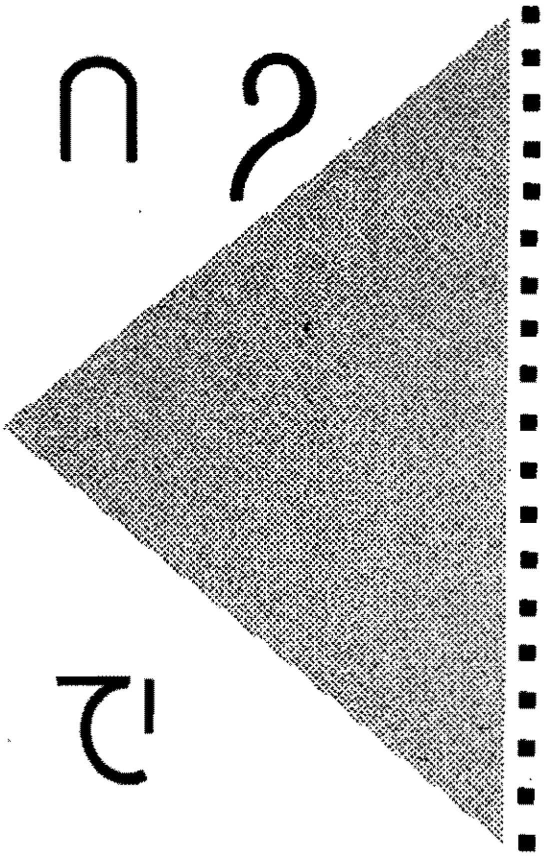
1 MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION
DE LA NACION

PROYECTO MULTINACIONAL PARA EL MEJORAMIENTO
DE LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS O.E.A.

Documento N°6



Historia de la Matemática

La edad del empirismo

Profesor Leopoldo N. Varela

BUENOS AIRES

Abril 1977

LOS ORIGENES

Es imposible decidir cuándo y en que lugar aparecieron los primeros conocimientos matemáticos. No falta quiênes consideran que los maś elementales de ellos son congénitos para el hombre y aún para algunos otros animales. Aducen, en apoyo a esta opinión, ciertas experiencias como la del abandono de la nidada por algunas aves cuando se retira del nido cierta cantidad de huevos, que parecía indicar que el hombre, algunas aves y aún insectos traerían desde el nacimiento cierta habilidad para contar o, al menos para reconocer ciertas "constelaciones".

Tanto la antropología como la sicología, sin embargo, consideran que aún operaciones tan elementales como contar y conceptos tan simples como el del número, cuanto el reconocimiento y representación mental de las tres dimensiones del espacio físico son resultado de una elaboración lenta y accidentada de la humanidad y del individuo.

Así, por ejemplo Jean Piaget, dice: "el resultado obtenido ha sido que, efectivamente el número se va organizando etapa trás etapa, en estrecha solidaridad con la elaboración gradual de los sistemas de inclusiones y de las relaciones asimétricas, de tal manera que la serie de los números se constituye como síntesis de la clasificación y la seriación" y agrega más adelante: 'En resumen éstos diversos trabajos confirman la existencia de una síntesis entre los englobamientos de clases y de orden serial, pero muestran que esa síntesis no se generaliza enseguida a todos los números, sino que actúan progresivamente; este resultado nos lleva, por otra parte, a verificar que se trata aquí de un proceso sintético y constructivo y no de una creación ex nihilo ni de una transformación instantánea". (1)

Para dar otro ejemplo, esta vez referido al concepto de espacio y obtenido de la antropología, leamos algunos párrafos tomados de Lehenhardt y referidos a las investigaciones realizadas entre los canacos, uno de los pueblos actuales a quienes algunos antropólogos llaman "fósiles vivientes".

'El canaco tiene una representación muy buena del cuerpo externo (...).

Pero es visión limitada y que no supera aquella que el primitivo tiene del mundo. Esta visión primera se desarrolla solamente en dos dimensiones. Es un detalle que es indispensable tener en cuenta. El cánaco no ha logrado destacar del conjunto la tercera dimensión, ignora la profundidad.

Puesto que sin esta profundidad, no puede situar las perspectivas, su arte recurre a una convención. El artista desarrolla la realidad del modelo sobre un plano. En las esculturas se ven los diversos componentes del rostro y un gran disco por encima de la cabeza. Al no poder marcar los planos en sus diferentes profundidades, el artista, simplemente, los ha superpuesto: arriba de la frente una franja que representa la nuca. Después de desplegar estos planos sería necesario, para lograr el volumen, imitiar el procedimiento de los juegos infantiles de construcción en cartón y replegar los motivos de la escultura. El cráneo se colocaría detrás de la cara y el turbante se encontraría así sobre la cabeza. (.........).

Una parte difícil de caracterizar del cuerpo, porque carece de contorno, es el tronco. El canaco lo representa por un largo rectángulo, a cada lado de éste, dos paralelas yuxtaponen un pequeño espacio junto al área rectangular: estas dos pequeñas cintas indican los costados invisibles del tronco: el frente en el centro y los flancos a cada costado como postigos de un tríptico". (2)

Esta dificultad en la representación tridimensional no es particular de los canacos y así Herbert Read asegura que en el arte prehistórico se nota esta situación y dice que sólo gradualmente aparece una conciencia espacial que permite la representación del espacio tridimensional a nivel intelectual y no sólo sensomotor. Herbert Read nos dice también que en "lo que respecta a la escultura egipcia y griega, también permanece afianzada a la superficie, tratando de conformarse a un plano de referencia estrictamente bidimensional". (3)

De acuerdo con lo que antecede los conceptos y operaciones matemáticas tuvieron y seguramente tienen una larga evolución tanto desde el punto de vista de el individuo cuanto desde el punto de vista social.

