas y dos.

C → Nº de caras V → Nº de vértices A → Nº de aristas

$$\boxed{C + V = A + 2}$$



a) b) c)

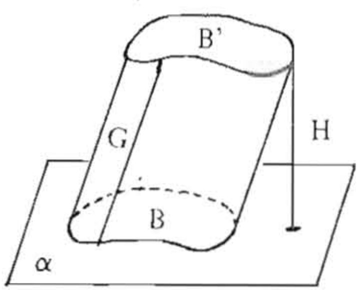
Poliedro	Caras	Vértices	Aristas	C + V = A + 2
a)	6	8	12	6 + 8 = 12 + 2
b)	6	6	10	6 + 6 = 10 + 2
c)	10	16	24	10 + 16 = 24 + 2

2. - CUERPOS REDONDOS:

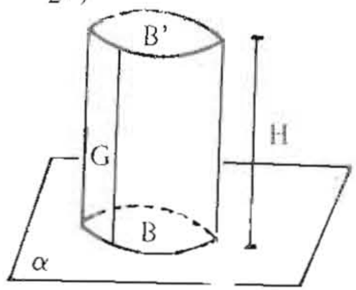
2.1. - Cilindro:

a) Cuerpo redondo que tiene dos caras paralelas congruentes, llamadas bases, limitadas por curvas simples cerradas. La superficie curva es la cara lateral.

1º)



2º)

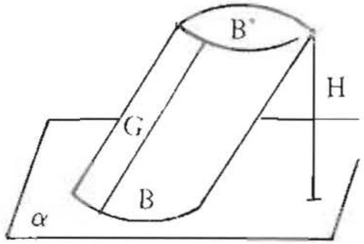


Bases $\left\{ \begin{array}{l} B \parallel B' \\ B \cong B' \end{array} \right.$

generatriz: G

altura: H

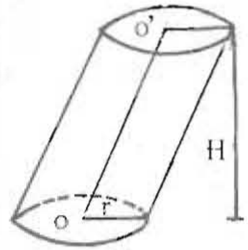
3º)



- *Generatriz:* Segmento de recta de la cara lateral comprendido entre las bases.
- *Altura:* Segmento de perpendicular, comprendido entre los planos de las bases.

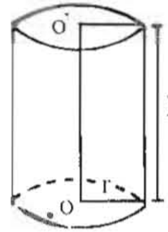
b) Un cilindro es *recto* (fig. 2º) u *oblicuo* (fig. 1º y 3º) según que la generatriz sea perpendicular u oblicua a los planos de las bases.

c) *Cilindro circular:* las bases son círculos.



Base:
Círc. (o, r)
Eje: $\overline{oo'}$

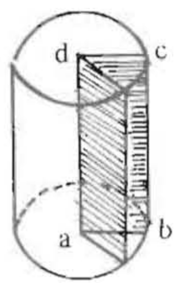
Cilindro circular oblicuo



Notación:
Cil. [(o, r); H]

Cilindro circular recto

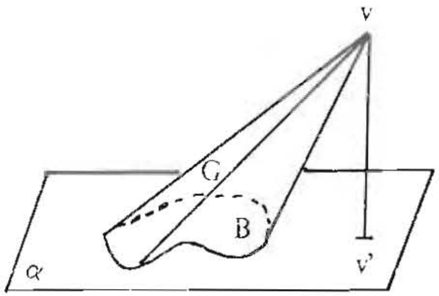
- *Generación de un cilindro recto circular:*
Un cilindro circular recto se puede considerar generado por la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.



abcd: rectángulo
$\overline{ad}$: eje de rotación
$\overline{cb}$: genera la superficie lateral del cilindro
$\overline{ab}$: genera un círculo: base del cilindro.

2.2. – Cono:

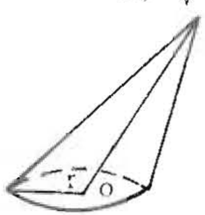
a) Cuerpo redondo formado por una superficie curva y una superficie plana (base) limitada por una curva simple.
La superficie curva está formada por segmentos cuyos extremos son un punto (vértice) no perteneciente al plano de la base y cada uno de los puntos de la curva simple.



B: base
v: vértice
$\overline{vv'}$: altura (segmento de perpendicular desde el vértice al plano α)

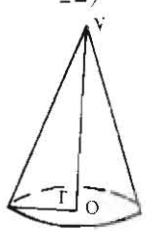
b) *Cono circular:* la base es un círculo

1º)



Cono circular oblicuo

2º)

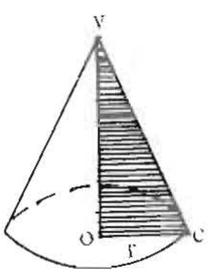


Cono circular recto

Base: Círc. (o, r)
$\overline{vo}$: eje (segmento determinado por el vértice y el centro de la base)

c) Un cono circular es *recto* (fig. 2º) u *oblicuo* (fig. 1º) según que el eje sea perpendicular u oblicuo a la base.

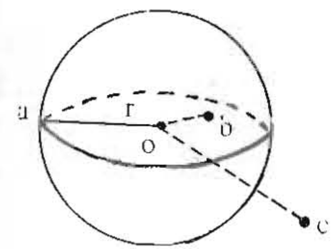
- *Generación de un cono circular recto:*
Un cono circular recto, se puede generar por la rotación de un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos.



$\overset{\triangle}{voc}$: rectángulo
cateto $\overline{vo}$: eje de rotación
cateto $\overline{oc}$: genera el círculo base
hipotenusa $\overline{vc}$: genera la superficie lateral

2.3. -- Esfera:

a) *Superficie esférica:*
Se llama superficie esférica de centro *o* y radio *r* al conjunto de los puntos del espacio cuya distancia a *o* es igual a *r*.



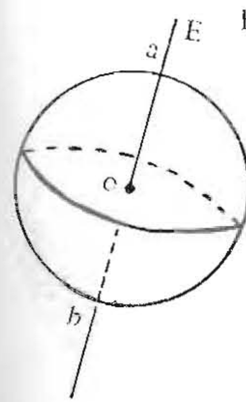
Notación:
Sup. esf.$_{(o, r)}$
Se lee:
Superficie esférica de centro *o* y radio *r*

$d(o, a) = r \Rightarrow a \in$ Sup. esf.$_{(o, r)}$
$d(o, b) < r \Rightarrow b \in$ región interior
$d(o, c) > r \Rightarrow c \in$ región exterior

b) *Esfera:*
Se llama esfera de centro *o* y radio *r* al conjunto de los puntos del espacio cuya distancia a *o* es *menor* o *igual* que *r*.

- *Otra forma de definir esfera:*
Se llama esfera al conjunto unión de los puntos de la superficie esférica con los puntos de la región interior.

Esf.$_{(o, r)}$ = Sup. esf.$_{(o, r)}$ $\cup$ región interior



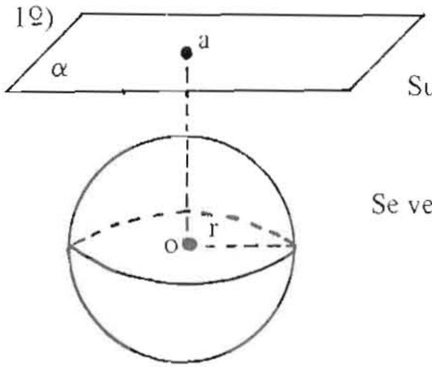
c) *Eje y diámetro:*
– *Eje:* Es la recta que pasa por el centro de la esfera o de la superficie esférica.

