Ministerio de Educación y Justicia
República Argentina

Organización
de los Estados Americanos

DIRECCION NACIONAL DE EDUCACION SUPERIOR

PROYECTO DE FORMACION DEL PERSONAL DE EDUCACION PARA LA RENOVACION, REAJUSTE Y PERFECCIONAMIENTO DEL SISTEMA Y DEL PROCESO EDUCATIVO

MATEMATICAS

Buenos Aires
República Argentina
1987

NOMINA DE AUTORIDADES

MINISTERIO DE EDUCACION Y JUSTICIA

Ministro de Educación y Justicia:
Dr. Julio Raúl Rajneri

Secretario de Educación:
Dr. Adolfo Stubrin

Subsecretario de Gestión Educativa:
Prof. Nilo Fulvi

Director Nacional de Educación Superior y del Proyecto:
Dr. Ovide J. Menin

Subdirectora Nacional de Educación Superior:
Prof. Sulma Guridi Flores

Coordinadora del Proyecto:
Prof. Emilce E. Botte

SECRETARIA GENERAL DE LA ORGANIZACION DE LOS ESTADOS AMERICANOS

Director a.i. del Departamento de Asuntos Educativos:
Dr. Oswaldo Kreimer

Jefe de la División de Mejoramiento de Sistema Educativos:
Prof. Luis Osvaldo Roggi

Representante de la Secretaría General de la O.E.A. en la Argentina:
Dr. Benno Sander

Coordinador del Area Educación, Ciencia y Cultura:
Sr. Guillermo Corsino

Ministerio de Educación y Justicia
República Argentina

Organización
de los Estados Americanos

APRENDIZAJE Y MATEMATICA

II

Prof. Norma Sanguineti de Saggese

APRENDIZAJE Y MATEMATICA

DOCUMENTO II

LOS CAMPOS DE PROBLEMAS DIDACTICOS

1. El campo de problemas multiplicativos
2. Análisis didáctico de los problemas multiplicativos
3. La multiplicación y la división en el conjunto de los números naturales.
4. La multiplicación y la división en el conjunto de los números reales.
5. El concepto de fracción
6. La construcción de algoritmos
7. Sobre la enseñanza de la geometría en la escuela primaria

Los campos de problemas didácticos

La reflexión sobre la adquisición de conocimientos en el ámbito escolar no puede quedar limitada al estudio del desarrollo del pensamiento infantil ni a la aplicación de la técnica de resolución de problemas. El campo de contenidos abordados por la Didáctica de la Matemática es muy amplio y toma como punto de partida los aprendizajes espontáneos de los niños, para desarrollar intencionalmente en la escuela, accicnes tendientes a profundizar y ampliar esos aprendizajes.

Por lo tanto, el propósito de este documento no es hacer teoría matemática, sino abordar la construcción espontánea del conocimiento matemático en los niños y la intervención intencional que la escuela, como institución social, se compromete a llevar a cabo para potenciar esa construcción, tanto en forma individual como grupal.

En el primer documento sobre Aprendizaje y Matemática hemos presentado algunas reflexiones sobre la construcción de la serie numérica y el campo de los problemas aditivos en la escuela primaria. En esta oportunidad nos ocuparemos del campo de los problemas multiplicativos, es decir de aquellas situaciones cuya solución implica el uso de las operaciones aritméticas de **multiplicación** y **división**.

"Nos proponemos designar como **campo conceptual**, un campo de conocimientos suficientemente homogéneo para que pueda ser analizado por una red conexa de conceptos y relaciones, suficientemente extenso como para no dejar de lado ciertos aspectos que puedan desempeñar un papel importante en los procesos de adquisición. Como la adquisición de conceptos se realiza principalmente a través de la solución de problemas, un campo conceptual es, ante todo, un **espacio de problemas**". (1)

En ese sentido, no puede considerarse en forma aislada la adquisición de nociones tales como la proporcionalidad directa que subyace en la construcción de la tabla de multiplicación por un número constante - de la noción de fracción, íntimamente ligada, a su vez, a la división exacta. Por otra parte, estas mismas operaciones aplicadas a cantidades continuas como la longitud o la superficie, están implícitas en la acción de medir, que se vincula no sólo con la geometría sino también con la cuantificación de fenómenos físicos, naturales, sociales, etc.

Se va tejiendo así una imbricada red de conocimientos entre los que no puede establecerse un orden estrictamente lineal pues se van desarrollando según los intereses del que aprende, las estimulaciones del medio y, por supuesto, las posibilidades evolutivas de cada uno.

Desde edad muy temprana, los niños se interesan en la exploración del medio que los rodea. Ese medio contiene objetos só-

---

(1) Vergnaud y Ricco - Didáctica y Adquisición de Conceptos Matemáticos, Problemas y métodos - Revista Argentina de Educación, Año IV, Nº 6, pág. 69.

lidos, entre los cuales está el propio niño. Si bien cada objeto/ es "uno" en sí mismo, cuando por alguna razón se lo asocia a otro u otros - tan "unos" como él - la colección así integrada recibe/ un nombre que indica el número de objetos que la componen. Por ejemplo "par" de guantes, "siete" enanitos, "millar" de personas,/ etc.

La cuantificación de estas colecciones, la posibilidad de compararlas por su número, de establecer totalidades o diferencias, se resuelve, en general, a través de problemas de adición y sustracción.

En cambio, cuando se trata de establecer la totalidad de elementos homogéneos que se ponen en correspondencia con cierto número de objetos, generalmente de distinta naturaleza, se hace necesaria la multiplicación. Por ejemplo, calcular el número de hojas que contienen nueve **cuadernos** sabiendo que cada uno tiene 48,/ implica la búsqueda del producto de 9 x 48.

1. El campo de problemas multiplicativos

Distinguiremos dos tipos de problemas multiplicativos de naturaleza conceptual diferente.

Número de huevos	Número de cajas
6	1
12	2
18	3
24	4
30	5

Si se trata, por ejemplo, de relacionar el número de huevos y el número de cajas necesarias para envasarlos de a media docena, se hace evidente una relación de proporcionalidad directa entre estas colecciones que muestra una igualdad de com

36	6
.	.
.	.
.	.
6n	n

portamiento entre ambas, pues al doble de una le corresponde el doble/ de la otra, así como a la mitad de/ una le corresponde la mitad de la otra, etc., y recíprocamente, tal como se puede observar en la tabla.

Este comportamiento análogo se conoce como "isomorfismo" / (de "isos": igual; "morphé": forma) y está implícito en la resolución de gran cantidad de problemas cotidianos.

Existe otro tipo de problemas multiplicativos en los que / se consideran dos magnitudes, por ejemplo, **longitud** y **superficie**, para dar por resultado una magnitud distinta a ambas, en/ nuestro ejemplo el **volumen**.

A lo largo de este documento se irá mostrando que el campo de problemas multiplicativos se vincula fundamentalmente con / dos tipos de relaciones:

1. La relación de isomorfismo entre las medidas de dos magnitudes diferentes que se ponen en correspondencia.

2. La relación del producto entre medidas de dos magnitudes / que constituyen así una nueva magnitud.

2. Análisis didáctico de los problemas multiplicativos

Para ayudar a los futuros maestros en la búsqueda de criterios que les permitan seleccionar las actividades que propon-/ drían en el aula, puede abordarse el análisis didáctico del //

campo de los problemas multiplicativos desde distintas perspectivas.

La primera de ellas puede contener algunas reflexiones teóricas sobre la operación multiplicación según los conjuntos en los que ella se aplique. En otras palabras, brindar un tratamiento formal en el marco de la lógica interna de la disciplina matemática. (Ver Anexo I).

Para los pedagogos, está cada día más claro que la propuesta anterior es obviamente uno de los aspectos por considerar. Otra perspectiva no menos importante, aunque menos formal, es el estudio de los problemas concretos que implican la necesidad de la multiplicación y división en el contexto en que esos problemas se generan.

Por último, la propuesta estrictamente didáctica trataría de compatibilizar ambas perspectivas con los aportes de la psicogenésis de esas nociones y los de las ciencias de la comunicación, de modo que las teorías del aprendizaje y las teorías de la enseñanza direccionen la práctica pedagógica.

3. La multiplicación y la división en el conjunto de los números naturales

Tal vez debamos recalcar, una vez más el valor didáctico en la escuela primaria de la experiencia manipulativa y de la resolución práctica de problemas que surgan con naturalidad de situaciones en las que se ha centrado el interés de los niños.