Desde aquel hombre, el primero, que extendió un brazo, señalando una dirección y un sentido mediante una de sus manos, mientras que con los dedos de la otra trataba de hacer entender que en dicha posición y sentido había divisado una yunta de venados, hasta el alumno de la escuela secundaria que maneja los elementos del cálculo vectorial y empieza a vilusbrar al número real el camino ha sido muy largo. Por lo demás, no fue un sendero desbrazado, llano, perfectamente señalizado. Fue, por el contrario, una picada que esperaba ser abierta, en terreno escarpado y sinuoso, donde el rumbo podía ser fácilmente perdido. Un camino en el que algunos obstáculos obligaron a forzadas contramarchas y a amplios y laboriosos rodeos. Empresa, en fin, que requirió espíritu de aventura; deseo de preservar los progresos hechos, fe, dedicación y pasión humana. Como en todas las grandes empresas fue imprescindible la colaboración de infinidad de personas, que tuvieron las virtudes y defectos de todos los hombres. La Matemática, que pertenece al mundo de la cultura y a las llamadas "humanidades" por derecho propio, sólo comparable en cuanto a la creatividad con las más nobles artes y por su búsqueda trascendeta hermana de la filosofía, resultó ser una de las creaciones más sublimes de la humanidad.

Lamentablemente el imponente edificio que hoy constituye atemoriza e impide su total conocimiento mientras que de los numerosos artesanos que colaboraron en su edificación quedan a veces muy pocas huellas y aún extraordinarios arquitectos que proyectaron e inauguraron nuevas y bastas alas han quedado en el olvido. La magnificencia de la obra hace dudar que pueda ser obra humana y quien sólo ha tenido con ella un breve y muchas veces frustante contacto escolar la ve a menudo como fría y deshumanizada. Claro que penetrar su lenguaje exige concentración y trabajo, cierto que no todos podemos aspirar ni tan siquiera a ayudar a colocar un pequeño ladrillo nuevo pero a casi todos les está permitido aprender a contemplar y maravillarse ante esta imponente obra de los hombres. Su historia puede ayudar a ello.

LA MATEMATICA EMPIRICA

1. Sistemas de numeración

La aparición de los primeros conceptos matemáticos están velados por el tiempo. No podemos más que conjeturar sobre ellos pues obviamente no hay documentación que nos permita conocer su origen. Sin embargo dichas conjeturas no son antojadizas ni caprichosas; historiadores, antropólogos, sicólogos, y matemáticos las han discutido y las discuten y pueden ser consideradas sumamente posibles. Uno de los primeros logros de la humanidad fue la operación de contar.

Todos los pueblos han tenido algún sistema de numeración más o menos sencillo , más o menos adecuado para sus necesidades. Porque sin lugar a dudas estas primeras adquisiciones fueron fruto de la necesidad de aprehender y manejar la realidad. Como ya hemos dicho estos elementos difícilmente habrán aparecido instantáneamente ni por generación espontánea.

¿Cuándo habrá aparecido la primera abstracción numérica? ¿Cuál o cuáles habrán sido los primeros hombres que comprendieron que para contar sus ovejas debían establecer una correspondencia que hoy llamamos biyectiva entre ellas y algunos de sus dedos? ¿Quiénes habrán reparado que entre el conjunto de ovejas y el conjunto de dedos extendidohabía "algo en común" y que ese algo en común era el número de elementos?

Dice Russell: "Debe haber requerido mucho tiempo el advertir que una yunta de faisanes y un par de días eran, ambos, ejemplos reales del número 2: el grado de abstracción implicado dista mucho de ser fácilmente adquirido" (4).

El estudio de los lenguajes actuales muestra que en todos ellos existe una gran cantidad de palabras para indicar el cardinal de conjuntos de dos o tres elementos, una para cada caso. Asi, por ejemplo, para el dos utilizamos: yunta, casal, pareja, par, dúo, ambo, gemelos; esto es sintomático pues en muchos otros casos el lenguaje habitual tiende a reducir el número de palabras y se utiliza un vocabulario básico -lamentablemente harto limitado- y se reemplaza, por ejemplo, colanilla por "traba de la puerta". Es probable que la exhuberancia de palabras para el cardinal dos surja de la dificultad de la que habla Russell.

En algunos casos ciertos pueblos no han pasado aún a la abstracción del cardinal dos y en muchos otros no han podido pasar del conocimiento del uno, dos y tres Todas las posibilidades de contar se limita para ello a uno, dos, muchos. Dantzing comenta que es muy probable que nuestros antepasados hayan tenido también esas limitaciones como lo sugiere el análisis de las lenguas actuales europeas: "la palabra inglesa <u>thrice</u>, al igual que la palabra latina <u>ter</u>,tiene dos sentidos: tres veces y mucho; hay una conexión evidente entre las palabras latinas <u>tres</u> (tres) y <u>trans</u> (más allá), se puede decir lo mismo en francés de tres (mucho) y trois (tres)" (5).

Luego del reconocimiento de los primeros cardinales apareció el problema de la sistematización. Dicha sistematización se hace necesaria cuando comienzan a utilizarse cardinales relativamente grandes y consiste en un conjunto de reglas que permitan que con un reducido número de palabras o signos se puedan representar todos los números naturales.

Para ello es necesario dar un nombre y un signo a cada uno de los primeros <u>b</u> signos. El número <u>b</u> se llama base del sistema. Para conjuntos de más de <u>b</u> elementos se reagrupan hasta <u>b</u> conjuntos de hasta <u>b</u> elementos y así sucesivamente. En muchos casos han existido sistemas que utilizaron bases mixtas.

<u>Veamos algunos ejemplos:</u>

Los egipcios utilizaron la base diez. Los diez signos para los primeros números eran:

A partir de allí, reagrupando obtienen, por ejemplo:

Diez grupos de diez lo simbolizan con el símbolo , al número mil (diez cientos) lo indicaban y así sucesivamente diez mil era un dedo , cien mil un pez y un millón un hombrecillo
Es decir que el sistema de numeración egipcio era decimal puro.
El conocido sistema que utilizaron los romanos tienen en cambio base mixta (5 y 10).

I	V	X	L	D	M
1	5	10	50	500	1000

Quizá sea interesante señalar que estos símbolos no fueron siempre usados por los romanos, como tampoco usaron las reglas que actualmente se enseñan en las escuelas con una perseverancia digna de mejor causa.

Los súmeros (cuarto milenio antes de Cristo) utilizaron también base mixta: diez y sesenta en su caso.

Los mayas también utilizaron base mixta 5 y 20 y aún para la cronología las unidades de segundo orden era de 18 veces la unidad anterior (20) con lo que cada unidad de segundo orden representaba $18 \times 20 = 360$ número muy cercano al número de días que consideraban para el año: 365.

