Ministerio de Educación y Justicia
República Argentina

Organización
de los Estados Americanos

DIRECCION NACIONAL DE EDUCACION SUPERIOR

Curriculum Académico Maestros de Educación Básica

MATEMATICA 1

Buenos Aires

República Argentina

1988

NOMINA DE AUTORIDADES

ISTERIO DE EDUCACION Y JUSTICIA

istro de Educación y Justicia

Dr. Jorge Sábato

retario de Educación:

Dr. Adolfo Stubrin

secretario de Gestión Educativa:

Dr. Juan C. Pugliese (h)

ector Nacional de Educación Superior y del Proyecto:

Dr. Ovide J. Menin

directora Nacional de Educación Superior:

Prof. Sulma Guridi Flores

rdinadora del Proyecto:

Prof. Emilce E. Botte

RETARIA GENERAL DE LA ORGANIZACION DE LOS ESTADOS AMERICANOS

ector del Departamento de Asuntos Educativos:

Dr. Getulio Carvalho

e de la División de Mejoramiento de Sistemas Educativos:

Prof. Luis Osvaldo Roggi

e de la División de Planeamiento, Investigación y Evaluación:

Dr. Osvaldo Kreimer

resentante de la Secretaría General de la O.E.A. en la Argentina:

Dr. Benno Sander

rdinador del Area Educación, Ciencia y Cultura:

Sr. Guillermo Corsino

b) Visitas de especialistas a las instituciones educativas.

El contacto directo entre los especialistas que han intervenido en la organización de las áreas y los docentes que forman parte de las instituciones educativas seleccionadas brindará el marco adecuado para la identificación de consensos y disensos que permitirán los ajustes necesarios.

En estos encuentros -verdaderas jornadas de trabajo- usted podrá requerir la explicitación de todos aquellos aspectos que estime convenientes. Su participación y la nuestra, posibilitarán el cambio en la formación docente que todos anhelamos.

c) Consultas telefónicas o presenciales.

Hemos previsto estas consultas para ofrecerle la posibilidad de intercambio con los especialistas en cualquier momento del desarrollo del proyecto.

Usted no necesitará esperar las visitas programadas, sino que podrá comunicarse con nosotros en los siguientes horarios:

Area de Ciencias Naturales	: Jueves de 14 a 17 horas
Area de Ciencias de la Matemática	: Miércoles de 9 a 12 horas.
Area de Ciencias del Lenguaje	: Viernes de 14 a 17 horas.
Area de Ciencias Sociales	: Miércoles de 14 a 17 horas.
Area de Ciencias de la Educación y Talleres	: Martes de 9 a 12 horas.

Teléfonos: Directo 41-2149 Conmut. 44-4888/42-4550 al 59 Int. 437

Si usted está cerca del Palacio Pizzurno y prefiere visitarnos personalmente, puede hacerlo en el mismo horario.

PRESENTACION

Estimado docente:

Pretendemos clarificar algunos aspectos organizativos respecto de la implementación del proyecto que ha previsto diversas formas de apoyo:

a) materiales impresos y audiocassettes
b) visitas de especialistas a las instituciones educativas
c) consultas telefónicas o presenciales

Le explicaremos en qué consiste cada una de ellas.

a) Materiales impresos y audiocassettes

Usted ya ha recibido el Curriculum para la formación de maestros de Educación Básica y las reflexiones acerca de algunos aspectos de la Política Educativa y principios didácticos en los que se apoya el nuevo Diseño Curricular.

Este material constituye el primer documento de trabajo correspondiente a su área y en él le ofrecemos:

- la fundamentación del área
- los módulos de aprendizaje y
- el desarrollo de algunas unidades.

Oportunamente, recibirá otros documentos impresos y también los audiocassettes elaborados por los especialistas del área, que lo orientarán en su trabajo.

Para unificar el uso de los conceptos propios de la Didáctica, utilizados en la estructuración de este Plan de Estudios, pensamos que es necesario explicitar el significado de algunos de ellos.

¿Qué es un módulo de aprendizaje?

Como ya hemos adelantado en el anteproyecto, el módulo se asemeja a los antiguos "centros de interés".

Podemos definirlo de la siguiente manera:

Módulo de Aprendizaje es una totalidad y no supone sólo un tópico de contenidos, sino una estructuración de objetivos, actividades, experiencias y recursos, planificados alrededor de esos contenidos e incluye también consideraciones acerca de su aplicación por los individuos que forman parte del proceso.

Desde el punto de vista didáctico constituye una unidad de convención que integra otras partes de proporciones menores que son las unidades didácticas.

Organizar un módulo va mucho más allá de una simple ordenación de contenidos de enseñanza, significa considerar otros elementos más sobre los que habrá que decidir, estudiar las consecuencias y evaluar su influencia en los resultados.

Para la interpretación y desarrollo de un módulo, se necesita analizar los propósitos del plan de estudios, sus fundamentos, las áreas de formación en que está organizado, las nociones básicas de cada una de estas áreas, con el fin de obtener un mapa curricular que permita visualizar los diferentes contenidos de cada área con el fin de evitar la repetición y favorecer la integración de los aprendizajes.

Esta concepción implica aceptar que un docente forma parte de un equipo de trabajo, aún cuando en muchos casos, lamentablemente esté designado en pocas horas cátedra.

Esta interpretación del plan de estudio conjuntamente con las orientaciones de cada una de las áreas, permitirá a cada docente:

. Reelaborar la fundamentación de cada módulo de aprendizaje de acuerdo con la realidad de la escuela.
. Determinar los propósitos más generales del mismo.
. Fundamentar la selección y secuencia de unidades didácticas.
. Explicitar el punto de vista metodológico.

La anterior tarea permitirá disponer de un marco referencialen el cual se sustentarán las unidades didácticas para su organización y desarrollo.

¿Qué es una unidad didáctica?

El concepto de unidad didáctica, por su estructura, no difiere del de módulo de aprendizaje, sino por su amplitud y alcance. Ellas son partes más pequeñas del módulo, interrelacionadas entre sí, que nuclean y estructu--

ran también un conjunto de objetivos,contenidos, actividades, recursos y criterios de evaluación. Generalmente, la fuente principal de donde surgen los temas nucleares de las unidades son los contenidos de las disciplinas o áreas. Las unidades se centran en los esquemas básicos, conceptuales del curso y tanto su estructura como su secuencia se condicionan fundamentalmente por el modo de aprender de los destinatarios, la característica de las áreas y la naturaleza de los objetivos que se hubieran seleccionado.

Es conveniente darles forma definitiva a las unidades después que se haya tenido contacto con los alumnos y detectado sus características, intereses, posibilidades, así como también después de haber dialogado acerca de la fundamentación del área y del módulo.

Sólo entonces la unidad tomará su forma que no será definitiva, porque su característica esencial es la apertura y la flexibilidad.

Podemos definirla de la siguiente manera:

> **La Unidad es un proyecto que se crea y recrea en su implementación.**

Es conveniente al estructurar la unidad considerar los siguientes aspectos:

- objetivos: si bien se trata de objetivos específicos de la unidad de acuerdo con el enfoque de este plan de estudio, se descarta todo planteo operacionalizador que involucre la fragmentación del proceso de aprendizaje, y que aísle las conductas del educando desvirtuando la integración que las caracteriza. Considerar las conductas como integradas y el proceso de aprendizaje como algo complejo en sí mismo, nos acerca al enfoque del plan de estudio propuesto y nos asegura la coherencia entre éste y el hacer didáctico de cada uno de los docentes.

- contenidos: están constituidos por los datos históricos y recientes del saber científico, en nuestro caso distribuido por áreas. Estos contenidos podrán ser reelaborados en forma de problema, proyecto, siempre y cuando apunten al tema central del módulo. Es necesario, para su selección tener en cuenta criterios de validez, adecuación al nivel evolutivo de los alumnos y significación social.

- actividades: no es conveniente una descripción puntual de las mismas, sino la mención de aquellas que resulten básicas para el logro de los objetivos, de acuerdo con la propuesta de contenidos y la orientación metodológica.

- evaluación: se explicitarán los requisitos mínimos que el alumno debe cumplir para aprobar la unidad.

Al finalizar cada unidad es valioso registrar los resultados, problemas, aciertos, desaciertos, etc. que fueron surgiendo en el desarrollo de la misma.

Es interesante incluir también opiniones de los alumnos acerca de la experiencia vivida. Esto ayuda a la retroalimentación del docente y le brinda material para realizar ajustes en las sucesivas planificaciones didácticas enriqueciendo con estos aportes su trabajo con el equipo docente.

En la presente propuesta curricular para la formación de maestros, el objetivo general es "brindar las bases para la formación permanente de un educador capaz de abrevar en la identidad cultural de nuestro pueblo y de transmitirla mediante un sistema democrático de adecuación histórica de dichos saberes a la realidad social argentina y latinoamericana".

Si bien en la actualidad nuestra sociedad está tecnológicamente poco desarrollada, es una aspiración común en nuestro subcontinente, el devenir de una cultura de base científica que no implique deshumanización. En esta deseada transformación la función que cumple el modo de construcción del conocimiento matemático, resulta decisiva.

En este sentido, la formación matemática de los maestros de educación básica no puede limitarse a abordar contenidos del área disciplinar específica, sino que debe atender a otros aspectos relacionados con la Didáctica de la Matemática. Entendida la Didáctica como el proceso dialéctico entre:

- las teorías del aprendizaje y las de la enseñanza;
- la práctica pedagógica y, fundamentalmente:
- la reflexión sobre la experiencia que realimenta la teoría.

Sólo se puede hablar de Didáctica cuando se hace referencia a alumnos reales puestos en relación de aprendizaje escolar bajo la acción de un agente educador determinado.

Se trata, entonces, de que los futuros maestros, a medida que progresan en sus conocimientos matemáticos reflexionen sobre sus propios aprendizajes y los comparen con los de sus alumnos.

¿Cuál es nuestra propuesta?

Las nociones matemáticas, aún las más elementales como la noción del número, son fruto de una construcción progresiva que se da a lo largo del desarrollo evolutivo. En este proceso las construcciones no se encadenan al azar sino que cada una se basa en las anteriores y prepara para las siguientes. Pero hay un largo camino por recorrer entre la utilización espontánea y no conciente de las estructuras lógico-matemáticas y la toma de conciencia de tal utilización. Esta toma de conciencia es ineludible en una formación matemática que abra a los jóvenes el acceso al pensamiento operatorio formal.

De ahí la necesidad de que toda la actividad del alumno futuro maestro converja, desde el inicio de su formación, hacia ese objetivo y a través de una metodología coherente que incluya:

- el análisis de redes conceptuales que pongan en evidencia los vínculos entre los distintos contenidos del saber matemático correspondiente al curriculum de la escuela primaria;
- la instrospección en busca de los propios caminos para acceder a los conocimientos matemáticos elementales, destacando las dudas y los propios conflictos en su relación personal con ellos;
- la reconstrucción de aprendizajes a partir del uso de material concreto, acompañado de sistemas de representación adecuados y poniendo el énfasis en la reflexión sobre las acciones para dar lugar a su internalización;
- la lectura y reflexión sobre investigaciones conocidas en el campo de la Psicología del Aprendizaje de la Matemática y de la Psicología Genética;

- la exploración de situaciones individuales de niños de escuela primaria que hayan accedido a un cierto aprendizaje o que se encuentren en distintos grados de elaboración o que evidencien su carencia;
- el diseño de micro-experiencias didácticas, su aplicación en niños reales y su evaluación tanto desde el punto de vista del logro del aprendizaje como desde la dinámica de la relación docente-alumno puesta en juego;
- el relevamiento de situaciones del medio sociocultural a las que los conocimientos matemáticos puedan ayudar a esclarecer.

¿Qué implican estos cambios para los alumnos?

Todo lo expuesto apunta a proveer al alumno, futuro maestro, de la experiencia necesaria para el dominio de los aspectos científicos, psicopedagógicos y socioculturales que requiere la función de educador en el área de la Matemática.

Sólo la propia vivencia de un aprendizaje constructivo le permitirá asistir lúcidamente a los procesos de construcción de las nociones matemáticas en sus propios alumnos. Ello significará, en muchos casos, la reestructuración de los propios esquemas rígidamente ligados a mecanizaciones; en otros, al descubrimiento de posibilidades insospechadas respecto de la comprensión de nociones y, en general, la pérdida de prejuicios distorsionantes de la buena relación entre el que aprende Matemática y los objetos de conocimiento que ella propone.

Podríamos sintetizar esta fundamentación en los siguientes objetivos generales del área:

QUE LOS ALUMNOS:

- Adhieran a la propuesta de promover la comprensión de las nociones matemáticas, anteponiéndola al logro de cualquier mecanismo de automatización;

- Conozcan la trama construida por los aportes científicos, psicológicos y socioculturales sobre las nociones de la Matemática vigente en la educación primaria;

- Asuman la Didáctica de la Matemática como la convergencia ineludible de tres vertientes: la teoría, la práctica y la reflexión sobre problemas de aprendizaje propios y de los demás en su relación con objetos de conocimiento matemáticos;

- Elaboren estrategias para resolver los problemas de la implementación pedagógica del aprendizaje de la Matemática en la escuela primaria.

Estimado docente:

Como usted ya sabe, el nuevo currículo prevé para esta área los siguientes módulos:

MODULO 1: Cuantificación mediante el número natural.

MODULO 2: Cuantificación a través de la medida.

MODULO 3: El espacio matemático.

MODULO 4: Análisis de relaciones.

MODULO 5: El proceso de la deducción.

¿Por qué elegimos estos módulos?

Los contenidos del área Matemática han sido seleccionados tratando de armonizar tres criterios:

- el logocéntrico: que tiene relación con la estructura de la propia ciencia y, en tal sentido, permite la inserción de todos los temas del curriculum de la escuela primaria en alguno de estos módulos, en un ordenamiento coherente.

- el psicocéntrico: teniendo en cuenta al sujeto del aprendizaje que tendrá a su cargo el futuro maestro en su tarea profesional, aporta la necesidad del seguimiento de la adquisición de las nociones matemáticas desde un estado inicial de ausencia, a través de las distintas etapas del desarrollo evolutivo, hasta el logro de una total disponibilidad de la noción en el sujeto.

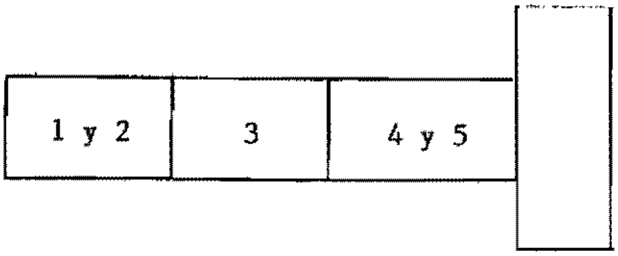
- el sociocéntrico: que tiene en cuenta la significatividad y relevancia social del conocimiento y permite reconocer, para cada noción matemática las posibilidades de uso y aplicación en la resolución de problemas reales.

En virtud de esas consideraciones: el punto de partida de la secuencia de módulos es la noción de número natural abarcando su inmersión en los campos aditivo y multiplicativo de las operaciones. Sigue la ampliación de este campo numérico al abordar la noción de medida ya que ella fundamenta la concepción del número racional. Con ellos, es posible la estructuración del espacio matemático, caracterizado por invariantes métricos, al que los niños llegan en un proceso que se ha iniciado con una concepción topológica, seguida por una concepción proyectiva.

Es en el análisis de relaciones donde caben las múltiples situaciones matematizables a que da lugar la enorme complejidad del medio circundante, y su estructuración a partir de los conocimientos relativos al número y al espacio.

Se reserva la culminación del ciclo al análisis de los procesos de la deducción cuya toma de conciencia implica para el joven futuro maestro haber alcanzado un tipo de pensamiento lógico-formal y significa introducirlo en la metodología propia de la Ciencia Matemática.

Se aconseja el siguiente esquema de distribución de los módulos:



El desarrollo de cada módulo implicaría considerar cuatro aspectos fundamentales:

- *El aspecto evolutivo:* En relación con el ritmo de aprendizaje individual y el referente sociocultural;

- *Experiencias en el aula de la escuela primaria:* Para asegurarse un contacto temprano con la realidad escolar;

- *Resolución de problemas:* Como actividad matemática fundamental que pone en juego una serie de estrategias elaboradas por el alumno y lo conduce a construir el conocimiento como una necesidad de dar respuesta a una situación novedosa.

- *El conocimiento matemático en sí mismo.*

Esperamos haber sido lo suficientemente claros en la explicación de esta secuencia. Si usted se pregunta acerca del grado de flexibilidad de estos módulos, debemos remitirlo al documento: **Curriculum Académico Maestros de Educación Básica** (Resolución 530/88). En la página 17 de esa publicación se aclara que los módulos son fijos, no así las unidades didácticas que los componen, cuya elaboración está a cargo de cada profesor para adecuar el proceso educativo a las necesidades propias de cada región.

Esta aclaración no pretende dejarlo solo; queremos colaborar con usted y esa es la razón del documento de trabajo que hoy tiene en sus manos.

¿Cuál será nuestra colaboración?

Evidentemente lo que usted ha leído hasta aquí le ofrece los **lineamientos generales** del proyecto y del área. Pensamos que el desarrollo analítico de alguna unidad podría serle útil para orientarlo, pues constituye un ejemplo del trabajo que deberá hacer usted con el resto de ellas.

Tenga presente que todo lo que se le brinda aquí no es más que una SUGERENCIA que no está reñida con ninguno de los aportes que usted seguramente hará para enriquecer este nuevo modelo curricular. Esperamos contar con su colaboración en todas las etapas de este proyecto.

MATEMATICA

UNIDAD 1

MODULO 1

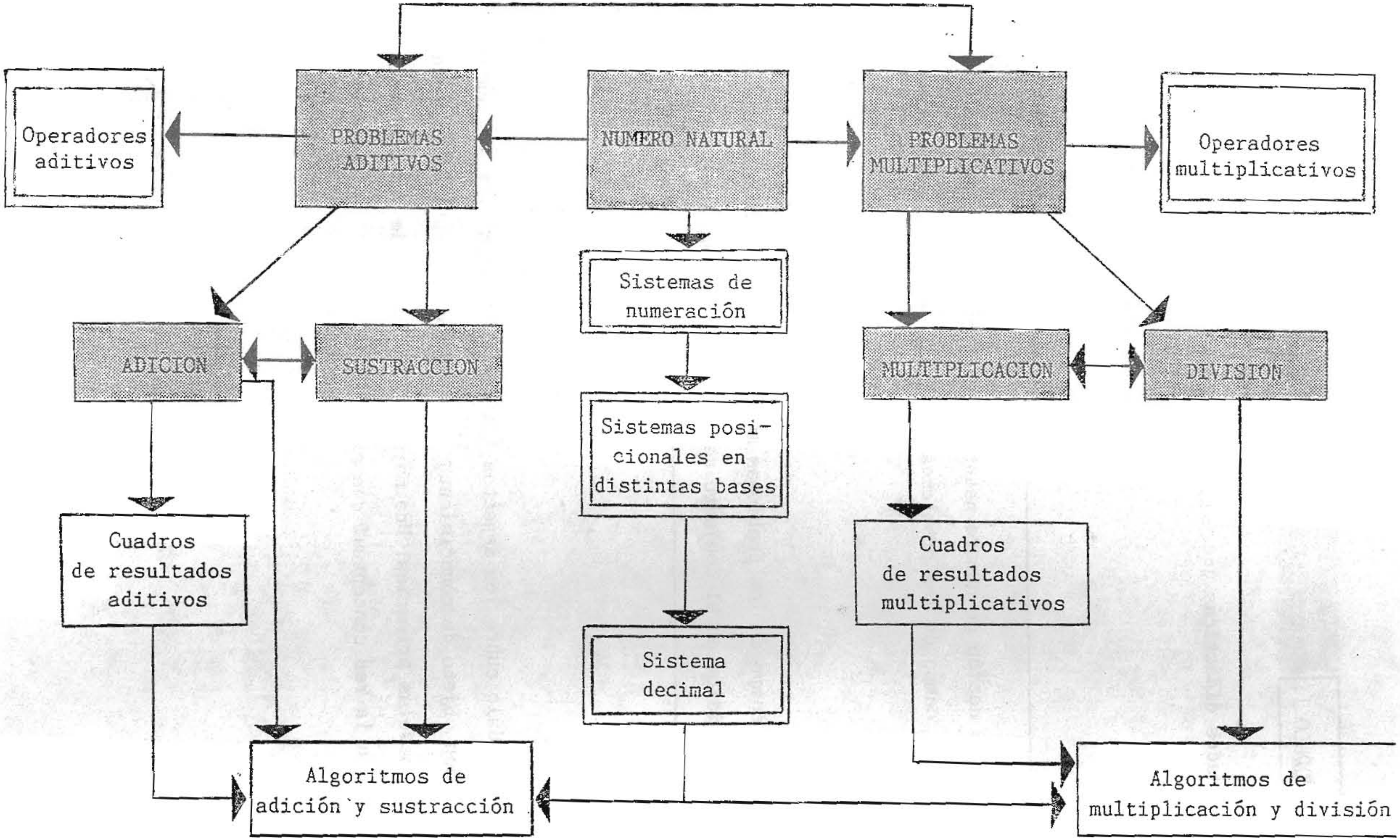
MODULO 1: Cuantificación mediante el número natural.

Las unidades didácticas que proponemos para integrar este módulo son:

UNIDAD 1: La noción de número natural y su expresión simbólica.
El campo de los problemas aditivos. Adición y sustracción.

UNIDAD 2: El campo de los problemas multiplicativos. Multiplicación y división en el conjunto de los números naturales.

Este primer módulo cubre los aspectos ligados a la aritmética del número natural, que son objeto de conocimiento en los grados del primero y segundo ciclo de las escuelas primarias. Una mayor explicitación de sus contenidos puede observarse en la red conceptual que sigue:


Operadores aditivos
PROBLEMAS ADITIVOS
NUMERO NATURAL
PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS
Operadores multiplicativos
Sistemas de numeración
ADICION
SUSTRACCION
MULTIPLICACION
DIVISION
Sistemas posicionales en distintas bases
Cuadros de resultados aditivos
Cuadros de resultados multiplicativos
Sistema decimal
Algoritmos de adición y sustracción
Algoritmos de multiplicación y división

¿Por qué proponemos estas unidades?

En el precedente ordenamiento conceptual, se observa que:

- se privilegian ciertos conceptos, entendidos como básicos: **número natural, problemas aditivos, adición, sustracción, problemas multiplicativos, multiplicación y división**; se trata de enfatizar la comprensión de cada una de esas nociones cuya autonomía y posibilidad de interrelaciones fundamentan el dominio de las operaciones; además, en el recorrido de las flechas queda clara la jerarquización de las nociones básicas entre sí la que, en particular, da prioridad a la discusión de los problemas aditivos o multiplicativos, por sobre el concepto mismo de cada una de las operaciones;

- hay nociones ligadas a la representación simbólica de los conceptos (ellas aparecen en recuadro doble) de modo que el alumno, futuro maestro, comprenda que sólo puede abordarse como elementos de un lenguaje propio para los alumnos de la escuela primaria;

- aparecen cuadros de resultados como un aspecto a considerar por el alumno, futuro maestro, porque se trata de comprender que el alumno de escuela primaria debe hacer su construcción personal de los mismos, debe usarlos como instrumento cuando los necesita y sólo se puede esperar una memorización de los resultados cuando la comprensión de su manejo esté asegurada;

- a los algoritmos de las operaciones convergen nociones ligadas tanto a los conceptos básicos como a los de representación simbólica y a los cuadros de resultados, vertientes indispensables para que la construcción de cada algoritmo surja como un producto natural y no impuesto por el educador; con ello se intenta redistribuir el peso del trabajo escolar, habitualmente consagrado al ejercicio de las mecanizaciones, para concentrarlo en las actividades destinadas a la comprensión de las nociones.

Para anticipar los modos de implementación pedagógica de esta propuesta, creemos indispensable la consulta de los documentos de trabajo uno y dos de Matemática (SAGGESE, N. Aprendizaje y Matemática), que fueron publicados por la DINES dentro del proyecto de Formación del Personal de Educación para la Renovación, Reajuste y Perfeccionamiento del Sistema y del Proceso Educativo.

UNIDAD 1: La noción de número natural y su expresión simbólica. El campo de los problemas aditivos. Adición y sustracción.

Para esta unidad creemos conveniente proponer los siguientes objetivos:

Que los alumnos:

1.- Comprendan cómo se desarrolla en el niño la noción de número natural.

2.- Analicen la construcción del sistema de numeración en el niño.

3.- Establezcan las relaciones del sistema de numeración con las operaciones de adición y sustracción.

Los contenidos que hemos previsto son:

1.- El número natural. Cardinalidad. Ordinalidad. La operación de contar.

2.- Sistemas de numeración posicionales en distintas bases. Sistemas decimales.