La mayoría de los docentes ya están familiarizados con las dificultades que enfrentan los niños para desarrollar el con / cepto de número. En el documento anterior señalamos que los pe queños tienen que descubrir los principios de la conservación, de la permanencia de la correspondencia, del orden natural y / la reversibilidad además de la interiorización de las reglas / que supone el sistema decimal y posicional que durante un lapso bastante prolongado aplican a cantidades discretas.

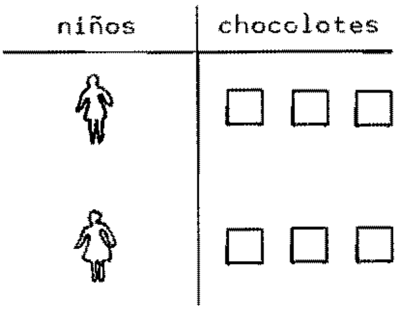
La adición y la sustracción, implícitas en la construcción del sistema de numeración, les permiten resolver situaciones a sociadas a las acciones de "comparar", "agregar", "reunir", // "quitar", "separar", "buscar lo que le falta a ... para llegar a ..." aplicadas a materiales homogéneos. Cuando un niño junta tres garbanzos y dos porotos y dice que hay cinco, en realidad ha operado en un universo homogéneo de "semillas". En cambio, es imposible obtener la suma de tres perros y dos truenos.

En este universo de cantidades discretas se pueden presentar situaciones como por ejemplo:

Visitaré a dos niños, quiero regalàr tres chocolates a cada uno, ¿cuántos chocolates necesito?

En general los niños pequeños resuelven el problema sobre/ la base de los esquemas aditivos que ellos poseen, duplicando/ la cantidad de chocolates.

Sin embargo, el concepto de multiplicación implica un pro ceso de mayor complejidad que el de la adición. De hecho, la a dición se aplica a cantidades homogéneas, en cambio, en la multiplicación y en la división, se distinguen claramente dos clases o universos entre los que existe una relación multívoca // constante.



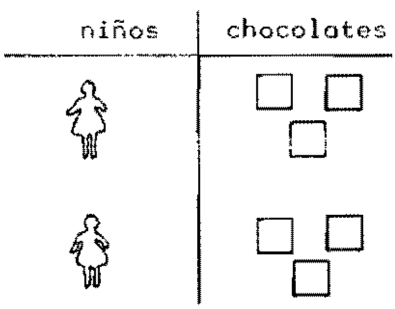
niños	chocolotes
1	3
2	$\boxed{6}$

por cada niño 3 chocolates

Los problemas que implican división son aún más frecuentes en la vida cotidiana de los niños. Por ejemplo:

Tengo 6 chocolates, quiero dar 3 a cada niño, ¿cuántos niños recibirán chocolates?

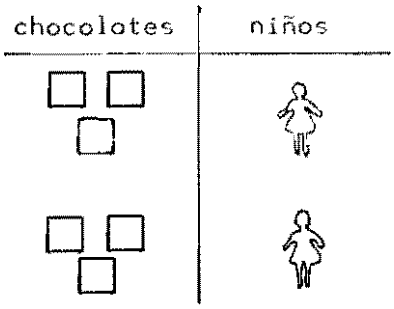
Supone la operación inversa de la anterior. Se vuelve al / estado inicial pues una transformación anula el efecto de la otra:



por cada uno, tres (multiplicación)

niños	chocolotes
1	3
2	$\boxed{6}$

$2 \times 3 = 6$



tres por cada uno (división)

chocolotes	niños
3	1
6	$\boxed{2}$

6 ./. 3 = 2

Si reflexionamos sobre el análisis dimensional involucrado en cada caso:

$$2\ (\text{niños}) \times 3\ \left(\frac{\text{chocolates}}{\text{niños}}\right) = 6 \text{ chocolates}$$

$$6 \text{ chocolates } \div 3\ \left(\frac{\text{choc.}}{\text{niños}}\right) = 2 \text{ niños}$$

se ve que existe un factor que muestra la relación numérica // constante entre los dos conjuntos y es, en realidad, el origen de la toma de conciencia de la proporcionalidad directa que // subyace en tantas relaciones multiplicativas cotidianas.

Por ejemplo:

$80\ \frac{\text{km}}{\text{hora}}$ que se lee: ochenta kilómetros por cada hora.

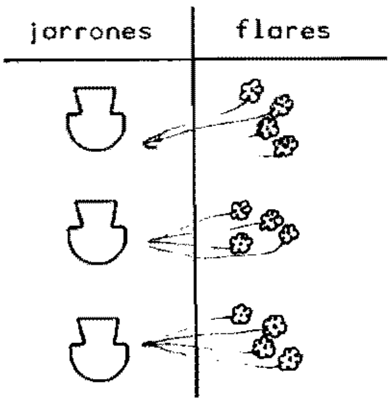
$24\ \frac{\text{horas}}{\text{día}}$ que se lee: veinticuatro horas por cada día.

$3\ \frac{\text{ruedas}}{\text{triciclo}}$ que se lee: tres ruedas por cada triciclo, etc.

Enseñar a los niños la multiplicación como una simple suma reiterada es esconder la naturaleza diferente de los factores/ en juego en este tipo de problemas.

Se trata de una simplificación engañosa que entorpece a- / prendizajes posteriores.

Es por ello que proponemos el uso didáctico de representaciones gráficas y tablas como las siguientes, que ponen en evidencia la naturaleza diferente de los dos universos y la relación multívoca constante entre los elementos de ambos.



jarrones	flores
1	4
2	8
3	$\boxed{12}$

por **cada** jarrón cuatro flores

Considerando la multiplicación simplemente como una suma abreviada se está considerando uno sólo de los conjuntos, en este caso el de las flores. Al decir "3 veces 4 flores igual a 12 flores", se comparan 4 y 12 por la relación: 12 es el triplo de 4 (relación de tipo escalar) y se omite decir que 3 es el número de jarrones mencionados en el problema. En la multiplicación en cambio, intervienen cuatro números: 1; 4; 3; 12 los que se evidencian en la tabla y también en la expresión "3 jarrones con 4 flores en **cada** jarrón son 12 flores en **total**".

La multiplicación, entre números naturales, es la operación que vincula dos conjuntos para determinar la totalidad de elementos de uno de ellos que se ponen en correspondencia con cierto número de elementos del otro, a partir de la relación constante que indica lo que corresponde a la unidad.

Por ejemplo: tengo 2 jarrones y deseo colocar 2 flores en cada uno, ¿cuántas flores necesito?

A partir de esta situación y variando el número de jarrones, / los niños podrán completar la tabla.

jarrones	flores
2	4
4	...
8	...
3	...
6	...
5	...
7	...
9	...

De esta manera se facilita que los niños trabajen sobre relaciones tales como:

- "el doble de" (4 doble de 2; 8 / doble de 4; 16 doble de 8; 6 doble de 3; etc.)
- "la mitad" (2 mitad de 4; 4 mi-/tad de 8; 8 mitad de 16, etc.).

La posibilidad de relacionar los conceptos de doble y mi-/tad a partir de situaciones concretas, favorece el desarrollo/ de la reversibilidad característica del pensamiento operato- / rio.

Es interesante observar que cuando los niños han trabajado con los productos 2x2; 4x2; 8x2; 3x2 y 6x2, utilizan distintas estrategias para calcular 5x2, tales como:

"2 flores más que para 4 jarrones" o bien

"es lo mismo que para 2 jarrones más 3 jarrones", etc., que muestran gran riqueza operatoria.

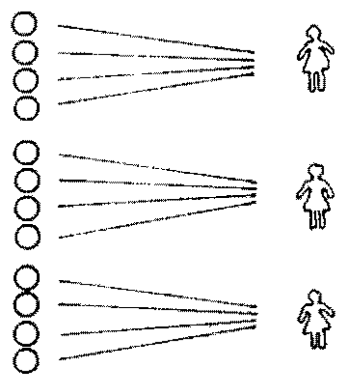
La multiplicación "por uno" y "por cero" se abordarán más/ adelante como casos particulares, pues en la vida cotidiana de los niños no hay situaciones significativas que las requieran, en especial la multiplicación "por cero", pues cuando no hay /

jarrones no se necesitan flores, y recíprocamente, si no hay / flores, los jarrones estarán vacíos.

La operación inversa de la multiplicación, vale decir la / división -entre números naturales- está asociada a las accio-/ nes de "partir" o "repartir", según se trate de calcular el nú mero de subconjuntos que se pueden formar, o el número de elementos de cada subconjunto.

