Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

DiNIECE
Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Primaria-ONE 2007
Pruebas de 3° año y 6° año Primaria.

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Primaria-ONE 2007
Pruebas de 3° año y 6° año Primaria.

AUTORIDADES

Presidenta de la Nación
Dra. CRISTINA FERNÁNDEZ DE KIRCHNER

Ministro de Educación
Prof. ALBERTO ESTANISLAO SILEONI

Secretaria de Educación
Prof. MARÍA INÉS ABRILE DE VOLLMER

Subsecretario de Planeamiento Educativo
Prof. EDUARDO ARAGUNDI

Directora Nacional de Información
y Evaluación de la Calidad Educativa
Dra. LILIANA PASCUAL

COORDINADORA DE EQUIPOS PEDAGÓGICOS DE EVALUACIÓN
Y RELACIONES INTERJURISDICCIONALES:
Mg. Mariela Leones

ELABORADO POR:
Prof. Andrea Novembre
Colaboración de la Lic. Nora Burelli

EQUIPO DEL ÁREA DE MATEMÁTICA:
Prof. Liliana Bronzina
Prof. Pilar Varela
Lic. Nora Burelli

LECTURA CRÍTICA:
Prof. Horacio Itzcovich

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN:
Karina Actis
Juan Pablo Rodriguez
Coralia Vignau

Agradecemos la lectura y los comentarios de los profesores Matías Enrique Baquero del Instituto Privado Argentino Japonés de la Ciudad de Buenos Aires, Silvana Bottazzini del Glasgow College, Provincia de Buenos Aires, Ricardo Vito Cafici de la escuela N° 13, Distrito Escolar 9, Ciudad de Buenos Aires, Cecilia Catuara de la Escuela y Liceo Vocacional Sarmiento de San Miguel de Tucumán, Karina Cuevas de la EP N° 3 de La Matanza, Provincia de Buenos Aires, María Sandra D'Agostino, del Instituto Privado Argentino Japonés de la Ciudad de Buenos Aires, Patricia Carolina Escartín de la escuela N° 15, Distrito Escolar 17, Ciudad de Buenos Aires, María del Carmen Milone de la EP N° 3 de La Matanza, Provincia de Buenos Aires, Analía Mónaco de la EP N° 3 de La Matanza, Provincia de Buenos Aires, María Fernanda Rocher de la escuela N° 30, Distrito Escolar 9, Ciudad de Buenos Aires y Gladys Tedesco del Glasgow College, Provincia de Buenos Aires.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las pruebas de matemática evaluaron en el 2007 una muestra de estudiantes que cursaban el 3° o 6° año de la Educación Primaria.

Las mismas tuvieron como finalidad ver el desempeño de los alumnos de diferentes jurisdicciones en relación con algunos contenidos del área y capacidades cognitivas.

En este informe encontrará una selección de ítems que han sido analizados desde el punto de vista matemático y didáctico, teniendo en cuenta las resoluciones de los alumnos. En los casos de las actividades abiertas, se propone una mirada sobre las producciones de los niños y se brindan opciones de enseñanza de los contenidos involucrados.

¿CÓMO ESTUVIERON CONSTITUIDAS LAS PRUEBAS?

Es importante considerar que son pruebas masivas, es decir, se aplican a muestras muy grandes de alumnos y que, por lo tanto, tienen una estructura que les es propia. Un análisis puntual de las mismas puede complementar la información obtenida de las evaluaciones realizadas día a día por los docentes en su trabajo de aula.

Las pruebas estuvieron constituidas por 28 ítems cerrados o de opción múltiple, con cuatro opciones de respuesta cada uno, y 2 ítems de respuesta abierta a desarrollar. Cada alumno debía responder los 30 ítems.

La inclusión de ítems de respuesta abierta permitió evaluar los procesos que los alumnos desarrollaron para dar cuenta de un procedimiento o de una estrategia de resolución elegida y de su relación con la respuesta presentada, además de las lógicas, los conocimientos que relacionan, las escrituras o representaciones que elaboran.