3.- Problemas aditivos. Operadores aditivos. La adición y la sustracción.

4.- Algoritmos de adición y sustracción.

Hemos previsto para el desarrollo de esta unidad cuatro momentos que definirán la metodología a utilizar en las distintas etapas del proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos momentos son:

1.- Presentación del tema

2.- Construcción del marco teórico

3.- Microexperiencia

4.- Ajuste del marco teórico

Veamos cada uno de ellos, reiterando que constituyen sólo una propuesta que usted puede mejorar y enriquecer.

1.- Presentación del tema

Creemos conveniente iniciar el desarrollo de la unidad formulando a los alumnos la siguiente pregunta:

¿Cómo creen que los niños aprenden los números?

A partir de este problema proponemos organizar pequeños grupos de discusión que permitan recoger las hipótesis de todos los alumnos futuros maestros y registrarlas para ser revisadas al término del desarrollo del tema. Para resolver el problema planteado será necesaria la...

.- Construcción del marco teórico

Sugerimos en este momento proponer a los alumnos el análisis de la siguiente bibliografía:

SAGGESE, N., **Aprendizaje y Matemática I**, del Proyecto de Formación del Personal Docente OEA-DINES, 1987, páginas 1 a 15.
BOSCH, L. y MENEGAZZO, L., **La iniciación matemática de acuerdo con la Psicología de Jean Piaget,** Bs. As. Latina.
BEAUVERD, B., **Antes del cálculo,** Bs. As., Kapelusz.

Será interesante proponer también el análisis de libros y cuadernos de actividades de iniciación al cálculo -es fácil encontrarlos en la biblioteca de la escuela primaria- a partir de las siguientes consignas:

- elegir una actividad y

- analizarla tratando de identificar en la acción propuesta algunas de las siguientes conductas:

    * manipular objetos concretos;
    * observar atributos de objetos reales tales como su color, forma, sustancia, etc;
    * comparar unos objetos con otros mediante relaciones de semejanza y diferencia;
    * agrupar objetos formando conjuntos;
    * describir situaciones mediante "cuantificadores brutos" tales como: todos, ninguno, alguno, uno;
    * percibir el espacio organizado topológicamente en regiones bien diferenciadas;
    * comparar pares de conjuntos mediante la relación "tiene tantos como";

* establecer correspondencias uno a uno;
* conservar la equivalencia entre dos conjuntos coordinables, aún cuando se modifique la disposición espacial de sus elementos;
* relacionar una parte propia con el todo;
* clasificar conjuntos según el número de elementos;
* comparar pares de conjuntos mediante las relaciones: "tiene más elementos que", "tiene menos elementos que", "tiene un elemento más que", "tiene un elemento menos que";
* seriar conjuntos.

Conviene destacar que en la escuela primaria, antes de abordar actividades desde lo gráfico y lo simbólico, es necesario realizar actividades en las que intervengan los niños con su propio esquema corporal y con material concreto. En muchas oportunidades, el alumno futuro maestro construirá sus propios aprendizajes de esta misma manera. De allí la importancia de que organicen secuencias de actividades que antecedan a las que realizan por escrito.

Es de fundamental importancia ofrecer al alumno oportunidades de <u>observación en el aula primaria</u>. Esta actividad puede adquirir distintas modalidades (o todas ellas):

- visitar con los alumnos un aula de primer grado durante el desarrollo de algunas actividades de iniciación al cálculo y proponerles registrar las actividades minuciosamente para luego analizarlas;

- organizar con los alumnos visitantes otras actividades que, de común acuerdo con el maestro de grado, profundicen el desarrollo de las nociones involucradas;

- buscar canales de interacción con los docentes del área pedagógica con el objeto de contemplar los aspectos psicogenéticos y didácticos considerados en la propuesta de actividades.

3.- Microexperiencia

Proponemos llevar a cabo una microexperiencia en función de las actividades elaboradas conjuntamente con los alumnos a partir de las visitas a la escuela primaria. Para realizar esto, sugerimos los siguientes pasos:

- formar grupos pequeños de alumnos-maestros para trabajar en el aula de primer grado en la que el maestro habrá organizado a los niños también en pequeños grupos;

- un alumno-maestro conducirá a cuatro o cinco niños en la realización de la actividad mientras sus compañeros de grupo registrarán objetivamente todo lo que ocurra, tanto con respecto al manipuleo del material como con respecto a los diálogos. Tál testimonio junto con la reflexión que pueda aportar quien haya llevado a cabo la conducción, será material de discusión entre todos los futuros maestros.

. realizar una puesta en común para el intercambio de ideas, observaciones y experiencias que enriquezcan a todos los participantes. Una buena distribución de los alumnos en grupos que aborden variedad suficiente de actividades de iniciación en el cálculo, facilitarán esta tarea.

4.- Ajuste del marco teórico

Podremos cerrar el ciclo con la reconsideración de la pregunta planteada al iniciar la unidad para realizar la verificación o refutación de las hipótesis iniciales y la reflexión acerca del propio aprendizaje de los futuros maestros.

El cierre de este ciclo no es sino el comienzo de otros en un aprendizaje continuo. Los conceptos a los que el grupo haya llegado hasta ese momento han sido elaborados en un cierto contexto espacio-temporal que se irá ampliando.

Análogamente respecto de los aprendizajes infantiles, cabe tomar conciencia de que un saber incipientemente construido por un niño en una particular relación con sus compañeros y el docente involucrado, en tiempo y lugar específico, quedará fuertemente ligado al contexto en que fue concebido. De ahí la necesidad didáctica de volver a abordarlo en nuevos contextos -quizás más complejos- para contribuir a que se vaya transformando en un saber [illegible]

.despersonalizado
.destemporalizado y
.descontextuado.

A MODO DE SINTESIS

La modalidad de trabajo que proponemos aquí incluye:

- construcción del marco teórico a través de las lecturas o guías de trabajo;

- reflexión sobre propuestas didácticas que aparecen en textos o son observadas en el aula primaria;

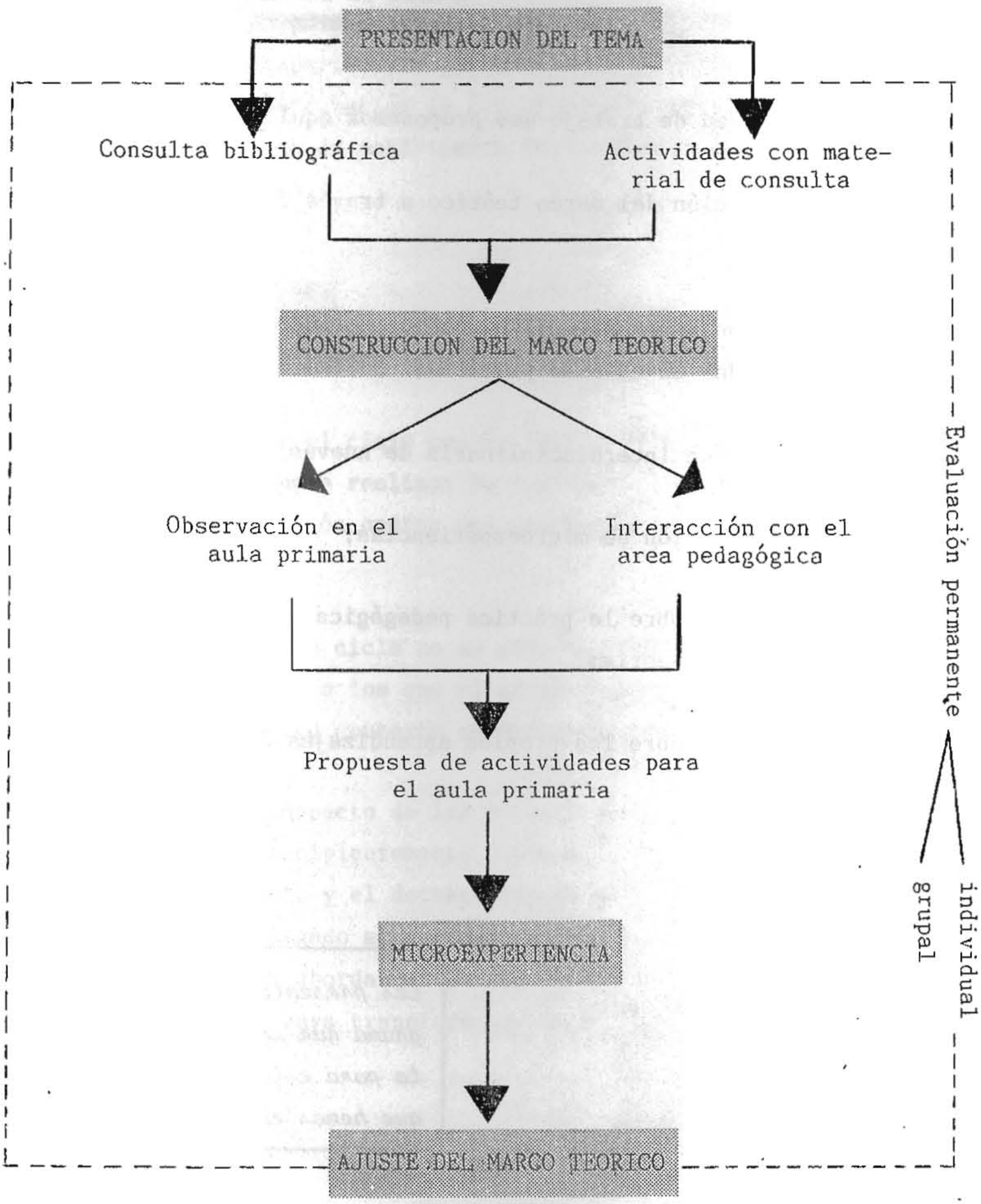
- elaboración interdisciplinaria de nuevas propuestas;

- implementación de microexperiencias;

- reflexión sobre la práctica pedagógica que sirve como retroalimentación de la teoría;

- reflexión sobre los propios aprendizajes de los alumnos como adultos.

Les presentamos a continuación un diagrama que intenta graficar la propuesta para esta unidad y sintetizar lo que hemos expuesto hasta aquí.


PRESENTACION DEL TEMA
Consulta bibliográfica
Actividades con material de consulta
CONSTRUCCION DEL MARCO TEORICO
Observación en el aula primaria
Interacción con el area pedagógica
Propuesta de actividades para el aula primaria
MICROEXPERIENCIA
AJUSTE DEL MARCO TEORICO
Evaluación permanente
individual
grupal

Hasta aquí hemos descripto minuciosamente actividades relacionadas con el primer tema de la Unidad 1. Esta descripción de la modalidad de trabajo que proponemos, nos permitió organizar la síntesis de este documento, que no agota -por supuesto- las posibilidades de trabajo en el aula, pues cada contenido requiere un tratamiento metodológico particular.

Durante la etapa de construcción del marco teórico, muchas veces es necesario que los futuros maestros aprendan las nociones usando ellos mismos materiales adecuados -tal como lo harán luego los chicos en las aulas primarias-.

En este sentido, le recomendamos que lea en la página 25 de la publicación OEA-DINES ya mencionada, el punto 5 correspondiente a la preunta ¿Cómo hacer para que los futuros maestros reflexionen sobre sus propios aprendizajes?
En la página 28 de ese documento se sugiere la resolución de una guía de trabajo que sólo se puede realizar usando material concreto estructurado, ábacos, etc. que los futuros maestros deben construir previamente. El objetivo de esa guía es contribuir al análisis de las nociones que subyacen en la estructura de nuestro sistema de numeración decimal y posicional (segundo tema de la Unidad 1).

Los otros temas de la Unidad 1 sobre los que no se han hecho recomendaciones explícitas en este documento, también han sido desarrolladas en la publicación OEA-DINES cuya lectura recomendamos. Además estos temas pueden ser ampliados consultando los anexos y bibliografía.

Usted habrá podido observar en el diagrama de la página 16 que los temas de la Unidad 1 desarrollados en este documento, corresponden a la zona de la izquierda y los temas de la Unidad 2 a la zona derecha del diagrama.

En particular, para el tema Operadores Naturales Aditivos, le ofrecemos a continuación una propuesta. Si usted la considera adecuada, pruébela en sus clases.

Problemas aditivos: Operadores naturales aditivos

Para encarar el aprendizaje de los problemas aditivos y su representación usando operadores, conviene hacer una buena selección de enunciados de situaciones que se resuelven con sumas y restas para que el desarrollo teórico-práctico que le proponemos a continuación pueda culminar con un examen crítico de los enunciados y un análisis de las posibilidades de su representación mediante operadores.

Repetiremos algunos **conceptos** enunciados en el punto 4 del documento OEA-DINES (pág. 19) -cuya lectura recomendamos- y los ampliaremos con actividades que sirven para ser realizadas por el alumno, futuro maestro, a lo largo de su construcción del marco teórico.

Todo número natural se puede construir por agregado de una unidad al anterior. Este proceso recibe el nombre de **iteración**. En él está implícita la adición. Se trata de la transformación de un estado inicial (n) producida por un **operador** (+1) para dar por resultado un estado final (siguiente de n). En símbolos

$$n \xrightarrow{+1} \text{siguiente de } n$$

Llamaremos **problemas aditivos** a aquellas situaciones cuya solución implica sumas y restas. La iteración es un caso particular en el campo de los problemas aditivos.

En la escuela media se usan con frecuencia expresiones aditivas del tipo $a + b = x$. De ella se infiere inmediatamente que

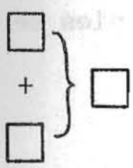
$x - b = a$

y que $x - a = b$. Estas expresiones simbólicas pueden representar la resolución de gran variedad de problemas.

Veamos algunos ejemplos:

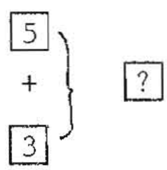
EJEMPLO 1

Tengo cinco bolitas en el bolsillo izquierdo y tres en el derecho. ¿Cuántas bolitas tengo?



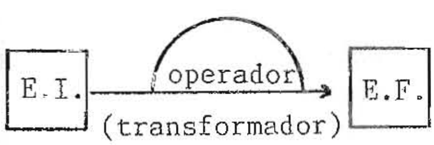
El esquema muestra que dos números se componen por adición para dar otro número.

En este caso:



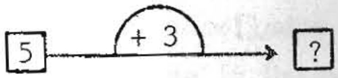
EJEMPLO 2

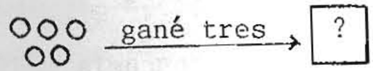
Tenía cinco bolitas. Jugué un partido y gané tres. ¿Cuántas tengo ahora?. El siguiente esquema



describe la situación: Un operador aditivo (suma o resta) opera sobre un **estado inicial** para producir un **estado final** que ha asimilado la transformación.

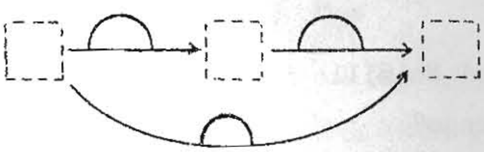
En nuestro problema:





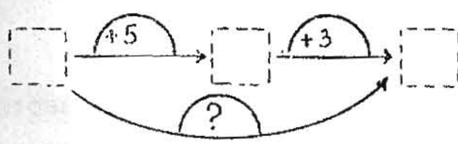
EJEMPLO 3

En el primer partido gané cinco bolitas y en el segundo gané tres ¿Cuántas gané en total?



Hemos tratado de mostrar con este esquema, la aplicación sucesiva de dos operadores que pueden ser reemplazados por otro, con cierta independencia de los estados a los cuales se apliquen

En el caso de nuestro problema:



Los tres ejemplos anteriores ilustran la variedad de problemas a los que corresponde la escritura simbólica

$$5 + 3 = 8$$

que frecuentemente se usa en el ámbito escolar sin tener en cuenta la complejidad de sus diferentes significados

Para ahondar el dominio de los alumnos-maestros de la representación de problemas aditivos mediante operadores sugerimos que resuelvan la siguiente actividad:

. Muestra, usando esquemas con operadores, la solución de los siguientes problemas.

.. Confronta tu trabajo con el de los otros integrantes del grupo

... Escriban, entre todos, los cálculos relacionales -ver pág. 23 del documento OEA-DINES, ya mencionado- que correspondan a cada situación, usando un lenguaje análogo al que hemos usado en los ejemplos dados.

1. Liliana tiene quince figuritas, ocho en el bolsillo izquierdo. ¿Cuántas tiene en el derecho?

2. Marcelo tenía ocho bolitas. Jugó una partida y perdió tres. ¿Cuántas tiene ahora?

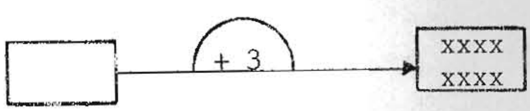
3. Javier ganó cinco bolitas en la primera partida. Jugó otra y perdió ocho. ¿Qué sucedió en total?

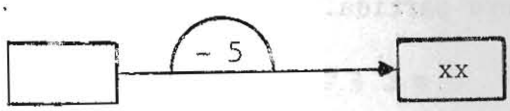
4. José le debía ocho bolitas a Luis. Le devolvió tres. ¿Cuántas le debe todavía?

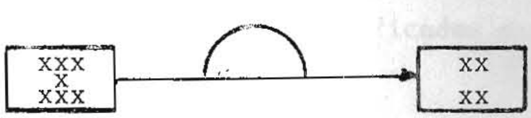
5. Daniel le ganó ocho bolitas a un amigo, pero él le debía cinco. ¿Cuántas le debe?

Un desarrollo autónomo de las nociones formales ligadas a los operadores aditivos puede abordarse con las actividades que siguen:

1. Completa los espacios en blanco







2. Inventa un estado inicial y completa con el correspondiente estado final.

.... $\xrightarrow{+3}$ .... $\xrightarrow{-5}$ ....

.... $\xrightarrow{+3}$ .... $\xrightarrow{-5}$ ....

.... $\xrightarrow{+3}$ .... $\xrightarrow{-5}$ ....

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "-3"] \arrow[rr, bend right, ""'] & \square \arrow[r, "+2"] & \square \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \square \arrow[r, "+1"] \arrow[rr, bend right, ""'] & \square \arrow[r, "-3"] & \square \end{tikzcd}$$

3. Los operadores naturales admiten como **entrada** números naturales

Completa:

6 $\xrightarrow{-2}$ ...   6 $\xrightarrow{+5}$ ...   7 $\xrightarrow{\ldots}$ 11   16 $\xrightarrow{+4}$ ...

... $\xrightarrow{-2}$ 7   ... $\xrightarrow{+5}$ 45   4 $\xrightarrow{}$ 18   20 $\xrightarrow{+4}$ ...

... $\xrightarrow{-2}$ ...   ... $\xrightarrow{+5}$ 60   9 $\xrightarrow{}$ 13   ... $\xrightarrow{+4}$ 6

¿Hay alguna restricción para las entradas de algún operador? ....

4. Los operadores pueden formar cadenas o sucesiones de modo que la salida de uno sea la entrada del que le sigue.

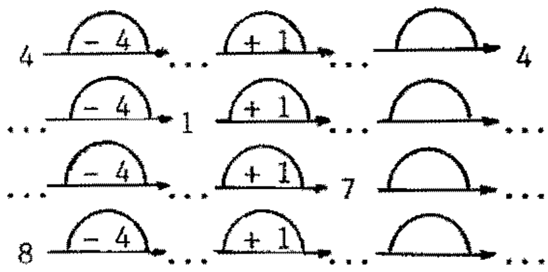
Completa con entradas, salidas u operadores según corresponda:

2 $\xrightarrow{+7}$ ... $\xrightarrow{-4}$ ... $\xrightarrow{+8}$ ...

5 $\xrightarrow{+7}$ ... $\xrightarrow{-4}$ ... $\xrightarrow{+8}$ ...

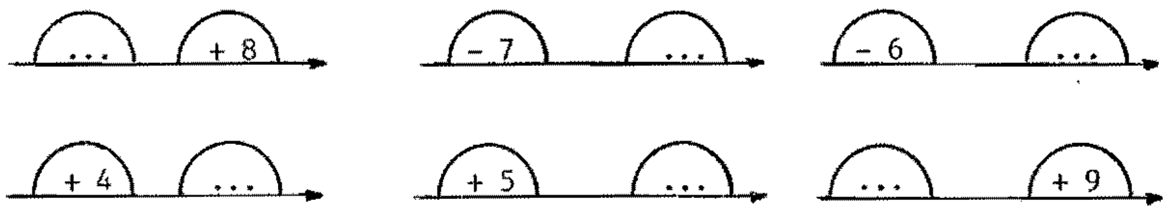
7 $\xrightarrow{+7}$ ... $\xrightarrow{-4}$ ... $\xrightarrow{+8}$ ...

1 $\xrightarrow{+7}$ ... $\xrightarrow{-4}$ ... $\xrightarrow{+8}$ ...



5. Se llama **operador neutro** al que hace corresponder a cada entrada, ella misma como salida.

Completa de modo que resulte el operador neutro:



Si el resultado de componer dos operadores es el operador neutro, se dice qu ambos operadores son **opuestos**.

Escribe el operador aditivo neutro:

6. Explora con ejemplos, el comportamiento de la **composición de operadores aditi**vos para responder:

¿es asociativa?

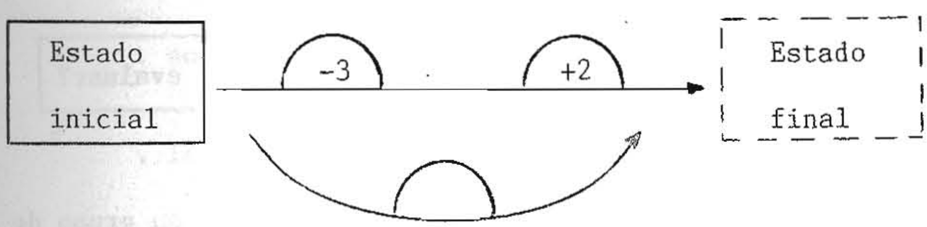
¿es conmutativa?

¿hay operador neutro?

¿para cada operador, existe el opuesto o inverso?

Para volver al campo de los problemas aditivos, con la experiencia relacionada con la composición de operadores que se promovió en las actividades anteriores, se pueden resolver situaciones del tipo:

Inventa un problema que se resuelva mediante la siguiente cadena de operadores:



¿Hay alguna restricción para el estado inicial?

Finalmente, el análisis crítico de enunciados usuales de problemas aditivos en el primer nivel de la escuela primaria y su representación mediante operadores, puede incorporarse con provecho para el alumno futuro maestro.

ALGUNAS SUGERENCIAS PARA LA EVALUACION

La realización del proceso didáctico que acabamos de describir debe ser acompañada por la implementación de formas alternativas que permitan evaluar procesos y logros.

¿Qué tendremos en cuenta al evaluar?

Al comienzo del módulo cada docente acordará con su grupo de alumnnos los instrumentos de evaluación que consideren más convenientes. A modo de ilustración enunciaremos algunos ejemplos:

- Elaboración de un informe individual relacionado, por ejemplo, con la construcción del marco teórico. Un primer "informe de avance" podrá ser luego reajustado en función de las sugerencias del profesor o del intercambio de ideas con los demás compañeros.

- Registro individual en un cuaderno, donde se detalle lo más minuciosamente posible:

  . el desarrollo de las clases observadas en la escuela primaria.

  . el desarrollo de microexperiencias;

  . el análisis de las observaciones en relación con el marco teórico que se está construyendo. Dicho análisis permitirá al profesor evaluar la capacidad del alumno para fundamentar opiniones coherentes.

- Pruebas escritas semi-estructuradas, ensayos, informes, etc., que permiten evaluar los logros individuales al finalizar un tema o una unidad.

Toda vez que se promuevan actividades grupales, éstas deben culminar con una **autoevaluación**. Así, el grupo podrá reflexionar y señalar los aportes individuales de sus miembros en cuanto a:

. su participación en la búsqueda de material bibliográfico;

. la exploración de aspectos psicogenéticos;

. la propuesta de actividades congruentes con el marco teórico;

. la construcción de recursos materiales adecuados;

. el desempeño del rol de cada uno en el grupo.

MATEMATICA

modulo 1

UNIDAD 2

Para el desarrollo de esta segunda unidad, sugerimos a los colegas recorrer la misma secuencia metodológica que se muestra en el diagrama de la página 8.

A los efectos de la construcción del marco teórico pueden recomendarse las siguientes lecturas:

SAGGESE, N. S. de — **Aprendizaje y Matemática II** del Proyecto de Formación del Personal Docente, OEA-DINES, 1987.

IGLESIAS, L.D. — **Aprendizaje de la Matemática en la escuela primaria** (Anexo 1). Texto de una conferencia, 1979, publicada en Problemas de la Enseñanza de la Matemática, Edición de CONCEPTOS DE MATEMATICA, 1980.

