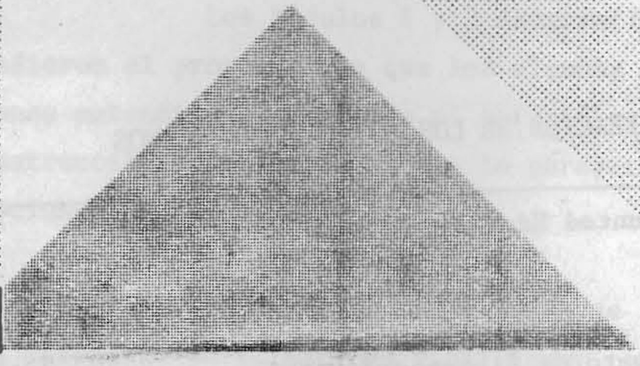
MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION

ORGANIZACION DE LOS ESTADOS AMERICANOS

DIRECCION NACIONAL DE EDUCACION SUPERIOR

CURRICULUM ACADEMICO MAESTROS DE EDUCACION BASICA



matemática

2 a

Buenos Aires República Argentina 1989

NOMINA DE AUTORIDADES

MINISTERIO DE EDUCACION Y JUSTICIA

Ministro de Educación y Justicia:
Dr. Jorge Sábato

Secretario de Educación:
Dr. Adolfo Stubrin

Subsecretario de Gestión Educativa:
Dr. Juan C. Pugliese (h)

Director Nacional de Educación Superior y del Proyecto:
Dr. Ovide J. Menin

Subdirectora Nacional de Educación Superior:
Prof. Sulma Guridi Flores

Coordinadora del Proyecto:
Prof. Emilce E. Botte

SECRETARIA GENERAL DE LA OPRGANIZACION DE LOS ESTADOS AMERICANOS

Director del Departamento de Asuntod Educativos a/c:
Dr. Juan Carlos Torchia Estrada

Jefe de la División de Mejoramiento de Sistemas Educativos:
Dr. Luis Osvaldo Roggi

Representante de la Secretaría General de la O.E.A. en la Argentina:
Dr. Benno Sander

Coordinador del Area Educación, Ciencia y Cultura:
Sr. Guillermo Corsino

El espacio matemático

Las unidades que proponemos para integrar este módulo son:

UNIDAD 1: El desarrollo evolutivo de la concepción del espacio en el niño.

UNIDAD 2: Exploración, organización y estructuración de las formas en el espacio geométrico.

UNIDAD 3: Variación de las relaciones numéricas en espacios geométricos.

¿Por qué proponemos estas unidades?

Los Módulos 1 y 2 desarrollados a lo largo del primer año, respondieron al propósito de que los alumnos maestros reconstruyeran algunas nociones matemáticas, poniendo el énfasis en la reflexión sobre los procesos de construcción de conceptos desde la perspectiva del análisis de sus propias concepciones adolescentes.

Pensamos que este punto de vista les facilita compararlas con los aprendizajes infantiles y así tomar conciencia de sus peculiaridades.

Nos permitimos reiterar que el desarrollo de cada Módulo implica considerar cuatro aspectos fundamentales:

- **El aspecto evolutivo:** En relación con el ritmo de aprendizaje individual y el referente sociocultural.

- **Experiencias en el aula de la escuela primaria:** Para asegurarse un contacto temprano con la realidad escolar.

- **Resolución de problemas:** Como actividad matemática fundamental que pone en juego una serie de estrategias elaboradas por el alumno y lo conduce a construir el conocimiento como una necesidad de dar respuesta a una situación novedosa.

- **El conocimiento matemático en sí mismo.**

Al abordar las unidades para el presente MODULO 3, hemos tenido en cuenta no sólo la reflexión sobre el desarrollo evolutivo de la concepción del espacio en el niño, sino también las posibilidades cognitivas de los alumnos maestros -en general adolescentes- con el objeto de ampliar su formación geométrica.

Hasta el momento, tanto en la escuela primaria como en el ciclo básico de la escuela media, estos adolescentes sólo han tenido oportunidad de estudiar algunos contenidos de geometría métrica plana, fundada en las nociones de "distancia" y de "medida".

Nos parece necesario que aborden también la consideración del espacio físico de tres dimensiones y algunos conceptos de **geometría proyectiva** y de **topología**. (*)

(*) Sólo recientemente, y poco a poco, la palabra TOPOLOGIA ha sustituido a la expresión ANALYSIS SITUS usada por Poincaré, H. **Dernieres penseés.** Bibliotheque Philos, París, Flammarion, 1913.

La geometría proyectiva está fundada en la noción de línea recta. Basta citar como ejemplo que para la proyectiva, dos figuras son equivalentes si se puede pasar de una a otra por una transformación proyectiva que conserva la rectilineidad, es decir, si la segunda es alguna perspectiva de la primera.

Por otra parte, la necesidad de que los maestros conozcan por lo menos los invariantes que caracterizan a la topología, no está ligada sólo al desarrollo considerable de la topología contemporánea sino también al hecho de que actualmente, las investigaciones de la Escuela de Ginebra parecen mostrar que los primeros invariantes que va generando el niño en su interacción con el espacio que lo rodea, se vinculan con nociones topológicas, más adelante va incorporando invariantes característicos de la geometría proyectiva y luego, casi inmediatamente, los de la geometría métrica.

Creemos además oportuno iniciar a estos adolescentes en el tratamiento de funciones continuas de variable real, relacionadas con transformaciones geométricas, aunque no aún desde un punto de vista rigurosamente formal, sino desde el registro y posterior análisis de relaciones numéricas en la variación de esquemas geométricos.

Por ejemplo:

- variación del área total y del volumen de cubos en función de la medida de la arista;

- variación del perímetro de figuras de la misma área; etc.

RECOMENDACIONES METODOLOGICAS

En todas las unidades trataremos de seguir las recomendaciones metodológicas dadas anteriormente de modo de tener en cuenta que:

- el proceso de aprendizaje comienza con la formulación de hipótesis personales ante el planteamiento de un **problema**;
- para explorar las posibilidades de organización de estrategias que permitan resolver el problema, hay que documentarse y analizar textos u otras fuentes que los aborden;
- lo teórico debe nutrirse con la experiencia real en actividades prácticas que promuevan la interacción del futuro maestro con recursos geométricos materiales y su actuación con los niños;
- lo práctico pone en acción estrategias concebidas intelectualmente y se complementa con la reflexión que realimenta el marco teórico que inspiró las estrategias;
- la evaluación es concomitante con el proceso de aprendizaje.

En cuanto a la organización de actividades en interacción con la escuela primaria, la propuesta se enriquece con una mayor aproximación al grupo total de niños de un grado. Sin dejar de lado observaciones y microexperiencias, se trata ahora de incorporar otra modalidad de trabajo: **la práctica en el aula**. Ella consiste en...

LA PRACTICA EN EL AULA consiste en ...

- Los alumnos maestros se reúnen en pequeños grupos para planificar una situación específica de aprendizaje que involucre la construcción de nociones geométricas en un determinado grado; esto, naturalmente, en conexión con el maestro de ese grado y con el asesoramiento del Area de Ciencias de la Educación. Es interesante que cada pequeño grupo aborde actividades diferentes e intercambie luego sus experiencias.

- En cada pequeño grupo, uno de los alumnos maestros se hace cargo de llevar a cabo las acciones que requiera la situación planeada mientras los demás miembros registran las observaciones que permitan una reconstrucción objetiva de lo ocurrido para facilitar la reflexión y realimentar así la concepción de la experiencia.

- Todas las conclusiones integran una puesta en común entre los pequeños grupos para obtener los mutuos beneficios que promueve el intercambio, sobre todo si se puede contar con la participación de docentes del área pedagógica para que aporten sus consideraciones a la interpretación de cada proceso.

LOS CONTENIDOS DE LAS UNIDADES PROPUESTAS

Para una adecuada comprensión del desarrollo evolutivo de la concepción del espacio en el niño, será necesario hacer un análisis de los distintos tipos de transformaciones geométricas y, en particular, conocer los invariantes que caracterizan las transformaciones topológicas, las proyectivas y las métricas, así como las relaciones de inclusión que se dan entre los conjuntos de invariantes de cada tipo.

Corresponde también establecer y comparar las distintas categorías de orientación en el espacio y el proceso de descentración infantil.

La exploración, organización y estructuración de las formas geométricas incluirá una serie de experiencias que pongan en juego las propiedades del espacio que un niño puede dominar gracias al progresivo alcance de lo topológico, lo proyectivo y lo métrico.

Por otra parte, son particularmente importantes para el futuro maestro, aquellas experiencias que involucren el ejercicio de la actividad perceptiva y de las formas de representación, tanto en el plano como a través de modelos espaciales. Se espera que, partiendo de esas experiencias, el adolescente alcance los niveles de estructuración posibles según su propio nivel evolutivo.

En particular, habrá que considerar los procesos de adquisición de la conservación de la longitud, de la superficie y del volumen por parte del niño y la incorporación de todos los modos de cuantificación de esas magnitudes. Interesa que el futuro maestro logre la organización de toda una red de resultados que se expresan a través del sistema numérico y configuran las propiedades métricas más importantes de las formas geométricas.

Paralelamente, los problemas de tipo geométrico que no se resuelven con números racionales, darán oportunidad para completar el campo de los números reales.

Por último, problemas de variación sistemática de formas geométricas en el plano o en el espacio de tres dimensiones, permitirán la introducción del análisis de familias de funciones y sus relaciones con expresiones algebraicas, con especial consideración de las situaciones accesibles al nivel de la escuela primaria.

Los anexos que siguen tienen por objetivo ampliar -con la palabra de voces autorizadas- los conceptos vertidos en nuestra propuesta de unidades correspondientes al MODULO 3. Su contenido, pues, está dirigido a los profesores del Area de Educación Matemática. El uso que de estas lecturas puede hacerse en las aulas de formación de maestros, deberá ser cuidadosamente evaluado y contará con sugerencias concretas de nuestra parte en el desarrollo de las unidades en sí mismas.

ANEXO I: Pertenece al matemático francés G. Walusinsky y es un fragmento de un artículo aparecido en la revista CONCEPTOS DE MATEMATICA, año XVI, Nº 61/1982, Titulado: **La matemática hoy**. En él se esboza la "Matemática Moderna" en grandes trazos y se reafirman las hipótesis didácticas sobre las que basamos nuestro enfoque.

ANEXO II: Consiste en un fragento de HANNOUN, H. **El niño conquista el medio**, Kapelusz, Bs. As. donde aparece bien explicitado el aporte de las experiencias escolares al proceso de desarrollo de la concepción del espacio en el niño. Su lectura debe complementarse con dos textos ineludibles:

- HOLLOWAY, G. E. T. **Concepción de la Geometría en el niño según Piaget**. Paidós, Bs. As., 1969.
- HOLLOWAY, G. E. T. **Concepción del espacio en el niño según Piaget**. Paidós Ibérica. Barcelona, 1982.

ANEXO III: Contiene fragmentos de los capítulos IV y V de COURANT, R.; ROBBINS, H. **¿Qué es la Matemática?** donde se desarrollan metódicamente las ideas fundamentales de Geometría Proyectiva y de Topología. El profesor Courant es famoso por sus trabajos de investigación y posee la habilidad de exponer las más difíciles teorías en forma clara y amena, con abundantes referencias históricas.

ANEXO IV: Transcribimos en este anexo, el capítulo 1 de DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. **La geometría a través de las transformaciones.** Tomo 1: Topología. Geometría Proyectiva y afín. Teide, Barcelona, 1972. En él, los autores hacen una exposición rigurosa del contenido científico pero fundamentalmente, encaran con profunda comprensión del mundo infantil, la descripción de experiencias accesibles a los niños.

Veamos los anexos ...

Por ejemplo:

Funciones proporcionales o no proporcionales, crecientes, decrecientes, variadas; máximos y mínimos de una función, etc.

ANEXO 1

WALUSINSKY, G. **La matemática hoy**, en Revista CONCEPTOS DE MATEMATICA, año XVI, Nº 61/1982. Pp. 36 a 41.

II. LA MATEMATICA MODERNA EN GRANDES TRAZOS.

¿No es realmente una exageración decir que esta matemática invasora es moderna porque es de nuestro tiempo?.

Algo de verdad hay en esta observación. Otras épocas conocieron el conflicto de los clásicos y los modernos, incluso en matemática. Siempre se es moderno en algo como siempre se es el hijo o la hija de los padres. Para el matemático del siglo XVII, Descartes era un moderno mientras que muchos de nuestros contemporáneos lo ubicarían entre los grandes precursores de la época clásica.

