FOLL
372.4
1

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION

ORGANIZACION DE LOS ESTADOS AMERICANOS

DIRECCION NACIONAL DE EDUCACION SUPERIOR

CURRICULUM ACADEMICO MAESTROS DE EDUCACION BASICA

matemática

2b

Buenos Aires República Argentina 1989

NOMINA DE AUTORIDADES

Ministro de Educación y Justicia:
Dr. José Gabriel Dumón

Secretario de Educación:
Dr. Adolfo Stubrin

Subsecretario de Gestión educativa:
Doctor Héctor Gutiérrez a/c

Director Nacional de Educación Superior y del Proyecto:
Dr. Ovide J. Menin

Subdirectora Nacional de Educación Superior:
Prof. Sulma Guridi Flores

Coordinadora del Proyecto:
Prof. Emilce Botte

SECRETARIA GENERAL DE LA ORGANIZACION DE LOS ESTADOS AMERICANOS

Director del Departamento de Cultura y Educación:
Dr. Juan Carlos Torchia Estrada

Jefe de la División de Mejoramiento de Sistemas Educativos:
Dr. Luis Osvaldo Roggi

Responsable de la Secretaría General de la O.E.A. en la Argentina:
Dr. Benno Sander

Coordinador del Area Educación, Ciencia y Cultura:
Sr. Guillermo Corsino

INV 0146
FOLL
SIG 372.4
LIB 1

MODULO 3
UNIDAD 2

El espacio matemático

Las unidades que proponemos para integrar este módulo son:

- El desarrollo evolutivo de la concepción del espacio en el niño.
- Exploración, organización y estructuración de las formas en el espacio geométrico.
- Variación de las relaciones numéricas en espacios geométricos.

¿Por qué proponemos estas unidades?

Los Módulos 1 y 2 desarrollados a lo largo del primer año, respondieron al propósito de que los alumnos maestros reconstruyeran algunas nociones matemáticas, poniendo el énfasis en la reflexión sobre los procesos de construcción de conceptos desde la perspectiva del análisis de sus propias concepciones adolescentes.

Pensamos que este punto de vista les facilita compararlas con los aprendizajes infantiles y así tomar conciencia de sus peculiaridades.

Nos permitimos reiterar que el desarrollo de cada Módulo implica considerar cuatro aspectos fundamentales:

- **El aspecto evolutivo:** En relación con el ritmo de aprendizaje individual y el referente sociocultural.

- **Experiencias en el aula de la escuela primaria:** Para asegurarse un contacto temprano con la realidad escolar.

- **Resolución de problemas:** Como actividad matemática fundamental que pone en juego una serie de estrategias elaboradas por el alumno y lo conduce a construir el conocimiento como una necesidad de dar respuesta a una situación novedosa.

- **El conocimiento matemático en sí mismo.**

Al abordar las unidades para el presente MODULO 3, hemos tenido en cuenta no sólo la reflexión sobre el desarrollo evolutivo de la concepción del espacio en el niño, sino también las posibilidades cognitivas de los alumnos maestros -en general adolescentes- con el objeto de ampliar su formación geométrica.

Hasta el momento, tanto en la escuela primaria como en el ciclo básico de la escuela media, estos adolescentes sólo han tenido oportunidad de estudiar algunos contenidos de geometría métrica plana, fundada en las nociones de "distancia" y de "medida".

Nos parece necesario que aborden también la consideración del espacio físico de tres dimensiones y algunos conceptos de geometría proyectiva y de topología. (*)

(*) Sólo recientemente, y poco a poco, la palabra TOPOLOGIA ha sustituido a la expresión ANALYSIS SITUS usada por Poincaré, H. Dernieres pensées. Bibliotheque Philos, París, Flammarion, 1913.

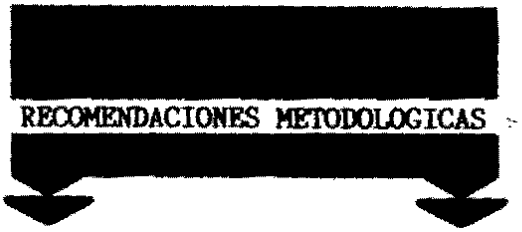
La geometría proyectiva está fundada en la noción de línea recta. Basta citar como ejemplo que para la proyectiva, dos figuras son equivalentes si se puede pasar de una a otra por una transformación proyectiva que conserva la rectilineidad, es decir, si la segunda es alguna perspectiva de la primera.

Por otra parte, la necesidad de que los maestros conozcan por lo menos los invariantes que caracterizan a la topología, no está ligada sólo al desarrollo considerable de la topología contemporánea sino también al hecho de que actualmente, las investigaciones de la Escuela de Ginebra parecen mostrar que los primeros invariantes que va generando el niño en su interacción con el espacio que lo rodea, se vinculan con nociones topológicas, más adelante va incorporando invariantes característicos de la geometría proyectiva y luego, casi inmediatamente, los de la geometría métrica.

Creemos además oportuno iniciar a estos adolescentes en el tratamiento de funciones continuas de variable real, relacionadas con transformaciones geométricas, aunque no aún desde un punto de vista rigurosamente formal, sino desde el registro y posterior análisis de relaciones numéricas en la variación de esquemas geométricos.

Por ejemplo:

- variación del área total y del volumen de cubos en función de la medida de la arista;
- variación del perímetro de figuras de la misma área; etc.



En todas las unidades trataremos de seguir las recomendaciones metodológicas dadas anteriormente de modo de tener en cuenta que:

- el proceso de aprendizaje comienza con la formulación de hipótesis personales ante el planteamiento de un problema;
- para explorar las posibilidades de organización de estrategias que permitan resolver el problema, hay que documentarse y analizar textos u otras fuentes que los aborden;
- lo teórico debe nutrirse con la experiencia real en actividades prácticas que promuevan la interacción del futuro maestro con recursos geométricos materiales y su actuación con los niños;
- lo práctico pone en acción estrategias concebidas intelectualmente y se complementa con la reflexión que realimenta el marco teórico que inspiró las estrategias;
- la evaluación es concomitante con el proceso de aprendizaje.

En cuanto a la organización de actividades en interacción con la escuela primaria, la propuesta se enriquece con una mayor aproximación al grupo total de niños de un grado. Sin dejar de lado observaciones y microexperiencias, se trata ahora de incorporar otra modalidad de trabajo: **la práctica en el aula**. Ella consiste en...

LA PRACTICA EN EL AULA consiste en ...

- Los alumnos maestros se reúnen en pequeños grupos para planificar una situación específica de aprendizaje que involucre la construcción de nociones geométricas en un determinado grado; esto, naturalmente, en conexión con el maestro de ese grado y con el asesoramiento del Area de Ciencias de la Educación. Es interesante que cada pequeño grupo aborde actividades diferentes e intercambie luego sus experiencias.

- En cada pequeño grupo, uno de los alumnos maestros se hace cargo de llevar a cabo las acciones que requiera la situación planeada mientras los demás miembros registran las observaciones que permitan una reconstrucción objetiva de lo ocurrido para facilitar la reflexión y realimentar así la concepción de la experiencia.

- Todas las conclusiones integran una puesta en común entre los pequeños grupos para obtener los mutuos beneficios que promueve el intercambio, sobre todo si se puede contar con la participación de docentes del área pedagógica para que aporten sus consideraciones a la interpretación de cada proceso.

LOS CONTENIDOS DE LAS UNIDADES PROPUESTAS

Para una adecuada comprensión del desarrollo evolutivo de la concepción del espacio en el niño, será necesario hacer un análisis de los distintos tipos de transformaciones geométricas y, en particular, conocer los invariantes que caracterizan las transformaciones topológicas, las proyectivas y las métricas, así como las relaciones de inclusión que se dan entre los conjuntos de invariantes de cada tipo.

Corresponde también establecer y comparar las distintas cate-

gorías de orientación en el espacio y el proceso de descentración infantil.

La exploración, organización y estructuración de las formas geométricas incluirá una serie de experiencias que pongan en juego las propiedades del espacio que un niño puede dominar gracias al progresivo alcance de lo topológico, lo proyectivo y lo métrico.

Por otra parte, son particularmente importantes para el futuro maestro, aquellas experiencias que involucren el ejercicio de la actividad perceptiva y de las formas de representación, tanto en el plano como a través de modelos espaciales. Se espera que, partiendo de esas experiencias, el adolescente alcance los niveles de estructuración posibles según su propio nivel evolutivo.

En particular, habrá que considerar los procesos de adquisición de la conservación de la longitud, de la superficie y del volumen por parte del niño y la incorporación de todos los modos de cuantificación de esas magnitudes. Interesa que el futuro maestro logre la organización de toda una red de resultados que se expresan a través del sistema numérico y configuran las propiedades métricas más importantes de las formas geométricas.

Paralelamente, los problemas de tipo geométrico que no se resuelven con números racionales, darán oportunidad para completar el campo de los números reales.

Por último, problemas de variación sistemática de formas geométricas en el plano o en el espacio de tres dimensiones, permitirán la introducción del análisis de familias de funciones y sus relaciones con expresiones algebraicas, con especial consideración de las situaciones accesibles al nivel de la escuela primaria.

Los anexos que siguen tienen por objetivo ampliar -con la palabra de voces autorizadas- los conceptos vertidos en nuestra propuesta de unidades correspondientes al MODULO 3. Su contenido, pues, está dirigido a los profesores del Area de Educación Matemática. El uso que de estas lecturas puede hacerse en las aulas de formación de maestros, deberá ser cuidadosamente evaluado y contará con sugerencias concretas de nuestra parte en el desarrollo de las unidades en sí mismas.

ANEXO I: Pertenece al matemático francés G. Walusinsky y es un fragmento de un artículo aparecido en la revista CONCEPTOS DE MATEMATICA, año XVI, Nº 61/1982, Titulado: **La matemática hoy**. En él se esboza la "Matemática Moderna" en grandes trazos y se reafirman las hipótesis didácticas sobre las que basamos nuestro enfoque.

ANEXO II: Consiste en un fragento de HANNOUN, H. **El niño conquista el medio**, Kapelusz, Bs. As. donde aparece bien explicitado el aporte de las experiencias escolares al proceso de desarrollo de la concepción del espacio en el niño. Su lectura debe complementarse con dos textos ineludibles:

- HOLLOWAY, G. E. T. **Concepción de la Geometría en el niño según Piaget.** Paidós, Bs. As.,1969.
- HOLLOWAY, G. E. T. **Concepción del espacio en el niño según Piaget.** Paidós Ibérica. Barcelona, 1982.

ANEXO III: Contiene fragmentos de los capítulos IV y V de COURANT, R.; ROBBINS, H. **¿Qué es la Matemática?** donde se desarrollan metódicamente las ideas fundamentales de Geometría Proyectiva y de Topología. El profesor Courant es famoso por sus trabajos de investigación y posee la habilidad de exponer las más difíciles teorías en forma clara y amena, con abundantes referencias históricas.

ANEXO IV: Transcribimos en este anexo, el capítulo 1 de DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. **La geometría a través de las transformaciones.** Tomo 1: Topología. Geometría Proyectiva y afín. Teide, Barcelona, 1972. En él, los autores hacen una exposición rigurosa del contenido científico pero fundamentalmente, encaran con profunda comprensión del mundo infantil, la descripción de experiencias accesibles a los niños.

Veamos los anexos ...

Por ejemplo:

Funciones proporcionales o no proporcionales, crecientes, decrecientes, variadas; máximos y mínimos de una función, etc.

ANEXO 1

WALUSINSKY, G. **La matemática hoy**, en Revista CONCEPTOS DE MATEMATICA, año XVI, Nº 61/1982. Pp. 36 a 41.

II. LA MATEMATICA MODERNA EN GRANDES TRAZOS.

¿No es realmente una exageración decir que esta matemática invasora es moderna porque es de nuestro tiempo?.

Algo de verdad hay en esta observación. Otras épocas conocieron el conflicto de los clásicos y los modernos, incluso en matemática. Siempre se es moderno en algo como siempre se es el hijo o la hija de los padres. Para el matemático del siglo XVII, Descartes era un moderno mientras que muchos de nuestros contemporáneos lo ubicarían entre los grandes precursores de la época clásica.

Sin embargo, en dicha exageración hay por lo menos una información útil ¡cuántas personas, en efecto, están convencidas de que las matemáticas se han construido de una vez para siempre o, todavía más, lo han sido de forma tan perfecta por los grandes sabios de la antigüedad que hoy sólo debemos repetirlas, "recitarlas"!. Tened la seguridad de que no descuidamos esa escuela; aprovecharemos las lecciones de sus investigadores gracias a sus descubrimientos y también a sus fracasos. Pero no debemos olvidar que la matemática es una ciencia viva (¡como si pudiera haber una ciencia muerta! ¡Ya no sería una ciencia!). Cada estudiante la reinventa, cada época la reconstruye con sus exigencias de rigor; la matemática de 1830 no es la de 1750 ni la nuestra. Hay una historia del pensamiento matemático, lo mismo que hay una historia de la filosofía: después de Descartes no se podría pensar como antes de él, pero pensar por sí mismo siempre será una exigencia individual.

Entrar en todos los detalles de la evolución de las ideas de la matemática en el decurso de los siglos nos llevaría demasiado lejos. Por un instante, me quedo con esta única realidad: la matemática evoluciona porque es una obra humana.

¿Por qué insistir, pues, en nuestros días sobre ese calificativo "moderna" si es de todos los tiempos? ¿Qué existe hoy que sea más actual?.

Puede ser que estemos mal ubicados para juzgar porque justamente vivimos en ese tiempo actual. Es muy posible que en un siglo toda la evolución rápida que hoy impresiona nuestros sentidos, aparezca a nuestros sucesores como una lenta muestra de un fenómeno más amplio. Pero no somos los historiadores del futuro; a lo sumo somos los actores de nuestro tiempo que tratamos de comprenderlo. ¿Qué es, pues, lo específicamente moderno en la matemática de hoy?.

1. Prioridad del álgebra.

Una primera respuesta sería todavía de carácter semihistórico: en 1931 apareció en Berlín la *moderna álbebra* de Van der Waerden, obra que retoma las ideas presentadas hacía algunos años por Emil Artin y Emmy Noether en sus cursos en la Universidad de Hamburgo. Bajo el nombre de *álgebra moderna* se desarrollaba una concepción relativamente nueva pero que sumerge sus raíces en investigaciones más antiguas, las de Galois, por ejemplo (1830): se subrayan las propiedades de los entes más que los entes mismos; digamos, para

simplificar, sobre la operación más que sobre el resultado. El dominio del álgebra tendrá desde luego una extraordinaria extensión: estos entes ya no son sólo los números sino también los objetos de la geometría o, más generalmente, todos los entes susceptibles de un tratamiento matemático. Dicho de otra manera, el álgebra se ha convertido en una especie de lengua universal de la ciencia.

Esta importancia del álgebra como medio de expresión es un aspecto moderno que no deberá olvidarse.

2. Hacia una generalización más grande.

A la misma álgebra le corresponde *la inquietud de la más grande generalización* y, por consiguiente, *el acceso a un nivel de abstracción superior.* Para muchos no iniciados, el álgebra consistía en calcular "sobre letras", entendiéndose que esas letras representaban números. Es esta última suposición lo que ya no corresponde hoy; cualesquiera sean los objetos, los entes sometidos al cálculo y representados por letras, lo que importa es sólo su forma de comportarse en las operaciones. El mismo cálculo se aplicará a tal conjunto de números, por ejemplo, {1,2,3}, y a tal conjunto de rotaciones (las que permiten ubicar tal azulejo de cocina en su lugar...) ¡Qué importa el objeto (o mejor qué importan los objetos) con tal que se tengan las operaciones! Si el álgebra se ha podido convertir en el lenguaje común de todas las ciencias lo ha hecho al precio de este esfuerzo de "desencarnación": herramienta para la expresión pero que, por sí misma, no expresaría nada en el límite.

Proporcionar a los que emplean la matemática, cada vez más numerosos y que operan en dominios cada vez más variados, las herramientas que pueden servir a todos, es uno de los objetivos de la matemática moderna. Incluso si siempre se hubiera comprendido que la matemática aspira a la generalización, se podría, creo, reconocer que esta aspiración adquiere amplitud original en nuestros días. Si hubiera que señalar un solo aspecto para justificar el carácter "moderno" de la matemática contemporánea, ese es el que yo consideraría. A partir de él, se siguen todos los demás aspectos de la ciencia contemporánea.

En primer lugar, el carácter muy abstracto que a menudo se le reprocha, "demasiado abstracto" han llegado a decir ciertas críticas. Es verdad, hay niveles sucesivos de abstracción que, a menudo, parecen inaccesibles al estudiante y, con mayor razón, al neófito, nivel que todavía no se ha alcanzado. Esta cuestión de la abstracción se vuelve a hallar al examinar los trabajos de los psicólogos y pedagogos. Contentémonos por ahora con reconocer que los matemáticos contemporáneos tienen perfecta conciencia de que la matemática que hacen es abstracta; no se les oculta (había un ministro que no tenía nada de matemático que reclamaba matemáticas "concretas") este hecho y dicen con razón que si se desea formular teorías polivalentes, es necesario pasar por eso. El tránsito por lo abstracto es una necesidad que tiende a la polivalencia buscada. Se deberían obtener importantes consecuencias en lo que se refiere a la enseñanza inicial.

3. Una reconstrucción en todos los dominios.

En el plano de la misma matemática se observa también que es el mismo edificio el que se ha debido reconstruir, que es necesario, constantemente rehacerlo, desde los dominios próximos a la filosofía y la lógica hasta los que todavía hoy aparecen como desembocando en los problemas de la física. No hay, pues, en la matemática tal sector que sería "moderno" en tanto que tal otro seguiría siendo "clásico". La cohesión del conjunto es demasiado fuerte y justamente subrayada por el singular: *la matemática*, para que podamos imaginar, sea en la investigación o en la enseñanza, cualesquiera sean los niveles, sectores "al amparo" de la corriente moderna. Aquí

arriesgaría una comparación: una vez descubiertos los telescopios ¿cómo imaginar un observador astronómico que prescinda de él bajo el pretexto de que Hiparco no usaba ningún instrumento óptico? Si hoy dispone del potente método axiomático ¿se creerá que un matemático se condenará a cierta impotencia por respeto a la tradición?.

Desarrollo del algebra, aspiración a la mayor polivalencia de las teorías, reorganización en permanente perfeccionamiento del edificio matemático en su totalidad, no son más que algunos de los caracteres de la modernidad de esa matemática. Quisiéramos poder completar el retrato esbozado aquí y acaso sea imposible hacerlo, tan rápida es su transformación. Por lo menos podemos concebir una de las razones de esta evolución: adaptarse a las necesidades crecientes de la matemática en las diversas ramas de la actividad humana. Cada uno, en la medida de sus posibilidades, matematiza y por ese esfuerzo espera un crecimiento de sus modos de acción. Si hay un pasaje que resulta laborioso por lo abstracto se espera de él un gran fruto. ¿Será necesario reservar esa capacidad a algunos privilegiados?.

III. LA MATEMATICA PARA TODOS.

Tranquilizaos, este título no anuncia el advenimiento de un imperialismo matemático. No se trata de crear un mundo en el que todos nosotros seamos matemáticos especializados, muy capaces sin duda de concebir y de organizar, sin que hubiera nadie para ejecutar... o para hacer otra cosa. Pero puesto que todos los ciudadanos, todos los trabajadores de hoy y de mañana, tienen y tendrán necesidad de una formación matemática, es necesario que se la aseguremos a todos.

Si, *a todos*, debido primeramente a esa "utilidad práctica" en todas las actividades de nuestras sociedades, como lo hemos señalado antes. A todos, también, puesto que la orientación precoz de los alumnos o incluso de los estudiantes, revela una imposibilidad. Se lo ha intentado porque ello simplificaría grandemente la organización escolar (25% de científicos 18% de literatos,... ¡cuán cómodo sería eso para poder prever las construcciones escolares!); la incertidumbre de muchos padres sobre el futuro de sus niños quedaría más apaciguada: resurgimiento del "tu será politécnico". Ha sido necesario decantar: el material humano no se deja encasillar tan fácilmente, las necesidades futuras de nuestras sociedades tampoco se dejan prever tan rigurosamente.

A todos, finalmente, porque todo ser humano debe poder acceder al conocimiento por sí mismo...

Formación básica.

Por todas esas razones a la vez, la formación matemática básica, con espíritu moderno, es necesaria y conveniente para todos. La definición de un conjunto de conocimientos útiles se pudo concebir desde la época en que se podía descontar que tal grupo de alumnos desembocaría en la industria y tal otro en las actividades bancarias. Bastante loco sería quien en los tiempos que corren se permitiera tales previsiones. Es más seguro prevenirlo al estudiante. "sabed que lo que hoy estáis aprendiendo directamente no os servirá para nada; nosotros no sabemos cuáles serán vuestras necesidades; lo que os enseñamos es necesario que os ayude a adaptaros a las imprevisibles condiciones en las cuales, efectivamente, tendreis que observar, reflexionar, concebir, actuar, juzgar,... En el fondo... Quisiéramos prepararos para vivir como mujeres u hombres responsables, vale decir, libres en sus reflexiones, en sus actos y en sus juicios"

Un pesado equipaje de conocimientos enciclopédicos sería entonces más embarazoso que útil; incluso sería tan embarazoso que descorazonaría a toda persona lúcida que debiera cargarlo. Herramientas intelectuales adaptadas (todo lo que sea posible) a situaciones todavía desconocidas y una formación matemática, pueden contribuir eficazmente a forjarlos.

Los cuatro lenguajes.

No será sólo ella, con toda seguridad. *Lengua materna, lenguas extranjeras vivas*, he aquí los elementos de comunicación irreemplazables; una enseñanza de la *tecnología*, todavía apenas organizada, debería dar una formación básica, ciertamente indispensable en nuestra civilización. Y como broche de todo, la *matemática*, lengua universal, completa el conjunto de las herramientas necesarias de las cuales debe estar provisto todo ser, si no quiere vivir sin firmeza o sometido.

Insistamos un poco sobre ésta "teoría" de los cuatro lenguajes que, a veces, es mal comprendida: ¿no se habrá visto una especialización prematura? ¿O acaso la muerte de los estudios clásicos, el de las lenguas antiguas en particular? Toda formación supone una elección; es necesario, pues, distinguir las elecciones de la colectividad para sus niños y la elección del alumno o del estudiante. Si los gustos o las aptitudes actúan de lleno en este último caso —y un amplio abanico de opiniones debe permitir al alumno ejercerlas libremente— la elección de las disciplicas básicas, útiles para todos y para cada uno, debe ser la obra reflexiva de la colectividad. Ahora bien, no es posible ubicar a todas las disciplinas intelectuales en esa formación básica a riesgo de reconstituir, sólo con un cambio de nombre, una enseñanza enciclopédica que es lo opuesto a una formación.

Sin un dominio suficiente de la lengua materna todo el mundo conviene en que ninguna formación es posible. En el siglo de las comunicaciones rápidas, en que los contactos internacionales comienzan a multiplicarse, toda medida que restrinja el aprendizaje de las lenguas vivas extranjeras sería atentatoria a la libertad del individuo. Ignorar la importancia de las técnicas sobre nuestra existencia sería también absurdo; para convercernos bastaría con verificar cuánto trabajo les cuesta a los ancianos adaptarse a las nuevas condiciones de vida (en verdad, se los debería ayudar, pero de parte de ellos, en los casos más trágicos, existe el absurdo rechazo de una evolución inevitable). La formación matemática básica aporta el complemento indispensable a este conjunto educativo: espíritu de observación y de análisis, aprendizaje de la conceptualización (desde la observación de una situación a la idea abstracta); aprendizaje de la deducción y, más generalmente, desarrollo del espíritu lógico; retorno a la observación y a la experiencia para experimentar la validez de las nociones abstractas elaboradas así como de las teorías construidas por vía deductiva. He escrito "completamente indispensable"; me pregunto si no sería más prudente hablar de aprendizaje del pensamiento racional.

Esta enseñanza debe, evidentemente, imbricarse en la de las otras disciplinas: no es verdad que sólo en matemática se debe pensar justamente y expresarse claramente. La teoría de los cuatro lenguajes implica, por otra parte, tomar en serio un sistema de opciones que permita a cada uno sentir sus gustos, manifestar sus aptitudes en todos los dominios. He dicho "tomar en serio" porque, hasta ahora, cuando hay una opción, no todos piensan en una enseñanza de primera clase. Toda opción debe, por lo contrario, ser considerada como elemento constitutivo de una verdadera formación cultural. Dará, por otra parte, ocasiones especiales para usar los cuatro lenguajes y así motivará los estudios básicos

También sería necesario que esta formación matemática necesaria para todos sea accesible a todos: ¿es posible?.

IV. UNA MATEMATICA ACCESIBLE PARA TODOS.

Si no lo fuera este trabajo perdería su sentido. En todo caso, frente a las necesidades de la sociedad de personales calificados y sobre todo capaces de adaptarse rápidamente a situaciones nuevas, encarar los deberes del individuo consigo mismo (comprender el mundo en el cual se vive y saber desempeñar una función en él), todo nos dice que ya no es el tiempo de una matemática dedicada a los *happy few*

¿Una matemática para los escogidos?

Existen todavía partidarios de esa formación, de esa "alta formación para los escogidos" que tenía cierta eficacia práctica cuando había dos dominios bien separados; el de los que concebían o dirigían y, por otra parte, el de los que no podían sino obedecer y ejecutar. Cierta concepción tradicional de la enseñanza ha colocado las cosas en esas condiciones siniestras mediante una suerte de pesimismo acerca de las posibilidades de los niños con respecto a la matemática. Cuando se proponían tan sólo difundir en los jóvenes cerebros algunas fórmulas "útiles", algunas recetas experimentadas (entre las cuales habría que hacer un lugar especial a la "regla de tres") se trataba de facilitar muy poco el acceso a las nociones para preparar el acceso a las abstracciones. Se le exigía todo a la memoria: saber sus tablas, tal como sería necesario conocer sus departamentos (prefecturas o subprefecturas). Se tenía el pudor de no asombrarse demasiado ante los fracasos, pero era algo osado afirmar que la mayoría de los escolares era poco dotada: no se les daba en efecto ninguna oportunidad de manifestarse y luego de desarrollar sus dones.