ANEXO

Aprendizaje de la matemática en la escuela primaria

Lucrecia IGLESIAS

1. Consideraciones previas

Comenzaré proponiendo contemplar el aprendizaje de la matemática en la escuela primaria como la interrelación entre dos polos: la ciencia y el niño, interrelación que resultará tanto más fructífera cuanto más equilibrada. Y esto, ¿por qué? Porque cada situación de *no aprendizaje puede verse como un claro caso de desequilibrio en esa relación:* o bien la ciencia desborda, abruma al niño, o bien el niño desarticula, desvirtúa el hecho científico. Veamos algunos ejemplos:

Ante 357 ÷ 25 un niño puede repetir enunciados como: 3 no puedo dividirlo por 25; tomo 35,; "le está" 1; 1 X 5 es 5; al 5, 0; 1 X 2 es 2; al 3, 1; "bajo el 7", etc.

Pero esto no es evidencia de aprendizaje: ¿qué significa para él, en términos de comprensión matemática: "bajo el 7"? Si, por casualidad, olvidara este paso, ¿qué posibilidad tendría de reconstruirlo sin el auxilio de la memoria? Quedaría absolutamente inerme, desbordado por la situación matemática. De modo que, aunque se lo vea repetir con entera seguridad los pasos del algoritmo, debemos reconocer que sólo se trata de una sucesión de actos mecánicos, sin sentido, en los que el manejo de los signos no es más que un hábito independiente de la comprensión inteligente. "Memorización negativa" lo llamó Thomás Simpson en la reunion anterior. O lo que es lo mismo: algo contrario al verdadero aprendizaje.

Otro caso: ante la ecuación $\frac{x+6}{2} = 21$ un niño tacha el 2, tacha el 6 reemplazándolo por 3 y resuelve $x + 3 = 21$ Aquí el lenguaje simbólico fue considerado a nivel puramente perceptivo: tan parecido a $\frac{x \cdot 6}{2} = 21$ que el alumno procede sin diferenciarlos, distorsionando el primero para adecuarlo a un esquema de acción muy familiar en el otro. Es decir, otra manera de no haber aprendizaje por falta de comprensión del hecho matemático.

¿Cuál sería un estado de equilibrio en cada una de las situaciones?

En la primera, una respuesta así:

* $357 \div 25$ significa repartir 357 entre 25.

* 357 se puede pensar como $\begin{cases} \text{3 centenas que equivalen a} \begin{cases} \text{30 decenas} \\ \text{o} \\ \text{300 unidades} \end{cases} \\ \text{5 decenas y} \\ \text{7 unidades} \end{cases}$

* Repartir 30 decenas entre 25 significa dar 1 decena a cada uno pero sobran 5 decenas.
* Con 5 decenas de la descomposición de 357 y las 5 decenas que sobraron se forman 10 decenas que equivalen a 100 unidades.
* 100 unidades repartidas en 25 permiten dar 4 a cada uno y no sobra nada.
* Las 7 unidades de la descomposición de 357 no se pueden repartir.
* El resultado se forma con lo repartido: 1 decena y 4 unidades o sea, 14.
* El resto se forma con lo que no se pudo repartir: 7 unidades, o sea 7.

Peró se observa que el proceso anterior contiene una opción: se eligió pensar 3 centenas como 30 decenas; se pudo haber elegido pensarlas como 300 unidades y el proceso hubiera podido ser así:

* 300 unidades es lo mismo que 100 y 100 y 100 unidades,
* Repartir 300 unidades entre 25 es lo mismo que repartir 100 y 100 y 100 unidades entre 25,
* Como 100 repartido entre 25 resulta 4, 300 unidades repartidas entre 25 resultarían 4 y 4 y 4 unidades,
* Quedan por repartir 5 decenas que equivalen a 50 unidades,
* 50 unidades repartidas entre 25 resultan 2 unidades,
* quedan 7 unidades por repartir, pero no es posible,
* el resultado se forma con lo repartido: 4 + 4 + 4 + 2 unidades o sea 14.
* el resto se forma con lo que no se pudo repartir: 7 unidades, o sea, 7.

Aquí es evidente la flexibilidad del pensamiento: usa el significado de los signos y las relaciones entre los significados; evoca acciones reales y las maneja interiormente con versatilidad. Transita en un sentido: descomponiendo 357, o bien en sentido inverso: componiendo 14; recorre un camino eligiendo una de las alternativas que se le ofrecen, pero con la certeza de poder elegir otro y llegar igualmente al mismo resultado.

Podemos hablar de pensamiento operatorio (reversible, asociativo); podemos decir que hay equilibrio y que este es tanto o más estable cuánto más móvil es el esquema involucrado.

En el segundo ejemplo, se trata de comparar $\frac{x \cdot 6}{2}$ con $\frac{x + 6}{2}$ en los que se pueden aislar las operaciones:

En $\frac{x \cdot 6}{2}$ . . .

* multiplicar por 6, seguido por dividir por 2;
* multiplicar por 6 puede pensarse como: multiplicar por 3 seguido por multiplicar por 2;
* multiplicar por 2 puede asociarse con dividir por 2 y se neutralizan;
* el resultado es equivalente a lo que resulta de multiplicar por 3 y suprimir las otras acciones.

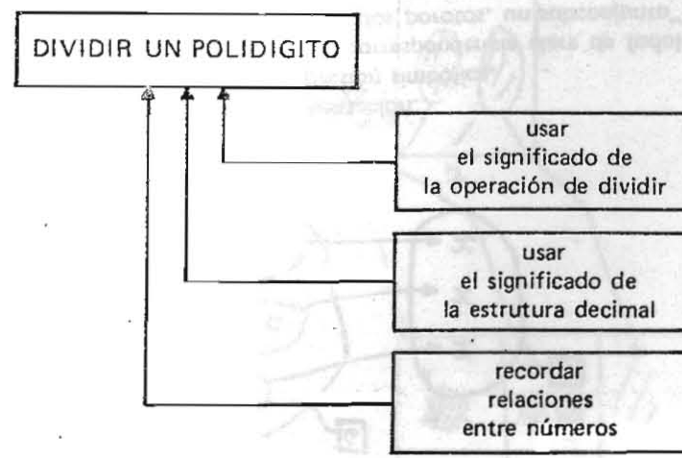
En $\frac{x + 6}{2}$

* sumar 6 seguido por dividir por 2;
* sumar 6 puede pensarse como: sumar 3 seguido por sumar 3, sumar cuatro seguido por sumar 2 sumar 5 seguido por sumar 1;
* no encuentro ninguna acción que pueda asociarse con dividir por 2 para neutralizarla;
* no puedo suprimir ninguna acción.

Comprobamos otra vez que frente al sujeto pasivo que tacha mecánicamente podemos oponer el dinamismo, el ir y venir, el comparar, el diferenciar, del pensamiento en el acto inteligente de decidir que $\frac{x + 6}{2}$ no puede ser tratado como $\frac{x \cdot 6}{2}$

Importa ahora mostrar un camino de aprendizaje para que el alumno tenga la oportunidad de lograr el dominio de estas situaciones, indicando qué pautas nos inspiran cada paso.

En la primera situación es posible analizar las conductas implicadas y construir el siguiente diagrama:



Señalamos que, haber hablado de memorización negativa no nos obliga a rechazar la contribución de la memoria: lo importante es usarla para fijar hechos significativos. Por ejemplo, las relaciones entre 25 y 50 o las relaciones entre 25 y 100 como usamos en nuestro caso.

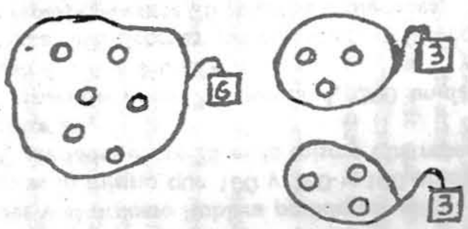
Ocupémonos de cada una de las conductas indicadas.

2 Significado de dividir por n

a) *repartir entre* n *partes iguales.*

i) los alumnos trabajan con material concreto.

Con un conjunto de 6 porotos se forman 2 conjuntos de 3 porotos cada uno. Usan porotos y hebras de lana.



ii) los alumnos representan la situación física: "retratan lo que ven", para que esta imagen externa ayude a la formación de la imagen interna cuyo papel es evocar la acción concreta pasada y anticipar la acción concreta futura. (Notemos el rol intermedio de la imagen que, por sí misma, no es acción y no proporciona contacto real con el mundo de las cosas si la acción no la precedió.)

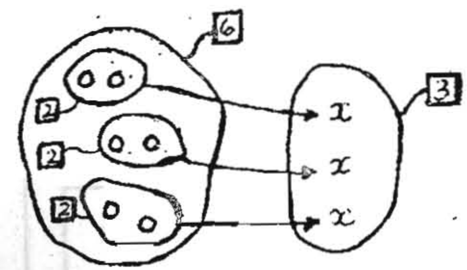
iii) los alumnos asocian a la acción y a su representación la expresión simbólica $6 \div 2 = 3$.

Estos tres pasos deben aparecer tejiendo una red que permita pasar de uno a cualquiera de los otros. Un problema planteado en un nivel, debe poder traducirse a aquél de los otros que proporcione los elementos más firmes para su resolución.

b) *otro significado: transformar* n *en* 1.

i) los alumnos trabajan con material concreto.

Con 6 porotos se forman subconjuntos de 2 porotos, obteniéndose un conjunto de 3 subconjuntos. Usan porotos y hebras de lana.



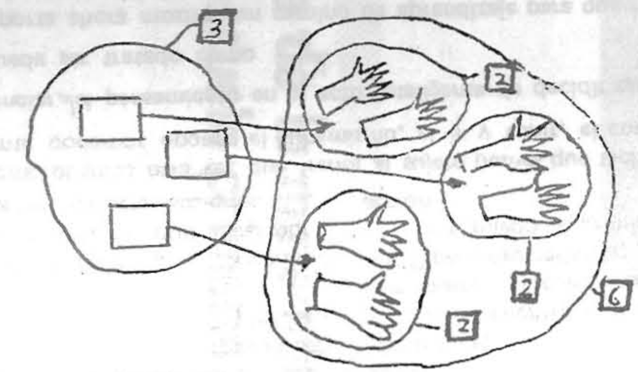
ii) los alumnos hacen la representación.

iii) los alumnos asocian la expresión simbólica.

En esta definición aparece una correspondencia clara de índole funcional o transformación: "por cada dos porotos, un subconjunto". Esto ayuda a establecer la noción:

c) *dividir es la operación inversa de multiplicar.*

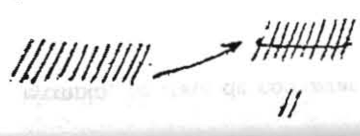
Hay tres sobres y "por cada sobre, 2 guantes".



3 Significado de la notación decimal

1. i) los alumnos juegan tirando un dado y anotando el resultado con palillos y la consigna: si saco más de 9, formo un atadito con "uno más que nueve"

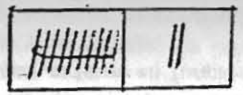
ii) *los alumnos dibujan su resultado:*



iii) *los alumnos registran,* sin símbolos: un atadito y dos palillos.

2. i) los alumnos siguen jugando y se agrega un mantel con la consigna: ubicar en el lugar preciso los ataditos y los palillos sueltos.

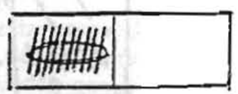
ii) *los alumnos dibujan el resultado:*



iii) *los alumnos registran,* imitando la representación anterior:

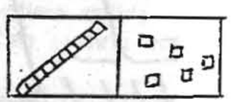
1 | 2

¿Y si no quedan palillos sueltos? Dibujan, registran y ponen el nombre DIEZ. Empiezan a hablar de *dieces o de decenas y unidades.*



1 | 0

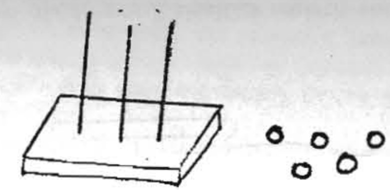
3. *Cambio de material:* cuadraditos de cartulina y tiritas de diez cuadritos del mismo material. La única variante consiste en que al formar diez unidades, canjeo diez cuadritos por una tirita, antes de ubicar en el mantel.



1 | 5

4. *Cambio de material:* se anota en ábacos abiertos, esto es, en alambres o clavos sujetos a una base de madera y alineados para que su ubicación reproduzca la de las casillas en los manteles. Se anota con argollitas de distintos colores que representan unidades, decenas, centenas, etc. Cuando los juegos progresan involucrando cantidades mayores que diez decenas, no es cómodo manipular ataditos o placas de cartulina del tamaño requerido. Entonces el ábaco resulta indispensable.

Juego y anoto con argollitas en el primer clavo de la derecha; cuando formo diez canjeo por una argollita en el clavo que sigue a la izquierda; veo que si tengo otro clavo puedo seguir hasta tener diez argollitas en el lugar de las decenas y canjearlas por una que se ubica en el clavo que sigue y se anota un ciento o centena.

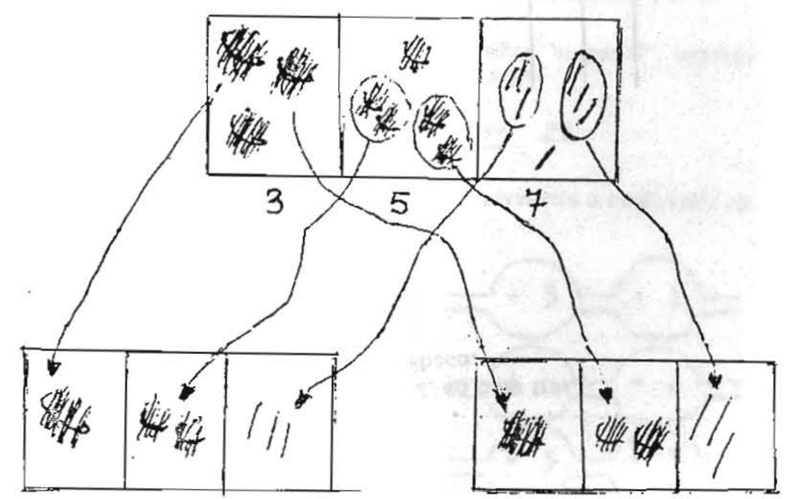


Observemos ya una primer pauta metodológica: *la del cambio de material* que busca variar los esquemas perceptivos para que las nociones puedan desprenderse de ellos.

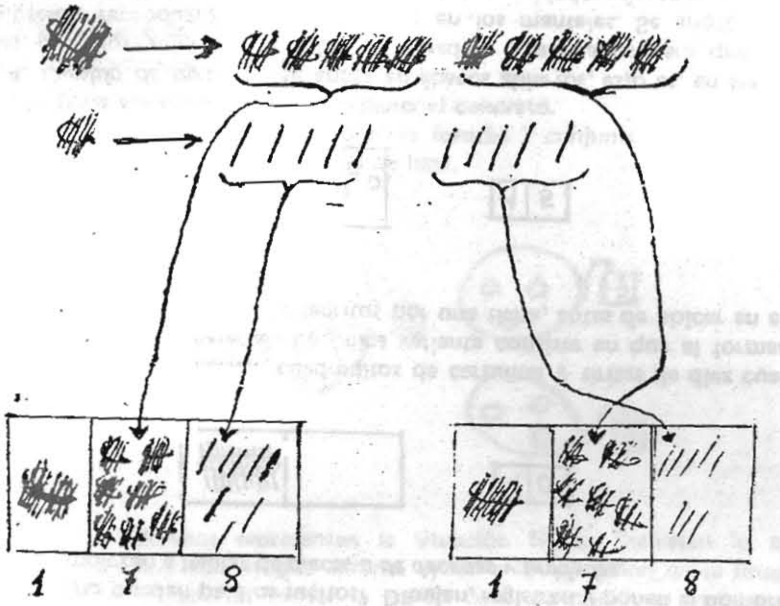
Ahora: cómo usamos el significado de la división y el significado de la escritura decimal en la resolución de 357 ÷ 2?

El alumno representa 357 con material concreto sobre el mantel.

El alumno piensa que dividir por 2 significa repartir entre dos y prepara dos manteles para efectuar el reparto.



Al repartir encuente que un atado de CIENTO debe desatarse en ataditos de DIEZ y que un atadito de diez debe transformarse en diez palillos sueltos.



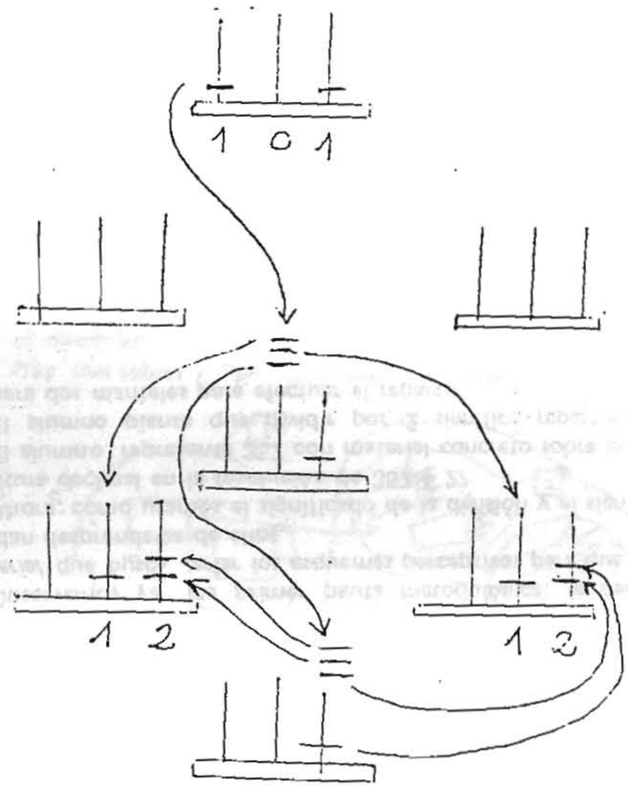
Concluye el reparto y el alumno observa que sobró un palillo. Traduce el resultado: 178 y resto: 1. Para registrar, dibuja y anota en símbolos.

Material concreto, representaciones gráficas y símbolos deben conjugarse simultáneamente hasta que el alumno esté en condiciones de abandonar la acción y la imagen externa en función del dominio interior del significado de los símbolos y su manejo.

Otra pauta metodológica: variar lo *contingente* para separarlo de los *necesario*

El diez es irrelevante en el proceso de escribir los números: pudo haberse agrupado de tres en tres; de cinco en cinco, y el resultado hubiera sido la expresión del número escrito en otra base: tres o cinco, respectivamente. Z.P. Dienes propone este esquema de aritmética multibase que, conducido con el material adecuado y los recaudos metodológicos citados, es perfectamente accesible a niños desde los siete años de edad.

Por ejemplo: sea la operación $101 \div 2$, en base tres.
El alumno representa $101_{(tres)}$ en un ábaco.



El alumno piensa en dividir por 2 significa repartir entre dos y prepara los ábacos para iniciar el reparto.

Al repartir descubre que se debe canjear una ficha del tercer clavo por su equivalente: tres de tres unidades y una de éstas, por tres unidades.

Concluye el reparto y el alumno observa que no ha sobrado nada y traduce el resultado:

Para registrar dibuja y anota en símbolos.

Con este esquema de acción es posible resolver divisiones por 2, 3, 4, o 5, pero aparece como una manipulación enredada y con riesgo de error cuando el divisor es mayor: por ejemplo, 6.

Si se trata de resolver 357 ÷ 6, la situación que crea una dificultad nueva es la respuesta a ¿Cuánto es 35 dividido 6? Pero esto es posible interpretarlo como: ¿Cuántas veces cabe 6 en 35? (que es el significado funcional de la división). Los propios alumnos nos ofrecen sus esquemas, muy variados por cierto, para resolver la cuestión.

Por sumas sucesivas: 6 + 6 = 12; 12 + 6 = 18; 18 + 6 = 24; 24 + 6 = 30; 30 + 6 = 36 (ya no sirve). Entonces son cinco veces.

Por enunciado de una escala: 6 – 12 – 18 – 24 – 30 – 36 – . . .

Por productos sucesivos: 1 vez 6, 6; 2 veces 6, 12; etc.

En todos estos casos se llega a la misma conclusión y el proceso termina restando 35 – 30 = 5. Como el alumno sabe que estas 5 son decenas o "dieces", los transforma en unidades y las suma a las 7 del número para continuar con la pregunta: ¿cuántas veces cabe 6 en 57?

También puede ocurrir que algún alumno recurra a restas sucesivas: 35 – 6 = 29; 29 – 6 = 23; 23 – 6 = 17; 17 – 6 = 11; 11 – 6 = 5. Así obtienen directamente el resto de 5 decenas o "dieces" que convierte en unidades.

Al llegar a esta etapa del proceso de aprendizaje aparece de una manera clara y natural para los niños la conveniencia de usar las escalas. Ellos mismos pueden construirlas y mostrar los resultados ordenadamente en un cuadro que no será sino la Tabla Pitagórica. Con el cuadro a la vista es posible resolver con rapidez y seguridad los problemas del tipo: ¿cuántas veces cabe uno cualquiera de los dígitos en . . .? Después podrá pedirse la memorización de estos resultados, pues la construcción del cuadro por el propio niño asegura su comprensión y su uso frecuente contribuye a su fijación. Se tratará de una memorización positiva en la medida que confiera agilidad y autonomía al trabajo de los alumnos, quienes no deben sentirlo como una carga agobiante sino como una ayuda deseable.

Aquí cabe decir algunas palabras sobre el ámbito escolar en que se deben desarrollar las actividades propuestas y sobre el papel que debe asumir el maestro encargado de guiarlas.

No nos imaginamos un aula de bancos alineados con escolares forzados a mirar todos en la misma dirección. Tampoco reglas fijas que impidan los desplazamientos naturales y espontáneos de los alumnos.

Lo adecuado es un aula-taller: con trabajos propuestos a la medida de quienes lo realizan, con abundante material para que todos puedan tener acceso a él, con indicaciones claras que aseguren la comprensión de las consignas, con una atmósfera de distensión y cálida convivencia que permita a los niños el ejercicio de una libertad responsable.

Del maestro esperamos la actitud del testigo lúcido; si la tarea está bien orientada y los materiales provistos, la relación con los alumnos se ha de limitar al diálogo que no da respuestas sino que devuelve preguntas en condiciones de que el niño pueda responderse a sí mismo: que no instruye sino que motiva; que no impone, sino que sugiere. Pero al mismo tiempo, es un evaluador permanente de los logros de aprendizaje de los alumnos: capaz de diferenciar los niveles y proveer las experiencias multiplicadoras de efecto para quienes se retrasan en un logro y las experiencias de captación sutil para los ávidos de una mayor ~~protección~~ proyección en sus inquietudes científicas.

No es fácil, pero tampoco es imposible; con el esfuerzo combinado de muchos, el logro sería más rico y más próximo.

Preguntas formuladas al terminar la disertación

P.– ¿Cómo se evita que el alumno al descomponer el 6 de $\frac{x + 6}{2}$ no elija $\frac{1\,x + ,2.3}{2}$

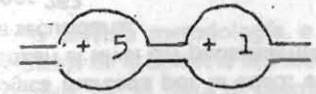
R. – Un alumno que conozca y use como instrumento la noción de operador podrá pensar el problema $\frac{x + 6}{2} = 21$ de la siguiente manera:

¿Qué entrada hay que poner para que el operador "sumar 6", seguido por el operador "dividir por 2" dé una salida igual a 21?

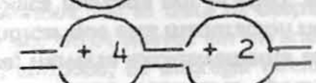
En símbolos:

Ahora bien, el operador "sumar 6" es solo equivalente a cualquiera de las sucesiones de dos operadores que siguen:

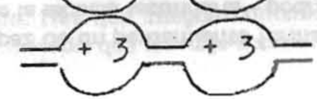
"sumar 5" seguida por "sumar 1" + 5 + 1



"sumar 4" seguida por "sumar 2": + 4 + 2



"sumar 3" seguida por "sumar 3" + 3 + 3



Pero ninguna de estas sucesiones contiene el operador inverso de "dividir por 2", que es el operador "multiplicar por 2" y no puede aparecer el error indicado.

Además, en la interpretación del problema mediante operadores, la solución se puede razonar así:

* para que el operador "dividir por 2" haya dado una salida 21, la entrada debió ser 42;
* para que 42 sea la salida del operador "sumar 6", la entrada debió ser 36. En consecuencia, la solución es 36.

P. — Ud. plantea el papel que le cabe al niño y al maestro en la situación de aprendizaje, ¿en qué tipo de escuela lo ve?

R. — Las situaciones de aprendizaje descriptas pueden tener lugar en toda escuela que se lo proponga: sólo hace falta una ciudadosa planificación de actividades por parte del maestro, una adecuada provisión de material de sencilla elaboración, y, fundamentalmente, un cambio de actitud personal interior para asumir un rol diferente ante los alumnos.