$o \in E$: E *eje*
$E \cap$ Sup. esf.$_{(o, r)} = \{a, b\}$
$\overline{ab}$: diámetro de la esfera y de la superficie esférica.

d) *Posiciones relativas de una superficie esférica y un plano:*

Dados una superficie esférica y un plano en el espacio, pueden presentarse las siguientes situaciones:

1º)

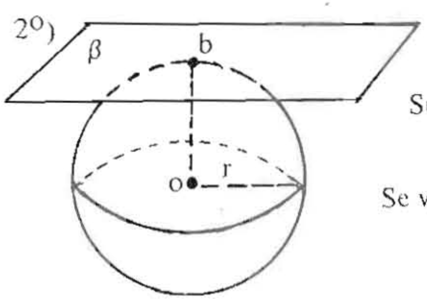


Sup. esf.$_{(o,\,r)} \cap \alpha = \phi \Rightarrow \alpha$ *exterior*

Se verifica:

$d(o, \alpha) > r$

2º)

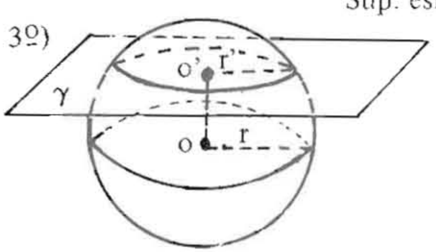


Sup. esf.$_{(o,\,r)} \cap \beta = \{b\} \Rightarrow \beta$ *tangente*

Se verifica:

$d(o, \beta) = r$

3º)



Sup. esf.$_{(o,\,r)} \cap \gamma = C_{(o',\,r')} \Rightarrow$ *secante*

$r' < r$

Se verifica:

$d(o, \gamma) < r$

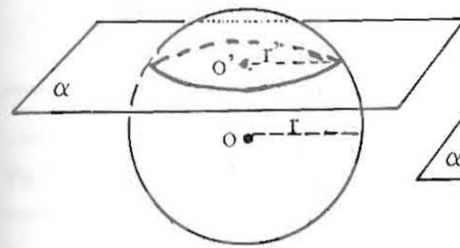
γ determina en la superficie esférica dos *casquetes esféricos.*

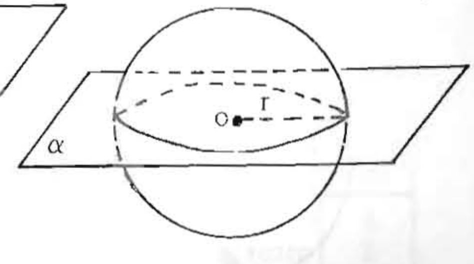
Si $o \in \gamma \Rightarrow C_{(o,\,r)}$ circunferencia máxima

En este caso los casquetes se llaman *hemisferios.*

– *Sección de un plano secante con la esfera:*

La intersección de un plano secante con los puntos de la esfera es un círculo.





$\alpha \cap$ esf.$_{(o,\,r)} =$ Círc.$_{(o',\,r')}$

$\alpha \cap$ esf.$_{(o,\,r)} =$ Círc.$_{(o,\,r)}$

Círculo	círculo máximo

α determina en la esfera dos *segmentos esféricos.*

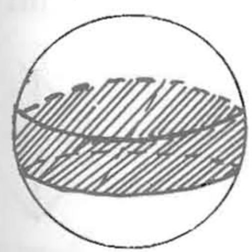
Si $o \in \alpha$ los segmentos se llaman *semiesferas.*

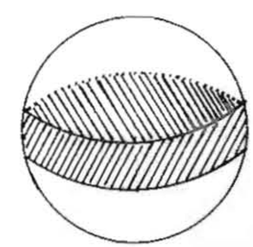
Zona esférica

Parte de la superficie esférica comprendida entre dos secciones paralelas.

Segmento bibásico

Parte de la esfera comprendida entre dos secciones paralelas.





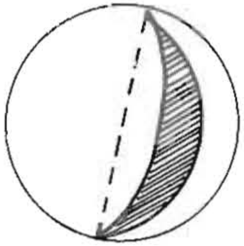
– *Huso y cuña esféricos:*

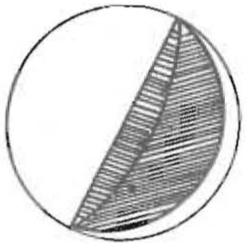
Huso esférico

Parte de la superficie esférica comprendida entre las caras de un diedro cuya arista es eje.

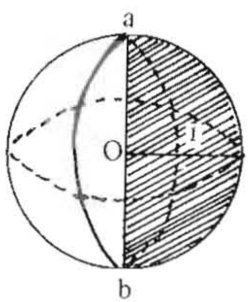
Cuña esférica

Parte de la esfera comprendida entre las caras de un diedro cuya arista es eje.





e) – *Generación de una esfera:*
Una esfera se puede generar por la rotación de un semicírculo que gira alrededor del diámetro.



semicírc. (o, r); $\overline{ab}$ diámetro

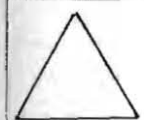
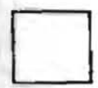
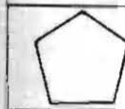
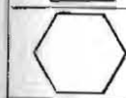
esf.(o, r)

3. – POLIEDROS REGULARES:

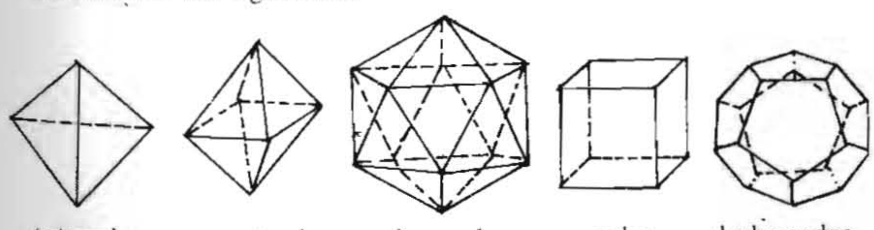
Poliedro regular es todo poliedro cuyas caras son polígonos regulares y en cada uno de los vértices concurre el mismo número de caras.

3.1. – Existencia de los polígonos regulares:

Teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de un poliedro es menor que 360° se pueden analizar las posibilidades de existencia de los poliedros regulares.

