

2011  
376.14  
1



18623  
Ministerio de Cultura y Educación

Consejo Nacional de Educación

**Educación  
para la  
Reconstrucción**

28  
457

**CONSEJO NACIONAL DE EDUCACION**

*Presidente:* Prof. ALFREDO NATALIO FERNANDEZ  
*Vicepresidente:* Prof. ESTHER ABELLEYRA DE FRANCHI  
*Vocal:* Prof. ESTER TESLER DE CORTI  
*Vocal:* Dra. ROSA GLEZER  
*Vocal:* Prof. HERIBERTO AURELIO BARGIELA  
*Vocal:* Dr. HUGO TORIJA  
*Secretario General:* Prof. ANGEL GOMEZ  
*Prosecretaria:* Prof. MARTHA MOLINUEVO  
*Superv. Gral. Pedag.:* Prof. CRISTINA ELVIRA FRITZSCHE

018623
RIG 4011
371.14
iB 1

El Consejo Nacional de Educación se complace en hacer llegar a sus docentes el presente trabajo.

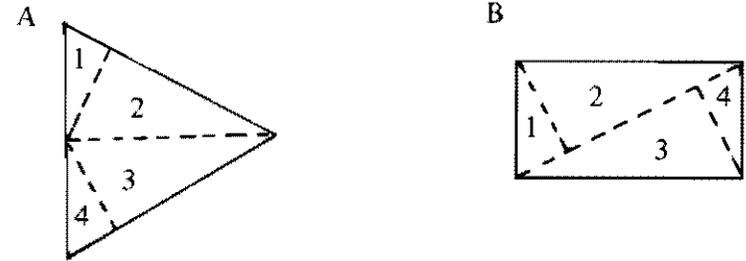
En esta segunda parte de la publicación de Geometría, se completan los conocimientos básicos de la materia que todo docente debe poseer en su formación profesional para desempeñarse en el nivel primario.

Aunque ya se manifestó en la primera parte, se reitera en ésta que el mismo está dirigido, por su nivel, a los maestros y no a los alumnos.

También hallarán los maestros en este trabajo una variada ejercitación que les permitirá una evaluación luego de la lectura de cada capítulo, encontrando en las últimas hojas las respuestas a los ejercicios propuestos.

## I. – SUPERFICIE

### 1. – FIGURAS EQUICOMPUESTAS:



La figura A puede separarse en los triángulos 1, 2, 3, 4.

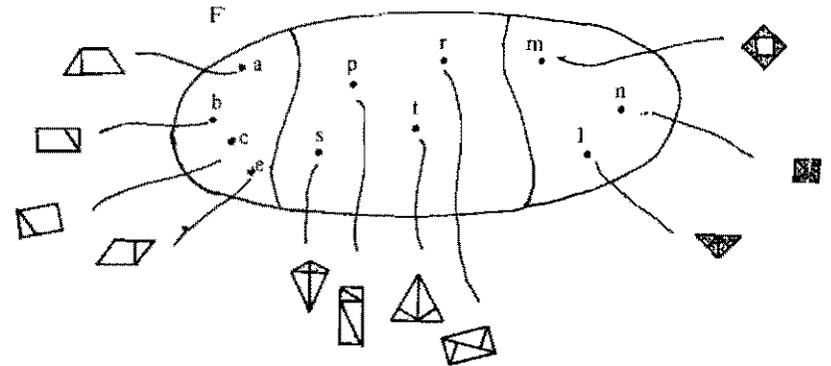
Con la unión de estos triángulos puede formarse un rectángulo B.

*A y B son figuras equicompuestas* porque resultan de la unión del mismo número de polígonos respectivamente congruentes, sin puntos interiores comunes.

### 2. – RELACION DE EQUIVALENCIA: SUPERFICIE

$R = \dots$  "es equicompuesta con"  $\dots$

es una relación que clasifica los elementos de un conjunto F de figuras:



En  $F$  se produce una partición.  
 Cada subconjunto de la partición es una clase de equivalencia que define una superficie.  
 Las figuras que pertenecen a una misma clase son equivalentes en cuanto a su superficie.

Las figuras equicompuestas, llamadas también equivalentes, tienen la misma superficie.

En una clase de equivalencia, si se conoce el valor de la superficie de una figura, se conoce también el de la superficie de todos los demás polígonos de la misma.

### 3. - COMPARACION INTUITIVA DE SUPERFICIE DE FIGURAS:

Dadas las figuras A y B:

3.1. - Si  $A \cong B$



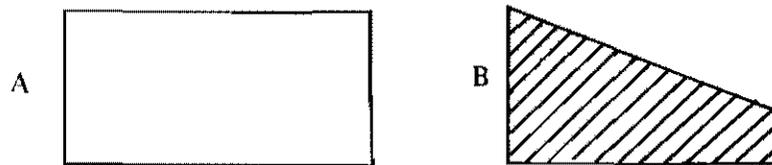
Se pueden descomponer en el mismo número de polígonos respectivamente congruentes.  
 Son figuras equivalentes.

Se indica:  $A \cong B$   
 luego:  $\text{Sup. } A = \text{Sup. } B$

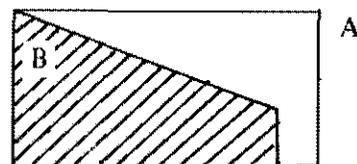
Las figuras congruentes tienen la misma superficie.

3.2. - Si  $A \not\cong B$  pueden presentarse entre otros, los siguientes casos:

a)



Para comparar la superficie de A con la superficie de B, se puede calcar B y superponer sobre A. En este caso la figura A queda separada en dos partes: la cubierta por B y la que no está cubierta por B. Resulta B congruente con una parte propia de A.

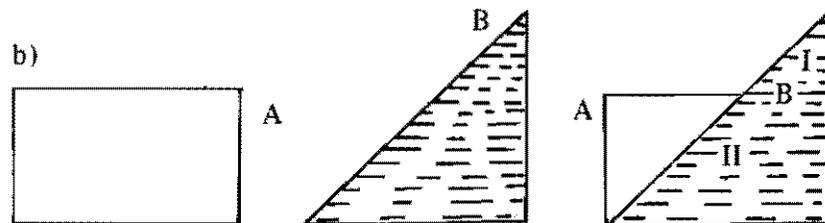


Se dice:

Sup. de A > Sup. de B  
 o bien:

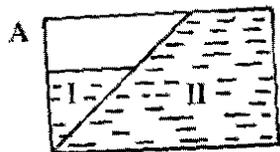
Sup. de B < Sup. de A

b)



Si se superponen las figuras A y B, ninguna de ellas contiene totalmente a la otra.

Se corta la parte sobrante de la figura B y se adapta a la figura A.



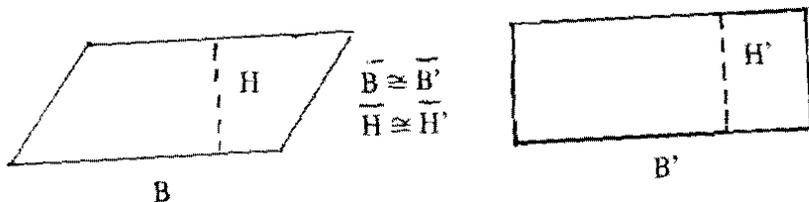
Se repite la situación del caso anterior:

Sup. A > Sup. B  
Sup. B < Sup. A

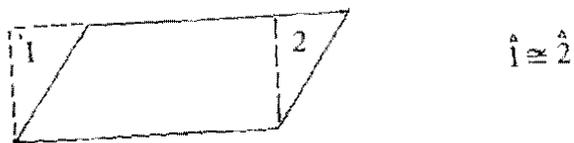
4. - CONDICIONES PARA QUE SE CUMPLA LA EQUIVALENCIA ENTRE:

4.1. - Dos paralelogramos:

Dados dos paralelogramos de bases y alturas respectivamente congruentes:



al superponer uno sobre otro se observa que:

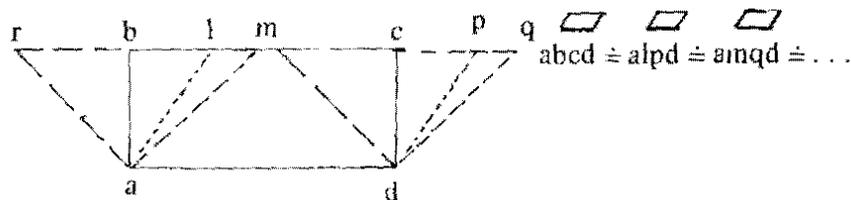


paralelogramo (B, H) y paralelogramo (B', H') son figuras equicompuestas.

Por lo tanto:

paralel. (B, H) ≅ paralel. (B', H')

Dos paralelogramos son equivalentes si sus bases y alturas son respectivamente congruentes.

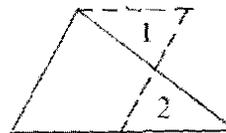


4.2. - Un triángulo y un paralelogramo:

Dados un triángulo y un paralelogramo de alturas congruentes y tal que la base del paralelogramo sea congruente con la mitad de la base del triángulo:



se puede superponer al triángulo un paralelogramo equivalente al dado, de base y altura respectivamente congruentes a B' y H'.



Se observa: 1 ≅ 2

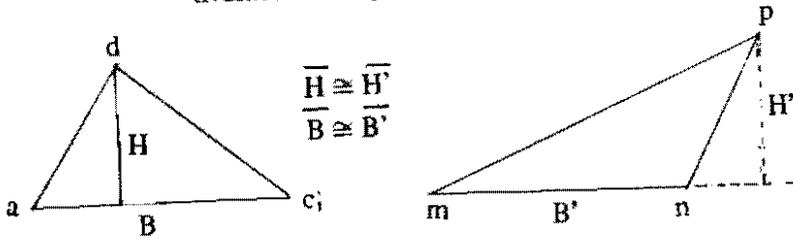
triáng. (B, H) y paralel. (B', H') son figuras equicompuestas.

Por lo tanto:

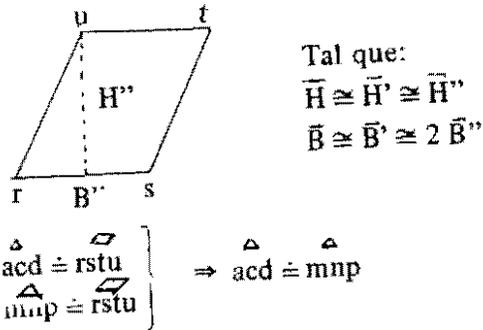
triáng. (B, H) ≅ paralel. (B', H')

Un triángulo y un paralelogramo de alturas congruentes son equivalentes si la base del paralelogramo es congruente con la mitad de la base del triángulo.

4.3. - Dos triángulos:  
 Dados dos triángulos de bases y alturas respectivamente congruentes:



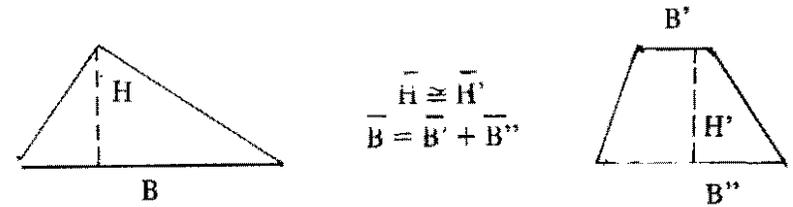
Se construye:



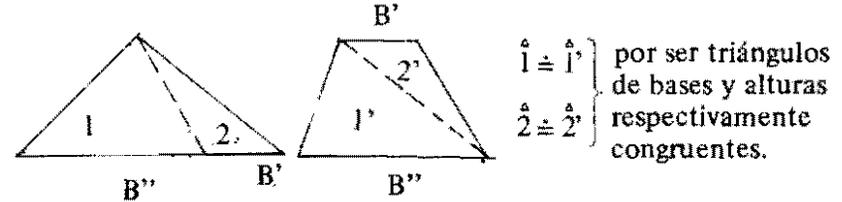
Si dos triángulos tienen bases y alturas respectivamente congruentes, son equivalentes.

4.4. - Un triángulo y un trapecio:

Dados un triángulo y un trapecio de alturas congruentes y tal que la base del triángulo sea igual a la suma de las bases del trapecio:



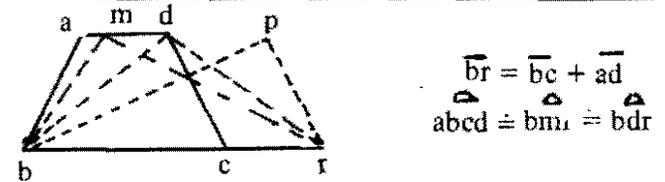
se puede dividir cada una de las figuras en dos triángulos de la siguiente manera:



Por lo tanto:

triáng. (B, H)  $\cong$  trapecio (B', B'', H')

Un triángulo y un trapecio de alturas congruentes son equivalentes si la base del triángulo es igual a la suma de las bases del trapecio.



5. - MEDIDA DE LA SUPERFICIE: AREA:

Como en el caso de la medida de la longitud, el primer paso es la elección de una unidad.

Con suficientes figuras congruentes con la unidad elegida, colocadas de manera que encajen sin superponerse, se puede cubrir cualquier figura ya sea exactamente o no.

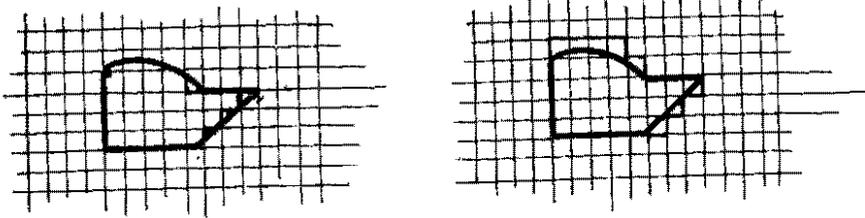
Ejemplos:



Se puede usar una cuadrícula para calcular la medida de la superficie de una figura superponiéndola a ella. El número que resulte de contar las regiones unitarias es la *medida* de la superficie estimada o *área*.

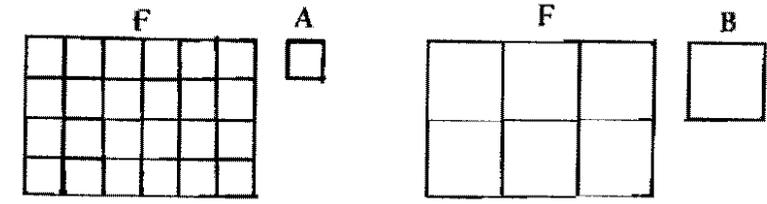
por defecto: 22

por exceso: 30



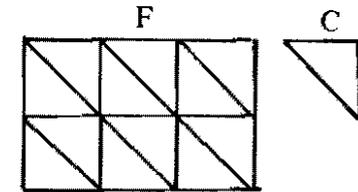
Cuanto más pequeña es la unidad elegida, más aproximada es la medida estimada.

La misma figura puede ser medida con distintas unidades:



Med. Sup.  $F_A = 24$

Med. Sup.  $F_B = 6$



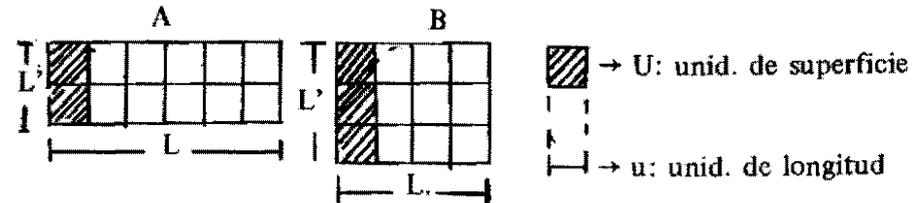
Med. Sup.  $F_C = 12$

La superficie es la misma; no depende de la unidad. La *medida* de la superficie es un *número* que varía de acuerdo con la unidad elegida y que se llama *área*.

5.1. - Area del rectángulo:

Si con varios cuadrados unidad, convenientemente dispuestos, se forma un rectángulo, el número de cuadrados utilizados es la *medida de la superficie* del rectángulo o *área* del mismo.

Por ejemplo, con 12 cuadrados congruentes con: formamos diferentes rectángulos:



En ambos casos el lado del cuadrado unidad, funciona como unidad de longitud de sus lados.

En el caso A

Nº de columnas 6 veces  
 Nº de U por columna 2 = 12

med. de  $L_u$  X med. de  $L'_u$  = Med.  $A_u$

En el caso B

Nº de columnas 4 veces  
 Nº de U por columna 3 = 12

med. de  $L_u$  X med. de  $L'_u$  = Med.  $B_u$

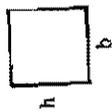
Med.  $L$  X Med.  $L'$  = Area

Se acostumbra a llamar respectivamente base y altura a cada uno de dos lados consecutivos de un rectángulo.