En esta concepción tradicional todos los esfuerzos pedagógicos se dedicaban a la preparación, al adiestramiento. La idea de reservar los mejores profesores (suponiendo que se lo pueda hacer, que se los sepa distinguir) a los mejores alumnos (suponiendo que dispongamos de criterios para seleccionarlos), tiene todavía sus partidarios. Algunas clases preparatorias para los concursos de las grandes escuelas fundan en ello su reputación y nadie podría tratar de revelarse indiscretamente contra el plan de enseñanza matemática si no se hubiera descuidado la enseñanza para todos[1].

En lo que, para avanzar rápidamente, se denomina "renovación de la enseñanza matemática", existe felizmente la conjunción de una reforma de los contenidos y una reforma no menos importante de los métodos didácticos; se trata de un "verdadero cambio de orientación, de una reforma en profundidad, de *una nueva concepción de la enseñanza matemática*.

Una nueva pedagogía matemática.

Esto se basa sobre la feliz conjunción de las ideas denominadas modernas, en matemática, y los descubrimientos de las ciencias de la educación acerca de la formación de los conceptos en la mente del niño así como sobre las técnicas de los diversos aprendizajes. Debemos completar lo que ya hemos dicho sobre las primeras. Será todavía más útil examinar en detalle, tanto como podamos, el aporte actual de las ciencias de la educación. Sin embargo es necesario insistir en seguida sobre el acuerdo perfecto existente entre las exigencias de la matemática denominada moderna y las recomendaciones que los investigadores de la psicología y de la pedagogía pueden hacer a quienes enseñan. Para simplificar, resumámoslas en algunas frases un poco esquemáticas.

— *Prioridad de la acción del alumno.* Se trata de evitar a cualquier precio que el alumno acepte pasivamente las instrucciones, las definiciones, las abstracciones formuladas por el maestro. Para avanzar rápidamente (en apariencia) el maestro siempre siente la tentación de imponer su concepción; por pereza, no detesta la ciencia completamente hecha pero, al término de cierto tiempo, siente una sensación de

1 Precisemos sin retardo que la Inspección General de Matemática surge directamente del cuerpo de profesores de las clases preparatorias de las grandes escuelas científicas; incluso cuando está encargada de los estudios secundarios, reserva todos sus cuidados y prioritariamente orienta su acción en un sentido favorable a las clases preparatorias. Tales circunstancias irrisorias parecen acaso explicar la incapacidad de la Inspección General para desempeñar otra función que la de frenar la reforma de la enseñanza matemática.

hastío; la enseñanza dogmática engendra disgusto por el estudio y la fuente de los fracasos. La función (difícil) del maestro es provocar la acción del alumno: la importancia de la elección de las situaciones a estudiar, de las cuestiones a plantearse y de la forma de plantearlas. Papel difícil pues el maestro debe resistir a la porfía de imponer su concepción, evitar sus procedimientos aun cuando estos sean muy a menudo, si no siempre, preferibles.

— *El alumno debe observar, analizar.* Por tanto, es preferible evitar las cuestiones demasiado precisas. Aprender a buscar bien es aprender a tratar de plantearse cuestiones. Entre los medios para evitar las cuestiones demasiado precisas (y cuya formulación indica a veces qué tipo de respuesta se espera) el auxilio de los materiales didácticos bien conocidos a menudo es muy eficaz. Al respecto existe una rica experiencia acumulada por las maestras de los jardines de infantes (el hecho de que sus alumnos no sepan escribir las ha obligado a subrayar la importancia de las manipulaciones: "También hacen falta las manos para instituir un lenguaje" decía Paul Valery. En los diversos niveles de enseñanza, diversos materiales, imaginados o construidos por los mismos alumnos, ocultan riquezas matemáticas insospechadas. Existen muchos ejemplos de materiales concebidos para el primer aprendizaje del cálculo y en los cuales los empleadores han puesto en evidencia estructuras desconocidas para los fabricantes o inventores.

— *El alumno debe abstraer.* Se trata de una etapa fundamental que no se podría "quemar" bajo el pretexto de que el alumno tarda en concebir la abstracción que el maestro ha adquirido desde mucho tiempo atrás. La abstracción impuesta no tiene ningún valor para aquél a quien se le impone; muy corrientemente la acepta sin concebir su alcance... Por lo contrario, si la conquista al cabo de numerosas observaciones o discusiones (con alumnos, como él, en trance de abstraer), sabe "de dónde vuelve"; no se trata en ese caso de una noción extraña a su mente.

— *El alumno debe deducir.* Si tiene los medios lógicos para hacerlo (la experiencia ha mostrado aptitudes limitadas, pero ciertas, para la deducción en niños de cinco años), y sobre todo si siente la necesidad de hacerlo.

— *El alumno debe aplicar*, esto es, debe usar sus conocimientos, sus adquisiciones.

Un nuevo clima en la clase.

Por lo tanto, la tarea del maestro se vuelve nueva. Para él, se trata menos de difundir su saber en la cabeza de sus alumnos que de prepararles situaciones enriquecedoras. Se trata de estar pronto para responder a las preguntas más incongruentes, de saber guiar a las síntesis indispensables y, en ciertos casos, de saber obtener por sí mismo ciertas observaciones parciales o torpes, esas que los más hábiles habrían podido descubrir (dejándoles sin embargo a los alumnos la parte más bella, la del descubrimiento). Tarea ardua, tanto sobre el plano matemático (es necesario dominar, manejar un tema, para comprender los enfoques torpes de los principantes y saber orientar sus pasos) cuanto sobre el plano pedagógico (aprender a no decir más que lo que hace falta, aprender a corregir sin descorazonar, aprender a comprender las formulaciones "incomprensibles"...) o sobre el plano puramente humano (no es cuestión de que el maestro brille; junto a sus alumnos debe ser un artesano en su trabajo. Es una mutación de la función docente que no carece de grandeza: la de la humildad.

También le corresponde la cuestión de la fraternidad. El diálogo entre los alumnos y maestros es una condición indispensable para este género de trabajo; el obstáculo que el curso magistral creaba, para ese diálogo, deja de existir si el alumno siente que el maestro es un compañero de trabajo; acaso incluso perciba con bastante rapidez que el maestro es el alumno de sus alumnos: cada día puede aprender algo de cada uno de ellos.

Aprende también de los intercambios que puede y debe tener con sus colegas. Las tentativas de trabajo demasiado tímidas de muchos equipos de maestros ya han convencido a muchos escépticos que no suponían el interés que pueden tener estas cosas: el maestro, sobre todo si sus alumnos son muy jóvenes, tiene necesidad, él también, de dialogar con semejantes adultos como él.

En síntesis, *el espíritu moderno pone el acento sobre la construcción matemática*; los aportes de las ciencias de la educación insisten sobre la indispensable función de la acción personal del alumno; las investigaciones pedadógicas ponen en evidencia la necesidad de una formación permanente de los maestros que los transforme de "recitadores" en "investigadores" pedagógicos. Hay en esta convergencia de las tendencias de la matemática y la pedagogía una posibilidad que se debe asir: *se podría pensar que una reforma de la enseñanza matemática era indispensable; se encuentra que es posible, que está, es el momento de decirlo, al alcance de la mano.*

ANEXO 2

HANNOUN, H. **El niño conquista el medio.** Kapelusz. Buenos Aires. Pp. 72 a 91.

A. Cómo el niño percibe el espacio

Los efectos del egocentrismo infantil sobre la percepción del espacio

Al respecto, los efectos del egocentrismo infantil nos parecen importantes en tres áreas diferentes:

El niño sólo puede percibir un espacio acorde con sus propias dimensiones.

– En razón del "realismo intelectual", el niño percibe el espacio tal como lo piensa y no como lo ve.

– La lateralización del niño, el reconocimiento de la derecha y la izquierda, presenta una dificultad no despreciable.

El niño, poco preparado para aprehender el mundo –y el espacio– de los adultos, lo transformará de alguna manera para reducirlo a sus propias dimensiones. Ese espacio donde se sentirá bien, ese espacio suyo será, ante todo, su propio cuerpo. Todos sabemos cuánto les gusta a los bebés descubrir su propio cuerpo con sus manos. Todo lo revisan: la mano derecha descubre la izquierda, luego el brazo, pronto las partes genitales o los pies. Igual que le sucedía al pequeño Jean-Christophe. Veámoslo:

"Nadie se ocupa de él; no necesita a nadie... Su cuerpo le es suficiente. ¡Qué divertido es! Se pasa horas enteras contemplando sus uñas, riéndose a carcajadas. Todas tienen fisonomías diferentes, se parecen a personas que él conoce. Las hace conversar entre sí, bailar o pelearse. ¡Y el resto del cuerpo! ... Sigue la inspección de todo lo que le pertenece. ¡Cuántas cosas asombrosas! Algunas son muy extrañas. Queda curiosamente absorbido por su aspecto.

A veces se sintió sobrecogido cuando lo sorprendieron así." (Romain Rolland, *op. cit.*, pág. 16.)

Esa importancia que el niño asigna a su propio cuerpo no se perderá jamás, aun cuando, más tarde, adoptará otros aspectos[25]. Estudiaremos las consecuencias pedagógicas de ello.

Ese espacio propio, que el niño descubre desde sus primeras semanas de vida, pronto se abrirá hacia el espacio exterior, el espacio de las cosas. En este plano, será fácil concebir que nuestro espacio de adultos, casas, muebles, calles y plazas, campos y montañas no corresponden a la dimensión de un ser que apenas acaba de salir de la estrechez de una cuna. El niño reconstruirá ese mundo extraño de acuerdo con sus propias dimensiones. Lo convertirá en *su* mundo; no

transformándolo efectivamente, por supuesto, sino adaptándose a él mediante una imaginación transformadora de las cosas. Todos habremos comprobado, por ejemplo, cuánto les gusta a los niños de la escuela elemental jugar debajo de las mesas (los muy pequeños), o aislarse en rincones, chozas, desvanes, etc. (los mayores del ciclo medio). Aunque la interpretación de tales actitudes no se refiere exclusivamente a cuestiones del espacio, puede afirmarse que, en todos los casos, el niño tiende a *limitar* el espacio de sus evoluciones con el fin de reducir el espacio objetivo a dimensiones aprehensibles para él. Es innegable que los "rincones-taller" de los jardines de infantes responden de alguna manera a esa necesidad del niño de ocupar el espacio. A los niños del curso preparatorio o del curso elemental, a veces hasta a los del curso medio, les resulta difícil organizar espontáneamente juegos que ocupen todo el patio de recreo (si es de tamaño normal), porque no *saben* ocupar un espacio tan grande. En la mayoría de los casos preferirán organizar juegos que requieren espacios más restringidos. Haremos una última observación: un niño ante una hoja de papel en blanco tiene dificultad en llenar con su dibujo toda ella. Nuevamente, esta vez sobre el plano gráfico, *no sabe ocupar* el espacio. Tenemos que enseñárselo.

No satisfecho con rechazar del espacio las dimensiones demasiado vastas para él, el alumno de la escuela elemental muchas veces transformará el espacio que conoce para darle una significación conforme con su personalidad y sus deseos. Muy pronto el rincón del comedor será el dormitorio de la muñeca, un rincón del jardín será el secreto lugar de reunión para ejecutar distintos juegos. En alguna medida, el espacio del adulto es transformado por el niño no sólo desde un punto de vista cuantitativo, en sus dimensiones, sino también desde el cualitativo, en su significación. Y en ese espacio, el niño se siente muy cómodo. Igual que le sucedía a Jean-Christophe:

"Cuanto peor era el camino, tanto más hermoso lo encontraba Christophe. El lugar de cada piedra tenía un sentido para él; las conocía a todas. El relieve de un carril le parecía un accidente geográfico poco menos importante que el macizo del Taunus. Tenía en su mente el mapa de los hoyos y abultamientos de toda la zona en un área de dos kilómetros alrededor de su casa. Así, cuando cambiaba algo en el orden establecido de las huellas, no se creía menos importante que un ingeniero con una cuadrilla de obreros. Y cuando había aplastado con el tacto la arista seca de una gleba y llenado el hueco debajo de ella, sentía que no había perdido su jornada." (Romain Rolland, *op. cit.*, págs. 22-23.)

El espacio es para el niño pequeño, en primer lugar, un mundo en el cual no quiere —o no puede— entrar. La porción de ese mundo en que decide aventurarse la conquistará sólo al precio de una transformación cuantitativa y cualitativa a la vez. Incumbe, pues, al educador ayudar al niño a penetrar en espacios cada vez más amplios y verdaderos.

En cuanto al "realismo intelectual" del niño se refiere, creemos poder retomar aquí las conclusiones de Jean Piaget acerca de la cuestión [26]. Piaget insiste, sobre todo, en la noción de perspectiva que durante mucho tiempo resulta inconcebible para el niño, aun después de los ocho o nueve años. Si bien alrededor de esa edad, el pequeño, a quien se le muestra un grabado de una vía de tren, reconoce en él la perspectiva, durante mucho tiempo aún será incapaz de representar esos rieles teniendo en cuenta esa misma perspectiva. En su dibujo aparecerá el paralelismo, porque *sabe* que los rieles no se encuentran jamás. De modo que el niño *no sabe ver* el espacio. En él, el mundo exterior y su representación todavía se hallan mezclados. Expusimos anteriormente, en este mismo sentido, la tesis de Luquet sobre el dibujo infantil.

El problema de la distinción entre derecha e izquierda reviste, según nuestra opinión, una importancia mayor aún. En efecto, para el niño, y en general para los que adoptan una actitud antropocéntrica, el espacio se divide en cuatro partes: lo que se halla delante de mí, detrás de mí, a mi derecha y a mi izquierda. Esta distinción es el primer análisis que el niño hace de su espacio, instintivamente o con el fin de responder a necesidades exteriores. El reconocimiento de adelante y atrás suele ser fácil de lograr. Adelante es el sentido de la marcha, es lo que veo con los ojos, es lo que la mano alcanza con mayor facilidad, etc. Atrás es lo opuesto a adelante. Estos criterios son vivenciados íntimamente por el niño y como tales los adquiere con facilidad. No sucede lo mismo en cuanto a la distinción de derecha e izquierda, respecto de lo cual esos criterios muchas veces faltan [27].

En su obra sobre *"Le jugement et le raisonnement chez l'enfant"* (Delachaux et Niestlé, págs. 137 y sigs.), Jean Piaget expone las conclusiones a las que llegó en este ámbito. Para él, y según sus apreciaciones, el niño de cinco a ocho años sólo distingue lo que se halla a *su* derecha y a *su* izquierda. En la mayoría de los casos le resulta imposible dar el paso de *su* derecha a la de su interlocutor. De los ocho a los once años, esto es posible: el niño distingue la derecha y la izquierda del interlocutor que se halla frente a él. Finalmente, a partir de los once o doce años, el niño sabrá situar los objetos en su relación recíproca: el escritorio del maestro se encuentra a la izquierda del armario, la puerta del aula está a la derecha de la estantería, etc., y esto independientemente de la posición propia del niño.

Señalemos los efectos del egocentrismo en cuanto al espacio. En un principio, el niño no es capaz de aprehender el espacio en sus dimensiones reales ni en su significación verdadera, no sabe representarlo ni analizarlo. Son estas imposibilidades o dificultades las que nos dictarán la gestión pedagógica para subsanarlas.

Encontramos una definición perfectamente clara de lo que podríamos llamar el sincretismo espacial, en el siguiente texto de Burloud:

"Por regla general se admite que el mundo, en un principio, aparece al niño como un panorama confuso, una continuidad coloreada en que los objetos no tienen contornos propios, o aun, hablando más exactamente, no hay objetos, sino solamente claros de luz que alternan con manchas de sombra." (*Psychologie*, Hachette, pág. 193.)

Al leer este texto, casi nos sentimos inclinados a decir que la visión del mundo, a los ojos de un niño pequeño, recordaría aquella que se obtiene mediante una fotografía tomada con una cámara mal enfocada: borrosidad general, imágenes de contornos muy esfumados, colores entremezclados, etc. El sincretismo, en cuanto supone globalización y confusión, encuentra en esto su descripción más exacta.

Pero hay más. Ya hemos visto que, en cuanto al objeto físico, una de las consecuencias del sincretismo era el hecho de que las propiedades de un objeto se consideraban como "adheridas" a él: el sombrero rojo de una dama es parte integrante —no accidental— de la imagen de la mujer, así como el follaje verde de ese plátano está "adherido" a él, sea cual fuere la estación. Ese vínculo, esa confusión de lo accidental con lo esencial vuelve a encontrarse en el nivel de la aprehensión del espacio, en la medida en que el niño no sabe separar el objeto del espacio que ocupa. Para él, el espacio no es ese receptáculo que puede contener un objeto cualquiera. El florero que se halla en el anaquel no es concebible fuera de ese sitio. La ubicación espacial del florero —el hecho de hallarse en la repisa— constituye en la mente del niño una parte integrante de su imagen del florero. El florero está en el estante o deja de ser ese florero [28]. Una experiencia análoga se hizo en la psicología animal. Antes de la vuelta de las golondrinas a una aldea, se desplazaron sus nidos a una distancia de aproximadamente 50 centímetros. Al volver, los pájaros los abandonaron; no los reconocían. En efecto, la percepción que tenían de ellos no lograba separar los nidos mismos del espacio que ocupaban. René Hubert describe este fenómeno en el siguiente pasaje:

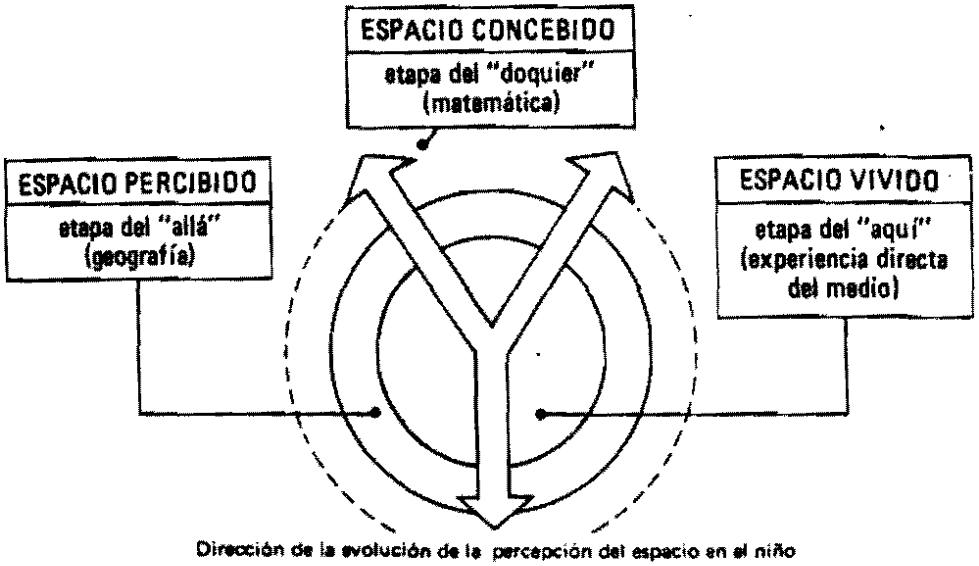
"Esos conjuntos (de objetos vistos por el niño — H.H.) todavía no están ligados unos a otros por relaciones objetivas, sobre todo de espacio, tiempo, y menos aún, de causalidad o, mejor dicho, están incorporados al lugar donde se presentan, al momento en que se perciben." (*El desarrollo mental*, vers. cast. Editorial Kapelusz, Buenos Aires.)

La evolución de las formas de aprehensión del espacio en el niño

La percepción del espacio en el niño no escapa a la regla fundamental de su evolución general, que avanza en una dirección marcada por tres etapas esenciales:

- La etapa de lo vivido.
- La etapa de lo percibido.
- La etapa de lo concebido.

Primeramente, el niño *vive* el espacio. *Vive* las distancias y los recorridos. No percibe la distancia que separa la mano de la cuchara, puesta delante de él en la mesa. Necesariamente, no concibe esa distancia. Sólo la *vive*, por su imposibilidad física de alcanzarla. Este hecho, además, explica que a menudo el bebé parece no comprender que no puede asir un objeto colocado fuera de su alcance. Como no percibe ni concibe las distancias, como sólo las vive, las experimenta, no puede, por eso mismo, percibir ni concebir la imposibilidad de alcanzar los objetos. Experimenta esta imposibilidad al fracasar su movimiento. De ahí también la frecuente tentativa de los niños muy pequeños de alcanzar el cielo raso, la araña que está suspendida de él, las hojas de los árboles, etc. Esa etapa del espacio vivido es el estadio del "aquí". A causa de la forma de aprehensión del espacio, la única de la cual es capaz por ahora, el niño no puede superar el descubrimiento de un espacio "adherido" a su persona física.



Dirección de la evolución de la percepción del espacio en el niño

En la misma medida en que la experiencia primaria del niño es siempre experiencia directa del medio, su primera aprehensión del espacio será la del espacio vivido.

Es pues fácil de comprender que ese espacio vivido sólo puede ser un espacio físico con el cual el niño se halla en contacto biológico. Más aún, por lo general, el niño vivencia ese espacio mediante el *movimiento.* El niño *vive* el espacio del patio de recreo recorriéndolo, empezará a apreciar la diferencia entre las distancias que lo separan de dos objetos, que están ubicados lejos uno del otro, yendo a buscarlos. El niño de los jardines de infantes y del curso preparatorio vive su espacio, esencialmente por medio de su locomoción [29].

A partir de allí, llegará a la segunda etapa de aprehensión del espacio: la del espacio percibido. En esa etapa el niño llega a ser capaz de percibir el espacio sin tener que experimentarlo biológicamente, como en el estadio anterior. Por lo tanto, si enseñar al niño a analizar el espacio (a distinguir las distancias, las posiciones, adelante, atrás, dentro, fuera, etc.) sólo era posible haciéndole *vivir* esas distancias y posiciones, ahora será suficiente hacérselas percibir. Se ha desarrollado lo que los psicólogos llaman la *distanciación* del niño con relación al espacio: el niño retrocedió ante su objeto para conocerlo mejor. En la edad del ciclo elemental y el ciclo medio el niño es capaz de distinguir las distancias al observar un paisaje o una fotografía, y de precisar la posición de los objetos por la mera observación [30].

En esa etapa, el niño descubre no sólo el "aquí" sino también el "allá", ese "allá" que le transmiten sus sentidos, que su cuerpo –su movimiento– ya no tiene que experimentar en forma directa. Del "aquí" al "allá" existe, pues, una ampliación del campo empírico del niño, un ensanchamiento que nos dará el sentido de nuestra acción pedagógica posible, pues ahora, enseñar al niño a analizar el espacio significa pedirle que lo haga no ya mediante su movimiento, sino a través de la mera observación. El progreso es considerable, porque abre al niño el dominio de la geografía propiamente dicho, en cuanto ciencia de paisajes. Ahora es posible ir más allá del descubrimiento del espacio del aula o de la calle, para aprehender el de la colina cercana a la escuela, del panorama del pueblo visto desde una altura, de la fotografía aérea de la región, etc.

Es, pues, un adelanto considerable, pero no definitivo. Porque, a partir de ese estadio, hacia los once o doce años, el niño será cada vez más apto para aprehender el espacio concebido. Se trata del espacio matemático, del espacio abstracto, tal como se encuentra *por doquier:* las formas ya no reciben un contenido concreto. Sólo contienen relaciones. Se tratará del cuadrado, del rombo, del polígono regular, etc.

Del "aquí" al "allá" y luego al "por doquier", del espacio vivido al percibido y después al concebido, del conocimiento por el cuerpo y su movimiento al conocimiento por los sentidos (esencialmente la visión), y más tarde al conocimiento por el espíritu, asistimos a la

misma manifestación de la gran ley de la evolución infantil: de lo concreto a lo abstracto, de lo físico a lo mental, de la experiencia a la reflexión. Respetar al niño con nuestra acción pedagógica significa, entonces, respetar esa ley que los psicólogos descubrieron para nosotros.

B. Cómo se debe enseñar al niño a situarse y a situar los objetos en el espacio

Se tratará de ayudar al niño a aprehender un espacio *independiente* de él, a "deslindar" el espacio de su propio punto de vista. Se tratará, además, de ayudarle a considerar el espacio *independientemente* del objeto que en él se encuentra, o sea nuevamente, a "deslindar" los objetos exteriores del espacio que ocupan. Piaget llama *descentración* a estos fenómenos.

La primera dirección en que debemos ejercer nuestra labor pedagógica se referirá a la estructuración misma del espacio. Hemos visto que el sincretismo de la percepción del niño es la causa de que no pueda desprender el objeto exterior de su espacio y, por consiguiente, llegar a discernir las distintas categorías espaciales que se le ofrecen (nociones de "cerca de", "abajo", "al borde de", etc.). Ahora bien, puede decirse que mientras el niño no haya asimilado esas categorías espaciales (sobre las cuales volveremos), no podrá situarse a sí mismo, ni a los objetos exteriores, de una manera objetiva. Nos incumbe ayudarle a reconocer y clarificar esas categorías y relaciones, en una palabra, a descubrir la estructura objetiva del espacio y, finalmente, a cuantificar esas estructuras penetrando en el mundo de la medida. Veremos, en efecto, que no podemos conformarnos con apreciaciones cualitativas de tipo "lejos de" o "cerca de". Una formación científica del niño requiere que establezcamos una relación entre el hecho de que (AB) = 6 y (CD) = 8, por una parte, y (AB) < (CD) por la otra.

La segunda dirección en que deberá ejercerse nuestra acción deriva intrínsecamente de la anterior. Se referirá a la extensión del concepto de espacio. Se trata de ayudar al niño a situarse y a situar los objetos en espacios cada vez más extensos. Hemos visto que, en los primeros años, el niño sólo podía aprehender su espacio inmediato, vivido. Teniendo en cuenta al respecto su propia evolución psíquica, debemos ayudarle entonces a *extender* ese espacio y permitirle desplazarse y que conozca un espacio cada vez mayor: después de la habitación o el aula, será la calle, el barrio o el pueblo, la ciudad, la región, el país, el continente, el globo terráqueo, etc.