CARAS			POLIEDRO	
Polígono	Nº en cada vértice	Suma de los ángulos del poliedro	Nombre	Nº de caras
	3	3 X 60° = 180°	tetraedro	4
	4	4 X 60° = 240°	octaedro	8
	5	5 X 60° = 300°	icosaedro	20
	6	6 X 60° = 360°	no existe	––
	3	3 X 90° = 270°	cubo o hexaedro	6
	4	4 X 90° = 360°	no existe	––
	3	3 X 108° = 324°	dodecaedro	12
	4	4 X 108° = 432°	no existe	––
	3	3 X 120° = 360°	no existe	––

Por lo tanto los únicos poliedros regulares que existen son los siguientes:



tetraedro   octaedro   icosaedro   cubo   dodecaedro

3.2. - **Aplicación de la fórmula de Euler a poliedros regulares:**

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

Poliedro	C	V	C + V = A + 2
tetraedro	4	4	4 + 4 = 6 + 2
cubo	6	8	6 + 8 = 12 + 2
octaedro	8	6	8 + 6 = 12 + 2
dodecaedro	12	20	12 + 20 = 30 + 2
icosaedro	20	12	20 + 12 = 30 + 2

3.3. – **Poliedros duales:**

Es el par de poliedros regulares en que el número de caras de uno es el número de vértices del otro.

cubo - octaedro

dodecaedro - icosaedro

– *Observación:*

El número de vértices de los *poliedros regulares* está dado por la siguiente fórmula:

$$\frac{N^{o} \text{ de caras} \times N^{o} \text{ de lados de la cara}}{N^{o} \text{ de caras que concurren en un vértice}}$$

Ejemplo: Dodecaedro

$$N^{o} \text{ de vértices} = \frac{12 \times 5}{3} = 20$$

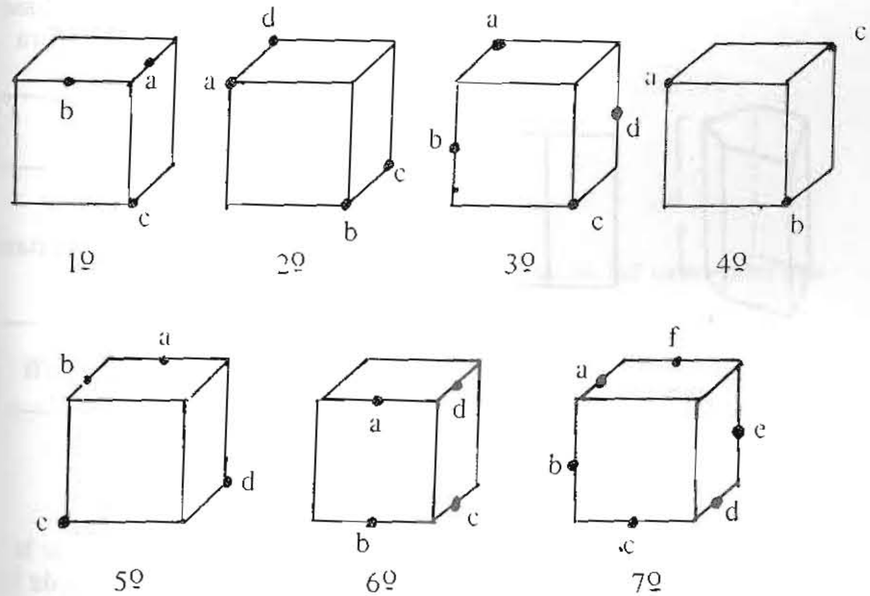
EJERCICIOS DE APLICACION

19. – En el conjunto P = { poliedros regulares } aplicar la relación:

R = . . ."tiene el mismo número de aristas que". . .

a) Dibujar el diagrama de Venn.
b) Escribir el conjunto de pares ordenados.
c) Enumerar las propiedades que cumple la relación.
d) En caso de producirse una partición en P, escribir los subconjuntos que determina.

20. – Escribir el nombre del polígono que determina la sección producida al unir los puntos señalados en cada uno de los siguientes cubos (unir en orden alfabético).



V. – AREA DE POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS

En general:

Area de cuerpos geométricos: Suma de las áreas de sus caras.

En el caso de ciertos cuerpos (prismas, cilindros, pirámides y conos) se debe distinguir entre:

área lateral suma de las áreas de las caras laterales

y *área total* suma del área lateral y las áreas de las bases.

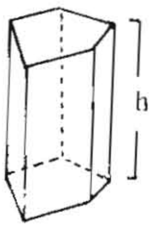
1. – **AREA DEL PRISMA RECTO:**

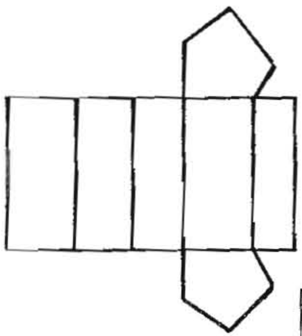
1.1. – **El área lateral de un prisma recto** es igual a la de un rectángulo cuyas dimensiones son: P (perímetro de la base) y h (medida de la altura del prisma).

Dicho rectángulo se llama *desarrollo de la superficie lateral* y es resultado de aplicar sobre el plano las caras laterales rectangulares unidas por sus aristas comunes.

P → perímetro de la base

h → medida de la altura





A. lat. = P h

B → área de la base

A. total = P . h + 2B

1.2. – **Prisma recto regular:**

$$A.\ total = P\ .\ h + 2\,\frac{P\ .\ a_B}{2}$$

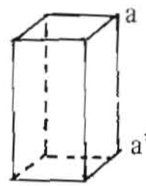
a_B → medida de la apotema de la base

$$A.\ total = P\ .\ h + P\ .\ a_B$$

$$A.\ total = P\,(h + a_B)$$

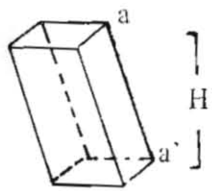
Observación:

Prisma oblicuo: hay que tener presente que la altura del prisma no es congruente con la longitud de las aristas laterales.



H → altura del prisma recto

$H \cong \overline{aa'}$



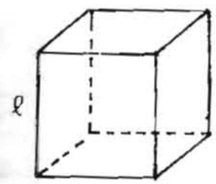
H → altura del prisma oblicuo

$H \not\cong \overline{aa'}$

A. lat. = suma de las áreas de las caras laterales

1.3. – **Area del cubo:**

ℓ → medida de la arista



A. lat. = P · ℓ A. total = $4\ell^2 + 2\ell^2$

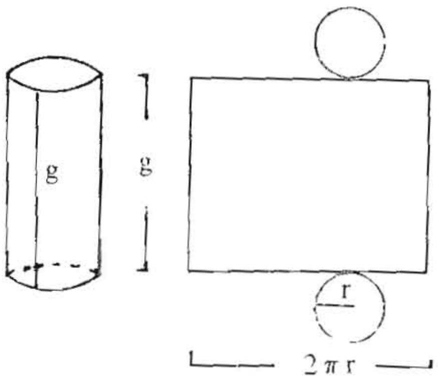
A. lat. = 4 ℓ · ℓ

A. lat. = $4\ell^2$

A. total = $6\ell^2$

2. – AREA DEL CILINDRO RECTO:

El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro recto es un rectángulo cuyas dimensiones son: P (longitud de la circunferencia de radio *r*) y *g* (medida de la generatriz).