Si designamos  $b$  a la medida de la base y  $h$  a la medida de la altura, resulta:

Area del  =  $b \times h$

2.2. - Areas de otras figuras

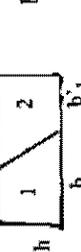
**CUADRADO**  
  
 $b = l$   
 $h = l$   
 Area del  =  $b \times h$   
 Area del  =  $l \times l$   
 Area del  =  $l^2$

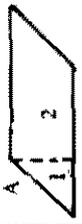
**POLIGONO REGULAR**  
  
 $ap$   $B$   $h = \text{med. ap.}$   
 polígono  $A = \text{rectáng. } B \times \frac{1}{2} \text{ perim.}$   
 Area polígono = Area rectáng.  
 Area polígono =  $b \times h$   
 Area polígono =  $\frac{1}{2} \text{ perim.} \times \text{med. ap.}$

**ROMBO**  
  
 $d$   $d'$   $2 \approx 2$   
 rombo equiv. a  $\frac{1}{2}$  rectáng.  
 Area rombo =  $\frac{1}{2}$  Area   
 Area rombo =  $\frac{1}{2} b \times h$   
 Area rombo =  $\frac{1}{2} d \times d'$

**TRIANGULO**  
  
 $A$   $h$   $b$   
 $\Delta$   $l$  equivalente  $\frac{1}{2}$   $A$   
 Area  $\Delta = \frac{1}{2}$  Area   
 Area  $\Delta = \frac{1}{2} b \times h$

**Area  =  $b \times h$**

**TRAPECIO**  
  
 $A$   $h$   $b$   $b'$   
 Trapecio  $l = \frac{1}{2} (b + b')$   $A$   
 Area trapecio =  $\frac{1}{2}$  Area   
 Area trapecio =  $\frac{1}{2} b \times h$   
 Area trapecio =  $\frac{1}{2} (b + b') \times h$

**PARALELOGRAMO**  
  
 $A$   $h$   $b$   
 $l$   $l' \approx l'$   
 $l$   $l' \approx 2$   
 $l$   $l' \approx 2$   
 A equivalente  $B$   
 Area  = Area   
 Area  =  $b \times h$

**CIRCULO**  
  
 $A$   $r$   $B$   
 $A = B$   
 Area de  $A =$  Area de  $B$   
 Area de  $A = \frac{1}{2} \text{ long. circunf.} \times r$   
 Area del círculo =  $\pi \times r^2$

**ROMBOIDE**  
  
 $A$   $h$   $d$   $d'$   
 $l$   $l' \approx l'$   
 $l$   $l' \approx 2$   
 romboide  $\approx \frac{1}{2}$   $A$   
 Area romboide =  $\frac{1}{2}$  Area   
 Area romboide =  $\frac{1}{2} b \times h$   
 Area romboide =  $\frac{1}{2} d \times d'$

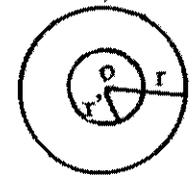
$l$ : med. lado  $b$ : med. base  
 $h$ : med. altura  $d$ : med. diagonal  
 $r$ : med. radio

5.3. - Area de las figuras circulares

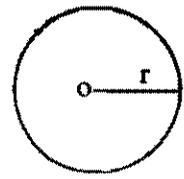
CORONA CIRCULAR

Area =  $\pi r^2 - \pi r'^2$

Area =  $\pi (r^2 - r'^2)$

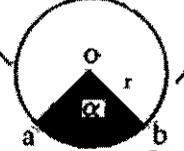


CIRCULO



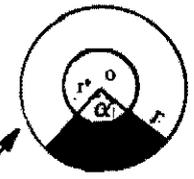
Area =  $\pi r^2$

SECTOR CIRCULAR



Area =  $\frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360}$

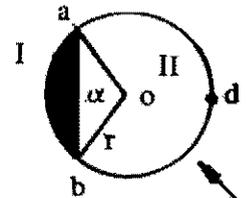
TRAPECIO CIRCULAR



Area =  $\frac{\pi r^2 \alpha}{360} - \frac{\pi r'^2 \alpha}{360}$

Area =  $\frac{\pi \alpha}{360} (r^2 - r'^2)$

SEGMENTO CIRCULAR



Area I = Area sect. aob - Area aob

Area II = Area sect. aob, d + Area aob

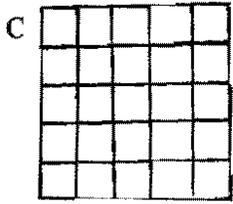
Area I =  $\frac{\pi r^2 \alpha}{360} - \frac{b \cdot h}{2}$   
 Area II =  $\frac{\pi r^2 \alpha}{360} + \frac{b \cdot h}{2}$

Area =  $\frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360}$

6. - TEOREMA DE PITAGORAS

6.1. - Raíz cuadrada:

$$\text{Area del cuadrado} = \ell^2$$



Area de C:  $5 \times 5 = 25$   
 $5^2 = 25$   
 Medida del lado: 5

Decimos que 5 es la raíz cuadrada de 25, porque  $5^2 = 25$  (téngase en cuenta que se trabaja con números naturales)

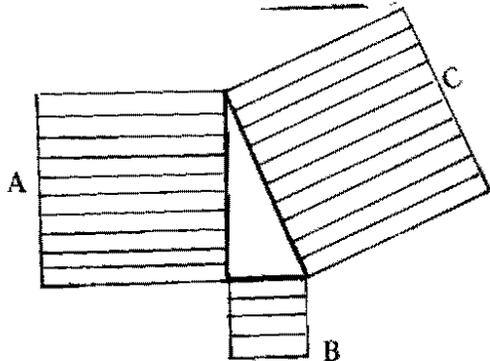
Notación:

$\sqrt{25} = 5$  porque  $5^2 = 25$

La medida del lado del cuadrado es la raíz cuadrada de su área.

$$\text{Medida del lado del } \square = \sqrt{\text{área}}$$

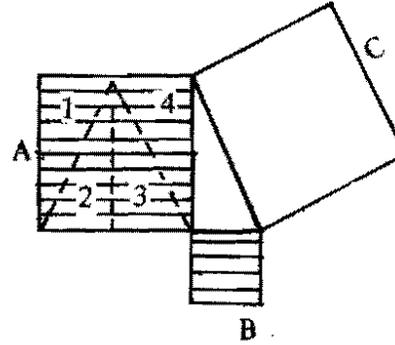
6.2. - Dado un triángulo rectángulo, se puede construir un cuadrado sobre cada uno de sus lados.



Los cuadrados A, B y C tienen por lados respectivamente a cada uno de los catetos y la hipotenusa del triángulo.

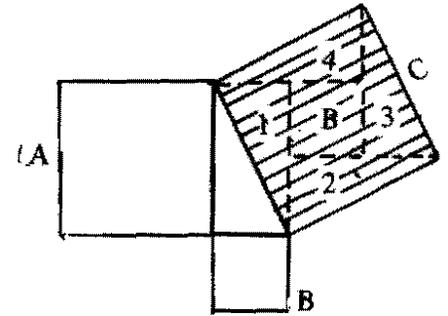
6.3. - a)

Si se dibujan en A cuatro triángulos congruentes, de acuerdo a la siguiente figura:



b)

pueden ser ubicados de manera tal que con B, se cubra totalmente el cuadrado C.



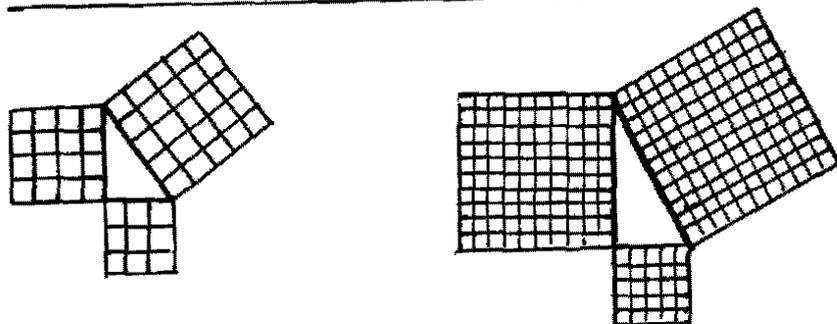
Las figuras:  $A \cup B$  (formada por los cuadrados que tienen por lados los catetos del triángulo rectángulo)  
 y: C (formada por el cuadrado que tiene por lado la hipotenusa del cuadrado)

son equicompuestas y, por lo tanto, equivalentes por su superficie.

El cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la unión de los cuadrados construidos sobre cada uno de los catetos.

6.4. - Dados los triángulos rectángulos I y II tales que:

- Medida de los catetos de I: 3 y 4 respectivamente,
- medida de los catetos de II: 5 y 12 respectivamente, construimos:



Resultado:

Area A	Area B	Area C		Area A	Area B	Area C
↓	↓	↓		↓	↓	↓
25 =	16 +	9		169 =	144 +	25

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

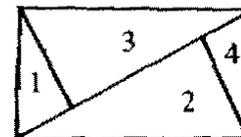
a: medida hipotenusa  
b y c: medida de los respectivos catetos

Esta comprobación permite conocer la medida de un lado de un triángulo rectángulo, conociendo la medida de los otros dos:

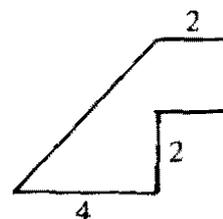
$a^2 = b^2 + c^2$	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$
$b^2 = a^2 - c^2$	$b = \sqrt{a^2 - c^2}$
$c^2 = a^2 - b^2$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

### EJERCICIOS DE APLICACION

1. -- Recortar los triángulos y formar figuras equicompuestas con el rectángulo:

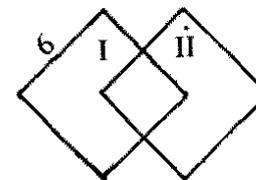


2. -- Dada la siguiente figura obtener otras dos de igual área:



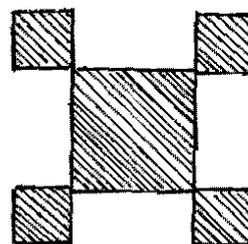
3. -- a) Hallar el área de cada una de las figuras resultantes de las siguientes operaciones:

- 1º)  $I \cup II$
- 2º)  $I \cap II$
- 3º)  $I - II$

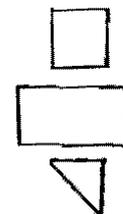


- b) Comparar el área de  $I \cup II$  con el área de  $I + \text{área de II}$ .

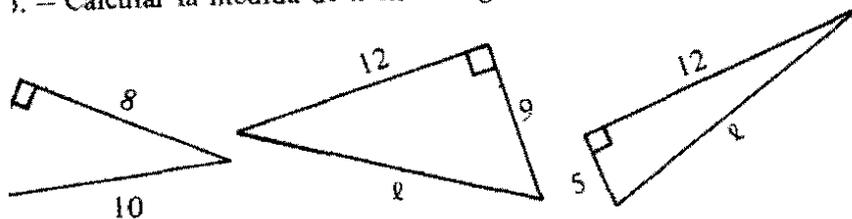
4. -- Hallar el área de la figura sombreada:



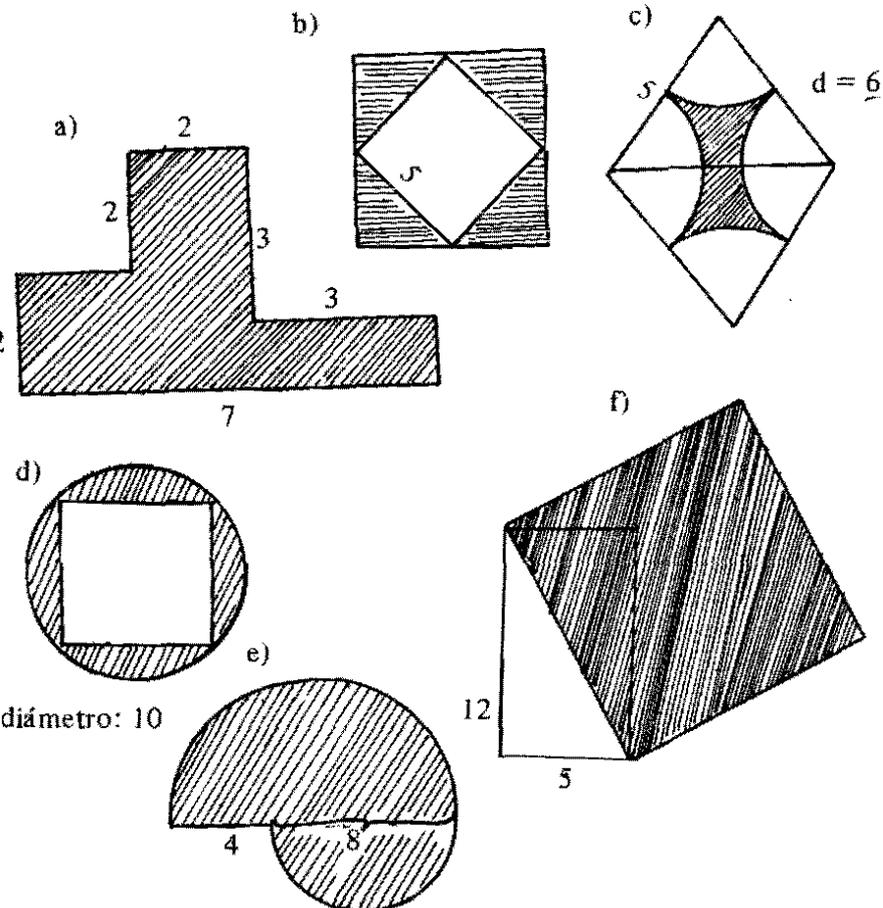
- a) Con respecto a la unidad:
- b) Con respecto a la unidad:
- c) Con respecto a la unidad:



5. - Calcular la medida de  $\ell$  en los siguientes casos:



6. - Determinar el área de las siguientes figuras sombreadas:



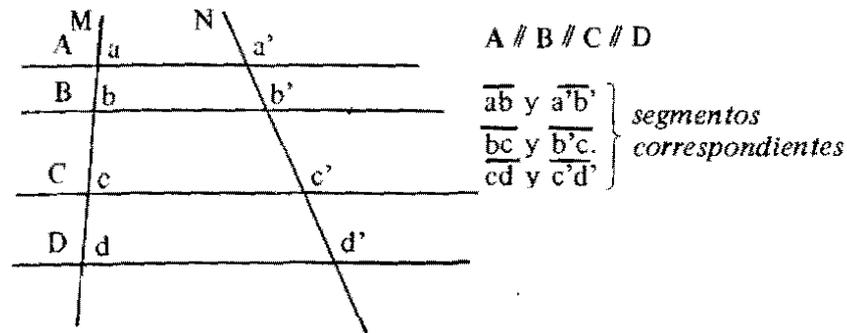
7. - a) Un rectángulo es equivalente a un cuadrado de 9 m de lado. Si el ancho es de 3 m ;cuál es el largo?  
 b) Un triángulo es equivalente a un cuadrado de  $81 \text{ m}^2$ . Si la base del triángulo es congruente con el lado del cuadrado ;cuál es la longitud de su altura?
8. - a) Un triángulo y un rectángulo son equivalentes y tienen la misma altura. ¿Cómo es la base del triángulo con respecto a la del rectángulo?  
 b) Un trapecio y un rectángulo son equivalentes y tienen misma altura. ¿Qué condición cumplen las bases del trapecio?  
 c) La altura de un rectángulo tiene la misma longitud que una de las diagonales de un rombo. La longitud de la base es la mitad de la longitud de la otra diagonal. ¿Cómo son las superficies de estas figuras?  
 d) Un rectángulo y un paralelogramo tienen la misma base y la longitud de la altura del paralelogramo es la mitad de la del rectángulo. ¿Qué relación guarda el área del rectángulo con respecto a la del paralelogramo?

## II. - SEMEJANZA

### 1. - SEGMENTOS PROPORCIONALES

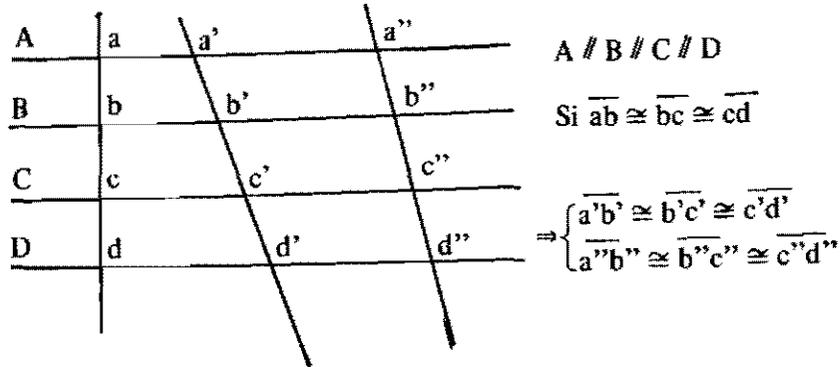
#### 1.1. - Segmentos correspondientes:

Dadas varias rectas paralelas cortadas por dos transversales, se llaman *segmentos correspondientes* a los comprendidos entre las mismas paralelas.



1.2. - Propiedades de los segmentos correspondientes entre paralelas:

Si tres o más paralelas son cortadas por dos o más transversales, a segmentos congruentes sobre una de las transversales corresponden segmentos congruentes en cada una de las otras.



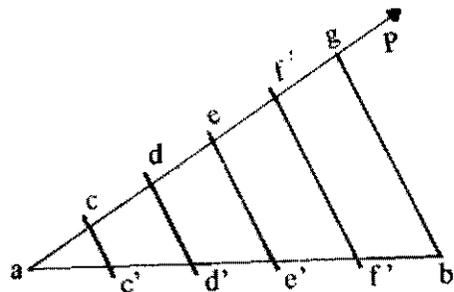
- Aplicaciones:

a) División de un segmento en partes congruentes:

La clásica división de un segmento en partes congruentes, se fundamenta en la propiedad enunciada.

ejemplo:

Dividir  $\overline{ab}$  en 5 partes congruentes.



Procedimiento:

Se traza:

1º:  $\vec{ap}$ , tal que  $\overline{ab} \not\parallel \vec{ap}$

2º: en  $\vec{ap}$ , a partir del origen, 5 segmentos consecutivos:  
 $\overline{ac} \cong \overline{cd} \cong \overline{de} \cong \overline{ef} \cong \overline{fg}$

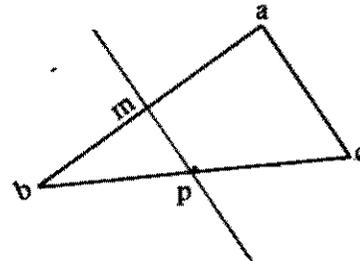
3º:  $\overline{gb}$

4º:  $cc' \parallel dd' \parallel ee' \parallel ff' \parallel gb$

Resulta:

$$\overline{ac'} \cong \overline{c'd'} \cong \overline{d'e'} \cong \overline{e'f'} \cong \overline{f'b}$$

b) La paralela a un lado de un triángulo, trazada por el punto medio de uno de los otros dos lados, corta al tercero en su punto medio. Ejemplo:



$\triangle abc$

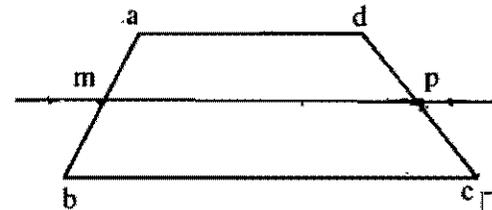
m punto medio de  $\overline{ab}$

$mp \parallel \overline{ac}$

Resulta:

$$p \text{ punto medio de } \overline{bc}$$

c) La paralela a las bases de un trapecio trazada por el punto medio de uno de los lados oblicuos corta al otro lado en su punto medio. Ejemplo:



trapecio abcd

m punto medio de  $\overline{ad}$

$mp \parallel \overline{ad} \parallel \overline{bc}$

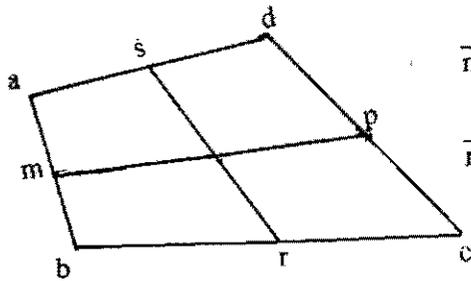
Resulta:

$$p \text{ punto medio de } \overline{cd}$$

1.3. - Bases medias:

a) Bases medias de un cuadrilátero:

Son cada uno de los segmentos determinados por los puntos medios de los pares de lados opuestos.