Lo que aquí importa es, en cierto sentido, la "cantidad de espacio", mientras que la búsqueda de la estructuración del mismo, considerada más arriba, se refería a su "calidad". Por lo demás, esa extensión del concepto es un hecho que nosotros mismos, los adultos, conocemos muy bien. Admitamos que, en efecto, si

podemos situar con alguna precisión la ciudad de San Francisco con relación a la de Belgrado, o los montes Urales con referencia al Nilo, esa situación de los objetos espaciales se volvería más delicada si se tratara de representar Júpiter con respecto a Urano o simplemente la Luna frente a Marte. Surge aquí, sin duda, un problema de formación. Sin embargo, no es menos cierto que el espacio que nosotros, los adultos, podemos aprehender, tiene sus propios límites subjetivos. Para el niño, esos límites son aún más estrechos. Nos incumbe ensancharlos. Con el fin de lograr una penetración más profunda tanto en la estructuración como en la extensión del espacio, pasemos revista a los siguientes aspectos de la cuestión:

– Ayudar al niño a tomar conciencia del espacio ocupado por su cuerpo.
– Ayudarle a tomar conciencia de la orientación del espacio.
– Ayudarle a tomar conciencia de la delimitación del objeto en el espacio.
– Ayudarle a tomar conciencia de las posiciones relativas de los objetos en el espacio.
– Ayudarle a tomar conciencia de las distancias de los intervalos y a penetrar en el mundo de la medida y la esquematización del espacio.

La toma de conciencia del espacio corporal

La toma de conciencia del propio cuerpo reviste en el niño esencialmente el aspecto de una educación psicomotriz orientada a la lateralización, por una parte, y al afianzamiento del esquema corporal, por la otra [31].

La lateralización. Jean Tirman (*op. cit.*, pág. 4) toma de H. Pierón la siguiente definición de la lateralidad: *"Predominio de uno de los dos dispositivos de una mano, de un ojo, etc. que determina la existencia de diestros o zurdos, manuales u oculares"*. Además, el autor destaca con razón la existencia de un predominio en los miembros inferiores.

Este problema de la lateralidad nos ofrece un ejemplo sorprendente de lo que hemos llamado el espacio vivido. Volverse diestro (o zurdo) significa *vivir* (a veces sin siquiera tener conciencia de ello) una primera división del espacio en dos partes asimétricas. Y esa división es el rudimento, aún muy débil, del futuro análisis que conducirá al niño al reconocimiento del espacio matemático.

Es, pues, indispensable que esa lateralización se produzca en forma conveniente, es decir, nítida. El niño debe tener una idea clara de su espacio vivido para poder superarla y concebir un espacio más elaborado. Tirman (*op. cit.*, pág. 4), citando a René Zazzo, recomienda al respecto que la norma de acción por seguir en ese ámbito consista en "ayudar al niño a lateralizarse netamente" y "si la lateralización es netamente zurda, estimular la zurdera y esforzarse por disipar en el niño todo lo que podría dar lugar a un sentimiento de inferioridad".

El esquema corporal. Tomamos de la obra citada de Jean Tirman la definición del esquema corporal: *"Basado en impresiones táctiles, cinestésicas, laberínticas y visuales, realiza, por medio de una construcción activa constantemente modificada de los datos presentes y pasados, la síntesis dinámica que provee, tanto a nuestros actos como a nuestras percepciones, el marco espacial de referencia en que adquieren su significación"* (Ajuriaguerra). Y Tirman agrega que el esquema corporal es *"a la vez la imagen intuitiva del yo físico y la representación del cuerpo que actúa en el mundo exterior"*. (*Op. cit.*, pág. 6.)

Esa imagen, que el niño se hace de su propio cuerpo, se va generando poco a poco durante los diez primeros años aproximadamente. *"Es el resultado y la condición de la existencia de relaciones adecuadas entre el individuo y su medio."* (H. Wallon, citado por J. Tirman, *op. cit.*, pág. 6.) Desde los cinco a los siete años, el niño toma paulatinamente conciencia de su cuerpo con sus distintas partes, mostrándolas y nombrándolas. De los seis a los nueve años, aparece lentamente la posibilidad de transferir a los objetos y a otra persona lo que ha comprobado en sí mismo.

Comprobamos un ejemplo nuevo de ese espacio vivido por el cual se inicia necesariamente la educación motriz del niño. En última instancia, como dice muy bien Tirman, el esquema corporal no es, todavía, una toma de conciencia de sí mismo, sino una simple "imagen intuitiva" del propio cuerpo, de un cuerpo, por de pronto, tan sólo vivido. Pero es necesario que sea vivido en su totalidad, para que de él nazca una imagen cada vez más consciente de sí mismo y del mundo exterior.

Ese análisis del espacio, hacia el cual queremos encaminar a nuestros niños, empieza allí; el niño lo hace primeramente con su cuerpo, antes de hacerlo con los ojos, para acabar por hacerlo con la mente.

La orientación del espacio

Digamos, en primer lugar, que el espacio, aunque sólo fuere con relación a uno mismo, tiene siempre una dirección fija: está centrado. Y con relación a ese centro pueden reconocerse en él distintas partes. Es posible analizarlo. Así podemos llegar a las siguientes categorías (ver el esquema siguiente) [32]:

	NOCIONES CORRESPONDIENTES A LAS CATEGORIAS DEL ESPACIO Y RELATIVAS A:		
CATEGORIAS DE LA ORIENTACION EN EL ESPACIO	el espacio ocupado por uno mismo o el objeto	la posición relativa de uno mismo o de un objeto con relación a un punto de referencia	el movimiento de uno mismo o de un objeto con relación a un punto de referencia
LATERALIDAD	la derecha de... la izquierda de...	a la derecha de... a la izquierda de...	a la derecha de... a la izquierda de...
PROFUNDIDAD	lo alto de... la cima de... lo bajo de... el fondo de...	encima de... debajo de...	sobre... bajo... ....
ANTERIORIDAD	el anverso de... el reverso de... la delantera de... la trasera de... el derecho de...	delante de... detrás de...	por detrás... por delante... hacia adelante... hacia atrás... al derecho... al revés... retrocediendo...

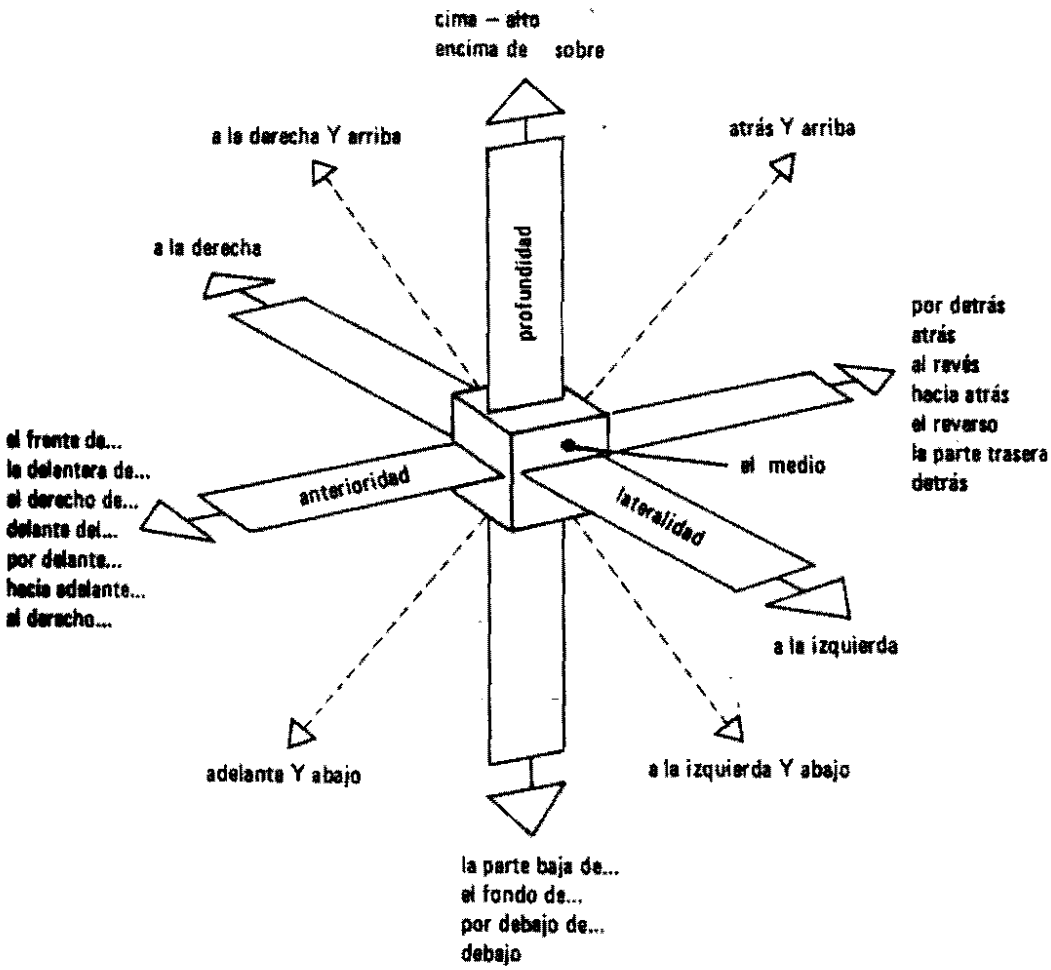
Esta aprehensión de las categorías del espacio se realizará en dos direcciones bien precisas:

En el sentido de la descentración. Se trata de conducir al niño gradualmente de la sola consideración de su propio cuerpo, o de los objetos con relación a su propia ubicación, a la consideración de los objetos exteriores *independientemente* de sí mismo y de su propia situación. Así, esta descentración debería llevarse a cabo progresivamente de acuerdo con el siguiente esquema:

Pasar del análisis del espacio ocupado por uno mismo al análisis del espacio ocupado por el objeto exterior.

Pasar del análisis de la posición de los objetos con relación a uno mismo, al análisis de la posición de los objetos con relación a otros objetos.

Pasar del análisis de la posición de los objetos con relación a uno mismo, al análisis del movimiento de los objetos con relación a un punto de referencia objetivo.



Las principales categorías de la orientación en el espacio y las nociones referidas a ellas

Como se ve, se trata esencialmente de eliminar el egocentrismo del niño, conseguir de alguna manera que "olvide" referirlo todo a sí mismo. Y ese "olvido" es la condición indispensable de su evolución.

¿Cómo podremos lograrlo? Por medio de la segunda dirección que, según opinamos, debería tomar la aprehensión de las categorías de la orientación: la extensión del concepto.

En el sentido de la extensión del concepto. Como se ve, es la consecuencia inevitable de la descentración. Las nociones de izquierda y derecha, arriba y abajo, adelante y atrás, primeramente serán *vividas* por el niño, por su cuerpo en movimiento, en sus desplazamientos, saltos, corridas, brincos, etc. Lo de arriba es lo que sólo puede alcanzar saltando, lo de abajo sólo lo consigue bajándose, etc. No interviene ninguna verdadera percepción, ni concepción real de esas nociones. El objeto es vivido, está allí, presente, muy cerca del

niño, es casi siempre el niño mismo. El objeto lejano todavía no está a su alcance. Nos incumbe a nosotros ayudarle a transportarse hacia él.

En efecto, es menester que el niño llegue no sólo a *vivir* las categorías del espacio, sino a *percibirlas*, y ese paso de lo vivido a lo percibido permitirá la extensión del objeto de *aquí* al objeto de *allá*. El espacio que el niño puede comprender ahora ya no es el inmediato de su habitación o del aula, solamente. Es el espacio de su barrio o su pueblo, y pronto el de la ciudad, de la región y hasta del país. Es el percibido en la geografía en el cual va penetrando. Insensiblemente, por haber aprendido a analizar el espacio según las categorías de arriba-abajo, adelante-atrás, etc., llegará ahora con mayor facilidad a captar las nociones más elaboradas de los puntos cardinales [33]. Habiendo creado en sí mismo hábitos de pensar según las categorías de lo vivido, será capaz de proceder, en otro nivel, al análisis del espacio según las orientaciones norte-sur y este-oeste. Habiendo aprendido correctamente la posición de un objeto con relación a otro, será capaz de aprehender la posición de una parte del globo con relación al meridiano de Greenwich o a cualquier otro punto de referencia natural. Finalmente, habiendo aprendido a captar correctamente el movimiento con relación, no a sí mismo, sino a otro objeto, le será menos difícil captar los movimientos relativos de la Tierra y el Sol.

El análisis espontáneo del espacio vivido prepara al niño para aprehender, mediante un análisis más elaborado, el espacio percibido de la geografía, ya sea que éste se presente en forma de un paisaje o de un documento fotográfico o impreso.

Ese espacio percibido de la geografía, a su vez, prepara al niño para aprehender el espacio matemático. En el nivel del espacio concebido, aquel que ni siquiera admite el trazado de un mapa, sólo las formas importan. Su correcta aprehensión presupone una larga educación que, sin duda alguna, se origina en el modesto análisis del espacio vivido.

El objeto en el espacio

En ese espacio, cuyas distintas orientaciones el niño aprende poco a poco a descubrir, hay objetos. Los psicólogos nos han dicho cuán poco se destacan en él los objetos según sus contornos. Si para nosotros los adultos, los objetos —por lo menos los comunes— se presentan en sí mismos, diferenciados de lo que no son ellos mismos, para el niño no es así. Para el niño del jardín de infantes, la ventana de la fachada de la escuela no existe sin esta fachada; los cristales de esa ventana no tienen aisladamente ninguna existencia real. Lo que él percibe es el todo. Los detalles se le escapan todavía [34]. Ese sincretismo debe superarlo con ayuda del maestro. En otro nivel, nuestros alumnos de las clases elementales —incluso los del ciclo medio— a veces tienen dificultades en delimitar los distintos elementos de un paisaje, en percibir los campos labrados, los terrenos

baldíos, las carreteras y los canales, acantilados y playas, etc. Saber analizar es, en este sentido, saber delimitar los componentes. En un principio, el niño no lo sabe hacer. Tenemos que enseñárselo. ¿Cómo? Haciéndole tomar conciencia de esas categorías que utiliza todos los días, pero no siempre en forma consciente ni sistemática. En cuanto al objeto se refiere, consideramos que esas categorías son tres:

La interioridad: en esta categoría encontramos las nociones de "dentro", "adentro", "en el interior", etc.

La exterioridad: en esta categoría encontramos las nociones de "fuera de", "afuera", "al exterior", etc.

La delimitación: por último, en esta categoría encontramos las de "extremidad", "final", "límite", "perímetro", "a lo largo de", "alrededor de", etc.

Percibir un objeto es, esencialmente, distinguir *lo que es* (su interior, lo que comprende), de *lo que no es* (su exterior, lo que excluye). Ante un paisaje visto desde la cumbre de una colina, el maestro hará reconocer a los alumnos su pueblo. ¿Qué tendrán que descubrir? Deberán distinguir el pueblo (sus casas, el campanario, la escuela, las calles, etc.) entre todo lo que no es, que está *fuera* de él (los campos, las granjas vecinas, la ruta, la montaña, etc.). La confrontación de esos descubrimientos conduce a la delimitación precisa del objeto, en este caso el pueblo. (Además, creemos que deberían agregarse otras dos nociones a las que se refieren al objeto en el espacio: las de "centro" y de "medio". En efecto, la puesta en relación de la estructura del objeto y de la medida traerá consigo estas dos nociones.)

La aprehensión de las categorías del objeto en el espacio podrá realizarse de acuerdo con las orientaciones de la acción pedagógica que ya vislumbramos respecto de la orientación del espacio.

En el sentido de la descentración. "Descentrar" el objeto, en cuanto al niño se refiere, significa, en primer lugar, eliminar su egocentrismo, enseñarle a discernir, a distinguir las partes del todo confuso que se le presenta. Significa, además, ayudarle a olvidar que los contornos o alcances de ese objeto no siempre están vinculados estrechamente con sus propias preocupaciones. Sabemos que el niño ve en los contornos o alcances de los objetos posibilidades de utilizarlos en relación con sus intereses del momento: una ramita será espontáneamente una pistola de *cow-boy* o una honda. Una piedra podrá ser un elemento de decoración, un pisapapeles, etc. Esto responde a una ley psicológica a la cual incluso el adulto no escapa. Pero, al respecto, la acción pedagógica consistirá no tanto en negar esa tendencia, que es fundamental, sino en conseguir que el niño lleve a cabo la experiencia de *otros* empleos de los objetos: la ramita podría ser (también) una percha, la piedra podría servir de "plomada", de la cual se habló en la clase dedicada al oficio de albañil, etc.[35].

El objeto descubierto por el niño es, ante todo, *su* objeto. Pero no es *tan sólo* eso. La labor educativa trata de hacérselo reconocer.

En el sentido de la extensión del concepto. La extensión del concepto de objeto, en cuanto a su situación en el espacio, será la extensión de las categorías que descubrimos en él: interioridad, exterioridad y delimitación.

La extensión de la interioridad llevará al maestro a ayudar a sus alumnos a precisar en todo lo posible el análisis del objeto delimitado. Volvamos a nuestro ejemplo de la observación del pueblo visto desde la cumbre de una colina. Fue necesario, ante todo, distinguir el pueblo de lo que no pertenece a él, es decir, delimitarlo. Pero extender aún más las investigaciones consistirá en profundizar el reconocimiento de los detalles de las calles y plazas, lo cual significa, en términos generales, mejorar el conocimiento del objeto en sí mismo.

Si la extensión de la exterioridad del objeto persigue la misma acentuación del análisis, la delimitación a su vez hallará un contenido siempre renovado. Extender la categoría de la delimitación significa ayudar al niño a aprehender espacios cada vez más vastos, o sea, hacerlo pasar gradualmente de su espacio vivido, inmediato, el de su habitación, la escuela, la calle, a espacios que sólo puede descubrir por intermedio de documentos (planos, mapas, fotografías, etc.).

Extender la delimitación, significa preparar al niño para aprehender primero el espacio geográfico, para llegar después al espacio geométrico mismo. Porque parece que el análisis de la campiña que rodea al pueblo, el análisis del barrio, con sus calles y callejuelas, las plazas y grandes conjuntos, será el mejor aprendizaje de ese ejercicio tan delicado que consiste en comprender una fotografía del paisaje, un documento geográfico cualquiera y, más aún, un mapa.

Las posiciones relativas de los objetos en el espacio

La aprehensión de la exterioridad del objeto en el espacio nos habrá permitido, por añadidura, situarlo con relación a otros objetos con los cuales mantiene ciertas relaciones espaciales. Estas relaciones las queremos abordar ahora con el fin de estudiar sus categorías y las consecuencias de la acción pedagógica en el sentido de la descentración y la extensión.

En cuanto a las categorías de las posiciones relativas, no causará extrañeza volver a encontrar las de interioridad y exterioridad que vimos con respecto a la situación espacial del objeto mismo. Es evidente que se habrá percibido este objeto como conteniendo en su interior otros objetos, y por ende esa interioridad será al mismo tiempo del objeto y de sus relaciones con sus componentes.

Podemos, pues, distinguir cuatro categorías referentes a las posiciones relativas de los objetos en el espacio:

1) **La interioridad**: el objeto B está *dentro* del objeto A. Tendremos entonces las nociones de "en", "en el interior de", "dentro", etc. A esta categoría los matemáticos la llaman inclusión.

2) **La exterioridad**: el objeto B se halla *fuera* del objeto A. Tenemos entonces las nociones de "fuera de", "afuera", etc. Es la categoría que, en matemática, adopta la forma de exclusión o no pertenencia.

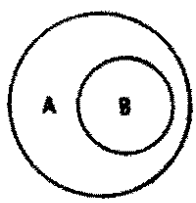
3) **La sección**: el objeto B corta o atraviesa el objeto A. Tendremos en este caso las nociones de "cortar", "atravesar", "a través de", etc.[36].

4) **La contigüidad**: el objeto B está en contacto con el objeto A. En este caso, tenemos las nociones de "tocar", "junto a", etc.

Las principales categorías de las posiciones relativas de los objetos en el espacio

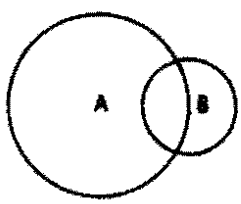
I LA INTERIORIDAD

- en
- en el interior de
- en medio de
- dentro



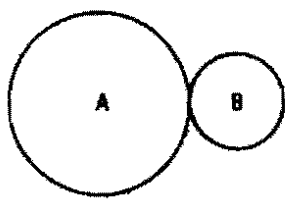
II LA SECCION

- que corta
- a través



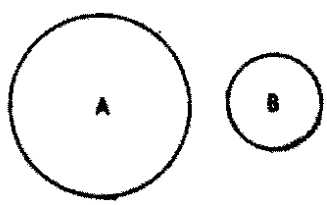
III LA CONTIGÜIDAD

- que toca
- junto a



IV LA EXTERIORIDAD

- fuera
- fuera de
- en el exterior
- entre



Tal como lo vimos con relación a la orientación del espacio, la aprehensión de las categorías propias a la posición relativas de los objetos se hará en dos direcciones precisas:

En el sentido de la descentración. Al respecto, el problema es todavía más claro que el referente a la orientación: como se trata de la posición o del movimiento de un objeto con relación a un punto de referencia, éste podrá ser el niño mismo u otro objeto. En el plano psicológico, hemos visto que el niño aprecia la posición y el movimiento primero con relación a su propia posición y su propio movimiento. La descentración consistirá, pues, en ayudarle a apreciar la posición y el movimiento de los objetos exteriores ya no con relación a sí mismo, sino a los demás objetos.

En el sentido de la extensión del concepto. Aplicaremos el mismo esquema que antes. Ayudando al niño a seguir su evolución natural, que lo hace transitar de lo vivido a lo percibido y luego a lo concebido, le permitiremos aprehender espacios cada vez más vastos. En un principio —y reconoceremos en esto actividades comunes de los jardines de infantes— se tratará de hacer *vivir* al niño su posición —o su entrada— *en* el aula o *en* el aro puesto en el piso o *en* la casa de la muñeca, etc. Ese mismo niño *atravesará* el pátio de recreo, se colocará *contra* la reja del portón de entrada a la escuela, etc. Y de esta suerte, comenzará no sólo a familiarizarse, sino además —y esto es lo esencial— a tomar conciencia de esas nociones que ahora deberá superar para apreciarlas ya no *viviéndolas* sino *percibiéndolas*.

Esa percepción de los objetos, de sus límites, sus fronteras, su centro o sus bordes, etc., ayudará al niño a penetrar una vez más en el análisis de los espacios cada vez más extendidos, en una palabra, en el espacio geográfico antes realmente percibido (percepción de paisajes, barrios, pueblos, etc.) y después percibido a través del documento (fotografías aéreas u otras, mapas, etc.). Si las adquisiciones hechas a nivel del espacio *vivido* no son de la misma índole que las hechas a nivel del *percibido*, si el hecho de mostrar correctamente el medio o centro y los bordes de la pintura mural se ubica en otro nivel que el de seguir con el dedo los límites de la región en el mapa, no por eso es menos cierto que la experiencia de lo *vivido* prepara la de lo *percibido*. Antes que fuera *apto* para percibir convenientemente, era necesario crear en el niño los *hábitos* de discernir, analizar y reconocer las distintas partes de un todo. Esa necesidad de discernimiento y análisis se denomina, en términos de la psicología, eliminación del sincretismo de la percepción. Esa eliminación comienza en la edad de la escuela preelemental.

Pero no se detiene en la etapa de lo *percibido*. Si la educación de lo *vivido* dio al niño ese movimiento que le permitió abordar, en condiciones adecuadas, el estadio de lo percibido, ese movimiento ha de recibir un nuevo impulso hacia la etapa superior de lo concebido; de la aprehensión de los espacios geográficos cada vez más extendidos, el niño ha de ser capaz de proseguir su abstracción hacia los espacios matemáticos y, en particular, hacia las nociones que abarca

una teoría de conjuntos matemáticos. En efecto, ya vimos cuán grande es la afinidad que existe entre la aprehensión del espacio y la elaboración matemática.

Las distancias, los intervalos y la medida

Las categorías que acabamos de establecer en cuanto a la exterioridad y la contigüidad de los objetos introduce de por sí las de la distancia. En efecto, si un objeto es exterior a otro, o a cierto punto, y si es contiguo a él, planteará de inmediato el problema de la importancia de la exterioridad o la contigüidad; con otras palabras, el problema de la distancia que separa los dos objetos.

Por lo demás, no nos fue posible separar, ni lógica ni psicológicamente, las tres áreas de distancias, intervalos y medida. En efecto, es suficiente agregar la repetición a la distancia para obtener categorías de intervalo. Decir que encontramos plátanos a intervalos regulares a lo largo de la carretera que lleva a una localidad vecina, significa que la distancia que separa un árbol del que le sigue se repite x veces hasta el pueblo.

Sin duda se notará que, simultáneamente, distancias e intervalos no son concebibles sin pasar de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual presupone la medida: una distancia no es tan sólo la afirmación de un "más cerca de" o "más lejos de", sino que exige el número como elemento último de la precisión. El intervalo a su vez exige la precisión de su frecuencia. De todos modos, la estructura del espacio desemboca aquí en un enfoque matemático de las cosas [37].

Las categorías de la distancia pertenecen a dos grupos:

1) La proximidad: relacionamos con ella las nociones de "cerca de", "al lado de", "más cerca de", "no tan lejos de", "aquí", "éste", etc

2) El alejamiento: se refieren a él las nociones de "lejos de", "más lejos de", "menos cerca de", "allá", "aquél", etc.

Con la categoría de los intervalos espaciales relacionamos las nociones de "apartado uno de otro", "de lugar en lugar" y sobre todo las importantísimas nociones de "continuo" y "discontinuo". En efecto, el espacio geométrico auténtico no conoce la discontinuidad y, por ende, la continuidad que lo caracteriza podrá llevar al niño, más tarde, a concebir ese resultado último de toda extensión: lo infinito.