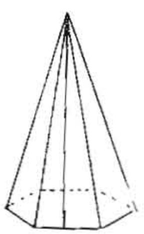
$$\boxed{A.\ lat. = 2\pi r\ .\ g}$$

$$A.\ total = 2\pi r\ .\ g + 2\pi r^2$$

$$\boxed{A.\ total = 2\pi r\ (g + r)}$$

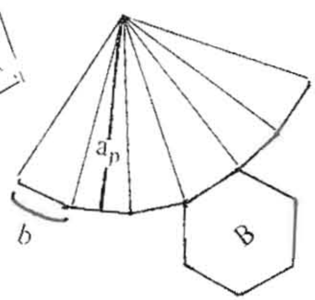
3. – AREA DE LA PIRAMIDE RECTA REGULAR:

Las caras laterales son triángulos isósceles congruentes de altura y base respectivamente congruentes con la apotema y el lado de la base de la pirámide.



a_P → medida de la apotema

b → medida del lado de B



$$A.\ lat. = 4\ .\ \frac{b\ .\ a_P}{2} \qquad 4\,b \to P_B$$

$$\boxed{A.\ lat. = \frac{P_B\ .\ a_P}{2}}$$

$$\boxed{A.\ total = \frac{P_B\ .\ a_P}{2} + B}$$

Pero, como la base es un polígono regular:

$$\Rightarrow B = \frac{P_B\ .\ a_B}{2}$$

$$y\ A.\ total = \frac{P_B\ .\ a_P}{2} + \frac{P_B\ .\ a_B}{2}$$

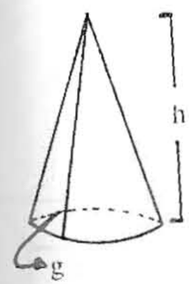
$$\boxed{A.\ total = \frac{P_B}{2}\ (a_P + a_B)}$$

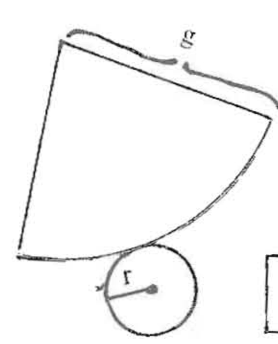
Area de la pirámide no regular:

$$\boxed{\begin{array}{l} A.\ lat. = \text{suma de las áreas de las caras laterales} \\ A.\ total = A.\ lateral + B \end{array}}$$

4. – AREA DEL CONO RECTO:

El desarrollo del *cono recto circular* es un sector circular de radio g (medida de la generatriz) y de longitud del arco igual a la longitud $C_{(o,\ r)}$.





$$A.\ lat. = \frac{2\pi r\ .\ g}{2}$$

$$\boxed{A.\ lat. = \pi r\ .\ g}$$

$$A.\ total = \pi r\ .\ g + \pi r^2$$

$$\boxed{A.\ total = \pi r\ (g + r)}$$

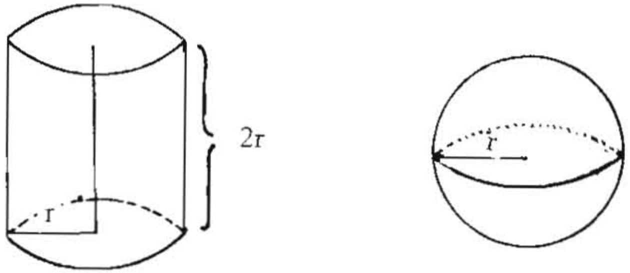
5. – AREA DE LOS POLIEDROS REGULARES:

En general, para el poliedro regular de n caras:

A = área de una cara . n

6. – AREA DE LA SUPERFICIE ESFERICA:

Sean:



Si se cubren la superficie lateral del cilindro y la superficie esférica con una capa de revestimiento plástico, de espesor uniforme, se comprobará que se utiliza la misma cantidad de material.

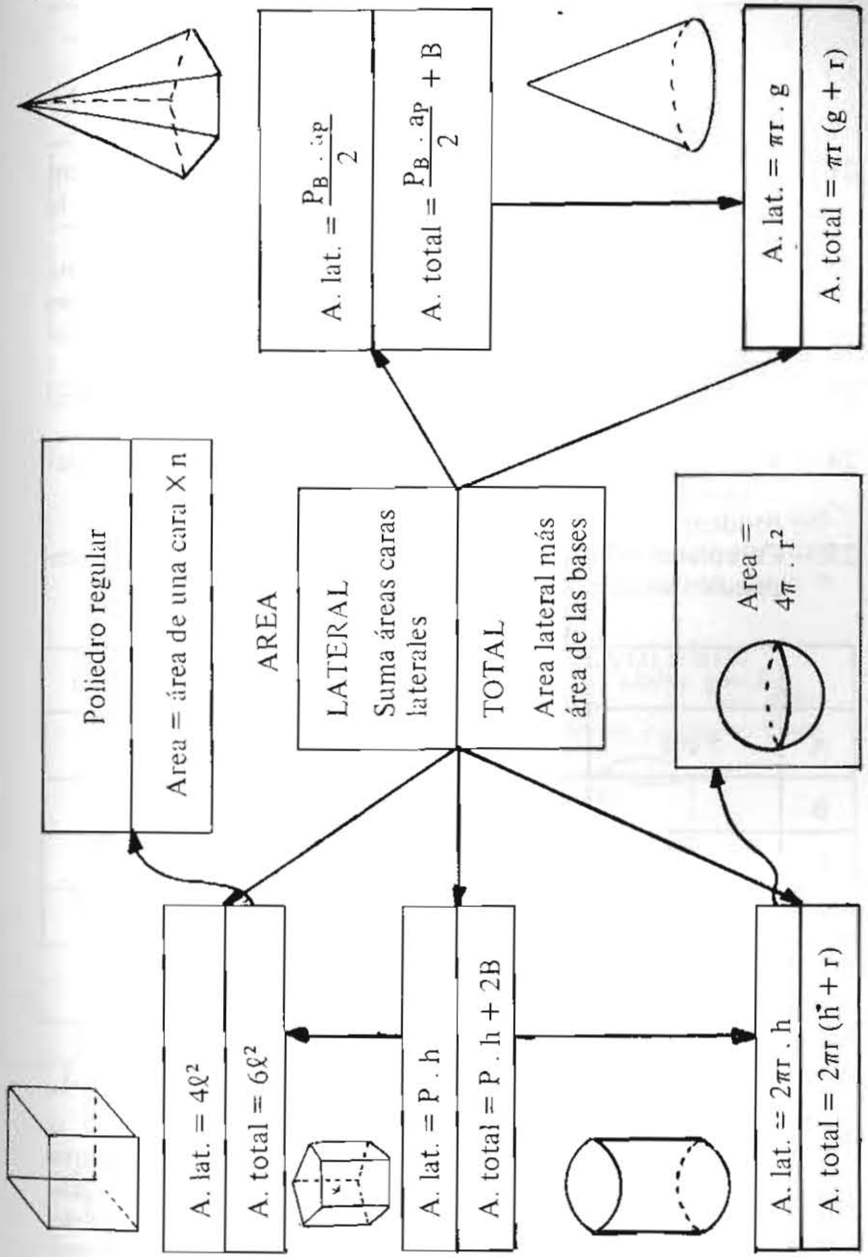
Por lo tanto:

Sup. lat. cilindro = sup. esférica

$\Rightarrow$ A. lat. cilindro = A. esfera

$$2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot 2r$$

A. esfera = $4\pi r^2$

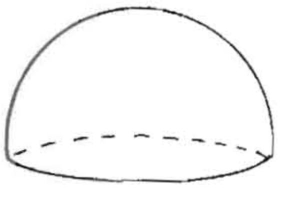


EJERCICIOS DE APLICACION

21. – Una pirámide recta tiene por base un cuadrado de 12 cm de lado. Calcular el área lateral y total, sabiendo que la apotema es 5/6 del lado de la base.
22. – Un prisma recto tiene por base un rombo en el que una de sus diagonales es3/4 de la otra y la suma de ambas es 14 cm. Calcular la superficie total sabiendo que la longitud de la altura es igual al semiperímetro de la base.
23. – Comprobar que en un cono en que: $g \cong 2r$, el área lateral es igual al doble del área de la base.
24. – a) El radio de una superficie esférica E es el doble del radio de otra E'. Expresar la razón entre sus áreas.
    b) Idem si el radio de E es tres veces el de E'.
25. – Completar el cuadro con las longitudes y áreas correspondientes al cubo:

	Long. arista	Sup. cara	Sup. lat.	Sup. total
A	5 cm			
B		36 dm^2		
C			64 cm^2	
D				54 m^2

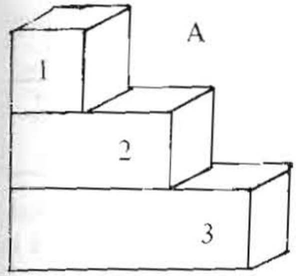
26. – Se debe pintar un cobertizo de forma de hemisferio.

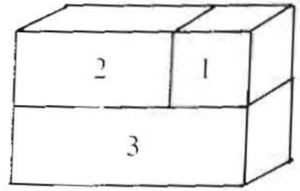


Si para pintar el piso se emplean 17 litros de pintura, ¿cuántos litros se necesitarán para cubrir el exterior del cobertizo?

VI. – COMPARACION DE VOLUMENES

1. – CUERPOS EQUICOMPUESTOS:





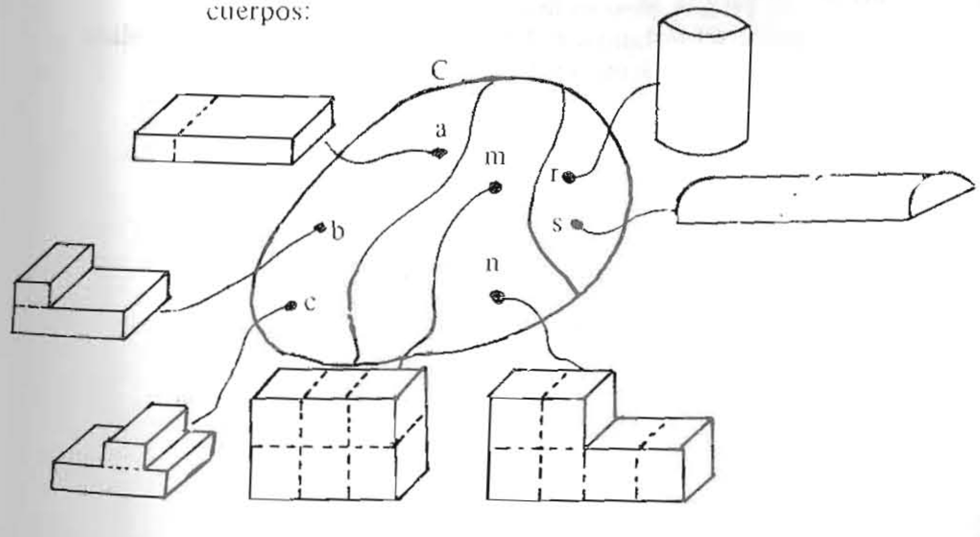
El cuerpo A puede separarse en los prismas 1, 2, 3.

Con la unión de estos prismas puede formarse otro poliedro B.

A y B son poliedros equicompuestos porque son unión del mismo número de poliedros congruentes dos a dos, teniendo en común solamente caras o partes de caras.

2. – RELACION DE EQUIVALENCIA: VOLUMEN:

R = . . . "es equicompuesto con" . . . es una relación que clasifica los elementos de un conjunto C de cuerpos:



En C se produce una partición.

Cada subconjunto es una clase de equivalencia que define un volumen.

Los cuerpos que pertenecen a una clase son equivalentes en cuanto a su volumen.

> Los cuerpos equicompuestos, llamados también equivalentes, tienen el mismo volumen.

En una clase de equivalencia, si se conoce el valor del volumen de un cuerpo, se conoce también el del volumen de todos los demás cuerpos de la misma.

3. – COMPROBACION INTUITIVA DEL VOLUMEN DE LOS CUERPOS:

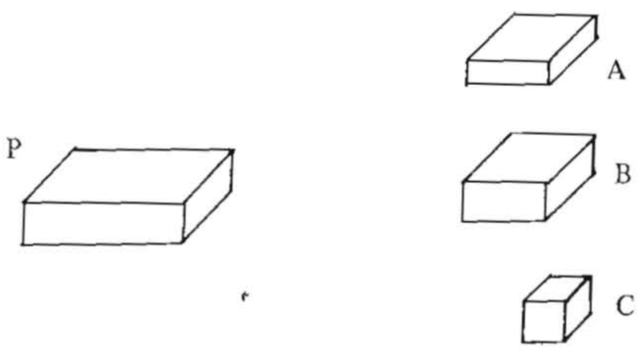
Se construyen dos cuerpos huecos y se llena uno de ellos con arena; si al volcarse el contenido en el otro, éste queda completamente lleno sin desbordarse, entonces son equivalentes por su volumen.

4. – MEDIDA DEL VOLUMEN:

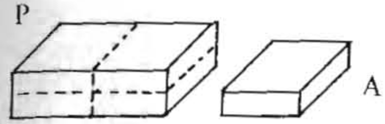
Como en el caso de la longitud y la superficie, el primer paso es la elección de la unidad.

El volumen del mismo poliedro puede ser medido con distintas unidades.

Dado P hueco y A, B y C como unidades:

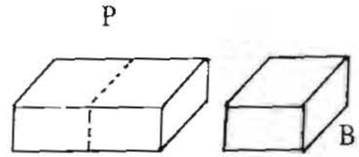


Si para llenar P se necesitan 4 A, 2 B y 8 C, decimos:



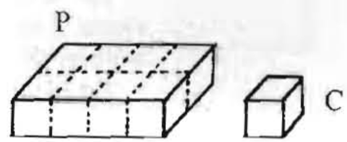
Vol. P = 4 Vol. A

Med. Vol. $P_A = 4$



Vol. P = 2 Vol. B

Med. Vol. $P_B = 2$



Vol. P = 8 Vol. C

Med. Vol. $P_C = 8$

El volumen del paralelepípedo P siempre es el mismo, no depende de la unidad.