P. — Al principio, usted dijo algo así como que "la distribución de los contenidos" no es fundamental.

Sin embargo, en el caso de la división por dos cifras, los corrientes la incluyen en 3er. grado (en algunos países se aprende en 5º o 6º grado). Y si los niños tienen que aprenderla tal como usted lo planteó, es imposible desarrollarla en este grado y ello afecta a los objetivos y la metodología. Dado este ejemplo (y los resultados de la psicología genética), ¿no cree que la distribución y organización de los contenidos es, también, fundamental? .

R.— Lo que indiqué fue que los contenidos —y no su distribución— son, en general aceptables; que para todos hay un modo y un tiempo para abordarlos con una razonable perspectiva de logro. Estoy de acuerdo con que en algunos curricula los modos y tiempos fijados no son los más adecuados.

P.— Considera que ese proceso que usted describió claramente con un ejemplo: situaciones concretas, representación y abstracción, ¿debe necesariamente respetarse para cada nueva noción? ¿Se mantiene el proceso de la división por 25?

R. — El desarrollo evolutivo se cumple en etapas ineludibles: la del pesamiento operatorio concreto coincide, aproximadamente con el período de nuestra escuela primaria en cuyos últimos años comienza la transición hacia la etapa del pensamiento formal. Este cobra entera vigencia después de los dos primeros años de secundaria. Así, durante la primer etapa es ineludible respetar una secuencia que comience por la acción concreta, siga con la representación y desemboque en el pensamiento operatorio. Sólo cuando el individuo sea capaz de un pensamiento formal —en general, no antes de los últimos años de la escuela secundaria— podrá hacer reflexiones acerca de reflexiones, o sea, moverse exclusivamente en el plano de las ideas. Además, es necesario indicar que esta maduración no es simple consecuencia de la evolución biológica marcada por la edad: es posible hallar muchos individuos que no alcanzan el nivel del pensamiento formal, ni aún dentro del ámbito de la escuela secundaria.

P.— ¿Cómo sería el proceso de la división por 25?

R — Supuesto que el alumno puede resolver compresivamente las operaciones del tipo: 355 dividido por cualquier dígito, todo el problema de dividir por 25 se centra nuevamente en las estimaciones del tipo: "cuantas veces cabe 25 en. . . " que es una forma de expresar el significado "transformar el 25 en. . . ,que es una forma de expresar el significado "transformar 25 en 1". El alumno no halla dificultad en comprender la necesidad de realizar tales estimaciones, pero a veces sus métodos (por restas sucesivas, por sumas sucesivas, por construcción de una tabla o de una escala del 25, etc.) no resultan eficientes porque hay gran riesgo de error y el proceso es siempre antieconómico: requiere mucho esfuerzo para obtener resultados no siempre correctos.

Entonces es conveniente hacer pensar en estimaciones aproximadas con ejercicios graduados que se realizan mentalmente, del tipo:

¿cuántas veces cabe 10 en 30,. . . en 80,. . . en 120,. . . ?
¿cuántas veces cabe 40 en 50,. . . en 100,. . . en 130,. . . ?
¿cuántas veces cabe 21 en 40,. . . en 90,. . . en 140,. . . ?

A cada uno de estos ejercicios debe seguir la comprobación inmediata y escrita, que hace aparecer de un modo natural en el proceso *la operación de multiplicar*. Alumnos de cuarto grado conducidos en esta forma presentan su trabajo espontáneamente así;

107	35	25	25
357 ÷ 25 = 014 y sobran 7 unidades	-25	x5	x4
	10	125	100

donde el alumno piensa:

* 3 cientos no se pueden dividir entre 25, pongo 0 cientos en el resultado,
* cambio 3 cientos por 30 dieces y con 5 dieces del número formo 35 dieces,
* 35 dieces divididos entre 25 es 1 y calculo lo que queda: 10 dieces.
* cambio 10 dieces por 100 unidades, con 7 unidades se forman 107 unidades, (lo escribo arriba),
* estimo que 25 cabe 5 veces en 107, compruebo multiplicando 25 x 5 y me da 125,
* corrijo mi estimación y pongo 4, compruebo multiplicando 25 x 4 y obtengo 100,

* calculo lo que me sobra mentalmente: 7 unidades.

Cuando este tipo de elaboración está afianzando el maestro puede proponer organizar la tarea de modo que todas estas acciones queden incorporadas al esquema del algoritmo en esta forma:

$$\begin{array}{r|l} 357 & 25 \\ \underline{-25} & \overline{14} \\ 107 & \\ \underline{100} & \\ 7 & \end{array}$$

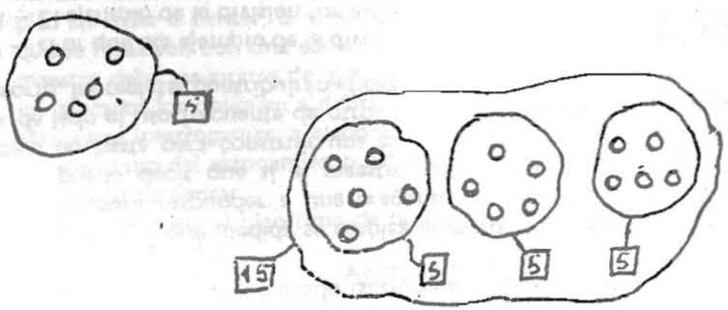
En ella, el alumno debe identificar claramente cada parte del proceso anterior, explicándola con el mismo enunciado, puesto que sólo se ha modificado su ubicación en el espacio.

Esto sirve para mostrar que un enunciado del tipo "bajo el 7" carece de sentido en el proceso y ha sido sustituido por acciones cuya comprensión está garantizada por la comprensión del significado de la notación decimal: cambio 10 "dieces" por 100 unidades, con 7 unidades, se forman 107 unidades en total.

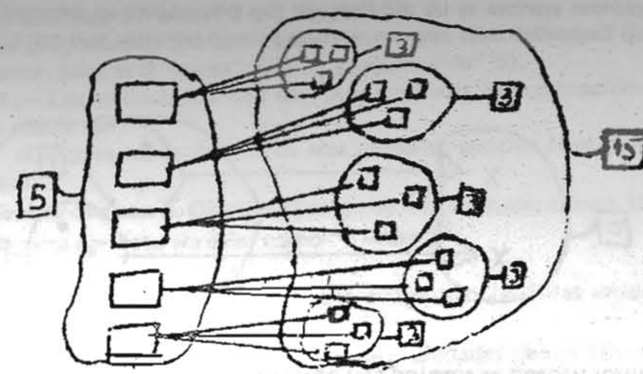
P – ¿Cómo es preferible introducir la multiplicación, como el cardinal del producto cartesiano de 2 conjuntos o como sumas reiteradas?

R.– En la introdución de operaciones en la escuela primaria no debe plantearse este tipo de interrogantes: debe pensarse en el *cómo* más que en el *qué*. La respuesta debe ser entonces: hay que introducir todas las nociones posibles que den una interpretación de la operación, siempre que se lo haga mediante *acciones* que el alumno pueda realizar en forma concreta. Por ejemplo, para la multiplicación podemos plantear distintos tipos de problemas que apunten a diferentes nociones según puede verse en las interpretaciones que siguen del producto 5 x 3.

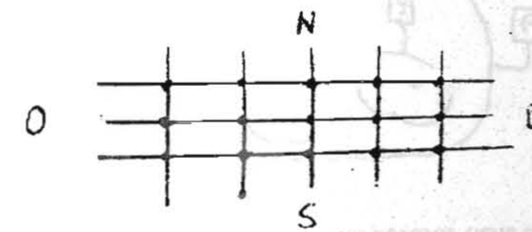
a) hacer *el triple de un conjunto de 5* contadores (noción conjuntista)



b) *por cada uno de 5* - sobres - *poner 3* - estampillas (noción funcional)



c) *formar pares* —o cruces— de 5 calles que corren de N a S y 3 calles que corren de E a O. (producto cartesiano).



P.– Ruego que nos indique el título de obra de Z. P. Dienes, y editorial.

R – Ver bibliografía de pág. 147.

P – De verla y oirla a Ud. tengo la impresión que el álgebra o matemática moderna no es más. que una metodología para enseñar matemática. Al seguir su conferencia me hizo recordar a una pieza musical de Paul Dukas llamada" El aprendiz de brujo". Gracias.

R – Es importante poner el énfasis en la palabra metodología, o sea comprender cuánto depende el buen aprendizaje de la correcta actitud del maestro al plantear experiencias a sus alumnos. No se trata de desplazar contenidos matemáticos para sustituirlos por otros nuevos sin un análisis de la forma en que conviene abordarlos; tampoco, de disgregar nociones tradicionales de otras que no lo son tanto. Hay que integrar contenidos, tradicionales y modernos, a través de un método que los haga accesibles a los alumnos.

P — Quisiera saber si el método Gategno se sigue aplicando actualmente y si es eficaz.

R — Ignoro en qué medida se emplea el método Gategno en la actualidad, como para responder a una pregunta tan general. Respecto de su eficacia puedo decir que si el maestro sabe que el análisis de un solo modelo no basta para construir una estructura y, al emplear regletas, no deja de lado el uso frecuente de otros materiales que provean un modelo isomorfo, las regletas contribuirán eficazmente al aprendizaie.

P — ¿Por qué ese ejemplo de la división para desarrollar en esta charla?

R — El ejemplo de la división fue elegido por dos razones.

Primero, es un tema tradicional que siempre produjo crisis en los procesos de aprendizage y que se ilumina y enriquece cuando se lo aborda con nuevos recursos conceptuales —como la aritmética multibase y el lenguaje conjuntista y cuando se lo plantea a través de una metodología fundada en la acción y dirigida hacia la comprensión.

Segundo, es un tema que para su completa elaboración requiere un proceso que recorre prácticamente todos los niveles de la escuela primaria. No para acumular repeticiones mecánicas de un mismo esquema formal que se repite sin comprender, sino para usar en cada grado el tiempo que se destinaba a tales repeticiones, para que el alumno conquiste gradualmente la comprensión del algoritmo, de modo que se produzcan en él los cambios estructurales que le permite su nivel de desarrollo evolutivo.

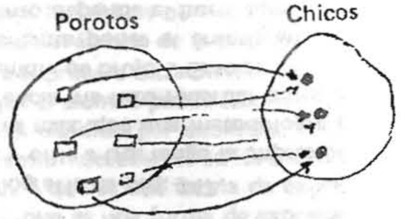
P — ¿Tiene alguna sugerencia para la enseñanza de la geometría?

R — No es posible indicar en poco espacio, en poco tiempo, todas las sugerencias que merece el aprendizage de la geometría. Haremos solamente dos recomendaciones fundamentales muy generales:

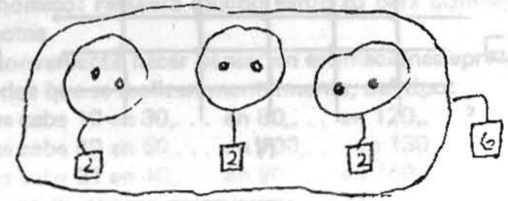
Una, tener presente que hay propiedades geométricas que no son propiedades métricas o de la medida. Hay propiedades topológicas, afines, proyectivas y es importante saber que ya Piaget ha demostrado que, evolutivamente, el individuo va concibiendo el espacio en orden inverso al de la evolución de la ciencia en sí misma. Esto es, los geómetras más antiguos trabajaron con propiedades métricas; sólo en tiempos modernos incorporaron peopiedades proyectivas y un logro relativamente reciente son las propiedades topológicas. Pero un niño que comienza a construir estructuras espaciales comienza por dominar sus pròpiedades topológicas y su última conquista son las propiedades métricas.

La segunda recomendación apunta también al desarrollo evolutivo y señala que hay que tener en cuenta el logro de la conservación de cada magnitud antes de iniciar el tratamiento de su medida. La longitud, la superficie, el volumen, no pueden medirse antes de haber logrado concebirlos como propiedades invariantes de los cuerpos. Piaget nos ha mostrado que ello sólo se logra como resultado de un proceso de maduración que, para la longitud, puede darse hacia los ocho años, pero para el volumen no se produce antes de los once.

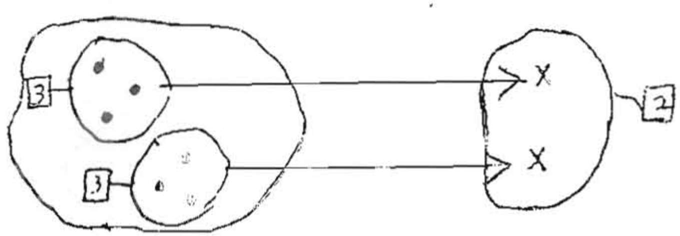
P — Con respecto a la división, se podría directamente representar la acción mediante la correspondencia de esta manera:



R. —El diagrama parece reproducir la acción de repartir, esto es: formar 3 conjuntos con 6 *porotos* y averiguar cuantos *porotos* tiene cada uno. Nosotros lo representaríamos así:



Reservamos las flechas para cuando hay una transformación inevitable: con 6 *averiguar cuantos subconjuntos* de tres porotos se pueden formar.



P — ¿Existe una relación directa entre el sentido poco analítico del niño y la incapacidad de deducción del adolescente en la escuela secundaria?

R — Hay un proceso evolutivo que partiendo del pensamiento operatorio concreto del niño de la escuela primaria, puede desembocar en el pensamiento formal siempre que se conjuguen factores de maduración interna y factores de intercambio con el medio exterior.

La expresión "sentido poco analítico del niño" puede sustituirse por una descripción de la forma propia que reviste el pensamiento entre los 7 y los 12 años de edad, en los que el pensamiento infantil hace operaciones "concretas", es decir, referidas a los objetos de la realidad tangible, suceptibles de ser sometidos à una acción directa, o bien, referidas a su representación, que, si es suficientemente viva, logra sustituir sin desventaja a la manipulación de lo real. Pero es incapaz de reflexionar ~~sin~~ Sobre reflexiones: de ahí su fracaso ante situaciones hipotéticas planteadas puramente en el plano verbal como suelen ser algunos enunciados de problemas aritméticos de uso muy generalizado en la escuela primaria.

A partir de los 11 o 12 años se hace posible el pensamiento formal, esto es: las operaciones que implican la manipulación de ideas sin el apoyo de la percepción o la experiencia. El adolescente es capaz de formular hipótesis, de combinar juicios, de elaborar teorías. Pero en sus comienzos, este poder naciente tiene un marcado carácter egocéntrico que, dice Piaget, se manifiesta mediante la creencia en el infinito poder de la reflexión, pero como si el mundo debiera someterse a los sistemas y no los sistemas a la realidad". De ahí su dificultad para acomodarse a los esquemas externos que podamos proponerles como modelos de deducción.

Cuando, en virtud de un proceso adaptativo gradual, el pensamiento formal ejerza una acomodación creciente a las propuestas del medio y alcance su equilibrio, estará en condiciones de lograr las construcciones de la deducción racional.

P — ¿En qué medida perjudicaría el uso de la máquina de calcular electromecánica en la escuela primaria?

R. — Por lo pronto, una tabla o una máquina son útiles en la medida en que sean usadas "mecánicamente", esto es: con sentido de ahorro de esfuerzo, de seguridad en el resultado, de economía de tiempo. Son instrumentos valiosos cuando se persiguen estos fines. Si el fin es otro, por ejemplo: aprender a pensar, la situación planteada al alumno no debe ser de las que se resuelven con una consulta directa a una tabla o a una máquina. El maestro debe asegurarse de que en estos casos los problemas planteados a los alumnos los obliguen a diferenciar nociones, a establecer relaciones, a plantearse interrogantes, a elaborar estrategias de resolución. Sólo así estimulará el uso del razonamiento. Sólo así evitará que el alumno se acostumbre a dejar de pensar.

P. — Usted dio el algoritmo de la división en relación con el significado de "repartir".

Ante $\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$

¿cómo dice 5 "veces" 3 o 3 "veces" 5?

Le preguntamos por qué, generalmente, se dice 5 "veces" 3 y parecería un error, pues es 3 "veces" 5 (o 3 "conjuntos de" 5).

R. — Los enunciados que dan una aceptable interpretación de la situación citada son:

* ¿Cuántos subconjuntos de tres unidades pueden hacerse con 16 unidades?

Estimo que son 5. Cinco conjuntos de tres unidades tienen 15 unidades.

Resulta correcto abreviar como "5 veces 3".

O bien:

* Si reparto 16 unidades en tres conjuntos, ¿cuántas unidades tendrá cada uno?

Estimo que son 5. Tres conjuntos de 5 unidades tienen 15 unidades.

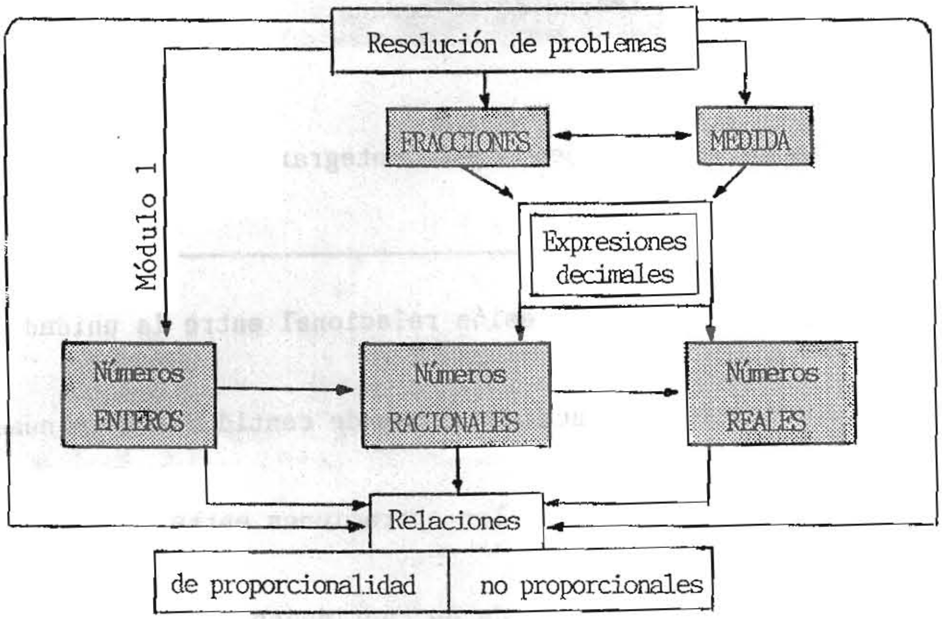
Resulta correcto abreviar como "3 veces 5".

Lo importante es pedir en cada caso la interpretación de la expresión abreviada.

MATEMATICA

modulo 2

UNIDAD 1



¿Por qué proponemos estas unidade

En el diagrama anterior puede observarse que:

- La resolución de problemas que involucran números enteros ya fue tratada en módulo 1

- Se trata de mostrar -mediante los dos sentidos de la flecha- que los concep básicos de MEDIDA y FRACCIONES no preceden uno a otro, desde el punto de vi evolutivo, sino que se van desarrollando en forma coordinada pues, para exp sar una medida son necesarias -generalmente- las fracciones y, a su vez, la fracciones cobran sentido cuando se trata de comparar cantidades homogéneas ligiendo una cantidad como **unidad**.

- Las expresiones decimales (aparecen en recuadro doble) están ligadas, en es contexto, a la representación simbólica de los conceptos de medida y fracciones.

- Las expresiones decimales de las fracciones también representan, simbólicamente, a los números racionales ya que toda familia de fracciones equivalentes genera, por abstracción, una "clase de equivalencia" llamada NUMERO RACIONAL.

- La función simbólica de las expresiones decimales es aún más amplia pues algunas permiten simbolizar a los números irracionales (tal como la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1, que no es un número racional).

- La ampliación del campo de problemas va acompañada de una ampliación del campo numérico: desde los enteros incluídos en los racionales y de éstos incluídos en los números reales.

- La resolución deproblemas se vincula con el establecimiento de relaciones que pueden ser, o no, de proporcionalidad.

Por su estrecha vinculación con los temas de interés para la escuela primaria, los problemas considerados en los MODULOS 1 y 2 promueven, sin duda, la construcción del conjunto de los números reales **positivos**, su representación simbólica y gráfica (semirrecta real).

La extensión del campo real en sentido opuesto **-negativo-** puede propiciarse, en el MODULO 3, a partir de consideraciones de tipo geométrico.

UNIDAD 1 : FRACCIONES

Para esta unidad creemos conveniente proponer los siguientes objetivos:

Que los alumnos:

1.- Comprendan la naturaleza y el tipo de operaciones involucradas en la construcción del concepto de fracción.

2.- Distingan el uso de fracciones en la descripción de un estado o bien en el proceso de transformación que modifica un estado.

3.- Comparen sus propios aprendizajes con los de los alumnos de la escuela primaria.

Hemos previsto los siguientes contenidos:

1.- Relación entre la unidad y una de sus partes. Proceso de transformación fraccionaria de un estado inicial en un estado final.

2.- Operaciones entre fracciones.

3.- Uso de expresiones decimales exactas o aproximadas.

Para el desarrollo de esta Unidad reiteramos la propuesta metodológica formulada para unidades anteriores. Consiste en una secuencia de cuatro momentos:

1. Presentación del tema
2. Construcción del marco teórico
3. Microexperiencia
4. Ajuste del marco teórico

Conviene, en este caso, formular a los alumnos la siguiente pregunta:

¿Cómo aprenden los niños la noción de fracción?

Sugerimos que los futuros maestros comiencen la construcción del marco teórico a partir de la realización de las actividades propuestas en el ANEXO I.

Es aconsejable ampliar los conocimientos adquiridos con la consideración de los aspectos evolutivo y didáctico, para lo cual recomendamos la lectura de:

FRACCIONES, pág. 56 y siguientes de esta publicación.

HOLLOWAY, G.E.T. **Concepción de la geometría en el niño según Piaget**, Paidós, 1969, Cap. 4, XII. (Anexo II)

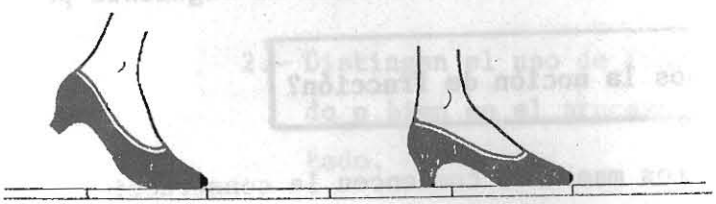
DOVADY, R y PERRIN-GLORIAN, J.M. **Nombres decimaux**, IREM, Nº62, Febrero 1986 (Anexo III).

Resulta interesante también proponer el análisis de manuales o textos escolares que se encuentre en la biblioteca de la escuela primaria, con vistas al desarrollo de alguna **microexperiencia** relacionada con el aprendizaje infantil de la noción de fracción. Estas microexperiencias se llevarán a cabo con una dinámica similar a la propuesta en la Unidad 1 del Módulo I.

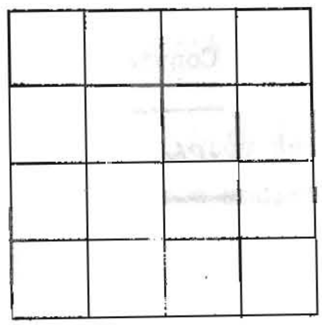
En cuanto a la **evaluación**, son válidas las sugerencias que se explicitaron en la pág. 36.

FRACCIONES

La idea de número natural se desarrolla a partir de la cuantificación de las cantidades **discontinuas**, o sea, conjuntos de un número finito de elementos (par de zapatos, equipo de jugadores, colecciones de lápices, chapitas, boletos, etc.). Pero en otras situaciones reales es frecuente la necesidad de cuantificar longitudes, pesos, superficies, etc.: se trata de cantidades **continuas** a las que, por comparación con una unidad, asignamos "el número de veces" que ésta está contenida en la cantidad y obtenemos **la medida**. Veamos algunos ejemplos:



cantidad: largo del paso
unidad: lado de la baldosa
medida: 3



cantidad: superficie del cuadrado
unidad: cm^2
medida: 16

En estos casos "el número de veces" es un número natural, pero es frecuente hallar situaciones en que un número natural no basta.

un segmento de más de 5 cm
y menos de 6 cm

una hoja de aproximadamente
$14 \ cm^2$ de superficie

Al encontrarnos con estas situaciones es natural intentar una mejor aproximación usando "y medio" o "y un cuarto " que implican recurrir a la partición de la unidad en partes iguales, esto es,a las FRACCIONES. Claro que una partición en partes iguales no es exclusiva de las cantidades continuas: media docena de huevos, medio centenar de personas, son particiones en cantidades discontinuas.

¿Qué metodología sugerimos para el trabajo con fracciones?

Es imprescindible que ubiquemos el aprendizaje en un contexto que involucre la partición de unidades de medida o de colecciones en experiencias reales donde cada alumno pueda ser protagonista.