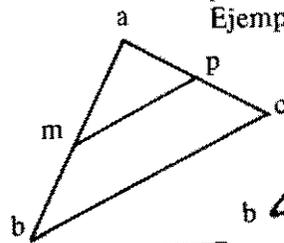


$\overline{mp}$ : base media correspondiente a los lados  $\overline{ad}$  y  $\overline{bc}$   
 $\overline{rs}$ : base media correspondiente a los lados  $\overline{ab}$  y  $\overline{cd}$

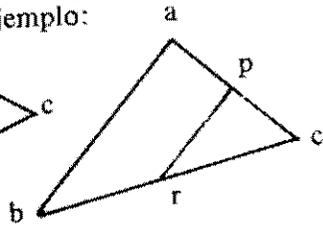
b) Bases medias de un triángulo:

Son cada uno de los segmentos determinados por los puntos medios de un par de lados.

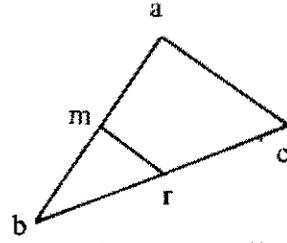
Ejemplo:



$\overline{mp}$ : base media correspondiente a  $\overline{bc}$



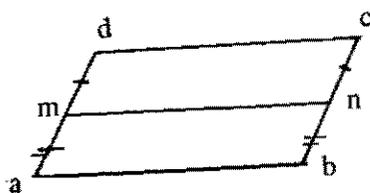
$\overline{pr}$ : base media correspondiente a  $\overline{ab}$



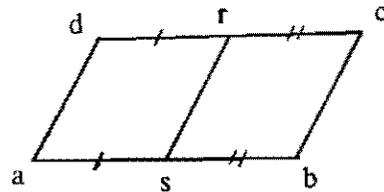
$\overline{mr}$ : base media correspondiente a  $\overline{ac}$

c) Propiedades de las bases medias de los:

1º) paralelogramos:



$\overline{mn}$  base media corresponde a  $\overline{ab} \parallel \overline{cd}$



$\overline{rs}$  base media corresponde a  $\overline{ad} \parallel \overline{bc}$

En todo paralelogramo cada base media es paralela al par de lados correspondientes y congruente con ellos. Por lo tanto:

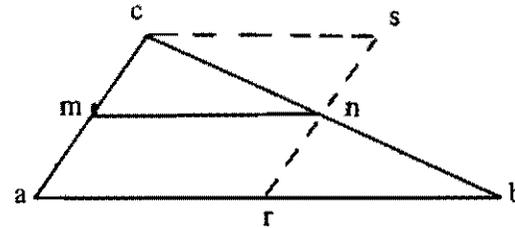
La longitud de una base media es igual a la longitud de cada una de las bases correspondientes.

2º) triángulos.

Cada base media de un triángulo es paralela al lado correspondiente y congruente con su mitad. Por lo tanto:

La longitud de cada base media de un triángulo es igual a la mitad de la longitud del lado correspondiente.

Justificación:

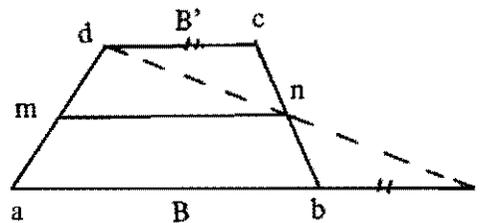


$\overline{mn}$ : base media de  $\triangle abc$  correspondiente a  $\overline{ab}$   
 $r$ : punto medio de  $\overline{bc}$   
 $\overline{mn} = \overline{ar}$  base media  $\triangle arsc$

$$\overline{mn} = \frac{1}{2} \overline{ab}$$

3º) trapecios:

La base media de un trapecio correspondiente a las bases, es paralela a ellas y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de las mismas.

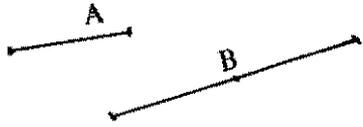


$\overline{ar} = \overline{B} + \overline{B'}$   
 $\overline{mn}$ : base media de  $\triangle ard$   
 $\overline{mn} \parallel \overline{ar}$   
 $\overline{mn} = \frac{\overline{ar}}{2}$

$$\overline{mn} = \frac{\overline{B} + \overline{B'}}{2}$$

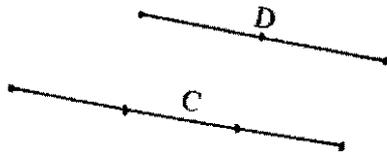
1.4. - Razón entre segmentos:

La razón de dos segmentos es la razón entre sus medidas tomadas respecto a una misma unidad.



razón entre  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$ :  $\frac{1}{2}$

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{1}{2}$$

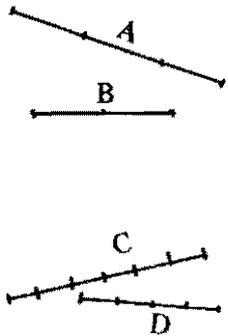


razón entre  $\bar{C}$  y  $\bar{D}$ :  $\frac{3}{2}$

$$\frac{\bar{C}}{\bar{D}} = \frac{3}{2}$$

1.5. - Proporción entre segmentos:

Dados en un cierto orden cuatro segmentos A, B, C y D, tal que la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos, se dice que dichos segmentos son proporcionales.



$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\bar{C}}{\bar{D}} = \frac{3}{2}$$

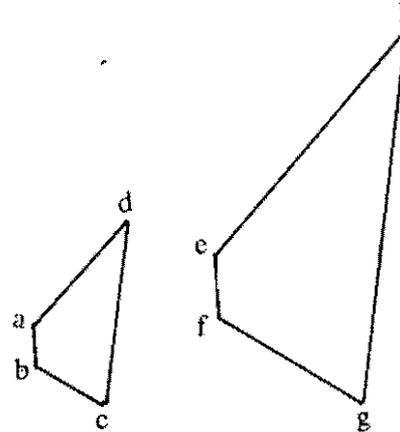
$$\Rightarrow \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{\bar{C}}{\bar{D}}$$

{ Se lee:  $\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$  es a  $\frac{\bar{C}}{\bar{D}}$   
Como  $\frac{\bar{A}}{\bar{C}}$  es a  $\frac{\bar{B}}{\bar{D}}$

La igualdad entre las razones  $\frac{\bar{A}}{\bar{B}}$  y  $\frac{\bar{C}}{\bar{D}}$  se llama *proporción*

2. - SEMEJANZA DE POLIGONOS:

La semejanza es una correspondencia biunívoca entre los vértices de dos polígonos convexos o entre los vértices de un solo polígono convexo con ellos mismos, tal que los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes son congruentes.



Si:

- a ↔ e
- b ↔ f
- c ↔ g
- d ↔ h

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ef}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{fg}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{gh}} = \frac{\overline{da}}{\overline{he}}$$

- $\hat{a} \cong \hat{e}$
- $\hat{b} \cong \hat{f}$
- $\hat{c} \cong \hat{g}$
- $\hat{d} \cong \hat{h}$

Resulta:

políg. abcd ~ políg. efgh

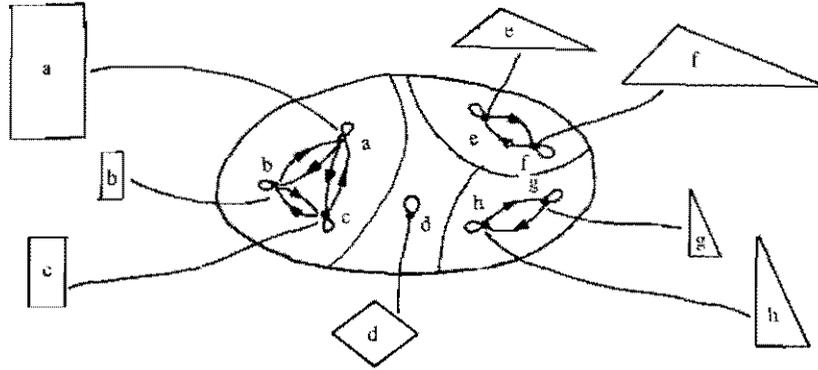
Se lee:

políg. abcd *semejante* políg. efgh

Si en el siguiente conjunto de figuras se aplica la relación ... "es semejante a"... se obtiene una partición:

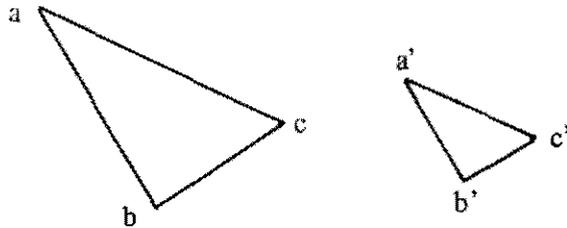
Cada subconjunto de la partición es una clase de equivalencia.

Las figuras que pertenecen a una misma clase de equivalencia tienen la misma forma.



2.1. - Semejanza de triángulos:

a) Dados dos triángulos  $abc$  y  $a'b'c'$



por definición es:

$$\triangle abc \sim \triangle a'b'c'$$

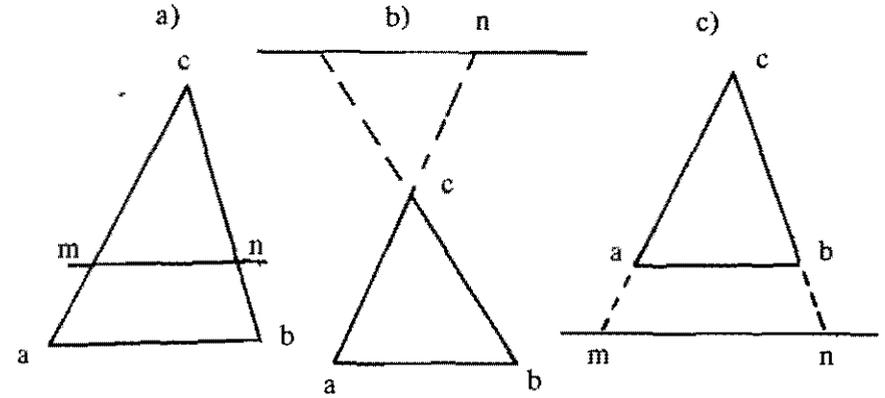
si:

$$\begin{matrix} a \leftrightarrow a' \\ b \leftrightarrow b' \\ c \leftrightarrow c' \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \frac{ab}{a'b'} = \frac{bc}{b'c'} = \frac{ca}{c'a'} \\ \hat{a} \cong \hat{a}' \\ \hat{b} \cong \hat{b}' \\ \hat{c} \cong \hat{c}' \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle abc \sim \triangle a'b'c'$$

b) Dado un triángulo se puede obtener otro semejante, trazando una recta paralela a uno de sus lados.

Ejemplo:

Dado  $\triangle abc$  y  $\overline{mn} \parallel \overline{ab}$ , pueden presentarse las siguientes situaciones:

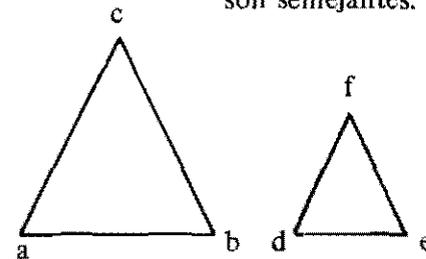


en todas resulta:

$$\triangle mcn \sim \triangle abc$$

- Criterios de semejanza de triángulos:

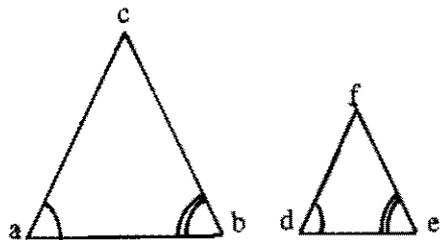
1º) Si dos triángulos tienen dos pares de lados homólogos proporcionales y los ángulos comprendidos entre ellos congruentes, entonces son semejantes.



$$\left. \begin{matrix} \frac{ab}{de} = \frac{ac}{df} \\ \hat{a} \cong \hat{d} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle abc \sim \triangle def$$

De acuerdo con este criterio resulta que:  
 "Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus catetos son proporcionales".

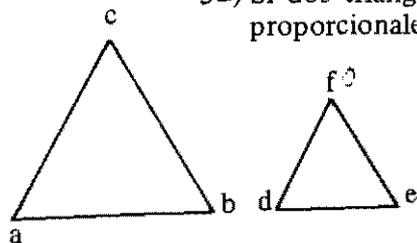
2º) Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente congruentes, entonces son semejantes.



$$\left. \begin{matrix} \hat{a} \cong \hat{d} \\ \hat{b} \cong \hat{e} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \hat{a}bc \sim \hat{d}ef$$

Resulta así que:  
 "Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo congruente, son semejantes".

3º) Si dos triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales, entonces son semejantes.

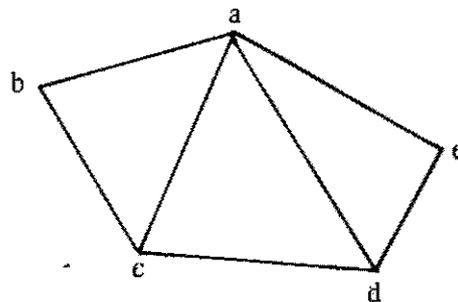


$$\frac{\overline{ab}}{\overline{de}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ef}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{fd}} \Rightarrow \hat{a}bc \sim \hat{d}ef$$

2.2. - Obtención de un polígono semejante a otro dado:

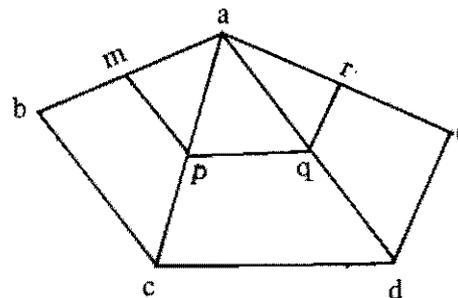
a) Dado un polígono, se pueden ordenar sus vértices a partir de uno cualquiera de ellos. Determinado el primer vértice, quedan ordenados sus lados y las diagonales que concurren a dicho vértice.

Ejemplo:  
 Dado el polígono abcde



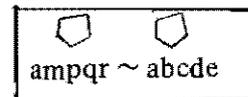
$\bar{a}$  : primer vértice  
 $\overline{ab}$ : primer lado  
 $\overline{ac}$ : primera diagonal

b) Para obtener un polígono semejante al abcde se procede así:  
 - Se determina un punto cualquiera del primer lado ab.



- Se traza:  
 1º)  $mp \parallel \overline{bc}$   
 2º)  $pq \parallel \overline{cd}$   
 3º)  $qr \parallel \overline{de}$

Resultado:



Justificación:

Si:

$$\left. \begin{matrix} \overline{mp} \parallel \overline{bc} \Rightarrow \hat{m}ap \sim \hat{b}ac \\ \overline{pq} \parallel \overline{cd} \Rightarrow \hat{p}aq \sim \hat{c}ad \\ \overline{qr} \parallel \overline{de} \Rightarrow \hat{q}ar \sim \hat{d}ae \end{matrix} \right\}$$

$\Rightarrow$  políg. ampqr  $\sim$  políg. abcde

## 3. - ESCALAS

La semejanza de polígonos se aplica en la construcción de planos y mapas, ya que estos son figuras semejantes a los objetos reales.

La razón de semejanza se llama *escala*.

Por ejemplo: si en una habitación el largo (l) es 4 m y en el plano se representa con un segmento (s) de 4 cm, la *escala* correspondiente se obtiene así:

$$\frac{s}{l}$$

Expresados ambos en la misma unidad, resulta:

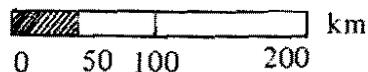
$$\frac{4}{400} = \frac{1}{100}$$

Recíprocamente, en la misma escala, un segmento de 2,5 cm representará otro real de 250 cm o 2,50 m, porque:

$$\frac{1}{100} = \frac{2,5}{x} \quad x = 2,5 \cdot 100 = 250$$

En algunos mapas la escala se representa gráficamente.

Ejemplo:



Para calcular la distancia real entre dos ciudades A y B separadas por 4 cm en un mapa dibujado en la escala anterior se procederá así:

$$\frac{1}{50} = \frac{4}{x} \quad x = 4 \cdot 50$$

$$x = 200$$

La distancia entre A y B es de 200 km.

## EJERCICIOS DE APLICACION

9. - Indicar los pares de conjuntos cuyos elementos pueden ser medidas de lados de triángulos semejantes:

$$A = \{ 2, 3, 4, \} \quad C = \{ 8, 16, 12 \}$$

$$B = \{ 9, 12, 20 \} \quad D = \{ 3, 4, 6, \}$$

10. - Si  $\hat{a}bc \cong a'b'c'$ , ¿es  $\hat{a}bc \sim a'b'c'$ ? ¿por qué?