Con el fin de atender especialmente al procedimiento de resolución y no solo al resultado, los ítems de respuesta abierta fueron corregidos por docentes debidamente capacitados. Para garantizar la objetividad en la corrección, los docentes utilizaron una guía elaborada para tal fin por el equipo pedagógico de la DINIECE, y de esta manera, clasificaron las respuestas en cuatro categorías contempladas en la grilla de corrección: correcta, parcialmente correcta, incorrecta y en blanco (omitida).

Habiendo accedido a las respuestas dadas por los alumnos, hemos seleccionado algunas que por sus características nos invitan a reflexionar no sólo sobre su nivel de conceptualización, sino también sobre sus posibilidades concretas de resolución en diferentes temas.

En el caso de los ítems abiertos nos aportan, además, una variedad de datos acerca de los recursos que los alumnos están en condiciones de utilizar en esta etapa de su escolaridad primaria para describir los procedimientos utilizados en la resolución y la racionalidad desplegada, cuestión que aunque resulte compleja por estar vinculada a lo metacognitivo, da cuenta del tipo de trabajo matemático realizado en su trayectoria escolar.

Por ello, este informe tiene como propósito compartir con ustedes algunas de las situaciones que los alumnos tuvieron que resolver y una serie de comentarios y análisis realizados sobre los conocimientos y los procesos cognitivos que están en la base de los mismos.

Asimismo, aunque los fines y las características de esta prueba difieren en gran medida de los utilizados cotidianamente en las aulas, no dudamos puedan aportar información útil sobre las dificultades y logros más frecuentes en los alumnos, y al mismo tiempo, proveer algunas sugerencias para trabajar en clase, con el fin de enriquecer la tarea pedagógica, pudiendo ser adaptadas por los docentes a su contexto y a la realidad de sus alumnos y de su escuela.

LOS NIVELES DE DESEMPEÑO

El desempeño de los alumnos en matemática se agrupó en tres niveles para cada año evaluado: alto, medio y bajo.

Los mismos se han determinado a partir de criterios empíricos y pedagógicos, en relación con los rendimientos de los alumnos en la prueba. Cada uno de los niveles es inclusivo en relación con el inmediatamente inferior, es decir, en la medida en que un alumno está ubicado en un determinado nivel, tiene alta probabilidad de resolver con éxito las actividades del mismo y las de los inferiores a aquél.

De este modo, la discriminación de estos niveles facilita la comunicación de lo que los alumnos saben y pueden hacer.

A continuación analizaremos problemas que corresponden a los distintos niveles de desempeño de los alumnos del tercer y sexto año de su escolaridad de 2007.

TERCER AÑO DE ESCOLARIDAD

ANÁLISIS DE ÍTEMS O ACTIVIDADES CERRADAS

Con este objetivo, proponemos un problema correspondiente a cada uno de los niveles.

Nivel Alto

12

Caja con 2 manzanas	Caja con 3 naranjas	Caja con 4 peras
$ 2	$ 2	$ 2

¿Cuál es la fruta más barata?

A) Una manzana.

B) Una naranja.

C) Una pera.

D) Las tres frutas cuestan lo mismo.

Este problema propone una situación desafiante para los alumnos de 3º año, debido a que no pueden calcular el precio unitario de cada fruta en el caso de las naranjas y las peras. Esto los lleva a tener que recurrir a relaciones que les permitan decidir cuál es la más barata.

La lectura de la información plantea una dificultad. Todas las frutas cuestan $2 a primera vista, y desentrañar que en cada una hay diferentes cantidades es una dificultad extra. La pregunta que plantea el

Respuestas

A)	17,28 %
B)	3,87 %
C)	25,35 %
D)	44,82 %

Omisiones 8,68 %

problema puede causar confusión, ya que se pregunta por la fruta, quedando implícito que se trata de “una” fruta y no de la caja. Y no debemos dejar de lado que socialmente es poco habitual comprar una sola fruta.

No es sorprendente que la mayoría de los niños (cerca del 45%) haya respondido que las tres frutas cuestan lo mismo, sin tener en cuenta que los precios dados no son para las mismas cantidades de cada una.

Los niños pueden relacionar la cantidad de frutas y el precio del siguiente modo: si todas cuestan lo mismo, la más barata es la que se ofrece en mayor cantidad por caja, en este caso las peras.

Es posible que la respuesta B no haya sido elegida por los alumnos porque les haya resultado difícil estimar el precio de una unidad de naranja, mientras que el precio de una manzana o de una pera puede llegar a ser calculado por un alumno con un buen manejo del dinero y de lo numérico.