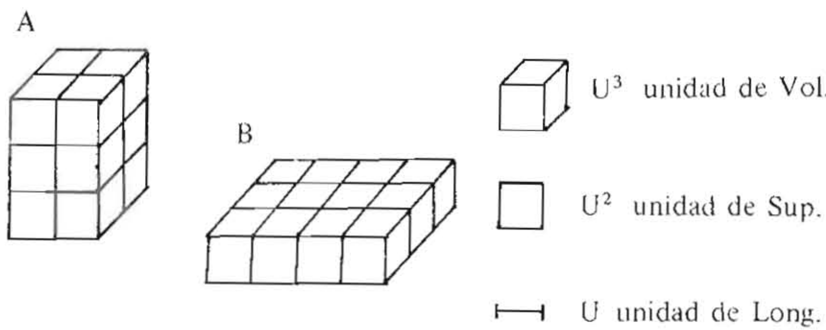
La medida de su volumen es el *número* que varía de acuerdo con la *unidad* elegida.

5. – CALCULO DEL VOLUMEN:

5.1. – Volumen del paralelepípedo:

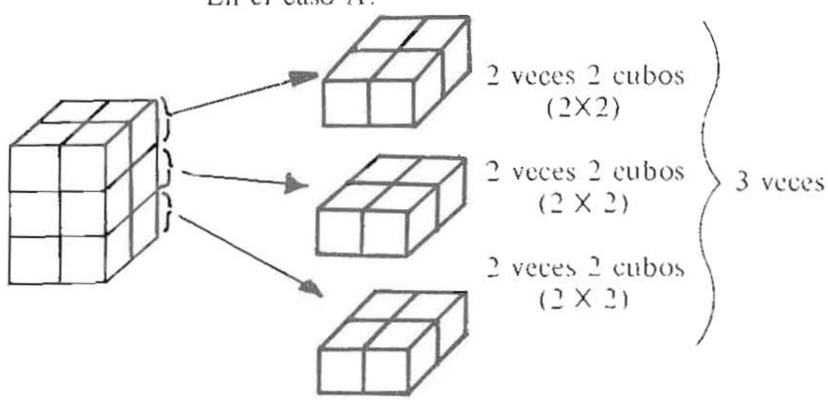
Con varios cubos unidad, convenientemente dispuestos, se pueden formar paralelepípedos; el número de cubos utilizados es la medida del volumen del paralelepípedo.

Por ejemplo: con 12 cubos congruentes con 



En ambos casos la cara del cubo unidad funciona como unidad de superficie y la arista, como unidad de longitud.

En el caso A:



(2 X 2) X 3 = 12

Nº de U	X	Nº de U	X	Nº de U	=	Nº de U³
med. ancho	X	med. largo	X	med. alto	=	med. vol.

$$\underbrace{\text{N}^{\text{o}}\text{ de }U^2} \times \underbrace{\text{N}^{\text{o}}\text{ de }U} = \underbrace{\text{N}^{\text{o}}\text{ de }U^3}$$

área base	X med. altura	= med. vol.

La medida del volumen del papalelepípedo es igual al producto de las medidas de sus tres dimensiones tomadas con respecto a la misma unidad; o bien, al producto del área de la base por la medida de la altura.

5.2 - Volumen de otros cuerpos:

Si se construyen modelos huecos de un prisma P y un paralelepípedo P' de *bases equivalentes y alturas congruentes* al llenar P con arena y volcarla en P', se comprueba que

P P'

Vol prisma = Vol paralelepípedo

Vol prisma = Area B X h

Esta comprobación es valida para el prisma oblicuo.

Prismas equivalentes ⇔ Bases equivalentes alturas congruentes

El cubo es un paralelepípedo.

Vol cubo = Vol. paralelepípedo

Vol. cubo = $\underbrace{\text{area B} \times \text{h}}$

Vol cubo = ℓ X ℓ X ℓ

Vol. cubo = ℓ^3

B ≅ B'
H ≅ H'

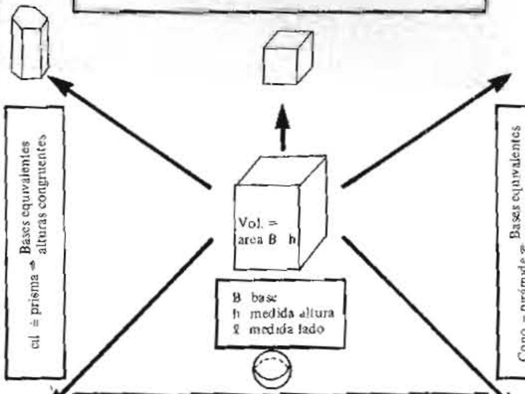
Si se llena la piramide con arena y se vuelca en el prisma se necesitara repetir la operación 3 veces para llenarlo

3 Vol piramide = Vol prisma

Vol pirámide = $\frac{1}{3}$ Vol prisma

Vol piramide = $\frac{1}{3}$ área B h

Piram. equivalentes ⇔ Bases equivalentes alturas congruentes



La misma comprobación realizada con el paralelepípedo y el prisma, puede hacerse con un prisma y un cilindro

C P

B = B'
H ≅ H'

C = P

$\underbrace{\text{Vol cilindro}}$ = $\underbrace{\text{Volumen prisma}}$

Vol cilindro = área B X h

Vol cilindro = $\pi r^2 \times h$

Si se construyen modelos de semiesfera, cilindro y cono de bases congruentes tal que

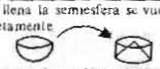
r esfera = r cono = h cilindro

y se introduce el cono dentro del cilindro

El espacio que queda entre ellos es

$\boxed{\text{Vol cilindro} - \text{Vol cono}}$

Si la arena que llena la semiesfera se vuelca en ese espacio, lo ocupa completamente



Vol semiesfera = Vol cilindro - Vol cono

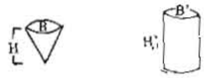
Vol. semiesfera = $\pi r^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

Vol. semiesfera = $\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r$

Vol. semiesfera = $\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3$

Vol. esfera = $2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3$

La misma comprobación realizada con el prisma y la pirámide, se puede hacer con el cilindro y el cono



B ≅ B'
H ≅ H'

3 Vol cono = Vol cilindro

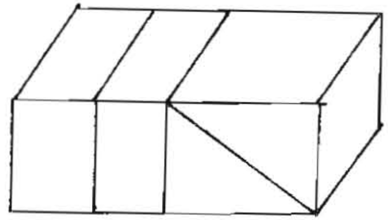
Vol cono = $\frac{1}{3}$ $\underbrace{\text{Vol cilindro}}$

Vol cono = $\frac{1}{3}$ área B . h

Vol. cono = $\frac{1}{3}\pi r^2$. h

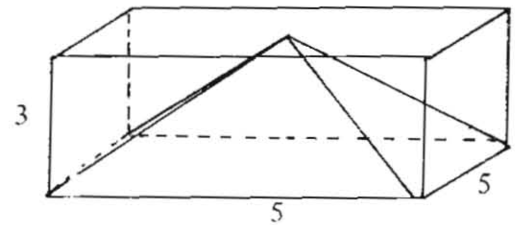
EJERCICIOS DE APLICACION

27. – Construir en cartulina los poliedros que están indicados en el paralelepípedo y formar cuerpos equivalentes.



28. – Dado un prisma hexagonal de 4 cm de lado, 2,76 cm de apotema y 10 cm de alto, calcular el largo, el ancho y la altura de un paralelepípedo equivalente.