Los sistemas egipcios y romanos diferían fundamentalmente del súmero y el maya en algo más importante que la base. Diferían en su lectura. El símbolo ∩ de los egipcios se lee siempre diez, cualquiera sea la posición que ocupe. Por el contrario el símbolo 𒁹 que representaba el número uno para los súmeros puede también representar al sesenta, o al tres mil seiscientos o a cualquier potencia de sesenta (incluyendo los negativos) según la posición.

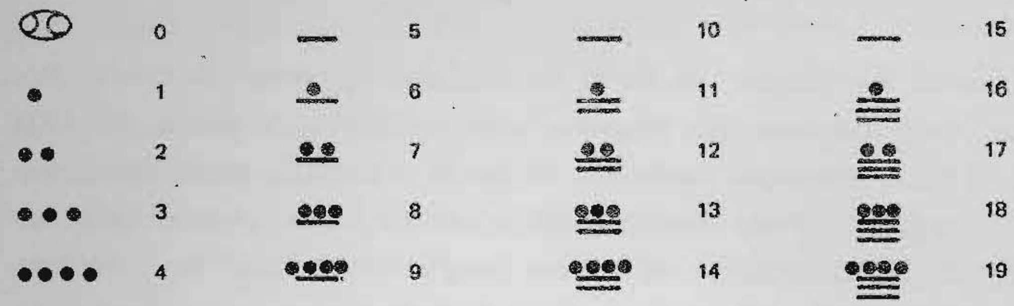
El egipcio y el romano eran de lectura aditiva el súmero y el maya de lectura posicional.

En los sistemas posicionales se necesitaban b símbolos para nombrar al cero y a los $b-1$ primeros números. Con estos únicos símbolos se puede escribir cualquier número con tal de convenir que cualquiera de ellos queda multiplicado por b al cambiar su posición, un lugar en un cierto sentido. Ejemplificaremos la situación con nuestro sistema decimal de origen hindú.

Aquí la base es diez, luego $b=10$ se necesitan: el cero y signos para los $b-1$ = nueve primeros números. Ellos son: o, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,. Estos símbolos permiten escribir cualquier número conviniendo que cada lugar que se cambia hacia la izquierda multiplica al número por 10. Así en el:

345 el cuatro representa $4 \times 10 = 40$ y el 3 representa $3 \times 10^2 = 300$ pues está corrido dos lugares hacia la izquierda.

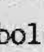
Mostraremos ahora otro ejemplo tomado de la numeración maya ($b=20$) Los numerales mayas eran los siguientes:



Como escribían de abajo hacia arriba cada número queda multiplicado por veinte cuando se asciende un lugar. Así, por ejemplo:

La lectura de un número mayor se podrá efectuar como se indica más abajo:

	Valor absoluto	Valor relativo	
	6	6x20x20x20x20 =	960.000
	1	1x20x20x20 =	8.000
	0	0x20x20 =	0
	13	13x20 =	260
	0	0 =	0
			968.260

Curiosamente a pesar de ser esencial para todo sistema posicional el número cero los súmeros no lo usaron. Posteriormente se introdujo el símbolo  que lo representaba pero no fue usado sistemáticamente. Ello trae aparejada una ambigüedad en la escritura ya que por ejemplo el símbolo 𒁹𒁹 tanto puede significar 2 como 2 x 60, como 2 x 60^2, ó 2 x 60^3 ... y aun 2 x 60^{-1} $= \frac{2}{60}$; etc. Esta ambigüedad debía ser salvada por la interpretación del contexto.

LOS PUEBLOS DE LA MESOPOTAMIA

Los más antiguos testimonios de la civilización mesopotámica proceden de la región de Sumer, región situada en la costa del golfo Pérsico, entre la desembocadura del Tigris y el Eufrates. Difícil decir cuando comienza esta civilización e inclusive determinar el origen de los súmeros que utilizaron una lengua que no es ni semítica ni aria. De cualquier manera se puede asegurar que ocuparon esta región mucho antes del 3000 antes de Cristo. Mientras tanto más al Norte y también entre los dos ríos en la región llamada Acad un pueblo semita había desarrollado su cultura. Durante el gobierno de su rey Sargón (2637-2582) los acadios bajaron hacia el sur y sometieron a los sumerios. Los sumerios, de una cultura muy superior a la de los acadios, quedaron sometidos por varios milenios, pero acabaron conquistando a sus conquistadores que asimilaron esa cultura más evolucionada, fue así que unificadas Summer y Acadia se sucedieron distintas dinastías provenientes de ambos pueblos.

En el siglo XVII a de C. se produce un apogeo de la cultura mesopotámica durante el reinado de Hamurabi (1728-1686) que instala la capital en Babilonia. El brillo alcanzado hizo que con el nombre de civilización babilónica se englobe a la súmero - acadia, cronológicamente anterior.

Las tierras fértiles de la Mesopotomia fueron siempre codiciadas por otros pueblos lo que imposibilitó la duración de la paz. En el siglo -VII toda la mesopotamia quedó en poder de un pueblo: los asirios.

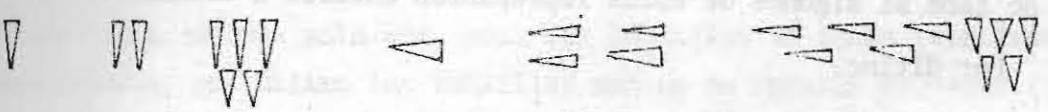
Pese a las sucesivas dominaciones la cultura sumeria se mantuvo dominante e influyó poderosamente. Así como hoy la civilización occidental sigue siendo una cultura greco-latina durante todos esos milenios la civilización mesopotámica se mantuvo súmera.