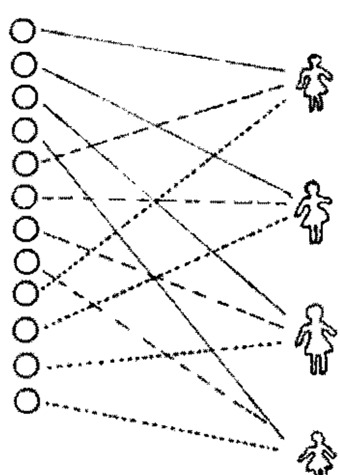
Por ejemplo, ante una docena de alfajores, una señora se / puede preguntar:

- ¿A cuántos niños le puede dar alfajores para que cada uno reciba cuatro?



o bien,

- ¿Cuántos entregará a cada niño si los reparte entre cuatro?



En ambos casos la solución simbólica del problema es: 12 : 4 = 3, pero las acciones y los resultados muestran dife-/rencias.

En el primer caso se habrá partido el contenido de la caja en grupos de cuatro alfajores.

$$12 \text{ (alfajores)} \; : \; 4 \left(\frac{\text{alfajores}}{\text{niños}}\right) = 3 \text{ (niños)}$$

En el segundo, conocido el número de niños, se habrá entregado un alfajor a cada uno hasta agotar los alfajores.

$$12 \text{ (alfajores)} \; : \; 4 \text{ (niños)} = 3 \left(\frac{\text{alfajores}}{\text{niños}}\right)$$

En cuanto a que el resto sea nulo (cero) o no nulo (distinto de cero), en ambos tipos de problemas, el resto no puede superar al divisor.

4. La multiplicación y división en el conjunto de los números reales.

Ya dijimos que desde edad muy temprana, los niños se interesan en la exploración del medio que los rodea.

La comparación de las colecciones de objetos que encuentra en su entorno cotidiano, lo conducen a relaciones numéricas // que generan la noción de número natural. Pero la mayoría de esos objetos son susceptibles de ser desplazados, cambiar sus /

posiciones relativas y las distancias que los separan. A medida que el niño crece, se enriquece su exploración espacial, // aunque recién alrededor de los siete años está, en general, en condiciones de aplicar la noción de número a la de distancia,/ / en una suerte de iniciación a la noción de <u>medida</u>.

La construcción de la noción de número y la exploración // del espacio, hasta ese momento, parecen desarrollarse con independencia, con cierto paralelismo, hasta que, alcanzada la conservación de la longitud, ambas convergen en la medida. (Ver Anexo II).

Puede resultar una actividad interesante para provocar la/ reflexión de los futuros maestros sobre la complejidad del proceso de medida, proponerles que comparen la longitud del canto de su propia mano con la longitud del contorno de la muñeca.

En general, después de algunos intentos infructuosos, llegan a la conveniencia de u-/ sar un intermediario, tal como una cinta o/ una tira de papel. Aún así los resultados / suelen ser disímiles pues dependen, no sólo de la precisión con la que se haya trabajado, sino del esquema corporal de cada persona.

En un grupo numeroso es frecuente encontrar resultados del tipo $c = m$; $c < m$; $c > m$.

Pero en todas las situaciones se ha puesto de manifiesto:

* la conservación de la longitud con independencia de la rectilineidad.

* la transitividad de las relaciones de equivalencia y de/ orden puestas en juego en la comparación.

(Ver Anexo III)

Si se toma la longitud de la lápices como unidad para me-/dir el alto de esta hoja, es probable que la medida no sea un/ número natural. En ese caso podría decirse "más de 2 pero me-/nos de 3" o bien tratar de cuantificar el excedente de "dos"./ Surge así la importancia del uso de fracciones en relación con el proceso de medir cantidades continuas como la longitud, el/ peso, la superficie, el tiempo, etc.

5. El concepto de fracción

El concepto de fracción está íntimamente relacionado con / la operación de división: fraccionar es partir una cantidad en partes equivalentes sin dejar resto.

La noción de fracción se aplica a la descripción de cier-/tas situaciones con un enfoque relacional: un estado de cosas/ en el que algo se ha considerado como parte o fracción de un / todo pensado como estado entero o unitario.

Este concepto es válido tanto para cantidades continuas // (por ejemplo longitudes, superficies, etc.) como para cantida-des discontinuas (por ejemplo: una docena de huevos, un cente-nar de personas, etc.).

En la vida diaria se usan frecuentemente expresiones como:

* la mitad de un camino
* media docena de huevos
* medio huevo duro
* medio centenar de hojas, etc.

que implican partir un estado inicial < continuo o discontinuo en dos partes equivalentes.

Puede resultar de interés para los futuros maestros reco-/ mendarles que:

* Al presentar la notación fraccionaria $\frac{1}{2}$, lean "$\frac{\_\_}{2}$" / partir en dos y tomar "1" de las partes; o bien "la mi-/ tad" o bien "un medio".

* Análogamente para $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$ y todas las fracciones de de- nominador menor o igual que diez.

* Asociar esta notación con expresiones cotidianas tales / como:
  - "tres cuartos metros"
  - "caños de tres cuartos (de pulgadas)"
  - "tres décimas de segundo", etc.

* Observar que, así como por ejemplo, en el numeral 110 el "1" que ocupa el lugar de las decenas representa la déci- ma parte del valor relativo del "1" que ocupa el lugar / de las centenas, la fracción $\frac{1}{10}$ puede escribirse "0,1"/

pues el numeral "1" aquí representa la décima parte de u na unidad.

También es frecuente el uso de expresiones del tipo "un litro y medio de aceite"; "tres kilos y cuarto de carne", etc.,/ que pueden simbolizarse mediante números mixtos: $1\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{4}$ o bien mediante expresiones decimales: 1,5; 3,250. Si bien es // cierto que $\frac{3}{2}$ y $\frac{13}{4}$ también corresponden a las situaciones/ anteriores, conviene señalar que las fracciones mayores que la unidad no son de uso diario; estas expresiones tiene un valor/ histórico de escasa significación social.

6. La construcción de algoritmos

La técnica de resolución de una operación y su expresión / simbólica, por ejemplo la multiplicación de 523 x 46, es un // conjunto de reglas de acción que constituye un algoritmo.

El aprendizaje de algoritmos es un objetivo de la escuela/ primaria, pues facilita la resolución de problemas cotidianos. Pero si los algoritmos se enseñan como si se tratara de un objeto de conocimiento social arbitrario, los niños aplicarán un conjunto de reglas elaboradas por otras personas sin comprender-/ derlas. Esta actitud implica una deformación de la utilización de algoritmos que pierde así su operatividad.

Análogamente, conviene distinguir los mecanismos tales co-
mo la "regla de tres" o la "resolución por proporciones" o //
"por reducción a la unidad" de la adquisición de la noción de/
proporcionalidad que un niño construye a medida que evolu-/
ciona. No corresponde a una didáctica operatoria "enseñar" es-
tos mecanismos como un contenido formal, sino presentar proble
mas que promuevan la reflexión para que los niños establezcan/
situaciones de proporcionalidad.

La construcción de un algoritmo exige el descubrimiento de
las relaciones puestas en juego y el análisis profundo de las/
situaciones a las cuales se pueden aplicar. (1)

A continuación transcribiremos un fragmento extraído de //
"Estudios de educación Matemática", Volumen 3, preparado por /
Robert Morris, UNESCO. 1986, del que es autor Gerhard Walther.

Capítulo: La actividad Matemática en un contexto educativo: Una directi-
va para la formación de maestros de matemática en la escuela //
primaria. Página 85.

Enseñanza por escrito de la multiplicación en el grado 3.

Los niños ya estaban familiarizados con la multiplicación por una ci-
fra. El objetivo era, ahora, introducir el algoritmo de la multiplicación/
escrita por multiplicadores de dos y de tres cifras. Comenzamos con un pro
blema estrechamente relacionado a los estudios del medio ambiente reciente
mente realizados por los niños. El problema era: ¿Cuántas horas hay en un
año?

(1) Diseño Curricular para la Educación Primaria Común - M.C.B.A. 1986

Dentro del contexto de su trabajo previo, este nuevo cálculo consti-/ tuía, obviamente, un problema para los niños ya que no disponían de ningún algoritmo sencillo a mano para emplear. En cambio, ellos tenían que cons-/ truir, por sí mismos y utilizando sus conocimientos previos, una herramien ta que sirviese para realizar la tarea.