También en esta área, la acción pedagógica se realizará:

En el sentido de la descentración: las categorías de la distancia se conciben, tal vez, menos que cualquier otra, y ello será con relación a un punto de referencia, de la misma manera que las de la medida sólo se conciben en relación con una unidad métrica. Comprenderemos entonces que, en este campo, la acción de la descentración consistirá

en ayudar al niño a apreciar las distancias ya no tan sólo con relación a su propia posición, sino con relación a los objetos mismos: se trata de llegar del empleo de "A está lejos de mí", "B está cerca de mí", al de "A está cerca de Ç" y "D está mas cerca de M que de N". Además, esa acción de descentración aspira a lograr que el niño utilice una unidad de medida no vinculada con su persona (el largo de sus pasos, la separación de los dedos de la mano, etc.), para llegar poco a poco a la aprehensión de una unidad de medida objetiva.

En el sentido de la extensión del concepto: primeramente, el niño *vive* las categorías de lejos y de cerca. Juan sabe —o siente— que está más cerca de Pedro que de José. Verónica sabe que debe correr más tiempo para alcanzar a Miguel que a Andrés. El papel del educador consistirá, al principio, en precisar esas nociones en las mismas áreas de la vida del niño. Enrique, que ve mal, tiene que acercarse más al pizarrón, etc. En efecto, es necesario que los niños vivencien esas nociones, pero en forma clara y distinta.

A partir de esa claridad inicial, los alumnos pronto serán capaces de aprehender esas categorías de la distancia no sólo vivenciándolas, sino percibiéndolas: apreciación (primeramente cualitativa) de las distancias que separan la escuela del hogar, de la distancia que separa el ayuntamiento del mercado, etc.[38]. Desde la apreciación de las distancias de un paisaje se puede pasar a las representadas en un croquis o un mapa. Entonces ya estaremos muy cerca del espacio concebido, gracias al cálculo de esas distancias según la escala del mapa.

De la sensación muscular de la distancia al cálculo según la escala de un mapa (o de una distancia a partir de la escala), se desprende la significación de la gradación: de lo biológico a lo mental. El movimiento en esta dirección será, aquí, el aporte más fecundo a los maestros, en la medida en que les orienta respecto de toda su labor en este campo.

De acuerdo con los resultados obtenidos por Piaget, comprobamos que semejante progresión hace surgir gradualmente lo cuantitativo de lo cualitativo. Después de haber apreciado aproximativamente las distancias, el niño llegará a medir y a reconocer el número como instrumento de apreciación. Sólo entonces penetrará más aún en el mundo del espacio concebido según todas las clasificaciones que esas actividades admiten, para llegar a la noción matemática del orden.

En ese campo de lo conceptual se abordará entonces la representación gráfica del espacio en el marco de la geometría. De la experiencia del movimiento a la geografía y luego a la geometría hemos seguido una gradación lógica y psicológica que a la vez conduce a una evidente interdisciplinariedad.

A modo de conclusión: la descripción verificadora

Todavía nos falta el medio de verificar las adquisiciones del niño concernientes a su aprehensión del espacio. Vimos esa verificación al nivel de la representación gráfica del objeto o del ser vivo y al nivel de la acción cuando se trataba de la causalidad. Ahora, nos parece posible verificar al nivel de la descripción si nuestro alumno está efectivamente en condiciones de situarse y de situar convenientemente los objetos en el espacio.

Describir es, ante todo, organizar un espacio.

Describir una granja o un rostro significa, en primer lugar, situar los distintos elementos de la granja o del rostro en el lugar preciso que les corresponde y que es siempre relativo al de los otros componentes del cuadro. La observación de las relaciones entre esos componentes será la prueba que necesitamos de esas adquisiciones del niño en la materia.

Haremos dos observaciones al respecto. Según la edad del niño, la descripción se dará en forma de dibujo o de texto. Después de haber realizado ejercicios de topología o localización pediremos a nuestros niños pequeños del curso preparatorio, y hasta del ciclo elemental, representar en una hoja de papel lo que observaron. Al final de tal trabajo, podremos apreciar los resultados obtenidos: ¿hasta qué punto reconoció Sergio la relación entre "delante" y "detrás"? ¿Cómo retuvo Anita la relación de las distancias entre el río y la casa, por una parte, y aquella que separa el puente del bosque, por la otra? Los alumnos mayores, que cursan el ciclo medio, podrían iniciarse en ese arte de la descripción escrita mediante el mismo ejercicio del dibujo, de la representación gráfica del paisaje (o del objeto) que se debe describir.

Se ha comprobado que esa iniciación en la descripción a partir del dibujo facilita el trabajo del niño *en la medida en que facilita la organización del espacio.*

No se tratará de convertir la descripción hecha en la escuela (dibujo o texto) en un simple ejercicio de organización espacial y quitarle toda finalidad en el plano artístico. El objetivo de esos ejercicios es siempre la belleza de la expresión. Pero no parece, más bien al contrario, que esa expresión de lo bello sea incompatible con un sólido conocimiento de la organización de los objetos en su interrelación.

De la misma manera, el rigor con que la bailarina observa sus líneas de evolución no quita nada a la estética de sus movimientos.

Finalmente, la apreciación de esos trabajos de expresión del niño siempre debe tener en cuenta el lugar que corresponde a su imaginación, cuya importancia evolutiva ya vimos. Recordemos que sólo gradualmente la faceta un tanto perturbadora de esa imaginación ha de disminuir con el fin de permitir la liberación total del niño con miras a una expresión plena de sí mismo.

ANEXO 3

COURANT, R. - ROBBINS, H. ¿Qué es la Matemática? Pp. 195 a 205 y pp. 270 a 281.

GEOMETRIA PROYECTIVA - AXIOMATICA GEOMETRIA NO EUCLIDIANA

§ 1. INTRODUCCION

72.—Clasificación de las propiedades geométricas. Invariancia respecto de transformaciones.

La Geometría trata de las propiedades geométricas de las figuras del plano o del espacio. Estas propiedades son tan numerosas y variadas, que es necesario algún principio de clasificación para poner orden en esta rama del conocimiento. Se puede, p. ej., introducir una clasificación basada en el método que se use para deducir teoremas. Desde este punto de vista se hace usualmente una distinción entre procedimientos "sintéticos" y procedimientos "analíticos". El primero de ellos es el método axiomático clásico de Euclides en que se construye sobre fundamentos puramente geométricos, independientes del álgebra y del concepto del continuo numérico, y los teoremas se deducen mediante razonamientos lógicos de un cuerpo inicial de proposiciones llamados axiomas o postulados. El segundo método se basa en la introducción de coordenadas numéricas, y usa la técnica del Algebra. Este método ha causado un cambio profundo en la ciencia matemática, del que ha resultado la unificación de la Geometría, el Análisis y el Algebra en un sistema orgánico. En este capítulo la clasificación según el método será menos importante que la clasificación de acuerdo al *contenido*, basada en el carácter de los teoremas mismos, no importando los métodos usados para demostrarlos. En Geometría plana elemental se distingue entre teoremas que tratan de la congruencia de las figuras, usando los conceptos de longitud y de ángulo, y teoremas que tratan de la semejanza entre figuras, usando el concepto de ángulo. Esta distinción particular no es muy importante, ya que las longitudes y los ángulos están relacionados tan estrechamente que resulta muy artificial separarlos (es el estudio de esta conexión

lo que constituye la mayor parte del contenido de la Trigonometría). En lugar de ello, podemos decir que los teoremas de la Geometría elemental se ocupan de *magnitudes:* longitudes, medidas de ángulos y áreas. Dos figuras son equivalentes desde este punto de vista si son congruentes, es decir, si una puede obtenerse de la otra mediante un *movimiento rígido,* que solamente cambia la posición, pero no la magnitud. Surge ahora la cuestión de si el concepto de magnitud y los conceptos de congruencia y semejanza relacionados con él son esenciales a la Geometría, o si las figuras geométricas pueden tener otras propiedades que no desaparecerán por transformaciones más drásticas que los movimientos rígidos. Vamos a ver que así acontece.

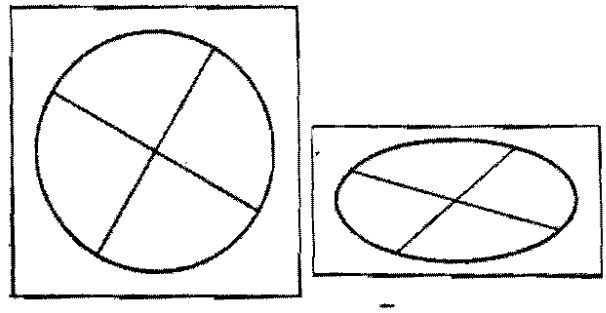


Fig. 69. — Compresión de la circunferencia.

Supongamos que se dibuja una circunferencia y un par de diámetros perpendiculares en un trozo rectangular de madera blanda, como en la fig. 69. Si colocamos el trozo entre dos platos de una prensa potente y la comprimimos hasta que tenga la mitad de su ancho original, el círculo se habrá hecho una elipse y los ángulos entre los diámetros de la elipse ya no serán ángulos rectos. El círculo tiene la propiedad de que sus puntos equidistan del centro, mientras que esto no es verdad para la elipse. Pareciera que todas las propiedades geométricas de la configuración original han sido destruidas por la compresión... Pero no es así; por ejemplo, la proposición de que el centro divide cada diámetro en dos partes iguales es válida, tanto para la circunferencia como para la elipse. He aquí una propiedad que persiste a pesar del cambio drástico de magnitudes de la figura original. Esta observación sugiere la posibilidad de clasificar teoremas sobre figuras geométricas según que sean verdaderas o falsas cuando la figura se somete a una compresión uniforme. Más generalmente, dada una clase definida de transformaciones de una figura (como la clase de los movimientos rígidos, compresiones, inversiones en circunferencias, etc.),

podemos preguntar qué propiedades de la figura no han cambiado bajo esta clase de transformaciones. El cuerpo de teoremas que enuncian estas propiedades será la Geometría asociada a esta clase de transformaciones. La idea de clasificar diferentes ramas de la Geometría de acuerdo a las clases de transformaciones consideradas, fué propuesta por Félix Klein (1849-1927) en su famosa comunicación ("el programa de Erlangen") presentada en 1872. Esta obra ha influído enormemente el pensamiento matemático.

En el capítulo V descubriremos el hecho verdaderamente sorprendente de que ciertas propiedades geométricas son tan intrínsecas, que persisten después que las figuras han sido sometidas a deformaciones muy arbitrarias; figuras dibujadas en una lámina de caucho que se estira o comprime de cualquier manera, conservan algunas de sus características originales. En este capítulo, sin embargo, vamos a ocuparnos solamente de aquellas propiedades que no cambian, o quedan "invariantes" bajo una clase especial de transformaciones que se encuentran entre la clase muy restringida de los movimientos rígidos, por un lado; y la clase más general de las deformaciones arbitrarias, por otro. Ésta es la clase de las "transformaciones proyectivas".

73.—Transformaciones proyectivas.

El estudio de estas propiedades geométricas fué impuesto a los matemáticos desde hace mucho, debido a los problemas de *perspectiva*, que fueron estudiados por artistas como Leonardo de Vinci y Alberto Durero.

La imagen hecha por el pintor puede considerarse como la proyección del original sobre la tela, con centro de proyección en el ojo del pintor. En este proceso las longitudes y los ángulos se alteran necesariamente en forma que depende de las posiciones relativas de los diversos objetos pintados. No obstante, las estructuras geométricas del original pueden generalmente reconocerse en la tela. ¿Cómo es esto posible? Lo es, porque existen propiedades geométricas "invariantes en la proyección", propiedades que aparecen sin alteración en la imagen y que hacen la identificación posible. Hallar y analizar estas propiedades es el objeto de la Geometría proyectiva.

Es claro que los teoremas de esta rama de la Geometría no pueden ser proposiciones sobre longitudes, ángulos o congruencias. Algunos hechos aislados, de naturaleza proyectiva, son bien conocidos desde el siglo diecisiete, o aun, como en el caso del "teorema de Menelao", desde la Antigüedad. Pero el estudio sistemático de

la Geometría proyectiva comenzó a fines del siglo dieciocho, cuando la escuela Politécnica de París inició una etapa de progreso matemático, particularmente en Geometría. Esta escuela, producto de la Revolución Francesa, produjo muchos oficiales para el servicio militar de la República. Uno de sus graduados fué J. V. *Poncelet* (1788-1867), que escribió su famoso *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras* en 1813, mientras era prisionero de guerra en Rusia. En el siglo diecinueve, bajo la influencia de *Steiner*, von *Staudt*, *Chasles* y otros, la Geometría proyectiva fué uno de los principales temas de la investigación matemática. Su popularidad fué debida en parte a su gran encanto estético y en parte a su efecto aclarador de la geometría como método, y a su íntima conexión con la Geometría no Euclídea y el Algebra.

§ 2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

74.—Grupo de transformaciones proyectivas.

Definiremos primero la clase o "grupo" (1) de transformaciones proyectivas. Supongamos tener dos planos π y π' en el espacio, no necesariamente paralelos. Podemos entonces obtener una *proyección central de* π sobre π' desde un centro dado O que no está ni sobre π ni sobre π' definiendo la imagen de cada punto P de π como aquel punto P' de π' tal que P y P' están sobre la misma recta que pasa por O. Podemos también obtener una *proyección paralela*, en la que todas las líneas de proyección son también paralelas. Del mismo modo, podemos definir la proyección de la línea l de un plano π sobre otra línea l' de π' desde un punto O de π, o bien mediante proyección paralela.

Una representación de una figura sobre otra mediante una proyección central o paralela, o por una sucesión finita de tales proyecciones, se llama *transformación proyectiva* (2). La *Geometría proyectiva* sobre el plano o sobre la recta consiste en el conjunto de aquellas proposiciones geométricas que no varían en una transformación proyectiva arbitraria de las figuras a las que se refieren. Por el contrario, llamaremos *Geometría métrica* al conjunto de aquellas proposiciones que tratan de las magnitudes de las figuras, invariantes sólo bajo la clase de los movimientos rígidos.

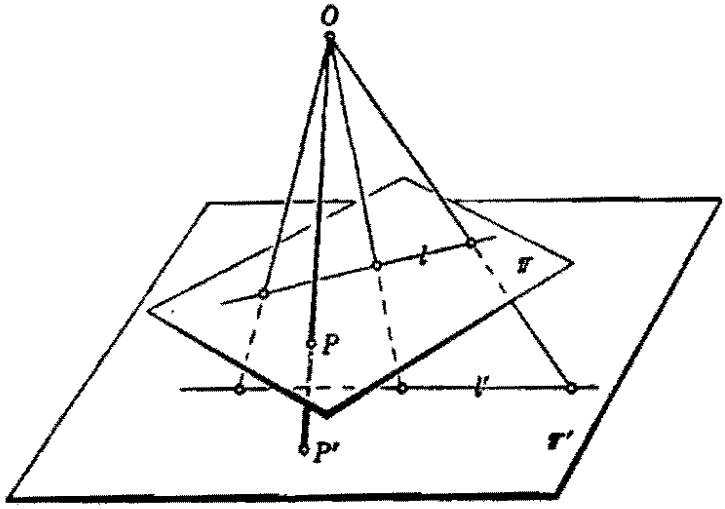


Fig. 70. — Proyección desde un punto.

Algunas propiedades proyectivas pueden reconocerse inmediatamente. Un punto, naturalmente, se proyectará en un punto. Además, *una recta se proyectará en una recta;* pues si la línea l de π se proyecta sobre el plano π' la intersección de π' con el plano que pasa por O y l será una recta (*). Si un punto A y una recta l se *pertenecen* (*), en la proyección el punto correspondiente A' y la recta l' también se pertenecen. Luego la *pertenencia de un punto y una recta es invariante en el grupo proyectivo.* De ese hecho surgen muchas consecuencias simples, pero importantes. Si tres o más puntos son colineales, es decir, pertenecen a una misma recta, entonces sus imágenes son también colineales. Asimismo, si en el plano π tres o más rectas son *concurrentes*, es decir, pertenecen a un mismo punto, entonces sus imágenes serán también rectas concu-

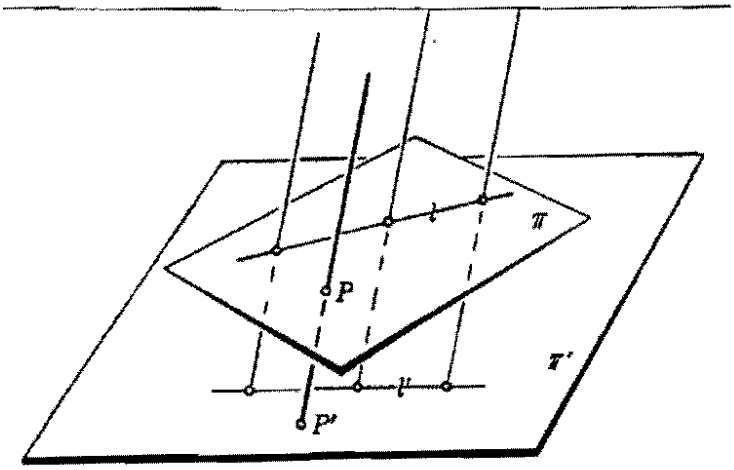


Fig. 71. — Proyección paralela

rrentes. Mientras estas propiedades simples, pertenencia, colineación y concurrencia son *propiedades proyectivas* (es decir, propiedades invariantes en las proyecciones), en cambio, las medidas de longitud y de ángulos, radios y otras magnitudes se alteran en general en la proyección. Los triángulos equiláteros e isósceles pueden proyectarse en triángulos cuyos lados tengan diferentes longitudes. Por tanto, aunque "triángulo" es un concepto de Geometría proyectiva, "triángulo equilátero" no lo es, y pertenece sólo a la Geometría métrica.

75.—Teorema de Desargues.

Uno de los primeros descubrimientos de geometría proyectiva fué el famoso teorema de Desargues (1593-1652) sobre triángulos. *Si en un plano dos triángulos ABC y A'B'C' son tales que las rectas que unen sus vértices correspondientes concurren en un mismo punto O, entonces los lados correspondientes deben cortarse en tres puntos colineales.* La fig. 72 ilustra el teorema y el lector puede dibujar otras figuras para probarlo por experimentación. La prueba no es trivial, pese a la sencillez de la figura, formada sólo por rectas. El teorema pertenece a la Geometría proyectiva, pues si proyectamos la figura entera sobre otro plano, conservará la propiedad enunciada en el teorema.

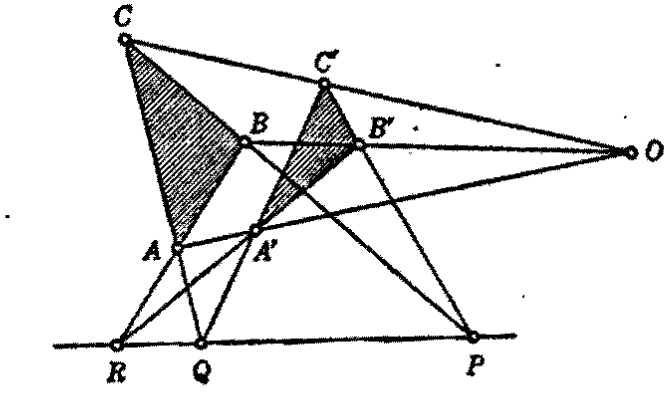


Fig. 72. — Configuración de Desargues en el plano.

Daremos una demostración de este teorema en § 5. Por el momento observaremos el hecho notable de que el teorema de Desargues es también verdadero si los triángulos están en dos planos *diferentes* (no paralelos), como es fácil de probar.

Supongamos que las rectas AA', BB' y CC' se cortan en O (fig. 73) de acuerdo con la hipótesis. Entonces AB está en el mismo

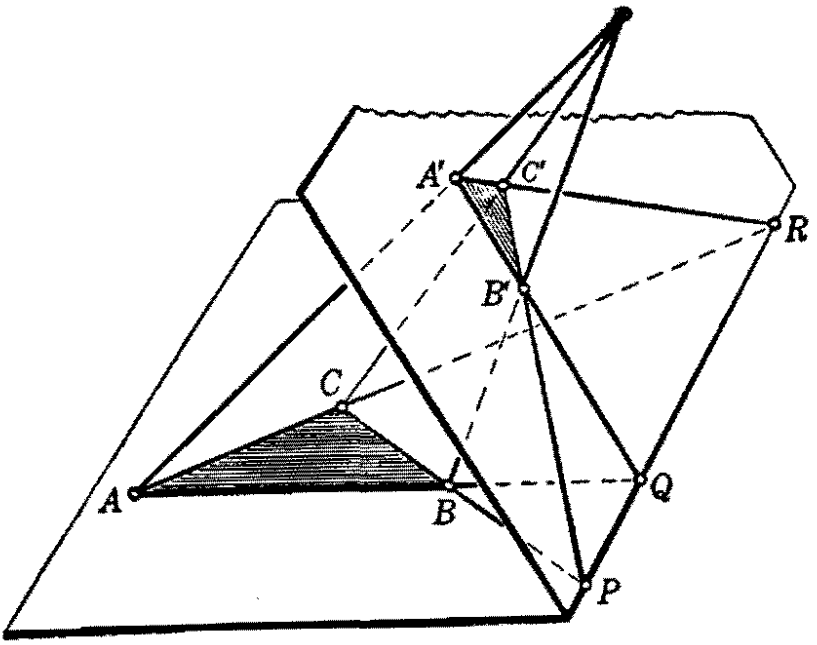


Fig. 73. — Configuración de Desargues en el espacio

plano de $A'B'$, es decir, que estas dos rectas se cortan en Q, igualmente AC y $A'C'$ se cortan en R, y lo mismo BC y $B'C'$ se cortan en P. Como P, Q y R están en las prolongaciones de los lados ABC y $A'B'C'$, deben estar en el mismo plano de cada uno de los dos triángulos, y en consecuencia deben estar en la recta de intersección de estos dos planos. Luego P, Q y R son colineales, como queríamos probar.

Esta simple demostración sugiere que podemos demostrar el teorema para dos dimensiones mediante, por decir así, un paso al límite, aplastando la figura total de manera que los dos planos coincidan en el límite, y el punto O, junto con los otros, caiga sobre el plano. Hay, sin embargo, cierta dificultad en llevar a cabo tal proceso de límite, pues la recta de intersección PQR no está unívocamente determinada cuando los planos coinciden. Luego se requieren precauciones para deducir el teorema bidimensional del tridimensional, aunque pueda hacerse.

Existe una diferencia fundamental entre el teorema de Desargues en el plano y en el espacio. Nuestra demostración en tres dimensiones usa razonamientos geométricos basados solamente en los conceptos de pertenencia e intersección de puntos, rectas y planos. Puede mostrarse que la demostración del

teorema bidimensional, si se *procede por completo en el plano*, requiere necesariamente el uso del concepto de *congruencia* de figuras, que es equivalente al concepto métrico de longitud y ya no es una noción proyectiva.

El teorema recíproco del de Desargues establece que si ABC y $A'B'C'$ son dos triángulos situados de modo que los puntos de intersección de los lados correspondientes son colineales, entonces las rectas que unen vértices correspondientes son concurrentes. Su demostración para el caso en que los triángulos están en dos planos no paralelos, se deja al lector como ejercicio.

§ 3. RAZON ANARMONICA

76.—Definición y prueba de invariancia.

Así como la longitud del segmento de recta es la clave de la Geometría métrica, hay un concepto fundamental de la Geometría proyectiva mediante el cual pueden expresarse todas las propiedades netamente proyectivas de las figuras.

Si tres puntos A, B, C están en una recta, la proyección cambia en general no sólo las distancias AB y BC, sino también la razón AB/BC. En efecto, *cualquier* triada de puntos ABC de una recta l puede siempre ser coordinada con otra triada $A'B'C'$ de otra

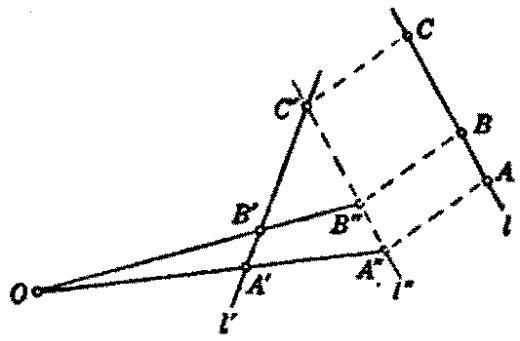


Fig. 74.

recta l' mediante sucesivas proyecciones. Para esto, hagamos girar la recta l' alrededor del punto C', hasta que esté en la posición l'' paralela a l (ver fig. 74). Podemos ahora proyectar l sobre l'' mediante proyección paralela a la recta que une C con C', definiendo tres puntos A'', B'' y C'' ($C'' = C'$). Las rectas que unen A', A'' y B', B'' deben cortarse en un punto O, como centro de la segunda proyección. Estas dos proyecciones nos dan el resultado deseado (1).