Los súmeros idearon una escritura que efectuaban con cuñas sobre la superficie húmeda de tablas de arcilla y que recibió el nombre de escritura cuneiforme, esas tablillas se dejaban secar al sol y posteriormente se las sometió a cocción. A partir de fines del siglo XIX las excavaciones arqueológicas han logrado una formidable cantidad de dichas tablillas entre las cuales alrededor de medio millar son matemáticas. Muchas de ellas pertenecen a la época del reinado de Hamurabi (con una incertidumbre de dos siglos) y otras son posteriores. Algunas se fechan en el tercer milenio.
Lamentablemente las tablillas no tienen fecha y su antigüedad debe determinarse por el estrato donde fueron halladas pero como por otra parte, muchas de ellas fueron logradas por excavaciones clandestinas se ha per

dido también esta posibilidad. Por último, como esas tablillas fueron vendidas a distintos museos resulta ahora que de pronto una tablilla que se encuentra en Filadelfia se continúa en otra que se encuentra en Londres o en Constantinopla. La labor de los arqueólogos, historiadores y científicos se transforma así en un tremendo rompecabezas, pero los logros seguramente compensan esos esfuerzos. Los sorprendentes conocimientos matemáticos de los pueblos mesopotámicos son una prueba de ello.

Como dijimos el sistema de numeración súmero fue de base mixta, diez y sesenta, pero el fundamental era el segundo, así por ejemplo no había símbolo para el 100, ni el 1000 pero sí lo había para 3600; 216000 etc.

Veámos algunos ejemplos:



1 2 5 10 40 56

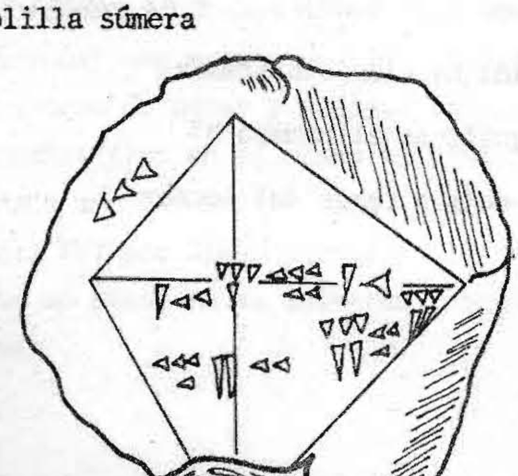
pero también

 puede significar: $1 \times 60 = 60$, o bien $1 \times 60^2 = 3600$, o bien $1 \times 60^{-2} = \frac{1}{3600}$ etc.

 puede significar: $10 \times 60^3 = 2.160.000$, o bien $10 \times 60^{-3} = \frac{10}{260.000}$ etc.

Como ya mencionamos anteriormente la carencia del cero para indicar la posición que ocupa el símbolo introduce una ambigüedad que debe ser salvada por el contexto.

Veamos una tablilla súmera



En esta tablilla aparecen tres números, uno sobre uno de los lados, uno sobre una de las diagonales y el tercero debajo de ella.

Podemos suponer que el que aparece sobre el lado representa la longitud de este. Entonces dicha longitud podría ser treinta (ó 30 x60, ó 30×60^2, ó 30×60^{-1}, ó 30×60^{-2}, etc. pero comenzamos por la hipótesis más sencilla)

Los otros dos números podrían ser:

b = 1, 24, 51, 10 (mediante comas separamos las unidades de cada orden)

No se sabe si algunos de estos representan enteros o fracciones.

Por último:

c = 42, 25, 35

¿Existirá una relación entre los tres números?

¿Cuál puede ser?

Si el lado del cuadrado es 30 su diagonal será

$30 \times \sqrt{2} = 30 \times 1{,}414214... = 42{,}4264...$

Ello sugiere que c puede ser la diagonal del cuadrado. Si consideramos que en c 42 es la parte entera, que separamos con un punto y coma resulta:

$$c = 42;\ 25{,}35 = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3600} =$$

$$= 42 + 0{,}41666... + 0{,}00972... = 42{,}42638...$$

La superposición ha sido confirmada.

¿Qué puede significar el número b?

Su análisis se deja a cargo del lector.

Del estudio de esta tablilla surge por lo tanto que los babilónicos poseían el conocimiento de la relación que liga a la hipotenusa con los catetos de un triángulo rectángulo, el hoy llamado teorema de Pitágoras, junto con la generalización a la diagonal del cuadrado y la obtención de $\sqrt{2}$ con notable aproximación.

La tablilla no nos da ninguna información, en cambio sobre los métodos aplicados (¿deductivos? ¿empíricos?) para hallar los resultados ni tampoco los mecanismos operatorios si los hubiesen. Esta situación es general ya que en ninguna de las tablillas halladas y traducidas se ha encontrado el fundamento que permite llegar a los resultados.

Sarton (6) indica que esto puede ser debido a que las tablillas no resultaban muy adecuadas para escribir largos desarrollos pues no permitían más que el trazado de dos o tres tipos de símbolos y obligaba a escribir la tablilla de una sola vez, pues las tablillas se secan relativamente rápidamente, por último las tablillas son en su mayoría pequeñas (la palma de una mano).

Sin embargo nos han llegados algunas ideas sobre la operatoria babilónica y eso debido a numerosas tablas de operaciones que seguramente eran usadas en los cálculos; situación lógicamente explicable debido al número que se había elegido como base del sistema de numeración. Nosotros debemos aprender hasta la tabla del nueve para efectuar los cálculos,los babilónicos hasta la tabla del 59, es claro que la posesión de tablas es aquí sumamente apropiada.

Hay muy variadas tablas sumerias: multiplicación, cuadrados, cubos, recírocos (para dividir), sumas de cuadrados más cubos de un mismo número, etc. Las tablas de recíprocos llegaban a números muy grandes, del orden de 60^{19}.

Los súmeros fueron entonces hábiles calculistas que idearon un sistema de numeración posicional que manejaron admirablemente y que ligaron íntimamente con su sistema de pesas y medidas con lo que podían expresar los múltiplos y submúltiplos en el mismo sistema. Esto es tanto más notable si se considera que en Occidente se llegó recién a concebir sus ventajas en el siglo XVI por Simón Stevin y que recién a partir de la Revolución Francesa se pensó en su universalización sin haber aún finalizado. Dice Sarton:

"Los viejos sumerios fueron más coherentes que muchos de nuestros contemporáneos que aún insisten en defender la metrología inglesa en un mundo decim[al]. Advertido esto, se hace algo difícil considerar a los primeros como primitivos o a los últimos como realmente civilizados" (6).

Pero la matemática babilónica no se agota en su sistema de numeración, Si no fuese un anacronismo podría considerárselos como buenos algebristas.