11. - Señalar en cuáles de estos casos resulta  $\hat{a}bc \sim a'b'c'$ :

a)  $\hat{a}bc$ :  $\overline{ab} = 9$  cm;  $\overline{bc} = 6$  cm;  $\overline{cd} = 12$  cm

$a'b'c'$ :  $\overline{a'b'} = 3$  cm;  $\overline{b'c'} = 2$  cm;  $\overline{c'd'} = 4$  cm

b)  $\hat{a}bc$ : triángulo rectángulo;  $\hat{b} = 60^\circ$

$a'b'c'$ : triángulo rectángulo;  $\hat{b}' = 60^\circ$

c)  $\hat{a}bc$ :  $\overline{ab} = 8$  cm;  $\overline{bc} = 7$  cm;  $\overline{cd} = 4$  cm

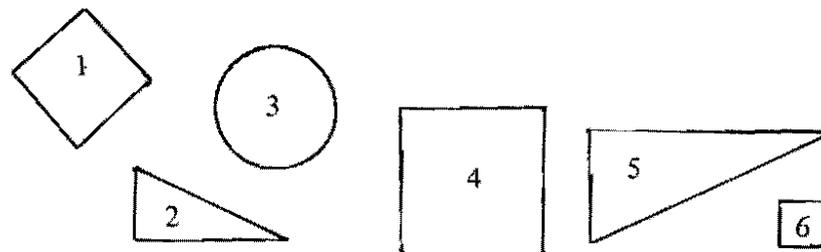
$a'b'c'$ :  $\overline{a'b'} = 4$  cm;  $\overline{b'c'} = 7$  cm;  $\overline{c'd'} = 6$  cm

12. - ¿Son semejantes estos triángulos?

$\hat{a}bc$ :  $\hat{a} = 40^\circ$ ;  $\hat{b} = 60^\circ$

$a'b'c'$ :  $\hat{c}' = 80^\circ$ ;  $\hat{b}' = 60^\circ$

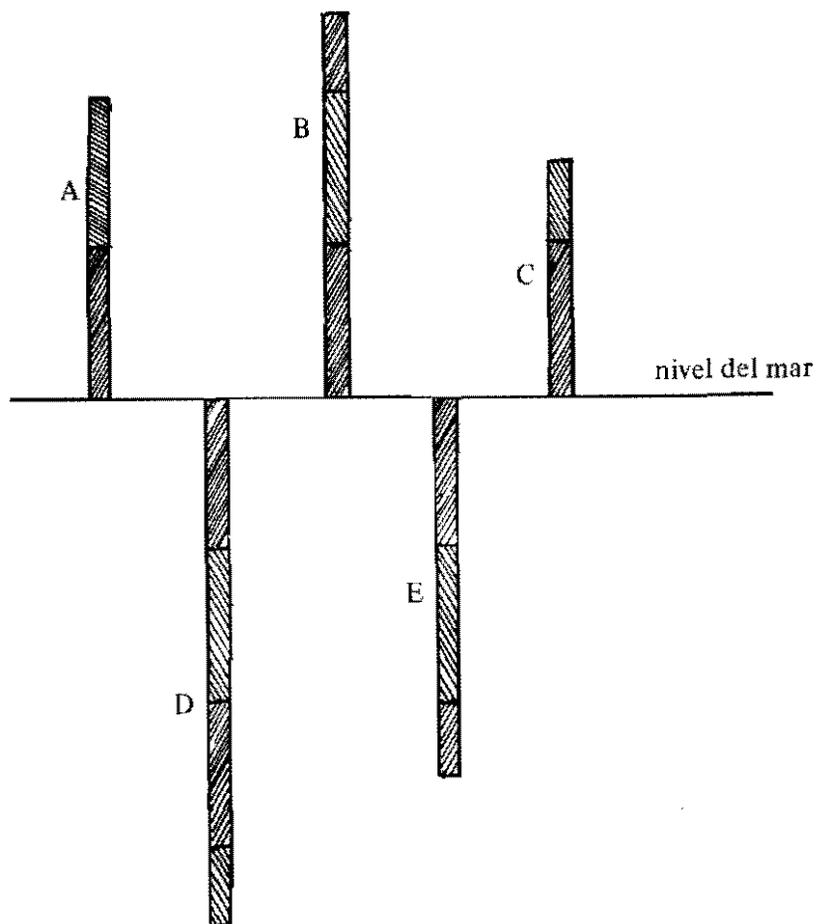
13. - Dado el conjunto F de figuras



Aplicar la relación: ... "es semejante a" ...

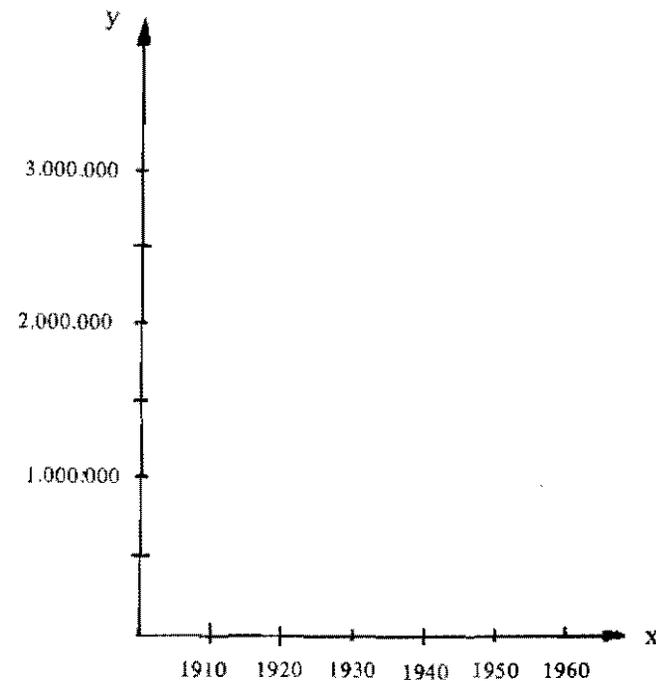
- Hacer el diagrama vinculando los pares ordenados.
- Escribir los subconjuntos de la partición.

14. – Representar un segmento de 25 cm según la escala  $\frac{1}{10}$
15. – En un mapa la distancia de la ciudad M hasta la ciudad S es de 20 cm. ¿Cuál es la distancia real si la escala correspondiente es  $1/1.000.000$ ?
16. – A, B y C representan elevaciones terrestres; D y E, profundidades marinas. ¿Cuántos metros corresponden a cada una según la escala  $1/100.000$ ?



17. – Datos:

Año	Nº de habitantes
1910	500.000
1920	750.000
1930	1.250.000
1940	1.625.000
1950	2.250.000
1960	3.000.000



- a) Representar los datos de la tabla de crecimiento demográfico.
- b) Dibujar la curva de crecimiento.
- c) Indicar la escala utilizada en el eje y.

18. - Representar en un gráfico de barras, en el orden dado, el área aproximada de cada una de las siguientes provincias:

Buenos Aires: 300.000 km<sup>2</sup>  
 Mendoza: 150.000 km<sup>2</sup>  
 Jujuy: 50.000 km<sup>2</sup>  
 Santa Cruz: 200.000 km<sup>2</sup>  
 Chaco: 100.000 km<sup>2</sup>

Escala:  = 50.000 km<sup>2</sup>

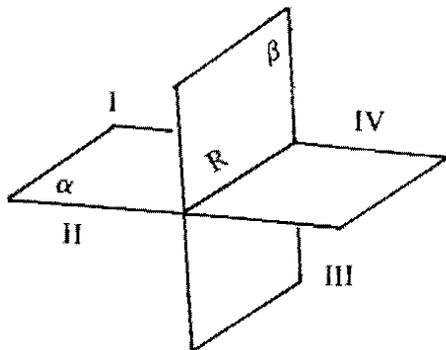
III. - ANGULOS DIEDROS Y POLIEDROS

I. - ANGULOS DIEDROS

I.1. - Definiciones:

Se exponen a continuación distintos criterios para definir ángulos diedros.

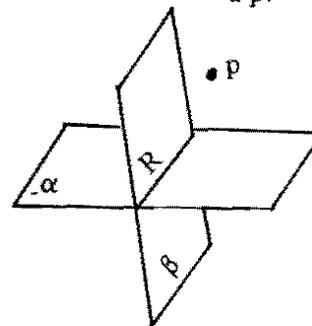
a) Dos planos secantes determinan en el espacio cuatro regiones cada una de las cuales recibe el nombre de *ángulo diedro convexo* o simplemente *diedro*.



$\alpha \cap \beta = R$   
 regiones I, II, III, IV: diedros

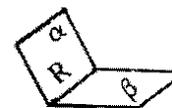
b) Dados dos planos  $\alpha$  y  $\beta$  secantes en R y un punto p que no pertenece a ellos:

1º) Se llama *diedro  $\alpha\beta$  convexo* o simplemente *diedro  $\alpha\beta$*  a la intersección de los semiespacios determinados por  $\alpha$  y  $\beta$  que contiene a p.



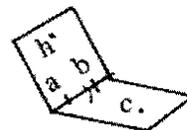
$s/e(\alpha, p) \cap s/e(\beta, p) = d. \widehat{\alpha\beta}$

Notación:



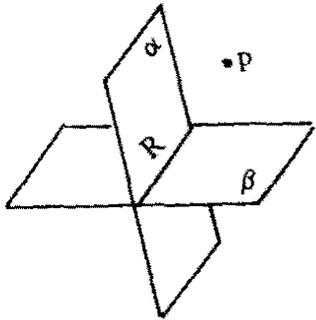
$d. \widehat{\alpha\beta} \begin{cases} \text{arista: } R \\ \text{caras: } s/p \alpha; s/p \beta \end{cases}$

o bien:



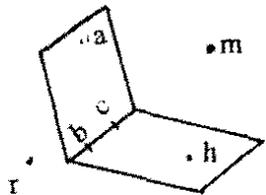
$d. \widehat{habc} \begin{cases} \text{arista: } ab \\ \text{caras: } s/p(ab, c); s/p(ab, h) \end{cases}$

2º) Se llama *diedro  $\alpha\beta$  cóncavo* a la unión de los semiespacios determinados por  $\alpha$  y  $\beta$  que contienen al punto p.



$$s/e(\alpha, p) \cup s/e(\beta, p) = d. \widehat{\alpha\beta} \text{ c\u00f3ncavo}$$

c) Se llama *\u00e1ngulo diedro* a la uni\u00f3n de dos semiplanos de borde com\u00fan.



$$d. \widehat{abch} = s/p(bc, a) \cup s/p(bc, h)$$

De acuerdo con esta definici\u00f3n el diedro est\u00e1 formado solamente por los puntos de las caras. El  $d. \widehat{abch}$  separa a los puntos del espacio en dos regiones abiertas, una c\u00f3ncava y otra convexa.

$m \notin d. \widehat{abch}$ :  $m \in$  regi\u00f3n convexa o interior.

$r \notin d. \widehat{abch}$ :  $r \in$  regi\u00f3n c\u00f3ncava o exterior.

La uni\u00f3n del  $d. \widehat{abch}$  con cada una de las regiones anteriores conduce a la noci\u00f3n de diedro expresada en b).

$d. \widehat{abch} \cup$  regi\u00f3n interior = diedro convexo.

$d. \widehat{abch} \cup$  regi\u00f3n exterior = diedro c\u00f3ncavo.

1.2. - **Diedro llano:**

Un \u00e1ngulo diedro es llano si sus caras son semiplanos opuestos.

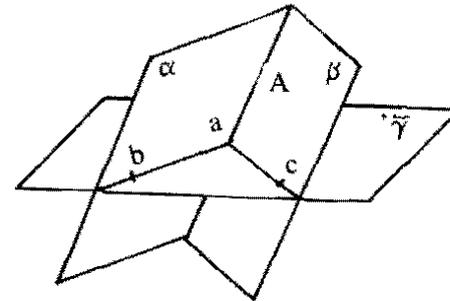


diedros llanos  $\left\{ \begin{array}{l} d. \widehat{\alpha\beta} \text{ que contiene a } p \\ d. \widehat{\alpha\beta} \text{ que no contiene a } p. \end{array} \right.$

Un diedro llano es un semiespacio

1.3. - **Secci\u00f3n de un diedro:**

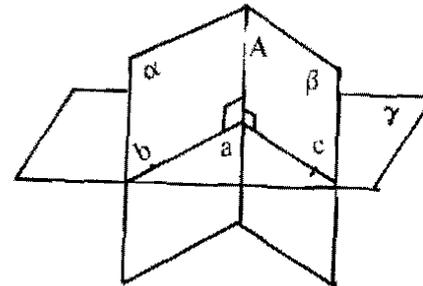
Todo plano que corta a la arista de un diedro determina con las caras del mismo un \u00e1ngulo plano llamado secci\u00f3n del diedro.



$\widehat{bac}$ : secci\u00f3n  $d. \widehat{\alpha\beta}$

$$\gamma \cap A = \{a\} \begin{cases} \gamma \cap \alpha = \vec{ab} \\ \gamma \cap \beta = \vec{ac} \end{cases}$$

Si  $\gamma$  es perpendicular a la arista A,  $\widehat{abc}$  es la secci\u00f3n normal del diedro.



$$A \perp \gamma \Rightarrow \begin{cases} A \perp \vec{ab} \\ A \perp \vec{ac} \end{cases}$$

$\widehat{bac}$ : sec. normal  $d. \widehat{\alpha\beta}$

Para obtener la sección normal de un diedro basta trazar en cada cara la perpendicular a la arista en un mismo punto.

La medida de un diedro es la medida de su sección normal.

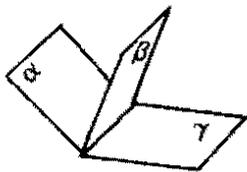
$$\text{med. d. } \widehat{\alpha\beta} = \text{med. } \widehat{bac}$$

#### 1.4. – Congruencia de diedros:

Dos diedros son congruentes si sus secciones normales son congruentes.

#### 1.5. – Diedros consecutivos:

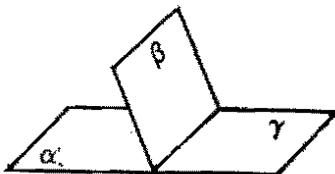
Dos diedros son consecutivos cuando tienen solamente una cara común.



$$\begin{aligned} \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \cap \text{d. } \widehat{\beta\gamma} &= \beta \text{ (cara común)} \\ \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \text{ y d. } \widehat{\beta\gamma} &: \text{consecutivos} \end{aligned}$$

#### 1.6. – Diedros adyacentes:

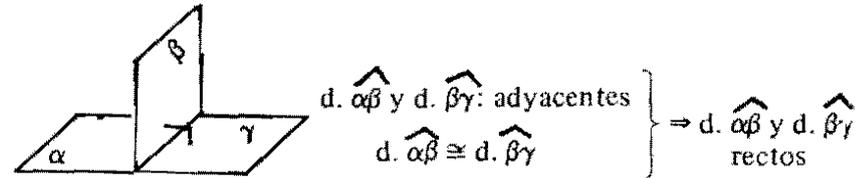
Dos diedros consecutivos son *adyacentes* si las caras no comunes son semiplanos opuestos.



$$\begin{aligned} \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \text{ y d. } \widehat{\beta\gamma} &: \text{consecutivos} \\ \alpha \text{ y } \gamma &: \text{s/p opuestos} \\ \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \text{ y d. } \widehat{\beta\gamma} &: \text{adyacentes} \end{aligned}$$

#### 1.7. – Diedro recto:

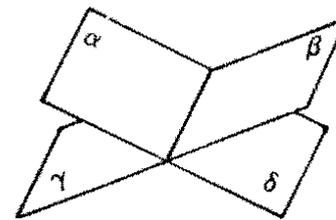
Si dos diedros adyacentes son congruentes, cada uno de ellos es un *diedro recto*.



La sección normal de un diedro recto es un ángulo recto.

#### 1.8. – Diedros opuestos por la arista:

Dos diedros son opuestos por la arista si las caras de uno son semiplanos opuestos a las caras del otro.

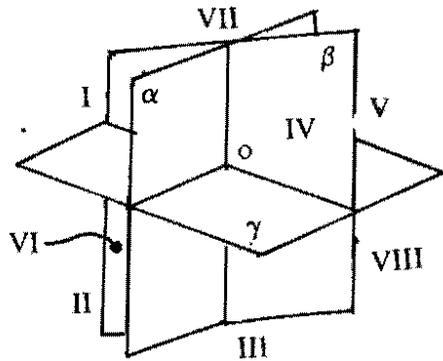


$$\left. \begin{aligned} \alpha \text{ y } \delta & \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha \text{ y } \delta \end{aligned}} \right\} \text{semiplanos opuestos} \\ \beta \text{ y } \gamma & \left. \vphantom{\begin{aligned} \beta \text{ y } \gamma \end{aligned}} \right\} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \text{d. } \widehat{\alpha\beta} \text{ y d. } \widehat{\gamma\delta} \\ \text{d. } \widehat{\alpha\gamma} \text{ y d. } \widehat{\beta\delta} \end{aligned} \right\} \text{opuestos por las aristas}$$

## 2. - ANGULOS POLIEDROS

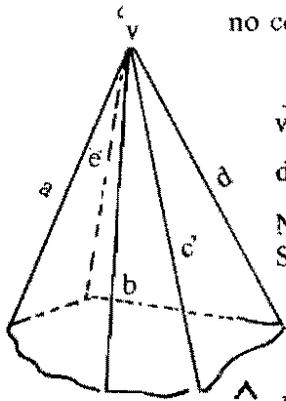
### 2.1. - Definiciones:

- a) Se llama *ángulo poliedro convexo*, o simplemente *ángulo poliedro* a cada una de las regiones del espacio determinadas por tres o más planos que se intersecan mutuamente. Si se trata de tres planos se obtiene un *ángulo triedro convexo* o simplemente *triedro*.



$\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{o\}$   
 regiones: I, II, III, IV, V,  
 VI, VII, VIII  
 ángulos triedros

- b) Se llama *ángulo poliedro* a la intersección de tres o más diedros, cuyas aristas son semirrectas no coplanares de origen común.