Sin embargo, en dicha exageración hay por lo menos una información útil ¡cuántas personas, en efecto, están convencidas de que las matemáticas se han construido de una vez para siempre o, todavía más, lo han sido de forma tan perfecta por los grandes sabios de la antigüedad que hoy sólo debemos repetirlas, "recitarlas"!. Tened la seguridad de que no descuidamos esa escuela; aprovecharemos las lecciones de sus investigadores gracias a sus descubrimientos y también a sus fracasos. Pero no debemos olvidar que la matemática es una ciencia viva (¡como si pudiera haber una ciencia muerta! ¡Ya no sería una ciencia!). Cada estudiante la reinventa, cada época la reconstruye con sus exigencias de rigor; la matemática de 1830 no es la de 1750 ni la nuestra. Hay una historia del pensamiento matemático, lo mismo que hay una historia de la filosofía: después de Descartes no se podría pensar como antes de él, pero pensar por sí mismo siempre será una exigencia individual.

Entrar en todos los detalles de la evolución de las ideas de la matemática en el decurso de los siglos nos llevaría demasiado lejos. Por un instante, me quedo con esta única realidad: la matemática evoluciona porque es una obra humana.

¿Por qué insistir, pues, en nuestros días sobre ese calificativo "moderna" si es de todos los tiempos? ¿Qué existe hoy que sea más actual?.

Puede ser que estemos mal ubicados para juzgar porque justamente vivimos en ese tiempo actual. Es muy posible que en un siglo toda la evolución rápida que hoy impresiona nuestros sentidos, aparezca a nuestros sucesores como una lenta muestra de un fenómeno más amplio. Pero no somos los historiadores del futuro; a lo sumo somos los actores de nuestro tiempo que tratamos de comprenderlo. ¿Qué es, pues, lo específicamente moderno en la matemática de hoy?.

1. Prioridad del álgebra.

Una primera respuesta sería todavía de carácter semihistórico: en 1931 apareció en Berlín la *moderna álbebra* de Van der Waerden, obra que retoma las ideas presentadas hacia algunos años por Emil Artin y Emmy Noether en sus cursos en la Universidad de Hamburgo. Bajo el nombre de *álgebra moderna* se desarrollaba una concepción relativamente nueva pero que sumerge sus raíces en investigaciones más antiguas, las de Galois, por ejemplo (1830): se subrayan las propiedades de los entes más que los entes mismos; digamos, para simplificar, sobre la operación más que sobre el resultado. El dominio del álgebra tendrá desde luego una extraordinaria extensión: estos entes ya no son sólo los números sino también los objetos de la geometría o, más generalmente, todos los entes susceptibles de un tratamiento matemático. Dicho de otra manera, el álgebra se ha convertido en una especie de lengua universal de la ciencia.

Esta importancia del álgebra como medio de expresión es un aspecto moderno que no deberá olvidarse.

2. Hacia una generalización más grande.

A la misma álgebra le corresponde *la inquietud de la más grande generalización* y, por consiguiente, *el acceso a un nivel de abstracción superior.* Para muchos no iniciados, el álgebra consistía en calcular "sobre letras", entendiéndose que esas letras representaban números. Es esta última suposición lo que ya no corresponde hoy; cualesquiera sean los objetos, los entes sometidos al cálculo y representados por letras, lo que importa es sólo su forma de comportarse en las operaciones. El mismo cálculo se aplicará a tal conjunto de números, por ejemplo, {1,2,3}, y a tal conjunto de rotaciones (las que permiten ubicar tal azulejo de cocina en su lugar...) ¡Qué importa el objeto (o mejor qué importan los objetos) con tal que se tengan las operaciones! Si el álgebra se ha podido convertir en el lenguaje común de todas las ciencias lo ha hecho al precio de este esfuerzo de "desencarnación": herramienta para la expresión pero que, por sí misma, no expresaría nada en el límite.

Proporcionar a los que emplean la matemática, cada vez más numerosos y que operan en dominios cada vez más variados, las herramientas que pueden servir a todos, es uno de los objetivos de la matemática moderna. Incluso si siempre se hubiera comprendido que la matemática aspira a la generalización, se podría, creo, reconocer que esta aspiración adquiere amplitud original en nuestros días. Si hubiera que señalar un solo aspecto para justificar el carácter "moderno" de la matemática contemporánea, ese es el que yo consideraría. A partir de él, se siguen todos los demás aspectos de la ciencia contemporánea.

En primer lugar, el carácter muy abstracto que a menudo se le reprocha, "demasiado abstracto" han llegado a decir ciertas críticas. Es verdad, hay niveles sucesivos de abstracción que, a menudo, parecen inaccesibles al estudiante y, con mayor razón, al neófito, nivel que todavía no se ha alcanzado. Esta cuestión de la abstracción se vuelve a hallar al examinar los trabajos de los psicólogos y pedagogos. Contentémonos por ahora con reconocer que los matemáticos contemporáneos tienen perfecta conciencia de que la matemática que hacen es abstracta; no se les oculta (había un ministro que no tenía nada de matemático que reclamaba matemáticas"concretas") este hecho y dicen con razón que si se desea formular teorías polivalentes, es necesario pasar por eso. El tránsito por lo abstracto es una necesidad que tiende a la polivalencia buscada. Se deberían obtener importantes consecuencias en lo que se refiere a la enseñanza inicial.

3. Una reconstrucción en todos los dominios.

En el plano de la misma matemática se observa también que es el mismo edificio el que se ha debido reconstruir, que es necesario, constantemente rehacerlo, desde los dominios próximos a la filosofía y la lógica hasta los que todavía hoy aparecen como desembocando en los problemas de la física. No hay, pues, en la matemática tal sector que sería "moderno" en tanto que tal otro seguiría siendo "clásico". La cohesión del conjunto es demasiado fuerte y justamente subrayada por el singular: *la matemática,* para que podamos imaginar, sea en la investigación o en la enseñanza, cualesquiera sean los niveles, sectores "al amparo" de la corriente moderna. Aquí arriesgaría una comparación: una vez descubiertos los telescopios ¿cómo imaginar un observador astronómico que prescinda de él bajo el pretexto de que Hiparco no usaba ningún instrumento óptico? Si hoy dispone del potente método axiomático ¿se creerá que un matemático se condenará a cierta impotencia por respeto a la tradición?.

Desarrollo del álgebra, aspiración a la mayor polivalencia de las teorías, reorganización en permanente perfeccionamiento del edificio matemático en su totalidad, no son más que algunos de los caracteres de la modernidad de esa matemática. Quisiéramos poder completar el retrato esbozado aquí y acaso sea imposible hacerlo, tan rápida es su transformación. Por lo menos podemos concebir una de las razones de esta evolución: adaptarse a las necesidades crecientes de la matemática en las diversas ramas de la actividad humana. Cada uno, en la medida de sus posibilidades, matematiza y por ese esfuerzo espera un crecimiento de sus modos de acción. Si hay un pasaje que resulta laborioso por lo abstracto se espera de él un gran fruto. ¿Será necesario reservar esa capacidad a algunos privilegiados?.

III. LA MATEMATICA PARA TODOS.

Tranquilizaos, este título no anuncia el advenimiento de un imperialismo matemático. No se trata de crear un mundo en el que todos nosotros seamos matemáticos especializados, muy capaces sin duda de concebir y de organizar, sin que hubiera nadie para ejecutar... o para hacer otra cosa. Pero puesto que todos los ciudadanos, todos los trabajadores de hoy y de mañana, tienen y tendrán necesidad de una formación matemática, es necesario que se la aseguremos a todos.

Sí, *a todos*, debido primeramente a esa "utilidad práctica" en todas las actividades de nuestras sociedades, como lo hemos señalado antes. A todos, también, puesto que la orientación precoz de los alumnos o incluso de los estudiantes, revela una imposibilidad. Se lo ha intentado porque ello simplificaría grandemente la organización escolar (25% de científicos, 18% de literatos,... ¡cuán cómodo sería eso para poder prever las construcciones escolares!); la incertidumbre de muchos padres sobre el futuro de sus niños quedaría más apaciguada: resurgimiento del "tu serás politécnico". Ha sido necesario decantar: el material humano no se deja encasillar tan fácilmente, las necesidades futuras de nuestras sociedades tampoco se dejan prever tan rigurosamente.

A todos, finalmente, porque todo ser humano debe poder acceder al conocimiento por sí mismo...

Formación básica.

Por todas esas razones a la vez, la formación matemática básica, con espíritu moderno, es necesaria y conveniente para todos. La definición de un conjunto de conocimientos útiles se pudo concebir desde la época en que se podía descontar que tal grupo de alumnos desembocaría en la industria y tal otro en las actividades bancarias. Bastante loco sería quien en los tiempos que corren se permitiera tales previsiones. Es más seguro prevenirlo al estudiante: "sabed que lo que hoy estáis aprendiendo directamente no os servirá para nada; nosotros no sabemos cuáles serán vuestras necesidades; lo que os enseñamos es necesario que os ayude a adaptaros a las imprevisibles condiciones en las cuales, efectivamente, tendréis que observar, reflexionar, concebir, actuar, juzgar,... En el fondo... Quisiéramos prepararos para vivir como mujeres u hombres responsables, vale decir, libres en sus reflexiones, en sus actos y en sus juicios"

Un pesado equipaje de conocimientos enciclopédicos sería entonces más embarazoso que útil; incluso sería tan embarazoso que descorazonaría a toda persona lúcida que debiera cargarlo. Herramientas intelectuales adaptadas (todo lo que sea posible) a situaciones todavía desconocidas y una formación matemática, pueden contribuir eficazmente a forjarlos.

Los cuatro lenguajes.

No será sólo ella, con toda seguridad. *Lengua materna, lenguas extranjeras vivas*, he aquí los elementos de comunicación irreemplazables; una enseñanza de la *tecnología*, todavía apenas organizada, debería dar una formación básica, ciertamente indispensable en nuestra civilización. Y como broche de todo, la *matemática*, lengua universal, completa el conjunto de las herramientas necesarias de las cuales debe estar provisto todo ser, si no quiere vivir sin firmeza o sometido.

Insistamos un poco sobre ésta "teoría" de los cuatro lenguajes que, a veces, es mal comprendida: ¿no se habrá visto una especialización prematura? ¿O acaso la muerte de los estudios clásicos, el de las lenguas antiguas en particular? Toda formación supone una elección; es necesario, pues, distinguir las elecciones de la colectividad para sus niños y la elección del alumno o del estudiante. Si los gustos o las aptitudes actúan de lleno en este último caso —y un amplio abanico de opiniones debe permitir al alumno ejercerlas libremente— la elección de las disciplicas básicas, útiles para todos y para cada uno, debe ser la obra reflexiva de la colectividad. Ahora bien, no es posible ubicar a todas las disciplinas intelectuales en esa formación básica a riesgo de reconstituir, sólo con un cambio de nombre, una enseñanza enciclopédica que es lo opuesto a una formación.

Sin un dominio suficiente de la lengua materna todo el mundo conviene en que ninguna formación es posible. En el siglo de las comunicaciones rápidas, en que los contactos internacionales comienzan a multiplicarse, toda medida que restrinja el aprendizaje de las lenguas vivas extranjeras sería atentatoria a la libertad del individuo. Ignorar la importancia de las técnicas sobre nuestra existencia sería también absurdo; para convercernos bastaría con verificar cuánto trabajo les cuesta a los ancianos adaptarse a las nuevas condiciones de vida (en verdad, se los debería ayudar, pero de parte de ellos, en los casos más trágicos, existe el absurdo rechazo de una evolución inevitable). La formación matemática básica aporta el complemento indispensable a este conjunto educativo: espíritu de observación y de análisis, aprendizaje de la conceptualización (desde la observación de una situación a la idea abstracta); aprendizaje de la deducción y, más generalmente, desarrollo del espíritu lógico; retorno a la observación y a la experiencia para experimentar la validez de las nociones abstractas elaboradas así como de las teorías construidas por vía deductiva. He escrito "completamente indispensable": me pregunto si no sería más prudente hablar de aprendizaje del pensamiento racional.

Esta enseñanza debe, evidentemente, imbricarse en la de las otras disciplinas: no es verdad que sólo en matemática se debe pensar justamente y expresarse claramente. La teoría de los cuatro lenguajes implica, por otra parte, tomar en serio un sistema de opciones que permita a cada uno sentir sus gustos, manifestar sus aptitudes en todos los dominios. He dicho "tomar en serio" porque, hasta ahora, cuando hay una opción, no todos piensan en una enseñanza de primera clase. Toda opción debe, por lo contrario, ser considerada como elemento constitutivo de una verdadera formación cultural. Dará, por otra parte, ocasiones especiales para usar los cuatro lenguajes y así motivará los estudios básicos.

También sería necesario que esta formación matemática necesaria para todos sea accesible a todos: ¿es posible?.

IV. UNA MATEMATICA ACCESIBLE PARA TODOS.

Si no lo fuera este trabajo perdería su sentido. En todo caso, frente a las necesidades de la sociedad de personales calificados y sobre todo capaces de adaptarse rápidamente a situaciones nuevas, encarar los deberes del individuo consigo mismo (comprender el mundo en el cual se vive y saber desempeñar una función en él), todo nos dice que ya no es el tiempo de una matemática dedicada a los *happy few*.