En efecto entre las numerosas cuestiones resueltas pueden mencionarse: resolución de ecuaciones lineales, de ecuaciones lineales simultáneas con muchas incógnitas, ecuaciones cuadráticas (para las cuales poseían fórmulas resolventes) como lo muestra el siguiente ej. tomado de Aaboe (7)

'He sumado el área a los 2/3 del lado de mi cuadrado y el resultado es 0;35. Tome usted 1 por coeficiente. Dos tercios de 1, el coeficiente es 0;40. La mitad del resultado 0;20 lo multiplica por sí mismo y obtiene 0;6,40 que añade 0;35 y esta suma 0;41,40 tiene a 0;50 por raíz cuadrada. 0;20 que ya ha multiplicado usted por sí mismo lo resta de 0;50 y 0;30 es el lado del cuadrado".

Si seguimos paso a paso el enunciado resulta.

He sumado el área y los 2/3 del lado de mi cuadrado y el resultado es 0;35 $\quad x^2 + \frac{2x}{3} = 0;35$

Dos tercios de 1 "el coeficiente" es 0;40 $\quad \frac{2}{3} = \frac{40}{60} = 0;40$

de donde en nuestro simbolismo nos queda planteada la ecuación:

$$x^2 + 0;40x = 0;35$$

Los pasos siguientes nos llevan a expresar:

$$x = \sqrt{\left(\frac{0;40}{2}\right)^2 + 0;35} - \frac{0;40}{2} = 0;30$$

Es decir la fórmula resolvente para obtener la raíz positiva de la ecuación cuadrática.

El ejemplo anterior no debe hacer pensar que desconocieran los números negativos, por el contrario supieron manejarlos. Otra vez la comparación con la tardía aceptación por occidente (Descartes los consideraba "raíces falsas" en el siglo XVII) no puede menos que admirarnos.

Pero no acaban aquí sus logros. Sarton comenta un problema que aparece en una tablilla donde se busca averiguar el tiempo en que una suma de dinero colocado al 20% a interés compuesto se duplica. La ecuación expotencial a que hoy llegaríamos $(1 + 0,20)^x = 2$ tiene por resultado el mismo al que llegó el hábil calculista sumerio (3,80 o sea 3 años y 4/5).

¿Cómo llegó a esta solución? No lo sabemos. Pero en cambio conocemos que utilizaron el llamado método de la falsa posición o regula falsis que fue usada también por muchos otros pueblos para resolver ecuaciones.

El método consiste en suponer un valor para la incógnita, que se elige convenientemente y luego obtener el verdadero valor mediante una proporción.

Por ejemplo: si tenemos

$x + \frac{x}{3} = 16$ podemos suponer $x_o = 3$, en cuyo caso resultaría

$$x_o + \frac{x_o}{3} = 4$$

y como $\frac{x}{x_o} = \frac{16}{4}$ resulta $x = 12$ solución de la ecuación dada.

Es método de resolución es claramente empírico y muy cercano al método de ensayo-erro.

En realidad es muy probable que muchos de los resultados obtenidos hayan nacido por procedimientos empíricos. La confección de tablas facilitó el descubrimiento de ciertas regularidades y permitió la resolución de algunos tipos de problemas como por ejemplo la resolución de algunas ecuaciones de tercer grado a partir de tablas en los que aparecen los valores de $n^3 + n^2$ para n desde 1 hasta 30. El lector podría confeccionar una de estas tablas para n desde 1 hasta 10 y calcular mediante ella una de las raíces de la ecuación.

$x^3 + 2x^2 - 3136 = 0$ o resolver un problema que aparece en una de las tablillas (de alrededor del -1800) que con el símbolo actual implica resolver el sistema:

$$\begin{cases} XYZ + XY = \frac{7}{6} \\ Y = \frac{2X}{3} \\ Z = 12X \end{cases}$$

Como ya hemos dicho en los documentos que nos han llegado no se da cuenta de los procedimientos seguidos para descubrir las fórmulas ni si se emplea algún método deductivo. Es muy probable que a muchos resultados se haya llegado mediante sucesivas aproximaciones obtenidas trabajando sobre situaciones concretas y en forma empírica. Ello explicaría la aparición en algunos casos de fórmulas totalmente equivocadas o groseras aproximaciones. Así en un caso se da como fórmula para hallar el área de un cuadrilátero de lados a,b,c,d (dados en ese orden) la siguiente $A= \frac{(a+c)\ (b+d)}{4}$ que sólo es válida en el caso que el cuadrilátero sea rectángulo. Esta fórmula muestra la tendencia a obtener los resultados mediante el procedimiento de efectuar promedios que daban resultados más o menos aproximados. Por otro lado y como ejemplo de aproximaciones poco refinadas digamos que los babilonios utilizaron para π el valor aproximado 3, valor que según la Biblia, era el que tomaban los hebreos.

"Hizo asimismo un mar de fundición, de diez codos de lado al otro, perfectamente redondo: su altura era de 5 codos y ceñíalo alrededor un cordón de treinta codos"

1° Reyes 7,23

(Un pasaje análogo puede leerse en 2° crónicas 4,2)

Es valor $\pi = 3$ les permitió resolver el siguiente problema, tomado de una tablilla de posiblemente alrededor del 2800 antes de Cristo:

"60 es la circunferencia, 2 es la flecha, hallar la cuerda"

El resultado está dado indicando paso a paso las operaciones a realizar como ya hemos mostrado en un ejemplo anterior, sin más explicaciones. En otra tabla aparece en cambio el valor $3\frac{1}{8}$ para π

Otra fórmula incorrecta usada por los babilonios es la que permite el cálculo de volúmen de una pirámide truncada de base cuadrada que se calcula como el producto de la altura por la semisuma de las áreas de las base, aunque en otra tablilla aparece como solución la que con nuestro simbolismo vendría dada por:

$$V = h\left[\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{1}{3}\,\frac{(a-b)^2}{2}\right]$$

Mencionemos finalmente que muchas de las tablillas tienen caracter evidentemente didáctico, habiéndose encontrado algunas divididas en dos partes, una de las cuales muestra que fue realizada por un hábil calígrafo mientras que la otra parte muestra el trazo indeciso y poco ágil de un posible alumno que copia textualmente la parte escrita por el maestro. Es este el antecedente más antiguo de la enseñanza de la matemática en escuelas, cuyos reglamentos también nos han llegado. Dicha enseñanza se efectuaba mediante tablillas especialmente concebidas a esos efectos en algunas de las cuales se presenta la particularidad de que todos los problemas llevan al mismo resultado casi seguramente con el propósito de permitir un autocontrol por parte del alumno, lo que sería a la vez el más lejano antecedente de nuestra costumbre de agregar el resultado de los ejercicios que se proponen en los textos actuales.