Nivel Medio

4

$\boxed{220 - 58}$ es igual a

A) 162

B) 172

C) 238

D) 272

Respuestas

A)	52,86 %
B)	14,01 %
C)	16,98 %
D)	7.01 %

Omisiones 9,14 %

La operación a realizar entra dentro de la resta considerada “con dificultad”, donde los alumnos no pueden realizarla directamente resolviendo las diferencias de los dígitos de las columnas, sino que necesitan hacer alguna transformación que les permita hacer el cálculo.

En este sentido, para aquellos habituados a usar algoritmos se esperan diferentes escrituras, como los siguientes:

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & \\
 & {}^{1}\cancel{2} & {}^{11}\cancel{2} & {}^{1}0 \\
- & & 5 & 8 \\
\hline
 & 1 & 6 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 100 & 110 & {}^{1}10 \\
 & \cancel{2} & \cancel{2} & {}^{1}0 \\
- & & 5 & 8 \\
\hline
 & 1 & 6 & 2
\end{array}
$$

Aunque, en el caso en que los alumnos elijan "desarmar" los números para hacer el cálculo, es posible que puedan observarse diferentes maneras, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
220 - 58 &= 220 - 20 - 38 \\
&= 200 - 30 - 38 \\
&= 170 - 8 = 162
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
220 - 60 &= 160 \\
160 + 2 &= 162
\end{aligned}
$$

Utilizando estos u otros procedimientos, el 53% de los alumnos eligió la respuesta correcta. Si bien es la mayoría, resulta interesante analizar las elecciones de los demás estudiantes.

Los que consideraron a B o a D como respuesta correcta, seguramente aplicaron el algoritmo sin controlar la técnica. Se trata de un procedimiento memorizado que los alumnos no comprendieron, pero que aplican.

En el caso de la opción B, el cálculo realizado es el siguiente:

$$
\begin{array}{cccc}
 & {}^{1}\cancel{2} & {}^{12}\cancel{2} & {}^{1}0 \\
- & & 5 & 8 \\
\hline
 & 1 & 7 & 2
\end{array}
$$

El alumno saca 10 unidades del 20 para pasárselas al 0, pero olvida restárselas al 20. Luego, pasa 100 unidades del 200 al 20, convirtiéndolo en 120. Por supuesto, nada de esto es percibido por un alumno que solo aplica una técnica.

Al elegir la opción D, un alumno "pasa" 10 unidades al 0 pero desde ningún lado en particular, luego hace la resta de 10 – 8 para obtener 2. Frente a la imposibilidad de restar 2 – 5, suma 2 + 5 o resta 12 – 5 = 7, pasando 10 unidades de algún número al que no se las resta:

$$
\begin{array}{cccc}
 & 2 & 2 & {}^{1}0 \\
- & & 5 & 8 \\
\hline
 & 2 & 7 & 2
\end{array}
$$

En el caso de la opción C, es posible que el resultado provenga de haber desarmado los números del siguiente modo:

220 – 58 = 200 + 20 – 58

Y como el alumno no puede realizar 20 – 58, calcula 58 – 20 = 38, obteniendo 200 + 38 = 238 como resultado.

NIVEL BAJO

1 ¿Cómo se lee este número? 601

A) Sesenta y uno.

B) Setenta y uno.

C) Seiscientos uno.

D) Seiscientos diez.

Respuestas

A)	12,97 %
B)	2,98 %
C)	78,34 %
D)	1,81 %

Omisiones 9,14 %

Si bien la mayoría de los alumnos eligió la respuesta correcta (78%), es interesante observar que también aproximadamente un 13% considera que 601 se lee "sesenta y uno".

Estos alumnos hacen una lectura no posicional del número: leen primero el sesenta y luego el uno, sumando ambos valores. Le otorgan la propiedad aditiva pero no la posicionalidad.

Aunque no es correcto que 601 sea sesenta y uno, su escritura "contiene" un 60 y un 1.

Los niños que hacen esta lectura saben reconocer algunos números. Creemos que les falta conocer y profundizar en las regularidades del sistema de numeración. Por ejemplo, en este caso, si un niño sabe que los números que se escriben con 3 cifras son de la familia de los "cienes", podrá entonces saber que este número será seiscientos y "algo".