¿Una matemática para los escogidos?

Existen todavía partidarios de esa formación, de esa "alta formación para los escogidos" que tenía cierta eficacia práctica cuando había dos dominios bien separados; el de los que concebían o dirigían y, por otra parte, el de los que no podían sino obedecer y ejecutar. Cierta concepción tradicional de la enseñanza ha colocado las cosas en esas condiciones siniestras mediante una suerte de pesimismo acerca de las posibilidades de los niños con respecto a la matemática. Cuando se proponían tan sólo difundir en los jóvenes cerebros algunas fórmulas "útiles", algunas recetas experimentadas (entre las cuales habría que hacer un lugar especial a la "regla de tres") se trataba de facilitar muy poco el acceso a las nociones para preparar el acceso a las abstracciones. Se le exigía todo a la memoria: saber sus tablas, tal como sería necesario conocer sus departamentos (prefecturas o subprefecturas). Se tenía el pudor de no asombrarse demasiado ante los fracasos, pero era algo osado afirmar que la mayoría de los escolares era poco dotada: no se les daba en efecto ninguna oportunidad de manifestarse y luego de desarrollar sus dones.

En esta concepción tradicional todos los esfuerzos pedagógicos se dedicaban a la preparación, al adiestramiento. La idea de reservar los mejores profesores (suponiendo que se lo pueda hacer, que se los sepa distinguir) a los mejores alumnos (suponiendo que dispongamos de criterios para seleccionarlos), tiene todavía sus partidarios. Algunas clases preparatorias para los concursos de las grandes escuelas fundan en ello su reputación y nadie podría tratar de revelarse indiscretamente contra el plan de enseñanza matemática si no se hubiera descuidado la enseñanza para todos[1].

En lo que, para avanzar rápidamente, se denomina "renovación de la enseñanza matemática", existe felizmente la conjunción de una reforma de los contenidos y una reforma no menos importante de los métodos didácticos; se trata de un verdadero cambio de orientación, de una reforma en profundidad, de *una nueva concepción de la enseñanza matemática.*

Una nueva pedagogía matemática.

Esto se basa sobre la feliz conjunción de las ideas denominadas modernas, en matemática, y los descubrimientos de las ciencias de la educación acerca de la formación de los conceptos en la mente del niño así como sobre las técnicas de los diversos aprendizajes. Debemos completar lo que ya hemos dicho sobre las primeras. Será todavía más útil examinar en detalle, tanto como podamos, el aporte actual de las ciencias de la educación. Sin embargo es necesario insistir en seguida sobre el acuerdo perfecto existente entre las exigencias de la matemática denominada moderna y las recomendaciones que los investigadores de la psicología y de la pedagogía pueden hacer a quienes enseñan. Para simplificar, resumámoslas en algunas frases un poco esquemáticas.

— *Prioridad de la acción del alumno.* Se trata de evitar a cualquier precio que el alumno acepte pasivamente las instrucciones, las definiciones, las abstracciones formuladas por el maestro. Para avanzar rápidamente (en apariencia) el maestro siempre siente la tentación de imponer su concepción; por pereza, no detesta la ciencia completamente hecha pero, al término de cierto tiempo, siente una sensación de

1. Precisemos sin retardo que la Inspección General de Matemática surge directamente del cuerpo de profesores de las clases preparatorias de las grandes escuelas científicas; incluso cuando está encargada de los estudios secundarios, reserva todos sus cuidados y prioritariamente orienta su acción en un sentido favorable a las clases preparatorias. Tales circunstancias irrisorias parecen acaso explicar la incapacidad de la Inspección General para desempeñar otra función que la de frenar la reforma de la enseñanza matemática.

hastío; la enseñanza dogmática engendra disgusto por el estudio y la fuente de los fracasos. La función (difícil) del maestro es provocar la acción del alumno: la importancia de la elección de las situaciones a estudiar, de las cuestiones a plantearse y de la forma de plantearlas. Papel difícil pues el maestro debe resistir a la porfía de imponer su concepción, evitar sus procedimientos aun cuando estos sean muy a menudo, si no siempre, preferibles.

— *El alumno debe observar, analizar.* Por tanto, es preferible evitar las cuestiones demasiado precisas. Aprender a buscar bien es aprender a tratar de plantearse cuestiones. Entre los medios para evitar las cuestiones demasiado precisas (y cuya formulación indica a veces qué tipo de respuesta se espera) el auxilio de los materiales didácticos bien conocidos a menudo es muy eficaz. Al respecto existe una rica experiencia acumulada por las maestras de los jardines de infantes (el hecho de que sus alumnos no sepan escribir las ha obligado, a subrayar la importancia de las manipulaciones: "También hacen falta las manos para instituir un lenguaje" decía Paul Valery. En los diversos niveles de enseñanza, diversos materiales, imaginados o construidos por los mismos alumnos, ocultan riquezas matemáticas insospechadas. Existen muchos ejemplos de materiales concebidos para el primer aprendizaje del cálculo y en los cuales los empleadores han puesto en evidencia estructuras desconocidas para los fabricantes o inventores.

— *El alumno debe abstraer.* Se trata de una etapa fundamental que no se podría "quemar" bajo el pretexto de que el alumno tarda en concebir la abstracción que el maestro ha adquirido desde mucho tiempo atrás. La abstracción impuesta no tiene ningún valor para aquél a quien se le impone; muy corrientemente la acepta sin concebir su alcance... Por lo contrario, si la conquista al cabo de numerosas observaciones o discusiones (con alumnos, como él, en trance de abstraer), sabe "de dónde vuelve"; no se trata en ese caso de una noción extraña a su mente.

— *El alumno debe deducir.* Si tiene los medios lógicos para hacerlo (la experiencia ha mostrado aptitudes limitadas, pero ciertas, para la deducción en niños de cinco años), y sobre todo si siente la necesidad de hacerlo.

— *El alumno debe aplicar,* esto es, debe usar sus conocimientos, sus adquisiciones.

Un nuevo clima en la clase.

Por lo tanto, la tarea del maestro se vuelve nueva. Para él, se trata menos de difundir su saber en la cabeza de sus alumnos que de prepararles situaciones enriquecedoras. Se trata de estar pronto para responder a las preguntas más incongruentes, de saber guiar a las síntesis indispensables y, en ciertos casos, de saber obtener por sí mismo ciertas observaciones parciales o torpes, esas que los más hábiles habrían podido descubrir (dejándoles sin embargo a los alumnos la parte más bella, la del descubrimiento). Tarea ardua, tanto sobre el plano matemático (es necesario dominar, manejar un tema, para comprender los enfoques torpes de los principiantes y saber orientar sus pasos) cuanto sobre el plano pedagógico (aprender a no decir más que lo que hace falta, aprender a corregir sin descorazonar, aprender a comprender las formulaciones "incomprensibles"...) o sobre el plano puramente humano (no es cuestión de que el maestro brille; junto a sus alumnos debe ser un artesano en su trabajo. Es una mutación de la función docente que no carece de grandeza: la de la humildad.

También le corresponde la cuestión de la fraternidad. El diálogo entre los alumnos y maestros es una condición indispensable para este género de trabajo; el obstáculo que el curso magistral creaba, para ese diálogo, deja de existir si el alumno siente que el maestro es un compañero de trabajo; acaso incluso perciba con bastante rapidez que el maestro es el alumno de sus alumnos: cada día puede aprender algo de cada uno de ellos.

Aprende también de los intercambios que puede y debe tener con sus colegas. Las tentativas de trabajo demasiado tímidas de muchos equipos de maestros ya han convencido a muchos escépticos que no suponían el interés que pueden tener estas cosas: el maestro, sobre todo si sus alumnos son muy jóvenes, tiene necesidad, él también, de dialogar con semejantes adultos como él.

En síntesis, *el espíritu moderno pone el acento sobre la construcción matemática;* los aportes de las ciencias de la educación insisten sobre la indispensable función de la acción personal del alumno; las investigaciones pedagógicas ponen en evidencia la necesidad de una formación permanente de los maestros que los transforme de "recitadores" en "investigadores" pedagógicos. Hay en esta convergencia de las tendencias de la matemática y la pedagogía una posibilidad que se debe asir: *se podría pensar que una reforma de la enseñanza matemática era indispensable; se encuentra que es posible, que está, es el momento de decirlo, al alcance de la mano.*

ANEXO 2

HANNOUN, H. **El niño conquista el medio**. Kapelusz. Buenos Aires. Pp. 72 a 91.

A. Cómo el niño percibe el espacio

Los efectos del egocentrismo infantil sobre la percepción del espacio

Al respecto, los efectos del egocentrismo infantil nos parecen importantes en tres áreas diferentes:

El niño sólo puede percibir un espacio acorde con sus propias dimensiones.

– En razón del "realismo intelectual", el niño percibe el espacio tal como lo piensa y no como lo ve.

– La lateralización del niño, el reconocimiento de la derecha y la izquierda, presenta una dificultad no despreciable.

El niño, poco preparado para aprehender el mundo –y el espacio– de los adultos, lo transformará de alguna manera para reducirlo a sus propias dimensiones. Ese espacio donde se sentirá bien, ese espacio suyo será, ante todo, su propio cuerpo. Todos sabemos cuánto les gusta a los bebés descubrir su propio cuerpo con sus manos. Todo lo revisan: la mano derecha descubre la izquierda, luego el brazo, pronto las partes genitales o los pies. Igual que le sucedía al pequeño Jean-Christophe. Veámoslo:

"Nadie se ocupa de él; no necesita a nadie... Su cuerpo le es suficiente. ¡Qué divertido es! Se pasa horas enteras contemplando sus uñas, riéndose a carcajadas. Todas tienen fisonomías diferentes, se parecen a personas que él conoce. Las hace conversar entre sí, bailar o pelearse. ¡Y el resto del cuerpo! ... Sigue la inspección de todo lo que le pertenece. ¡Cuántas cosas asombrosas! Algunas son muy extrañas. Queda curiosamente absorbido por su aspecto.

A veces se sintió sobrecogido cuando lo sorprendieron así." (Romain Rolland, *op. cit.*, pág. 16.)

Esa importancia que el niño asigna a su propio cuerpo no se perderá jamás, aun cuando, más tarde, adoptará otros aspectos [25]. Estudiaremos las consecuencias pedagógicas de ello.

Ese espacio propio, que el niño descubre desde sus primeras semanas de vida, pronto se abrirá hacia el espacio exterior, el espacio de las cosas. En este plano, será fácil concebir que nuestro espacio de adultos, casas, muebles, calles y plazas, campos y montañas no corresponden a la dimensión de un ser que apenas acaba de salir de la estrechez de una cuna. El niño reconstruirá ese mundo extraño de acuerdo con sus propias dimensiones. Lo convertirá en *su* mundo; no transformándolo efectivamente, por supuesto, sino adaptándose a él mediante una imaginación transformadora de las cosas. Todos habremos comprobado, por ejemplo, cuánto les gusta a los niños de la escuela elemental jugar debajo de las mesas (los muy pequeños), o aislarse en rincones, chozas, desvanes, etc. (los mayores del ciclo medio). Aunque la interpretación de tales actitudes no se refiere exclusivamente a cuestiones del espacio, puede afirmarse que, en todos los casos, el niño tiende a *limitar* el espacio de sus evoluciones con el fin de reducir el espacio objetivo a dimensiones aprehensibles para él. Es innegable que los "rincones-taller" de los jardines de infantes responden de alguna manera a esa necesidad del niño de ocupar el espacio. A los niños del curso preparatorio o del curso elemental, a veces hasta a los del curso medio, les resulta difícil organizar espontáneamente juegos que ocupen todo el patio de recreo (si es de tamaño normal), porque no *saben* ocupar un espacio tan grande. En la mayoría de los casos preferirán organizar juegos que requieren espacios más restringidos. Haremos una última observación: un niño ante una hoja de papel en blanco tiene dificultad en llenar con su dibujo toda ella. Nuevamente, esta vez sobre el plano gráfico, *no sabe ocupar* el espacio. Tenemos que enseñárselo.

No satisfecho con rechazar del espacio las dimensiones demasiado vastas para él, el alumno de la escuela elemental muchas veces transformará el espacio que conoce para darle una significación conforme con su personalidad y sus deseos. Muy pronto el rincón del comedor será el dormitorio de la muñeca, un rincón del jardín será el secreto lugar de reunión para ejecutar distintos juegos. En alguna medida, el espacio del adulto es transformado por el niño no sólo desde un punto de vista cuantitativo, en sus dimensiones, sino también desde el cualitativo, en su significación. Y en ese espacio, el niño se siente muy cómodo. Igual que le sucedía a Jean-Christophe:

"*Cuanto peor era el camino, tanto más hermoso lo encontraba Christophe. El lugar de cada piedra tenía un sentido para él; las conocía a todas. El relieve de un carril le parecía un accidente geográfico poco menos importante que el macizo del Taunus. Tenía en su mente el mapa de los hoyos y abultamientos de toda la zona en un área de dos kilómetros alrededor de su casa. Así, cuando cambiaba algo en el orden establecido de las huellas, no se creía menos importante que un ingeniero con una cuadrilla de obreros. Y cuando había aplastado con el tacto la arista seca de una gleba y llenado el hueco debajo de ella, sentía que no había perdido su jornada.*" (Romain Rolland, *op. cit.*, págs. 22-23.)