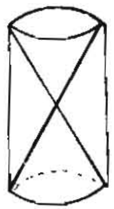
29. – ¿Qué relación hay entre el volumen de la pirámide y el volumen del parelelepípedo?



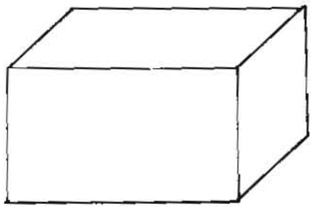
30. – Completar el cuadro: CILINDROS

radio de la base	base	altura	volumen
10 cm		2 dm	
	78.50 cm^2		785 cm^3
	12.56 m^2	5 m	
		1 m	282,600 dm^3

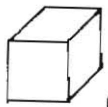
31. — ¿Qué relación hay entre el volumen de los dos conos y el volumen del cilindro?



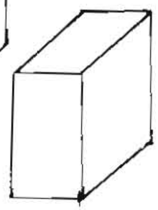
32. — Hallar el volumen del paralelepípedo:



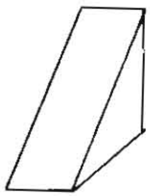
1° respecto de la unidad



2° respecto de la unidad



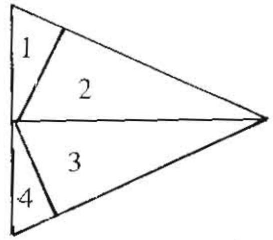
3° respecto de la unidad



33. — Demostrar que si la longitud de un lado de un cubo es 4 veces la de otro cubo, entonces la razón de sus volúmenes es de 64 a 1.

RESULTADOS DE LOS EJERCICIOS DE APLICACION

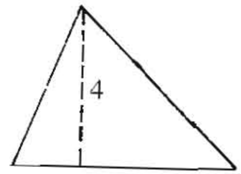
1. – Ejemplo:



2. – Ejemplos:

6

2



6

3. – a) 1º) 63
2º) 9
3º) 27

b) Aréa de $I \cup II$: 63
Area de I + Area de II: 72
$72 > 63$

4. – a) 8; b) 4; c) 16

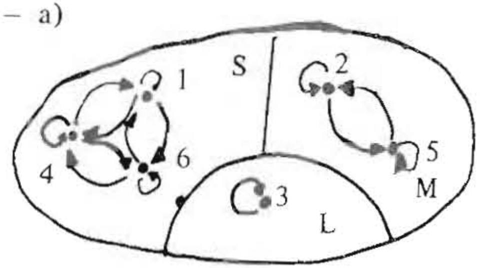
5. – a) 6
b) 15
c) 13

6. – a) 15
b) 9
c) 4,3750 (aprox. 4,38)
d) 28,50
e) 81,64
f) 169

7. – a) 27 m
b) 18 m

8. – a) El doble
b) La mitad de la suma de sus longitudes debe ser igual a la longitud de la base del rectángulo.
c) Equivalentes.
d) El doble

9. – A y C
10. – Sí, porque la congruencia implica semejanza.
11. – a) y b)
12. – Sí
13. – a)



b)

S = { 1, 4, 6 }

M = { 2, 5 }

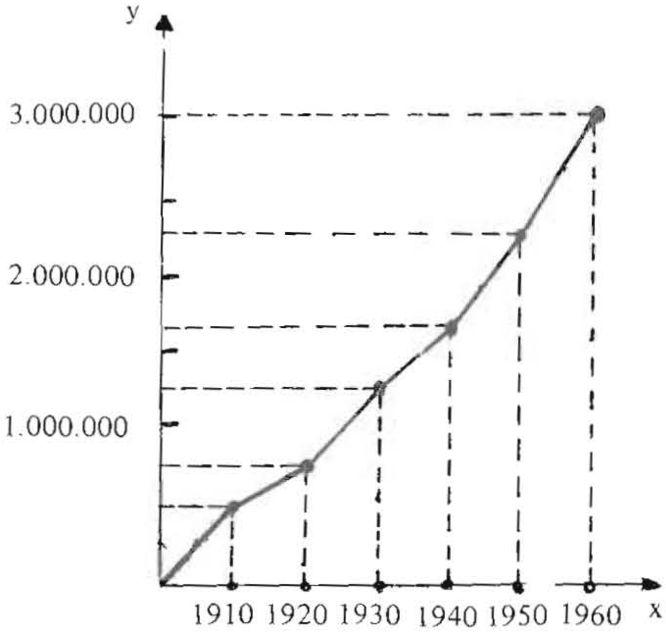
L = { 3 }

14. –

15. – 200 km

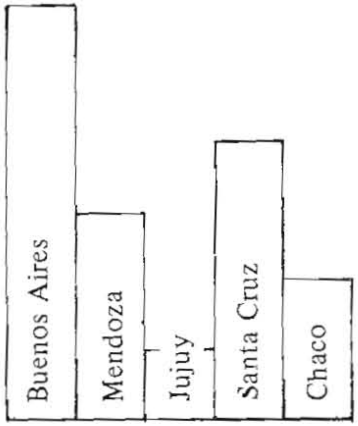
16. – A = 2.000 m; B = 3.000 m; C = 1.500 m
D = 3.500 m; E = 2.500 m

17. – a) y b)

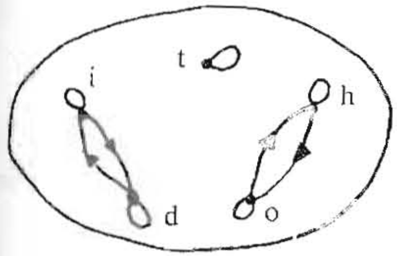


c) $\frac{1}{500.000}$

18. –



19. – a)



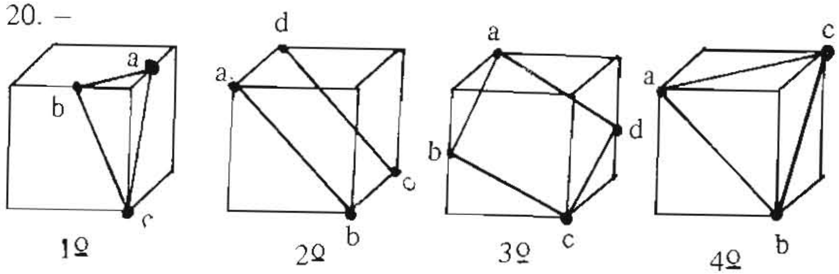
t → tetraedro
h → hexaedro
o → octaedro
d → dodecaedro
i → icosaedro

b) { (t, t); (h, h); (h, o); (o, o); (o, h); (d, d); (d, i); (i, i); (i, d) }

c) Reflexiva, simétrica y transitiva.