INFORME DE ÍTEMS O ACTIVIDADES ABIERTAS

INTRODUCCIÓN

A partir del trabajo desplegado por los alumnos en los problemas, las estrategias que explicitan, las explicaciones que brindan, es posible extraer información acerca de su forma de trabajo, por un lado, y de la que se propone en las aulas, por el otro. Los estudiantes, a través de su trabajo, no solo son portavoces de sus posturas y creencias, sino también de las de sus docentes, de la cultura matemática que han ido construyendo a lo largo de su escolaridad.

Nuestro objetivo en este trabajo es obtener datos referidos a las producciones de los alumnos y herramientas que permitan pensar en cómo mejorar la calidad de sus aprendizajes.

PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Muchas veces, tanto los alumnos como los docentes hablan de problemas de multiplicar o de dividir. Esa forma de referirse a ellos puede encerrar la idea de que son de esa operación y no de otra. Quien afirma que un problema es de una determinada operación podría estar posicionado en una idea acerca de la enseñanza bastante definida: los problemas tienen una forma de resolverse, que es la que hay que buscar.

Desde nuestra perspectiva, los problemas admiten diversas formas de ser resueltos. Por ejemplo, uno cuya solución puede encontrarse multiplicando números enteros también puede resolverse a través de una suma. Un problema "de dividir" puede resolverse usando cualquiera de las cuatro operaciones.

La enseñanza de la multiplicación, y de las operaciones en general, sobrepasa a los algoritmos. No solo se trata de que el alumno los conozca, sino que además adquiera una variedad de recursos de cálculo (mental, con la calculadora, diferentes algoritmos, etc.), que pueda comprender estos algoritmos que utiliza vinculándolos con sus conocimientos del sistema de numeración, que analice y utilice las propiedades de las operaciones, que reconozca el campo de problemas que pueden resolverse con la operación en cuestión, etc. Claramente se trata de una enseñanza a largo plazo, que no puede ser abarcada en uno o dos años de escolaridad y donde los conocimientos se irán construyendo apoyándose en los construidos anteriormente.

Esto contrasta con la enseñanza habitual, donde el acento está generalmente puesto en la enseñanza de los cálculos y, más precisamente, algorítmicos. La resolución de problemas pasa a ser una aplicación de los cálculos, casi una excusa para hacer más, donde lo central no es el problema sino la cuenta. En esos casos, el trabajo de resolución de problemas queda a cargo de cada alumno. El aprendizaje acerca de cuándo un cálculo es apropiado para resolver una situación es personal y no siempre objeto de discusión en la clase.

Para una gran cantidad de alumnos, aunque se potencia para los flojos, hacer matemática se convierte casi en un acto de adivinación, de descubrimiento de una forma de resolución que está prefijada y, por lo tanto, es única. Para ellos, encontrar el modo de resolver un problema responde muchas veces a indicios externos que nada tienen que ver con la matemática, a "palabras clave" vacías de contenido, de razones matemáticas.

Estos son los estudiantes que nos preguntan cómo resolver los problemas:

"¿Es de más?"
"¿Es de menos?"
"¿Es de por?",
"¿Es de dividido?",…

No saben o no han tenido ocasión de construir en qué casos cada uno de ellos puede utilizarse. El docente, entonces, se convierte en su única fuente de información. La pregunta "¿Es de…?", a su vez, refiere a un modelo de matemática donde los problemas admiten una sola forma de resolución. En otro modelo, desde otra concepción de matemática, un mismo problema puede "ser de" todos los contenidos mencionados, según cuál sea la estrategia de resolución[1] elegida para resolverlo.