El espacio es para el niño pequeño, en primer lugar, un mundo en el cual no quiere —o no puede— entrar. La porción de ese mundo en que decide aventurarse la conquistará sólo al precio de una transformación cuantitativa y cualitativa a la vez. Incumbe, pues, al educador ayudar al niño a penetrar en espacios cada vez más amplios y verdaderos.

En cuanto al "realismo intelectual" del niño se refiere, creemos poder retomar aquí las conclusiones de Jean Piaget acerca de la cuestión [26]. Piaget insiste, sobre todo, en la noción de perspectiva que durante mucho tiempo resulta inconcebible para el niño, aun después de los ocho o nueve años. Si bien alrededor de esa edad, el pequeño, a quien se le muestra un grabado de una vía de tren, reconoce en él la perspectiva, durante mucho tiempo aún será incapaz de representar esos rieles teniendo en cuenta esa misma perspectiva. En su dibujo aparecerá el paralelismo, porque *sabe* que los rieles no se encuentran jamás. De modo que el niño *no sabe ver* el espacio. En él, el mundo exterior y su representación todavía se hallan mezclados. Expusimos anteriormente, en este mismo sentido, la tesis de Luquet sobre el dibujo infantil.

El problema de la distinción entre derecha e izquierda reviste, según nuestra opinión, una importancia mayor aún. En efecto, para el niño, y en general para los que adoptan una actitud antropocéntrica, el espacio se divide en cuatro partes: lo que se halla delante de mí, detrás de mí, a mi derecha y a mi izquierda. Esta distinción es el primer análisis que el niño hace de su espacio, instintivamente o con el fin de responder a necesidades exteriores. El reconocimiento de adelante y atrás suele ser fácil de lograr. Adelante es el sentido de la marcha, es lo que veo con los ojos, es lo que la mano alcanza con mayor facilidad, etc. Atrás es lo opuesto a adelante. Estos criterios son vivenciados íntimamente por el niño y como tales los adquiere con facilidad. No sucede lo mismo en cuanto a la distinción de derecha e izquierda, respecto de lo cual esos criterios muchas veces faltan [27].

En su obra sobre *"Le jugement et le raisonnement chez l'enfant"* (Delachaux et Niestlé, págs. 137 y sigs.), Jean Piaget expone las conclusiones a las que llegó en este ámbito. Para él, y según sus apreciaciones, el niño de cinco a ocho años sólo distingue lo que se halla a *su* derecha y a *su* izquierda. En la mayoría de los casos le resulta imposible dar el paso de *su* derecha a la de su interlocutor. De los ocho a los once años, esto es posible: el niño distingue la derecha y la izquierda del interlocutor que se halla frente a él. Finalmente, a partir de los once o doce años, el niño sabrá situar los objetos en su relación recíproca: el escritorio del maestro se encuentra a la izquierda del armario, la puerta del aula está a la derecha de la estantería, etc., y esto independientemente de la posición propia del niño.

Señalemos los efectos del egocentrismo en cuanto al espacio. En un principio, el niño no es capaz de aprehender el espacio en sus dimensiones reales ni en su significación verdadera, no sabe representarlo ni analizarlo. Son estas imposibilidades o dificultades las que nos dictarán la gestión pedagógica para subsanarlas.

Los efectos del sincretismo sobre la percepción del espacio en el niño

Encontramos una definición perfectamente clara de lo que podríamos llamar el sincretismo espacial, en el siguiente texto de Burloud:

"*Por regla general se admite que el mundo, en un principio, aparece al niño como un panorama confuso, una continuidad coloreada en que los objetos no tienen contornos propios, o aun, hablando más exactamente, no hay objetos, sino solamente claros de luz que alternan con manchas de sombra.*" (*Psychologie*, Hachette, pág. 193.)

Al leer este texto, casi nos sentimos inclinados a decir que la visión del mundo, a los ojos de un niño pequeño, recordaría aquella que se obtiene mediante una fotografía tomada con una cámara mal enfocada: borrosidad general, imágenes de contornos muy esfumados, colores entremezclados, etc. El sincretismo, en cuanto supone globalización y confusión, encuentra en esto su descripción más exacta.

Pero hay más. Ya hemos visto que, en cuanto al objeto físico, una de las consecuencias del sincretismo era el hecho de que las propiedades de un objeto se consideraban como "adheridas" a él: el sombrero rojo de una dama es parte integrante –no accidental– de la imagen de la mujer, así como el follaje verde de ese plátano está "adherido" a él, sea cual fuere la estación. Ese vínculo, esa confusión de lo accidental con lo esencial vuelve a encontrarse en el nivel de la aprehensión del espacio, en la medida en que el niño no sabe separar el objeto del espacio que ocupa. Para él, el espacio no es ese receptáculo que puede contener un objeto cualquiera. El florero que se halla en el anaquel no es concebible fuera de ese sitio. La ubicación espacial del florero –el hecho de hallarse en la repisa– constituye en la mente del niño una parte integrante de su imagen del florero. El florero está en el estante o deja de ser ese florero [28]. Una experiencia análoga se hizo en la psicología animal. Antes de la vuelta de las golondrinas a una aldea, se desplazaron sus nidos a una distancia de aproximadamente 50 centímetros. Al volver, los pájaros los abandonaron; no los reconocían. En efecto, la percepción que tenían de ellos no lograba separar los nidos mismos del espacio que ocupaban. René Hubert describe este fenómeno en el siguiente pasaje:

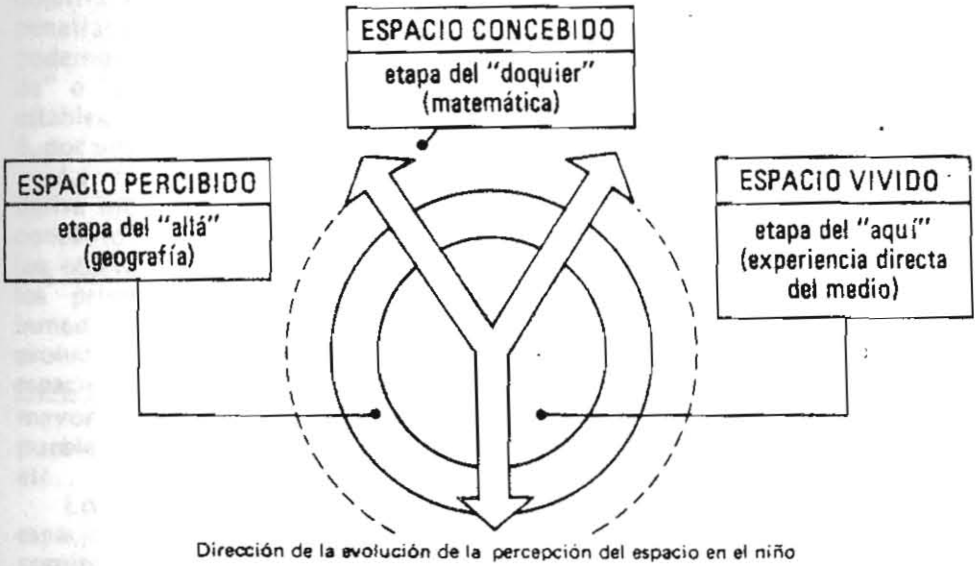
"*Esos conjuntos (de objetos vistos por el niño – H.H.) todavía no están ligados unos a otros por relaciones objetivas, sobre todo de espacio, tiempo, y menos aún, de causalidad o, mejor dicho, están incorporados al lugar donde se presentan, al momento en que se perciben.*" (*El desarrollo mental*, vers. cast. Editorial Kapelusz, Buenos Aires.)

La evolución de las formas de aprehensión del espacio en el niño

La percepción del espacio en el niño no escapa a la regla fundamental de su evolución general, que avanza en una dirección marcada por tres etapas esenciales:

- La etapa de lo vivido.
- La etapa de lo percibido.
- La etapa de lo concebido.

Primeramente, el niño *vive* el espacio. *Vive* las distancias y los recorridos. No percibe la distancia que separa la mano de la cuchara, puesta delante de él en la mesa. Necesariamente, no concibe esa distancia. Sólo la *vive*, por su imposibilidad física de alcanzarla. Este hecho, además, explica que a menudo el bebé parece no comprender que no puede asir un objeto colocado fuera de su alcance. Como no percibe ni concibe las distancias, como sólo las vive, las experimenta, no puede, por eso mismo, percibir ni concebir la imposibilidad de alcanzar los objetos. Experimenta esta imposibilidad al fracasar su movimiento. De ahí también la frecuente tentativa de los niños muy pequeños de alcanzar el cielo raso, la araña que está suspendida de él, las hojas de los árboles, etc. Esa etapa del espacio vivido es el estadio del "aquí". A causa de la forma de aprehensión del espacio, la única de la cual es capaz por ahora, el niño no puede superar el descubrimiento de un espacio "adherido" a su persona física.



Dirección de la evolución de la percepción del espacio en el niño

En la misma medida en que la experiencia primaria del niño es siempre experiencia directa del medio, su primera aprehensión del espacio será la del espacio vivido.

Es pues fácil de comprender que ese espacio vivido sólo puede ser un espacio físico con el cual el niño se halla en contacto biológico. Más aún, por lo general, el niño vivencia ese espacio mediante el *movimiento*. El niño *vive* el espacio del patio de recreo recorriéndolo, empezará a apreciar la diferencia entre las distancias que lo separan de dos objetos, que están ubicados lejos uno del otro, yendo a buscarlos. El niño de los jardines de infantes y del curso preparatorio vive su espacio, esencialmente por medio de su locomoción [29].

A partir de allí, llegará a la segunda etapa de aprehensión del espacio: la del espacio percibido. En esa etapa el niño llega a ser capaz de percibir el espacio sin tener que experimentarlo biológicamente, como en el estadio anterior. Por lo tanto, si enseñar al niño a analizar el espacio (a distinguir las distancias, las posiciones, adelante, atrás, dentro, fuera, etc.) sólo era posible haciéndole *vivir* esas distancias y posiciones, ahora será suficiente hacérselas percibir. Se ha desarrollado lo que los psicólogos llaman la *distanciación* del niño con relación al espacio: el niño retrocedió ante su objeto para conocerlo mejor. En la edad del ciclo elemental y el ciclo medio el niño es capaz de distinguir las distancias al observar un paisaje o una fotografía, y de precisar la posición de los objetos por la mera observación [30].

En esa etapa, el niño descubre no sólo el "aquí" sino también el "allá", ese "allá" que le transmiten sus sentidos, que su cuerpo —su movimiento— ya no tiene que experimentar en forma directa. Del "aquí" al "allá" existe, pues, una ampliación del campo empírico del niño, un ensanchamiento que nos dará el sentido de nuestra acción pedagógica posible, pues ahora, enseñar al niño a analizar el espacio significa pedirle que lo haga no ya mediante su movimiento, sino a través de la mera observación. El progreso es considerable, porque abre al niño el dominio de la geografía propiamente dicho, en cuanto ciencia de paisajes. Ahora es posible ir más allá del descubrimiento del espacio del aula o de la calle, para aprehender el de la colina cercana a la escuela, del panorama del pueblo visto desde una altura, de la fotografía aérea de la región, etc.

Es, pues, un adelanto considerable, pero no definitivo. Porque, a partir de ese estadio, hacia los once o doce años, el niño será cada vez más apto para aprehender el espacio concebido. Se trata del espacio matemático, del espacio abstracto, tal como se encuentra *por doquier*: las formas ya no reciben un contenido concreto. Sólo contienen relaciones. Se tratará del cuadrado, del rombo, del polígono regular, etc.

Del "aquí" al "allá" y luego al "por doquier", del espacio vivido al percibido y después al concebido, del conocimiento por el cuerpo y su movimiento al conocimiento por los sentidos (esencialmente la visión), y más tarde al conocimiento por el espíritu, asistimos a la misma manifestación de la gran ley de la evolución infantil: de lo concreto a lo abstracto, de lo físico a lo mental, de la experiencia a la reflexión. Respetar al niño con nuestra acción pedagógica significa, entonces, respetar esa ley que los psicólogos descubrieron para nosotros.

B. Cómo se debe enseñar al niño a situarse y a situar los objetos en el espacio

Se tratará de ayudar al niño a aprehender un espacio *independiente* de él, a "deslindar" el espacio de su propio punto de vista. Se tratará, además, de ayudarle a considerar el espacio *independientemente* del objeto que en él se encuentra, o sea nuevamente, a "deslindar" los objetos exteriores del espacio que ocupan. Piaget llama *descentración* a estos fenómenos.