En la enseñanza tradicional, el maestro habría tenido que enseñar el/ algoritmo de la multiplicación por medio de ejemplos, hubiera explicado // las reglas y, poco después, los niños habrían imitado el procedimiento pa- ra efectuar la misma tarea. Pero haciéndolo así: ¿Habían logrado, alguna / vez, captar el sentido de este algoritmo?

Observemos lo que sucedió realmente en la clase. Casi todos los niños lograron, en definitiva, la respuesta correcta: 8760 horas. Pero, lo que / resultó realmente interesante fue la variedad de caminos por los cuales // llegaron a resolver el problema.

Surgieron, esencialmente, cinco tipos diferentes de solución:

Solución 1 Utilizando únicamente la adición. El número de días del año,/ 365, se escribe en columna 24 veces y efectuando la suma se/ encuentra el resultado, es decir 8760.

Solución 2 Se descompone el número de horas del día, es decir, 24, en la suma 10 + 10 + 4 y se multiplica el número 365, sucesivamente por 10, por 10 y por 4. La suma de los tres productos obtenidos da la misma respuesta correcta.

Solución 3 En esta solución el número 24 se descompone en 20 + 4. Se multiplica, después, 365 por 20 y por 4 y se suman los dos pro-/ ductos obtenidos.

Solución 4 El número de días del año se descompone en 300 + 60 + 5 y se multiplica 24 sucesivamente por 300, por 60 y por 5 sumando,/ finalmente, los tres productos.

Solución 5 Esta solución implica una doble descomposición. Se descompone 365 en 300 + 60 + 5 y se descompone 24 en 20 + 4. Se calculan los seis productos, 300 x 20, 60 x 20, 5 x 20, 300 x 4, 60x4, 5 x 4. La suma de los seis da, una vez más, la respuesta co-/ rrecta, 8760.

Al terminar la clase, los estudiantes normalistas tuvieron una sensación agradable. Los niños se mostraron interesados en el trabajo y habían/ trabajado matemáticamente para poder encontrar su propio camino para la solución. Pero el maestro permanente de la clase no compartió este entusiasmo y objetó: ¿Dónde se hizo la introducción sencilla y clara del algorit-/ mo?" "¿Por qué se gastó tanto tiempo permitiendo a los niños utilizar sus/ "viejos" procedimientos?" "¿No hubiera sido mejor utilizar el tiempo enseñando el nuevo algoritmo a los niños?". En realidad, el fracaso para introducir el nuevo algoritmo constituyó una crítica justificada. Pero, ¿cómo / podría haberse conducido la lección a un buen final?. La proposición de // los estudiantes normalistas fue utilizar el trabajo que ya habían realizado los niños. Hubo acuerdo general sobre ésto y el objetivo para la próxima lección de matemáticas fue contestar dos preguntas: ¿De qué forma calcularon, realmente, los niños el producto 365 x 24? ¿Cómo podría simplificarse ese cálculo?

En la primera parte de esta lección, los niños debían discutir sus soluciones y debían explicar sus propios procedimientos. Ellos tenían que // descubrir cómo y por qué sus diferentes cálculos habían funcionado. Tenían que comparar los cálculos en relación con el tiempo insumido, al esfuerzo/ demandado, a su simplicidad, etc. El maestro estimularía y organizaría esta discusión, pero de forma reservada, para no interferir en la naturali-/ dad del trabajo de los niños. Después de estas consideraciones, el algoritmo corriente se introduciría en la segunda parte de la lección como una // forma abreviada de multiplicación que no sería completamente nueva, sino / que estaría muy cercana a los métodos que algunos niños habían utilizado./ Los niños cuyas soluciones estuvieron más alejadas del algoritmo no fueron considerados en menos, puesto que ellos habían logrado, también, el resultado correcto y sus contribuciones habían agregado interés a la lección.

Aunque los niños no estaban acostumbrados a este estilo de aprendizajes, se adaptaron rápidamente a él y tomaron parte en la discusión. Algunos, niños, por ejemplo, criticaron las soluciones "complicadas". Algunos de sus comentarios fueron: "Tu no necesitabas calcular dos veces 365 x 10 (como se hizo en la Solución 2); "yo puedo hacerlo como (365 x 20); que / es más rápido". "Esto está mal, tu no multiplicaste" (refiriéndose a la /

Al terminar la clase, los estudiantes normalistas tuvieron una sensación agradable. Los niños se mostraron interesados en el trabajo y habían/ trabajado matemáticamente para poder encontrar su propio camino para la solución. Pero el maestro permanente de la clase no compartió este entusiasmo y objetó: ¿Dónde se hizo la introducción sencilla y clara del algorit-/ mo?" "¿Por qué se gastó tanto tiempo permitiendo a los niños utilizar sus/ "viejos" procedimientos?" "¿No hubiera sido mejor utilizar el tiempo enseñando el nuevo algoritmo a los niños?". En realidad, el fracaso para introducir el nuevo algoritmo constituyó una crítica justificada. Pero, ¿cómo / podría haberse conducido la lección a un buen final?. La proposición de // los estudiantes normalistas fue utilizar el trabajo que ya habían realizado los niños. Hubo acuerdo general sobre ésto y el objetivo para la próxima lección de matemáticas fue contestar dos preguntas: ¿De qué forma calcularon, realmente, los niños el producto 365 x 24? ¿Cómo podría simplificarse ese cálculo?

En la primera parte de esta lección, los niños debían discutir sus soluciones y debían explicar sus propios procedimientos. Ellos tenían que // descubrir cómo y por qué sus diferentes cálculos habían funcionado. Tenían que comparar los cálculos en relación con el tiempo insumido, al esfuerzo/ demandado, a su simplicidad, etc. El maestro estimularía y organizaría esta discusión, pero de forma reservada, para no interferir en la naturali-/ dad del trabajo de los niños. Después de estas consideraciones, el algoritmo corriente se introduciría en la segunda parte de la lección como una // forma abreviada de multiplicación que no sería completamente nueva, sino / que estaría muy cercana a los métodos que algunos niños habían utilizado./ Los niños cuyas soluciones estuvieron más alejadas del algoritmo no fueron considerados en menos, puesto que ellos habían logrado, también, el resultado correcto y sus contribuciones habían agregado interés a la lección.

Aunque los niños no estaban acostumbrados a este estilo de aprendizajes, se adaptaron rápidamente a él y tomaron parte en la discusión. Algunos, niños, por ejemplo, criticaron las soluciones "complicadas". Algunos de sus comentarios fueron: "Tu no necesitabas calcular dos veces 365 x 10 (como se hizo en la Solución 2); "yo puedo hacerlo como (365 x 20); que / es más rápido". "Esto está mal, tu no multiplicaste" (refiriéndose a la /

Solución 1). En este aspecto de la clase, el papel del maestro es lograr / que los niños conversen acerca de las actividades que llevaron a cabo y // que reflexionen sobre ellas. En este metanivel, deben aprender también que una tarea matemática puede ser realizada de varias formas diferentes y estas formas han sido determinadas por los niños mismos, no por los maestros o por el texto. Otra experiencia, que el maestro debe hacer explícita, es / que cada niño puede contribuír a la tarea común y que los niños pueden a-/ prender unos de otros. El maestro tiene que hacer de mediador entre el conocimiento individual (las diferentes formas y los diferentes caminos para llegar a una solución) y el conocimiento común que es necesario para com-/ prender el próximo procedimiento matemático (algoritmo de la multiplica-// ción). En este proceso y con la ayuda del maestro, se establecen las relaciones entre las diversas formas de cálculo (partes del conocimiento) y el "nuevo" conocimiento. Fue de esta manera que surgió el conocimiento y que/ fue compartido. Volviendo al desarrollo de la lección, la discusión se circunscribió finalmente alrededor de la Solución 3. Se consideró el método / empleado en ella como el más simple. Los niños reconocieron y recordaron / además, que ellos "ya habían hecho tales multiplicaciones". "¿No podríamos combinar ambas multiplicaciones en una sola?". El estudiante normalista // planteó el nuevo problema. Al comienzo, la segunda parte de la pregunta // causó mucha confusión. En último término, él hizo explícito que necesitaba "tener solamente dos líneas bajo la barra de multiplicación (en vez de /// tres)". Varios niños encontraron, sin necesidad de más ayuda, el algoritmo usual. Aunque lo relatado puede transmitir solamente una impresión fragmentaria sobre todo lo que realmente sucedió, se espera que hayan quedado en / claro algunas características de la enseñanza de la matemática. Los maes-/ tros necesitan una "imagen" adecuada de la naturaleza de la matemática, especialmente de la actividad matemática. En el texto convencional (utilizado en la escuela primaria), la cuestión de calcular 365 x 24 es utilizada, en el mejor de los casos, para introducir el algoritmo escrito en forma directa, o como un ejercicio para realizar después de su introducción. Pero/ en la matemática "real", resulta un acontecimiento raro encontrar un método ya confeccionado para aplicar a la resolución de un nuevo problema. Y / éste es también el caso en la vida diaria. Cuando surge un problema, debemos tratarlo de forma más o menos ingeniosa, utilizando nuestras propias / herramientas mentales y objetivas. Nadie le habrá mostrado antes cómo mani_pular exactamente aquel problema. En la lección que se ha descrito, el estudiante normalista estimuló la actividad matemática auténtica con cuestio_nes corrientes de la asignatura. Se les dio a los niños la oportunidad de/ recrearse en el pensamiento divergente, de descubrir soluciones ad-hoc, de interrumpir los procesos rutinarios, de desarrollar o de aplicar estrate-/ gias heurísticas (por ejemplo, la descomposición del multiplicador, redu-/ ciendo la realización de una multiplicación a la realización de una suma,/ etc), de comunicar, de reflexionar y de argumentar respecto a sus activida_des. El maestro que se propone educar debe confiar en la productividad matemática de los niños; debe tomar con seriedad sus contribuciones. Debe // concebir su papel como el de un mediador entre el conocimiento matemático individual y la matemática convencional que él busca que los niños lleguen eventualmente, a dominar.