Algunos ejemplos de esas experiencias son:

. tomar una cinta (sin divisiones) de un metro de largo y construir (doblando, cortando y desechando lo que sobra) medio metro, un cuarto metro, ...;

. tomar una botella de un litro de agua y repartir su contenido en dos, o en cuatro, o en seis recipientes iguales de modo que cada uno contenga la misma cantidad;

. tomar paquetes de kilogramo, medio kilogramo y cuarto kilogramo de cualquier producto y explorar cómo se equilibran unos con otros;

. repartir una colección de una docena de lápices en medios, tercios, cuartos, sextos de la misma.

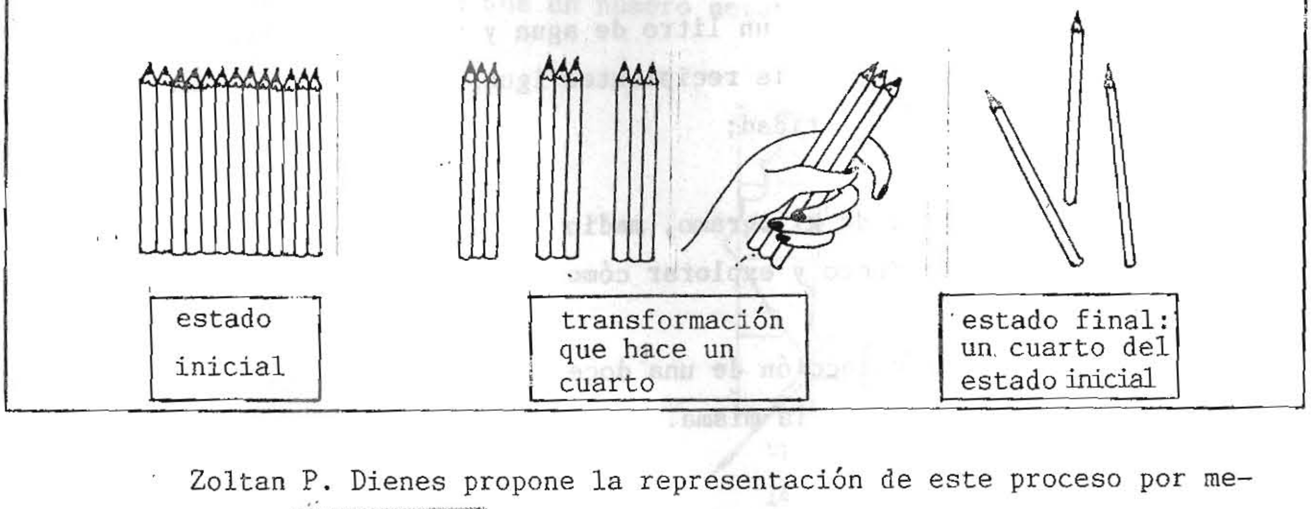
Cada una de estas experiencias resulta de gran interés para nosotros desde diversos puntos de vista:

. **desde el punto de vista del lenguaje**: nos interesa establecer claramente el uso de: "un medio de", "un tercio de", "tres cuartos de", ... como **expresiones relacionales** entre la unidad -o el todo- y una de sus partes;

. **desde el punto de vista de la acción**, pues favorecen la toma de conciencia de que construir una fracción involucra **un proceso o una transformación** que se lleva a cabo sobre algo material (una cinta, el contenido de una botella, una colección de lápices, etc.) que podemos pensar como **estado inicial** y que, finalizado el proceso, da lugar a un **estado final**.

El estado inicial configura la unidad o el todo;
el estado final configura la fracción o parte.

SI TOMAMOS EL EJEMPLO DE LA COLECCION DE LAPICES, TENEMOS :

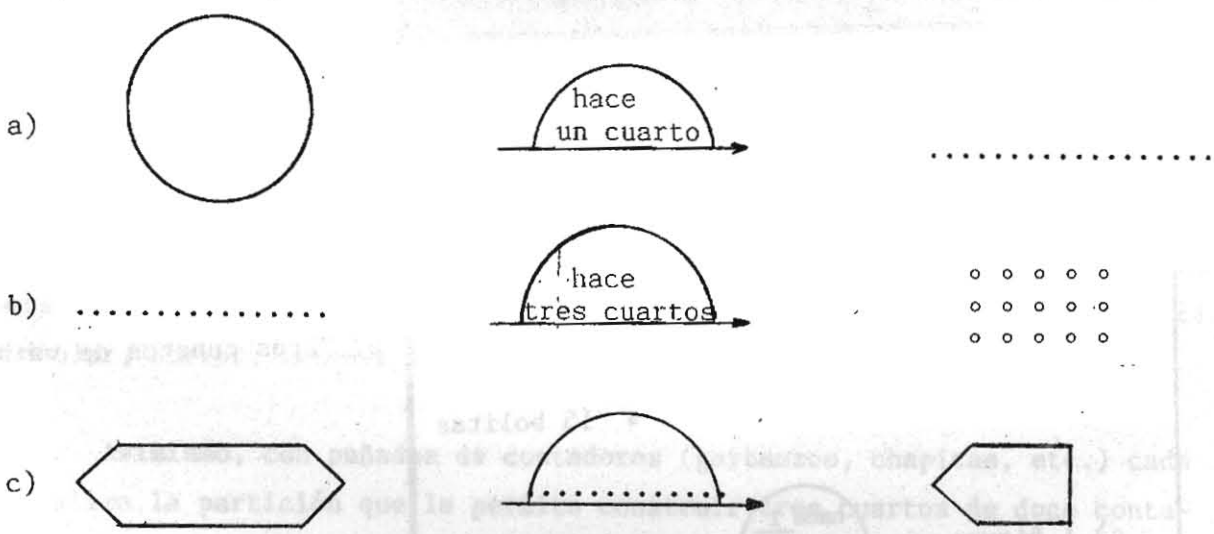


Zoltan P. Dienes propone la representación de este proceso por medio de UN OPERADOR que dé cuenta de la transformación.

Si analizamos esta forma de representación, veremos que ella permite el planteo de situaciones directas e inversas, es decir: favorece la reversibilidad dentro de la trama conceptual. La actividad que presentamos a continuación ejemplifica lo dicho aquí:

EJEMPLO

Completar los espacios marcados con puntos:



En este esquema podemos asociar a cada representación, el **lenguaje simbólico** adecuado. Así, en el primer caso dado, tendríamos:

$$\text{un círculo} \xrightarrow{\text{hace } \frac{1}{4}} \frac{1}{4} \text{ de un círculo}$$

Además, la lectura del **estado final** admite poner de manifiesto el **carácter relacional** entre cada parte obtenida y el todo o estado inicial: en el caso a) del ejemplo, el carácter relacional estaría dado por la expresión "un cuarto de la unidad".

Veamos, entonces, el lenguaje simbólico adecuado y la lectura del estado final para los tres casos de nuestra actividad

Lenguaje simbólico adecuado	Lectura del estado final
a) un círculo $\xrightarrow{\text{hace } \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{4}$ de un círculo	a) "un cuarto de la unidad"
b) 20 bolitas $\xrightarrow{\text{hace } \frac{3}{4}}$ $\frac{3}{4}$ de 20 bolitas = 15 bolitas	b) "tres cuartos de veinte"
c) 1 figura $\xrightarrow{\text{hace } \frac{1}{2}}$ $\frac{1}{2}$ de 1 figura	c) "un medio de la unidad"

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Como el aprendizaje requiere abundante actividad individual de los alumnos con material concreto, proponemos a modo de ejemplo, tomar tiras de papel de la misma longitud y construir sucesivamente:

- medios, cuartos y octavos;
- tercios, sextos y novenos;
- quintos y décimos.

Hallar la mitad, la cuarta parte, la mitad de un cuarto, ..., son tareas sencillas; la trisección de una tira para obtener "un tercio" requiere cierto desarrollo psicomotriz.

No ocurre lo mismo con la construcción de la tercera parte de un círculo: esta propuesta exige la división del ángulo central usando recursos que no están al alcance de niños pequeños.

Si se trata de construir quintos, la dificultad psicomotriz puede llegar a ser muy grande en cuyo caso es aconsejable elegir la parte y reconstruir la tira que la contiene cinco veces.

En todos los casos, el mérito de estas actividades está en la realización personal de cada alumno en la tarea de construir cada fracción mediante acciones de doblar, cortar, retener la parte propuesta.

Asimismo, con puñados de contadores (garbanzos, chapitas, etc.) cada alumno realiza la partición que le permite construir tres cuartos de doce contadores, cinco sextos de dieciocho contadores u otra fracción de un conjunto.

Con una buena selección del número de contadores se puede abarcar una variedad suficiente de situaciones que involucren séptimos, onceavos, treceavos, ... y cualquier fracción cuya construcción real sobre una unidad continua resulte difícil de manipular.

Lo que hay que tener presente para la elaboración de las nociones es la necesidad de conceder a los alumnos todo el tiempo que requiere por una parte, multiplicar las experiencias concretas sobre distintos materiales y por otra, abordar no sólo situaciones directas sino también situaciones inversas.

. reconstruir la unidad, mostrando la parte y enunciando qué fracción de la unidad es;

. indicar qué fracción es una tira de papel respecto de otra o un puñado de contadores respecto de otro.

"Si el lenguaje referente a fracciones se usa en forma consistente en tales situaciones, si se estimula en los niños la discusión y el registro de su propio quehacer, ciertas ideas sobre fracciones irán conformándose informalmente en su interior. Estas ideas pueden requerir una clarificación posterior, pero tienen su origen en esta experiencia informal y de ellas depende todo trabajo significativo con fracciones" (1)

(1) Williams, E.; Shuard, H. Elementary Mathematics today.

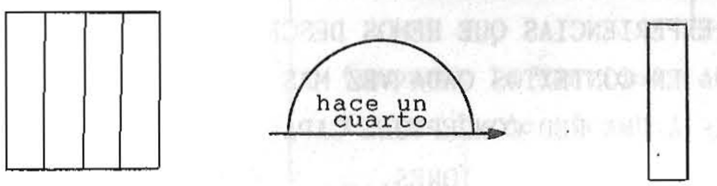
¿Qué ideas pueden surgir de la experiencia informal?

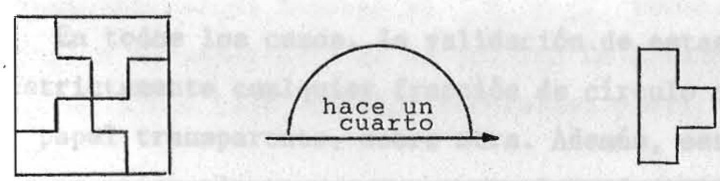
Las primeras que reconocemos son:

. la libertad de construir fracciones a partir de todo tipo de unidades (longitudes, superficies, pesos, tiempos, conjuntos de cosas, etc.);

. la necesidad de construir partes iguales sin dejar restos;

. la posibilidad de obtener distintas configuraciones del resultado aunque se construya la misma fracción a partir de la misma unidad. Por ejemplo:





. la complementación entre la fracción construida y la fracción desechada pues, al ser reunidas, reconstruyen la unidad; en particular, el sentido de "lo que falta para" completar la unidad. Veamos algunos ejemplos:

- si son las nueve y **media**, falta **media** hora para las diez;
- si son las tres y **cuarto**, faltan **tres cuartos** de hora para las cuatro.

En cuanto a cómo clarificar estas ideas, hay que considerar que en los niños ello involucra un largo proceso de desarrollo personal en consonancia con el aspecto evolutivo de la inteligencia. (1)

LA NOCION DE FRACCION QUE SE CONSTRUYE A PARTIR DE LAS EXPERIENCIAS QUE HEMOS DESCRIPTO, REQUIERE SER USADA EN CONTEXTOS CADA VEZ MAS AMPLIOS PARA DAR LUGAR A UNA RED CONCEPTUAL CADA VEZ MAS EXTENDIDA Y MAS RICA EN RELACIONES.

Veamos algunas estrategias que favorecen la ampliación de la red conceptual:

A. El modelo de los círculos.
B. Fracciones sobre una recta numérica.

(1) La indagación de este aspecto con relación a su incidencia en el aprendizaje puede hallarse en textos como: López Carretero, A. **¿Por qué y cómo enseñar fracciones?**.

A EL MODELO DE LOS CIRCULOS

Tomando 15 círculos de 20 centímetros de diámetro, cada uno dividido en sectores iguales (en número distinto en cada círculo), se puede disponer de 15 reproducciones de la misma unidad que presenten:

$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \frac{9}{9}, \frac{10}{10}, \frac{12}{12}, \frac{14}{14}, \frac{15}{15}, \frac{16}{16}, \frac{18}{18}, \frac{20}{20}$

El alumno que tenga un ejemplar propio de todo el modelo y círculos de papel transparente de igual diámetro, podrá resolver problemas relativos a ciertas fracciones de círculo, calcándolas y recortándolas.

EJEMPLO

Comparar la cantidad de papel necesaria para construir $\frac{1}{3}$ de círculo y $\frac{2}{5}$ de círculo; también $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$ ó $\frac{4}{9}$ y $\frac{8}{18}$. Espontáneamente aparece el lenguaje ligado a cada situación:

$\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{2}{5}$

$\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{5}{7}$

$\frac{4}{9}$ es equivalente a $\frac{8}{18}$

En todos los casos, la validación de estas afirmaciones se hace superponiendo estrictamente cualquier fracción de círculo obtenida por calcado y recortado en el papel transparente, sobre otra. Además, estas situaciones de comparación pueden generar otros planteos que se resuelven de manera análoga.

. buscar una fracción de círculo mayor que ...

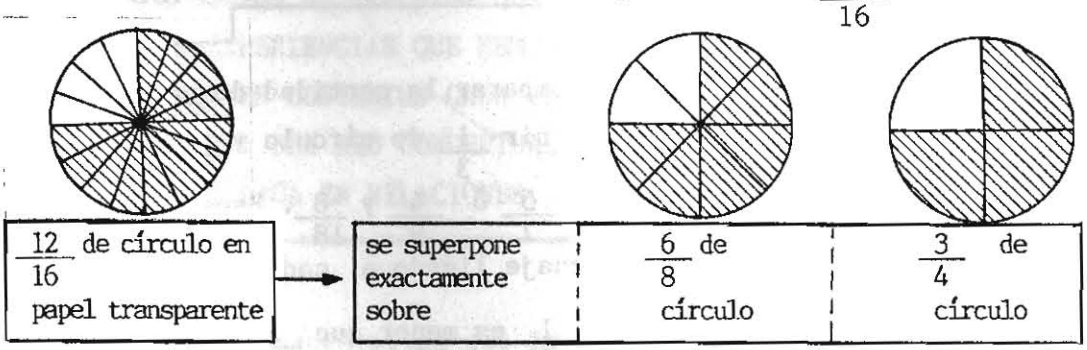
. buscar una fracción de círculo menor que ...

. buscar una fracción de círculo equivalente a ...

A partir de estas experiencias se puede llegar a simplificar o amplificar fracciones, a reunir dos fracciones para obtener una tercera, a quitar a una fracción otra fracción pues -en este contexto- el significado de estas expresiones alude siempre a las partes de círculo que se construyen con papel transparente y a su manipulación en acciones concretas.

EJEMPLOS

a) "Simplificar $\frac{12}{16}$" es encontrar, en un círculo dividido en menor número de sectores, una fracción equivalente a $\frac{12}{16}$.

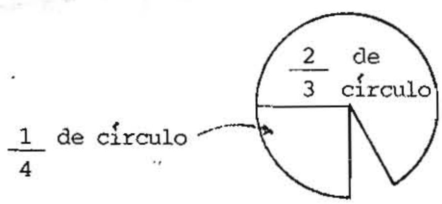


b) Análogamente, "amplificar $\frac{2}{3}$" es encontrar, en un círculo de mayor número de sectores, una fracción equivalente a $\frac{2}{3}$.

c) "Reunir o sumar $\frac{3}{8}$ y $\frac{2}{8}$" es agregar consecutivamente el calcado de una fracción al calcado de la otra fracción e indicar qué fracción del círculo representa todo el papel usado en la reunión.

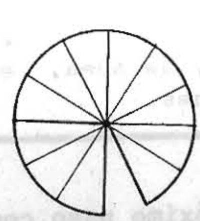
d) "Quitar o restar $\frac{2}{9}$ a $\frac{5}{9}$" es calcar la segunda fracción en papel transparente y dentro de ella, calcar la primera para recortarla y luego interpretar qué fracción de círculo representa el trozo de papel restante.

Cuando se trata de sumar (o restar) fracciones de distinto denominador, lo que presenta cierta dificultad es la búsqueda de la interpretación para la fracción obtenida pues, en general, hay que buscarla en un círculo diferente a los empleados para calcar los sumandos (o el minuendo o el sustraendo). Así, ante la propuesta de reunir o sumar $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ de un círculo, la construcción da por resultado:



¿Sobre qué círculo se puede hacer la interpretación correcta de este resultado?

Para el alumno sólo cabe una exploración empírica, a través de los distintos círculos, hasta encontrar el más adecuado. Si bien en el primer momento puede resultar azarosa, es posible mejorar la estrategia dando un criterio de validación como el que sigue: que el círculo buscado permita el ajuste perfecto tanto de los límites de la fracción-resultado como los límites de las fracciones-datos. En nuestro ejemplo resultaría:



Como vemos, sólo en el círculo $\frac{12}{12}$ se obtiene el ajuste perfecto de:

$\frac{11}{12}$ sobre la fracción-resultado y también:

$\frac{3}{12}$ sobre la fracción-dato $\frac{1}{4}$

$\frac{8}{12}$ sobre la fracción-dato $\frac{2}{3}$

A partir de esta experiencia es posible obtener formas alternativas de escribir la misma suma: en lugar de $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$, puede escribirse $\frac{3}{12} + \frac{8}{12}$.

Un desafío interesante que da lugar a una intensa búsqueda, es pedir a los niños reunidos en grupos, la mayor cantidad de sumas que se puedan escribir y cuyo resultado sea, por ejemplo $\frac{11}{12}$, pues una vez que agotan todas las posibilidades que involucran doceavos, no tardan en aparecer las que se obtienen usando fracciones equivalentes acrecentando así su familiaridad con el problema de expresar sumandos en formas equivalentes.

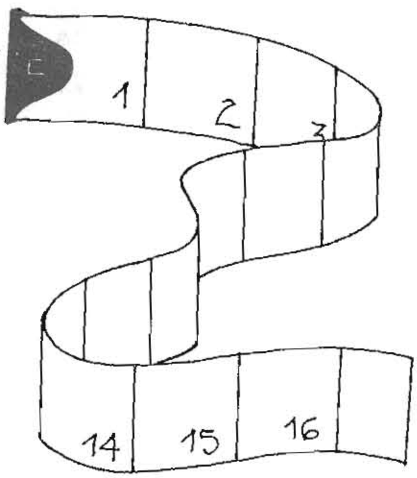
CONCLUSION

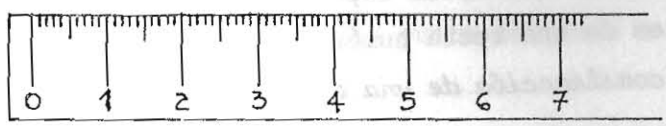
El **modelo de los círculos** permite resolver problemas de comparación, de amplificación, de suma, de resta de fracciones, en un número limitado de situaciones.

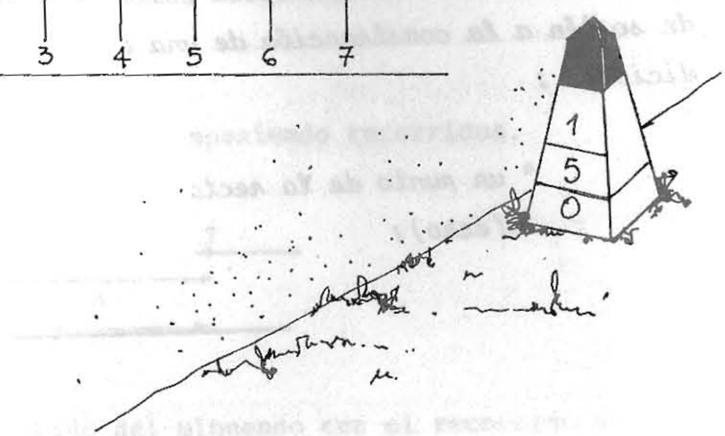
El próximo paso consiste en recurrir a un nuevo contexto que permita mayor generalidad: el modelo de las fracciones sobre una recta numérica.

B EL MODELO DE LAS FRACCIONES SOBRE UNA RECTA NUMERICA

Hay diversos ejemplos materiales en los que las longitudes o los segmentos se usan como modelos de la serie numérica.







Si los niños realizan abundantes **experiencias de medida con instrumentos graduados** (no sólo cintas métricas o reglas sino también termómetros, vasos medidores de capacidad o volumen, probetas, pipetas) llegan a familiarizarse con el hecho de leer números sobre escalas de medida.

También la actividad de reunir datos numéricos y volcarlos en un gráfico presenta una situación análoga.

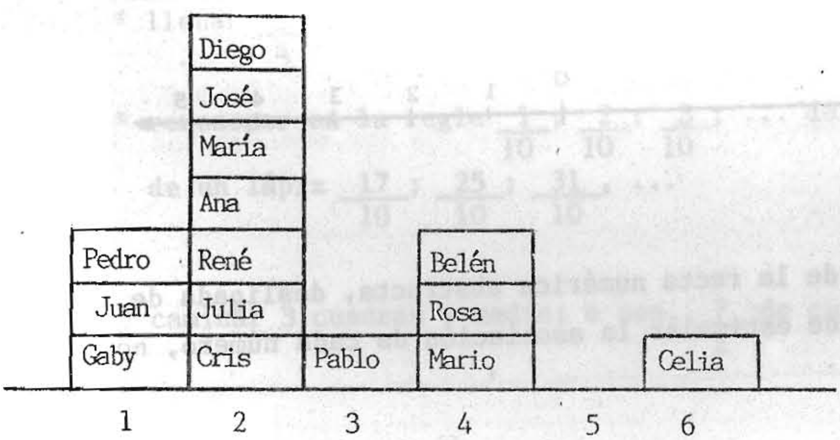
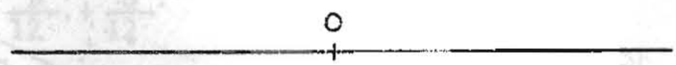


Gráfico del número de hijos de la familia a que pertenece cada uno de los 15 alumnos de un grupo.

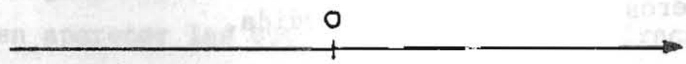
En esta última actividad el número está asociado a un segmento. Leer "familias de 1 hijo, ... familia de 3 hijos, ...", involucra señalar todo el espacio comprendido entre los dos extremos del segmento. En una regla, en una cinta métrica, el número está asociado a un extremo del segmento -el más alejado del origen de la escala- lo mismo que los mojones que señalan los kilómetros en una ruta.

Se trata de que estas experiencias promuevan el reconocimiento de los rasgos esenciales de una recta numérica; esto es, el hecho de que ***una recta sirve de sostén a la construcción de una escala** cuando **se respetan las siguientes condiciones** :*

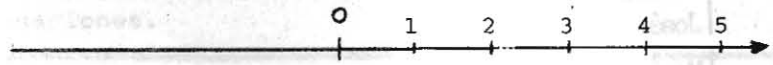
* *un punto de la recta es el origen de la escala; se lo indica con 0 (cero);*



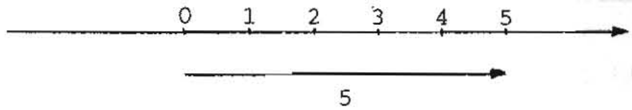
* *uno de los sentidos de la recta se toma como sentido de crecimiento de de la escala; se indica con una flecha;*



* *un segmento, considerado como unidad, se transporta sucesivamente sobre la recta, en el sentido de crecimiento y a partir del origen, para establecer los puntos que se indican con la serie numérica.*

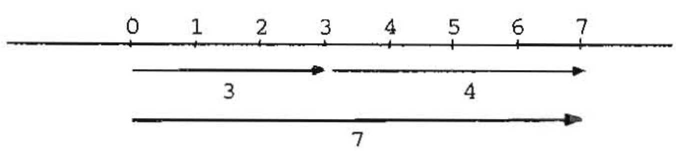


Finalmente, el uso de la recta numérica abstracta, desligada de todo tipo de unidades de medida, ha de estimular la asociación de cada número, no sólo al punto que él señala, sino también a un **recorrido o traslación sobre la recta** de ese mismo número de unidades.



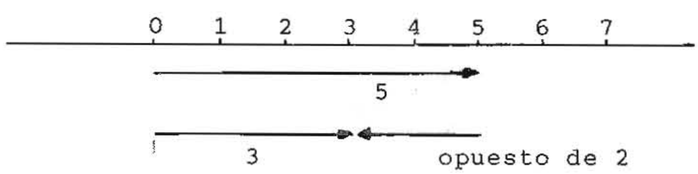
Aquí la flecha no es más que la forma en que queremos mostrar el movimiento que, en la realidad, un niño debe hacer con la punta del dedo o del lápiz para indicar un número.