Como hemos visto, ninguna cantidad relativa a sólo tres puntos de una recta quedará invariante en una proyección. Pero —y este es el descubrimiento decisivo de la Geometría proyectiva— si tenemos *cuatro* puntos A, B, C, D de una recta, y los proyectamos

sobre otra recta en A', B', C', D', hay entonces una cantidad, llamada *razón anarmónica* de los cuatro puntos, que conserva su valor en la proyección. He aquí una propiedad matemática de un conjunto de cuatro puntos de una recta que no desaparece mediante proyección y que puede reconocerse en toda imagen de la recta. La razón anarmónica no es ya una longitud, ni un cociente de dos longitudes, sino *la razón de dos cocientes;* por definición, la razón anarmónica de los cuatro puntos A, B, C, D, tomados en este orden, es:

$$x = \frac{CA\,/\,CB}{DA\,/\,DB}$$

Vamos a mostrar que *la razón anarmónica de cuatro puntos no varía en la proyección*, es decir, que si A, B, C, D y A', B', C', D' son puntos correspondientes de dos rectas relacionados por proyección, se verifica:

$$\frac{CA\,/\,CB}{DA\,/\,DB} = \frac{C'A'\,/\,C'B'}{D'A'\,/\,D'B'}$$

La demostración se logra con medios elementales. Recordemos que el área de un triángulo es igual a ½ (base por altura) y está también dada por la mitad del producto de dos cualesquiera de sus lados por el seno del ángulo comprendido. Tenemos en la fig. 75:

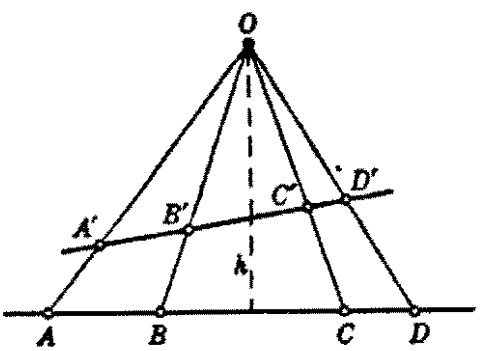


Fig. 75. — Invariancia de la razón anarmónica en una proyección central.

$$\text{área } OCA = \tfrac{1}{2}h \,.\, CA = \tfrac{1}{2}\, OA \,.\, OC \operatorname{sen} COA$$

$$\text{área } OCB = \tfrac{1}{2}\, h \,.\, CB = \tfrac{1}{2} OB \,.\, OC \operatorname{sen} COB$$

$$\text{área } ODA = \tfrac{1}{2}h \,.\, DA = \tfrac{1}{2} OA \,.\, OD \operatorname{sen} DOA$$

$$\text{área } ODB = \tfrac{1}{2}h \,.\, DB = \tfrac{1}{2} OB \,.\, OD \operatorname{sen} DOB$$

de donde se deduce por división:

$$\frac{CA/CB}{DA/DB} = \frac{CA \,.\, DB}{CB \,.\, DA} = \frac{OA \,.\, OC \operatorname{sen} COA}{OB \,.\, OC \operatorname{sen} COB} \cdot \frac{OB \,.\, OD \operatorname{sen} DOB}{OA \,.\, OD \operatorname{sen} DOA}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} COA}{\operatorname{sen} COB} \cdot \frac{\operatorname{sen} DOB}{\operatorname{sen} DOA}$$

Luego la razón anarmónica de A, B, C, D depende únicamente de los ángulos subtendidos desde O por los segmentos que unen A, B, C, D. Como estos ángulos son los mismos para cualesquiera otros cuatro puntos A', B', C', D' en que A, B, C, D pueden ser proyectados desde O, se tiene que la razón anarmónica no varía en la proyección.

Que la razón anarmónica de cuatro puntos no varía en una proyección *paralela* se obtiene de propiedades elementales de los triángulos semejantes y la demostración es un ejercicio para el lector.

TOPOLOGÍA

103.—Introducción.

A mediados del s. XIX comenzó un desarrollo completamente nuevo de la geometría, que se convirtió rápidamente en una de las mayores fuerzas de la matemática moderna. El nuevo estudio, llamado *Analisis situs* o *Topología*, estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten aun cuando esas figuras se someten a deformaciones tan drásticas que todas sus propiedades métricas y proyectivas desaparezcan.

Uno de los grandes geómetras de ese tiempo fué A. F. Moebius (1790-1868), un hombre cuya modestia lo destinó a la carrera de insignificante astrónomo en un observatorio secundario en Alemania. A la edad de 68 años sometió a la Academia de París una memoria sobre superficies de una cara, que contenía algunos de los más sorprendentes hechos de esta nueva clase de geometría. Como otras importantes contribuciones anteriores, su trabajo permaneció sepultado varios años en las carpetas de la Academia, y por fin lo publicó su autor. Independientemente de Moebius, el astrónomo J. B. Listing (1808 - 1882) de Goettingen, hizo descubrimientos similares, y siguiendo sugestiones de Gauss publicó en 1847 un pequeño libro, *Vorstudien zur Topologie*. Cuando Bernhard Riemann (1826-1866) llegó a Goettingen como estudiante, encontró la atmósfera matemática de esa ciudad universitaria llena de ansioso interés por estas extrañas y nuevas ideas geométricas. Pronto se dió cuenta de que allí estaba la llave para comprender las más profundas propiedades de las funciones analíticas de una variable compleja. Nada, quizá, ha dado más ímpetu al posterior desarrollo de la Topología que la gran estructura de la teoría de Riemann sobre las funciones, en la cual los conceptos topológicos son absolutamente fundamentales.

Al principio, la novedad de los métodos en el reciente campo no dejó tiempo a los matemáticos para presentar sus resultados en la tradicional forma de postulados de la geometría elemental. Así, los posteriores investigadores, como Poincaré, se vieron forzados a confiar bastante en la intuición geométrica. Aun hoy, un estudiante de Topología encontrará que mediante una mayor insistencia en el rigor de la presentación puede perder de vista el contenido geométrico esencial en medio de una masa de detalles formales. Sin embargo, es un gran mérito de los trabajos recientes haber conducido la Topología dentro de la red de la matemática rigurosa, donde la intuición es la fuente, pero no el patrón de validez final de la verdad.

Durante este proceso, comenzado por L. E. J. Brouwer, la significación de la Topología para casi toda la matemática se fué incrementando. Matemáticos americanos, en particular O. Veblen, J. W. Alexander y S. Lefschetz, han aportado importantes contribuciones en la materia.

Mientras la Topología es en definitiva una creación de los últimos cien años, hubo unos pocos y aislados descubrimientos anteriores que después encontraron su lugar en el moderno desarrollo sistemático. Sin duda el más importante de ellos es una fórmula, que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro simple, observada aproximadamente en 1640 por Descartes, y redescubierta y usada por Euler en 1752. El típico carácter de estas relaciones como teorema topológico se hizo evidente mucho más tarde, después de que Poincaré reconoció la "fórmula de Euler" y sus generalizaciones como uno de los teoremas centrales de la Topología. Así, por razones tanto históricas como intrínsecas, empezaremos nuestra discusión de la Topología con la fórmula de Euler. Puesto que el ideal del rigor perfecto no es necesario ni deseable durante los primeros pasos en un campo no familiar, apelaremos de vez en cuando a la intuición geométrica del lector.

§ 1. FORMULA DE EULER PARA LOS POLIEDROS

104.—La fórmula de Euler.

Aunque el estudio de los poliedros ocupó un lugar central en la geometría griega, cupo a Descartes y Euler el descubrimiento del siguiente hecho: en un poliedro simple, designando con V el número de vértices, con A el número de aristas, y con C el número de caras, es siempre:

$$V - A + C = 2. \tag{1}$$

Por un *poliedro* se entiende un sólido cuya superficie consiste en cierto número de caras poligonales. En el caso de sólidos regulares, todos los polígonos son congruentes y todos los ángulos correspondientes a un vértice son iguales. Un poliedro es *simple* si no hay en él "agujeros", o sea que su superficie pueda ser deformada continuamente hasta llegar a la superficie de una esfera. La fig. 120 muestra un poliedro simple que no es regular, mientras la figura 121 muestra un poliedro que no es simple.

El lector puede comprobar el hecho de que la fórmula de Euler vale para los poliedros simples de las figuras 119 y 120, pero no vale para el poliedro de la figura 121.

Para probar la fórmula de Euler, imaginemos que el poliedro

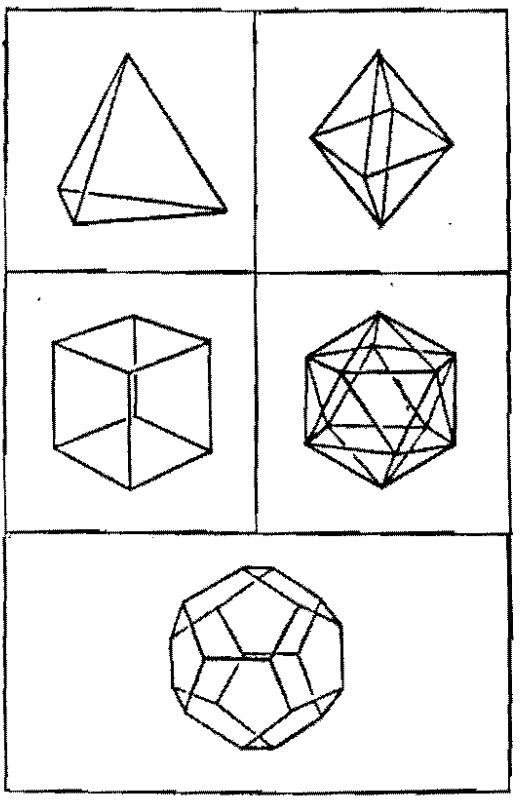


Fig. 119. — Los poliedros regulares.

simple dado esté vacío, con una superficie hecha de delgada goma; si cortamos una cara de poliedro hueco, podemos deformar la superficie restante hasta extenderla sobre un plano. Por supuesto, las áreas de las caras y los ángulos entre las aristas del poliedro cambiarán en este proceso. Pero la red de vértices y aristas en el plano contendrá el mismo número de vértices y aristas que contenía el poliedro original, mientras el número de polígonos será menor en una unidad que el del poliedro original, puesto que fué sacada una cara. Mostraremos ahora que para la red plana es, $V - A + C = 1$, o sea que, si la cara sacada se cuenta también, el resultado es $V - A + C = 2$ para el poliedro original.

Primero "triangulamos" la red plana de la siguiente manera: en algún polígono de la red que no sea en triángulo trazamos una diagonal. El efecto de esto es incrementar tanto a A como C en 1, conservando así el valor de $V - A + C$. Continuamos dibujando

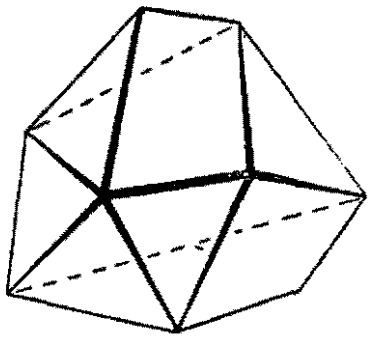


Fig. 120. — Un poliedro simple:
$V - A + C = 9 - 18 + 11 = 2$.

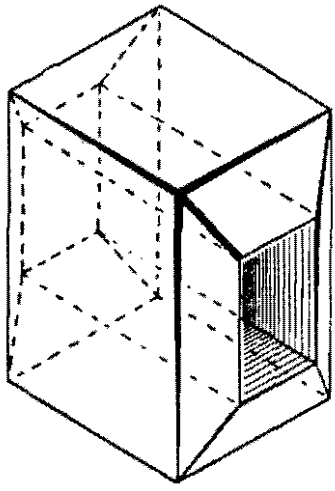


Fig. 121. — Un poliedro no simple:
$V - A + C = 16 - 32 + 16 = 0$.

diagonales uniendo pares de puntos (fig. 122) hasta que la figura esté formada por triángulos. En la red triangulada $V - A + C$ tiene el valor que tenía antes de la división en triángulos, puesto que el trazado de diagonales no lo ha cambiado.

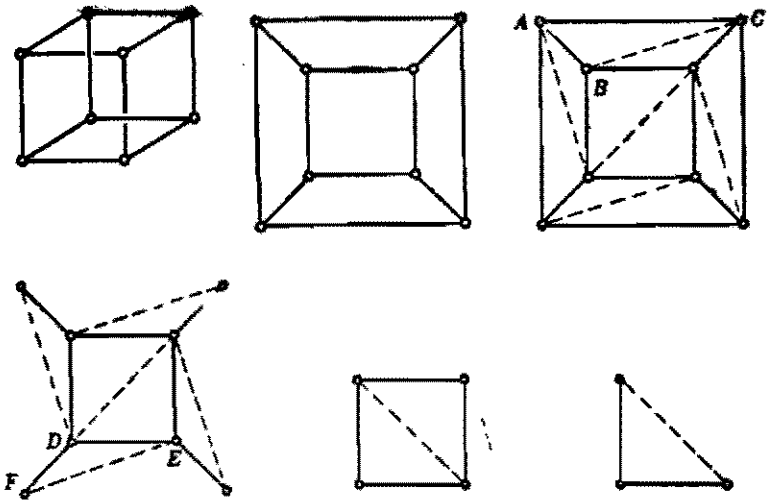


Fig. 122. — Demostración del Teorema de Euler.

Algunos de los triángulos tienen aristas en el contorno de la red plana. Algunos de éstos, como ABC, tienen sólo una arista en el contorno, mientras que otros pueden tener dos. Tomemos cualquiera de estos triángulos de contorno y sacamos aquella parte de él que no pertenece a ningún otro triángulo. Así, de ABC sacamos la arista AC y la cara, dejando los vértices A, B, C y las dos aristas AB y BC; mientras que de DEF sacamos la cara, las dos aristas DF y FE, y el vértice F. La eliminación de un triángulo del tipo ABC hace decrecer A y C en 1, mientras V no altera, de modo que $V - A + C$ permanece igual. La eliminación de un triángulo del tipo DEF disminuye V en 1, A en 2, y C en 1, así que $V - A + C$ permanece también igual. Por una sucesión apropiadamente elegida de estas operaciones podemos sacar triángulos con aristas en el contorno (el cual cambia con cada eliminación), hasta que finalmente quede sólo un triángulo, con sus tres vértices, tres aristas y una cara. Para esta simple red, $V - A + C = 3 - 3 + 1 = 1$. Pero hemos dicho que por la eliminación constante de triángulos, la expresión $V - A + C$ no se alteraba. Por lo tanto, en la red plana original, $V - A + C$ debe valer también 1, y también debe valer 1 en el poliedro con una cara menos. Concluímos que $V - A + C = 2$ para el poliedro completo. Esto completa la prueba de la fórmula de Euler.

Basándose en la fórmula de Euler es fácil mostrar que no hay más que cinco poliedros regulares. Para ello supongamos que un poliedro regular tiene C caras, cada una de las cuales es un polígono regular de n lados, y que en cada vértice se encuentran r aristas. Contando las aristas mediante las caras y los vértices, vemos que

$$n \cdot C = 2 \cdot A \qquad [2]$$

porque cada arista pertenece a dos caras, y por lo tanto es contada dos veces en el producto $n.C$; por otra parte,

$$s.V = 2A \qquad [3]$$

puesto que cada arista tiene dos vértices. Luego de (1) obtenemos la ecuación

$$\frac{2A}{n} + \frac{2A}{r} - A = 2$$

o sea

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \qquad [4]$$

Sabemos, para empezar, que debe ser $n \geqq 3$ y $r \geqq 3$, puesto que un polígono debe tener como mínimo 3 lados, y como mínimo 3 aristas debe encontrarse en cada ángulo poliédrico. Pero n y r no pueden ser ambos mayores que tres, porque entonces el primer miembro de la ecuación (4) no podría exceder de ½, lo cual es imposible para cualquier valor positivo de A. Por lo tanto, veamos qué valores puede tomar r cuando $n = 3$, y qué valores puede tomar n cuando $r = 3$. La totalidad de los poliedros dados por estos dos casos da el número de poliedros regulares posibles.

Para $n = 3$, la ecuación (4) se transforma en

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

r puede así valer 3, 4, o bien 5, (6, o cualquier otro número mayor, debe excluirse por razones obvias, desde que $1/A$ es siempre positivo). Para estos valores de n y r tenemos $A = 6$, 12 o 30, correspondiente respectivamente al tetraedro, octaedro e icosaedro. Análogamente, para $r = 3$ obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$$

de la cual se sigue que $n = 3$, 4, ó 5, y $A = 6$, 12, ó 30, respectivamente. Estos valores corresponden respectivamente al tetraedro, cubo, y dodecaedro. Sustituyendo estos valores de n, r, y A en las ecuaciones (2) y (3), obtenemos los números de vértices y caras de los poliedros correspondintes.

§ 2. PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LAS FIGURAS

105.—Propiedades Topológicas.

Hemos demostrado que la fórmula de Euler vale para todo poliedro simple. Pero el campo de validez de esta fórmula se extiende mucho más allá de los poliedros de la geometría elemental,

con sus caras planas y sus aristas rectilíneas; La prueba dada podría aplicarse igualmente en un poliedro simple con caras y aristas curvas, o a cualquier subdivisión de la superficie de una esfera en regiones limitadas por arcos curvos. Por otra parte, si imaginamos la superficie del poliedro o de la esfera formada por una delgada lámina de goma, la fórmula de Euler valdría aún si la superficie se deformara doblando y estirando la goma hasta obtener otra forma cualquiera, siempre que la goma no se rompiera en el proceso. Y esto es porque la fórmula concierne sólamente al *número* de los vértices, aristas y caras, y no a las longitudes, áreas, rectitud, razones dobles, o cualquier concepto usual de la geometría proyectiva elemental.

Recalcamos que la geometría elemental opera con las magnitudes (longitud, ángulo y área) que no cambian en los movimientos rígidos, mientras la geometría proyectiva opera con los conceptos (punto, recta, incidencia y razón doble) que no cambian o son invariables con respecto al grupo más amplio de las transformaciones proyectivas. Pero los movimientos rígidos y las proyecciones son ambos casos muy especiales de lo que se llama *transformaciones topológicas*. Una transformación topológica de una figura geométrica A en otra A' está dada por cualquier correspondencia

$$p \longleftrightarrow p'$$

entre los puntos p de A y los puntos p' de A' que goza de las dos siguientes propiedades:

1. *La correspondencia es biunívoca.* Esto significa que a cada punto p de A corresponde justamente un punto p' de A', y recíprocamente.

2. *La correspondencia es continua en ambos sentidos.* Esto significa que si tomamos dos puntos cualesquiera p, q de A y movemos p de tal modo que la distancia entre él y q se aproxime a cero, la distancia entre los puntos correspondientes p', q' de A' también se aproxime a cero, y recíprocamente.

Toda propiedad de una figura geométrica A que vale también para cualquier figura en que A pueda transformarse por una transformación topológica, se llama una *propiedad topológica* de A, y la *Topología* es la rama de la geometría que opera solamente con las propiedades topológicas de la figura. Imaginemos una figura copiada "libremente" por un consciente pero inexperto dibujante que hace curvas las líneas rectas y altera ángulos, distancias y áreas; pues bien, aunque las propiedades métricas y proyectivas de la figura original habrán cambiado, sus propiedades topológicas permanecerán idénticas.

Los ejemplos más intuitivos de transformaciones topológicas generales son las *deformaciones*. Imaginemos una figura como una superficie esférica o un triángulo hecho de una delgada lámina de goma o dibujada sobre ella, que es luego estirada o torcida de cualquier manera sin rasgarla y sin hacer coincidir puntos distintos. (Hacer coincidir dos puntos distintos violaría la condición 1. Rasgar la lámina de goma violaría la condición 2, puesto que dos puntos de la figura original que tienden a coincidir provenientes de lados opuestos de la línea a lo largo de la cual se ha rasgado la lámina, no tenderán a coincidir en la figura rasgada). La posición final de la figura debe ser, pues, una imagen topológica de la original. Un triángulo puede ser deformado hasta obtenerse otro triángulo o hasta obtener un círculo (figs. 123 y 124), o una elipse, y por lo tanto estas figuras tienen exactamente las mismas pro-

Fig. 123. — Superficies topológicamente equivalentes.

Fig. 124. — Superficies no topológicamente equivalentes.

piedades topológicas; pero no se puede deformar un círculo para obtener un segmento rectilíneo, ni la superficie de una esfera para obtener la superficie interior de un tubo.

El concepto general de transformación topológica es más amplio que el concepto de deformación. Así, las dos curvas de la figura 134 son topológicamente equivalentes entre sí o con respecto a una circunferencia, puesto que ellas pueden cortarse, sin torcerse, y luego ser cosidas. Pero es imposible deformar una curva hasta obtener la otra o hasta obtener un círculo, sin antes cortar la curva.

Las propiedades topológicas de las figuras (tales como la dada por el teorema de Euler y otras que serán discutidas en esta sección) tienen gran interés e importancia en muchas investigaciones matemáticas. Ellas son en cierto sentido las más profundas y fundamentales de todas las propiedades geométricas, desde que persisten sometidas a los más drásticos cambios de forma.

106.—Conexión.

Como nuevo ejemplo de dos figuras que no son topológicamente equivalentes, podemos considerar los dominios planos de la figura 125. La primera de ellas consta de todos los puntos interiores a un círculo, mientras que la segunda consta de todos los puntos contenidos entre dos circunferencias concéntricas. Cualquier curva cerrada contenida en el dominio *a* puede deformarse continuamente

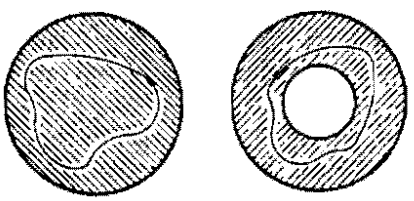


Fig. 125. — Conexión simple y doble.

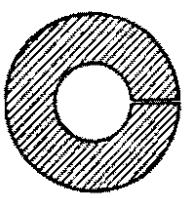


Fig. 126. — Corte en un dominio doblemente conexo para convertirlo en simplemente conexo.

o "contraerse" continuamente alrededor de un único punto *dentro del dominio*. Un dominio con esta propiedad se dice *simplemente conexo*. El dominio *b* no es simplemente conexo. Por ejemplo, una circunferencia concéntrica con las dos circunferencias bordes no puede deformarse hasta obtener un único punto interior al dominio, puesto que durante este proceso la curva debería pasar necesariamente sobre el centro de las circunferencias, que no es un punto del dominio. Un dominio que no es simplemente conexo se llama *múltiplemente conexo*. Si el dominio múltiplemente conexo *b* se corta a lo largo de un radio, como en la fig. 126, el dominio resultante es simplemente conexo.

Más generalmente, podemos construir dominios con dos, tres, o más "agujeros", como el dominio de la fig. 127. Para convertir este dominio en otro simplemente conexo, son necesarios dos cortes. Si para convertir un dominio múltiplemente conexo dado D en otro simplemente conexo se necesitan n-1 cortes que lo atraviesen y

que unan un borde con otro, entonces el dominio D se llama conexo de orden n. El orden de conexión de un dominio en el plano es un importante invariante topológico del dominio.

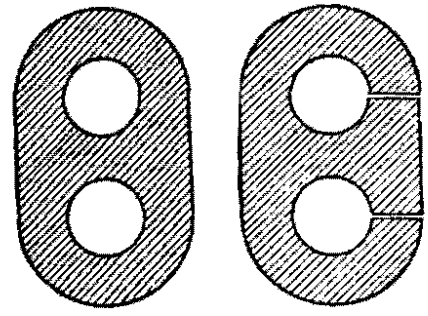


Fig. 127. — Reducción de un dominio triplemente conexo.

§ 3. OTROS EJEMPLOS DE TEOREMAS TOPOLOGICOS

107.—El teorema de la curva de Jordan.

Una curva cerrada y simple (o sea que no se corta a sí misma) está dibujada en el plano. ¿Qué propiedad de esta figura persiste aun cuando el plano se considera como lámina de goma que puede deformarse en cualquier sentido? La longitud de la curva y el área que ella encierra pueden cambiarse con una deformación. Pero hay una propiedad topológica de la configuración que es tan simple que parece trivial: *una curva simple y cerrada C de un plano divide a éste en dos dominios, uno interior y otro exterior.* Esto significa que dos puntos del plano se dividen en dos clases A, el *exterior* de la curva, y B, el *interior*— tales que cualquier par de puntos de la misma clase pueden unirse por medio de una curva que no corta a C, mientras que cualquier curva que une dos puntos pertenecientes a clases distintas corta a C. Esta aserción es evidentemente cierta para una circunferencia o una elipse, pero esta evidencia disminuye notablemente si se contempla una curva complicada como el intrincado polígono de la fig. 128.

Este teorema fué establecido por primera vez por Camille Jordan (1838-1922) en su famoso *Cours d'Analyse*, del cual toda una generación de matemáticos aprendió el concepto moderno de rigor en Análisis. Aunque parezca extraño, la prueba dada por Jordan no fué ni corta ni simple, y la sorpresa fué aun mayor cuando se vió que dicha demostración no era válida y que se necesitaba un considerable esfuerzo para llenar las lagunas de su razonamiento. La primera demostración rigurosa del teorema fué muy

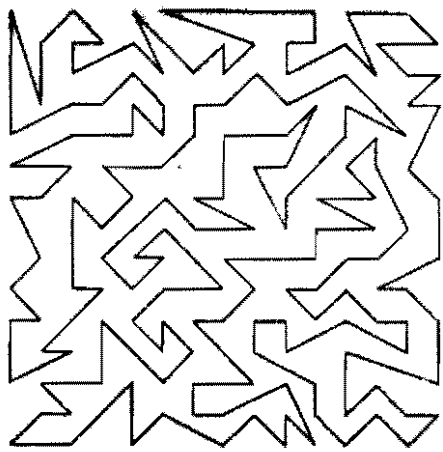


Fig. 128. — ¿Qué puntos del plano son interiores al polígono?

complicada y difícil de entender, aun para muchos matemáticos bien entrenados. Sólo recientemente se han encontrado pruebas relativamente simples. Una razón de la dificultad reside en la generalidad del concepto de "curva simple cerrada", que no está restringido al conjunto de polígonos o curvas "uniformes", sino que incluye a todas las curvas que son imágenes topológicas de una circunferencia. Por otra parte, muchos conceptos como "interior", "exterior", etc., que son tan claros para la intuición, deben precisarse para que una prueba rigurosa sea posible. Es de gran importancia teórica analizar tales conceptos en su mayor generalidad, y gran parte de la Topología moderna se consagra a ese fin. Pero no debe olvidarse nunca que en la gran mayoría de los casos que se presentan en el estudio de los fenómenos geométricos concretos está demás trabajar con conceptos cuya excesiva generalidad crea dificultades innecesarias. Por ejemplo el teorema de la curva de Jordan puede demostrarse fácilmente para curvas de conducta razonable.

ANEXO 4

DIENES, Z.P.; GOLDING, E. W. La geometría a través de las transformaciones. Tomo 1: Topología. Geometría Proyectiva y afín. Teide, Barcelona, 1972. Pp. 9 a 24.