Pareciera que algunos docentes esperan que los alumnos aprendan cuestiones que van mucho más allá de lo que enseñó o de los problemas con los que trabajó. Se da en él, frecuentemente, un proceso de naturalización: desvincular al contenido de los problemas que le dieron origen, no considerar como diferentes a los sentidos de ese objeto, una pérdida de la mirada didáctica…

El trabajo con diferentes algoritmos para el cálculo de productos, por ejemplo, no habilita a los alumnos para reconocer cuáles son los problemas que pueden resolverse multiplicando. Este conocimiento será consecuencia de un trabajo sostenido que tenga por objetivo que los niños puedan encontrar qué tienen en común los problemas que se pueden resolver multiplicando. Los trabajos de reflexión, vinculados con deducir generalidades acerca de la estructura de los problemas

1 - No nos referimos solo al cálculo que el alumno hace, sino también –o sobretodo– a las relaciones entre los datos que se pudieran construir a raíz del problema que se trata, de las representaciones que se pudieran elaborar de esos datos y de esas relaciones, etc.

son muy complejos y es muy difícil que los alumnos hagan este recorrido solos, sin la intencionalidad de un docente que quiere enseñarles esto. Solo aquellos niños con claros proyectos de aprendizaje y que han comprendido que los problemas encierran alguna generalidad que los agrupa podrán intentar hacer este recorrido por su cuenta. Pero estos niños son solo unos pocos.

Los tipos de problemas que se pueden resolver multiplicando son variados y no se aprenden en un solo año de escolaridad. Lo más habitual es que la escuela se haga cargo de analizar a la multiplicación como una "suma abreviada" de una cierta cantidad de números iguales. En este punto es importante señalar que la frase que suele escucharse habitualmente es que "la multiplicación es una suma abreviada", dando por sobreentendido que se trata de números iguales. Los niños no tienen por qué saber que para poder expresar esa suma como un producto, los números a sumar tienen que ser los mismos. Es más, un problema interesante consiste en presentar varias sumas (con sumandos iguales y diferentes) y pedir que escriban como producto aquellas que se pueda.

El sentido de suma abreviada de la multiplicación deja de ser válido cuando se multiplican dos números racionales. Es decir que, por ejemplo, $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$ no puede interpretarse como una suma abreviada. Esto implica que la frase "la multiplicación es una suma abreviada de números iguales", no es totalmente verdadera. Es válido decir que toda suma reiterada de un mismo número puede expresarse como un producto, pero no es cierto que todo producto es el resultado de una suma abreviada.

ALGUNOS PROBLEMAS QUE SE PUEDEN RESOLVER MULTIPLICANDO

Analicemos los siguientes problemas:

> a) Una birome cuesta $2, ¿cuánto habrá que pagar por 15 biromes iguales, si no se hace descuento por cantidad?

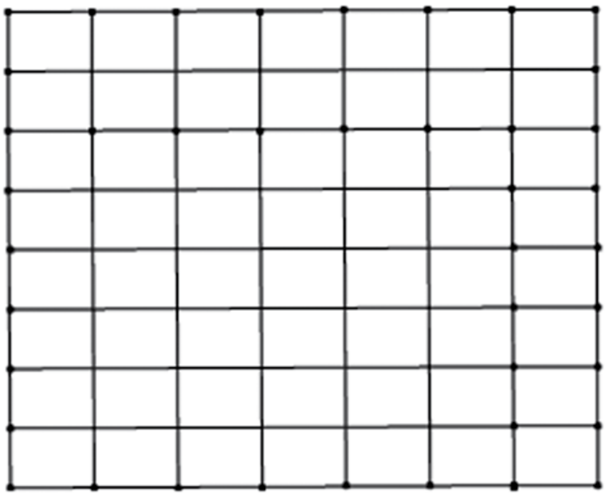
El problema a) puede resolverse sumando una cierta cantidad de números iguales y constituye la clase de problema multiplicativo más difundido en la escuela. Se trata de una situación de proporcionalidad directa.

> b) Para una reunión de padres se ubicaron 6 filas de 9 sillas cada una. ¿Cuántas sillas hay en total?

El problema anterior, donde hay una cierta cantidad de elementos ubicados en filas y columnas constituye otro sentido de la multiplicación. Suelen llamarse problemas de organizaciones rectangulares. Para este caso, es posible pensar que el total de sillas puede calcularse sumando las de cada fila:

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 9 \times 6$$

Consideremos una situación cualquiera de organizaciones rectangulares, como la siguiente:



La cantidad total de rectángulos que conforman la figura puede hallarse sumando los que están en cada fila o en cada columna.