La primera dirección en que debemos ejercer nuestra labor pedagógica se referirá a la estructuración misma del espacio. Hemos visto que el sincretismo de la percepción del niño es la causa de que no pueda desprender el objeto exterior de su espacio y, por consiguiente, llegar a discernir las distintas categorías espaciales que se le ofrecen (nociones de "cerca de", "abajo", "al borde de", etc.). Ahora bien, puede decirse que mientras el niño no haya asimilado esas categorías espaciales (sobre las cuales volveremos), no podrá situarse a sí mismo, ni a los objetos exteriores, de una manera objetiva. Nos incumbe ayudarle a reconocer y clarificar esas categorías y relaciones, en una palabra, a descubrir la estructura objetiva del espacio y, finalmente, a cuantificar esas estructuras penetrando en el mundo de la medida. Veremos, en efecto, que no podemos conformarnos con apreciaciones cualitativas de tipo "lejos de" o "cerca de". Una formación científica del niño requiere que establezcamos una relación entre el hecho de que $(AB) = 6$ y $(CD) = 8$, por una parte, y $(AB) < (CD)$ por la otra.

La segunda dirección en que deberá ejercerse nuestra acción deriva intrínsecamente de la anterior. Se referirá a la extensión del concepto de espacio. Se trata de ayudar al niño a situarse y a situar los objetos en espacios cada vez más extensos. Hemos visto que, en los primeros años, el niño sólo podía aprehender su espacio inmediato, vivido. Teniendo en cuenta al respecto su propia evolución psíquica, debemos ayudarle entonces a *extender* ese espacio y permitirle desplazarse y que conozca un espacio cada vez mayor: después de la habitación o el aula, será la calle, el barrio o el pueblo, la ciudad, la región, el país, el continente, el globo terráqueo, etc.

Lo que aquí importa es, en cierto sentido, la "cantidad de espacio", mientras que la búsqueda de la estructuración del mismo, considerada más arriba, se refería a su "calidad". Por lo demás, esa extensión del concepto es un hecho que nosotros mismos, los adultos, conocemos muy bien. Admitamos que, en efecto, si podemos situar con alguna precisión la ciudad de San Francisco con relación a la de Belgrado, o los montes Urales con referencia al Nilo, esa situación de los objetos espaciales se volvería más delicada si se tratara de representar Júpiter con respecto a Urano o simplemente la Luna frente a Marte. Surge aquí, sin duda, un problema de formación. Sin embargo, no es menos cierto que el espacio que nosotros, los adultos, podemos aprehender, tiene sus propios límites subjetivos. Para el niño, esos límites son aún más estrechos. Nos incumbe ensancharlos. Con el fin de lograr una penetración más profunda tanto en la estructuración como en la extensión del espacio, pasemos revista a los siguientes aspectos de la cuestión:

– Ayudar al niño a tomar conciencia del espacio ocupado por su cuerpo.
– Ayudarle a tomar conciencia de la orientación del espacio.
– Ayudarle a tomar conciencia de la delimitación del objeto en el espacio.
– Ayudarle a tomar conciencia de las posiciones relativas de los objetos en el espacio.
– Ayudarle a tomar conciencia de las distancias de los intervalos y a penetrar en el mundo de la medida y la esquematización del espacio.

La toma de conciencia del espacio corporal

La toma de conciencia del propio cuerpo reviste en el niño esencialmente el aspecto de una educación psicomotriz orientada a la lateralización, por una parte, y al afianzamiento del esquema corporal, por la otra [31].

La lateralización. Jean Tirman (*op. cit.*, pág. 4) toma de H. Pierón la siguiente definición de la lateralidad: "*Predominio de uno de los dos dispositivos de una mano, de un ojo, etc. que determina la existencia de diestros o zurdos, manuales u oculares*". Además, el autor destaca con razón la existencia de un predominio en los miembros inferiores.

Este problema de la lateralidad nos ofrece un ejemplo sorprendente de lo que hemos llamado el espacio vivido. Volverse diestro (o zurdo) significa *vivir* (a veces sin siquiera tener conciencia de ello) una primera división del espacio en dos partes asimétricas. Y esa división es el rudimento, aún muy débil, del futuro análisis que conducirá al niño al reconocimiento del espacio matemático.

Es, pues, indispensable que esa lateralización se produzca en forma conveniente, es decir, nítida. El niño debe tener una idea clara de su espacio vivido para poder superarla y concebir un espacio más elaborado. Tirman (*op. cit.*, pág. 4), citando a René Zazzo, recomienda al respecto que la norma de acción por seguir en ese ámbito consista en "ayudar al niño a lateralizarse netamente" y "si la lateralización es netamente zurda, estimular la zurdera y esforzarse por disipar en el niño todo lo que podría dar lugar a un sentimiento de inferioridad".

El esquema corporal. Tomamos de la obra citada de Jean Tirman la definición del esquema corporal: *"Basado en impresiones táctiles, cinestésicas, laberínticas y visuales, realiza, por medio de una construcción activa constantemente modificada de los datos presentes y pasados, la síntesis dinámica que provee, tanto a nuestros actos como a nuestras percepciones, el marco espacial de referencia en que adquieren su significación"* (Ajuriaguerra). Y Tirman agrega que el esquema corporal es *"a la vez la imagen intuitiva del yo físico y la representación del cuerpo que actúa en el mundo exterior"*. (*Op. cit.*, pág. 6.)

Esa imagen, que el niño se hace de su propio cuerpo, se va generando poco a poco durante los diez primeros años aproximadamente. *"Es el resultado y la condición de la existencia de relaciones adecuadas entre el individuo y su medio."* (H. Wallon, citado por J. Tirman, *op. cit.*, pág. 6.) Desde los cinco a los siete años, el niño toma paulatinamente conciencia de su cuerpo con sus distintas partes, mostrándolas y nombrándolas. De los seis a los nueve años, aparece lentamente la posibilidad de transferir a los objetos y a otra persona lo que ha comprobado en sí mismo.

Comprobamos un ejemplo nuevo de ese espacio vivido por el cual se inicia necesariamente la educación motriz del niño. En última instancia, como dice muy bien Tirman, el esquema corporal no es, todavía, una toma de conciencia de sí mismo, sino una simple "imagen intuitiva" del propio cuerpo, de un cuerpo, por de pronto, tan sólo vivido. Pero es necesario que sea vivido en su totalidad, para que de él nazca una imagen cada vez más consciente de sí mismo y del mundo exterior.

Ese análisis del espacio, hacia el cual queremos encaminar a nuestros niños, empieza allí; el niño lo hace primeramente con su cuerpo, antes de hacerlo con los ojos, para acabar por hacerlo con la mente.

La orientación del espacio

Digamos, en primer lugar, que el espacio, aunque sólo fuere con relación a uno mismo, tiene siempre una dirección fija: está centrado. Y con relación a ese centro pueden reconocerse en él distintas partes. Es posible analizarlo. Así podemos llegar a las siguientes categorías (ver el esquema siguiente)[32]:

	NOCIONES CORRESPONDIENTES A LAS CATEGORIAS DEL ESPACIO Y RELATIVAS A:		
CATEGORIAS DE LA ORIENTACION EN EL ESPACIO	el espacio ocupado por uno mismo o el objeto	la posición relativa de uno mismo o de un objeto con relación a un punto de referencia	el movimiento de uno mismo o de un objeto con relación a un punto de referencia
LATERALIDAD	la derecha de... la izquierda de...	a la derecha de... a la izquierda de...	a la derecha de... a la izquierda de...
PROFUNDIDAD	lo alto de... la cima de... lo bajo de... el fondo de...	encima de... debajo de...	sobre... bajo... ....
ANTERIORIDAD	el anverso de... el reverso de... la delantera de... la trasera de... el derecho de...	delante de... detrás de...	por detrás... por delante... hacia adelante... hacia atrás... al derecho... al revés... retrocediendo...

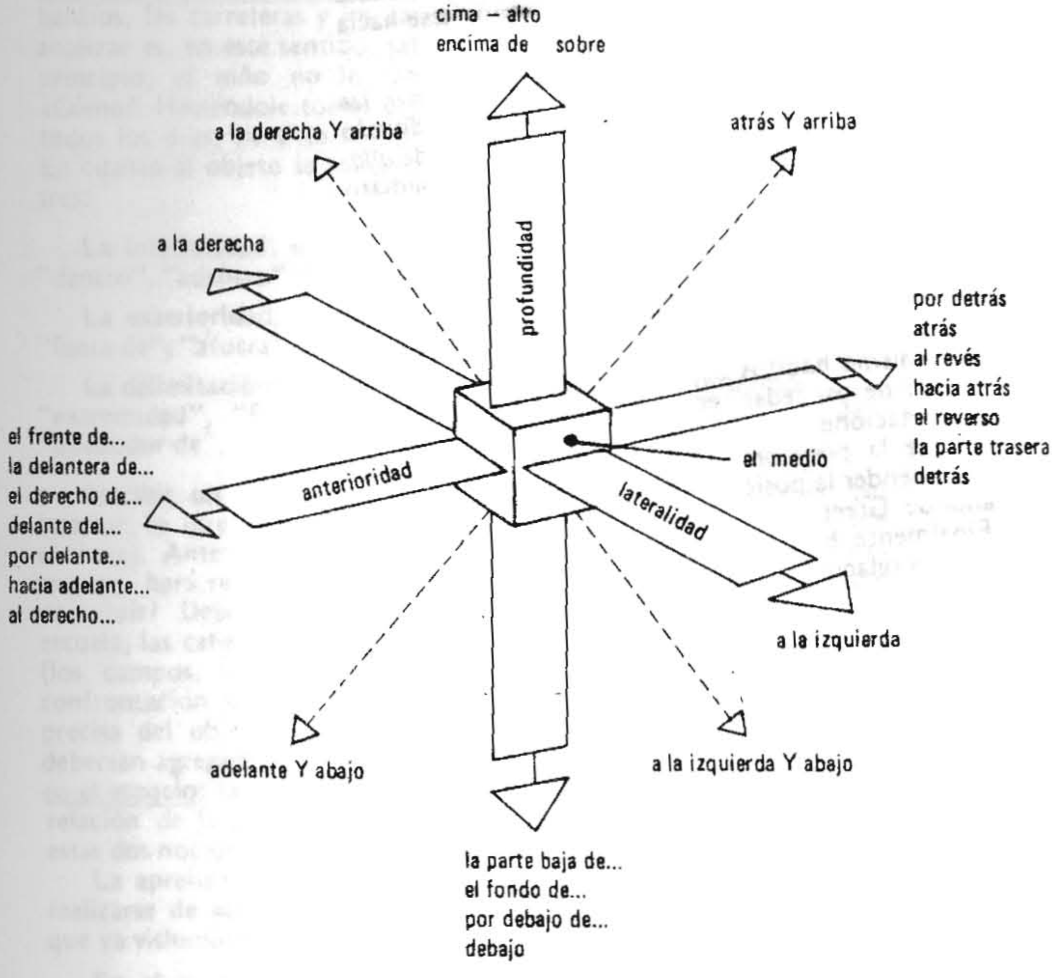
Esta aprehensión de las categorías del espacio se realizará en dos direcciones bien precisas:

En el sentido de la descentración. Se trata de conducir al niño gradualmente de la sola consideración de su propio cuerpo, o de los objetos con relación a su propia ubicación, a la consideración de los objetos exteriores *independientemente* de sí mismo y de su propia situación. Así, esta descentración debería llevarse a cabo progresivamente de acuerdo con el siguiente esquema:

Pasar del análisis del espacio ocupado por uno mismo al análisis del espacio ocupado por el objeto exterior.

Pasar del análisis de la posición de los objetos con relación a uno mismo, al análisis de la posición de los objetos con relación a otros objetos.

Pasar del análisis de la posición de los objetos con relación a uno mismo, al análisis del movimiento de los objetos con relación a un punto de referencia objetivo.



Las principales categorías de la orientación en el espacio y las nociones referidas a ellas

Como se ve, se trata esencialmente de eliminar el egocentrismo del niño, conseguir de alguna manera que "olvide" referirlo todo a sí mismo. Y ese "olvido" es la condición indispensable de su evolución.

¿Cómo podremos lograrlo? Por medio de la segunda dirección que, según opinamos, debería tomar la aprehensión de las categorías de la orientación: la extensión del concepto.

En el sentido de la extensión del concepto. Como se ve, es la consecuencia inevitable de la descentración. Las nociones de izquierda y derecha, arriba y abajo, adelante y atrás, primeramente serán *vividas* por el niño, por su cuerpo en movimiento, en sus desplazamientos, saltos, corridas, brincos, etc. Lo de arriba es lo que sólo puede alcanzar saltando, lo de abajo sólo lo consigue bajándose, etc. No interviene ninguna verdadera percepción, ni concepción real de esas nociones. El objeto es vivido, está allí, presente, muy cerca del niño, es casi siempre el niño mismo. El objeto lejano todavía no está a su alcance. Nos incumbe a nosotros ayudarle a transportarse hacia él.