$\vec{v}a, \vec{v}b, \vec{v}c, \vec{v}d, \vec{v}e$ : no coplanares  
 $d.\hat{a} \cap d.\hat{b} \cap d.\hat{c} \cap d.\hat{d} \cap d.\hat{e} = \text{áng. poliedro}$

Notación:  $\hat{v}.abcde$   
 Se lee: ángulo poliedro de vértice v  
 y aristas abcde

$\hat{v}.abcde$  — vértice: v  
 — caras:  $\hat{a}\hat{v}\hat{b}, \hat{b}\hat{v}\hat{c}, \hat{c}\hat{v}\hat{d}, \hat{d}\hat{v}\hat{e}, \hat{e}\hat{v}\hat{a}$   
 — diedros:  $d.\hat{a}, d.\hat{b}, d.\hat{c}, d.\hat{d}, d.\hat{e}$

### 2.2. - Suma de las caras de un poliedro:

La suma de las caras de un ángulo poliedro es menor que  $360^\circ$ .

Ejemplo:  $E_1: \diamond. abcde$

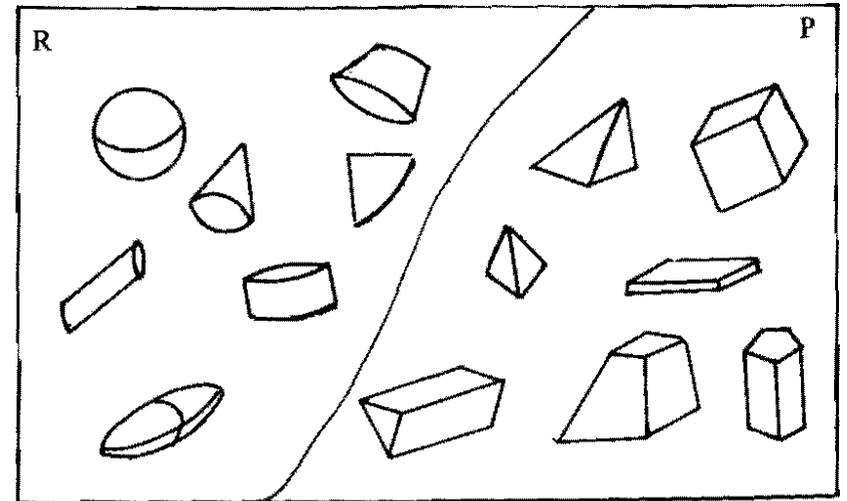
$$\hat{a}\hat{v}\hat{b} + \hat{b}\hat{v}\hat{c} + \hat{c}\hat{v}\hat{d} + \hat{d}\hat{v}\hat{e} + \hat{e}\hat{v}\hat{a} < 360^\circ$$

## IV. - CUERPOS GEOMETRICOS

Toda figura del espacio limitada por polígonos es un *poliedro*. Cada uno de los polígonos es una *cara* del poliedro.

Toda figura del espacio limitada por superficies curvas o superficies curvas y planas, es un  *cuerpo redondo*.

En el conjunto universal C de los cuerpos geométricos se produce la siguiente partición:



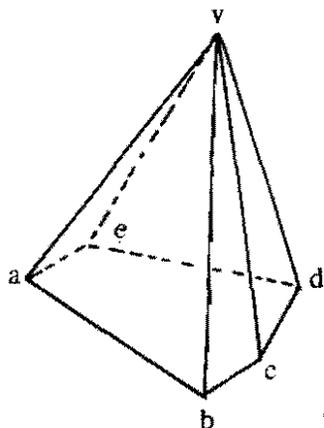
$C = \{ \text{cuerpos geométricos} \}$   
 $R = \{ \text{cuerpos redondos} \}$   
 $P = \{ \text{poliedros} \}$

$R \cup P = C$   
 $R \cap P = \emptyset$

## 1. - POLIEDROS:

## 1.1. - Pirámides:

- a) 1<sup>o</sup>) Se llama pirámide al poliedro en que una de sus caras es un polígono cualquiera y las demás son triángulos que concurren en un vértice.



Notación:

pir. v. abcde

base: políg. abcde

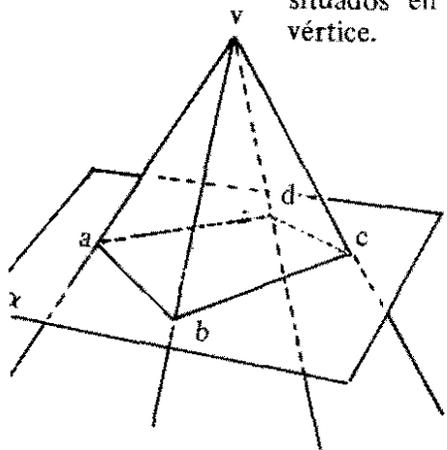
caras laterales }  $\triangle avb; \triangle bvc; \triangle cvd; \triangle dve; \triangle eva$

vértice: v

aristas laterales }  $\overline{va}; \overline{vb}; \overline{vc}; \overline{vd}; \overline{ve}$

aristas de la base:  $\overline{ab}; \overline{bc}; \overline{cd}; \overline{de}; \overline{ea}$ 

- 2<sup>o</sup>) Dada un ángulo poliedro y un plano que seccione a todas sus caras, se llama pirámide al conjunto de puntos del ángulo poliedro situados en el semiespacio que contiene el vértice.



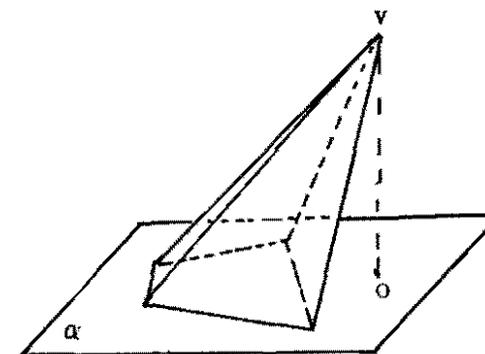
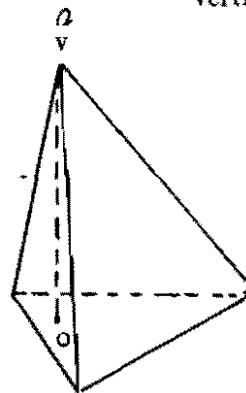
pir. v. abcd

 $\hat{v}$ . abcd: ángulo poliedro $\alpha \cap \hat{v}$ . abcd: políg. bcd

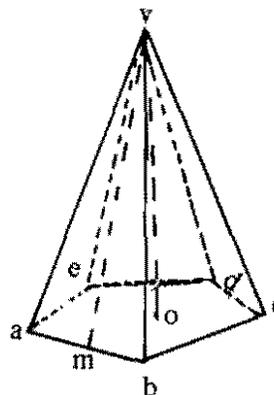
- b) De acuerdo al polígono de la base, las pirámides reciben el nombre de: *triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc.*

c) *Altura de la pirámide:*

Segmento de perpendicular trazado desde el vértice al plano que incluye a la base.

 $\overline{vo}$ : alturad) *Pirámide regular:*

Una pirámide es regular cuando su base es un polígono regular y el pie de la altura es el centro de la base.



pir. v. abcde

base: políg. regular abcde

centro de la base: o

altura:  $\overline{vo}$ 

caras laterales:

 $\triangle avb \cong \triangle bvc \cong \triangle cvd \cong \triangle dve \cong \triangle eva$ 

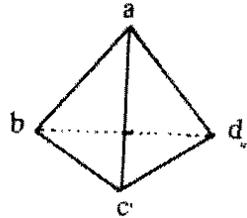
aristas laterales:

 $\overline{va} \cong \overline{vb} \cong \overline{vc} \cong \overline{vd} \cong \overline{ve}$ apotema:  $\overline{vm}$

– *Apotema de la pirámide regular* es la altura de una cualquiera de las caras laterales de la pirámide regular.

– *Tetraedro:*

Pirámide triangular cuyas caras laterales y base son triángulos equiláteros.



pir. a. bcd: *tetraedro*  
 $\hat{d}ab \cong \hat{a}bc \cong \hat{c}ad \cong \hat{d}bc$

## 1.2. – Prisma:

a) Se llama prisma al poliedro que tiene dos caras congruentes situadas en planos paralelos y las demás son paralelogramos.

b) Notación:

prisma abcdef

bases:  $\hat{a}bc \cong \hat{d}ef$

caras laterales:

$\hat{a}bed$ ;  $\hat{e}bcf$ ;  $\hat{a}dfe$

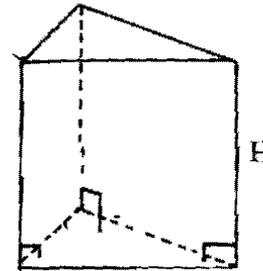
vértices: a, b, c, d, e, f

aristas laterales:  $\overline{ad}$ ;  $\overline{be}$ ;  $\overline{cf}$

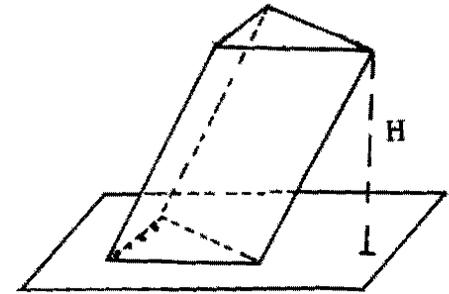
aristas de las bases:  $\overline{ab}$ ,  $\overline{bc}$ ,  $\overline{ac}$ ,  $\overline{de}$ ,  $\overline{ef}$ ,  $\overline{fd}$

b) Un prisma es triangular, cuadrangular, pentagonal, etc., según que sus bases sean respectivamente: triángulos, cuadrados, pentágonos, etc.

c) Un prisma es *recto* u *oblicuo*, según que las aristas laterales sean perpendiculares u oblicuas a los planos de las bases.



Prisma recto



Prisma oblicuo

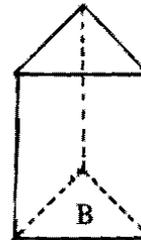
d) *Altura del prisma:*

Segmento de perpendicular comprendido entre los planos de las bases.

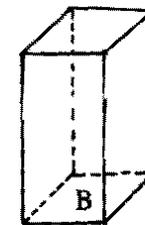
En un prisma recto, cualquiera de las aristas laterales puede ser considerada como altura.

e) *Prisma regular:*

Prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.



B: triáng. equilátero



B: cuadrado

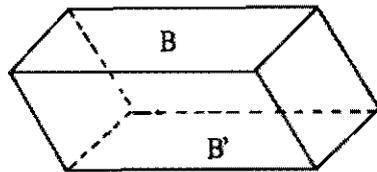


B: hexágono regular

f) Paralelepípedos:

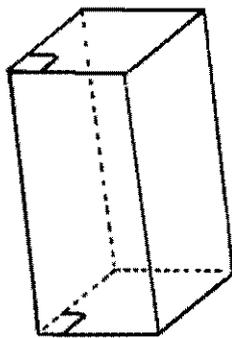
19)

*Paralelepípedos*  
bases: paralelogramos

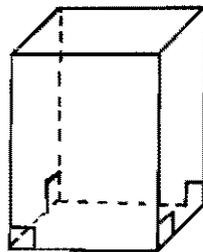


B y B': paralelogramos

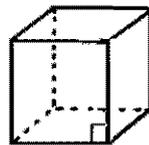
*Paralelepípedos rectángulos*  
bases: rectángulos



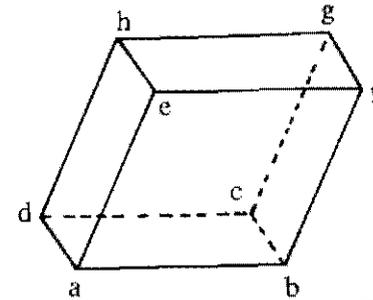
*Paralelepípedos rectos rectángulos*  
caras laterales: rectángulos



*Cubo*  
caras: cuadrados



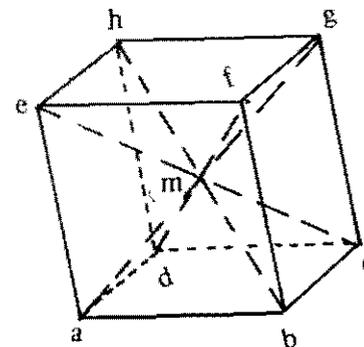
29) Elementos opuestos del paralelepípedo:



Caras opuestas no tienen puntos comunes	Vértices opuestos no pertenecen a la misma cara	Aristas opuestas no están incluidas en la misma cara
$\square$ abfe y $\square$ dceg $\square$ aehd y $\square$ bfgc	a y g; b y h c y e; d y f	$\overline{ae}$ y $\overline{cg}$ $\overline{bf}$ y $\overline{dh}$ $\overline{ab}$ y $\overline{hg}$ $\overline{ad}$ y $\overline{fg}$

39) Diagonales de un paralelepípedo:

Cada par de vértices opuestos determina una diagonal.



$\overline{ag}$ ,  $\overline{bh}$ ,  $\overline{ce}$ ,  $\overline{df}$ :  
diagonales

- Propiedades:

I. - Las diagonales de un paralelepípedo se cortan mutuamente en partes congruentes.

$$\overline{ag} \cap \overline{bh} \cap \overline{ce} \cap \overline{df} = \{m\}$$

$$\overline{am} \cong \overline{mg}$$

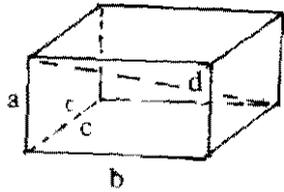
$$\overline{bm} \cong \overline{mh}$$

$$\overline{cm} \cong \overline{me}$$

$$\overline{dm} \cong \overline{mf}$$

II. - Las diagonales de un paralelepípedo recto rectángulo son *congruentes*.

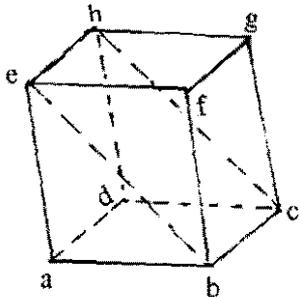
III. - El cuadrado de la longitud de una diagonal de un paralelepípedo recto rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de tres aristas que concurren en un vértice..



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

d) Plano diagonal:

Cada par de aristas opuestas determinan un plano diagonal.



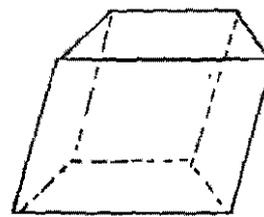
 bche: plano diagonal

1.3. - Número de vértices y aristas de un poliedro: Relación de Euler.

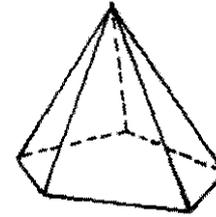
En todo poliedro la suma del número de caras y el número de vértices es igual a la suma del número de aristas y dos.

$$C \rightarrow N^{\circ} \text{ de caras} \quad V \rightarrow N^{\circ} \text{ de vértices} \quad A \rightarrow N^{\circ} \text{ de aristas}$$

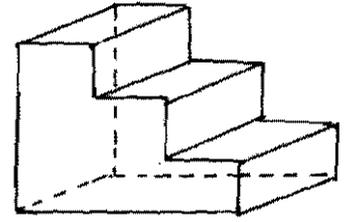
$$C + V = A + 2$$



a)



b)



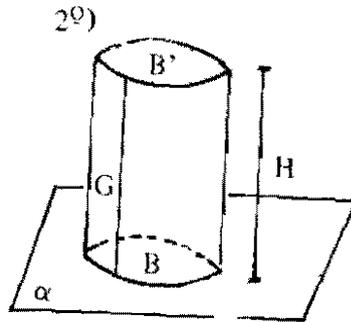
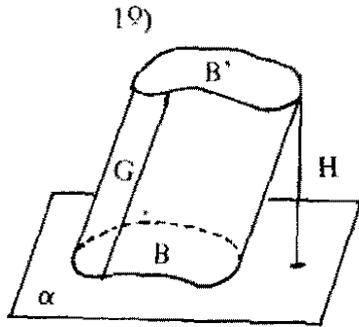
c)

Poliedro	Caras	Vértices	Aristas	$C + V = A + 2$
a)	6	8	12	$6 + 8 = 12 + 2$
b)	6	6	10	$6 + 6 = 10 + 2$
c)	10	16	24	$10 + 16 = 24 + 2$

## 2. - CUERPOS REDONDOS:

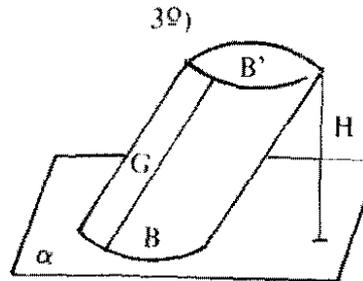
### 2.1. - Cilindro:

a) Cuerpo redondo que tiene dos caras paralelas congruentes, llamadas bases, limitadas por curvas simples cerradas. La superficie curva es la cara lateral.



Bases  $\left\{ \begin{array}{l} B \parallel B' \\ B \cong B' \end{array} \right.$

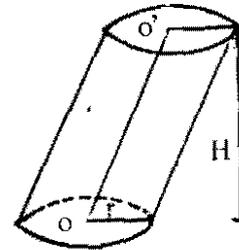
generatriz: G  
altura: H



- *Generatriz*: Segmento de recta de la cara lateral comprendido entre las bases.  
- *Altura*: Segmento de perpendicular, comprendido entre los planos de las bases.

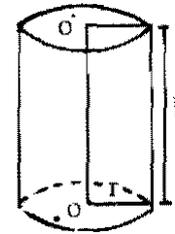
b) Un cilindro es *recto* (fig. 2º) u *oblicuo* (fig. 1º y 3º) según que la generatriz sea perpendicular u oblicua a los planos de las bases.

c) *Cilindro circular*: las bases son círculos.



Cilindro circular oblicuo

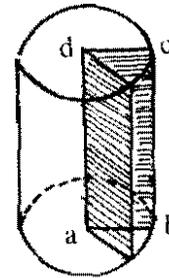
Base: Círc. (o, r)  
Eje:  $\overline{oo'}$



Cilindro circular recto

Notación:  
Cil. [(o, r); H]

- *Generación de un cilindro recto circular*:  
Un cilindro circular recto se puede considerar generado por la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

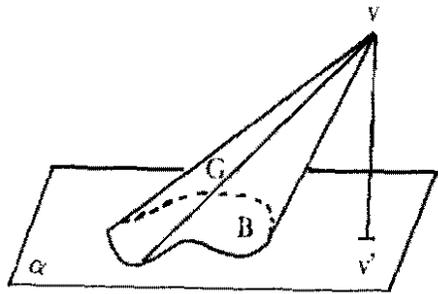


abcd: rectángulo  
 $\overline{ad}$ : eje de rotación  
 $\overline{cb}$ : genera la superficie lateral del cilindro  
 $\overline{ab}$ : genera un círculo: base del cilindro.