Esta asociación permite realizar sumas componiendo recorridos.



$3 + 4 = 7$

Para restar se compone el recorrido del minuendo con el recorrido del opuesto del sustraendo.



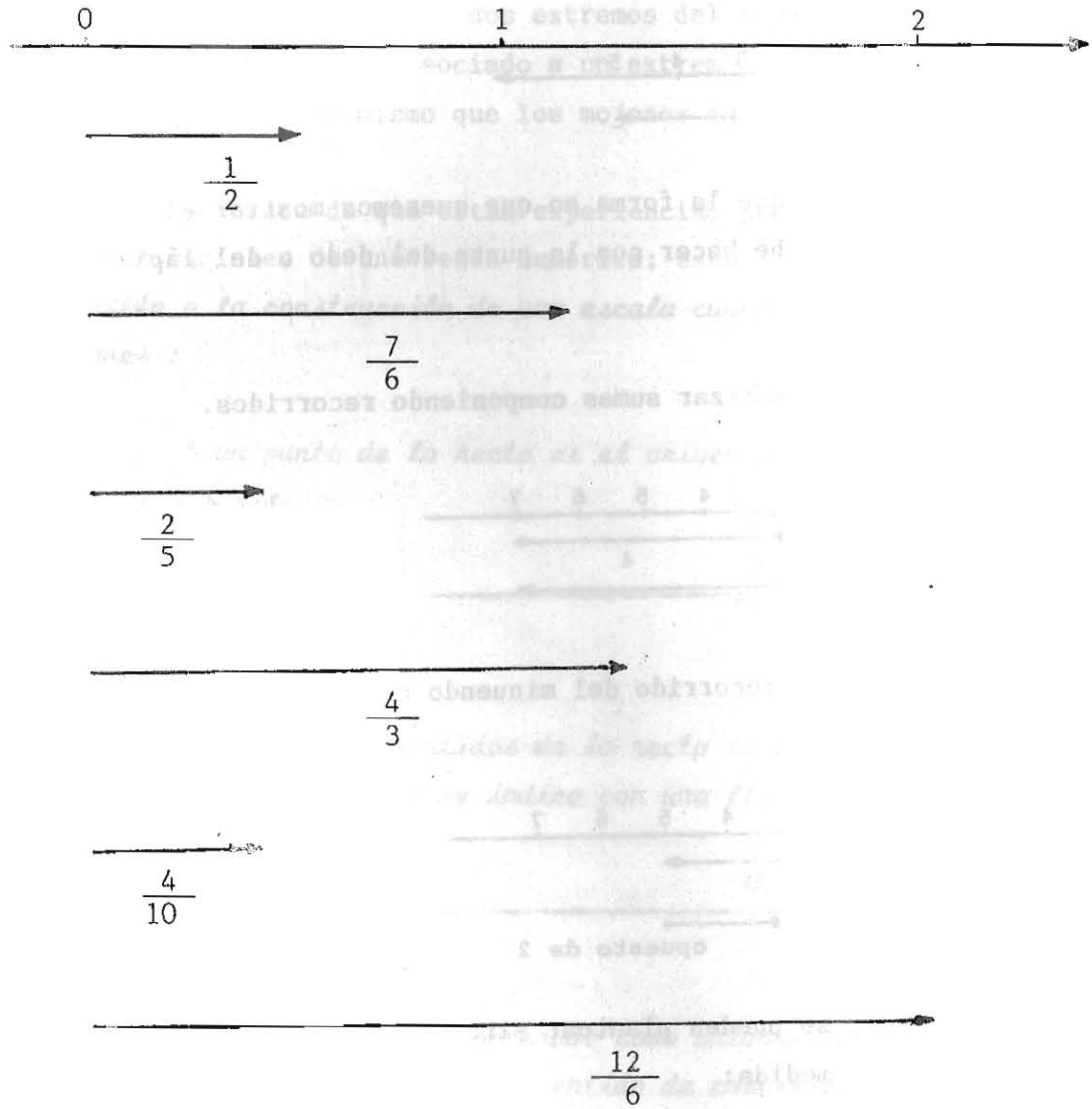
$5 - 2 = 3$

De una manera natural, se pueden plantear situaciones que obliguen a interpolar puntos en una escala de medida:

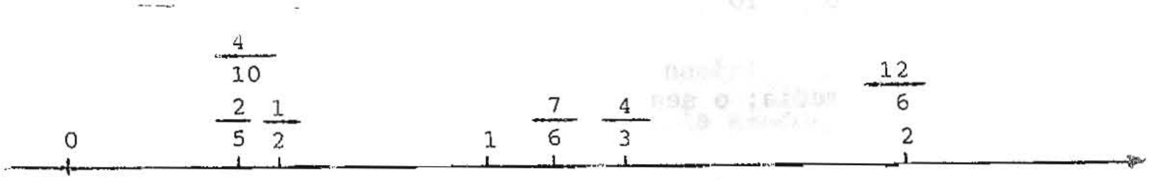
* llenar $\frac{1}{4}$ de litro en un vaso graduado;
* reconocer en la regla $\frac{1}{10}$; $\frac{2}{10}$; $\frac{3}{10}$; ... de cm; recorrer con la punta de un lápiz $\frac{17}{10}$; $\frac{25}{10}$; $\frac{31}{10}$, ...

* caminar 3 cuadras y media; o sea, $\frac{7}{2}$ de cuadra. Análogamente, sobre la

recta numérica:



Una vez realizada la experiencia de recorrer la fracción indicada con la punta del lápiz, resulta conveniente una **representación** que muestre los puntos de llegada en cada caso:



La ventaja de este modelo consiste, principalmente, en ampliar las posibilidades de representación de fracciones permitiendo mostrar:

* fracciones mayores que la unidad;
* fracciones equivalentes a 2, 3, ..., y cualquier otro número exacto de unidades;
* fracciones que tienen denominadores difíciles de dibujar sobre círculos u otras formas no lineales de representación (11, 13, ... etc.)

La dificultad mayor estriba en la elección de la longitud asignada a la unidad de una manera conveniente para que sea sencillo representar **todas** las fracciones involucradas en el mismo problema.

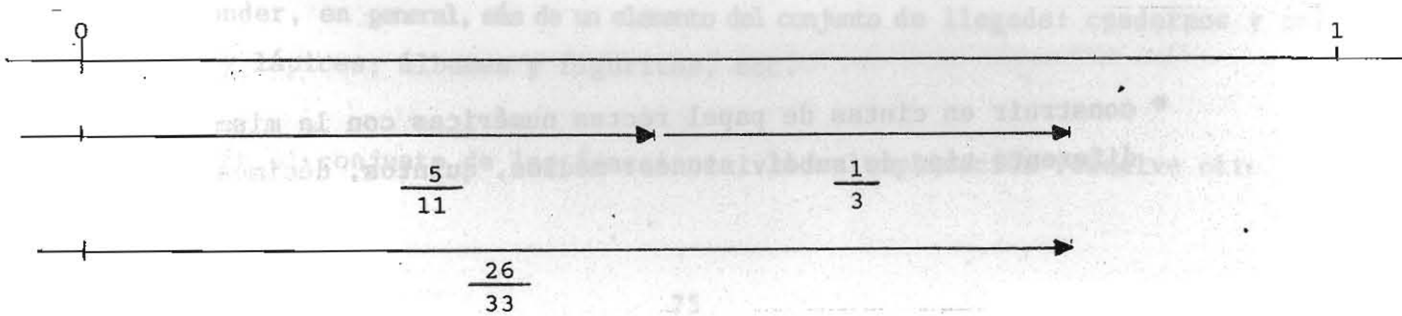
Por ejemplo, ¿qué es mayor $\frac{18}{13}$ ó $\frac{3}{2}$?

Para hacer posible la representación, la unidad tiene 13 cm.

En este contexto "es mayor que" significa "hace un recorrido mayor" o "llega más lejos".

También las operaciones de suma y resta admiten una gama más amplia de posibilidades.

La suma $\frac{5}{11} + \frac{1}{3}$ se puede plantear sobre una recta numérica que tenga 16.5 cm. (o sea 33 medios centímetros).

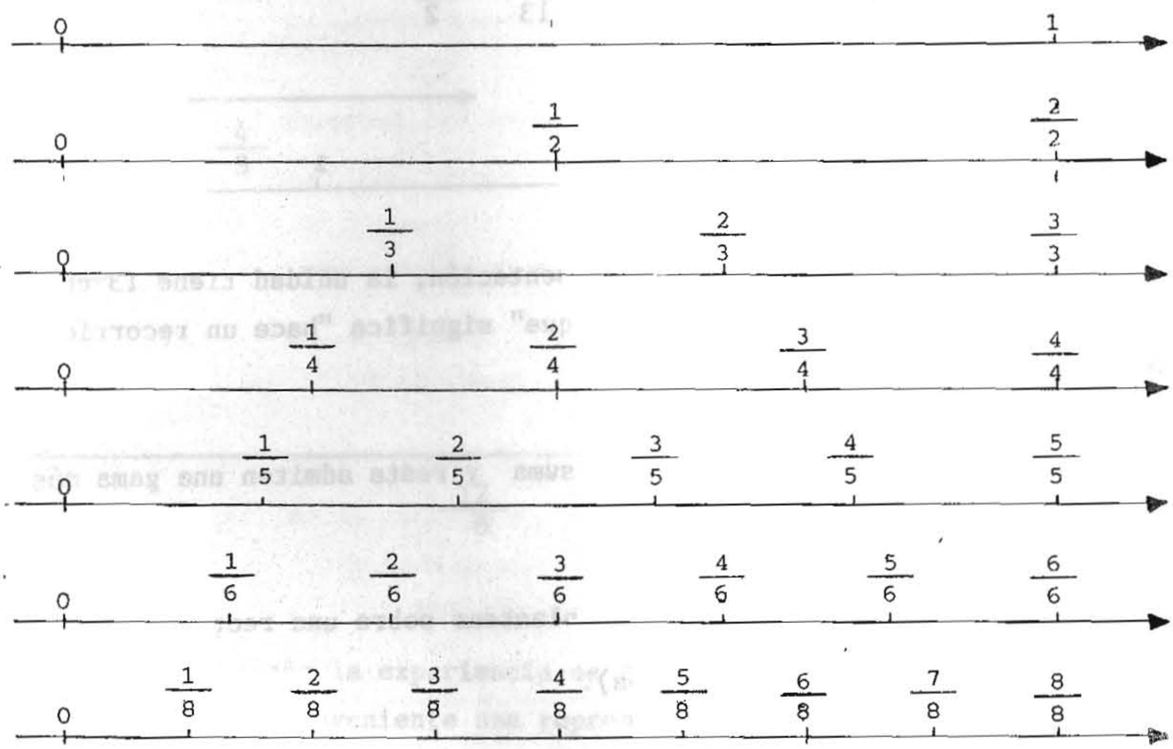


Claro que el dominio de este recurso depende esencialmente de haber realizado un uso muy graduado de situaciones, ya que las que se muestran en estos ejemplos, resultan ser las más complejas por alcanzar.

En particular, hay ciertas actividades que pueden contribuir eficazmente a la formación del concepto de recta numérica y su uso para resolver problemas con fracciones.

Por ejemplo,

* hacer distintas subdivisiones o particiones de un segmento que se toma como unidad:



* construir en cintas de papel rectas numéricas con la misma unidad y diferente tipo de subdivisiones: medios, quintos, décimos y quincea-

vos, medios, cuartos, octavos, y dieciseisavos; etc.

* anticipar el número de cm. o lados de cuadraditos que conviene dar a la unidad cuando en un problema se combinan:

- medios y tercios
- tercios y cuartos
- medios y quintos
- sextos y novenos, etc.

* hacer descomposiciones de números en factores:

12 = 6 x 2 = 2 x 6	15 = 3 x 5 = 5 x 3
12 = 3 x 4 = 4 x 3	15 = 1 x 15= 15 x 1
12 = 1 x 12 = 12 x 1	

Todos estos problemas pueden integrarse formando una única red conceptual que puede recorrerse en todos los sentidos hasta asegurar que se han cubierto todos los aspectos que inciden en la buena construcción de una recta numérica que logre representar eficazmente el problema propuesto.

Con los modelos anteriores hemos reflexionado sobre las operaciones de adición y sustracción. Trabajaremos ahora sobre otras operaciones.

MULTIPLICACION Y DIVISION ENTRE FRACCIONES

La multiplicación entre números naturales está vinculada con la resolución de problemas en los que a cada elemento de un conjunto de partida, se hacen corresponder, en general, más de un elemento del conjunto de llegada: cuadernos y precios; niños y lápices; álbumes y figuritas, etc.

En el conjunto de las fracciones, la multiplicación resuelve otro tipo de problemas.

EJEMPLOS

1. En la heladera se guardaron $\frac{3}{4}$ de un pastel; Mariana se lleva a la escuela la mitad. ¿Qué parte del pastel se lleva Mariana?

2. En un cuadrado de papel, Agustín pintó un rectángulo que tiene de ancho $\frac{1}{3}$ del lado del cuadrado y de largo la cuarta parte del otro lado. ¿Qué parte del cuadrado pintó?

En el primer problema se trata de encontrar la mitad de $\frac{3}{4}$ de un entero, en cambio en el segundo es necesario calcular la superficie de un rectángulo cuyas dimensiones son fracciones de los lados de un cuadrado y expresar esa área en relación con el cuadrado.

¿Qué podemos inferir de estos ejemplos?

Si analizamos los dos casos, vemos que la multiplicación de fracciones se puede aplicar a:

- la expresión de una parte de una fracción, es decir, de la "fracción de otra fracción";
- la multiplicación de las medidas de dos longitudes que dan por resultado un área; generalizando, al producto de dos cantidades de igual o distinta magnitud para obtener una cantidad de otra magnitud diferente.

La operación inversa, es decir la división entre fracciones, cobra distintos sentidos según el problema directo que la origine. Volvamos a nuestros ...

EJEMPLOS

1.a. Mariana lleva a la escuela una porción de $\frac{3}{8}$ de un pastel. Esta porción es la mitad del trozo guardado en la heladera. ¿Qué parte de pastel se había guardado en la heladera?

1.b. En la heladera se guardaron $\frac{3}{4}$ de un pastel. Mariana saca para llevar a la escuela un trozo de $\frac{3}{8}$ de pastel. ¿Qué parte de lo que había en la heladera se llevó Mariana?

2.a. En un cuadrado de papel, Agustín pintó un rectángulo que tiene de ancho $\frac{1}{3}$ del lado del cuadrado y $\frac{1}{12}$ de su área. ¿Cuál es el largo del rectángulo?

2.b. En un cuadrado de papel, Agustín pintó un rectángulo que tiene de largo $\frac{1}{4}$ del lado del cuadrado y $\frac{1}{12}$ de su área. ¿Cuál es el largo del rectángulo?

En el primer caso se trata de determinar:

a) dada una fracción y su relación con otra fracción de la misma unidad, cuál es la segunda fracción;

b) conocidas dos fracciones de la misma unidad, cuál es la relación entre ellas.

En el segundo caso la situación es la siguiente: conocida un área y una de sus dimensiones (ancho o largo),calcular la otra.

¿Cómo abordar la resolución de problemas multiplicativos que involucren fracciones?

Desde una teoría interactiva, la formación de nuevos conocimientos relacionada con la **construcción de un concepto**, debe tener en cuenta:

* **un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.** Es decir, un espacio de problemas diversos aunque relacionables,

* **un conjunto de invariantes operatorios.** Es decir, lo que tienen de común las distintas situaciones analizadas,

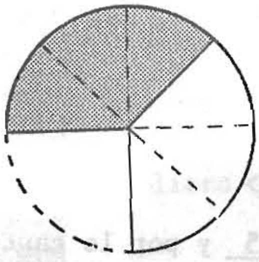
* **un conjunto de representaciones simbólicas** que permitan, no sólo representar las relaciones en juego, y el tratamiento que se les aplique, sino también posibilitar la comunicación del conocimiento.

Hasta ahora hemos analizado el significado de las operaciones de multiplicación y división entre fracciones, a partir de la reflexión sobre enunciados de problemas que ellas permiten resolver.

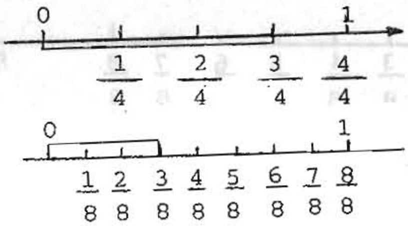
Delimitado el problema, su resolución puede darse en diferentes contextos, por ejemplo:

* en el marco de las acciones físicas,
* geométricamente,
* a través de gráficos,
* o bien, numéricamente.

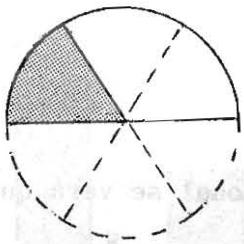
El modelo de círculos fraccionados, o el de la recta numérica, permiten mostrar la solución del problema de MARIANA (pág 76), o sea, una "fracción de otra fracción".



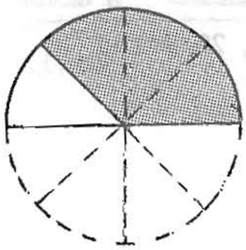
$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$



Análogamente,



$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$



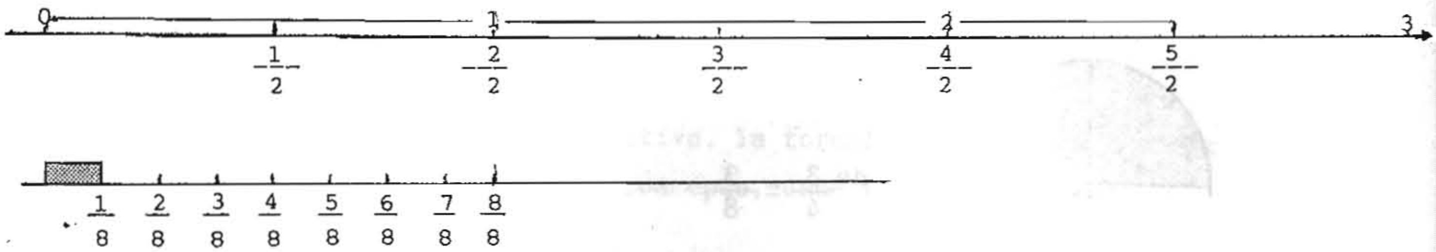
$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

y generalizar, simbólicamente

$$\frac{a}{b} \text{ de } \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Si se tratara de calcular el número de mates que pueden llenarse con cinco paquetes de medio kilo de yerba, sabiendo que cada mate es de $\frac{1}{8}$ kg. de yerba

El recurso más adecuado parece ser la recta numérica



pues en ella puede observarse que $\frac{1}{8}$ entra 20 veces en $\frac{5}{2}$ y por lo tanto:

$$\frac{5}{2} : \frac{1}{8} = 20 \qquad (1)$$

Pero sabiendo que cada mate contiene $\frac{1}{8}$ kg. de yerba, es evidente que 1 kg. de yerba permite llenar 8 mates y, por lo tanto:

$$\frac{5}{2} \times 8 = 20 \qquad (2)$$

Si se tiene en cuenta el análisis dimensional se verá que en (1)

$$\frac{5}{2}\ \text{kg.} : \frac{1}{8}\ \frac{\text{kg.}}{\text{mate}} = 20\ \text{mates}$$

mientras que en (2)

$$\frac{5}{2}\ \text{kg.} \times 8\ \frac{\text{mates}}{\text{kg.}} = 20\ \text{mates}$$

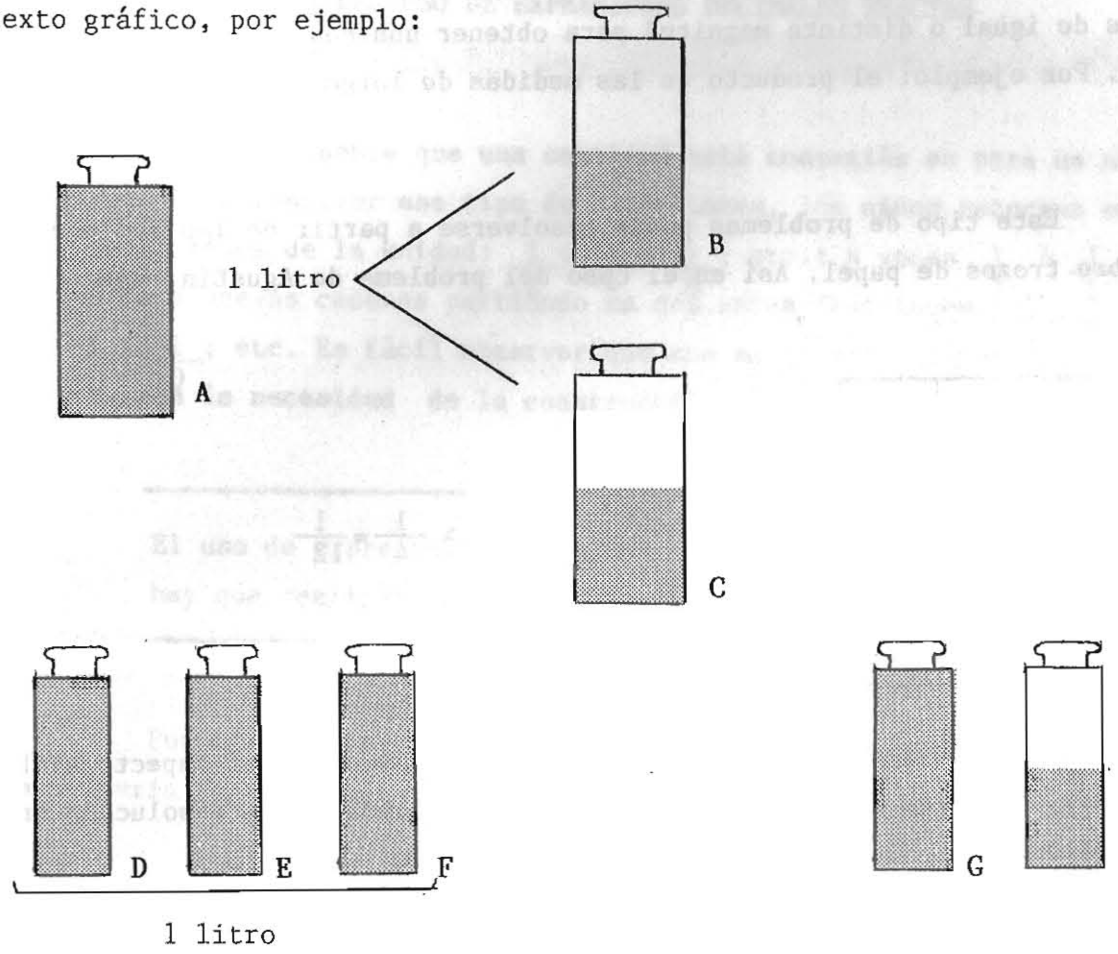
Sólo después de analizar varios ejemplos de este tipo, los alumnos estarán en condiciones de observar, por ejemplo, que

$$\frac{5}{2} : \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \times 8$$

y más adelante generalizar

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

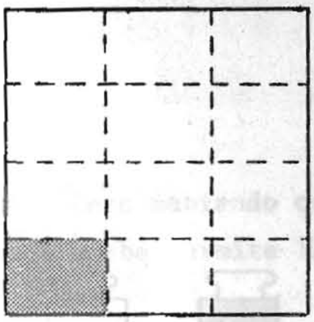
También se pueden presentar interesantes problemas a partir de un contexto gráfico, por ejemplo:



1. ¿Cuánto aceite contiene la garrafa B?
2. ¿Cuánto aceite contiene la garrafa D?
3. ¿Cuánto aceite contiene la garrafa H?
4. ¿Qué cantidad de aceite se ha representado en el total de garrafas dibujadas?
5. Para envasar el total de aceite en garrafas de $\frac{1}{8}$ litro ¿cuántas se necesitan? ¿Todas quedarán llenas? Se quiere colocar la misma cantidad de aceite en cada una ¿qué operación aritmética resuelve este problema?. Escríbala.
6. Invente un problema relacionado con el gráfico.

Consideramos ahora, los problemas que se refieren al producto de dos cantidades de igual o distinta magnitud para obtener una cantidad de otra magnitud diferente. Por ejemplo: el producto de las medidas de largo y ancho para dar un área.

Este tipo de problemas puede resolverse a partir de las acciones concretas sobre trozos de papel. Así en el caso del problema de Agustín, pág. (76)



$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Queremos destacar que, en todo tipo de problemas, el aspecto simbólico sólo puede abordarse después de haber intentado libremente la resolución en otros contextos.

Veremos a continuación el último tema correspondiente a esta unidad.