En efecto, es menester que el niño llegue no sólo a *vivir* las categorías del espacio, sino a *percibirlas*, y ese paso de lo vivido a lo percibido permitirá la extensión del objeto de *aquí* al objeto de *allá*. El espacio que el niño puede comprender ahora ya no es el inmediato de su habitación o del aula, solamente. Es el espacio de su barrio o su pueblo, y pronto el de la ciudad, de la región y hasta del país. Es el percibido en la geografía en el cual va penetrando. Insensiblemente, por haber aprendido a analizar el espacio según las categorías de arriba-abajo, adelante-atrás, etc., llegará ahora con mayor facilidad a captar las nociones más elaboradas de los puntos cardinales [33]. Habiendo creado en sí mismo hábitos de pensar según las categorías de lo vivido, será capaz de proceder, en otro nivel, al análisis del espacio según las orientaciones norte-sur y este-oeste. Habiendo aprendido correctamente la posición de un objeto con relación a otro, será capaz de aprehender la posición de una parte del globo con relación al meridiano de Greenwich o a cualquier otro punto de referencia natural. Finalmente, habiendo aprendido a captar correctamente el movimiento con relación, no a sí mismo, sino a otro objeto, le será menos difícil captar los movimientos relativos de la Tierra y el Sol.

El análisis espontáneo del espacio vivido prepara al niño para aprehender, mediante un análisis más elaborado, el espacio percibido de la geografía, ya sea que éste se presente en forma de un paisaje o de un documento fotográfico o impreso.

Ese espacio percibido de la geografía, a su vez, prepara al niño para aprehender el espacio matemático. En el nivel del espacio concebido, aquel que ni siquiera admite el trazado de un mapa, sólo las formas importan. Su correcta aprehensión presupone una larga educación que, sin duda alguna, se origina en el modesto análisis del espacio vivido.

El objeto en el espacio

En ese espacio, cuyas distintas orientaciones el niño aprende poco a poco a descubrir, hay objetos. Los psicólogos nos han dicho cuán poco se destacan en él los objetos según sus contornos. Si para nosotros los adultos, los objetos —por lo menos los comunes— se presentan en sí mismos, diferenciados de lo que no son ellos mismos, para el niño no es así. Para el niño del jardín de infantes, la ventana de la fachada de la escuela no existe sin esta fachada; los cristales de esa ventana no tienen aisladamente ninguna existencia real. Lo que él percibe es el todo. Los detalles se le escapan todavía [34]. Ese sincretismo debe superarlo con ayuda del maestro. En otro nivel, nuestros alumnos de las clases elementales —incluso los del ciclo medio— a veces tienen dificultades en delimitar los distintos elementos de un paisaje, en percibir los campos labrados, los terrenos baldíos, las carreteras y los canales; acantilados y playas, etc. Saber analizar es, en este sentido, saber delimitar los componentes. En un principio, el niño no lo sabe hacer. Tenemos que enseñárselo. ¿Cómo? Haciéndole tomar conciencia de esas categorías que utiliza todos los días, pero no siempre en forma consciente ni sistemática. En cuanto al objeto se refiere, consideramos que esas categorías son tres:

La interioridad: en esta categoría encontramos las nociones de "dentro", "adentro", "en el interior", etc.

La exterioridad: en esta categoría encontramos las nociones de "fuera de", "afuera", "al exterior", etc.

La delimitación: por último, en esta categoría encontramos las de "extremidad", "final", "límite", "perímetro", "a lo largo de", "alrededor de", etc.

Percibir un objeto es, esencialmente, distinguir *lo que es* (su interior, lo que comprende), de *lo que no es* (su exterior, lo que excluye). Ante un paisaje visto desde la cumbre de una colina, el maestro hará reconocer a los alumnos su pueblo. ¿Qué tendrán que descubrir? Deberán distinguir el pueblo (sus casas, el campanario, la escuela, las calles, etc.) entre todo lo que no es, que está *fuera* de él (los campos, las granjas vecinas, la ruta, la montaña, etc.). La confrontación de esos descubrimientos conduce a la delimitación precisa del objeto, en este caso el pueblo. (Además, creemos que deberían agregarse otras dos nociones a las que se refieren al objeto en el espacio: las de "centro" y de "medio". En efecto, la puesta en relación de la estructura del objeto y de la medida traerá consigo estas dos nociones.)

La aprehensión de las categorías del objeto en el espacio podrá realizarse de acuerdo con las orientaciones de la acción pedagógica que ya vislumbramos respecto de la orientación del espacio.

En el sentido de la descentración. "Descentrar" el objeto, en cuanto al niño se refiere, significa, en primer lugar, eliminar su egocentrismo, enseñarle a discernir, a distinguir las partes del todo confuso que se le presenta. Significa, además, ayudarle a olvidar que los contornos o alcances de ese objeto no siempre están vinculados estrechamente con sus propias preocupaciones. Sabemos que el niño ve en los contornos o alcances de los objetos posibilidades de utilizarlos en relación con sus intereses del momento: una ramita será espontáneamente una pistola de *cow-boy* o una honda. Una piedra podrá ser un elemento de decoración, un pisapapeles, etc. Esto responde a una ley psicológica a la cual incluso el adulto no escapa. Pero, al respecto, la acción pedagógica consistirá no tanto en negar esa tendencia, que es fundamental, sino en conseguir que el niño lleve a cabo la experiencia de *otros* empleos de los objetos: la ramita podría ser (también) una percha, la piedra podría servir de "plomada", de la cual se habló en la clase dedicada al oficio de albañil, etc.[35].

El objeto descubierto por el niño es, ante todo, *su* objeto. Pero no es *tan sólo* eso. La labor educativa trata de hacérselo reconocer.

En el sentido de la extensión del concepto. La extensión del concepto de objeto, en cuanto a su situación en el espacio, será la extensión de las categorías que descubrimos en él: interioridad, exterioridad y delimitación.

La extensión de la interioridad llevará al maestro a ayudar a sus alumnos a precisar en todo lo posible el análisis del objeto delimitado. Volvamos a nuestro ejemplo de la observación del pueblo visto desde la cumbre de una colina. Fue necesario, ante todo, distinguir el pueblo de lo que no pertenece a él, es decir, delimitarlo. Pero extender aún más las investigaciones consistirá en profundizar el reconocimiento de los detalles de las calles y plazas, lo cual significa, en términos generales, mejorar el conocimiento del objeto en sí mismo.

Si la extensión de la exterioridad del objeto persigue la misma acentuación del análisis, la delimitación a su vez hallará un contenido siempre renovado. Extender la categoría de la delimitación significa ayudar al niño a aprehender espacios cada vez más vastos, o sea, hacerlo pasar gradualmente de su espacio vivido, inmediato, el de su habitación, la escuela, la calle, a espacios que sólo puede descubrir por intermedio de documentos (planos, mapas, fotografías, etc.).

Extender la delimitación, significa preparar al niño para aprehender primero el espacio geográfico, para llegar después al espacio geométrico mismo. Porque parece que el análisis de la campiña que rodea al pueblo, el análisis del barrio, con sus calles y callejuelas, las plazas y grandes conjuntos, será el mejor aprendizaje de ese ejercicio tan delicado que consiste en comprender una fotografía del paisaje, un documento geográfico cualquiera y, más aún, un mapa.

Las posiciones relativas de los objetos en el espacio

La aprehensión de la exterioridad del objeto en el espacio nos habrá permitido, por añadidura, situarlo con relación a otros objetos con los cuales mantiene ciertas relaciones espaciales. Estas relaciones las queremos abordar ahora con el fin de estudiar sus categorías y las consecuencias de la acción pedagógica en el sentido de la descentración y la extensión.

En cuanto a las categorías de las posiciones relativas, no causará extrañeza volver a encontrar las de interioridad y exterioridad que vimos con respecto a la situación espacial del objeto mismo. Es evidente que se habrá percibido este objeto como conteniendo en su interior otros objetos, y por ende esa interioridad será al mismo tiempo del objeto y de sus relaciones con sus componentes.

Podemos, pues, distinguir cuatro categorías referentes a las posiciones relativas de los objetos en el espacio:

1) La interioridad: el objeto B está *dentro* del objeto A. Tendremos entonces las nociones de "en", "en el interior de", "dentro", etc. A esta categoría los matemáticos la llaman inclusión.

2) La exterioridad: el objeto B se halla *fuera* del objeto A. Tenemos entonces las nociones de "fuera de", "afuera", etc. Es la categoría que, en matemática, adopta la forma de exclusión o no pertenencia.

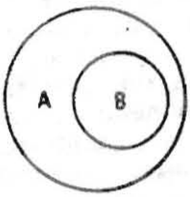
3) La sección: el objeto B corta o atraviesa el objeto A. Tendremos en este caso las nociones de "cortar", "atravesar", "a través de", etc.[36].

4) La contigüidad: el objeto B está en contacto con el objeto A. En este caso, tenemos las nociones de "tocar", "junto a", etc.

Las principales categorías de las posiciones relativas de los objetos en el espacio

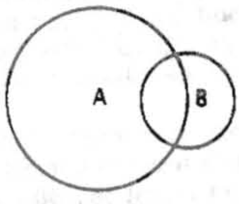
I LA INTERIORIDAD

- en
- en el interior de
- en medio de
- dentro



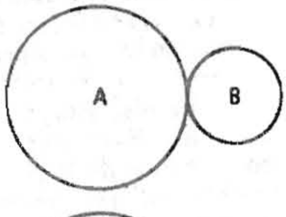
II LA SECCION

- que corta
- a través



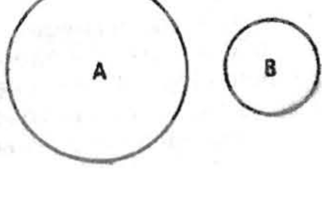
III LA CONTIGÜIDAD

- que toca
- junto a



IV LA EXTERIORIDAD

- fuera
- fuera de
- en el exterior
- entre



Tal como lo vimos con relación a la orientación del espacio, la aprehensión de las categorías propias a la posición relativas de los objetos se hará en dos direcciones precisas:

En el sentido de la descentración. Al respecto, el problema es todavía más claro que el referente a la orientación: como se trata de la posición o del movimiento de un objeto con relación a un punto de referencia, éste podrá ser el niño mismo u otro objeto. En el plano psicológico, hemos visto que el niño aprecia la posición y el movimiento primero con relación a su propia posición y su propio movimiento. La descentración consistirá, pues, en ayudarle a apreciar la posición y el movimiento de los objetos exteriores ya no con relación a sí mismo, sino a los demás objetos.

En el sentido de la extensión del concepto. Aplicaremos el mismo esquema que antes. Ayudando al niño a seguir su evolución natural, que lo hace transitar de lo vivido a lo percibido y luego a lo concebido, le permitiremos aprehender espacios cada vez más vastos. En un principio —y reconoceremos en esto actividades comunes de los jardines de infantes— se tratará de hacer *vivir* al niño su posición —o su entrada— *en* el aula o *en* el aro puesto en el piso o *en* la casa de la muñeca, etc. Ese mismo niño *atravesará* el pátio de recreo, se colocará *contra* la reja del portón de entrada a la escuela, etc. Y de esta suerte, comenzará no sólo a familiarizarse, sino además —y esto es lo esencial— a tomar conciencia de esas nociones que ahora deberá superar para apreciarlas ya no *viviéndolas* sino *percibiéndolas*.

Esa percepción de los objetos, de sus límites, sus fronteras, su centro o sus bordes, etc., ayudará al niño a penetrar una vez más en el análisis de los espacios cada vez más extendidos, en una palabra, en el espacio geográfico antes realmente percibido (percepción de paisajes, barrios, pueblos, etc.) y después percibido a través del documento (fotografías aéreas u otras, mapas, etc.). Si las adquisiciones hechas a nivel del espacio *vivido* no son de la misma índole que las hechas a nivel del *percibido*, si el hecho de mostrar correctamente el medio o centro y los bordes de la pintura mural se ubica en otro nivel que el de seguir con el dedo los límites de la región en el mapa, no por eso es menos cierto que la experiencia de lo *vivido* prepara la de lo *percibido*. Antes que fuera *apto* para percibir convenientemente, era necesario crear en el niño los *hábitos* de discernir, analizar y reconocer las distintas partes de un todo. Esa necesidad de discernimiento y análisis se denomina, en términos de la psicología, eliminación del sincretismo de la percepción. Esa eliminación comienza en la edad de la escuela preelemental.