### 2.2. - Cono:

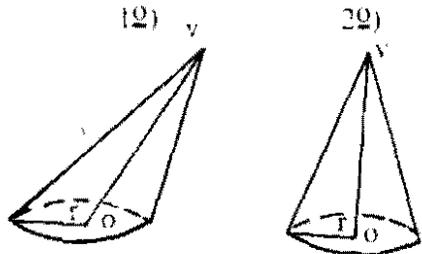
a) Cuerpo redondo formado por una superficie curva y una superficie plana (base) limitada por una curva simple.

La superficie curva está formada por segmentos cuyos extremos son un punto (vértice) no perteneciente al plano de la base y cada uno de los puntos de la curva simple.



B: base  
 v: vértice  
 $\overline{vv'}$ : altura (segmento de perpendicular desde el vértice al plano  $\alpha$ )

b) *Cono circular*: la base es un círculo



Cono circular oblicuo

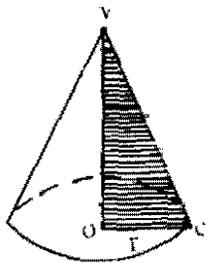
Cono circular recto

Base: Círc.  $(o, r)$   
 $\overline{vo}$ : eje (segmento determinado por el vértice y el centro de la base)

c) Un cono circular es *recto* (fig. 20) u *oblicuo* (fig. 19) según que el eje sea perpendicular u oblicuo a la base.

*Generación de un cono circular recto:*

Un cono circular recto, se puede generar por la rotación de un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos.



$\triangle v\hat{o}c$ : rectángulo  
 cateto  $\overline{vo}$ : eje de rotación  
 cateto  $\overline{oc}$ : genera el círculo base  
 hipotenusa  $\overline{vc}$ : genera la superficie lateral

2.3. - Esfera:

a) *Superficie esférica*:

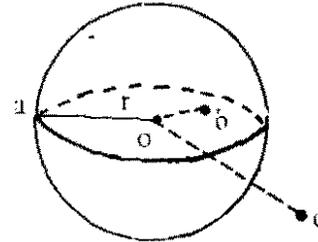
Se llama superficie esférica de centro  $o$  y radio  $r$  al conjunto de los puntos del espacio cuya distancia a  $o$  es igual a  $r$ .

Notación:

Sup. esf.  $(o, r)$

Se lee:

Superficie esférica de centro  $o$  y radio  $r$



$d(o, a) = r \Rightarrow a \in \text{Sup. esf.}(o, r)$   
 $d(o, b) < r \Rightarrow b \in \text{región interior}$   
 $d(o, c) > r \Rightarrow c \in \text{región exterior}$

b) *Esfera*:

Se llama esfera de centro  $o$  y radio  $r$  al conjunto de los puntos del espacio cuya distancia a  $o$  es menor o igual que  $r$ .

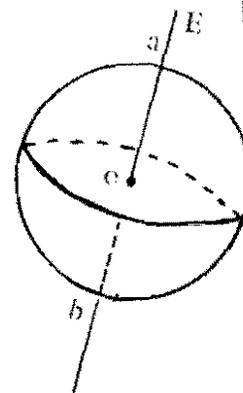
- Otra forma de definir esfera:

Se llama esfera al conjunto unión de los puntos de la superficie esférica con los puntos de la región interior.

$$\text{Esf.}(o, r) = \text{Sup. esf.}(o, r) \cup \text{región interior}$$

c) *Eje y diámetro*:

*Eje*: Es la recta que pasa por el centro de la esfera o de la superficie esférica.



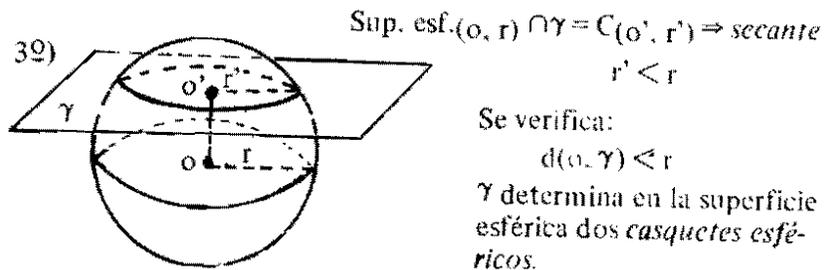
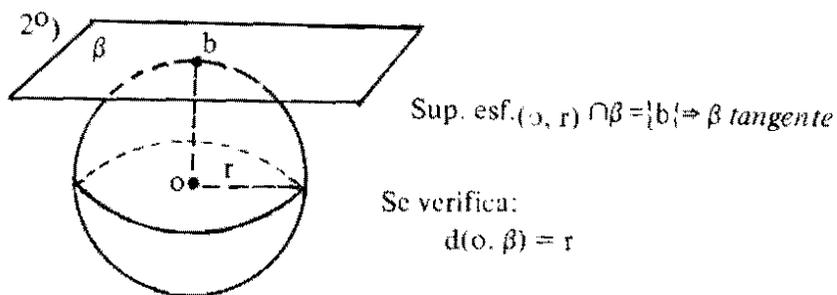
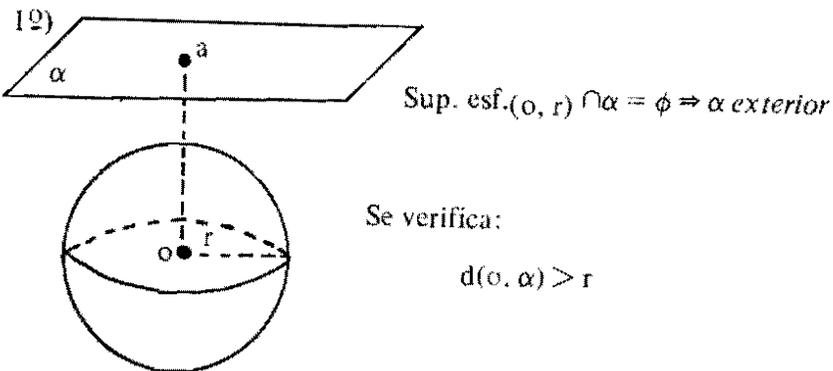
$o \in E$ : E eje

$$E \cap \text{Sup. esf.}(o, r) = \{a, b\}$$

$\overline{ab}$ : diámetro de la esfera y de la superficie esférica.

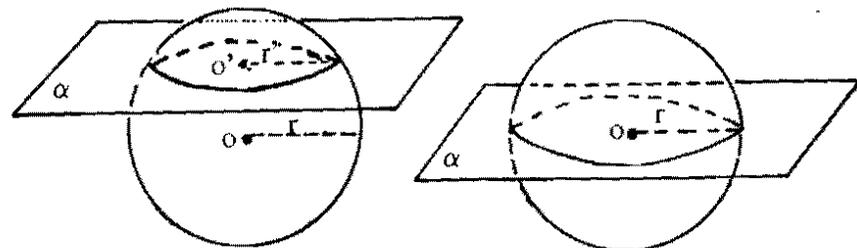
d) Posiciones relativas de una superficie esférica y un plano:

Dados una superficie esférica y un plano en el espacio, pueden presentarse las siguientes situaciones:



Si  $o \in \gamma \Rightarrow C(o, r)$  circunferencia máxima  
En este caso los casquetes se llaman *hemisferios*.

— *Sección de un plano secante con la esfera:*  
La intersección de un plano secante con los puntos de la esfera es un círculo.



$\alpha \cap \text{esf.}(O, r) = \text{Círc.}(O', r')$

$\alpha \cap \text{esf.}(O, r) = \text{Círc.}(O, r)$

Círculo

círculo máximo

$\alpha$  determina en la esfera dos *segmentos esféricos*.

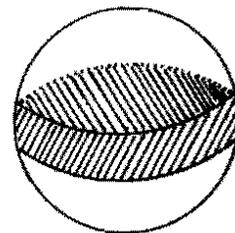
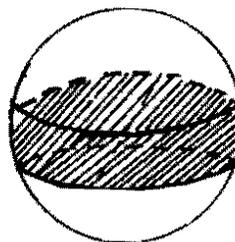
Si  $o \in \alpha$  los segmentos se llaman *semiesferas*.

*Zona esférica*

Parte de la superficie esférica comprendida entre dos secciones paralelas.

*Segmento bibásico*

Parte de la esfera comprendida entre dos secciones paralelas.



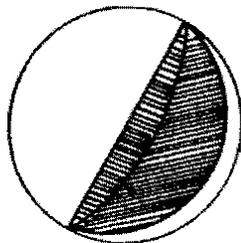
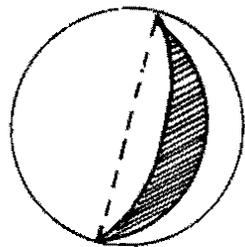
- Huso y cuña esféricos:

*Huso esférico*

Parte de la superficie esférica comprendida entre las caras de un diedro cuya arista es eje.

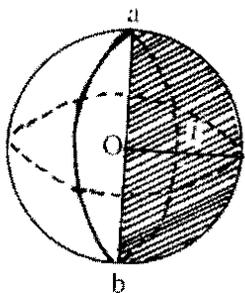
*Cuña esférica*

Parte de la esfera comprendida entre las caras de un diedro cuya arista es eje.



e) *Generación de una esfera:*

Una esfera se puede generar por la rotación de un semicírculo que gira alrededor del diámetro.



semicírc. (o, r);  $\overline{ab}$  diámetro

esf. (o, r)

### 3. POLIEDROS REGULARES:

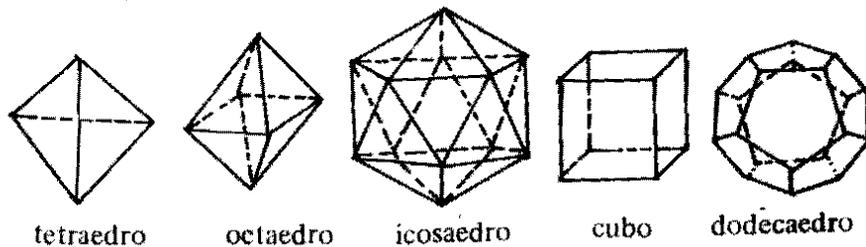
Poliedro regular es todo poliedro cuyas caras son polígonos regulares y en cada uno de los vértices concurre el mismo número de caras.

#### 3.1. - Existencia de los polígonos regulares:

Teniendo en cuenta que la suma de los ángulos de un poliedro es menor que  $360^\circ$  se pueden analizar las posibilidades de existencia de los poliedros regulares.

Pólígono	CARAS		POLIEDRO	
	Nº en cada vértice	Suma de los ángulos del poliedro	Nombre	Nº de caras
	3	$3 \times 60^\circ = 180^\circ$	tetraedro	4
	4	$4 \times 60^\circ = 240^\circ$	octaedro	8
	5	$5 \times 60^\circ = 300^\circ$	icosaedro	20
	6	$6 \times 60^\circ = 360^\circ$	no existe	---
	3	$3 \times 90^\circ = 270^\circ$	cubo o hexaedro	6
	4	$4 \times 90^\circ = 360^\circ$	no existe	---
	3	$3 \times 108^\circ = 324^\circ$	dodecaedro	12
	4	$4 \times 108^\circ = 432^\circ$	no existe	---
	3	$3 \times 120^\circ = 360^\circ$	no existe	---

Por lo tanto los únicos poliedros regulares que existen son los siguientes:



tetraedro

octaedro

icosaedro

cubo

dodecaedro

### 3.2. - Aplicación de la fórmula de Euler a poliedros regulares:

$$C + V = A + 2$$

Poliedro	C	V	$C + V = A + 2$
tetraedro	4	4	$4 + 4 = 6 + 2$
cubo	6	8	$6 + 8 = 12 + 2$
octaedro	8	6	$8 + 6 = 12 + 2$
dodecaedro	12	20	$12 + 20 = 30 + 2$
icosaedro	20	12	$20 + 12 = 30 + 2$

### 3.3. - Poliedros duales:

Es el par de poliedros regulares en que el número de caras de uno es el número de vértices del otro.

cubo - octaedro  
dodecaedro - icosaedro

#### - Observación:

El número de vértices de los poliedros regulares está dado por la siguiente fórmula:

$$\frac{\text{N}^\circ \text{ de caras} \times \text{N}^\circ \text{ de lados de la cara}}{\text{N}^\circ \text{ de caras que concurren en un vértice}}$$

Ejemplo: Dodecaedro

$$\text{N}^\circ \text{ de vértices} = \frac{12 \times 5}{3} = 20$$

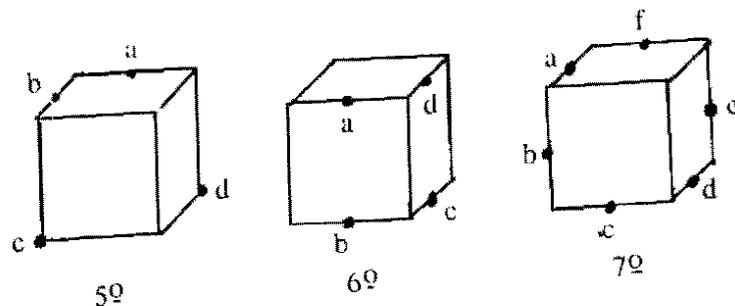
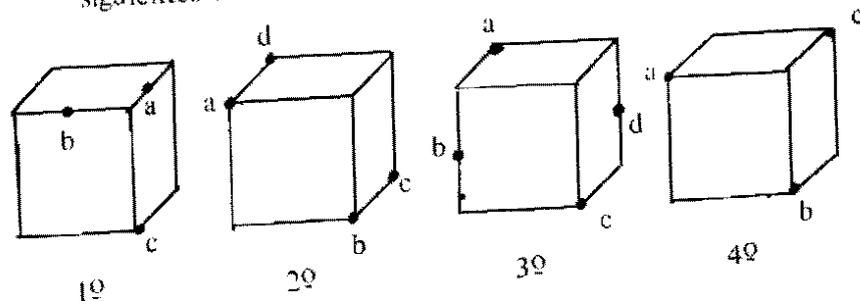
### EJERCICIOS DE APLICACION

19. - En el conjunto  $P = \{\text{poliedros regulares}\}$  aplicar la relación:

$R = \dots$  "tiene el mismo número de aristas que"...

- Dibujar el diagrama de Venn.
- Escribir el conjunto de pares ordenados.
- Enumerar las propiedades que cumple la relación.
- En caso de producirse una partición en  $P$ , escribir los subconjuntos que determina.

20. - Escribir el nombre del polígono que determina la sección producida al unir los puntos señalados en cada uno de los siguientes cubos (unir en orden alfabético).



### V. - AREA DE POLIEDROS Y CUERPOS REDONDOS

En general:

Área de cuerpos geométricos: Suma de las áreas de sus caras.

En el caso de ciertos cuerpos (prismas, cilindros, pirámides y conos) se debe distinguir entre:

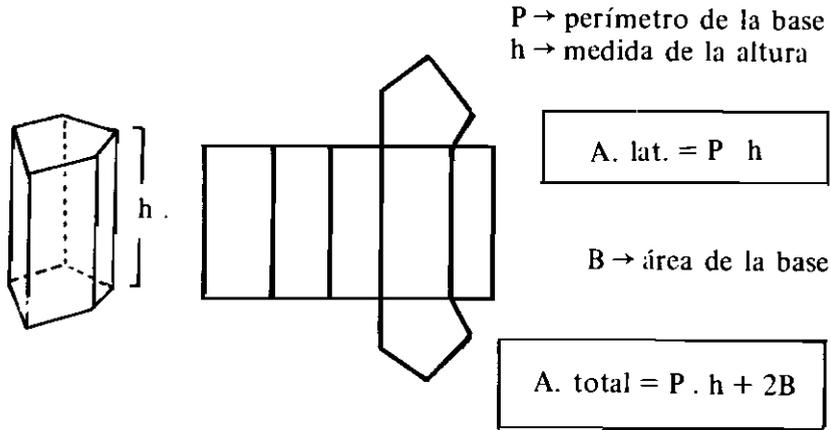
*área lateral* suma de las áreas de las caras laterales

y *área total* suma del área lateral y las áreas de las bases.

### 1. - AREA DEL PRISMA RECTO:

1.1. - **El área lateral de un prisma recto** es igual a la de un rectángulo cuyas dimensiones son: P (perímetro de la base) y h (medida de la altura del prisma).

Dicho rectángulo se llama *desarrollo de la superficie lateral* y es resultado de aplicar sobre el plano las caras laterales rectangulares unidas por sus aristas comunes.



### 1.2. - Prisma recto regular:

$$A. \text{ total} = P \cdot h + 2 \frac{P \cdot a_B}{2}$$

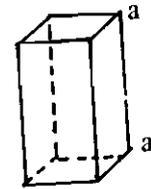
$a_B$  → medida de la apotema de la base

$$A. \text{ total} = P \cdot h + P \cdot a_B$$

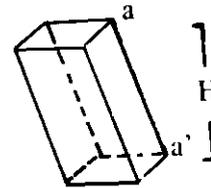
$$A. \text{ total} = P (h + a_B)$$

### Observación:

*Prisma oblicuo:* hay que tener presente que la altura del prisma no es congruente con la longitud de las aristas laterales.