El algoritmo de la división es una de las adquisiciones // más difíciles del nivel primario.

Dos son las principales dificultades que se presentan en / la construcción del mismo: la estimación del cociente y el cál_culo del resto. Casi siempre estas dificultades están relacionadas con la apretada síntesis de varias operaciones que impli_ca un registro simbólico del tipo:

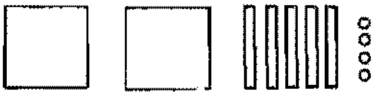
$$\begin{array}{r|l} 764 & 12 \\ \cline{2-2} 44 & 63 \\ 8 & \end{array}$$

Por estas razones conviene, en todos los casos, trabajar / primeramente con materiales estructurados y respetar el tiempo individual con que cada alumno logra interiorizar las acciones concretas que realiza, antes de formalizar la expresión numéri_ca.

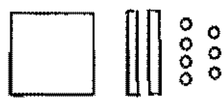
A continuación y a modo de ejemplo, proponemos una secuencia de actividades que se apoyan en el uso de materiales de fácil confección.

* **Recortar cuadrados de 100 cuadraditos para representar centenas.**

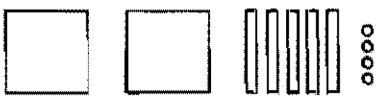
Tomar, de este material, por ejemplo:

a.  para repartir en dos conjuntos equivalentes.

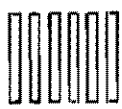
En este caso es necesario **canjear** una decena por diez porotos y así formar dos grupos de ________________



. Registrar numéricamente

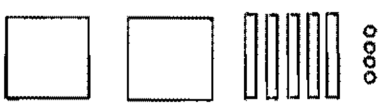
b.  para repartir en cuatro conjuntos equivalentes.

En este caso es necesario:

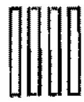
1) **canjear** cada cuadrado por diez barras para colocar ________________________  en cada grupo

2) **canjear** la barra restante por diez porotos colocando ______________________  en cada grupo

. Registrar numéricamente

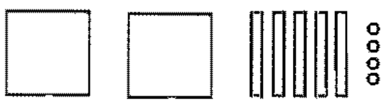
c.  para repartir en **seis** conjuntos equivalentes.

En este caso es necesario:

1) **canjear** dos cuadrados por veinte barras; repartir las veinticinco barras colocando ______________________  en cada grupo

2) **canjear** la barra restante por diez porotos, repartir los catorce porotos colocando ______________________ o o en cada grupo

. Registrar numéricamente.

d.  para repartir entre doce

Observar que se trata del mismo material que en el caso anterior para repartir en el doble de conjuntos.

1) estimar cuántas decenas corresponderán a cada grupo,
2) verificar la estimación,
3) calcular cuántas decenas restan para ser canjeadas por porotos,
4) cuántos porotos corresponden a cada conjunto,
5) cuántos porotos restan.

. Registrar numéricamente, paso a paso, las acciones realizadas.

e. Es probable que algunos niños comiencen a dividir por las unidades, / luego las decenas, etc. Este procedimiento los obliga a canjes complicados aunque correctos. Cuando los alumnos discutan con sus compañe-/ ros los diversos procesos empleados, adoptarán las formas más simples y económicas que son, en definitiva, las socialmente adoptadas y re-/ sultan de comenzar dividiendo por las unidades de orden superior (en/ nuestro caso: centenas).

f. Se pueden organizar otras secuencias de este tipo repartiendo mate-// riales, por ejemplo, entre ocho y luego dieciséis, o bien entre nueve y luego dieciocho, etc., para pasar a dividir por veinticinco (com- /

lación de dos variables: largo y ancho.

Dice Pilar Moreno Angulo:

"Al abordar el análisis del aprendizaje de la geometría // nos encontramos con que habitualmente en la escuela se ha venido llevando/ a cabo una disociación entre la elegancia de las figuras geométricas, el / triángulo, el cuadrado, el círculo, el rombo ... y la aridez de las fórmulas que permitan el cálculo de su área.

$$\text{Triángulo} = \frac{b \times h}{2}$$

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Las formas, conocidas por el niño desde que es muy pequeño, permane-/ cen en este nivel intuitivo aún después de conocer el "truco" que soluciona los problemas escolares referentes al cálculo de sus áreas.

Centrándonos en el terreno de la superficie del rectángulo, nos podemos plantear que si la fórmula para conocer su área es simplemente "base / por altura", un niño que puede multiplicar 5 x 8 (sean por ejemplo: 5 caramelos a 8 pesetas), también podrá resolver problemas referentes a la superficie del rectángulo. ¿Pero es igual 40 pesetas como precio de cinco caramelos que 40 cm^2?

Si nos remitimos a la disociación entre la figura geométrica y el cálculo de su superficie, podemos extraer la conclusión de que este último ha sido considerado por la pedagogía tradicional como una ilustración más, como un ejemplo, del mecanismo multiplicativo que los niños conocen desde segundo de EGB (*). ¿Y esto es cierto?

En principio, tanto 40 es el número que sale de multiplicar 5 caramelos por 8 pesetas, como el 40 que sale de multiplicar 5 cm x 8 cm.

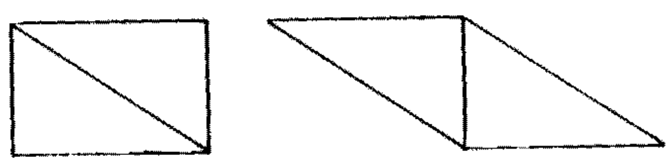
(1) Moreno Angulo, Pilar. "La construcción infantil de la medida de superficie" en la Pedagogía Operatoria Hoy, III Jornadas de Pedagogía Operatoria. IMIPAE, publicación del Ayuntamiento de Barcelona, 1985.

(*) En España: Educación General Básica.

Sin embargo, pensando en qué es, tanto geométrica como matemáticamente, el área, tal vez nos sea más complejo decidir por ejemplo: si es igual medio metro cuadrado que la mitad de un metro cuadrado".

Para profundizar en este tipo de problemas, recomendamos al docente la lectura del Anexo I.

Otro tema interesante es la relación y diferenciación en-/ tre las nociones de perímetro y superficie. Si se consideran/ dos figuras equicompuestas, por ejemplo un rectángulo y un paralelogramo formados por dos triángulos consecutivos congruentes, resulta mucho más fácil para los niños afirmar que tienen la misma superficie, que decidir si tienen o no el mismo perímetro.



Las experiencias espaciales de los niños no son únicamente perceptivas; un niño pequeño es capaz de moverse y operar con / estructuras geométricas haciendo construcciones con cubos o // formando mosaicos con piezas de rompecabezas. Pero la capaci-/ dad para formar imágenes de objetos y abstraer formas, requiere el desarrollo de cierta aptitud espacial que no se adquiere por una simple visualización que no esté acompañada por una toma de conciencia de los desplazamientos y las transformaciones

Resulta entonces evidente que en el nivel primario no hay/ lugar para una enseñanza de la geometría basada en "conversa-/ ción y tiza", sino que se hace necesario suministrar a los niños cajas, cartón, papeles, pajitas, hilos, tijeras y otros / materiales por el estilo.