Pero no se detiene en la etapa de lo *percibido*. Si la educación de lo *vivido* dio al niño ese movimiento que le permitió abordar, en condiciones adecuadas, el estadio de lo percibido, ese movimiento ha de recibir un nuevo impulso hacia la etapa superior de lo concebido; de la aprehensión de los espacios geográficos cada vez más extendidos, el niño ha de ser capaz de proseguir su abstracción hacia los espacios matemáticos y, en particular, hacia las nociones que abarca una teoría de conjuntos matemáticos. En efecto, ya vimos cuán grande es la afinidad que existe entre la aprehensión del espacio y la elaboración matemática.

Las distancias, los intervalos y la medida

Las categorías que acabamos de establecer en cuanto a la exterioridad y la contigüidad de los objetos introduce de por sí las de la distancia. En efecto, si un objeto es exterior a otro, o a cierto punto, y si es contiguo a él, planteará de inmediato el problema de la importancia de la exterioridad o la contigüidad; con otras palabras, el problema de la distancia que separa los dos objetos.

Por lo demás, no nos fue posible separar, ni lógica ni psicológicamente, las tres áreas de distancias, intervalos y medida. En efecto, es suficiente agregar la repetición a la distancia para obtener categorías de intervalo. Decir que encontramos plátanos a intervalos regulares a lo largo de la carretera que lleva a una localidad vecina, significa que la distancia que separa un árbol del que le sigue se repite x veces hasta el pueblo.

Sin duda se notará que, simultáneamente, distancias e intervalos no son concebibles sin pasar de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual presupone la medida: una distancia no es tan sólo la afirmación de un "más cerca de" o "más lejos de", sino que exige el número como elemento último de la precisión. El intervalo a su vez exige la precisión de su frecuencia. De todos modos, la estructura del espacio desemboca aquí en un enfoque matemático de las cosas [37].

Las categorías de la distancia pertenecen a dos grupos:

1) La proximidad: relacionamos con ella las nociones de "cerca de", "al lado de", "más cerca de", "no tan lejos de", "aquí", "éste", etc

2) El alejamiento: se refieren a él las nociones de "lejos de", "más lejos de", "menos cerca de", "allá", "aquél", etc.

Con la categoría de los intervalos espaciales relacionamos las nociones de "apartado uno de otro", "de lugar en lugar" y sobre todo las importantísimas nociones de "continuo" y "discontinuo". En efecto, el espacio geométrico auténtico no conoce la discontinuidad y, por ende, la continuidad que lo caracteriza podrá llevar al niño, más tarde, a concebir ese resultado último de toda extensión: lo infinito.

También en esta área, la acción pedagógica se realizará:

En el sentido de la descentración: las categorías de la distancia se conciben, tal vez, menos que cualquier otra, y ello será con relación a un punto de referencia, de la misma manera que las de la medida sólo se conciben en relación con una unidad métrica. Comprenderemos entonces que, en este campo, la acción de la descentración consistirá en ayudar al niño a apreciar las distancias ya no tan sólo con relación a su propia posición, sino con relación a los objetos mismos: se trata de llegar del empleo de "A está lejos de mí", "B está cerca de mí", al de "A está cerca de C" y "D está mas cerca de M que de N". Además, esa acción de descentración aspira a lograr que el niño utilice una unidad de medida no vinculada con su persona (el largo de sus pasos, la separación de los dedos de la mano, etc.), para llegar poco a poco a la aprehensión de una unidad de medida objetiva.

En el sentido de la extensión del concepto: primeramente, el niño *vive* las categorías de lejos y de cerca. Juan sabe –o siente– que está más cerca de Pedro que de José. Verónica sabe que debe correr más tiempo para alcanzar a Miguel que a Andrés. El papel del educador consistirá, al principio, en precisar esas nociones en las mismas áreas de la vida del niño. Enrique, que ve mal, tiene que acercarse más al pizarrón, etc. En efecto, es necesario que los niños vivencien esas nociones, pero en forma clara y distinta.

A partir de esa claridad inicial, los alumnos pronto serán capaces de aprehender esas categorías de la distancia no sólo vivenciándolas, sino percibiéndolas: apreciación (primeramente cualitativa) de las distancias que separan la escuela del hogar, de la distancia que separa el ayuntamiento del mercado, etc. [38]. Desde la apreciación de las distancias de un paisaje se puede pasar a las representadas en un croquis o un mapa. Entonces ya estaremos muy cerca del espacio concebido, gracias al cálculo de esas distancias según la escala del mapa.

De la sensación muscular de la distancia al cálculo según la escala de un mapa (o de una distancia a partir de la escala), se desprende la significación de la gradación: de lo biológico a lo mental. El movimiento en esta dirección será, aquí, el aporte más fecundo a los maestros, en la medida en que les orienta respecto de toda su labor en este campo.

De acuerdo con los resultados obtenidos por Piaget, comprobamos que semejante progresión hace surgir gradualmente lo cuantitativo de lo cualitativo. Después de haber apreciado aproximativamente las distancias, el niño llegará a medir y a reconocer el número como instrumento de apreciación. Sólo entonces penetrará más aún en el mundo del espacio concebido según todas las clasificaciones que esas actividades admiten, para llegar a la noción matemática del orden.

En ese campo de lo conceptual se abordará entonces la representación gráfica del espacio en el marco de la geometría. De la experiencia del movimiento a la geografía y luego a la geometría hemos seguido una gradación lógica y psicológica que a la vez conduce a una evidente interdisciplinariedad.

A modo de conclusión: la descripción verificadora

Todavía nos falta el medio de verificar las adquisiciones del niño concernientes a su aprehensión del espacio. Vimos esa verificación al nivel de la representación gráfica del objeto o del ser vivo y al nivel de la acción cuando se trataba de la causalidad. Ahora, nos parece posible verificar al nivel de la descripción si nuestro alumno está efectivamente en condiciones de situarse y de situar convenientemente los objetos en el espacio.

Describir es, ante todo, organizar un espacio.

Describir una granja o un rostro significa, en primer lugar, situar los distintos elementos de la granja o del rostro en el lugar preciso que les corresponde y que es siempre relativo al de los otros componentes del cuadro. La observación de las relaciones entre esos componentes será la prueba que necesitamos de esas adquisiciones del niño en la materia.

Haremos dos observaciones al respecto. Según la edad del niño, la descripción se dará en forma de dibujo o de texto. Después de haber realizado ejercicios de topología o localización pediremos a nuestros niños pequeños del curso preparatorio, y hasta del ciclo elemental, representar en una hoja de papel lo que observaron. Al final de tal trabajo, podremos apreciar los resultados obtenidos: ¿hasta qué punto reconoció Sergio la relación entre "delante" y "detrás"? ¿Cómo retuvo Anita la relación de las distancias entre el río y la casa, por una parte, y aquella que separa el puente del bosque, por la otra? Los alumnos mayores, que cursan el ciclo medio, podrían iniciarse en ese arte de la descripción escrita mediante el mismo ejercicio del dibujo, de la representación gráfica del paisaje (o del objeto) que se debe describir.

Se ha comprobado que esa iniciación en la descripción a partir del dibujo facilita el trabajo del niño *en la medida en que facilita la organización del espacio.*

No se tratará de convertir la descripción hecha en la escuela (dibujo o texto) en un simple ejercicio de organización espacial y quitarle toda finalidad en el plano artístico. El objetivo de esos ejercicios es siempre la belleza de la expresión. Pero no parece, más bien al contrario, que esa expresión de lo bello sea incompatible con un sólido conocimiento de la organización de los objetos en su interrelación.

De la misma manera, el rigor con que la bailarina observa sus líneas de evolución no quita nada a la estética de sus movimientos.

Finalmente, la apreciación de esos trabajos de expresión del niño siempre debe tener en cuenta el lugar que corresponde a su imaginación, cuya importancia evolutiva ya vimos. Recordemos que sólo gradualmente la faceta un tanto perturbadora de esa imaginación ha de disminuir con el fin de permitir la liberación total del niño con miras a una expresión plena de sí mismo.

ANEXO 3

COURANT, R. - ROBBINS, H. ¿Qué es la Matemática? Pp. 195 a 205 y pp. 270 a 281.

GEOMETRIA PROYECTIVA - AXIOMATICA GEOMETRIA NO EUCLIDIANA

§ 1. INTRODUCCION

72.—Clasificación de las propiedades geométricas. Invariancia respecto de transformaciones.

La Geometría trata de las propiedades geométricas de las figuras del plano o del espacio. Estas propiedades son tan numerosas y variadas, que es necesario algún principio de clasificación para poner orden en esta rama del conocimiento. Se puede, p. ej., introducir una clasificación basada en el método que se use para deducir teoremas. Desde este punto de vista se hace usualmente una distinción entre procedimientos "sintéticos" y procedimientos "analíticos". El primero de ellos es el método axiomático clásico de Euclides en que se construye sobre fundamentos puramente geométricos, independientes del álgebra y del concepto del continuo numérico, y los teoremas se deducen mediante razonamientos lógicos de un cuerpo inicial de proposiciones llamados axiomas o postulados. El segundo método se basa en la introducción de coordenadas numéricas, y usa la técnica del Algebra. Este método ha causado un cambio profundo en la ciencia matemática, del que ha resultado la unificación de la Geometría, el Análisis y el Algebra en un sistema orgánico. En este capítulo la clasificación según el método será menos importante que la clasificación de acuerdo al *contenido*, basada en el carácter de los teoremas mismos, no importando los métodos usados para demostrarlos. En Geometría plana elemental se distingue entre teoremas que tratan de la congruencia de las figuras, usando los conceptos de longitud y de ángulo, y teoremas que tratan de la semejanza entre figuras, usando el concepto de ángulo. Esta distinción particular no es muy importante, ya que las longitudes y los ángulos están relacionados tan estrechamente que resulta muy artificial separarlos (es el estudio de esta conexión lo que constituye la mayor parte del contenido de la Trigonometría). En lugar de ello, podemos decir que los teoremas de la Geometría elemental se ocupan de *magnitudes:* longitudes, medidas de ángulos y áreas. Dos figuras son equivalentes desde este punto de vista si son congruentes, es decir, si una puede obtenerse de la otra mediante un *movimiento rígido,* que solamente cambia la posición, pero no la magnitud. Surge ahora la cuestión de si el concepto de magnitud y los conceptos de congruencia y semejanza relacionados con él son esenciales a la Geometría, o si las figuras geométricas pueden tener otras propiedades que no desaparecerán por transformaciones más drásticas que los movimientos rígidos. Vamos a ver que así acontece.

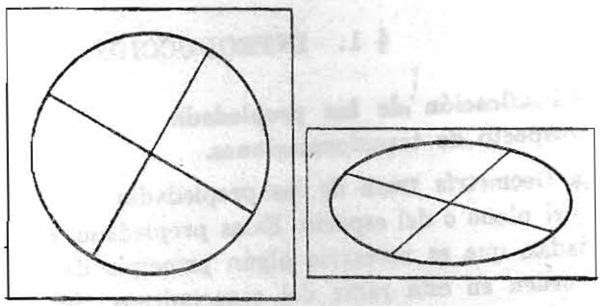


Fig. 69. — Compresión de la circunferencia.

Supongamos que se dibuja una circunferencia y un par de diámetros perpendiculares en un trozo rectangular de madera blanda, como en la fig. 69. Si colocamos el trozo entre dos platos de una prensa potente y la comprimimos hasta que tenga la mitad de su ancho original, el círculo se habrá hecho una elipse y los ángulos entre los diámetros de la elipse ya no serán ángulos rectos. El círculo tiene la propiedad de que sus puntos equidistan del centro, mientras que esto no es verdad para la elipse. Pareciera que todas las propiedades geométricas de la configuración original han sido destruidas por la compresión... Pero no es así; por ejemplo, la proposición de que el centro divide cada diámetro en dos partes iguales es válida, tanto para la circunferencia como para la elipse. He aquí una propiedad que persiste a pesar del cambio drástico de magnitudes de la figura original. Esta observación sugiere la posibilidad de clasificar teoremas sobre figuras geométricas según que sean verdaderas o falsas cuando la figura se somete a una compresión uniforme. Más generalmente, dada una clase definida de transformaciones de una figura (como la clase de los movimientos rígidos, compresiones, inversiones en circunferencias, etc.), podemos preguntar qué propiedades de la figura no han cambiado bajo esta clase de transformaciones. El cuerpo de teoremas que enuncian estas propiedades será la Geometría asociada a esta clase de transformaciones. La idea de clasificar diferentes ramas de la Geometría de acuerdo a las clases de transformaciones consideradas, fué propuesta por Félix Klein (1849-1927) en su famosa comunicación ("el programa de Erlangen") presentada en 1872. Esta obra ha influído enormemente el pensamiento matemático.