H → altura del prisma recto  
 $H \cong \overline{aa'}$

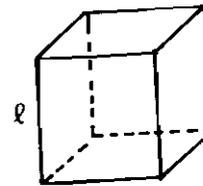


H → altura del prisma oblicuo  
 $H \neq \overline{aa'}$

A. lat. = suma de las áreas de las caras laterales

### 1.3. - Area del cubo:

$\ell$  → medida de la arista



$$A. \text{ lat.} = \underbrace{P}_{4\ell} \cdot \ell \quad A. \text{ total} = 4\ell^2 + 2\ell^2$$

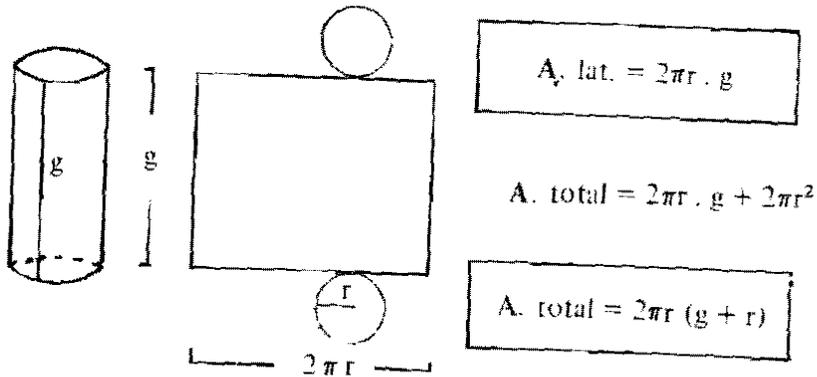
$$A. \text{ lat.} = 4 \ell \cdot \ell$$

$$A. \text{ lat.} = 4\ell^2$$

$$A. \text{ total} = 6\ell^2$$

## 2. - AREA DEL CILINDRO RECTO:

El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro recto es un rectángulo cuyas dimensiones son:  $P$  (longitud de la circunferencia de radio  $r$ ) y  $g$  (medida de la generatriz).



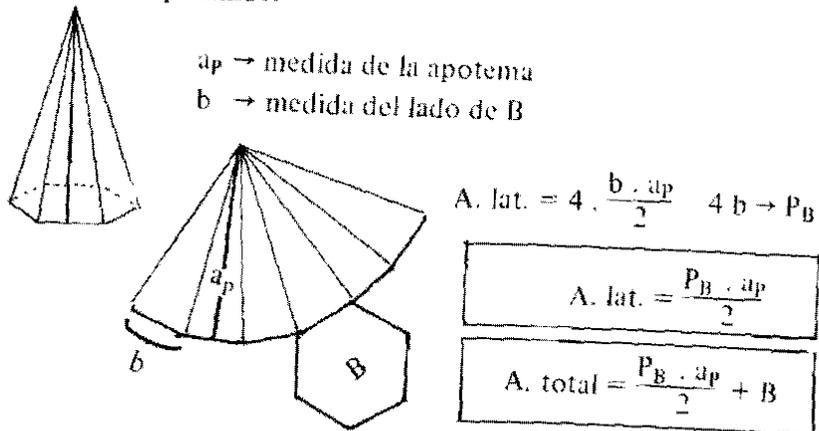
$$A_{\text{lat.}} = 2\pi r \cdot g$$

$$A_{\text{total}} = 2\pi r \cdot g + 2\pi r^2$$

$$A_{\text{total}} = 2\pi r (g + r)$$

## 3. - AREA DE LA PIRAMIDE RECTA REGULAR:

Las caras laterales son triángulos isósceles congruentes de altura y base respectivamente congruentes con la apotema y el lado de la base de la pirámide.



$a_p \rightarrow$  medida de la apotema

$b \rightarrow$  medida del lado de B

$$A_{\text{lat.}} = 4 \cdot \frac{b \cdot a_p}{2} \quad 4b \rightarrow P_B$$

$$A_{\text{lat.}} = \frac{P_B \cdot a_p}{2}$$

$$A_{\text{total}} = \frac{P_B \cdot a_p}{2} + B$$

Pero, como la base es un polígono regular:

$$\Rightarrow B = \frac{P_B \cdot a_B}{2}$$

$$\text{y } A_{\text{total}} = \frac{P_B \cdot a_p}{2} + \frac{P_B \cdot a_B}{2}$$

$$A_{\text{total}} = \frac{P_B}{2} (a_p + a_B)$$

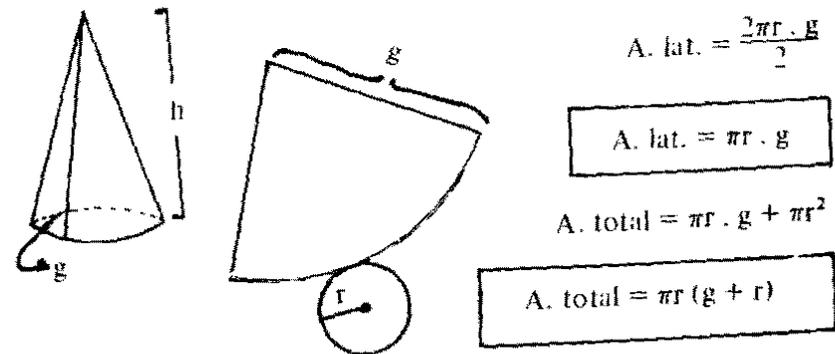
Area de la pirámide no regular:

$A_{\text{lat.}} =$  suma de las áreas de las caras laterales

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + B$$

## 4. - AREA DEL CONO RECTO:

El desarrollo del cono recto circular es un sector circular de radio  $g$  (medida de la generatriz) y de longitud del arco igual a la longitud  $C(o, r)$ .



$$A_{\text{lat.}} = \frac{2\pi r \cdot g}{2}$$

$$A_{\text{lat.}} = \pi r \cdot g$$

$$A_{\text{total}} = \pi r \cdot g + \pi r^2$$

$$A_{\text{total}} = \pi r (g + r)$$

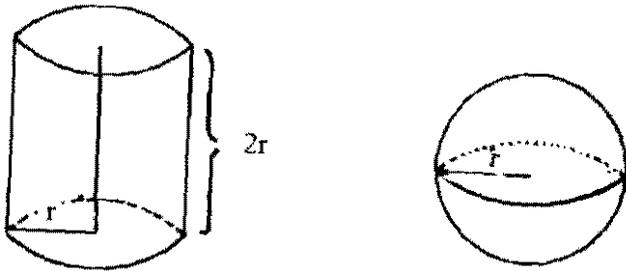
### 5. -- AREA DE LOS POLIEDROS REGULARES:

En general, para el poliedro regular de  $n$  caras:

$$A = \text{área de una cara} \cdot n$$

### 6. -- AREA DE LA SUPERFICIE ESFERICA:

Sean:



Si se cubren la superficie lateral del cilindro y la superficie esférica con una capa de revestimiento plástico, de espesor uniforme, se comprobará que se utiliza la misma cantidad de material.

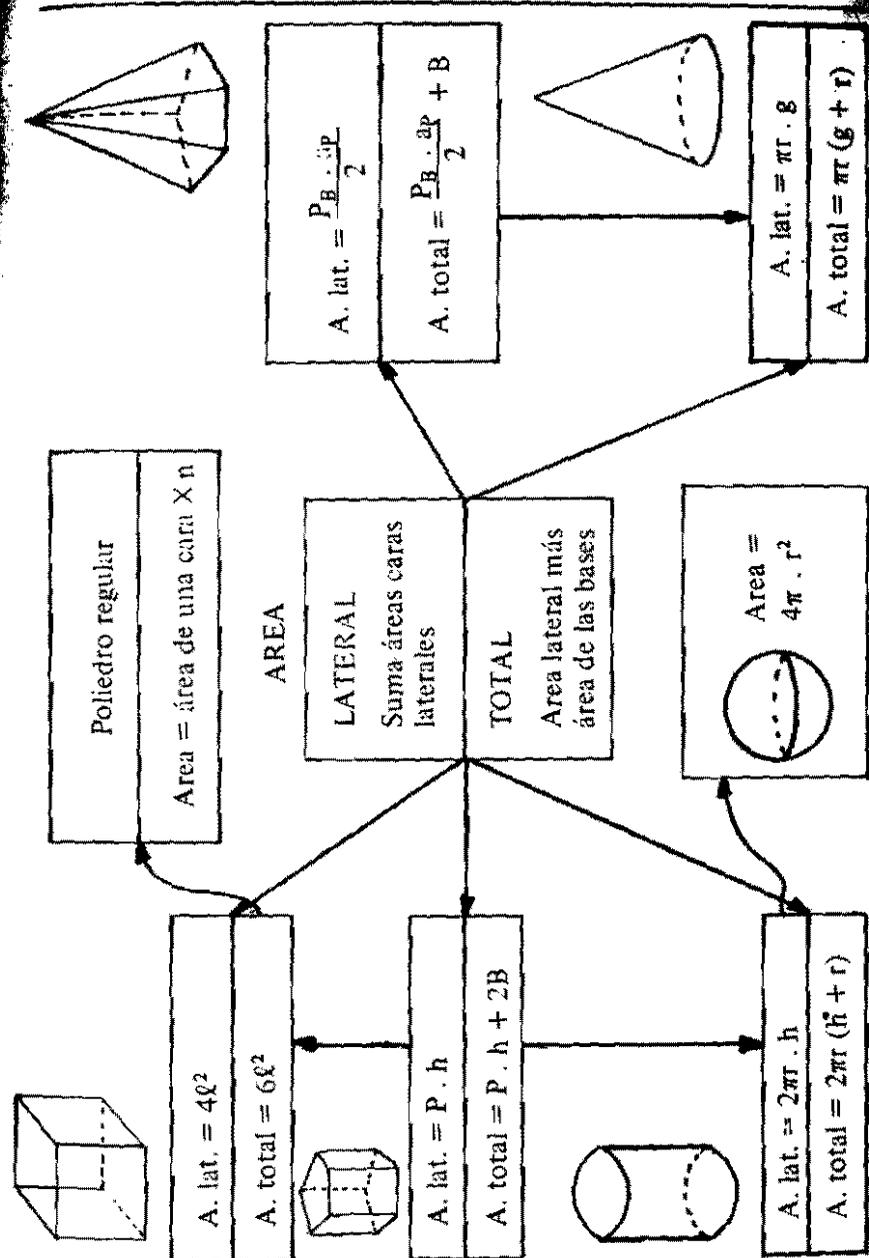
Por lo tanto:

$$\text{Sup. lat. cilindro} = \text{sup. esférica}$$

$$\Rightarrow A. \text{ lat. cilindro} = A. \text{ esfera}$$

$$2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot 2r$$

$$A. \text{ esfera} = 4\pi r^2$$

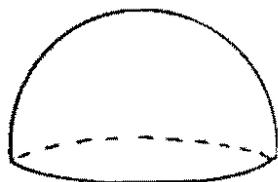


## EJERCICIOS DE APLICACION

21. - Una pirámide recta tiene por base un cuadrado de 12 cm de lado. Calcular el área lateral y total, sabiendo que la apotema es  $\frac{5}{6}$  del lado de la base.
22. - Un prisma recto tiene por base un rombo en el que una de sus diagonales es  $\frac{3}{4}$  de la otra y la suma de ambas es 14 cm. Calcular la superficie total sabiendo que la longitud de la altura es igual al semiperímetro de la base.
23. - Comprobar que en un cono en que:  $g \cong 2r$ , el área lateral es igual al doble del área de la base.
24. - a) El radio de una superficie esférica E es el doble del radio de otra E'. Expresar la razón entre sus áreas.  
b) Idem si el radio de E es tres veces el de E'.
25. - Completar el cuadro con las longitudes y áreas correspondientes al cubo:

	Long. arista	Sup. cara	Sup. lat.	Sup. total
A	5 cm			
B		36 dm <sup>2</sup>		
C			64 cm <sup>2</sup>	
D				54 m <sup>2</sup>

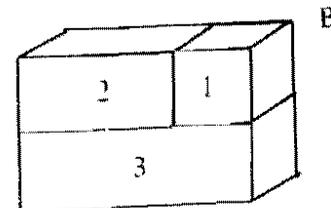
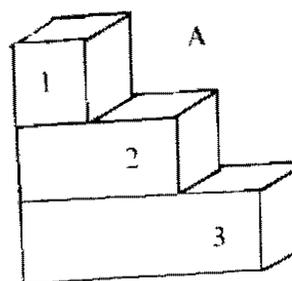
26. - Se debe pintar un cobertizo de forma de hemisferio.



Si para pintar el piso se emplean 17 litros de pintura, ¿cuántos litros se necesitarán para cubrir el exterior del cobertizo?

## VI. - COMPARACION DE VOLUMENES

### 1. - CUERPOS EQUICOMPUESTOS:

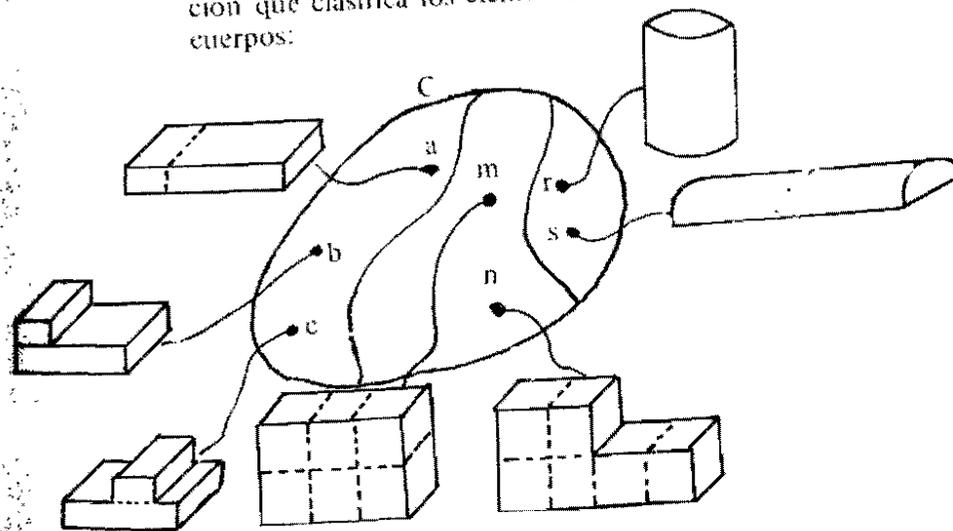


El cuerpo A puede separarse en los prismas 1, 2, 3.  
Con la unión de estos prismas puede formarse otro poliedro B.

A y B son poliedros equicompuestos porque son unión del mismo número de poliedros congruentes dos a dos, teniendo en común solamente caras o partes de caras.

### 2. - RELACION DE EQUIVALENCIA: VOLUMEN:

R = ... "es equicompuesto con"... es una relación que clasifica los elementos de un conjunto C de cuerpos:



En C se produce una partición.

Cada subconjunto es una clase de equivalencia que define un volumen.

Los cuerpos que pertenecen a una clase son equivalentes en cuanto a su volumen.

Los cuerpos equicompuestos, llamados también equivalentes, tienen el mismo volumen.

En una clase de equivalencia, si se conoce el valor del volumen de un cuerpo, se conoce también el del volumen de todos los demás cuerpos de la misma.

### 3. - COMPROBACION INTUITIVA DEL VOLUMEN DE LOS CUERPOS:

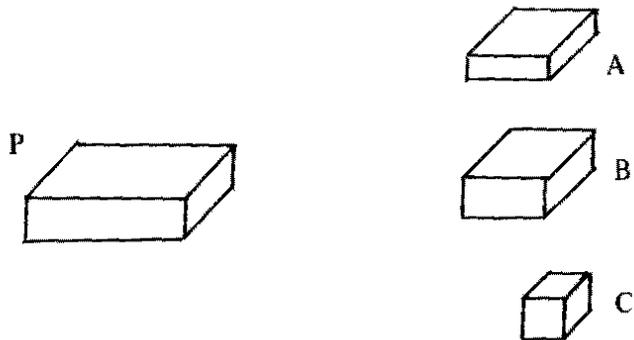
Se construyen dos cuerpos huecos y se llena uno de ellos con arena; si al volcarse el contenido en el otro, éste queda completamente lleno sin desbordarse, entonces son equivalentes por su volumen.

### 4. - MEDIDA DEL VOLUMEN:

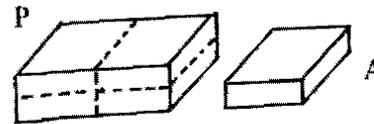
Como en el caso de la longitud y la superficie, el primer paso es la elección de la unidad.

El volumen del mismo poliedro puede ser medido con distintas unidades.

Dado P hueco y A, B y C como unidades:

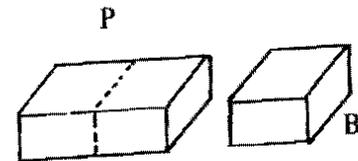


Si para llenar P se necesitan 4 A, 2 B y 8 C, decimos:



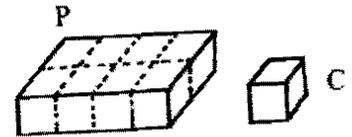
$$\text{Vol. P} = 4 \text{ Vol. A}$$

$$\text{Med. Vol. P}_A = 4$$



$$\text{Vol. P} = 2 \text{ Vol. B}$$

$$\text{Med. Vol. P}_B = 2$$



$$\text{Vol. P} = 8 \text{ Vol. C}$$

$$\text{Med. Vol. P}_C = 8$$

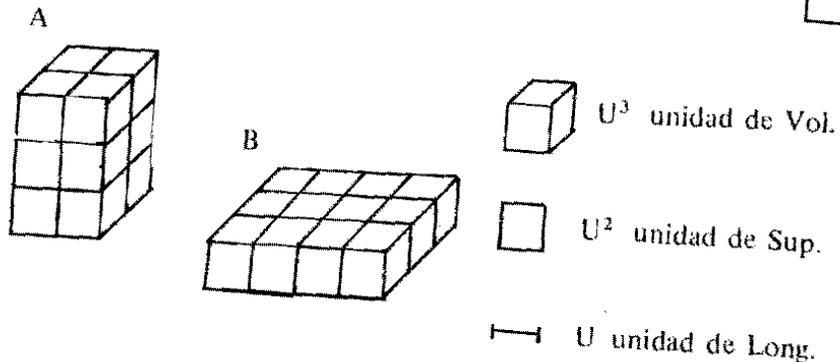
El volumen del paralelepípedo P siempre es el mismo, no depende de la unidad.  
La medida de su volumen es el número que varía de acuerdo con la *unidad* elegida.