3. LA MATEMATICA EN EGIPTO

Según Proclo (419-485) "Los egipcios fueron los primeros en encontrar la geometría; y tomó su origen de las mediciones de áreas, porque las crecidas del Nilo al borrar los linderos de las propiedades la hicieron imprescindible" luego agrega: "y no tiene nada de sorprendente que la invención lo mismo en la geometría que en las demás ciencias, haya procedido de un menester, porque todo lo que el devenir arrastra lo lleva de lo imperfecto a lo perfecto. Así que, según esto, y por verosímil conjetura, el progreso ha debido ir de la sensación al razonamiento y de éste a la intelegencia noética. Lo mismo sucedió entre los fenicios; que del comercio y los contratos tomó su principio el exacto conocimiento de los números" (8)

Como vemos Proclo supone que la geometría ha tenido un origen práctico (estado imperfecto) y que posteriormente pasó a convertirse en ciencia (estado perfecto), también supone que esos orígenes están intimamente ligados con determinadas necesidades y en ello coincide con Herodoto quien dice del rey Sesistris:

"Este rey dividió la tierra entre todos los egipcios de tal manera que cada uno recibiera un cuadrilátero del mismo tamaño y que él pudiera obtener sus rentas de cada uno, imponiendo una tasa que debía ser pagada anualmente. Pero todo aquel de cuya parte el río hubiera arrastrado algo; tenía que notificarle lo ocurrido; entonces, él enviaba supervisores que debían medir en cuánto había disminuído la tierra para que el propietario pudiera pagar de acuerdo con lo que le restaba, en proporción a la tasa total impuesta.

De esta forma me parece que se originó la geometría, que luego pasó a Hellas, mientras que el reloj de doce divisiones del zodíaco y el cuadrado solar y las doce divisiones del día llegaron a Grecia no desde Egipto sino desde Babilonia"

Aristóteles, en cambio no es de la misma opinión ya que expresa:

"Por lo cual, además, una vez definidas ya la directriz propia de cada una de todas estas artes, aquellas ciencias, que no van encaminadas ni a los placeres de la vida ni a atender sus necesidades, vieron entonces la luz primera y precisamente en aquellos lugares en que los hombres podían dedicarse al ocio. Así ocurrió con las matemáticas, nacidas cerca de Egipto porque en aquel país los castas sacerdotales estaban libres de todo trabajo" (9).

Desde 1877 conocemos, gracias a la traducción al alemán, un valioso documento de la antigua matemática egipcia. El documento en cuestión es un papiro de 5,44 m de longitud y o,33 m de ancho conocido con el nombre de Papiro Rhind. Dice el primer párrafo que en él se dan "reglas para investigar en la naturaleza y para conocer todo lo que existe, todo misterio, todo secreto". De acuerdo a lo que continúa diciendo, se deduce que fue copiado por el escriba Ahmose en el siglo XVII antes de Cristo de un documento anterior (siglo XIX). Comienza con un tabla en la que las primeras ciencuenta fracciones de numerador dos y denominador impar aparecen escritas como sumas de fracciones de numerador uno.

Así por ejemplo, encontramos:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

....

$$\frac{2}{99} = \frac{1}{60} + \frac{1}{198}$$

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Siguen luego cuarenta problemas aritméticos que muestran que los egipcios manejaban las operaciones con fracciones, las progresiones geométricas, y diversos problemas que conducen a ecuaciones lineales de una incógnita. Siguen luego otros veinte problemas que tratan sobre determinación de áreas y volúmenes y por último trece problemas sobre cuestiones varias.

Del papiro se desprende que calculaban el área de un triángulo multiplicando la base por la mitad del lado y utilizaban para π un valor igual a 3,16.

Como ocurre en el caso de los babilónicos no tenemos conocimiento de cuáles fueron los procedimientos para obtener los resultados. Tampoco sabemos cuál fue la razón que los llevó a trabajar exclusivamente con fracciones de numerador uno.

En 1931 se ha publicado otro papiro que se conoce con el nombre de Papiro de Moscú. El Papiro de Moscú fue escrito en siglo XVIII antes de Cristo y contiene veinticinco problemas dos de los cuales son notables. De uno de ellos resulta que los egipcios utilizaban para el cálculo del volumen de una pirámide truncada, un procedimiento que demuestra conocían la fórmula $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ donde a y b son las longitudes de los lados de las respectivas bases y h la longitud de la altura.

El otro problema interesante es el cálculo de la superficie de un hemisferio.

Aparte de estos papiros existen otros menos importantes, uno de los cuales, Papiro de Berlín, también del siglo XIX lleva a la resolución de un sistema de dos ecuaciones, una de ellas cuadrática, con dos incognitas. De acuerdo a nuestra notación sería.

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 100 \\ y = 3/4x \end{cases}$$

que indirectamente sugiere el conocimiento del triplete 3; 4; 5. Sin embargo, no se puede asegurar el conocimiento de la hoy llamada Pitagórica de los triángulos rectándulos, por los egipcios.

4. CARACTERISTICA DE LOS CONOCIMIENTOS PREHELENICOS

Ha habido muchos que han sostenido que la ciencia recién comienza con los griegos. Aparte del hecho de que resulta difícil delimitar precisamente el significado de ciencia, los documentos que se han conocido en nuestro siglo, tablillas, papiros, muestran que el arsenal de conocimientos de estos pueblos fue sin lugar a dudas muy importante.