LA CONVENIENCIA DEL USO DE EXPRESIONES DECIMALES EXACTAS O APROXIMADAS

No es frecuente que una cantidad esté contenida en otra un número exacto de veces. Para resolver ese tipo de situaciones, los niños recurren espontáneamente a particiones de la unidad: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; etc.; a veces $\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{5}$ y si fuera necesario a nuevas cadenas partiendo en dos estas fracciones: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{12}$... ó $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{20}$; etc. Es fácil observar que una mayor precisión en el proceso de medida implica la necesidad de la construcción de las fracciones.

El uso de expresiones decimales es particularmente adecuado cuando hay que realizar numerosos cálculos entre fracciones.

Por otra parte, no todos los problemas que pueden presentarse en la escuela primaria se resuelven mediante fracciones.

EJEMPLO

Buscar el lado de un cuadrado de área 6, es encontrar un número x tal que x.x = 6. En este caso, usando fracciones se pueden establecer aproximaciones tan precisas como se desee, pero no se puede arribar de ese modo a una expresión exacta pues la raíz cuadrada de seis es un número real pero no racional.

Nos interesa el registro de poblemas de esta naturaleza para abrir el camino hacia un análisis posterior de las sucesivas extensiones de los campos numéricos.

ANEXO I

Lo invitamos a realizar la siguiente actividad:

ACTIVIDAD:

Asunción López Carretero (*) ha investigado sobre la construcción escolar de la noción de fracción en alumnos cuyas edades oscilan entre 7 y 14 años. A continuación transcribimos algunos registros de observaciones que corresponden a esa investigación.

Caso A: Para repartir 4 caramelos entre 5 niños, resuelve, gráficamente, partir cada caramelo en 5 partes y entregar una a cada niño. Pero al escribir la explicación duda, no sabe si a cada una le corresponde $\frac{1}{5}$ ó $\frac{4}{5}$.

Caso B: Para distribuir 10 caramelos entre 3 niños, la unidad que queda la subdivide en $\frac{4}{4}$ ¡y le sobra $\frac{1}{4}$! Dice "el trozo que sobra lo hacemos en cuatro partes. Damos una parte a cada niño y la otra parte sobra".

Caso C: Para repartir 3 caramelos entre 4 niños, dice: "haré 12 partes y entregaré $\frac{3}{4}$ partes a cada uno".

Caso D: Para distribuir 12 caramelos entre 9 niños, una vez repartidos los enteros, fracciona dos elementos del resto en cuartos, los reparte a 8 niños y el otro lo hace corresponder al noveno niño sin fraccionarlo.

Caso E: Para repartir 8 caramelos entre 6 niños, da una caramelo a cada niño y fracciona el resto en cuartos y los distribuye entre los 6 niños. Toma los $\frac{2}{4}$ sobrantes y hace tres partes de cada uno $\frac{3}{12}$ y los distribuye entre los 6 niños. El sujeto explica "del cuarto que sobraba he hecho tres partes y las he dado a los 3 niños y del otro igual".

Escriba, en hoja aparte, las letras correspondientes a los casos en los que usted pueda observar respuestas que indiquen el mismo nivel de evolu-

(*) Investigadora del IMIPAE (Instituto Municipal de Investigaciones Psicológicas Aplicadas a la Educación, Ayuntamiento de Barcelona, España).

ción para la noción de fracción.

Escriba, también, las letras correspondientes a los casos, desde el que usted considere de menor nivel de evolución hasta el más evolucionado.

Al finalizar la guía, usted encontrará orientaciones para su autoevaluación.

Después de haber realizado la actividad anterior, no dudamos de que usted estará interesado en la lectura completa del artículo que Asunción López Carretero publicó, sobre esta investigación en la Revista Cuadernos de Pedagogía. Se lo ofrecemos después de las orientaciones para la autoevaluación.

ORIENTACIONES PARA AUTOEVALUACION

López Carretero ha clasificado las conductas observadas, las dificultades y los logros en el proceso de construcción de las fracciones. Las ha agrupado en tres momentos:

Momento	Características	Ejemplo
I	- Pérdida de equivalencia de las partes al fraccionar la unidad. Imposibilidad de coordinar el número total de partes que se han de obtener de cada unidad con el número total de partes que se precisan para repartir.	Caso B Caso D
II	- Las equivalencias se conservan en el fraccionamiento del entero, pero con el uso prioritario de la fracción unitaria. Cada entero se fracciona por separado, sin que haya relación entre más de una unidad fraccionada.	Caso E Caso A
III	- Descubre la utilización de estrategias multiplicativas, tanto en la relación entre el entero y sus partes, como entre el conjunto de éstas y las partes proporcionales del reparto.	Caso C

EGB

¿POR QUÉ Y CÓMO ENSEÑAR FRACCIONES?

¿Qué leyes rigen la comparación del número fraccionario? ¿Qué estrategias de enseñanza y aprendizaje siguen maestros y alumnos? He aquí algunos apuntes y propuestas didácticas sobre el tema.[1]

ASUNCIÓN LÓPEZ CARRETERO*

Comentaba Piaget la sorpresa de un alumno de primaria, al comprobar que su profesor un día les explicaba que 3 + 2 = 5 y al día siguiente que 4 + 1 = 5. El niño se extrañaba de lo voluble que era su profesor.

En contraste con esta anécdota, describe la alegría y el placer que despierta en los niños el descubrir, en situación de juego libre, tras amontonar piedrecitas, colocándolas en círculo y en hilera, que, a pesar de todos estos cambios espaciales, ¡siempre tienen 9 piedrecitas!

Estos dos ejemplos marcan la diferencia entre enseñar matemáticas, actividad del profesor, de la que el alumno sólo comprueba el resultado, y aprender, actividad del ser humano, quién, a través de la lógica de sus propias acciones, descubre las leyes lógico-matemáticas. En este segundo caso, es preciso construir el camino que lleva a la respuesta.

El profesor, en el aprendizaje institucionalizado, intenta a menudo aproximarse al alumno, pero en muchos casos mantiene el esquema de «demostrarle» los conocimientos, más que el de estimular su actividad mental. Utiliza, en el aula, materiales, como objetos, figuras, dibujos, pero todos estos soportes se convierten en fuentes de información en los que el alumno ha de traducir, no construir, los razonamientos matemáticos.

En la enseñanza de las fracciones, tema que nos ocupa aquí, se propone a los niños, a través de imágenes reales o simbólicas, la representación imaginada del entero y sus partes. Pongamos un ejemplo concreto: el maestro presenta un objeto geométrico (manzana, pastel, etc.) y señala que se puede dividir en un cierto número de partes iguales y que la reunión de todas ellas permite reconstruir de nuevo el objeto inicial. Resulta fácil realizar una demostración de este razonamiento, porque las partes, iguales, de un objeto pueden sobreponerse, para constatar su igualdad. Con el simbolismo, (1/4 = 1/4 = 1/4 = 1/4), o (1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 4/4), se pretende fijar estas ideas. Por el mismo procedimiento empírico de realizar materialmente la partición de objetos se introducen las equivalencias, y, posteriormente, a través del simbolismo, las reglas de cálculo.

Un sondeo realizado con nuestros alumnos nos permitió comprobar la fragilidad de estas adquisiciones. Basta preguntar sobre estas cuestiones de forma poco habitual, o bien pedir aclaraciones de un ejercicio resuelto escolarmente, para descubrir las lagunas que se ocultan tras la seguridad del alumno. Así, uno de ellos nos explica: «25/50, es muy fácil de hacer, se sacan los factores comunes, VA FRACCION . Ah! pero no puede ser un número tan pequeño; creo que se divide 25/2 y ya está, 12,5, así está bien».

Si les pedimos que nos representen en el papel 6 mitades, surgen multitud de desacuerdos; unos se inclinan por dibujar 15 partidos por la mitad, otros 6 objetos en mitades, otros finalmente dibujan 4 objetos partidos por la mitad... ¡y no llegan a un acuerdo!

Respecto a la suma de fracciones de diferente denominador, la mayoría ignoran el significado del algoritmo escolar. Al pedirles cómo lo harían ellos, si no conocieran esta forma, se inclinan por soluciones más sencillas como sumar denominadores y numeradores sin más.

Todas estas respuestas llevan al desánimo del profesorado, quienes afirman que las fracciones, al igual que otros contenidos de ciclo superior, son demasiado abstractos para

Cuadernos de Pedagogía 145

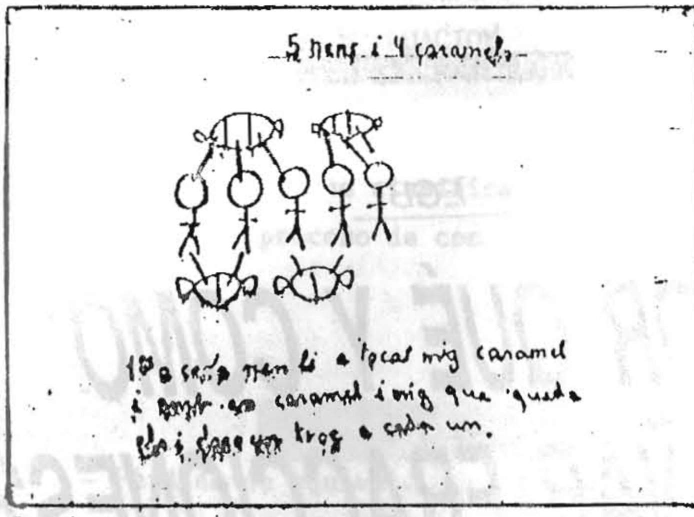


Figura 1.

los alumnos y están alejados de la realidad. ¿Por qué empeñarse, entonces, en enseñar este concepto? ¿Cuál es su utilidad para el alumno?

La búsqueda de respuestas a éstas y otras preguntas que surgen en torno al tema, nos lleva a una reflexión epistemológica sobre la orientación que se pretende dar a la educación matemática.

¿Cuál es la significación epistemológica del concepto de fracción? ¿Qué evolución ha seguido en el curso de la historia del pensamiento colectivo? ¿Cómo construye el niño este concepto?

Comenzaremos por exponer algunos datos sobre la construcción espontánea de este concepto, por parte de los alumnos.

¿Qué piensan los alumnos?

Para averiguar cuáles son las ideas de los alumnos en torno a este concepto, elaboramos una serie de problemas prácticos de repartición, cuya resolución implica el recurso de la fracción. Se les invita a trabajar con diferentes colecciones de objetos (caramelos, regalices, etc.); la tarea que han de realizar es la de distribuirlos en partes iguales entre un número determinado de niños, sin que sobre ningún elemento.

Han de prever cómo lo harán, efectuarlo prácticamente y, posteriormente, representar simbólicamente el proceso que han seguido, con la finalidad de comunicarlo a otro compañero, de modo que, viendo el papel, pueda seguir el mismo método.

Esta sencilla tarea ha suscitado una variedad sorprendente de técnicas de partición, que, como veremos, corresponden a diferentes niveles en el proceso de elaboración del concepto de fracción.

A los ojos del adulto, repartir en partes iguales, fraccionando la unidad y establecer equivalencias entre las partes obtenidas, es un razonamiento muy simple.

Sin embargo, no es así para el pensamiento del alumno, quien ha de construir por sí mismo estas relaciones. Ello se pone de manifiesto con la producción de una gran riqueza de estrategias. Curiosamente, algunas de ellas recuerdan la forma de calcular fracciones propia de los antiguos egipcios, que fueron unos de los primeros en utilizarlas.[2]

Las conductas observadas ponen de relieve las dificultades y los logros en este proceso. Las hemos agrupado en tres momentos.

Un primer momento se caracteriza por una pérdida de la equivalencia de las partes al fraccionar la unidad. Esta dificultad se debe a la imposibilidad de coordinar el *n.º de partes* que se han de obtener de cada unidad, con el número total de partes que se precisan para repartir. Se trata de una doble correspondencia, entre la fracción y el entero, y entre el n.º de partes total y el que ha de dar a cada uno. Frente a este obstáculo surgen dos actitudes.

• La no equivalencia entre las partes puede estar en el interior de cada objeto, ya que el sujeto busca el n.º de partes necesario para repartir, prescindiendo del tamaño de las mismas. (Figura 1.)

Para repartir 4 caramelos entre 5 niños, parte 3 caramelos por la mitad y las reparte; a continuación, con el caramelo y 1/2 sobrantes subdivide una unidad en 3 partes y con la otra 1/2 hace 2 partes, de tal forma que tiene 5 partes aunque no equivalentes. Así afirma, «primero a cada niño le tocará medio caramelo y con el caramelo y medio que sobra les daré un trozo a cada niño». Como queda claro por su respuesta, para él lo que cuenta es el número, no la relación de las partes con el entero ni su equivalencia (por ello los denomina «trozos»)

• En el interior de cada unidad las partes son equivalentes, pero no la correspondencia entre las partes de cada uno de los niños.

En unos casos sobrarán elementos (figura 2). Divide 10 caramelos entre 3 niños; la unidad que queda la subdivide en 4/4 ¡y le sobra 1/4! «El trozo que sobra lo hacemos en 4 partes. Damos una parte a cada niño y la otra parte sobra.» En otros casos, las partes son desiguales (figura 3): para distribuir 12 caramelos entre 10 niños, una vez repartidos los enteros, fracciona dos elementos del resto en 1/4 y el otro lo hace corresponder sin fraccionarlo.

Con estas ingeniosas estrategias, los alumnos ponen de manifiesto los obstáculos que encuentran al intentar fraccionar el entero, conservar la igualdad de sus partes y, a la vez, operar en un contexto de repartición con estas dos categorías: unidad y partes de la unidad.

En un segundo momento, las equivalencias se conservan en el fraccionamiento del entero, pero con el uso prioritario de la fracción unitaria. Es decir, cada entero se fracciona por separado, sin que haya relación entre más de una unidad fraccionada. La duplicación es el método más utilizado en la partición. Se caracteriza también este momento por la utilización de estrategias aditivas en el reparto, en el cual una serie de particiones sucesivas sustituyen a la anticipación global del n.º de partes que se necesitan. Veamos un ejemplo (figura 4): para repartir 8 caramelos entre 6 niños, da un caramelo a cada niño y fracciona el resto en 1/4 y los distribuye entre los 6 niños. Toma los 2/4 sobrantes y hace tres partes de cada uno –3/12– y los distribuye entre los 6 niños. El sujeto explica: «Del cuarto que sobraba he hecho tres partes, y las he dado a los tres niños y del otro igual» (uso fracción de numerador 1). Otro ejemplo representativo de este nivel lo observamos en esta conducta de repartición de 4 regalices entre 5 niños. (Figura 5.)

Curiosamente, hemos encontrado estrategias similares en la fracción primitiva utilizada por los egipcios, pueblo de una economía muy desarrollada, que tiene en el cálculo un instrumento primordial para administrar sus bienes. En sus divisiones, cuando el dividendo no es exactamente divisible, o es menor que el divisor, introducen la fracción.

Al igual que en este nivel de la construcción del concepto en nuestros alumnos, los egipcios, al establecer su sistema de fracciones, tomaron como base la unidad, dividiéndola en tantas partes como les fue necesario.

El comercio de trueque, a falta de moneda, hizo de los cálculos proporcionales un recurso fundamental para este pueblo. Así, se han encontrado problemas aritméticos de reparticiones de panes, campos, etc., entre un número determinado de individuos. A través de estos repartos y de las tablas de composición y descomposición aditiva de las cantidades, construyeron las equivalencias.

La técnica seguida por los escribas egipcios es difícil de reconstruir. Lo que aquí nos interesa es resaltar que el concepto de fracción también ha sido utilizado en el curso de la historia, a diferentes niveles de profundidad, y que estos eslabones son pasos necesarios para llegar al nivel actual de conocimientos. Sorprendentemente, algunas de estas técnicas nos recuerdan al método seguido por nuestros alumnos.

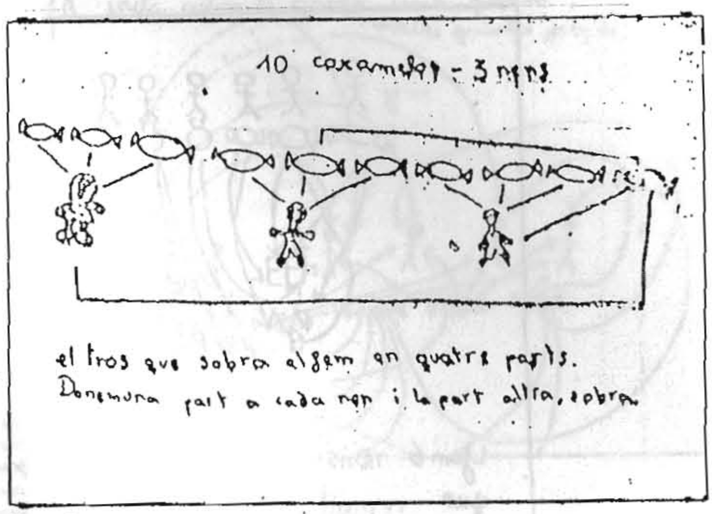


Figura 2.

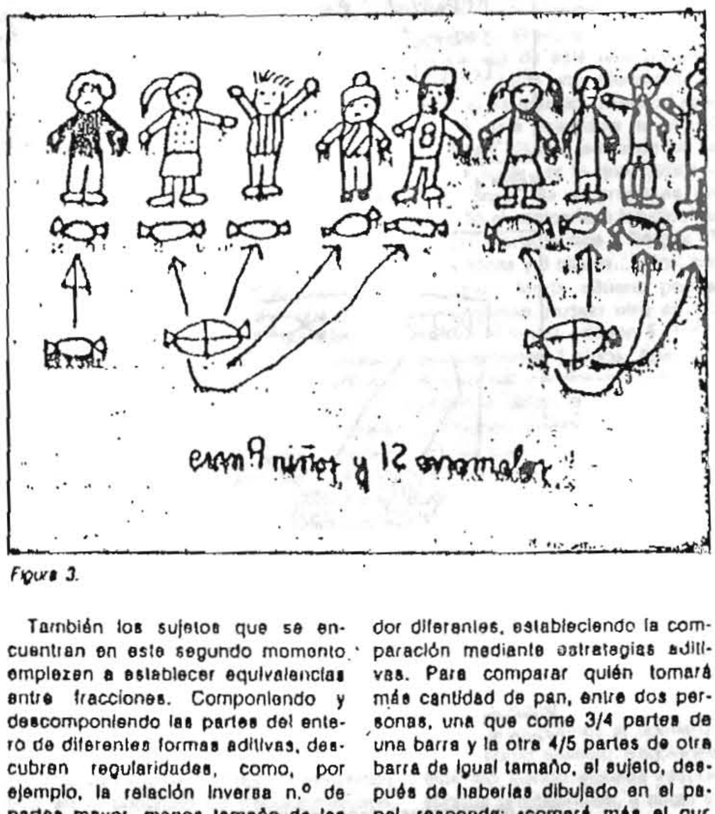


Figura 3.

También los sujetos que se encuentran en este segundo momento empiezan a establecer equivalencias entre fracciones. Componiendo y descomponiendo las partes del entero de diferentes formas aditivas, descubren regularidades, como, por ejemplo, la relación inversa n.º de partes mayor, menos tamaño de las mismas; el papel del numerador y el denominador (n.º de partes que corresponden a cada uno y n.º total); algunas equivalencias entre 1/2, 1/4, 1/8, es decir las derivadas de la duplicación.

En este nivel, comparan también correctamente las fracciones de numerador 1, por ejemplo, 1/2, y 1/3 y algunas de denominador y numerador diferentes, estableciendo la comparación mediante estrategias aditivas. Para comparar quién tomará más cantidad de pan, entre dos personas, una que come 3/4 partes de una barra y la otra 4/5 partes de otra barra de igual tamaño, el sujeto, después de haberlas dibujado en el papel, responde: «comerá más el que come 4/5, porque el trozo que queda sin comer es menor».

Este nivel, es, como vemos, excepcionalmente rico y en él se constituyen las bases sobre las que posteriormente se construirá la fracción relación.

Finalmente, en un tercer momento, se descubren la utilización de estrate-

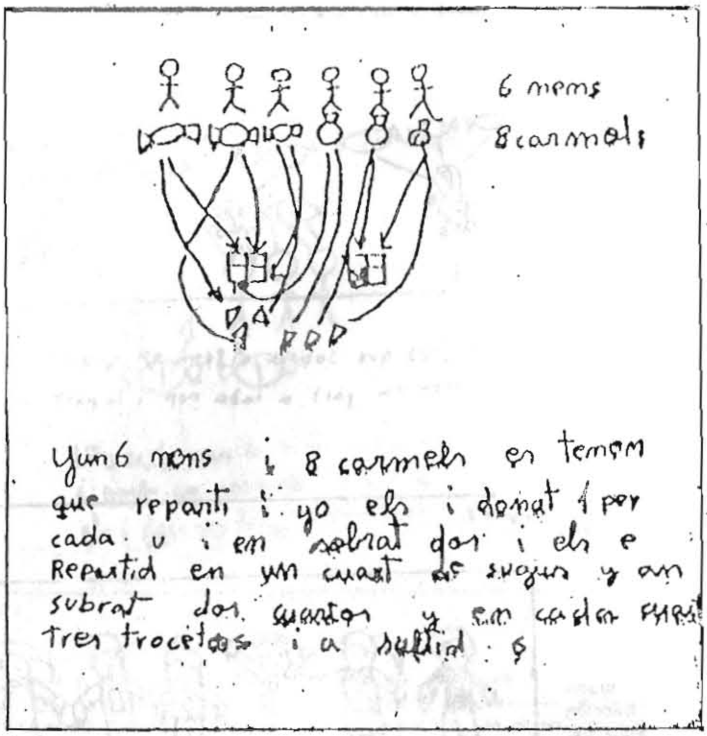


Figura 4.

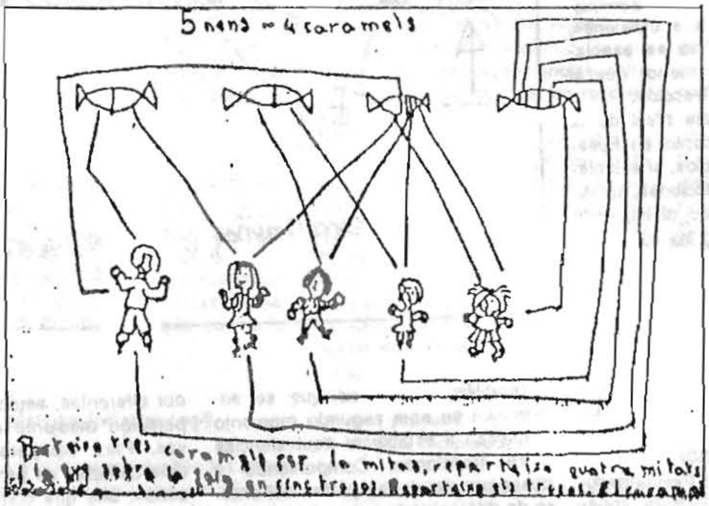


Figura 5.

gias multiplicativas, tanto en la relación entre el entero y sus partes, como entre el conjunto de éstas y las partes proporcionales del reparto.

El método que utilizan es una anticipación global del número de partes que necesitan, mediante el producto del n.° de elementos que tiene que repartir y el n.° de niños, y la aplicación de la correspondencia en la partición de la unidad. Por ejemplo, para repartir 3 caramelos entre 4 niños, «haré 12 partes y entregaré 3/4 partes a cada uno». En este otro ejemplo (figura 6) –4 regalices entre 5 niños– observemos la duda del alumno: no sabe si corresponde 1/5 a cada uno o 4/5 –lo que pone de manifiesto la dificultad de coordinar la repartición de la unidad, con la relación n.° de partes que corresponda a cada uno.

En este tercer momento se inicia la comprensión de la fracción como relación, al descubrir que el concepto 1/2, 1/3, etc., no es asimilable a magnitudes absolutas, ya que puede representar diferentes cantidades, aunque exprese la misma relación. Es también el comienzo de la proporcionalidad simple, que se puede representar a través de fracciones, y del descubrimiento del significado de la constante de proporcionalidad.

Estos tres momentos que hemos descrito no se suceden de forma lineal; por el contrario, su desarrollo es en espiral y depende de la dificultad del contexto en el que se aplica el razonamiento.

Algunos apuntes para la didáctica

Hemos visto, en el curso de la génesis, el descubrimiento progresivo de las leyes que rigen la composición del número fraccionario.

La repartición ha supuesto una actividad intelectual, a través de la cual han ido apareciendo las relaciones entre el entero y sus partes, la composición de las mismas, el descubrimiento de las equivalencias y la reconstrucción de estas relaciones a través de estrategias multiplicativas.