Una geometría experimental, física, manipulativa, de tipo/ intuitivo, no está reñida con el desarrollo de un pensamiento/ que alcance algún nivel de rigor científico: el rigor inherente al estadio evolutivo de cada niño.

ANEXO I

G. Vergnaud, G. Ricco. Didáctica y Adquisición de conceptos matemáticos. Revista Argentina de Educación, Año IV, Nº 6, pág. 72.

- el *isomorfismo de medidas* puede representarse en un cuadro de correspondencia

M_1	M_2
x	$y = f(x)$
x'	$y' = f(x')$

en el cual la función f hace pasar de un elemento de M_1 (medida de un primer tipo) a su ímagen en M_2 (medida de un segundo tipo).

Ejemplos:

1 pastel	3,25 francos
3 pasteles	9,75 francos

1 minuto	2 km
12 minutos	24 km

Se pueden analizar estos cuadros desde el punto de vista de la función lineal f:

$$f(x) = ax$$

y desde el punto de vista de la propiedades del isomorfismo:

$$f(n + n') = f(n) + f(n')$$
$$f(\lambda n) = \lambda f(n)$$
$$f(\lambda n + \lambda' n') = \lambda f(n) + \lambda' f(n')$$

Estos dos análisis complementarios el uno al otro, permiten definir clases de problemas diferentes, y procedimientos de solución diferentes. Permiten también mejorar la didáctica de esta estructura relacional, como lo veremos más adelante.

Consideremos por ejemplo algunos problemas:

botellas	francos
1	7
8	$\square$

Una botella cuesta 7 francos. Compro 8 botellas, ¿cuánto debo pagar?

Varias soluciones son posibles:

- multiplicar 7 por 8: 8 botellas cuestan 8 veces más que una botella, en este caso se utiliza un procedimiento "escalar" que consiste en utilizar la razón 8 (sin dimensión) entre las dos medidas 1 y 8, y trasponerlo sobre las imágenes.

botellas	francos
1	7
8	$\square$

$$1 \xrightarrow{\times 8} 8 \qquad 7 \xrightarrow{\times 8} \square$$

- multiplicar 7 por 8: se puede pasar de una medida a la otra multiplicando por el precio unitario 7 francos por botella.

botellas	francos
1 $\xrightarrow{\times 7}$	7
8 $\xrightarrow{\times 7}$	$\square$

- sumar 7, 8 veces seguidas: el precio de 8 botellas es el precio de una botella, más el precio de otra botella, más el precio de otra botella... (8 veces en total).
- sumar 8, 7 veces seguidas: esta suma no tiene correspondencia y además es un procedimiento pocas veces utilizado.

Este ejemplo tan sencillo permite ver que la multiplicación $7 \times 8 =$ representa una abstracción nada desdeñable puesto que postula una relación ternaria partiendo de hecho de una relación cuaternaria. El ejemplo muestra también que utilizar un operador "escalar" (8 veces más) o un operador función (x7 , porque 7 francos por botella) no es en absoluto lo mismo:

7 francos $\xrightarrow{\times 8}$ $\square$ se obtienen francos — operador escalar

8 botellas $\xrightarrow{\times\ 7\ \text{francos/botella}}$ $\square$ se obtienen francos

El análisis dimensional esquemático que acabamos de realizar es indispensable para comprender las operaciones de los alumnos y las dificultades que pueden entrañar.

Se puede igualmente distinguir dos tipos de problemas en la división:

- la búsqueda del valor unitario

1	$\square$
12	96

Doce botellas cuestan 96 francos. ¿Cuál es el precio de una botella?

- la búsqueda de una cantidad

1	7
$\square$	105

Cada botella cuesta 7 francos. ¿Qué cantidad de botellas corresponden a un gasto de 105 francos?

También en este caso varios procedimientos de solución son posibles como ocurre en el caso más general cuando se trabaja un valor valor numérico dado.

1,5	4
$\square$	10

Se necesitan 1,5 kg de harina para hacer 4 pasteles. ¿Cuánta harina se necesitará para hacer 10 pasteles?

No describiremos aquí los diferentes procedimientos posibles.

El análisis de estos problemas pone en juego no solamente las operaciones de multiplicación y de división sino también la proporcionalidad, las propiedades de la función lineal, el análisis dimensional y en ciertos aspectos, el marco teórico de los aspectos lineales (espacio vectoriales).

También puede verse que este análisis pone de manifiesto el concepto de razón: razón escalar 10/4 que no posee dimensión y la razón función 1,5/4 (que se expresa en kilogramos de harina para cada pastel).

A partir de problemas de este tipo pueden construirse clases de pares de números enteros isomorfos a los números racionales.

1,5	4
$\boxed{3}$	$\boxed{8}$
6	16
9	24
12	32
etc.	etc.

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \frac{9}{24} = \ldots = \frac{3n}{8n}$$

En resumen, el isomorfismo de medidas reúne en una sola estructura relacional una rica gama de conceptos.

- el *producto de medidas* representa, desde el punto de vista del análisis dimensional, una operación diferente: el área del rectángulo es el producto del largo por el ancho porque la superficie es proporcional al largo cuando el ancho se mantiene constante. Si se multiplican por n las dimensiones del rectángulo, su superficie queda multiplicada por n^2

El área es una función bilineal, el volumen una función trilineal, el cardinal del producto cartesiano de n-conjuntos es n-lineal en relación a los cardinales de cada uno de los conjuntos.

Las matrices permiten fácilmente poner en evidencia la estructura del producto cartesiano (clases de pares, áreas)

niñas

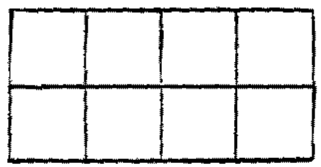
niños

	l	m	n	o	p
a	al	am			
b	bl				
c	cl		cn	co	

conjunto de pares que se pueden formar con 3 niños y 5 niñas

largo

ancho



área del rectángulo 2x4 (la disposición en cuadrados hace aparecer el producto cartesiano)

y las propiedades de la bilinealidad.

número de niñas

número de niños

	1	2	3	4	5	6	
1	1	2	3	4	5	6	...
2	2	4	6	8	10	12	...
3	3	6	9	12	15	18	...
4	4	8	12	.	.	.	
5	5	10	15	.	.	.	número de pares posibles

Cada renglón es proporcional al renglón inmediato superior y cada columna es proporcional a la columna de la izquierda.

La distinción que acabamos de hacer entre isomorfismo de medidas y producto de medidas no significa, por supuesto, que no exista una relación entre ambas estructuras. El producto de medidas es un doble isomorfismo (bilinealidad) y el isomorfismo pone en juego un producto de medidas cuando se hace intervenir el operador función.

$$\text{kg de harina} = \text{pasteles}\ \frac{\text{kg de harina}}{\text{pastel}}$$

$$\text{distancia recorrida} = \text{tiempo} \times \text{velocidad}$$

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

2. Problemática psicológica

Desde el punto de vista psicológico distinguimos varios objetos de estudio:

- ***Las diferentes clases de problemas posibles y sus dificultades relativas***

Por ejemplo, la división en un producto de medida puede ser más difícil que los dos tipos de divisiones que hemos distinguido en el isomorfismo, las cuales a su vez pueden presentar distintos niveles de dificultad.

En los problemas de tipo "regla de tres", la dificultad del problema, en forma general, depende de los valores numéricos, de la relación de proporcionalidad y de la naturaleza física de las magnitudes en juego.

Las dificultades que hemos señalado se resuelven gradualmente durante un largo período de la vida escolar.

En el producto de medidas, el cálculo del volumen a partir de las dimensiones elementales es más fácil que la división, pero sin embargo existen pocos estudios sobre la comprensión del conjunto de propiedades relacionadas con la trilinealidad (ver experiencia que presentaremos más adelante).

- ***Los diferentes procedimientos de solución de problemas analizados desde el punto de vista de los conceptos que intervienen***

La jerarquía de la dificultad de las distintas clases de problemas merece ser estudiada. Pero esto no es suficiente, pues un mismo problema puede ser resuelto de diferentes maneras, equivalentes desde el punto de vista del resultado, pero quizás muy distintas en cuanto a los conceptos utilizados. Ya hemos visto cuatro procedimientos distintos en lo que respecta a la multiplicación.