PANORAMA DE LAS IDEAS GEOMÉTRICAS

1.1. *Sólidos, superficies, líneas y puntos*

El mundo que nos rodea está constituido por objetos. Estos objetos están mejor o peor definidos; por ejemplo, una mesa es un objeto perfectamente definido: sabemos dónde están las patas, dónde empieza y dónde termina. Por el contrario, un árbol no está bien definido. ¿Forman parte de él las raíces? Todo objeto bien definido puede estudiarse geométricamente. La manera de incorporarse los objetos al espacio constituye una rama de la geometría.

Consideremos un *sólido cualquiera*; éste ocupa una cierta parte del espacio o, en otros términos, existe una superficie que delimita el interior y el exterior del sólido. Una piedra, por ejemplo, posee una superficie. En el interior de esta superficie se encuentra la piedra y en el exterior el resto del mundo. Esta *superficie* es la frontera de la piedra.

Consideramos las *superficies* como *fronteras de los sólidos*. Podemos también considerar las fronteras de las superficies. Para estudiar una cierta parte de la superficie de la piedra, basta con trazar una frontera que encierre a esta parte. Esta frontera está constituida por una línea curva o por un conjunto de segmentos de rectas. Si siguiendo con el dedo esta frontera volvemos al punto de partida, diremos que esta frontera es cerrada.

Las fronteras de los sólidos son superficies, las de las superficies son líneas.

Existen superficies que no poseen frontera. La superficie de una esfera —una pelota, por ejemplo— no tiene frontera. Es posible desplazarse sobre la superficie de la pelota sin encontrar nunca un punto a partir del cual no podamos ir más lejos o estemos obligados a abandonar la superficie.

La propia superficie de la pelota es la frontera entre el interior y el exterior de la pelota, pero esta superficie no posee frontera. Sin embargo, una parte de la superficie de la pelota admite una frontera. Podemos, en efecto, trazar una circunferencia sobre la pelota definiendo así una región cerrada de esta

superficie. La frontera de esta región es la circunferencia aludida. En el exterior de esta circunferencia se encuentra otra región cerrada constituida por el resto de la pelota.

De la misma forma, podemos considerar partes de líneas; por ejemplo, una cuarta parte de la circunferencia anterior. La frontera de esta línea está formada por sus dos puntos extremos.

Si nos desplazamos a lo largo de la circunferencia, nunca la abandonaremos ni encontraremos ningún punto frontera, puesto que podemos dar vueltas a lo largo de la circunferencia indefinidamente.

Podemos empezar el estudio de la geometría a través del de los sólidos y sus superficies; después estudiar las líneas, fronteras de las superficies y, por último, los puntos, frontera de las líneas.

En resumen, los sólidos poseen fronteras que son superficies; las superficies poseen fronteras que son líneas; y las líneas poseen fronteras que son puntos.

La geometría es el estudio de las propiedades de los sólidos, de las superficies, de las líneas y de los puntos, así como las relaciones entre estas propiedades.

1.2. *Transformaciones, base del estudio de la geometría*

La geometría es el estudio de las propiedades del espacio. Nos desplazamos y hacemos cambiar la posición de los objetos en el espacio. Podemos modificar estos objetos estirándolos o doblándolos, por ejemplo. Las propiedades de las transformaciones constituyen una rama de la geometría.

Consideremos, para poner un ejemplo, nuestra sombra. Observamos así una transformación de nosotros mismos sobre el suelo. Una cierta forma corresponde a nuestra cabeza, otras a nuestros brazos, a nuestras piernas, etc. Naturalmente, resulta posible colocarse de tal forma que una pierna esconda a la otra. Esto demuestra que esta transformación depende del ángulo con el cual nos llegan los rayos del sol.

Existen transformaciones más sencillas. Desplazar un objeto, por ejemplo. Esta transformación modifica la posición del objeto. También podemos girar el objeto alrededor de un punto fijo. Tal transformación se llama rotación. También es posible girar el objeto alrededor de un eje fijo. Es el caso de una rueda que gira alrededor de su eje sin rodar. Todos los puntos de la rueda cambian de posición, salvo los del eje. Naturalmente, se pueden modificar las posiciones de los puntos del eje haciendo rodar la rueda sobre el suelo.

Existen transformaciones que conservan las distancias y los ángulos. Si cierto segmento mide 3 cm, el segmento correspondiente de la figura transformada mide también 3 cm; de igual forma, si dos rectas de la figura inicial forman un ángulo de 60°, las rectas correspondientes de la figura transformada forman un ángulo de 60°, etc. Todas las transformaciones que conservan las distancias y los ángulos se llaman *isometrías*. Es evidente

que la proyección de una sombra no es una isometría. Una sombra es más pequeña a mediodía que temprano por la mañana o tarde por la tarde. La distancia entre dos puntos de nuestro cuerpo no se conserva en nuestra sombra. De hecho, esta distancia varía en función del tiempo. De todo ello resulta que esta transformación no es una isometría.

Cada vez más, se considera que la geometría es el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes cuando «se hace alguna cosa». La «geometría de las sombras» puede definirse como el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes al aplicarles las proyecciones. La geometría euclidiana es el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes al aplicarles desplazamientos.

1.2.1. *Transformaciones inversas*

Existe un aspecto particularmente importante de las transformaciones; podemos «deshacer» algunas transformaciones, mientras que resulta difícil hacerlo con otras. Expongamos al sol, por ejemplo, una figura plana hecha de alambre. Podemos asociar a todo punto de la figura, un punto de la sombra. Inversamente, resulta posible encontrar un punto de la figura conociendo un punto de la sombra. Para determinar tal punto basta trazar una recta ficticia que pase por el punto dado en dirección al sol. Esta recta corta al alambre en un punto que será el punto que buscamos. Este resultado no será cierto si proyectamos la sombra de nuestro cuerpo sobre el suelo; existen muchos puntos de nuestro cuerpo que tienen la misma proyección. Si tomamos un punto de la sombra, no podemos encontrar el punto de partida. Esto se debe al hecho de que se proyecta una figura de tres dimensiones sobre una figura de dos dimensiones. Tenemos, pues, en este caso, un problema que puede calificarse de problema de «sentido único». No podemos plantear una transformación inversa.

En este libro no trataremos más que de transformaciones que se puedan efectuar en los dos sentidos. Si una transformación transforma una figura A en una figura B, existe siempre una transformación que transforma a la figura B en la figura A. Se dice que estas dos figuras son *inversas* una de otra. Si desplazamos, por ejemplo, un libro, la transformación inversa es la que hace volver al libro a su posición inicial. Del mismo modo, si hacemos girar una rueda alrededor de su eje un cierto ángulo, la transformación inversa consiste en hacer girar la rueda en el mismo ángulo pero en sentido inverso.

1.3. *Nociones de topología*

Antes de presentar en detalle las isometrías a los niños, creemos que deben haber estudiado transformaciones más generales que no conservan ni las distancias ni los ángulos. Tomemos, por

ejemplo, un aro de alambre. Doblemos el alambre sin romperlo. Puntos del alambre que estaban próximos antes de realizar tal transformación lo siguen estando después. Una transformación de este tipo se llama *continua*. No es posible dar, a este nivel, una definición de las transformaciones continuas, puesto que la noción de «proximidad» exige una definición precisa y hace intervenir el concepto de límite. Estas cuestiones serán estudiadas en otro libro. Existe, sin embargo, una transformación inversa de la transformación anterior: es la transformación que hace desaparecer el doblez y vuelve al aro a su forma inicial. En esta transformación inversa los puntos próximos se transforman en puntos próximos. De este modo la transformación es *bicontinua*. La *topología* es el estudio de las propiedades de las figuras invariantes al aplicarles transformaciones bicontinuas. Tales transformaciones se llaman transformaciones topológicas. Consideremos una esfera hueca, una pelota, por ejemplo; hagamos un hueco en esta pelota, sin hacer agujero. Esta transformación es una transformación topológica. ¿Cuáles son las propiedades invariantes en esta transformación? Se conserva el interior y el exterior. En efecto, es imposible pasar del interior de la pelota al exterior sin atravesar su superficie. Esta propiedad se conserva en la anterior transformación. De este modo, *interior* y *exterior* son propiedades topológicas. Por el contrario, si hacemos un orificio en la pelota ya no se conserva el interior, de hecho ya no existe ni interior ni exterior. Además, podemos, gracias al orificio, pasar del interior al exterior de la pelota. Pero hacer un orificio en una pelota no es una transformación continua. Puntos que antes estaban próximos ya no lo estarán, y ello, en particular para dos puntos a uno y otro lado del orificio. Por esta razón, «hacer orificios» no es una transformación continua y, por tanto, tampoco lo es topológica. No trataremos de tales transformaciones.

Pueden encontrarse ejemplos de transformaciones topológicas en las fichas de trabajo del capítulo siguiente; otras serán estudiadas con detalle en el capítulo 3, que trata de la topología.

1.4. *Nociones proyectivas y afines*

Para proyectar sombras utilizamos un foco luminoso puntual. La *geometría proyectiva* es el estudio de las propiedades de las figuras que, trazadas en un plano y proyectadas a partir de tal foco luminoso, permanecen invariantes.

Sabemos, por ejemplo, que si cortamos una rendija rectilínea en una cartulina y la iluminamos, la proyección de esta rendija es un segmento de recta. De igual modo, si iluminamos un objeto construido mediante un «meccano», la sombra de un segmento de recta es un segmento de recta. Si una línea A corta a otra línea B en un punto X, las sombras de las líneas A y B se cortan en un punto que es la sombra del punto X. De igual manera, si una recta R pasa por dos puntos A y B, la sombra de la recta R pasa por las sombras de los puntos A y B. Así, en geometría proyectiva, las rectas y las intersecciones son invariantes.

Otro invariante es el *orden*. Por ejemplo, señalemos sobre una recta tres puntos *A*, *B* y *C* en este orden. Comprobamos que la proyección del punto *B* se encuentra entre las proyecciones de los puntos *A* y *C*. Así, el orden de los puntos *A*, *B* y *C* se conserva en una proyección.

Por el contrario, el sentido (directo o retrógrado) puede no conservarse. Dados cuatro puntos *A*, *B*, *C* y *D* situados en una circunferencia sus proyecciones se encuentran sobre una determinada curva —proyección de la circunferencia— y se conserva el orden; según que miremos el plano de la circunferencia por debajo o por encima, los puntos *A*, *B*, *C* y *D* estarán en sentido directo o retrógrado y el sentido de los puntos proyectados dependerá de la posición del foco respecto al plano de la circunferencia. Así, el sentido no es una propiedad proyectiva.

El concepto de convexidad está entre la topología y la medida; es un concepto proyectivo. El concepto de convexidad hace intervenir el de segmento de recta. Si nos desplazamos a lo largo de una línea recta, conservamos una dirección constante; por el contrario, si nos desplazamos a lo largo de una curva, cambiamos de dirección. Los conceptos de direcciones y de líneas «rectas» no son topológicos; y lo mismo ocurre con la convexidad. Por el contrario, el concepto de línea recta es proyectivo; y lo mismo ocurre con los conceptos de interior y exterior. Un punto interior de una figura se proyecta según un punto interior de la figura proyectada. Así, los *interiores* son invariantes al aplicar una proyección. Además, la proyección de un segmento de recta que une dos puntos interiores de una figura es un segmento de recta que está en el interior de la figura proyectada. Resulta, pues, que la proyección de una figura convexa es convexa.

Se dice que una figura cerrada es *convexa* si todo segmento rectilíneo que une dos puntos de su frontera está, completamente, en el interior de la figura. Las propiedades de las figuras convexas y no convexas se estudiarán en las fichas de trabajo. El estudio de los desplazamientos a lo largo de la frontera de una figura convexa nos lleva, eventualmente, a la medida de los ángulos. Las circunferencias serán consideradas como fronteras de figuras convexas tales que, para todo desplazamiento a lo largo de estas fronteras, la relación del arco recorrido al ángulo es constante.

La transformación afín es un caso particular de transformación proyectiva.

Conforme alejamos un foco puntual, obtenemos una aproximación a la proyección que emplea al sol como foco. El sol está tan lejos que, en la práctica, sus rayos nos llegan paralelos. En tal proyección, las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas. Sin embargo, este resultado no es cierto cuando tomamos un foco puntual situado muy cerca de la figura; en efecto, en este caso, las rectas se deforman considerablemente. Recordemos, por otra parte, que los raíles del ferrocarril parecen juntarse, a pesar de que sabemos que son paralelos. El paralelismo no es un concepto proyectivo, es un concepto afín.

Otra propiedad que se conserva en la proyección paralela es la relación de dos segmentos situados sobre rectas paralelas. En efecto, si dos segmentos paralelos están en la relación 2, la relación de las longitudes de sus sombras sigue siendo 2. Podemos comprobar que no ocurre lo mismo si consideramos una proyección puntual, estando el foco suficientemente cerca de la figura como para que su sombra presente las mayores distorsiones. La relación no se conservará. Los conceptos de geometría proyectiva y afín están entre la topología y la geometría euclidiana. Si consideramos las proyecciones simples, nos encontramos ante casos particulares de transformaciones afines y proyectivas. Para tener un caso suficientemente general tendremos que admitir como posibles, la inversa [1] y la composición [2] (o combinación) de las proyecciones.

1.5. *Nociones de geometría euclidiana*

La geometría euclidiana es el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes ante un desplazamiento en el espacio, conservando las distancias y los ángulos de las figuras. Así, toda proposición relativa a las distancias y a los ángulos, es un concepto euclidiano. Los teoremas de igualdad son las piedras angulares de la mayor parte de las demostraciones clásicas de la geometría euclidiana. Numerosos teoremas de la geometría euclidiana pueden demostrarse sin utilizar el uso del concepto de distancia, sino el de relación de distancias. Estos teoremas pertenecen a la geometría proyectiva o afín. Volveremos sobre esta cuestión más adelante.

Es importante comprender perfectamente que la geometría euclidiana se basa en axiomas, que son relaciones entre rectas paralelas o ángulos. Los conceptos de ángulos alternos y de ángulos correspondientes están totalmente ligados a la geometría euclidiana. No hay ninguna razón para creer que estas relaciones siguen siendo ciertas cuando se hacen intervenir grandes distancias. Los griegos, con los instrumentos de que disponían, no podían medir más que pequeñas distancias. Pensaban que las estrellas y los planetas se desplazaban sobre una esfera, teniendo todos los cuerpos celestes la misma distancia respecto de la

[1] Significa que, no solamente la transformación que hace pasar del objeto a la sombra es proyectiva, sino que la transformación que «regenera» al objeto a partir de la sombra también lo es.

[2] Significa que, no solamente la transformación (de un objeto en su sombra) es proyectiva, sino que la sucesión de dos transformaciones cualesquiera de este tipo también lo es. Por ejemplo, podemos recortar la sombra 2 del objeto 1 en un cartón y volver a transformar esta figura 2 en una segunda sombra 3. Se debe, entonces, poder pasar de la figura 1 a la figura 3 mediante una transformación proyectiva.

tierra. Cuando se hacen intervenir distancias astronómicas, los teoremas euclidianos acerca de las rectas paralelas dejan de ser ciertos.

No se trata aquí de presentar una introducción a las geometrías no euclidianas, sino de poner de manifiesto que ciertos teoremas e ideas que hemos llamado topológicos, proyectivos o afines, son independientes de los conceptos euclidianos.

Resulta que ciertas relaciones seguirán siendo válidas para geometrías no euclidianas. Pero haremos hipótesis de tal forma que las relaciones que vayamos obteniendo serán válidas cada vez para un mayor número de casos. Naturalmente, cuantas más licencias nos permitamos para construir las figuras, menos se conservarán ante las transformaciones.

En las transformaciones topológicas en las cuales podemos torcer, doblar o incluso estirar las figuras, se conservarán pocas propiedades puesto que nos permitimos demasiadas cosas con esas figuras. En las transformaciones proyectivas, se permiten menos cosas y, de esta forma, se conservan más propiedades. Por ejemplo, las líneas rectas se conservan en una transformación proyectiva, mientras que no ocurre así, en general, en topología. Cuando, más adelante, nos restrinjamos a las nociones afines, alejaremos el punto foco de proyección muy lejos, de manera que los rayos luminosos a lo largo de los cuales proyectamos, se hacen, a nuestra escala, prácticamente paralelos. Haciendo esto, introducimos conceptos tales como la relación de dos segmentos sobre una misma recta y el concepto de paralelismo. No introduciremos los conceptos de ángulo y de distancia hasta que estudiemos la geometría euclidiana —es decir, cuando utilicemos transformaciones de un tipo especial, por ejemplo, coger una figura y colocarla en otro sitio.

Cuantas más cosas nos permitamos en el momento de la transformación encontraremos menos relaciones ciertas, mientras que si nos permitimos pocas cosas, tendremos más relaciones ciertas. Ésta es la razón por la cual la geometría euclidiana es la más rica de todas las geometrías, mientras que las relaciones topológicas son las más generales. Todo lo que es cierto en topología lo es en geometría proyectiva, afín y euclidiana y todo lo que es cierto en geometría afín lo es también en geometría euclidiana. Pero todo lo que sea cierto en geometría euclidiana no es necesariamente cierto en las otras geometrías; puede serlo o no serlo.

1.6. *Rotaciones, ángulos*

En la parte siguiente se introducen los conceptos de direcciones y ángulos, que son consecuencia del estudio de las fronteras convexas. Vamos a proponer diferentes maneras de medir ángulos y, en particular, introduciremos la medida de ángulos en radianes, mediante ejercicios prácticos realizados en el patio de

recreo. Para establecer la idea de medida en radianes, pedimos a un alumno que se ponga de pie en un punto fijo y después que gire lentamente sobre sí mismo quedándose en el mismo punto. Mientras lo hace, pediremos a otro alumno que dé la vuelta alrededor del primero con una tiza en la mano para ir marcando el camino recorrido. Si este niño ha descrito una verdadera (o casi verdadera) circunferencia, mediremos su radio con una cuerda. La longitud de la cuerda podrá, entonces, ser considerada como unidad de longitud, de forma que podamos medir las distancias recorridas por el segundo niño. Mientras que el segundo niño recorre una longitud igual a la longitud de la cuerda, el niño que está colocado en el centro gira un *radián*. Tales ejercicios no excluyen el empleo del grado, pero la experiencia muestra que los niños son mucho menos receptivos para el grado, que es una unidad de giro demasiado pequeña y, por tanto, más difícil de materializar. Prefieren el radián o el cuarto de vuelta (ángulo recto) como unidad. Pueden hablar ya de medio ángulo recto, de dos ángulos rectos, de dos ángulos rectos y medio, y así sucesivamente. Algunas veces preferirán tomar como unidad la vuelta completa y hablar de media vuelta, de un octavo de vuelta, etc. De todas formas, resulta necesario enseñar a los niños que un cuarto de vuelta se divide generalmente en 90 partes iguales y que un giro de 1/90 de ángulo recto representa un giro de un grado. Pero no es necesario obligarles a utilizar el grado si prefieren utilizar el radián. En esta parte introduciremos las rotaciones así como las composiciones de rotaciones. Los rotaciones tendrán lugar en el mismo plano y así la composición de rotaciones es conmutativa, es decir que la composición de dos rotaciones no depende del orden en el cual se efectúan éstas. Ya recordaremos que esta propiedad deja de ser cierta inmediatamente que introduzcamos las rotaciones de un sólido alrededor de ejes que pasen por ese sólido. Una determinada rotación alrededor de un eje, seguida de otra rotación alrededor de otro eje, no engendra una transformación equivalente a la que se obtendría invirtiendo el orden de las rotaciones, y ello incluso si los ejes de rotación son concurrentes.

Para convencerse de este hecho basta considerar dos cubos idénticos. Trazaremos sobre cada cara una flecha de color diferente, lo cual nos sirve para saber si la cara ha cambiado de sentido o no. Tomad uno de los cubos y hacedle sufrir una rotación de un cuarto de vuelta en sentido retrógrado alrededor de un eje vertical que pasa por su centro, y después otra rotación que lo aleje de vosotros, de un cuarto de vuelta alrededor de su centro. Si efectuáis estas operaciones en sentido inverso con el otro cubo, comprobando, por otra parte, que los dos estaban en la misma posición al principio, observaréis que ahora los cubos no tienen la misma posición. En las fichas de trabajo, presentamos diferentes figuras que, giradas un cierto ángulo, siguen ocupando la misma posición que al principio. Sobre determinadas figuras podremos realizar varias rotaciones diferentes, so-

bre otras, en cambio, el número de rotaciones será más pequeño. Esto nos llevará al estudio de las figuras regulares y, en particular, al estudio de los grupos engendrados por las rotaciones.

Cada parte terminará con algunos ejercicios de análisis, que tienen como fin hacer reflexionar a los niños sobre los conceptos construidos mentalmente. Algunos niños tienen tendencia a construir su propia teoría, lo cual nos obligará, para ellos, a diversificar los ejercicios. Otros, por el contrario, tras haber construido su propia teoría, serán capaces de analizarla. No nos proponemos forzar a todos los niños a hacer los ejercicios de análisis en bloque. Los hemos presentado aquí para dar ocasión a los niños con capacidad de análisis de desarrollar su sentido analítico. El profesor verá inmediatamente quiénes son capaces de tal análisis, los cuales irán, en algunos casos, más allá de lo que aquí pretendemos; otros, por el contrario, detestarán estos ejercicios. En tal caso *no se les debe forzar.*

1.7. *Estudio de las simetrías*

A lo largo del estudio de la simetría, consideraremos, a veces, el eje de simetría como un espejo en el cual veremos la imagen de la figura que queremos transformar. Si trazamos una figura cualquiera en un plano horizontal y colocamos verticalmente un espejo, veremos en él la imagen del dibujo que hemos hecho. Podemos también obtener esta imagen haciendo sufrir a la hoja de papel dos rotaciones sucesivas de un ángulo recto, manteniendo fijo el eje de simetría. Naturalmente, deberemos levantar el papel de la mesa, darle media vuelta, y volverlo a colocar sobre la mesa. Es evidente que la figura estará ahora al otro lado del papel, por lo cual aconsejamos el uso de papel muy fino o de papel de calco.

Las fichas de trabajo sobre la simetría empiezan por el estudio de las figuras que no poseen más que dos ejes de simetría; si no hay más que dos ejes de simetría, estos dos ejes deberán colocarse en ángulo recto. El rectángulo o el rombo son figuras de este tipo. Muchas otras poseen dos ejes de simetría y su estudio así como la búsqueda de sus ejes de simetría constituye un paso importante en el estudio del espacio. Estas fichas de trabajo llevarán a los niños a manejar y a construir figuras que posean muchos ejes de simetría, como el hexágono, que posee seis.

Veremos cómo dos espejos idénticos, colocados verticalmente frente a frente y pudiendo girar alrededor de un eje vertical, son una gran ayuda pedagógica. Si colocamos los dos espejos en ángulo recto y si trazamos una línea cualquiera en el ángulo de los dos espejos, veremos, no dos imágenes, sino tres, puesto que cada espejo se refleja en el otro. Así, la imagen del espejo reflejará la imagen dada. Si el lector no ve bien cómo ocurre, le aconsejamos tomar dos espejos, colocarlos en ángulo recto

verticalmente y observar en el interior de cada uno de ellos la imagen del otro espejo. Puesto que podemos variar el ángulo de los dos espejos, podemos engendrar figuras que posean varios ejes de simetría, sin encontrar las dificultades de construcción exacta de un motivo repetido varias veces. Es evidente que tal procedimiento no puede, en ningún caso, sustituir a las operaciones que proponemos en las fichas de trabajo, sin embargo ello constituirá una poderosa ayuda para la comprensión del fenómeno que representa la simetría.

Hacia el final de esta serie de fichas de trabajo sobre la simetría, abordamos las relaciones entre las simetrías y las rotaciones; volveremos a utilizar los conceptos sobre grupos para llevar a buen término este estudio. Será útil, a este nivel, hacer uso de los conceptos sobre grupos incluso si los alumnos no los han estudiado todavía. Sería deseable llevar estos dos estudios conjuntamente, de forma que los niños puedan efectuar las transformaciones sobre las formas y los colores mediante grupos y después utilizar estas estructuras para obtener las relaciones entre las rotaciones y las simetrías y viceversa. Esta personalización de las relaciones abstractas de los grupos hará todavía más atractiva ésta última a los ojos de los niños.

1.8. *Las traslaciones*

Esta última parte de las fichas de trabajo estará exclusivamente dedicada al estudio de las propiedades elementales de las traslaciones. Una traslación será simplemente un movimiento de una figura tal que un punto cualquier de ésta se desplace siempre en la misma dirección. La figura se verá simplemente «empujada» en una dirección, sin darse la vuelta. Ello nos llevará a las propiedades del rectángulo y del paralelogramo. Haremos algunas observaciones en cuanto a las relaciones existentes entre las traslaciones y las rotaciones y las simetrías.

1.9. *Nociones acerca de los sistemas de coordenadas*

Nosotros podemos determinar la posición de un punto en un plano mediante una cuadrícula. Seguramente, este hecho es conocido de los niños que viven en las grandes ciudades en las que se utilizan las calles y las avenidas como medio de comunicación. Estas calles o estas avenidas, que forman entre ellas ángulo recto, las distinguimos mediante números. Por ejemplo, imaginad que vivís en la esquina de la séptima avenida con la décima calle; sería posible dirigirse a ese lugar contando el número de calles y avenidas, como hacemos cuando vamos en coche. Los niños que no vivan en poblaciones o lugares tan bien dispuestos desde el punto de vista matemático, pueden, sin embargo, familiarse con estas ideas estudiando el plano de una ciudad. Podremos hacer, aprovechando la ocasión, ejercicios a base

de pedir a los niños que encuentren lugares o calles del plano de la ciudad donde viven. Las cuadrículas de los planos tienen como referencias, en general, letras y números; tendremos, por ejemplo, *A*.3 ó *F*.5, etc. La mayor parte de las ciudades poco importantes no dispondrán más que de un sencillo entramado de calles.

Las coordenadas son pares ordenados de números que determinan una posición, por ejemplo (2,3) puede indicar que debemos recorrer dos kilómetros hacia el este y tres kilómetros hacia el norte. Naturalmente, el resultado no será el mismo que tres kilómetros hacia el este y dos kilómetros hacia el norte. El par de números que damos para determinar la posición sobre la cuadrícula, debe estar ordenado, es decir, que se debe indicar cuál es el número que está en primer lugar. Este aspecto es importante puesto que si cambiamos el orden, no obtenemos el mismo punto de la cuadrícula, salvo en el caso, naturalmente, de que los dos números sean iguales (3,3). Desarrollaremos estas ideas paralelamente al estudio de los vectores y de los números enteros.