Por fila: $7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 8 \times 7$

Por columna: $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 7 \times 8$
Como en cada caso se está sumando la totalidad de rectángulos, ambos resultados tienen que ser iguales:

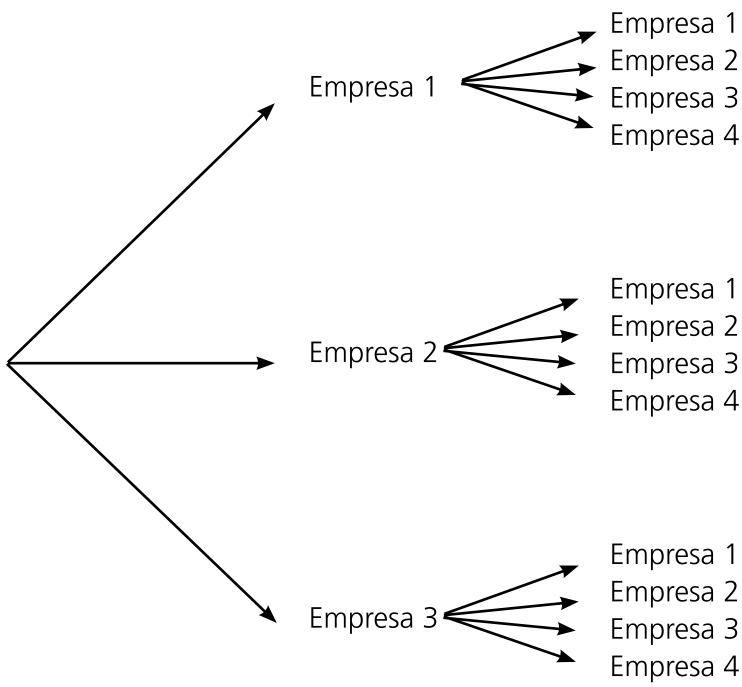
$$8 \times 7 = 7 \times 8$$

Si bien no esperamos que la conmutatividad del producto sea aprendido por los alumnos únicamente a partir del análisis de lo que ocurre en una organización rectangular, creemos que constituye otro contexto que permite reflexionar acerca de esta propiedad.

c) Para ir de Tucumán a Santiago del Estero hay tres empresas de micros, mientras que para ir de Santiago del Estero a Catamarca hay cuatro empresas. Si Ramiro necesita ir de Tucumán a Santiago del Estero y luego a Catamarca, ¿de cuántas maneras diferentes puede elegir las empresas de micros?

Este ejemplo puede resolverse multiplicando pero no es sencillo interpretarlo como una suma reiterada. Si los alumnos sólo trabajaron el concepto de multiplicación en contextos de suma abreviada es difícil que reconozcan el producto en estos otros tipos de problemas en los cuales se trata de contar, como parte del trabajo asociado a la combinatoria.

En este caso, los alumnos (o el docente puede proponerlo) pueden explorar el problema a partir de una representación gráfica:



Este diagrama no solo permite encontrar la cantidad total de formas de elegir empresas de micros a través de un conteo uno a uno, sino que además da la posibilidad de visualizar que para cada empresa que se elija para hacer el primer tramo hay la misma cantidad de formas de completar el viaje. De aquí, que un cálculo posible es

$4 + 4 + 4 = 3 \times 4$

El producto aparece de la mano de una determinada cantidad de posibilidades, que es la misma en todos los casos. Si bien la suma reiterada está, no es evidente ni surge a simple vista.

Hay también problemas planteados desde la matemática (intramatemáticos) y que constituyen un desafío para los niños. No todos ellos son objeto de enseñanza de 3º año, sino que se trabajan a lo largo de toda la escuela. Un ejemplo es el siguiente:

d) Considerando que 34 × 25 = 850 y sin hacer las cuentas, encuentre resultados de cada uno de los siguientes cálculos.

68 × 25	34 × 75	17 × 25	68 × 75
850 ÷ 34	850 ÷ 50	850 ÷ 5	

Al restringir el uso de la cuenta, los alumnos se ven forzados a usar propiedades para poder hallar los resultados. Según la experiencia con la resolución de problemas y el dominio matemático de los alumnos surgirán formas muy variadas de resolución del problema. Para aquellos que tienen más conocimientos aritméticos y han tenido la oportunidad de resolver situaciones que requieren poner en juego propiedades puede surgir una resolución como la siguiente:

- 68 × 25 es el doble de 850 porque 68 es el doble de 34. Entonces 68 × 25 = 2 × 34 × 25 = 2 × 850 = 1700.