En el capítulo V descubriremos el hecho verdaderamente sorprendente de que ciertas propiedades geométricas son tan intrínsecas, que persisten después que las figuras han sido sometidas a deformaciones muy arbitrarias; figuras dibujadas en una lámina de caucho que se estira o comprime de cualquier manera, conservan algunas de sus características originales. En este capítulo, sin embargo, vamos a ocuparnos solamente de aquellas propiedades que no cambian, o quedan "invariantes" bajo una clase especial de transformaciones que se encuentran entre la clase muy restringida de los movimientos rígidos, por un lado; y la clase más general de las deformaciones arbitrarias, por otro. Ésta es la clase de las "transformaciones proyectivas".

73.—Transformaciones proyectivas.

El estudio de estas propiedades geométricas fué impuesto a los matemáticos desde hace mucho, debido a los problemas de *perspectiva,* que fueron estudiados por artistas como Leonardo de Vinci y Alberto Durero.

La imagen hecha por el pintor puede considerarse como la proyección del original sobre la tela, con centro de proyección en el ojo del pintor. En este proceso las longitudes y los ángulos se alteran necesariamente en forma que depende de las posiciones relativas de los diversos objetos pintados. No obstante, las estructuras geométricas del original pueden generalmente reconocerse en la tela. ¿Cómo es esto posible? Lo es, porque existen propiedades geométricas "invariantes en la proyección", propiedades que aparecen sin alteración en la imagen y que hacen la identificación posible. Hallar y analizar estas propiedades es el objeto de la Geometría proyectiva.

Es claro que los teoremas de esta rama de la Geometría no pueden ser proposiciones sobre longitudes, ángulos o congruencias. Algunos hechos aislados, de naturaleza proyectiva, son bien conocidos desde el siglo diecisiete, o aun, como en el caso del "teorema de Menelao", desde la Antigüedad. Pero el estudio sistemático de la Geometría proyectiva comenzó a fines del siglo dieciocho, cuando la escuela Politécnica de París inició una etapa de progreso matemático, particularmente en Geometría. Esta escuela, producto de la Revolución Francesa, produjo muchos oficiales para el servicio militar de la República. Uno de sus graduados fué J. V. *Poncelet* (1788-1867), que escribió su famoso *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras* en 1813, mientras era prisionero de guerra en Rusia. En el siglo diecinueve, bajo la influencia de *Steiner*, von *Staudt, Chasles* y otros, la Geometría proyectiva fué uno de los principales temas de la investigación matemática. Su popularidad fué debida en parte a su gran encanto estético y en parte a su efecto aclarador de la geometría como método, y a su íntima conexión con la Geometría no Euclídea y el Algebra.

§ 2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

74.—Grupo de transformaciones proyectivas.

Definiremos primero la clase o "grupo" (1) de transformaciones proyectivas. Supongamos tener dos planos π y π' en el espacio, no necesariamente paralelos. Podemos entonces obtener una *proyección central de* π sobre π' desde un centro dado O que no está ni sobre π ni sobre π' definiendo la imagen de cada punto P de π como aquel punto P' de π' tal que P y P' están sobre la misma recta que pasa por O. Podemos también obtener una *proyección paralela*, en la que todas las líneas de proyección son también paralelas. Del mismo modo, podemos definir la proyección de la línea l de un plano π sobre otra línea l' de π' desde un punto O de π, o bien mediante proyección paralela.

Una representación de una figura sobre otra mediante una proyección central o paralela, o por una sucesión finita de tales proyecciones, se llama *transformación proyectiva* (2). La *Geometría proyectiva* sobre el plano o sobre la recta consiste en el conjunto de aquellas proposiciones geométricas que no varían en una transformación proyectiva arbitraria de las figuras a las que se refieren. Por el contrario, llamaremos *Geometría métrica* al conjunto de aquellas proposiciones que tratan de las magnitudes de las figuras, invariantes sólo bajo la clase de los movimientos rígidos.

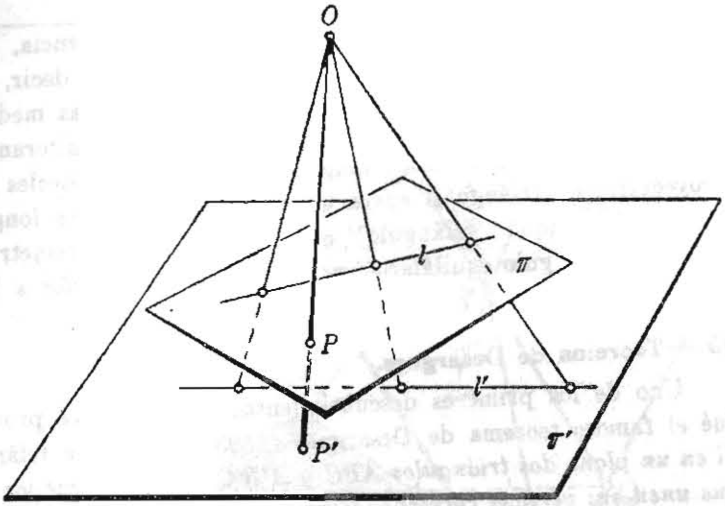


Fig. 70. — Proyección desde un punto.

Algunas propiedades proyectivas pueden reconocerse inmediatamente. Un punto, naturalmente, se proyectará en un punto. Además, *una recta se proyectará en una recta;* pues si la línea l de π se proyecta sobre el plano π' la intersección de π' con el plano que pasa por O y l será una recta [3]. Si un punto A y una recta l se *pertenecen* [4], en la proyección el punto correspondiente A' y la recta l' también se pertenecen. Luego la *pertenencia de un punto y una recta es invariante en el grupo proyectivo.* De ese hecho surgen muchas consecuencias simples, pero importantes. Si tres o más puntos son colineales, es decir, pertenecen a una misma recta, entonces sus imágenes son también colineales. Asimismo, si en el plano π tres o más rectas son *concurrentes,* es decir, pertenecen a un mismo punto, entonces sus imágenes serán también rectas concu-

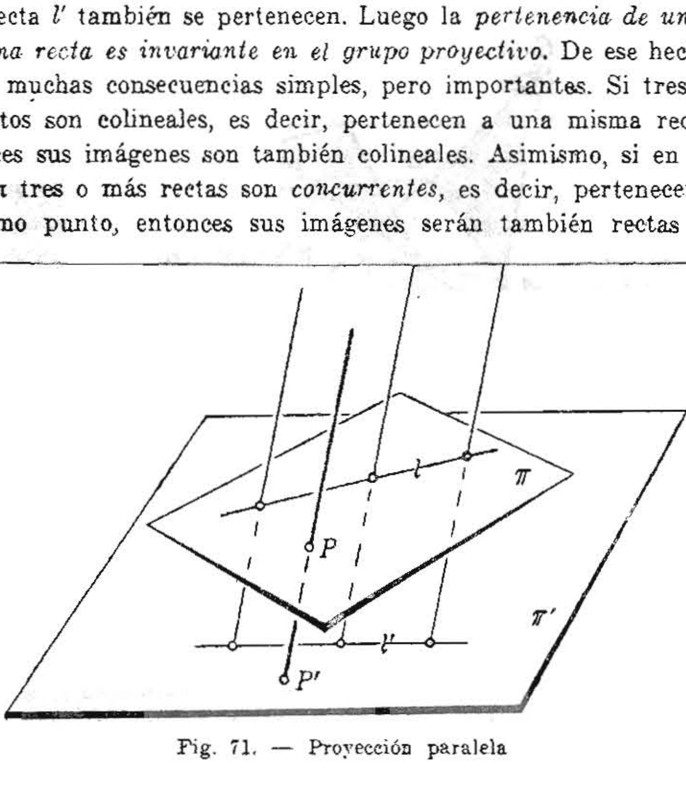


Fig. 71. — Proyección paralela

rrentes. Mientras estas propiedades simples, pertenencia, colineación y concurrencia son *propiedades proyectivas* (es decir, propiedades invariantes en las proyecciones), en cambio, las medidas de longitud y de ángulos, radios y otras magnitudes se alteran en general en la proyección. Los triángulos equiláteros e isósceles pueden proyectarse en triángulos cuyos lados tengan diferentes longitudes. Por tanto, aunque "triángulo" es un concepto de Geometría proyectiva, "triángulo equilátero" no lo es, y pertenece sólo a la Geometría métrica.

75.—Teorema de Desargues.

Uno de los primeros descubrimientos de geometría proyectiva fué el famoso teorema de Desargues (1593-1652) sobre triángulos. *Si en un plano dos triángulos ABC y A'B'C' son tales que las rectas que unen sus vértices correspondientes concurren en un mismo punto O, entonces los lados correspondientes deben cortarse en tres puntos colineales.* La fig. 72 ilustra el teorema y el lector puede dibujar otras figuras para probarlo por experimentación. La prueba no es trivial, pese a la sencillez de la figura, formada sólo por rectas. El teorema pertenece a la Geometría proyectiva, pues si proyectamos la figura entera sobre otro plano, conservará la propiedad enunciada en el teorema.

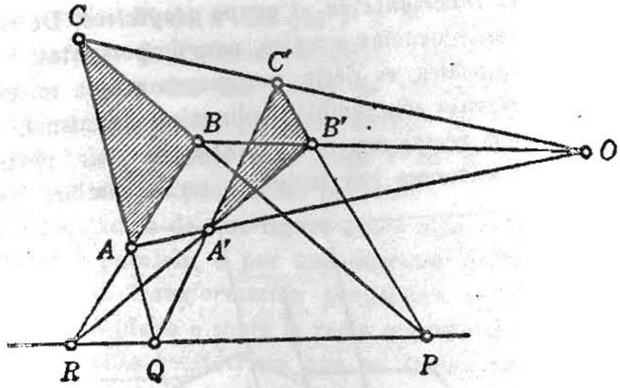


Fig. 72. — Configuración de Desargues en el plano.

Daremos una demostración de este teorema en § 5. Por el momento observaremos el hecho notable de que el teorema de Desargues es también verdadero si los triángulos están en dos planos *diferentes* (no paralelos), como es fácil de probar.

Supongamos que las rectas AA', BB' y CC' se cortan en O (fig. 73) de acuerdo con la hipótesis. Entonces AB está en el mismo

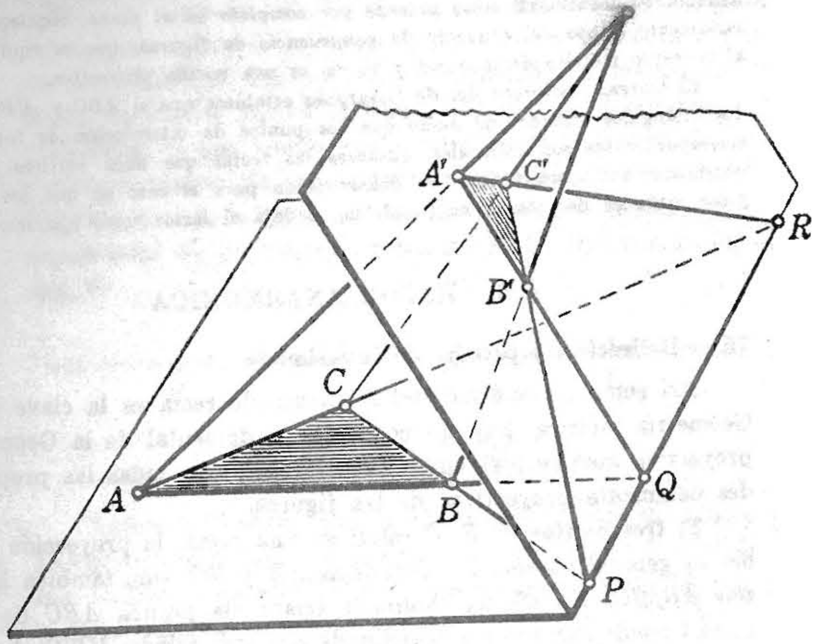


Fig. 73. — Configuración de Desargues en el espacio

plano de $A'B'$, es decir, que estas dos rectas se cortan en Q, igualmente AC y $A'C'$ se cortan en R, y lo mismo BC y $B'C'$ se cortan en P. Como P, Q y R están en las prolongaciones de los lados ABC y $A'B'C'$, deben estar en el mismo plano de cada uno de los dos triángulos, y en consecuencia deben estar en la recta de intersección de estos dos planos. Luego P, Q y R son colineales, como queríamos probar.

Esta simple demostración sugiere que podemos demostrar el teorema para dos dimensiones mediante, por decir así, un paso al límite, aplastando la figura total de manera que los dos planos coincidan en el límite, y el punto O, junto con los otros, caiga sobre el plano. Hay, sin embargo, cierta dificultad en llevar a cabo tal proceso de límite, pues la recta de intersección PQR no está unívocamente determinada cuando los planos coinciden. Luego se requieren precauciones para deducir el teorema bidimensional del tridimensional, aunque pueda hacerse.

Existe una diferencia fundamental entre el teorema de Desargues en el plano y en el espacio. Nuestra demostración en tres dimensiones usa razonamientos geométricos basados solamente en los conceptos de pertenencia e intersección de puntos, rectas y planos. Puede mostrarse que la demostración del