Estos datos nos conducen a un nuevo enfoque del aprendizaje de este concepto. La enseñanza del mismo se basa habitualmente en una primera fase empírica, a la que se añaden los símbolos que representan las fracciones y se pasa a realizar cálculos. Posteriormente, en 8.°, se suele utilizar la fracción como operador en la resolución de ecuaciones y en los problemas de proporcionalidad.

El proceso seguido de forma espontánea, por el contrario, supone la coordinación progresiva de acciones y operaciones, realizadas real o mentalmente por el sujeto, que serán el motor a partir del cual irá ampliando y generalizando el concepto. En el curso de esta construcción, irán descu-

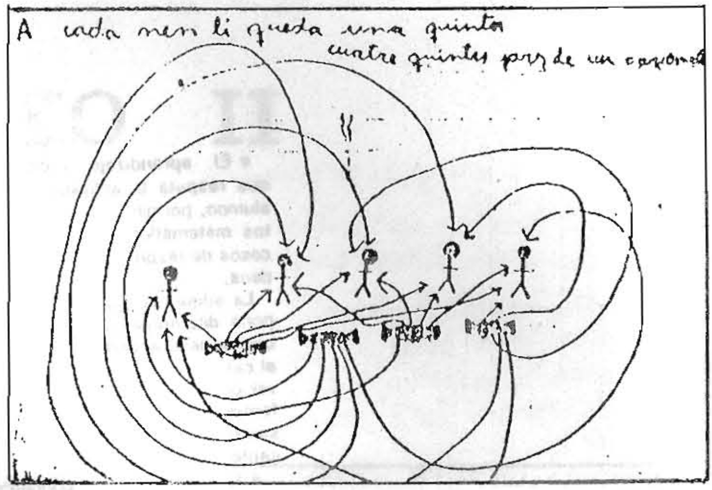


Figura 6.

briendo las propiedades que rigen las operaciones con fracciones y los sistemas simbólicos que los representan.

Siguiendo estas directrices, hemos organizado actividades de aprendizaje con los alumnos de ciclo superior, mediante las que nos hemos propuesto dos objetivos fundamentales: respetar la génesis y estimular la actividad mental de los alumnos.

Expondremos brevemente unas sesiones de repartición, llevadas a cabo con los alumnos de 6.º. [3] Introducimos las tareas siempre a partir de una necesidad; el fraccionamiento de la unidad, en este caso, viene determinado por el hecho de que el dividendo no permite una repartición exacta.

El trabajo se realiza en grupos de cuatro alumnos. Se entrega a cada niño o grupo un «mensaje» secreto. Estos mensajes primero son elaborados por el maestro (para determinar el grado de dificultad) y luego pueden ser inventados por ellos mismos. Contamos con un material de cubiletes que representan niños y regalices.

En el papel, a cada niño o grupo se le pide que «reparta un n.º de regalices entre un n.º determinado de niños». Cada uno de ellos tiene un mensaje diferente, que los demás desconocen. Realizan el reparto sin que los demás lo vean. A continuación, muestran a los demás los regalices que han repartido (unidades y fraccionamientos) y sus compañeros han de adivinar cuántos niños habían y cuántos regalices han repartido. Las reparticiones son muy sencillas; por ejemplo, 3 regalices y 2 niños, 6 regalices y 5 niños.

Así, Antonio tiene que adivinar cuántos regalices y cuántos niños tenía María. Sobre la mesa hay 4 unidades enteras y cuatro cuartos. «Yo diría que cuatro niños, porque hay cuatro regalices sin partir, y estas dos mitades forman uno y éstas otro, 4 + 2 = 6». Observemos que la composición del total se efectúa también por aproximaciones aditivas, y no se establece relación entre el denominador y el divisor. Andrés adivina lo que tenía Pedro (10 regalices y 8 niños). Sobre la mesa hay 8 unidades y 8/4. «Yo creo que 11, no, que 12 regalices». Compone las partes de forma intuitiva, sin relacionarlas con las 8 unidades, y dice «Cada tres hacen 1». Esta situación da lugar a una amplia discusión entre los niños. Al final, Sergio dice «cada dos forman 1; serán 12, ¡Ah!, no, tendríamos 8 enteros; son 8 y 2 que están partidas en cuatro partes».

Todas estas composiciones plantean dificultades al grupo, que, a través del intercambio y de las intervenciones del adulto, se van regulando. Poco a poco descubren el papel del numerador y del denominador.

En una segunda sesión, después del reparto, dejamos sobre la mesa sólo el cociente: por ejemplo, 4 regalices entre 3 niños; mostramos 1 unidad y 1/3, o 4/3. En estos casos utilizamos fracciones unitarias, en las que el denominador representa el divisor. Encima de la mesa hay 1 regaliz y 1/8. Clara adivina: «había 8 niños y 9 regalices».

Todas estas situaciones se pueden complicar aumentando las cantidades, pidiendo una representación simbólica en el papel, utilizando otros materiales, etc. Una forma de complicarlas es la de introducir a los chicos en el concepto de fracción/relación, de tal forma que tomen conciencia del carácter relativo que expresa.

En los mensajes de esta sesión, el resultado del reparto siempre será 1 unidad y 1/2, pero el dividendo y el divisor son diferentes (3 regalices y 2 niños, 5 regalices y 4 niños, 9 regalices y 6 niños, etc.).

Los niños inician la discusión como en los casos anteriores, sin darse cuenta de que todos tienen el mismo resultado. El profesor les hace tomar conciencia de este dato. A partir de aquí, se inicia una interesante discusión, entre aquellos alumnos que atribuyen este resultado a una única cantidad, idéntica en todos los casos, y que suele ser la que cada uno de ellos tiene. Su sorpresa es grande cuando el compañero les dice que no es así. Marta le dice a Sergio: «Tenía 2 regalices y 3 niños»... «No», contesta éste... Marta «Bueno podría ser que hubiese partido otro en 1/2 (se refiere al resto)... serían 5 ¡Ah! no, 6, porque serían 4 niños. Aparece aquí el uso del condicional... y una niña propone utilizar la palabra hipótesis.

Algunos no están de acuerdo, aunque se contradice la propia experiencia (cada uno ha realizado una partición diferente) con la de los compañeros.

Finalmente hay algunos alumnos que exclaman: ¡Claro, siempre sobra la mitad de regalices que de niños, por eso toca la 1/2!

Reflexiones finales

Nos preguntamos al comienzo por qué y cómo enseñar fracciones. Hemos ido viendo algunas respuestas, aunque provisionales, a estas inquietudes.

• La psicogénesis ha puesto de relieve que la abstracción es un proceso constante de interiorización y coordinación de acciones y operaciones. En el curso de este proceso, el sujeto elabora también diferentes formas de representación simbólica del concepto.

• El aprendizaje constructivista, que respeta la actividad mental del alumno, permite adquirir los conceptos matemáticos, mediante los procesos de razonamiento que desencadena.

La adquisición de un concepto supone diferentes niveles de abstracción y generalización del mismo. En el caso de la fracción, hemos podido ver cómo los alumnos descubrían de forma progresiva la lógica en la que se apoya la elaboración de este concepto.

• La utilidad de un concepto está en relación con los caminos que abre al razonamiento. En este sentido, la fracción es de gran riqueza epistemológica y psicológica, puesto que es un eslabón necesario en la construcción de la cantidad como valor relativo. En nuestra vida cotidiana ya no operamos con fracciones, puesto que utilizamos el sistema decimal, pero continuamente utilizamos valores relativos basados en la proporcionalidad, como, por ejemplo, la gasolina que gastamos por km, dinero que cobramos al mes, el interés bancario, etcétera.

Notas:

(1) Los datos que presentamos forman parte de un trabajo experimental más amplio y realizado en el marco institucional EMIPAE, «Génesis y aprendizaje del concepto fracción y su relación con la proporcionalidad», realizado sobre una muestra de 400 alumnos de edades comprendidas entre 7 y 14 años. Expondremos aquí sólo algunos datos correspondientes a alumnos de ciclo superior.

(2) El lector interesado por el uso de la fracción en los antiguos egipcios, puede consultar la Tesis de Licenciatura presentada en la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB) en 1984-85, por el profesor J. Deulofeu, de la Escuela de Formación de Profesorado de Sant Cugat.

(3) En la actualidad se está iniciando un trabajo de revisión de la metodología y objetivos de las matemáticas, en el ciclo inicial, medio y superior de la Escuela Pública de EGB Príncipe de Diana I. Agradezco al equipo de la escuela su trabajo.

Teresa Artés, Pilar Fernández y M.ª José Font, han colaborado en la recogida de datos y elaboración de los mismos.

* Asunción López Carretero es investigadora de IMIPAE y profesora de Psicología de la Escola de Mestres de Sant Cugat (UAB).

ANEXO II

4 – SUBDIVISION DE SUPERFICIES Y EL CONCEPTO DE FRACCIONES

Esta parte investiga más a fondo la construcción de relaciones de parte-todo y el desarrollo de ideas de fracciones. El material consiste en una cantidad de "pasteles" de arcilla de formas diversas y se pide a los niños desde 4 hasta alrededor de 7 años que los repartan por igual entre un número cada vez mayor de muñecos. Como muchos niños experimentan dificultad para dividir la arcilla, se les pide que recorten con tijeras varios círculos, rectángulos y cuadrados de papel, empezando por la división en tercios, y se les entrega un lápiz para que marquen la posición de los cortes antes de efectuarlos, si así lo desean. Otra variante posible consiste en proporcionar varillas para ubicarlas a lo largo de los límites propuestos antes de dibujar o cortar. Finalmente se pregunta a los niños si todos los trozos que han cortado constituirían un pastel entero si se los volviera a unir, o bien: "Suponiendo que volviéramos a pegar todos estos pedazos, ¿cuántos pasteles tendríamos?"

Durante el estadio 1 (hasta alrededor de 4;0 ó 4;6 años) los niños siguen teniendo dificultades reales para dividir un pastel en dos mitades; la solución inicial no es más que una fragmentación general: los niños no se detienen en dos. Luego descubrimos o que a cada muñeco se le da una parte aproximadamente igual, pero sólo una pequeña, y se deja una gran parte sin dividir, o bien que se reparte todo el pastel, pero en porciones desiguales. En el segundo caso vemos ocasionalmente que un niño divide el pastel en tres porque confunde la cantidad de cortes con la cantidad de partes (cortar el pastel dos veces da tres partes).

En realidad, es necesario tener en cuenta siete características de una fracción:

1. Debe haber un todo divisible, que se compone de elementos separables. Los niños muy pequeños (alrededor de 2 años) consideran el pastel como un objeto único indivisible y se niegan de plano a cortarlo a causa de su forma cerrada y continua. A los 2½ ó 3 años se superan estas inhibiciones y los niños están dispuestos a repartir o cortar, pero ahora el acto de cortar hace que el objeto pierda su carácter de totalidad.

2. Una fracción implica una cantidad determinada de partes; es decir, que la repartición presupone correspondencia entre partes y receptores. Cuando los niños más pequeños cortan el pastel, olvidan por completo la necesidad de esta correspondencia y separan cualquier cantidad de fragmentos.

3. La subdivisión en fracciones es exhaustiva, es decir, no queda resto. Los niños que recuerdan solamente las dos primeras características y olvidan ésta, cortan dos trozos del pastel y dejan el resto, cuando se les pregunta dicen: "Eso no es nada", o "Eso no es para nadie", o bien "Eso es la mesa".

4. Existe una relación fija entre la cantidad de partes en que debe dividirse un todo continuo y la cantidad de intersecciones. Pero los niños pequeños piensan en un corte en relación con una parte, de modo que suelen hacer dos cortes para obtener una mitad para cada uno de los dos muñecos. De esta manera, obtienen inesperadamente tres partes, y no hubieran podido dividir el pastel en tres aunque se lo hubieran propuesto.

5. El concepto de fracción aritmética implica que todas las partes son iguales. Al intentar igualar las partes, los niños del primer estadio dejan restos sin distribuir.

6. Las verdaderas fracciones son al mismo tiempo partes de un todo originario como totales por propio derecho. Esto está claramente fuera del alcance de la comprensión de niños del primer estadio.

7. Puesto que las fracciones de una superficie son relativas al total del cual se desprenden, dicho total permanece invariable; o sea, que la suma de fracciones es igual al total originario. Los niños del primer estadio no se dan cuenta de la necesidad de esta conservación.

La división en mitades se logra al comienzo del estadio 2 (4-4½ años), donde los objetos son pequeños y su forma sencilla, pero si el tamaño aumenta o se altera considerablemente la forma, por ejemplo, un rectángulo muy largo y delgado o formas más complejas, como zigzag, triángulos, etcétera, estos niños continúan fracasando. En todo caso, los niños del subestadio 2a son incapaces de cortar el pastel en tres pedazos iguales. O bien se limitan a cortar pequeñas partes del todo (aunque ahora a menudo dividen otra vez el resto en tres), o, como ya son capaces de dividir en dos partes iguales, tratan de llegar así a tercios, a veces mediante una segunda subdivisión en dos, y reparten lo mejor que pueden el cuarto adicional que les queda.

Durante el subestadio 2b (6-7 años) el problema se resuelve gradualmente, y ya en el estadio 3 (6½-8 años) la trisección es inmediata. En realidad, incluso en el subestadio 3a los niños son capaces no sólo de triseccionar, sino también de dividir en quintos o sextos. Pero esta última facultad todavía no está bien definida. La trisección en partes aproximadamente iguales tiene lugar sin ensayo y error; empero, siguen utilizando esta técnica para dividir en quintos o sextos. Recién en el subestadio 3b (9-10 años) se lleva a cabo esta última división con igual seguridad que la trisección.

Los datos estudiados en este capítulo muestran que las ideas de fracciones, e incluso de mitades, presuponen una subestructura cualitativa o

intensiva. Cualesquiera que sean las partes que se consideren, deben comprenderse primero como partes integrales de un todo que se puede tanto dividir como volver a reunir, antes de poder igualarse mutuamente y así transformarse en fracciones. Pero este proceso de igualación de las partes, una vez captado como tal, es mucho más fácil de dominar que las operaciones de subdivisión, y por consiguiente el concepto de fracción sigue de cerca al de parte. Surge por medio del simple proceso de poner las partes en mutua relación, lo cual se hace posible en cuanto están subordinadas al todo.

ANEXO III

APRENDIZAJE DE LOS N U M E R OS D E C I M A L E S

Régime DOUADY

Marie-Jeanna PERRIN GLORIAN (*)

Traducción: Norma Saggese

Primera Parte

HIPOTESIS DIDACTICAS

Nos hemos apoyado en algunas hipótesis didácticas para la construcción de secuencias de aprendizaje:

1) **Construcción de un concepto**

- Los conceptos se construyen al realizar acciones. Cobran sentido gracias a problemas que permiten resolver. Cada nuevo problema contribuye a enriquecer el concepto.

- Un nuevo concepto se construye también **en relación con conocimientos ya adquiridos**, sea para profundizarlos y generalizarlos, o bien para reencausarlos en la construcción de nuevos conceptos mejor adaptados al problema considerado.

- En un problema intervienen, en general, muchos conceptos. Cada uno cobra sentido en las **relaciones que lo vinculan a los otros conceptos** implicados en el problema.

- Esta diversidad aparece claramente si el problema se puede formular en **varios marcos** entre los cuales se pueden establecer correspondencias (por ejemplo el marco físico, el marco geométrico, el marco numérico, el marco gráfico).

Por ejemplo, tomemos el siguiente problema:

(*) I.R.E.M. París VII, fevrier 1986

"Entre los rectángulos del mismo perímetro, ¿hay una de área máxima?"

Está formulado en el marco geométrico, se lo puede reformular en el marco numérico y gráfico. Cada uno de los marcos sirve de referencia al otro y contribuye a darle significación al problema.

- Las nociones matemáticas proporcionan medios para describir una situación y hacer previsiones sobre el resultado de acciones todavía no realizadas. Para hacer estas descripciones y previsiones y para comunicarlas, es necesario construir **un lenguaje oral y escrito** que dé cuenta de los objetos de la situación y las relaciones entre ellos.

- Las previsiones pueden ser controladas por la acción y eventualmente revisadas. Sin embargo, esta forma de control no es siempre posible. Los alumnos tienen necesidad, entonces, de **buscar otras formas de validación**; en esta fase es necesaria la explicitación, por parte de los alumnos, de los conceptos y de las relaciones en las que el maestro enfoca el aprendizaje.

- Es entonces posible que el maestro puntualice los conocimientos que los alumnos deben retener. Esta es la fase de **institucionalización.** Aquí se otorga un **status de objeto matemático** autónomo a los nuevos conocimientos; se los puede emplear en la resolución de otros problemas.

- Una sola situación no es suficiente para construir un concepto. **Son necesarias numerosas situaciones** para hacer funcionar el concepto bajo distintos aspectos y poner en juego la diversidad de relaciones que lo vinculan a otros conceptos.

- Para que los nuevos conocimientos **se integren a los anteriores** y adquieran **movilidad** para plantear y resolver nuevos problemas, es necesario que se tornen suficientemente familiares. Toman entonces el status de conocimientos adquiridos sobre los que uno puede apoyarse para construir otros nuevos. Las situaciones de refuerzo permiten adquirir la familiaridad deseada.

- Teniendo en cuenta losprincipios precedentes, es necesario destacar que un concepto se forma en un largo período de tiempo. Esto es lo que afirma la psicología cognitiva y lo que se constata en la práctica, por ejemplo para la construcción de las experiencias decimales o de la proporcionalidad.

2) Condiciones para los problemas utilizados en el aprendizaje

La resolución de problemas juega un rol fundamental en el aprendizaje. Durante distintos momentos del aprendizaje, los problemas cumplen funciones distintas:

1. favorecer la construcción de nuevos aprendizajes (a través de las distintas fases de acción, formulación, validación, institucionalización descriptas en el parágrafo precedente).
2. brindar diversas ocasiones de empleo de los conocimentos anteriores y así determinar su dominio de eficacia y de validez.

Expuestas las hipótesis sobre la construcción de los conceptos desarrolladas en el primer parágrafo, elegiremos, para responder a la primera función, problemas que cumplan ciertas condiciones:

- el enunciado es fácil de comprender y el alumno es capaz de visualizar una respuesta al problema; esto es independiente de su capacidad para proponer una (esta condición es válida para todos los problemas).

- la respuesta no es evidente pero teniendo en cuenta sus conocimientos, el alumno puede intentar un procedimiento de respuesta parcial.

- para responder totalmente al problema, el alumno deberá construir el conocimiento sobre el cual el maestro focaliza el aprendizaje.

- el problema es rico, la red de conceptos implicados es bastante importante, pero no demasiado, de tal modo que el alumno no pierda la administración de la complejidad.

- el problema es suficientemente abierto para que el alumno pueda visualizar preguntas no formuladas en el texto y utilizar distintos procedimientos. Asimismo las posibilidades que se le ofrezcan no deben ser tantas que él no pueda realmente hacer una selección. Estas condiciones eliminan problemas puntuales en los que sólo es posible un procedimiento.

- el problema puede formularse por lo menos en dos marcos, cada uno con su lenguaje, marcos entre los que se sepa establecer correspondencias.

3) Situaciones de aprendizaje

Una situación de aprendizaje está caracterizada por un problema y cierta organización del trabajo adaptada a los objetivos previstos. Las concepciones de los alumnos son el resultado del intercambio con los problemas que tienen que resolver y con los interlocutores que están en comunicación con él (los otros alumnos, el docente, sin dejar de considerar los aportes exteriores a la clase: familia, televisión, periódicos ...). En el curso de estos intercambios los conocimientos anteriores se movilizan para ser modificados, completados o desechados.

Puestos a organizar los intercambios del alumno con el medio de manera productiva, podemos clasificar las situaciones alrededor de tres formas de dialéctica que tienen funciones diferentes (G. BROUSSEAU- I.R.E.M. (*) de BORDEAUX):

- dialéctica de acción:

El alumno se enfrenta a una situación que le genera un problema. En la búsqueda de una solución, produce acciones que pueden concluir en la **creación de un "saber hacer"**. El alumno puede, más o menos, explicitar o validar sus acciones pero la situación de acción no lo exige.

(*) Institut de Recherche pour L'enseignement de$ Mathematiques (Instituto de Investigación para la enseñanza de la Matemática)

- **dialéctica de la formulación:**

Existen condiciones diferentes que hacen necesario un cambio de información y la **creación de un lenguaje** para asegurar el intercambio. En la situación de formulación, el alumno puede justificar sus proposiciones, pero la situación no lo exige.

- **dialéctica de la validación:**

Los intercambios no conciernen solamente a las informaciones sino también a las declaraciones. Es necesario probar lo que uno afirma por otra vía distinta que la acción. Tal el caso de un alumno que debe convencer a otro en una situación de comunicación

Observaciones sobre las situaciones de comunicación de tipo emisor-receptor:

Esta forma de trabajo cumple dos funciones diferentes:

* tratar las clases de problemas dando a cada uno la ocasión de trabajar sobre un enunciado diferente. La diversidad de los enunciados proviene de suministrar datos diferentes por su naturaleza y su valor, pero las relaciones en juego son siempre las mismas. La naturaleza de la información dada por el emisor influye sobre el procedimiento del receptor (ver más adelante variables didácticas). Dejando la iniciativa de la búsqueda a los alumnos, se puede -en la puesta en común o balance- situar la discusión en el plano de las relaciones en juego y puntualizar la variabilidad de los datos.

* desarrollar las dialécticas de formulación y de validación.
  Este tipo de situaciones presenta ventajas indiscutibles para el aprendizaje. Sin embargo, puede ser difícil de realizar en ciertas clases. Se puede reemplazar la comunicación entre el alumno y el docente. El maestro juega el papel de emisor para todos los alumnos haciendo variar él mismo los datos, tanto por su naturaleza como por su valor. Se pierde, sin embargo, la ocasión de promover una dialéc-

tica de prueba. Un alumno sabe que el maestro "sabe" y no se siente seriamente invitado a desarrollar una argumentación convincente.

4) Variables didácticas

Una situación didáctica depende de factores cuya elección influye en las estrategias de resolución de problemas. Estos factores sobre los que el maestro puede influir son las variables didácticas de la situación. He aquí algunos ejemplos:

- los números en juego, que pueden ser más o menos grandes, enteros o fraccionarios.

- el material del que dispongan los alumnos (ejemplo: disponer o no de una regla graduada; disponer de una unidad de medida convenida, antes de intentar medir o después de intentarlo).

- los conocimientos anteriores de los alumnos (el mismo problema no ofrece las mismas estrategias de resolución en la escuela primaria que en el primer año de la escuela media).

En el curso de la presentación de los problemas investigados y de la descripción de las secuencias, trataremos de precisar las variables de la situación, las elecciones que hemos hecho y, de ser posible, las razones de esas elecciones.

5) Organización de las secuencias

Una secuencia se compone de varias fases:

a) Presentación del problema

El maestro expone la consigna, distribuye eventualmente el material, se asegura, a través de una discusión con los alumnos, que la consigna tenga sentido para cada uno de ellos.

b) Fase de investigación

Los alumnos trabajan individualmente, o en equipo, o en situación de comunicación. En el transcurso de esta fase, es posible que las dificultades sean objeto de una discusión: por ejemplo, cuando los alumnos retienen sólo una parte de la consigna o agregan condiciones que no están en ella. También está el caso en que los alumnos entren en conflicto entre sus concepciones y los hechos o las concepciones de otros alumnos.

c) **Balance. Presentación de resultados** (Puesta en común)

Según el caso, el maestro toma los resultados y pide a la clase que los comenten, o bien los equipos presentan sus trabajos y los someten a la crítica de los otros.

En el curso de esta fase los alumnos se ven obligados a convencer a sus camaradas de la validez de sus respuestas, o de aceptar sus errores o su mala interpretación del problema. En todos los casos se desarrolla una argumentación sobre el problema. Esto puede desencadenar nuevas preguntas, o una nueva extensión del problema o de los procedimientos utilizados.

d) **Fase de síntesis y de institucionalización**

Al principio de la sesión, se resume la sesión (o sesiones) anteriores sobre el mismo problema. Los alumnos recuerdan el problema, las soluciones que ellos encontraron y los métodos utilizados.

Los alumnos comparan los métodos, sus ventajas e inconvenientes

En el curso de esta fase de síntesis, se destacan las características importantes del problema (es decir el objetivo de aprendizaje previsto por el maestro). Estas características se desligan de su contexto de introducción e institucionalización. Se trata de que el maestro, a partir de las producciones de los alumnos, desprenda lo que ellos deben retener y se los diga. Este punteo es indispensable para que no se pierdan los beneficios de la fase de acción.

e) **Nivelación de la clase y evaluación**

Esta es una fase del trabajo personal que sirve al maestro para tener una fotografía de la clase y al alumno para saber dónde está. Este tracepciones de los alumnos.

f) Reinversión. Evolución de las concepciones.

Se puede pensar que a lo largo del trabajo las concepciones de los alumnos han evolucionado. Es importante proponerles problemas más complejos en los que funcionen las nuevas concepciones para que continúen evolucionando.