Se pueden realizar estudios experimentales sistemáticos para medir la dificultad de cada uno de los procedimientos que permiten resolver la misma clase de problemas y poder así, medir el grado de disponibilidad frente a un nuevo problema.

Sin especificar en detalle los resultados ya publicados, indicaremos como ejemplo, que en los problemas de "regla de tres", hemos encontrado más de veinticinco procedimientos de cálculo diferente, de los cuales, cinco conducen a la solución correcta y el resto al fracaso. El análisis y la clasificación de procedimientos muestra que las diferentes propiedades de la función lineal son comprendidas y utilizadas de una manera desigual por los alumnos de 12 a 15 años, y que los procedimientos de error merecen ser analizados en profundidad, puesto que frecuentemente esos procedimientos toman en cuenta, pero en forma errónea, aspectos pertinentes de las relaciones que intervienen.

Para desarrollar aún más nuestro punto de vista teórico, agregamos que los procedimientos utilizados por los alumnos ponen de manifiesto el funcionamiento de inferencias y de teoremas no explícitos. Utilizaremos varias expresiones para designar estos razonamientos: "teorema en acto", "inferencia en acto", "cálculo relacional".

El cálculo relacional se realiza sobre las relaciones, por lo tanto no es lo mismo que el cálculo numérico, aún si la sucesión de cálculos numéricos es lo único que nos permite deducir cuál es el cálculo relacional subyacente.

Por ejemplo, un sujeto que resuelve el problema

1,5	4
$\square$	10

ejecutando las operaciones $10 : 4 = 2{,}5$ y después $1{,}5 \times 2{,}5 = 3{,}75$ utiliza un procedimiento de tipo escalar y el teorema que se pone en juego (théoreme en acte) es la propiedad: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Un sujeto que suma $1{,}5 + 1{,}5 + 0{,}75 = 3{,}75$ está utilizando la descomposición de 10 en $4 + 4 + 2$ ó $4 + 4 + (1/2).4$. La propiedad utilizada aquí es:

$$f[x + x + (1/2)x] = f(x) + f(x) + (1/2) f(x)$$

Un sujeto que realiza $10 - 4 = 6$ y después $1{,}5 \times 6 = 9$, emplea un razonamiento erróneo cuyo parentesco con el procedimiento escalar es manifiesto. En lugar de buscar y utilizar la razón entre 10 y 4, efectúa la diferencia.

Más adelante veremos otros ejemplos.

- ***Las diferentes representaciones simbólicas de problemas y las relaciones que contienen***

Estudiar los procedimientos de solución utilizados es el medio más decisivo para acceder a las representaciones conceptuales o preconceptuales de los alumnos. Lo más importante es lo que se significa. Otro medio de acceso es el estudio de los significantes que el niño puede utilizar para resolver un problema: dibujos, esquemas, símbolos de toda clase. Esos significantes o representaciones simbólicas, no se encuentran siempre en el razonamiento del niño. Existen algunas que son relativamente espontáneas (el dibujo, por ejemplo) y existen otros sistemas simbólicos de representaciones culturales y relativamente canónicos (tablas, diagramas, gráficos, ecuaciones, etc.).

Por ejemplo, el alumno puede presentar un problema de tipo multiplicativo en forma de ecuación, también puede representar los datos y los operadores en un cuadro, podría también realizar una representación gráfica de una función lineal.

Estas diferentes representaciones no tienen el mismo nivel de abstracción ni de dificultad, ni tampoco pueden siempre utilizarse para resolver un problema dado.

El estudio psicogenético de los aprendizajes escolares debe consagrarles un lugar importante.

ANEXO II

Holloway, G.E.T. Concepción de la Geometría en el niño según Piaget. Paidós, 1969, pág. 17.

II – MEDICION ESPONTANEA

El desarrollo de ideas de medida incluye tanto la capacidad de apreciar la conservación de la longitud como la de agrupar cambios de posición y referirlos a una estructura espacial coordinada. De lo contrario, no se puede alcanzar el significado de aplicar una sucesión de unidades a lo largo de una línea vertical ni se puede apreciar que debe haber conservación de la longitud cuando se mueve un objeto-unidad.

Por estos motivos dedicamos este capítulo al estudio de los esfuerzos espontáneos para medir, puesto que una vez perfeccionado el proceso su desarrollo parece sobreentendido. Por consiguiente, es importante investigar la conducta mensural cuando se halla todavía en una etapa formativa, y sólo así tendremos la posibilidad de conceptuar de manera precisa las operaciones que forman parte de los procesos psicológicos que intervienen en la medición.

En una primera serie de experimentos se muestra a los niños una torre construida con 12 bloques, cubos y paralelepípedos, de 80 cm de altura, y elevada sobre una mesa. La tarea que se les propone es la de construir una segunda torre de la misma altura sobre otra mesa, 90 centímetros más baja y ubicada a 2 metros de distancia. Para eliminar cualquier simple reproducción del modelo los bloques de construcción con que trabajan los niños son más pequeños, aunque suficientes como para levantar una torre de igual altura. Además, se coloca una pantalla entre ambas mesas, aunque los niños quedan en libertad de "ir a ver" la primera torre cada vez que lo crean necesario. Se ponen también a disposición de los niños tiras de papel y varillas, si bien no se les aconseja utilizarlas hasta que agoten sus esfuerzos espontáneos.

Las respuestas del primer estadio (1a y 1b), típicas de niños de unos 4 a 6 años, implican sólo una primitiva comparación visual. No se mueve nada, salvo la línea de visión. Una respuesta típica a la pregunta: "¿Tu torre es tan alta como la mía?" es: "Oh, sí; basta con verlas", pese a que, por supuesto, no hay correspondencia exacta en altura: simplemente ambas torres son altas, o enormes, etcétera. En el subestadio 1b se construye el modelo con una altura más aproximada a la correcta, pero la comparación sigue siendo puramente visual y no se experimenta la necesidad de verificar el cálculo: "Basta con verlas."

Durante el estadio 2, que dura desde los 4;6 a 5 años hasta alrededor de los 7 años, se mueven objetos en el proceso de medición, vale decir, hay cambio de posición. A veces el objeto en cuestión es uno de los elementos comparados y otras veces es un tercer término que preanuncia la aparición de una medida común, aunque todavía no hay transitividad operativa. En el subestadio 2a la transferencia visual característica del estadio 1 se complementa con lo que denominaremos transferencia manual. Ello significa que el niño trata de aproximar más los objetos a comparar de tal manera que aunque la comparación continúa siendo visual, ya no es comparación a distancia, sino la evaluación de un todo constituido por objetos vecinos. El subestadio 2b se caracteriza por un desarrollo interesante, que destaca con mayor claridad aún la menguante supremacía de la percepción aislada. En ese momento los niños utilizan un término intermedio, que no es todavía un patrón común independiente de medición, puesto que en vez de utilizar un tercer elemento para comprobar que la copia es igual al modelo, emplean sus propios cuerpos: a veces intentan comparar las medidas con sus manos o con sus brazos; otras veces utilizan como puntos de referencia partes del cuerpo algo peculiares (hombros, etcétera) que les sirven para transferir una distancia de un objeto a otro. Como es obvio, tales métodos son resabios de la etapa evolutiva de transferencia manual (2a), de igual modo que esta última es un residuo de los estadios de transferencia visual (1a y 1b). En un primer momento el sujeto movía el objeto mismo; ahora trata de asirlo o de abrazarlo, con sus manos o con sus brazos, porque espera que tal ademán sea la medida del largo de un objeto después que lo suelta. A este tipo de conducta, característico del subestadio 2a, lo llamaremos transferencia corporal o imitación del objeto. Puesto que la imitación es el origen de los símbolos y hasta de las imágenes, es fácil ver que el empleo de una medida común se origina en la transferencia visual y manual en la medida en que sus componentes iniciales, tanto perceptuales como motores, suscitan imágenes representacionales que confieren un valor simbólico primero al propio cuerpo del sujeto y más tarde a cualquier objeto neutral, de tal modo que éstos vienen a reemplazar a la transferencia originaria.