Es claro que estos conocimientos no alcanzaron la sistematización a la que accederían los griegos ni tenían el caracter deductivo de los trabajos de Euclides y Arquímedes. Al querer dar las características de los conocimientos prehelénicos corremos el peligro de ser tomados demasiado al pie de la letra. Las síntesis suelen transformar lo que quiere ser un retrato en una caricatura pues como ésta acentúa y a la vez deforma los rasgos prominentes y atenúa o ignora los otros. Advertido el lector sobre ello entre las características más notables de los conocimientos prehelénicos encontramos que su obtención parece ser lograda por medios empíricos. En las soluciones se conforman con aproximaciones (a veces bastante groseras). En general los problemas surgen de situaciones concretas y de índole práctica. El grado de abstracción no es demasiado elevado y en la resolución de problemas no aparecen ni justificaciones deductivas ni generalizaciones. Casi siempre la justificación está basada en la evidencia sensible, no se dan los "por qué" si no los "como" se obtienen los resultados.

La crítica anterior, se comprende, puede realizarse desde la perspectiva actual, a cuarenta o más siglos de distancia y no debe desmerecer los extraordinarios logros de todos estos pueblos. Por lo demás, insistimos, de cada una de las características señaladas podría citarse uno o más contraejemplos, pero con prudencia pueden ser más o menos aceptables como descripción de esos primeros monumentos en el saber matemático. Según Herbert Read (3) aún los primeros logros artísticos son una respuesta a las necesidades vitales, si el arte, la más desinteresada de las actividades humanas, nace en función de necesidades vitales.

¿Puede extrañar que esa misma situación se dé en la ciencia?

Sarton (6) refiriéndose a los egipcios pero en párrafo que también puede aplicarse a los babilónicos dice:

"Por su parte, los matemáticos egipcios se hallan al pie de una escala que nosotros estamos aún subiendo. Su posición fue necesariamente baja, y si la nuestra es algo más alta, ello se debe en parte a los esfuerzos que les adeudamos: fueron, en efecto, nuestros primeros guías y nuestros primeros maestros".

TRABAJO PRACTICO N° 1

1. "La ciencia se enseña generalmente de una manera demasiado sintética. Es posible que este método sea el mejor para el estudiante medio que pasivamente acepta la autoridad del maestro. Para quellos cuya mente filosófica está más despierta, dificilmente pueda satisfacerse con tal alimento, cuya preparación les es desconocida. En lugar de sentirse apaciguados por un orden armonioso y una ciencia perfecta, están devorados por dudas y perplejidades:"¿Por qué el maestro nos enseña así?. ¿Por qué ha elegido esas definiciones? ¿Por qué?". No es que a ellos les repugnen los métodos sientéticos; al contrario, probablemente esos jóvenes serían los primeros en admirar la profundidad y elegancia de tal enseñanza en cuanto captaran por experiencia propia su conformidad lógica, su generalidad y su economía. Pero ante todo desean saber "como fue construido todo eso", y sus mentes retroceden instintivamente ante un dogmatismo que les resulta todavía arbitrario.

Y se mantiene arbitrario hasta tanto no se expliquen las razones que justifican y tornan natural un ordenamiento con preferencia a los demás. Ya sé que no es fácil enseñar de esta manera a principiantes, pero por lo menos han de ser atemperadas las deficiencias de los métodos actuales; no pido más que eso.

Nada sería más útil desde este punto de vista que elaborar manuales en los que la ciencia se expusiera en orden cronológico; en verdad, es ésta una tarea importante de la que Ernest Mach nos ha dado algunos modelos admirables. Tales textos no serían empleados para un estudio elemental, a menos que los discípulos utilizaran al mismo tiempo otros compuestos según líneas dogmáticas. A los estudiantes se les pediría estudiar estos últimos y leer los anteriores. Pero en mi opinión estos manuales históricos colocarían a los profesores en la buena senda, permitiéndoles aclarar sus lecciones y hacerlas más intuitivas. La enseñanza oral, más maleable que la enseñanza escrita puede admitir fácilmente breves disgresiones históricas. ¿Los estudiantes no recordarían más fácilmente las verdades abstractas que le suministran en contidades crecientes, si su memoria captara algunos hechos vivos?

Pero eso no agota la importancia pedagógica de la historia de la ciencia. Nada es más adecuado para despertar el sentido crítico de un discípulo y poner a prueba su vocación que esbozarle en detalle la historia completa de un descubrimiento, mostrarle los obtáculos de toda índole que constantemente se levantan en el camino del inventor, mostrándole como supera a unos y evita a otros, y finalmente cómo se acerca cada vez más a la meta sin lograrla jamás. Además, la iniciación histórica curaría a los jóvenes estudiantes del desgraciado hábito de pensar que la ciencia comienza con ellos.

Buenas biografías científicas también tienen un gran valor educativo; ellas conducen la imaginación del adolescente hacia la mejor dirección. Bigrafías sinceras y críticas son contribuciones excelentes a la historia de la humanidad. ¿No trabajarían los estudiantes con mejor ánimo y más entusiasmo, no tendrían un respeto más profundo hacia la ciencia si conocieran algo más acerca de los héroes que la han construído,piedra por piedra a costa de tanto sufrimiento, lucha y perseverancia? ¿No estarían en mejores condiciones para emprender algún trabajo de investigación desinteresado? O, por lo menos, ¿no apreciarían mejor la grandeza y la belleza de aquel edificio si compartieran, en mayor o menor medida la alegría y la embriaguez de aquellos que lo construyeron entre continuas dificultades?

Finalmente la historia de la ciencia -más que la historia ordinaria- es una educación general por sí misma. Nos familiariza con las ideas de la evolución y de la trasformación continuas de las cosas humanas; nos hace comprender la naturaleza precaria y relativa de nuestros conocimientos; agudiza nuestro juicio; y nos muestra que, si las hazañas de la humanidad concebida como un todo son verdaderamente grandes, la contribución de cada uno de nosotros, por importante que sea, es pequeña, y que aún el más grande de nosotros ha de ser modesto. Ayuda a los científicos a no ser meros científicos, sino también hombres y ciudadanos".

George Sarton, La vida de la ciencia, Espasa-Calpe.

a) Escriba una lista de temas históricos que cree podrían ser trata dos en manuales como los que propone Sarton.

b) Prepare una cartilla histórica sobre "Sistemas de numeración" para primer año.