1.10. *Los grupos*

El estudio de las transformaciones geométricas está estrechamente ligado al estudio de las estructuras conocidas bajo el nombre de grupo. Por ejemplo, consideremos los giros de amplitud un ángulo recto; no podemos realizar más que cuatro cosas: un giro de un ángulo recto en sentido directo, un giro de un ángulo recto en sentido retrógrado, media vuelta y una vuelta completa. Si consideramos ahora combinaciones cualesquiera de estos cuatro movimientos, obtenemos movimientos equivalentes que son siempre uno de los cuatro movimientos de partida. Si, partiendo de una posición cualquiera, realizamos un giro de un ángulo recto en sentido retrógrado y después damos media vuelta, llegamos a la misma posición que si hubiéramos efectuado un giro de un ángulo recto en sentido directo. Media vuelta seguida de otra media vuelta será equivalente a una vuelta completa, de la misma forma que una vuelta completa seguida de un cuarto de vuelta en sentido directo será equivalente a un cuarto de vuelta en sentido directo, y así sucesivamente.

Estos cuatro movimientos que acabamos de construir a partir de los giros de amplitud un ángulo recto constituyen un «conjunto» cerrado. Dos cualesquiera de esos cuatro movimientos combinados dan como resultado siempre uno de los cuatro.

Si ahora, una vez situados en una cierta posición, tratamos de volver a la posición de partida, tendremos que utilizar un movimiento que, también, forma parte de los cuatro que hemos elegido. Por ejemplo, cada vez que realizamos un giro de un ángulo inicial, debemos realizar un giro de un ángulo recto, pero esta vez en sentido retrógrado. Cuando efectuamos media vuelta, tenemos que efectuar otra media vuelta para volver a la posición inicial y si damos una vuelta completa, daremos otra vuelta completa para volver a la posición inicial. Vemos, pues,

que siempre podemos «destruir» un movimiento mediante otro movimiento convenientemente elegido. Tales movimientos se llaman *inversos*.

Existe también, entre estos cuatro movimientos, uno que no hace cambiar la posición: la vuelta completa. Así, si damos una vuelta completa, la posición final es la misma que la posición de partida y tal transformación no tiene ningún efecto. Si combinamos la vuelta completa con uno cualquiera de los otros movimientos, el resultado es el mismo que si no hubiésemos realizado más que el segundo movimiento. A tal movimiento se le llama *elemento neutro*.

Las estructuras matemáticas que obedecen a estas propiedades además de a la propiedad de asociatividad, se les llama grupos. Las estructuras geométricas más sencillas se expresan fácilmente en función de los grupos. Ésta es la razón por la cual es de desear que se estudien conjuntamente los grupos y las transformaciones geométricas. Esto no se hace únicamente para facilitar la comprensión de las transformaciones geométricas sino para dar a los niños una visión más general de las cosas que estudian. Las transformaciones geométricas que ellos estudian forman parte de un terreno de estudio mucho más extenso, lo que constituye la razón por la cual los niños se animarán a pensar en términos más abstractos. Podemos, por ejemplo, considerar un juego en el que los elementos sean las palabras. Tras familiarizarse con estos juegos y después de haber visto su relación con la geometría o con las transformaciones de formas y colores, los niños considerarán el problema desde un punto de vista más general. Se darán cuenta de que las transformaciones geométricas no son más que un caso particular.

MODULO 3

UNIDAD 1

UNIDAD 1

El desarollo evolutivo de la concepción del espacio en el niño

Para esta unidad creemos conveniente proponer los siguientes objetivos:

Que los alumnos:

1.- Interpreten las conductas infantiles en la interacción entre el niño y el espacio, para lo cual es necesario:

* conocer los aspectos evolutivos en la construcción de las relaciones espaciales.

* conocer los invariantes que caracterizan a la topología, a la geometría proyectiva y a la geometría métrica.

2.- Organicen actividades exploratorias para caracterizar la concepción del espacio en niños de diversas edades del ámbito escolar.

3.- Seleccionen actividades para favorecer a los niños en la ampliación de sus esquemas espaciales a nuevos contextos o los integren a otros esquemas construyendo estructuras cada vez más complejas.

Hemos previsto los siguientes contenidos:

1.- La geometría a partir de las transformaciones: invariantes topológicos, proyectivos, métricos.

2.- Las etapas del desarrollo evolutivo de la concepción del espacio en el niño.

3.- Aprendizaje de las relaciones espaciales: categorías de la orientación en el espacio; su forma de aprehensión.

Para el abordaje de las nociones involucradas en esta unidad hemos previsto, como en unidades anteriores, una secuencia metodológica de cuatro momentos:

- **Presentación del tema**
- **Construcción del marco teórico**
- **Interacción con la escuela primaria**
- **Ajuste del marco teórico**

Es claro que el proceso consiste en una red de instancias en las que, después de la presentación del tema, caben reiteraciones o avances o retrocesos en el orden de los otros tres momentos. Por eso en el desarrollo de la unidad seguiremos el orden de los contenidos.

La presentación del tema puede organizarse a partir de una pregunta:

¿Cómo se desarrolla la concepción del espacio en los niños?

Veamos algunas sugerencias para el tratamiento de los contenidos de la unidad.

1. La Geometría a partir de las transformaciones

La construcción del marco teórico, supone transitar por un camino puramente geométrico antes de ingresar por la vía psicológica a la descrip-

ción del desarrollo evolutivo. Un acceso a las nociones geométricas puede intentarse mediante experiencias como las que se proponen en las guías que siguen:

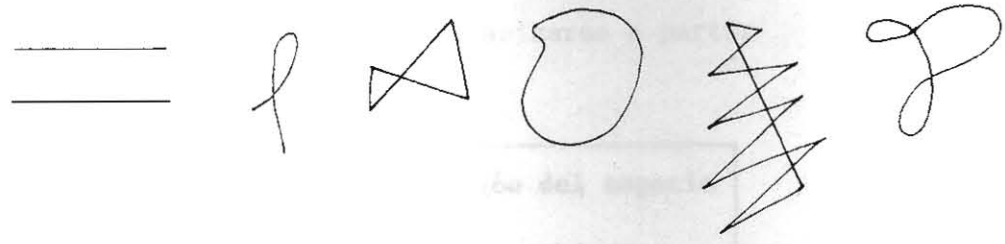
A GUIA SOBRE TRANSFORMACIONES TOPOLOGICAS

Para realizar la experiencia que sigue hace falta disponer de un trozo de superficie de goma (un globo, por ejemplo) u otro material extensible. No necesita ser muy grande.

Nos vamos a permitir deformarla, sin rasgar ni perforar, y vamos a observar y registrar cómo se transforman figuras que hayamos dibujado en ella. Hablaremos de TRANSFORMACIONES TOPOLOGICAS.

o 1. Organizados los alumnos en parejas, y disponiendo cada una de una superficie extensible,

a) dibujar sobre ella líneas rectas, curvas; con nudos, sin ellos; abiertas y cerradas;



b) sobre algunas líneas marcar los puntos A, B, C, en ese orden; si una línea es cerrada marcar un punto interior I y otro exterior E;

c) mientras una de las personas tuerce, estira, infla o hace cualquier deformación que no rompa la superficie, la otra, registra lo mejor posible en una hoja las nuevas figuras que da lugar cada una de las anteriores;

d) ahora se trata de indicar cuáles de las propiedades que si-

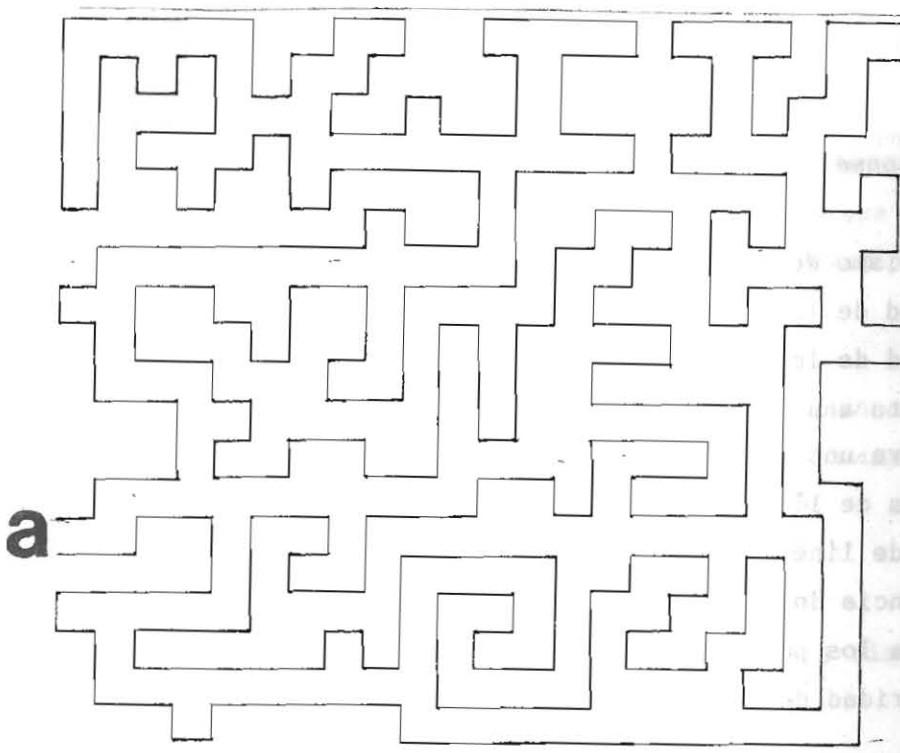
guen se conservan siempre en la transformación.

. paralelismo de segmentos	SI - NO
. longitud de los segmentos	SI - NO
. amplitud de los ángulos	SI - NO
. ser recta una línea	SI - NO
. ser curva una línea	SI - NO
. abertura de líneas	SI - NO
. cierre de líneas	SI - NO
. pertenencia de puntos a líneas	SI - NO
. orden de los puntos sobre una línea	SI - NO
. interioridad de un punto respecto de una línea cerrada	SI - NO
. exterioridad de un punto respecto de una línea cerrada	SI - NO
. número de nudos	SI - NO

---

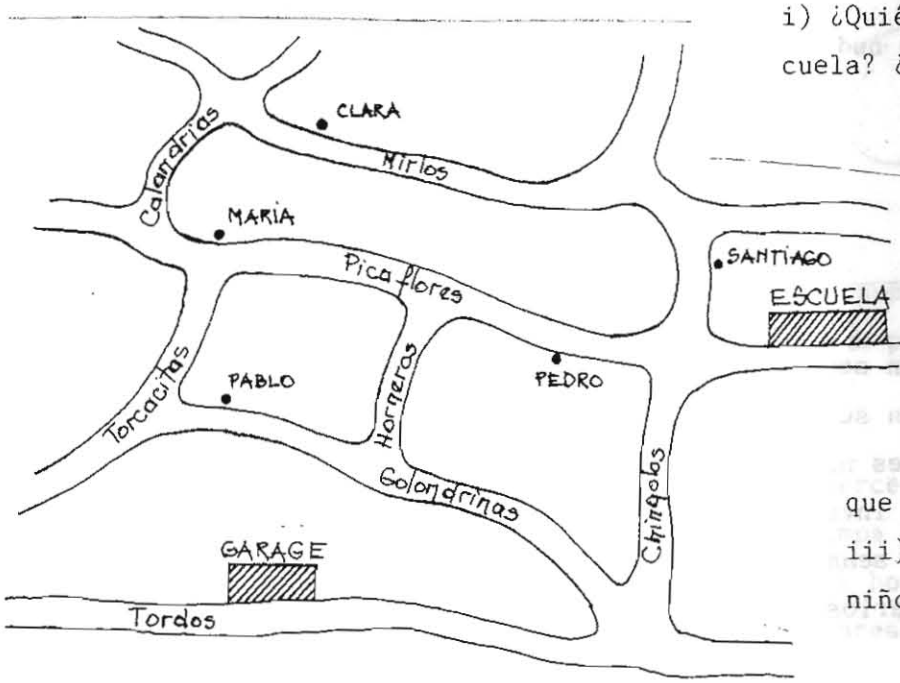
2. A continuación se proponen algunos problemas se trata de decidir cuáles pierden su significado a través de una transformación topológica y cuáles no. Responder sólo las preguntas que correspondan a propiedades invariantes; tachar las que correspondan a propiedades que no lo sean.
Conviene pensarlos individualmente.

2.1 Laberintos



¿Hay algún camino que permita ir de A a B? ¿Hay **más de uno**? En tal caso ¿cuál es el más corto?

2.2 Recorridos sin repetición



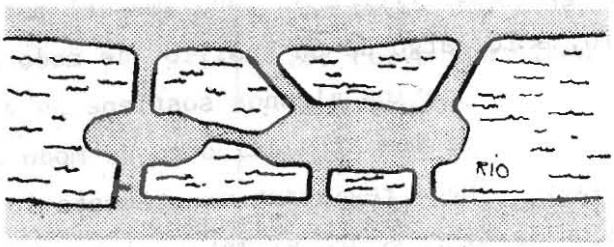
i) ¿Quién vive más cerca de la escuela? ¿Y más lejos?

ii) ¿Puede el chofer del ómnibus partir del garage de la calle Tordos, recoger a los cinco niños y llevarlos a la escuela **sin pasar dos veces** por la misma calle? ¿Hay más de un recorrido que cumpla estas condiciones?

iii) Ubicar en el plano, un niño más -luego dos, tres, etc.- y repetir el ejercicio.

2.3 Los puentes de Königsberg

La ciudad alemana de Königsberg ofrece a sus habitantes un paseo clásico a lo largo de un río y dos islas que él contiene y que están unidas entre sí y a las riberas mediante puentes.



1. Observar la figura ¿Cuántos puentes hay?
2. ¿Qué puente tiene la mayor inclinación respecto de la orilla?
3. ¿Hay forma de ir caminando y pasar por todos los puentes, sin omitir ninguno y sin pasar dos veces por el mismo?

2.4 Rayuela

Dibujar en el piso del patio una rayuela. ¿Cuántas regiones tiene? ¿Cómo son las fronteras de cada región: de trazos rectos o de trazos curvos? Enunciar las reglas del juego. Si son propiedades invariantes en una transformación topológica, jugarlo.

o 3. Organizarse en grupos con el objeto de comparar respuestas y llegar a acuerdos sobre lo realizado en 1 y 2.
En cada grupo escribir un breve resumen de las observaciones más importantes acerca del trabajo con esta guía.

B GUIA SOBRE TRANSFORMACIONES PROYECTIVAS

Las que siguen son experiencias que requieren la colaboración de dos alumnos.

- 1. Elegir una zona de la escuela que ofrezca un panorama del patio o de un flanco del edificio, a lo largo de un pasillo, de modo que sea lo más profunda posible. Uno de los alumnos sostiene un vidrio o una placa de acrílico delante de los ojos del otro de modo que éste vea el panorama elegido y pueda registrar exactamente lo que ve calcando con un marcador de fibra sobre el material transparente. El ojo de quien calca emite su visión hacia cada punto del panorama -diremos que lo proyecta- y su mano marca el punto sobre el vidrio en el lugar preciso en que su visión es interceptada por el vidrio.

  ¿Cómo es la figura que se obtiene sobre el vidrio, comparando su forma y sus dimensiones con las de los objetos reales?

- 2. Recortar figuras geométricas en cartulina negra y proyectar su sombra sobre una superficie clara (*) usando una linterna. Dar diferentes inclinaciones a la figura con relación a la superficie en la que se recoge la sombra. Durante estas transformaciones, tratar de registrar lo más fielmente posible la forma y tamaño de las sombras para compararlas con la figura real.
  Repetir la experiencia con la luz del sol.

(*) Para mayor comodidad, se puede pegar las figuras sobre un vidrio, o acrílico o placa radiográfica lavada.

o 3. A partir de las imágenes obtenidas en 1 y 2, indicar qué propiedades de las que siguen se conservan **siempre** en una proyección.

. longitud de segmentos	SI - NO
. paralelismo de segmentos	SI - NO
. perpendicularidad de segmentos	SI - NO
. amplitud de los ángulos	SI - NO
. ser recta una línea	SI - NO
. ser curva una línea	SI - NO
. abertura de líneas	SI - NO
. cierre de líneas	SI - NO
. pertenencia de puntos a líneas	SI - NO
. orden de los puntos sobre una línea	SI - NO
. interioridad de puntos respecto de líneas cerradas	SI - NO
. exterioridad de puntos respecto de líneas cerradas	SI - NO
. número de nudos	SI - NO

o 4. Buscar reproducciones de obras de pintores del Renacimiento donde se ponga en evidencia su cuidado por respetar las reglas de la perspectiva, o sea una transformación proyectiva.
Buscar reproducciones de obras de pintores que no las respeten.

o 5. En los textos de geometría hay figuras que representan cuerpos. Buscar los que haya en la biblioteca escolar y organizarse por grupos para intentar construir los modelos reales que corresponden a las figuras dibujadas.

o 6. Comparar las respuestas con las de los otros compañeros. Escribir -entre todos los integrantes del grupo- un breve resumen de las

observaciones que consideren más importantes acerca del trabajo con esta guía.

C GUIA SOBRE TRANSFORMACIONES METRICAS

Vamos a realizar experiencias con retazos de telas estampadas o con hojas de papel para regalo. En general el diseño presenta regularidades que vale la pena analizar.

o 1. Tomando distintos materiales, conviene que cada alumno responda con relación a cada material, las preguntas que siguen:

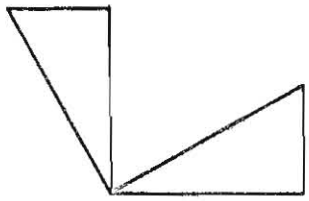
a) ¿se puede aislar una parte de la tela o del papel que sirva como molde para reconstruir todo el diseño? Si es así calcarla y pensar cómo trasladarla para obtener cada repetición del motivo en el material. Repetir con otros materiales.

b) representar gráficamente (sin números ni letras, por el momento) los movimientos de traslación que llevan desde el diseño calcado hacia cada una de las repeticiones sobre el material; comparar los signos usados con los de otros compañeros; acordar entre todos cuál representa mejor la situación.

o 2.

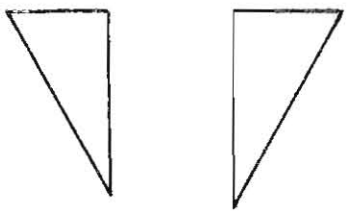
a) Dibujar dentro del triángulo dado la inicial del propio nombre. Repetir el motivo que resulta, haciendo la traslación que tiene la dirección, el sentido y la amplitud de la flecha dibujada a continuación:

(Podemos llamar VECTOR a la flecha)



b) ¿Crees que se puede hacer una sola traslación para lograr la siguiente repetición del motivo (complétalo con tu inicial)? Si no se puede ¿qué movimiento habría que hacer para lograrlo? Describirlo del mejor modo posible.

Si hace falta, usa papel de calcar y un alfiler, para materializar el movimiento.



c) Repetir b) con la figura que sigue. Si hace falta, puedes ayudarte con papel de calcar o con un espejo.

3. Observar cada una de las letras que siguen y responder a las dos preguntas que se formulan sobre ellas

AEIOULFHMNT

a) ¿Hay alguna posición de un espejo que haga reflejar la letra sobre sí misma? Registre todas las que encuentre, dibujando la traza del espejo (hablaremos de cada traza como de **eje de simetría**)

b) ¿Hay alguna **rotación** que haga superponer la letra sobre sí misma? Registre todas las que encuentre, indicando el centro y la amplitud de cada rotación.

o 4. En el motivo original de cada papel o tela examinado en el ejercicio número 1 es posible hacer similares preguntas. Registrar las respuestas.

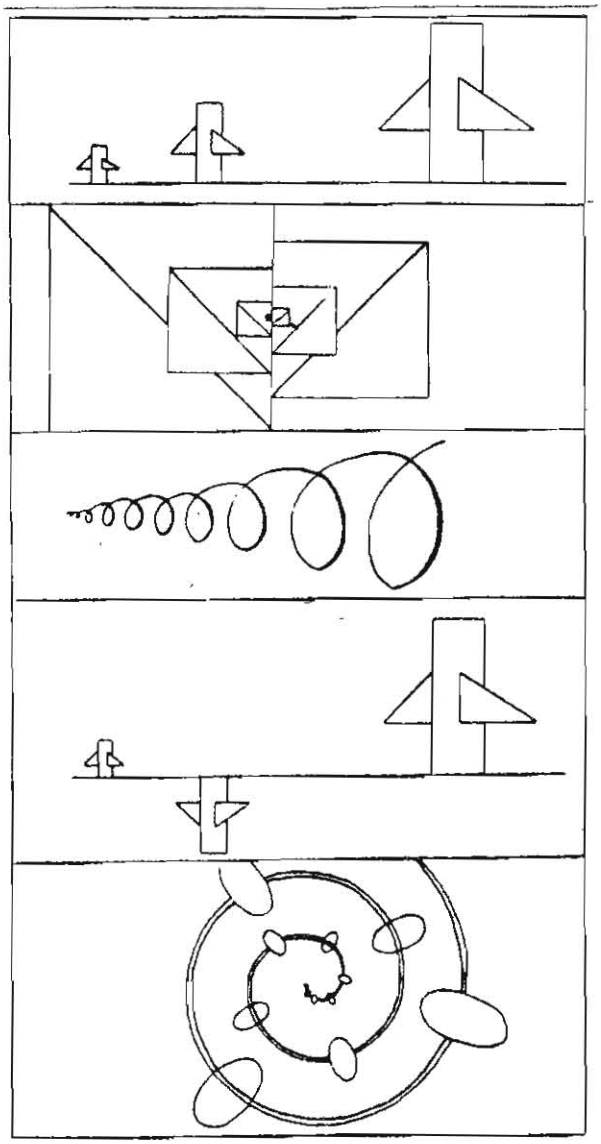
¿Cuál es el molde de menor superficie que permite la reproducción de todo el motivo usando rotaciones y simetrías además de traslaciones?

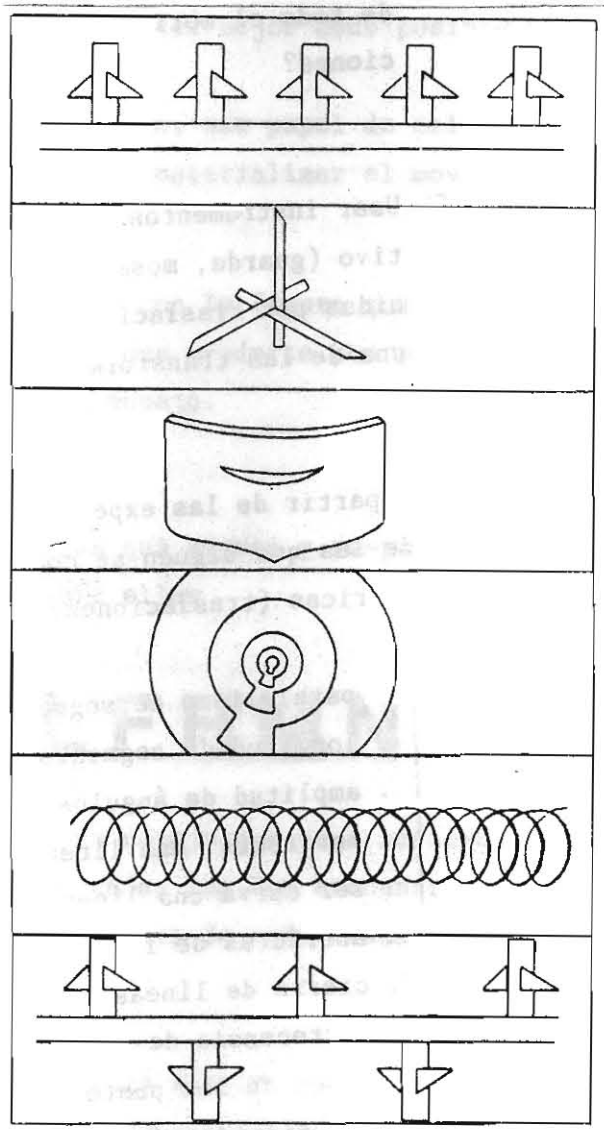
o 5. Usar instrumentos geométricos para construir un elemento decorativo (guarda, mosaico, móvil) donde aparezcan regularidades obtenidas por traslaciones, rotaciones y simetrías. Describir cada una de las transformaciones usadas.

o 6. A partir de las experiencias anteriores, indicar qué propiedades de las que siguen se conservan **siempre** en las transformaciones métricas (traslaciones, rotaciones y simetrías)

. paralelismo de segmentos	SI - NO
. longitud de segmentos	SI - NO
. amplitud de ángulos	SI - NO
. ser recta una línea	SI - NO
. ser curva una línea	SI - NO
. aberturas de líneas	SI - NO
. cierre de líneas	SI - NO
. pertenencia de puntos a líneas	SI - NO
. orden de los puntos sobre una línea	SI - NO
. interioridad de puntos respecto de líneas cerradas	SI - NO
. exterioridad de puntos respecto de líneas cerradas	SI - NO
. número de nudos	SI - NO

o 7. ¿Cuáles de los ornamentos que siguen se obtienen a partir de un motivo elemental y usando **solo** transformaciones métricas (rotaciones, simetrías, traslaciones)? Describirlos del modo más completo posible (*)





(*) Los gráficos provienen de WOLF, K. L. - KUHN, D. **Forma y simetría**, EUDEBA. Buenos Aires, 1969.

Después de haber trabajado sobre las guías, los alumnos estarán en condiciones de completar con SI o NO donde corresponde en el cuadro que define los invariantes en cada clase de transformaciones.

Los lugares en blanco, permiten incluir propiedades por iniciativa de los alumnos.