La característica distintiva del estadio 3 es la comprensión del principio lógico: A = B, B = C; por lo tanto, A = C. Esto depende de que se pueda aplicar el principio de conservación de la longitud a pesar de los cambios de posición. Pero esta capacidad es sólo un aspecto del proceso de medición, al que hay que agregar la posibilidad de subdivisión, y recién cuando se domina también ésta se estará en condiciones de dar valor de unidad a una parte y repetirla tan a menudo como sea necesario. Ahora bien, esta fusión gradual de subdivisión y cambio de posición en un patrón común de medición tiene lugar a lo largo del estadio 3 y se produce en dos subestadios sucesivos. En el subestadio 3a (sobre un promedio de alrededor de 7 años) los niños utilizan un término independiente, siempre que sea mayor que el original, sobre el cual marcan la longitud requerida, pero son incapaces todavía de emplear uno menor porque "es demasiado pequeño"; no, necesitaría muchos"; "no sirve, mi mano se sigue moviendo", etcétera. Por último, en el subestadio 3b, desde alrededor de los 8 años en adelante, la unidad de medida ya puede ser más larga o más corta que la torre; por ejemplo: "¿Puedes usar este ladrillito?" (El niño lo itera hacia lo alto de la torre, marcando cada posición con el pulgar.) "Entra 13 veces." (Luego realiza la misma operación con la segunda torre): "Es igual."

De tal manera, la adquisición de la capacidad de medición es una síntesis de la posibilidad de comprensión de los principios de subdivisión y cambio de posición, que se logra mediante desplazamientos de una unidad iterable que actúa como unidad de medida.

ANEXO III

Rey, Nocera, Saggese, Ludueña. "Aprendizaje y Matemática". La medida. Plus Ultra, 2ª Edición, 1980, pág.192.

DE LA MEDIDA DE CANTIDADES CONTINUAS

Llamamos *cantidad* a todo lo que se puede contar o medir.

Las perlas de un collar, los lápices de una caja, los panes de una canasta, se pueden contar.

Una cantidad es *discontinua*, si se puede contar naturalmente.

El líquido contenido en un balde, la cinta con que se ató un paquete, el peso de una persona, pueden medirse.

Una cantidad es *continua* si para cuantificarla es necesario medirla.

Las cantidades discontinuas están naturalmente cuantificadas, pues llevan implícita la unidad; cada uno de sus elementos es, en sí mismo, una unidad. Así, una perla del collar es la unidad que nos permite expresar la cantidad de perlas; análogamente, se pueden *contar* las manzanas de una canasta o los lápices de una caja.

No ocurre lo mismo con las cantidades continuas: para poder cuantificarlas es necesario usar una unidad previamente convenida. Por ejemplo: el líquido contenido en un balde puede medirse en litros, o bien en galones, etc.; la longitud de una cinta puede exnresarse en metros, o en pulgadas, o en varas, etcetera.

Si dos cantidades a y b pueden compararse, del resultado de la comparación surgirá que a es mayor que b; o que a es menor que b; o bien que a es equivalente a b.

En el conjunto de todas las cantidades se establece la siguiente relación de equivalencia: una cantidad a es de la *misma clase* que b, si y sólo si, a puede compararse con b.

En símbolos:

$$a \in C \wedge b \in C \Leftrightarrow a > b \vee a < b \vee a = b$$

Esta relación de equivalencia define por abstracción la magnitud. La *magnitud* es lo que tienen de común entre sí, todas las cantidades que pueden compararse.

Por ejemplo:

- en todo cuadrado, un lado es menor que la diagonal y el perímetro es mayor que la diagonal; el lado, la diagonal y el perímetro son cantidades comparables en *longitud*.
- el tanque de combustible de un camión carga mayor cantidad de líquido que el tanque de un automovil; ambos tanques son comparables por su *capacidad*.

Las cantidades que pertenecen a una misma magnitud, son *homogéneas*.

Cuando una cantidad es multiplicada por un número real, se obtiene otra cantidad homogénea con la primera. Por ejemplo: el producto del número seis por la longitud del lado de un exágono regular, es la longitud del perímetro de dicho exágono· lado y perímetro son cantidades homogéneas.

En general, si p es un número real, a es una cantidad y b es el producto del número p por la cantidad a ($b = p \cdot a$), entonces la cantidad b es homogénea con la cantidad a.

Se llama *razón* entre dos cantidades homogéneas a_1 y a_2, al número real r, tal que a_1 es el producto de r por a_2.

En símbolos:

$$a_1 = r \cdot a_2 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{a_1}{a_2} = r$$

Por ejemplo:

— el número π, es la razón entre la longitud de una circunferencia y la longitud de su diámetro.

— el número 4 es la razón entre la longitud del perímetro de un cuadrado y la longitud del lado del mismo.

— el número $\frac{1}{2}$ es la razón entre la superficie de un cuadrado y la superficie de otro cuadrado de lado igual a la diagonal del primero.

El número π, el número 4 y el número $\frac{1}{2}$ son números reales (pueden representarse sobre la recta numérica).

Medida de una cantidad, es el número que expresa la razón entre dicha cantidad y otra homogénea adoptada como unidad.

Por ejemplo:

— 16 es la medida de la superficie de un cuadrado de 4 cm de lado, respecto de la superficie de un cuadrado de 1 cm de lado.

— si se toma como unidad de medida un ángulo de abertura equivalente a $\frac{1}{8}$ de un giro completo, la medida de un ángulo llano respecto de esa unidad, es el número 4.

— si se toma como unidad de medida la $\frac{1}{360}$ parte de un giro completo, la medida de un ángulo llano respecto de esa unidad, es el número 180.

Es evidente que la medida de una cantidad depende de la unidad cuyo uso se convenga, sin embargo la *cantidad es invariante* e

Valor de una cantidad es el producto de la medida (número) por la unidad de medida (cantidad adoptada como patrón).

Por ejemplo:

— el valor de la longitud de una cinta es de 2 m; el número 2 es la medida, 1 metro es la unidad con que se midió.

— el valor de la longitud de la misma cinta del ejemplo anterior es de 80 pulgadas; 80 es la medida y una pulgada (2,5 cm) es la unidad.

— el valor de la superficie de un campo es de 12 hectáreas o bien 120.000 m²

— el valor del peso de una caja de arroz es de 1 kg, o bien de 1000 g.

— el valor de la distancia entre dos rieles paralelos es de 1,20 m o bien de 48 pulgadas.

Cuando se expresa el valor de una cantidad respecto de diferentes unidades, se evidencia la conservación de la cantidad. Las operaciones que aseguran la conservación de la cantidad, se integran en verdaderos sistemas caracterizados por su reversibilidad.

Por ejemplo: si el valor del peso de una bolsa de azúcar es de 2 kg, ese peso permanece constante aún cuando se lo exprese en gramos:

$$\boxed{\text{x } 1000}$$
$$2 \text{ kg} = 2.000 \text{ g}$$
$$\boxed{\text{x } 1000}$$

el transformador $\boxed{\text{x } 1000}$ que aplicado a la medida 2 da por resultado 2000, se compensa con la acción del mismo operador $\boxed{\text{x } 1000}$ que transforma a 1 g en 1 kg. La equivalencia surge de la reciprocidad entre las transformaciones de la *medida* y de la *unidad*.

Actividad de aprendizaje Nº 4

a. Seleccione un grado de segundo o tercer ciclo.

b. Analice el currículum que considere más actualizado del grado seleccionado en "a".

c. A continuación diagrame una red que muestre las relaciones que se establecen en ese campo conceptual.

d. Luego, en el grupo, analice y discuta los diferentes diagramas elaborados.

Actividad de aprendizaje Nº 5

a. En grupo reflexione en torno al siguiente problema:

En la práctica el maestro trabaja con material concreto. Por qué entonces, el aprendizaje deriva en una mecanización.

b. Elabore grupalmente propuestas superadoras. Tenga presente los lineamientos de los distintos Documentos de Trabajo.

Propuesta de trabajo final

En tanto formador de formadores, explicite cómo trabajaría con sus alumnos, futuros maestros, para lograr la selección y organización de estrategias y la implementación de acciones didácticas que guarden coherencia con el enfoque metodológico propuesto para el nivel primario.

La Profesora Norma Sanguineti de Saggese, autora de este Documento de trabajo, es egresada del Instituto Nacional Superior del Profesorado en la carrera de Matemática y Cosmografía.
Participó en la evaluación del Diseño Curricular para la Escuela Primaria/1981 y en la elaboración de la asignatura Matemática del Diseño Curricular de la Escuela Primaria Común/1986, ambos de la Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.
Es coautora de "Aprendizaje y Matemática: La medida" libros para el maestro y para los alumnos de Editorial Plus Ultra.
Ha participado en Congresos Nacionales y Extranjeros referidos a su especialidad.
Es profesora de Matemática y su Didáctica en la Escuela Normal Superior Nº 4, de Capital Federal.
Actualmente se desempeña como Subdirectora Nacional de Enseñanza Media.