## 5. - CALCULO DEL VOLUMEN:

### 5.1. - Volumen del paralelepípedo:

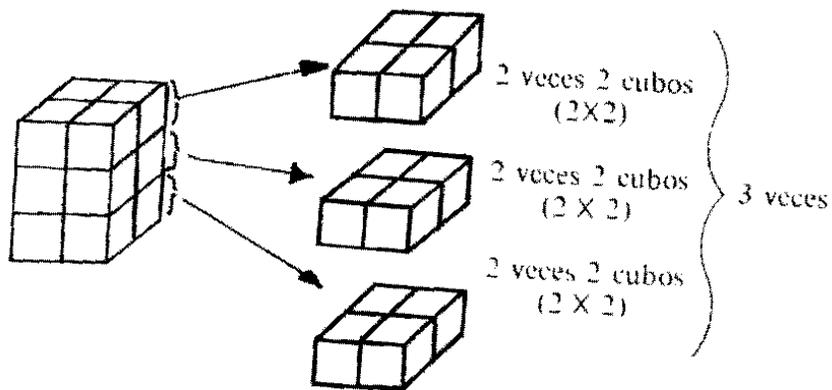
Con varios cubos unidad, convenientemente dispuestos, se pueden formar paralelepípedos; el número de cubos utilizados es la medida del volumen del paralelepípedo.

Por ejemplo: con 12 cubos congruentes con



En ambos casos la cara del cubo unidad funciona como unidad de superficie y la arista, como unidad de longitud.

En el caso A:



$$(2 \times 2) \times 3 = 12$$

Nº de U	X	Nº de U	X	Nº de U	=	Nº de U <sup>3</sup>
med. ancho	X	med. largo	X	med. alto	=	med. vol.

$$\underbrace{\text{Nº de U}^2} \times \underbrace{\text{Nº de U}} = \underbrace{\text{Nº de U}^3}$$

área base	X	med. altura	=	med. vol.
-----------	---	-------------	---	-----------

La medida del volumen del papalepípedo es igual al producto de las medidas de sus tres dimensiones tomadas con respecto a la misma unidad; o bien, al producto del área de la base por la medida de la altura.

5.2. - Volumen de otros cuerpos.

Si se construyen modelos huecos de un prisma P y un paralelepípedo P' de bases equivalentes y alturas congruentes, al llenar P con arena y volcarla en P', se comprueba que:



Vol prisma = Vol paralelepípedo

Vol prisma = Área B X h

Esta comprobación es válida para el prisma oblicuo

Prismas equivalentes = Bases equivalentes alturas congruentes

El cubo es un paralelepípedo

Vol cubo = Vol paralelepípedo

Vol cubo = área B X h

Vol cubo =  $l \times l \times l$

Vol cubo =  $l^3$



Si se llena la pirámide con arena y se vuelca en el prisma, se necesitara repetir la operacion 3 veces para llenarlo

3 Vol pirámide = Vol prisma

Vol. pirámide =  $\frac{1}{3}$  Vol prisma

Vol pirámide =  $\frac{1}{3}$  área B h

Param equivalentes = Bases equivalentes alturas congruentes

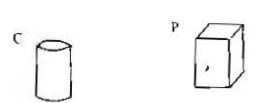
cil. = prisma = Bases equivalentes alturas congruentes

Vol. = área B . h

B base  
h medida altura  
l medida lado

Cono = pirámide = Bases equivalentes alturas congruentes

La misma comprobación realizada con el paralelepípedo y el prisma puede hacerse con un prisma y un cilindro



C = P

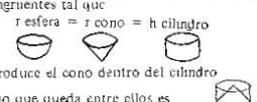
Vol cilindro = Volumen prisma

Vol cilindro = área B X h

Vol cilindro =  $\pi r^2 \times h$

Si se construyen modelos de semiesfera cilindro y cono de bases congruentes tal que

r esfera = r cono = h cilindro



y se introduce el cono dentro del cilindro

El espacio que queda entre ellos es

Vol cilindro - Vol cono

Si la arena que llena la semiesfera se vuelca en ese espacio, lo ocupa completamente



Vol semiesfera = Vol cilindro - Vol cono

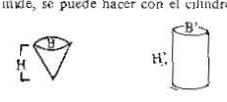
Vol semiesfera =  $\pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Vol semiesfera =  $\pi r^2 r - \frac{1}{3} \pi r^2 r$

Vol semiesfera =  $\pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3$

Vol esfera =  $2 \frac{2}{3} \pi r^3$

La misma comprobación realizada con el cilindro y la pirámide, se puede hacer con el cilindro y el cono.



3 Vol cono = Vol cilindro

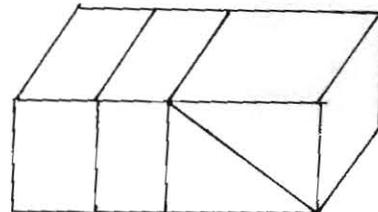
Vol cono =  $\frac{1}{3}$  Vol cilindro

Vol cono =  $\frac{1}{3}$  área B h

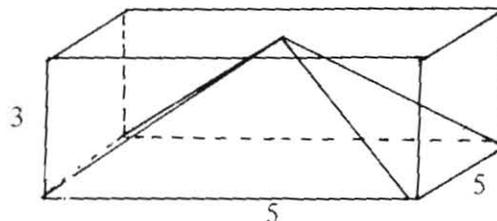
Vol cono =  $\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

## EJERCICIOS DE APLICACION

27. - Construir en cartulina los poliedros que están indicados en el paralelepípedo y formar cuerpos equivalentes.



28. - Dado un prisma hexagonal de 4 cm de lado, 2,76 cm de apotema y 10 cm de alto, calcular el largo, el ancho y la altura de un paralelepípedo equivalente.
29. - ¿Qué relación hay entre el volumen de la pirámide y el volumen del paralelepípedo?

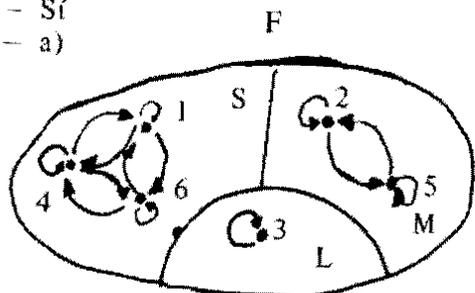


30. - Completar el cuadro: CILINDROS

radio de la base	base	altura	volumen
10 cm		2 dm	
	78.50 cm <sup>2</sup>		785 cm <sup>3</sup>
	12.56 m <sup>2</sup>	5 m	
		1 m	282,600 dm <sup>3</sup>



9. - A y C  
 10. - Sí, porque la congruencia implica semejanza.  
 11. - a) y b)  
 12. - Sí  
 13. - a)



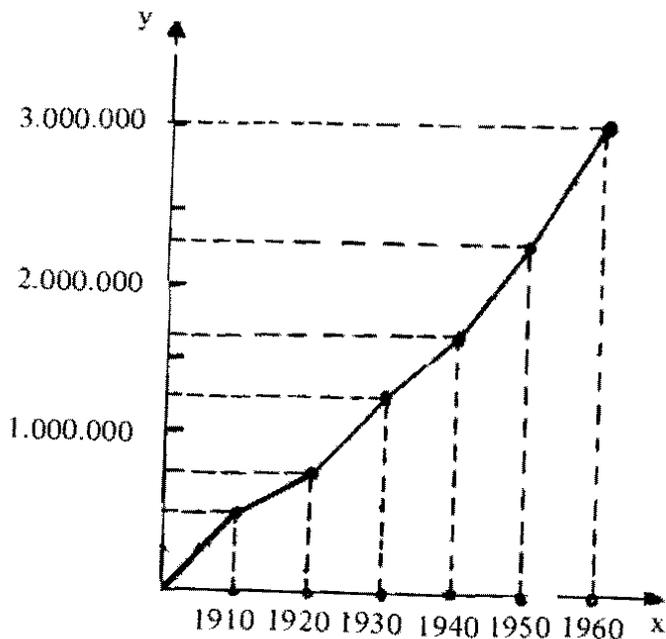
- b)
- $$S = \{1, 4, 6\}$$
- $$M = \{2, 5\}$$
- $$L = \{3\}$$

14. -

15. - 200 km

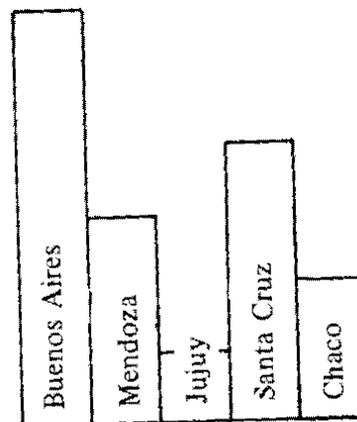
16. - A = 2.000 m; B = 3.000 m; C = 1.500 m  
 D = 3.500 m; E = 2.500 m

17. - a) y b)

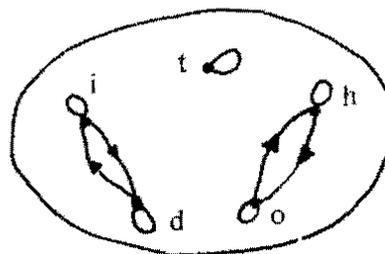


c)  $\frac{1}{500.000}$

18. -



19. - a)



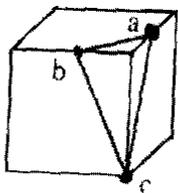
- t → tetraedro
- h → hexaedro
- o → octaedro
- d → dodecaedro
- i → icosaedro

b)  $\{(t, t); (h, h); (h, o); (o, o); (o, h); (d, d); (d, i); (i, i); (i, d)\}$

c) Reflexiva, simétrica y transitiva.

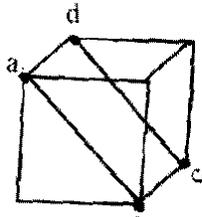
- d)
- $$I = \{t\}$$
- $$II = \{h, o\}$$
- $$III = \{d, i\}$$

20. -



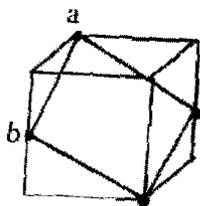
1Q

triángulo isósceles



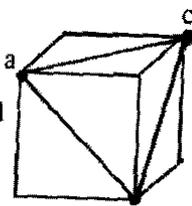
2Q

rectángulo



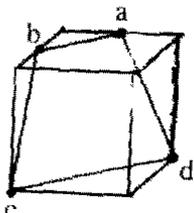
3Q

cuadrado



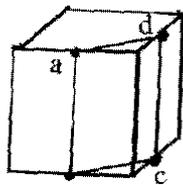
4Q

triángulo equilátero



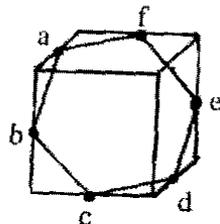
5Q

trapezio isósceles



6Q

rectángulo



7Q

hexágono regular

21. -

$$A. \text{ lat.} = \frac{P_B \cdot a_p}{2}$$

$$A. \text{ total} = \frac{P_B \cdot a_p}{2} + B \quad \left| \begin{array}{l} \text{Cálculo de } a_p: \\ \frac{5}{6} \text{ de } 12 = 10 \end{array} \right.$$

$$A. \text{ lat.} = \frac{12 \times 4 \times 10}{2}$$

$$A. \text{ total} = 240 + 12 \cdot 2$$

$$A. \text{ lat.} = 240$$

$$A. \text{ total} = 384$$

Area lateral de la pirámide, en  $\text{cm}^2$  es: 240

Area total de la pirámide, en  $\text{cm}^2$  es: 384

22. -  $A. \text{ total} = P_B \cdot h + 2B$   
 $A. \text{ total} = \boxed{?} \cdot \boxed{?} + 2\boxed{?}$

Cálculos auxiliares:

1Q) medida de las diagonales:

$$\text{si } d = 1 \Rightarrow d' = \frac{3}{4}$$

$$d + d' = 14$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \quad \downarrow \\ \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \end{array}$$

$$\frac{7}{4} = 14 \begin{array}{l} \nearrow d \rightarrow \frac{14 \times 4}{7} = 8 \\ \searrow d' \rightarrow \frac{14 \times 3}{7} = 6 \end{array}$$

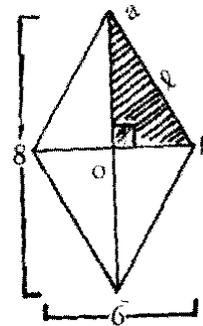
$$A. \text{ tot.} = 5 \times 4 \times \left(\frac{5 \times 4}{2}\right) + 2 \frac{6 \times 8}{2}$$

$$A. \text{ tot.} = 200 + 48$$

2Q) medida del lado:

$$\overline{ao} = \frac{1}{2} d = 4$$

$$\overline{ob} = \frac{1}{2} d' = 3$$



$$l = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$l = \sqrt{25}$$

$$l = 5$$

El área total del prisma, en  $\text{cm}^2$  es: 248

23. -  $A. \text{ lat. cono} = \pi r \cdot g$

$$A. \text{ lat. cono} = \pi r \cdot 2r$$

$$A. \text{ lat. cono} = 2\pi r^2$$

$$B = \pi \cdot r^2$$

$$A = 2B$$

24. - a)  $r = 2r'$

$$A \cdot E = 4\pi (2r')^2$$

$$A \cdot E' = 4\pi r'^2$$

$$\frac{A \cdot E}{A \cdot E'} = \frac{4\pi \cdot 4r'^2}{4\pi r'^2}$$

$$\frac{A \cdot E}{A \cdot E'} = 4$$

b)  $r = 3r'$

$$A \cdot E = 4\pi (3r')^2$$

$$A \cdot E' = 4\pi r'^2$$

$$\frac{A \cdot E}{A \cdot E'} = \frac{4\pi \cdot 9r'^2}{4\pi r'^2}$$

$$\frac{A \cdot E}{A \cdot E'} = 9$$

25.

	Long. arista	Sup. cara	Sup. lat.	Sup. total
A	5 cm	25 cm <sup>2</sup>	100 cm <sup>2</sup>	150 cm <sup>2</sup>
B	6 dm	36 dm <sup>2</sup>	144 dm <sup>2</sup>	216 dm <sup>2</sup>
C	4 cm	16 cm <sup>2</sup>	64 cm <sup>2</sup>	96 cm <sup>2</sup>
D	3 m	9 m <sup>2</sup>	36 m <sup>2</sup>	54 m <sup>2</sup>

26. - A. círculo =  $\pi r^2$

$$A. \text{ hemisferio} = \frac{1}{2} (4\pi r^2)$$

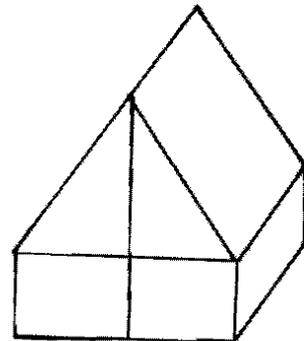
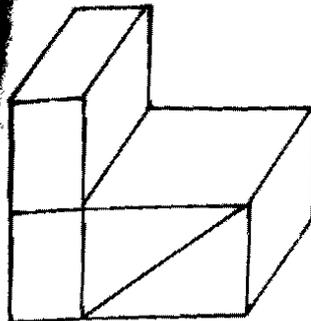
$$A. \text{ hemisferio} = 2\pi r^2$$

$$A. \text{ hemisferio} = 2 A. \text{ círculo}$$

Se necesitan:  $2 \times 17\ell =$

$$34\ell$$

27. - Ejemplos:



28. - Ejemplo: 10 cm; 8,28 cm; 4 cm.

29. -  $\frac{1}{3}$

30. -

radio de la base	base	altura	volumen
10 cm	314 cm <sup>2</sup>	2 dm	62,80 cm <sup>3</sup>
5 cm	78,50 cm <sup>2</sup>	10 cm	785 cm <sup>3</sup>
2 m	12,56 m <sup>2</sup>	5 m	62,8003 m <sup>3</sup>
3 dm	28,26 dm <sup>2</sup>	1 m	282,600 dm <sup>3</sup>

31. -  $\frac{1}{3}$

32. - 1º) 12

2º) 3

3º) 6

33. - Vol. del cubo de lado 1:  $1 \times 1 \times 1 = 1$   
Vol. del cubo de lado 4:  $4 \times 4 \times 4 = 64$



## INDICE

CAPITULO I. – <i>Superficie</i> .....	9
1.– Figuras equicompuestas .....	9
2.– Relación de equivalencia: superficie .....	9
3.– Comparación intuitiva de superficie de figuras ..	10
4.– Condiciones para que se cumpla la equivalencia entre polígonos .....	12
5.– Medida de la superficie: área .....	16
6.– Teorema de Pitágoras .....	22
EJERCICIOS DE APLICACION .....	25
CAPITULO II – <i>Semejanza</i> .....	27
1.– Segmentos proporcionales .....	27
2.– Semejanza de polígonos .....	33
3.– Escalas .....	38
EJERCICIOS DE APLICACION .....	39
CAPITULO III – <i>Angulos diedros y poliedros</i> .....	42
1.– Angulos diedros .....	42
2.– Angulos poliedros .....	48
CAPITULO IV. – <i>Cuerpos geométricos</i> .....	49
1.– Poliedros .....	50
2.– Cuerpos redondos .....	58
3.– Poliedros regulares .....	65

EJERCICIOS DE APLICACION .....	67
CAPITULO V. – <i>Area de poliedros y cuerpos redondos</i> ..	67
1.– Area del prisma recto .....	68
2.– Area del cilindro recto .....	70
3.– Area de la pirámide recta regular .....	70
4.– Area del cono recto .....	71
5.– Area de los poliedros regulares .....	72
6.– Area de la superficie esférica .....	72
EJERCICIOS DE APLICACION .....	74
CAPITULO VI. – <i>Comparación de volúmenes</i> ..	75
1.– Cuerpos equicompuestos .....	75
2.– Relación de equivalencia: volumen .....	75
3.– Comprobación intuitiva del volumen de los cuerpos .....	76
4.– Medida del volumen .....	76
5.– Cálculo del volumen .....	78
EJERCICIOS DE APLICACION .....	83
RESULTADOS DE TODOS LOS EJERCICIOS DE APLI- CACION INCLUIDOS EN ESTA PUBLICACION	85
BIBLIOGRAFIA .....	93