¿ es un INVARIANTE?	TRANSFORMACIONES		
	TOPOLOGICAS	PROYECTIVAS	METRICAS
paralelismo de segmentos			
longitud de segmentos			
amplitud de ángulos			
ser recta una línea			
ser curva una línea			
abertura de una línea			
cierre de una línea			
pertenencia de un punto a una línea			
orden de los puntos sobre una línea			
interioridad de un punto respecto de una línea cerrada			
exterioridad de un punto respecto de una línea cerrada			
número de nudos			

Es interesante destacar que observando el cuadro los alumnos pueden llegar a responder:

. ¿Cuál es la relación de inclusión entre las distintas clases de invariantes?

¿ Y entre la topología, la geometría proyectiva y la geometría métrica?

. Es evidente que cuanto más amplias son las transformaciones es menor el número de invariantes. ¿Puede explicitar mejor esta afirmación?

2. Las etapas del desarrollo evolutivo de la concepción del espacio en el niño

Los seres vivos se desarrollan en el **espacio** y en el **tiempo**. Desde muy pequeño el niño se interesa por el espacio: el bebé, a la vez que recorre con sus miembros y con su vista el espacio que lo rodea, va progresando en la coordinación de la vista con la prensión.

Cuando comienza a caminar, su exploración es aún más activa y más amplia, aprende a distinguir lo que está cerca de lo que está lejos, etc. Mediante el tacto y la vista reconoce el contorno de los objetos. En pocas palabras:

a lo largo de los dos primeros años de vida
el niño construye lo que Piaget denomina
el **espacio senso-motor**

Esta construcción infantil es muy distinta de la concepción del espacio que poseen los adultos, está todavía ligada a los sentidos del sujeto, a su actividad perceptiva y a su actividad matriz.

A medida que el niño crece, el desarrollo de sus formas de pensamiento le permite una elaboración más completa de los datos que capta: determina más precisamente la forma de los objetos, los contornos lineales de las figuras y las relaciones entre la posición de los objetos. Las fronteras de

separación (superficies, si se trata de objetos y líneas, si se trata de figuras) se encuentran entre las primeras nociones espaciales que los niños adquieren y ellas contribuyen tanto a la construcción de la imagen de los objetos como a la construcción de la imagen del espacio, en la que intervienen los objetos como referencias (por ejemplo: estar **en** una habitación o **fuera** de ella; en una vereda o en la de enfrente, etc.). Cuando las referencias se van vinculando entre sí, se organizan **sistemas de referencia**.

Las investigaciones de la escuela de Ginebra -ciudad donde se encuentra el centro fundado por Piaget- muestran que los niños pequeños distinguen líneas abiertas de líneas cerradas y que para ellos resultan parecidos entre sí los contornos accidentados, como los de las estrellas o triángulos, que a su vez distinguen claramente de las líneas regulares como círculos o elipses.

En cuanto a las superficies también distinguen las cerradas o las abiertas (por ejemplo: la superficie de una lata de conserva cerrada de la pared de un tubo que delimita "un agujero".

El carácter irreversible del **pensamiento preoperatorio** se manifiesta en la imposibilidad de imaginar transformaciones sin necesidad de realizarlas o de evocar el estado inicial después de haber realizado una transformación. Este tipo de pensamiento se va modificando lentamente. Alrededor de los 5-6 años los niños están en general, en condiciones de distinguir líneas rectas de líneas curvas aunque todavía no puedan identificar al camino recto entre dos puntos como el menor de los recorridos posibles. Esta dificultad está relacionada con la imposibilidad de establecer relaciones en las que intervengan las perspectivas, las orientaciones y las distancias.

En este sentido, los trabajos de Piaget e Inhelder -retomados luego por otros investigadores- resultan significativos aportes a la comprensión de los procesos infantiles.

Es necesario que los futuros maestros indaguen las concepciones infantiles sobre el espacio. Parece adecuado que entrevisten a niños pequeños y realicen experiencias similares a las que se investigaron en la escuela de Ginebra.

Exploración de aspectos evolutivos de la construcción del espacio

Transcribimos a continuación algunas técnicas para tomar las pruebas a las que nos acabamos de referir (1).

Aunque se trata de pruebas individuales, conviene que mientras un practicante entreviste a un niño, otros dos o tres observen y registren lo más minuciosamente posible lo que allí sucede para luego analizar los comportamientos y tratar de inferir las posibles causas de las distintas respuestas que se recojan.

Estas primeras observaciones de los practicantes, sin preconceptos ni prejuicios, pueden luego contrastarse con la sistematización que dio lugar a que los investigadores caracterizaran **niveles o estadios** en la psicogénesis de estas nociones.

Veamos la descripción del material usado en cada técnica, las consignas dirigidas a los niños y la interpretación de sus respuestas en el marco de la teoría.

(1) BATTRO, A. **El pensamiento de Jean Piaget**, Emece Editores, 1969.

I. Reconocimiento de algunos rasgos topológicos de las figuras

I. Experiencias de Estereognosia

Se trata de estudiar el proceso que lleva a la intuición de formas espaciales cuando se palpa un objeto que se encuentra fuera del alcance de la mirada (detrás de una pantalla).

Los objetos son de dos clases: familiares (una llave, un peine, etc.) o abstractos (círculos, triángulos y figuras complejas recortadas sobre cartón). Se procede con dos métodos: a) el niño debe reconocer la figura que ha explorado táctilmente, entre un conjunto de dibujos, b) se le pide que dibuje él mismo lo que ha tocado.

Se observan comportamientos de distintos niveles:

I.(2-4 a.) IA: sólo se reconocen los objetos familiares, IB: se comienza a distinguir luego las "figuras cerradas" de las "abiertas" pero no se diferencia entre un círculo y un triángulos pues ambas figuras tienen la misma propiedad de "ser cerradas".

II.(4-6 a.): Es un estado intermedio que lleva al reconocimiento y dibujo de las figuras geométricas simples.

III.(más de 6 a.): No hay confusión con respecto a las figuras complejas.

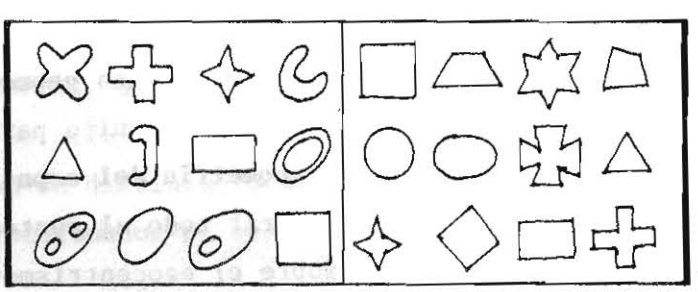
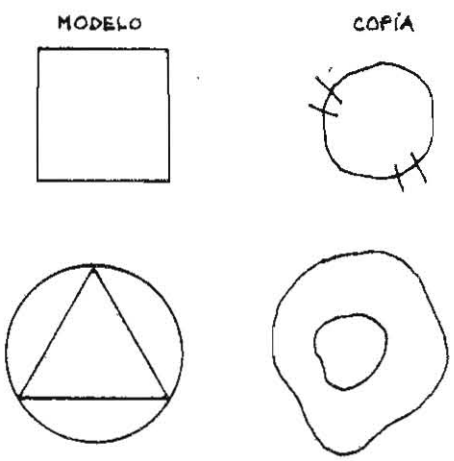


Fig. 1

Fig. 1: Formas utilizadas en el test de reconocimiento estereognóstico.

. Dibujos de formas geométricas.

Si se presentan figuras geométricas sencillas y se estudia la evolución del dibujo infantil, no es difícil reencontrar el comportamiento que se ha puesto en evidencia en la experiencia anterior. A pesar de que los caracteres euclídeos de una "buena forma" (cuadrado, círculo, triángulo, etc.) se discriminan correctamente en el nivel perceptivo, en el plano representativo priman, en cambio, las relaciones topológicas de "figura cerrada", "vecindad", "separación", etc. En el estadio IB que es el más interesante, observamos dibujos como los siguientes, que son suficientes para confirmar lo que Piaget señala sobre el privilegio de las relaciones topológicas en la representación primitiva:



II. *Elaboración de la recta proyectiva*

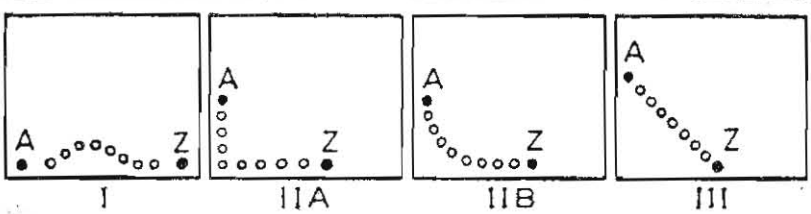
Mientras que el estudio del desarrollo de las nociones más elementales de "vecindad" y "separación" nos ha llevado a una **geometría del objeto**, es imprescindible analizar los pasos efectuados por el niño para coordinar esos objetos entre sí y establecer una verdadera **geometría del espacio**. La coordinación más sencilla y primitiva consiste en referir todo al **punto de vista propio**, como se deduce de los análisis anteriores sobre el egocentrismo infantil. De esta manera, se constituye un "falso absoluto" que deforma el espacio en función de la única perspectiva posible: la del sujeto. Todo proceso que conduzca

a una **descentración**, llevará, entonces, a una coordinación de los distintos puntos de vista.

I. La elaboración de la recta proyectiva

Existe una conducta sencilla para enfilar objetos sobre una recta, y es simplemente "apuntar" desde uno de los extremos, cuidando que ninguno de los objetos intercalados se desvíen de la línea visual. Pero el niño menor de 7 años tiene grandes dificultades para lograr esta construcción elemental s la línea que se le pide que construya interfiere perceptivamente con alguna referencia estable.

La técnica consiste en alinear un conjunto de objetos (que simbolizan postes de teléfono) entre dos mojones fijos (A,Z) sobre una mesa. Los resultados son los siguientes:



III. Proyección de las sombras

Se intercalan sólidos (cono, 2 conos unidos por el vértice, disco de cartón, un rectángulo de cartón) entre una lámpara y una pared blanca vertical. Se pide al sijeto que dibuje la sombra que proyectarán los sólidos -presentados en distintas posiciones- o bien que elija entre una serie de dibujos ya confeccionados el que le parece conveniente.

Los resultados de las observaciones en los primeros estadios, indican que el niño imagina que la sombra no hace más que dar un doble del ob-

jeto; un lápiz colocado horizontalmente , en lugar de proyectar sólo su sección (un pequeño círculo) es reproducido íntegramente. Se lo dibuja, además, en dirección oblicua, como un compromiso intuitivo entre el cambio de posición del objeto, y el punto de vista del sujeto. En el estadio III, en cambio, prevén con facilidad las transformaciones efectuadas o simplemente insinuadas, en los objetos más simples. Para **los conos**, sin embargo, es preciso llegar al estadio IV (**11 años**), debido a la operación de inclusión de secciones pequeñas en las secciones mayores y enmascaradas por esa misma razón.

IV. La coordinación de las perspectivas

Es de prever que la dificultad será mayor en caso de que el niño deba representarse los posibles puntos de vista *ajenos* sobre un mismo objeto. La experiencia sugerida por Piaget es verdaderamente interesante.

Sobre un cartón rectangular se presentan, en modelo y relieve, tres "montañas" pintadas de diferentes colores y con marcas distintivas (una cruz, una casa y nieve en la cumbre) cada una de ellas. Se toma una muñeca pequeña y se procede de la siguiente manera: a) Se le da al niño 3 cartones recortados con las mismas características y colores que el modelo de las 3 montañas. Se coloca la muñeca sucesivamente frente a cada uno de los bordes del modelo y se le pide que tome una "fotografía" de lo que ella ve desde cada uno de los cuatro lados. b) En lugar de exigirle al niño la reconstrucción de la "fotografía" se le ofrece, para que elija, una serie de dibujos tomados desde los cuatro puntos de vista. c) En lugar de desplazar la muñeca, se elige un dibujo y se pide que coloque la muñeca en el lugar desde el cual ha visto esa "fotografía".

Sin entrar en los detalles muy instructivos de esta experiencia, podemos señalar las complicaciones que surgen de la superposición de las figuras en profundidad y de derecha a izquierda. Los niños menores refieren todos

los movimientos de la muñeca a sus propios cuerpos y mantienen inexorablemente las relaciones visibles desde sus puntos de vista personales. Las tres montañas constituyen un todo fijo e inmutable. Sólo en el estadio IIIB (9-10 años), cuando espontáneamente los niños dibujan con perspectiva, existe una respuesta correcta a las tres cuestiones.

V. *Las coordenadas rectangulares*

Para determinar la evolución de la horizontal y de la vertical como líneas privilegiadas de referencia espacial, se utiliza la siguiente técnica (y sus modificaciones):

a) Se hace dibujar el nivel de agua de una jarra, y luego se pide que se prevea el nivel antes de inclinar el recipiente.

b) Se le pide al niño que coloque "bien derechos" una serie de elementos (postes) sobre la falda de una montaña de arena. Luego se le hace dibujar la montaña y los postes (casa, árboles, etc)

Hasta el estadio IIB, el niño coloca o dibuja los objetos perpendicularmente al borde de la colina, y cree que el nivel del agua sigue las inclinaciones sugeridas por el frasco. **Sólo a partir del estadio III se generan una vertical y horizontal estables.**

El análisis de las respuestas correctas y de los errores permite agruparlas en clases y lleva a los investigadores a afirmar que:

- los niños tienen en cuenta desde muy pronto algunas propiedades topológicas, lo que les permite distinguir: * las figuras llenas de las agujereadas; * las figuras abiertas de las figuras cerradas; * las figuras rectilíneas de las cur

vilíneas.

- las relaciones puramente métricas (dimensiones, inclinaciones, abertura de los ángulos, número de elementos, etc.) recién intervienen más adelante.

Estas observaciones conducen a los autores a concluir la primacía evolutiva de las relaciones topológicas sobre las relaciones proyectivas y métricas ya que el proceder de los niños del nivel pre-operatorio -aproximadamente hasta los 7 u 8 años- se apoya únicamente en las relaciones de

. orden
. vecindad o proximidad
. continuidad
. separación;

estas relaciones no son suficientes para conferir a un objeto el estatus de objeto métrico, es decir, de objetos cuyos puntos están a distancia invariante unos de otros. Tampoco permiten situar un objeto con cierta precisión dentro de un marco de referencia.

Otras experiencias realizadas bajo la dirección de Piaget muestran que, en general, desde los 4 ó 5 años, el espacio proyectivo y el espacio métrico comienzan a perfilarse sobre el espacio topológico, aunque las representaciones evidencian todavía la permanencia de los aspectos intuitivos sobre las operaciones y del egocentrismo sobre la pluralidad de puntos de vista.

> Así por ejemplo, un niño que puede distinguir con seguridad su izquierda de su derecha es incapaz de indicar correctamente la izquierda y la derecha de otra persona situada frente suyo y esto se debe a que su pensamiento -aún en un estadio intuitivo- centra su atención en los "aspectos parciales y sucesivos de una misma situación de conjunto sin poder dedicarse aún a las actividades de integración y compensación necesarias para la objetivi

dad y la reversibilidad operatoria"(1).

En cuanto a la evaluación de distancias, los niños de este nivel realizan comparaciones globales, aproximativas, de tipo cualitativo -"más chica", "más lejos"- pues no están aún en condiciones de aplicar el esquema numérico característico de la evaluación cuantitativa; vale decir, de medir una distancia, determinando cuántas veces la longitud de una objeto tomada como unidad, está contenida en esa distancia.

(1) LARENDAU, M. y PINARD, A. Les premières notions spatiales de l'enfant, Delachaux et Niestlé, 1968, p. 162.

3. Aprendizaje de las nociones espaciales

La construcción del marco teórico, en lo que se relaciona con aprender a situarse y a situar objetos en el espacio, puede comenzar por la lectura del fragmento de HANNOUN, H. **El niño conquista el medio** que figura como ANEXO II, de la presentación de este documento de trabajo.

A continuación es necesario implementar medios de interacción con niños de la escuela primaria que le permitan al futuro maestro la consolidación de su concepción teórica a través de su experiencia práctica.

■ *Se puede organizar un juego con "prendas" (Antón-pirulero, por ejemplo) en el que la penalización consista en ejecutar la acción indicada en una tarjeta. Esto permite que el alumno-maestro redacte esas tarjetas con acciones que le permitan explorar alguna categoría del espacio en niños de distintas edades. Si se trata de la lateralidad, puede pedir acciones del tipo "tocar el ojo izquierdo con un dedo de la mano derecha" u otras similares. En tal caso, el repertorio de acciones puede abarcar todas las variantes de esta categoría del espacio:*

- *lateralidad en el propio esquema corporal*
- *lateralidad del que está enfrente de uno*
- *lateralidad de objetos que tienen adelante y atrás*
- *lateralidad de un objeto respecto de otro, etc.*

Lo importante es que se organice una serie de actividades -por ejemplo, según el modelo de una micro-experiencia- para que cada alumno-maestro pueda explorar de una manera consistente las reacciones de los niños frente a las propuestas.

Del análisis de otras categorías del espacio, resultan experiencias análogas para conocer el grado de centración o de sincretismo con que responde cada niño.

Finalmente, es necesario realizar prácticas en el aula -
-; para ello, proponemos algunos ejemplos y creemos que más que su implementación automática hace falta un análisis previo en el sentido de dar respuesta para cada actividad particular a:

Es posible que el resultado de estas reflexiones determine modificaciones o búsqueda de actividades mejor adaptadas a la situación particular de los alumnos de cada escuela. En todos los casos, no debemos perder de vista el objetivo pedagógico, las características del grupo escolar, tanto en lo cognitivo como en la interacción social, y la provisión de los elementos necesarios para la realización de las tareas.

ALGUNOS EJEMPLOS

Los alumnos se organizan en el patio por parejas: uno detrás del otro, mirando en la misma dirección; el de atrás va dando órdenes del tipo:

. hacer un giro (o medio giro o un cuarto de giro) a la derecha (o a la izquierda)

. avanzar (número) pasos

el de adelante evoluciona según las órdenes que escucha.

Después de un rato, repiten invirtiendo los roles.

También puede repetirse con los niños enfrentados.

Conviene que el alumno que inventa la serie de órdenes, las lleve anotadas, con el objeto de disponer de un medio para controlar y validar la ejecución.

Los niños se mueven libremente en el patio y al escuchar una señal se detienen. El maestro pide a cada niño que nombre

"el más cercano a su derecha"
" uno que esté lejos, por delante"
" uno que esté más lejos de él que..."
" el que está a la izquierda de..." etc.

(Importa activar el mayor número de categorías del espacio)

Hacer, con los niños en fila india, un recorrido por los límites del aula, o del patio, o del edificio de la escuela, o de la cuadra...

Al finalizar, pedir un dibujo de la forma contorneada o del camino recorrido en cada caso. Exibir los dibujos y comparar los. Ubicar objetos o accidentes en cada recorrido.

¿Qué camino recorre cada uno para ir de su casa a la escuela? ¿Qué sitios notables recuerda haber visto?

Pedir descripción y dibujo. Compararlos por la forma y las distancias. Ubicar lugares en cada dibujo.

Organizar los niños en círculo alrededor de un modelo construido con dos o tres objetos de forma sencilla: caja, pelota, vaso, botella...

Cada niño dispone de una placa de acrílico o de vidrio que, puesta delante de los ojos a distancia conveniente (mejor, si está apoyada o si los niños se ayudan mutuamente a sostener una placa mientras el otro trabaja) sirva para "calcar" lo más exactamente posible el modelo, usando un marcador de felpa.

Comparar cada dibujo con el modelo. Observar formas, longitudes, paralelismo, etc.

Pedir que cada niño imagine y dibuje en una hoja lo que cree que vio el que está enfrente. Comparar este dibujo con el "calco" del de enfrente.

Pedir que imaginen cómo lo vería una mosca que volara sobre el modelo, que lo dibujen y que comparen.

Los que siguen son ejemplos que provienen de la obra citada de H. HANNOUN.

ACTIVIDADES POSIBLES	OBJETIVOS PEDAGOGICOS
Para empezar es necesario trazar en el piso del patio de recreo una especie de pasillo, cuya forma geométrica podrá variar de un juego a otro (línea quebrada, curva, círculo, cuadrado, rombo, etc.) Los jugadores de los dos equipos se ubican en los dos extremos del pasillo, si éste es abierto, y unos frente a otros, si el pasillo tiene forma cerrada (círculo, cuadrado, etc.) Cada equipo se halla en posesión de una pelota. A una señal, dos jugadores -uno por cada equipo- corren en sentido encontrado por el pasillo empujando la pelota con el pie únicamente. Si sale, el jugador debe hacerla entrar por el mismo lugar y únicamente con el pie. Cada jugador debe llevar su pelota al otro extremo del pasillo. Gana el equipo cuyos jugadores sean los primeros en terminar correctamente el recorrido.	Experiencia de un itinerario. Análisis del espacio.
Preparación del terreno. En el patio de recreo se trazan dos grandes círculos de aproximadamente 10 cm de diámetro (se aprovechará la ocasión para enseñar cómo esto se hace con una tiza y un hilo de 5 cm de largo). Sobre estos círculos se marcan las referencias del reloj, insistiendo para mayor facilidad, en el punto correspondiente a las 12. Se enfrentan dos equipos. Estos se dividen a su vez en dos partes desiguales: el grupo menos numeroso representa en minutero; el más numeroso el horario.	Estructuración del espacio. Estructuración del tiempo. Conocimiento de la hora.

ACTIVIDADES POSIBLES	OBJETIVOS PEDAGOGICOS
Dos alumnos representan, uno el ratón ebrio; el otro el gato. Los demás forman un círculo en cuyo centro se coloca el ratón. A la señal del dirigente, el ratón corre "como borracho", es decir pasando ya delante, ya detrás de los niños que forman el círculo. El gato que, a una señal, entra en el círculo, persigue al ratón y trata de atraparlo, pasando siempre exactamente por los mismos lugares que él. Si el gato se equivoca de camino, gana el ratón. Si el gato lo toca, gana él. Se puede perfeccionar el juego, estableciendo de antemano que el gato debe tocar al ratón, por ejemplo, antes de que éste haya recorrido 3 veces el círculo.	Análisis del espacio Nociones de: adelante, atrás, a la izquierda de, a la derecha de, lateralización.
La clase se divide en dos equipos. Uno de ellos forma un círculo; los niños tomados de la mano; los brazos levantados por encima de la cabeza. Este grupo constituye la trampa de conejos. Los niños que la componen se ponen de acuerdo determinando un número cualquiera. Los niños del **otro** grupo atraviesan el círculo que constituye "la trampa". Son los conejos. Los niños-trampa cuentan en voz alta desde cero hasta el número convenido. En llegando a éste, bajan los brazos, y todos los "conejos" que en este momento se hallan dentro del círculo quedan "atrapados". El juego vuelve a comenzar hasta que todos los conejos estén atrapados. Es-	Apreciación de distancias Análisis del espacio

ACTIVIDADES POSIBLES	OBJETIVOS PEDAGOGICOS
tá claro que los conejos quieren cruzar la trampa rápidamente (pues no conocen el número que da la señal de cierre), y sobre todo por los lugares de menor longitud, es decir evitando el diámetro del círculo.	
Se designa a un alumno para desempeñar el papel de gato, otro de ratón(1) El área del juego queda trazada por el círculo formado por los demás alumnos. A una señal, el gato se abalanza contra el ratón dentro del círculo. Debe atraparlo, a menos que, durante la persecusión, un tercer alumno (el "socorro"), llamado en su ayuda por el ratón, cruce la línea imaginaria que une al gato con el ratón. En este caso, el gato debe perseguir al "socorro" que se convierte en ratón. El juego termina cuando el ratón fue atrapado. (1)El juego admite la variante de que el gato mismo elija al primer ratón.	Estructuración del espacio Reconocimiento de una estructura imaginaria en el espacio
En el patio de recreo, se traza un cuadrado de 2,50 m de lado aproximadamente. Un alumno, el buitre, se halla en el interior y defiende su jaula. Los otros están alrededor de la jaula (de la cual el buitre no puede salir) y lo provocan entrando de vez en cuando, pero corriendo su propio riesgo, pues si el buitre los toca quedan "muertos" y eliminados del juego. El juego puede seguir hasta que el buitre haya capturado 3 ó 4 "presas" (número variable). Después se cambia de buitre.	Análisis del espacio Nociones de: al interior al exterior

ACTIVIDADES POSIBLES	OBJETIVOS PEDAGOGICOS
Los dos equipos se ubican cada uno en derredor de su esfera. Un niño pregunta:"¿Qué hora es?". El que dirige -u otro niño- responde: "Las once y veinte" (por ejemplo). Los alumnos de cada equipo corren rápidamente para marcar la hora indicada; cada "manecilla" se alinea desde el centro de la esfera hasta el punto indicado. Gana el equipo que sea primero en colocarse correctamente.	Situación de sí mismo con relación a un punto de referencia objetivo en el espacio.

CONCLUSION

Los elementos ofrecidos hasta aquí intentan dar apoyo a la construcción del marco teórico y a la interacción con la escuela primaria. Se han de complementar con búsqueda de materiales al alcance de los alumnos en las bibliotecas locales, en particular las de las escuelas primarias, con el objeto de confrontar los puntos de vista que ellos exhiben y el propio enfoque acerca del aprendizaje y la enseñanza. De igual modo, las observaciones en las aulas intentan promover reflexiones sobre la práctica pedagógica que iluminen los aspectos teóricos sobre el desarrollo de la construcción de relaciones espaciales en los niños.

Finalmente, reiteramos que la evaluación ha de tener en cuenta los criterios que cada docente haya acordado previamente con su grupo de alumnos, apuntará tanto a lo individual como a lo grupal, e incluirá instancias de autoevaluación que estimulen la introspección y el desarrollo del juicio crítico de cada alumno acerca de su propio aprendizaje.

En la elaboración de este documento de trabajo intervinieron los siguientes profesores:

Especialistas en el área Matemática:
Norma Sanguineti de Saggese
Lucrecia Iglesias

Diseño y Procesamiento Didáctico:
Adriana Haurie (Cs. de la Educación)

Dibujos y Armado:
Julio César Oropel