2. Investigar el significado de las tabillas babilónicas siguientes:

a) "Uno de los lados de un trapecio es 30, el segundo lado es 30, el ancho superior es 50, el ancho inferior es 14. 30 veces 30 es 15,0. Reste 14 del 50 y el residuo es 36. La mitad es 18. 18 veces 18 es 5,24. Reste 5,24 de 15,0 y el residuo es 9,36. ¿Qué número debo multiplicar por sí mismo para obtenr 9,36?. 24 veces 24 es 9,36. 24 es la línea de separación. Sumamos 54 y 14, los anchos, y el resultado es 1,4. La mitad es 32. Multiplicamos 24, la línea de sepación, por 32, y el resultado es 12,48".

b) "60 es la circunferencia, 2 es la flecha, hallar la cuerda. Entonces el doble de 2 es 4. Quite 4 de 20, obtiene 16. El cuadrado de 20 es 6,40. El cuadrado de 16 es 4,16. Quite 4,16 de 6,40 obtiene 2,24. Halle la raíz cuadrada de 2,24. 12 la raíz cuadrada, es la cuerda. Tal es el procedimiento."
(Recuerde que tomaban $\pi = 3$. Esta tablilla es de aproximadamente el 2600 a de C).

c) "He multiplicada la longitud y la anchura obteniendo 10,0. He multiplicado por si misma la diferencia entre el largo y el ancho y ese resultado multiplicado por 9 da una superficie equivalente al cuadrado del largo. ¿Cuáles son el largo y el ancho? La raíz de 9 es 3, toma 3 como el largo y el ancho será 2. El producto de 3 por 2 es 6. Divide 10,0 por 6 obtendrás 1,40. La raíz de 1,40 es 10. Como se tomó 3 para el largo, éste será 10 por 3, es decir 30, y por tanto el ancho será 20."

d) "He multiplicado la longitud y la anchura, obteniendo la superficie, he añadido a la superficie el exceso de la longitud sobre la anchura y el resultado es 3,3. Además he sumado la longitud y la anchura y obtuve 27. ¿Cuál es la longitud, la anchura y la superficie? Agrega a la suma los lados 3,3 y obtendrás 3,30. Suma 2 a aquella suma, obtendrás 29 cuya mitad es 14; 30 de la que tomarás el cuadrado 3, 30; 15 y le restarás 3,30. Del resto 0;15 tomarás su raíz 0;30 que sumada al 14;30 de el lado mayor 15, mientras que restada a ese valor de 14, al cual restándoles las dos unidades agregadas te permitirá obtener el lado menor 12 y por tanto el área 3,0".

3. Demostrar que la fórmula $A = \frac{(a+c)\,(b+d)}{4}$ que según los antiguos babilonios permite obtener el área de un cuadrilátero de lados a,b,c, d, en ese orden, da una aproximación por exceso para los cuadriláteros no rectángulos.

4. En el Papiro Rhind el área de un círculo es tomada como igual a la del cuadrado cuyo lado es $\frac{8}{9}$ del diámetro del círculo. Mostrar que ello equivale a tomar $\pi = 3{,}1604$.

5. Resolver por el método de falsa posición el siguiente problema perteneciente al Papiro Rhind :
"Una cantidad, sus $\frac{2}{3}$, su mitad y su séptima parte, todo sumado, es 33. ¿Cuál es la cantidad?".

6. En el Papiro de Moscú se encuentra el siguiente texto:
"Si dices: Una pirámide truncada es de 6 de altura, 4 de base y 2 en lo alto. Toma el cuadrado de 4 que es 16. Toma el doble de 4, resulta 8. Toma el cuadrado de 2, resulta 4. Suma todo el 16, el 8 y el 4, resulta 28. Toma un tercio de 6, resulta 2. Toma 28 dos veces, resulta 56. Ved, es 56. La hallaste bien".
Interprete el problema y evalúe el resultado.

7. Describa un procedimiento empírico que permita conjeturar que:
   a) Para un perímetro dado el cuadrado es el rectángulo del área máxima.
   b) La suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos.
   c) El volumen de un cono circular recto es un tercio del de un cilindro circular recto de bases y altura respectivamente congruente con las del cono.

8. Comentar los siguientes pasajes:

a) "En las lenguas azteca y malásica los nombres de los números significan literalmente: "una piedra, dos piedras, tres piedras" y así sucesivamente; en el Pacífico Sur, análogamente usan "una fruta, dos frutas, tres frutas" y los javaianos, usas "un grano, dos granos y tres granos".

D.E. Smith, History of Mathematics, Dover

b) "En la misma obra (china) se encuentra enunciado este otro problema: Una mujer embarazada de 29 años espera el nacimiento de su hijo para el noveno mes del corriente año, ¿Cuál será el sexo del niño? No quiero defraudar al lector sobre la respuesta que espera; Tomad 49, agregad el mes de la concepción, sacad la edad de la madre, luego el ciclo 1, la tierra 2, el hombre 3, las estaciones 4, los elementos 5, las leyes 6, las estrellas 7, los vientos 8 y las provincias 9; si el resto es impar, nacerá un varón si es par una mujer".

Gino Loria, Historia Suscinta de la Matemática, Ibero-Americana

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(1) Jean Piaget y Alina Szeminska. Génesis del número en el niño - Guadalupe.

(2) Maurice Lehenhardt ; Do Kamo. Eudeba

(3) Herbert Read. Imagen e Idea. Fondo de Cultura Económica

(4) Bertrand Russell. Introducción de la Filosofía Matemática - Losada

(5) Tobías Dantzig. Número el lenguaje de la ciencia. Librería del Colegio.

(6) George Sarton. Historia de la Ciencia. Eudeba.

(7) Asger Aaboe. Matemáticas: Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo. Random-Hause-Norma.

(8) Juan D.García Bacca. Textos Clásicos para la Historia de la Ciencia. Universidad Central de Venezuela.

(9) Aristóteles. Obras, Metafísica 981 b 23. Aguilar.

Lecturas recomendadas para el punto b del problema 1.

James Newman. Sigma: El mundo de la Matemática. Grijalbo Tomo 4: De los números a los numerales y de los numerales al cálculo, por D.E.Smith y J.Grinsburg.

Margaret F.Willdering. Conceptos matemáticos un enfoque histórico. CECSA.

La diagramación de esta publicación fue realizada por el personal de Graficación y Diseño contratado por la Organización de los Estados Americanos, e impreso en el Servicio Reprográfico de la Dirección Nacional de Investigación, Experimentación y Perfeccionamiento Educativo.

(DIEPE)

Julio de 1977