d) I = { t }
II = { h, o }
III = { d, i }

20. –

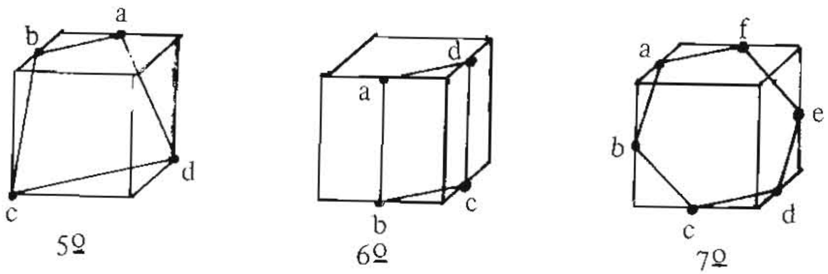


1º triángulo isósceles

2º rectángulo

3º cuadrado

4º triángulo equilátero



5º trapecio isósceles

6º rectángulo

7º hexágono regular

21. –

$$\text{A. lat.} = \frac{P_B \cdot a_P}{2} \qquad \text{A. total} = \frac{P_B \cdot a_P}{2} + B$$

$$\text{A. lat.} = \frac{12 \times 4 \times 10}{2} \qquad \text{A. total} = 240 + 12^2$$

$$\text{A. lat.} = 240 \qquad \text{A. total} = 384$$

Cálculo de a_P:

$$\frac{5}{6} \text{ de } 12 = 10$$

Area lateral de la pirámide, en cm² es: 240
Area total de la pirámide, en cm² es: 384

22. – $\text{A. total} = P_B \cdot h + 2\,B$

$\text{A. total} = \boxed{?} \cdot \boxed{?} + 2\boxed{?}$

$$\text{A. tot.} = 5 \times 4 \times (\frac{5 \times 4}{2}) + 2\frac{6 \times 8}{2}$$

$$\text{A. tot.} = 200 + 48$$

El área total del prisma, en cm² es: 248

Cálculos auxiliares:

1º) medida de las diagonales:

$$\text{si } d = 1 \Rightarrow d' = \frac{3}{4}$$

$$d + d' = 14$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

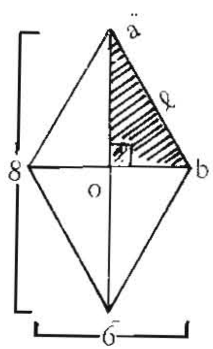
$$\frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{7}{4} = 14 \; \begin{cases} d \rightarrow \dfrac{14 \times 4}{7} = 8 \\ d' \rightarrow \dfrac{14 \times 3}{7} = 6 \end{cases}$$

2º) medida del lado:

$$\overline{ao} = \frac{1}{2} d = 4$$

$$\overline{ob} = \frac{1}{2} d' = 3$$



$$\ell = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$\ell = \sqrt{25}$$

$$\ell = 5$$

23. – $\text{A. lat. cono} = \pi r \cdot g$

$\text{A. lat. cono} = \pi r \cdot 2r$

$\text{A. lat. cono} = 2\pi r^2$

$B = \pi \cdot r^2$

$$\boxed{A = 2B}$$

24. – a) $r = 2r'$

$A\ .\ E = 4\pi\,(2r')^2$
$A\ .\ E' = 4\pi r'^2$

$$\frac{A\ .\ E}{A\ .\ E'} = \frac{\cancel{4\pi}\,.\,4\cancel{r'^2}}{\cancel{4\pi r'^2}}$$

$$\boxed{\frac{A\ .\ E}{A\ .\ E'} = 4}$$

b) $r = 3r'$

$A\ .\ E = 4\pi\,(3r')^2$
$A\ .\ E' = 4\pi r'^2$

$$\frac{A\ .\ E}{A\ .\ E'} = \frac{\cancel{4\pi}\,.\,9\cancel{r'^2}}{\cancel{4\pi r'^2}}$$

$$\boxed{\frac{A\ .\ E}{A\ .\ E'} = 9}$$

25.

	Long. arista	Sup. cara	Sup. lat.	Sup. total
A	5 cm	25 cm^2	100 cm^2	150 cm^2
B	6 dm	36 dm^2	144 dm^2	216 dm^2
C	4 cm	16 cm^2	64 cm^2	96 cm^2
D	3 m	9 m^2	36 m^2	54 m^2

26. – A. círculo $= \pi r^2$

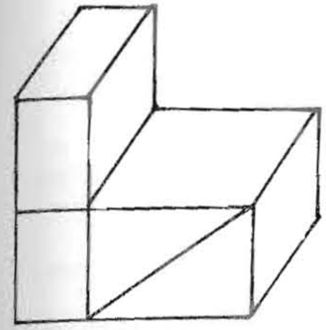
A. hemisferio $= \frac{1}{2}(4\pi r^2)$

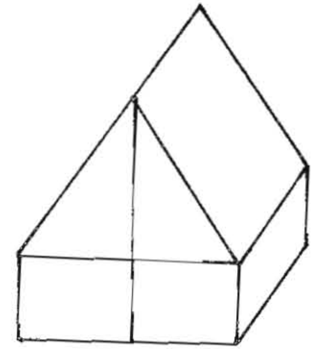
A. hemisferio $= 2\pi r^2$

A hemisferio = 2 A. círculo

Se necesitan: $2 \times 17\ell = \boxed{34\ell}$

27. – Ejemplos:





28. – Ejemplo: 10 cm; 8,28 cm; 4 cm.

29. – $\frac{1}{3}$

30. –

radio de la base	base	altura	volumen
10 cm	314 cm^2	2 dm	62,80 cm^3
5 cm	78,50 cm^2	10 cm	785 cm^3
2 m	12,56 m^2	5 m	62,8003 m^3
3 dm	28,26 dm^2	1 m	282,600 dm^3

31. – $\frac{1}{3}$

32. – 1º) 12
2º) 3
3º) 6

33. – Vol. del cubo de lado 1: $1 \times 1 \times 1 = 1$
Vol. del cubo de lado 4: $4 \times 4 \times 4 = 64$

BIBLIOGRAFIA

– Matemática Moderna – Tomo I
Papy
E.U.D.E.B.A. – Bs. Aires

– Los primeros pasos en Matemática. 3: exploración del espacio y práctica de la medida.
Dienes – Golding
Ed. Teide – Barcelona, España

– Curso de Geometría Métrica – Tomo I; Fundamentos
Pedro Puig Adam
Ed. Biblioteca Matemática – Madrid, España

– Ciclo Medio de Matemática Moderna – I
Trejo – Bosch
E.U.D.E.B.A. – Bs. Aires

– Estudios de Matemática – Volumen IX: Curso conciso en Matemática para los profesores de Escuela Primaria
Grupo de Estudio de la Matemática Escolar
Traducción al español – EE.UU.

– Matemática intuitiva
Houssay – Romero – Vicente
Ed. Troquel – Bs. Aires

– Geometría Intuitiva
Nelly Vázquez de Tapia – Elsa De Martino
Ed. Cuarta Dimensión – Bs. Aires

– Matemática I
Rojo – Sánchez – Greco
Ed. El Ateneo – Bs. Aires

– Matemática I y II
Ferrari – López Henríquez Magariños – Massa
Ed. Losada – Bs. Aires

– Matemática Dinámica I y II
Varela – Foncuberta
Ed. Kapelusz – Bs. Aires

– Algebra y Geometría del Espacio – 2
González – Mancill
Ed. Kapelusz – Bs. Aires

– Matemática, 1º y 2º
Cárdenas, Curriel, López Pineda y otros
Ed. Compañía Editorial Continental – México

INDICE