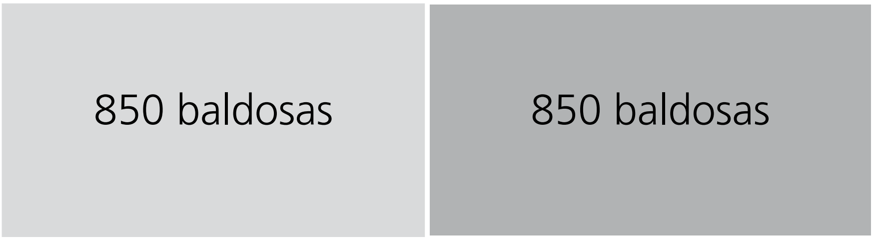
- Como 34 × 25 = 850, entonces es posible decir que 25 veces 34 es 850 o, lo que es lo mismo, que 34 entra 25 veces en 850, por lo que 850 ÷ 34 = 25.

- Como 25 entra 34 veces en 850, entonces 50 –el doble de 25- entra la mitad de veces en el mismo número porque por cada dos veces que entra 25, el 50 entra una vez. Luego, a partir de saber que 50 entra 17 veces en 850 es posible afirmar que 850÷50=17.

Las organizaciones rectangulares constituyen una herramienta de contextualización para resolver problemas como el anterior.

Por ejemplo, la parte a) pide hallar el resultado de un producto cuando se duplica uno de los factores. Al contextualizarlo quedaría: "850 baldosas están organizadas en 34 filas y 25 columnas. ¿Qué sucede con la cantidad de baldosas al duplicar la cantidad de filas?"

Como las cantidades que se dan como dato hacen que no sea posible hacer un dibujo y responder a través de un conteo, los alumnos deberán pensarlo[2] de manera "genérica". Al duplicar la cantidad de baldosas en alguno de las dos dimensiones (columnas o filas) se obtienen dos "rectángulos" iguales, uno al lado del otro o arriba del otro. Es decir, que se duplica la cantidad de baldosas.



A la luz de haber analizado los problemas anteriores, pensemos en el caso de un alumno que sólo trabajó con el algoritmo de la multiplicación o que solo resolvió problemas de proporcionalidad. ¿Ese conocimiento será suficiente para que pueda reconocer de manera autónoma las situaciones en las que se puede multiplicar? Es claro que no.

Cada uno de estos tipos de problemas necesita ser trabajado en la clase para que los alumnos aprendan por qué la multiplicación es una herramienta para resolverlos. Sin este trabajo es difícil que puedan identificar solos al producto como un modo de resolución de una clase de problemas. No nos referimos a un trabajo con problemas tipo, sino a que los alumnos deberían ser "expuestos" a todo tipo de situaciones analizando las razones por las cuales se elige una determinada herramienta.

Es notorio que, muchas veces, la enseñanza de los algoritmos ocupa el mayor tiempo de clase, dejando de lado el trabajo sobre los sentidos. En estos casos, el "cómo" reemplaza al "qué. No se puede pensar en un aprendizaje completo si el qué y el cómo no se trabajan simultáneamente.

El problema que se presentó en la evaluación es el siguiente:

13	**Un edificio tiene tres pisos con cinco departamentos cada uno y dos departamentos en la Planta Baja. ¿Cuántos departamentos tiene este edificio?**

2 - Si bien decimos que son los alumnos quienes pueden pensar en determinadas estrategias de resolución para los problemas, es cierto que muchas veces se trata de cuestiones que el docente quiere enseñar y que, por lo tanto, tendrán que mediar intervenciones – una o varias– para que se desarrollen.

Se trata de una situación multiplicativa con la dificultad que le agrega el piso que no tiene la misma cantidad de departamentos que los demás.

Los alumnos tienen que reconocer que para calcular la cantidad de departamentos que hay entre el primer y tercer piso hay que sumar 5 por cada uno:

$5 + 5 + 5 = 15 = 3 \times 5$

A este resultado hay que sumarle luego los dos departamentos de la planta baja, obteniendo un total de 15 + 2 = 17 departamentos.

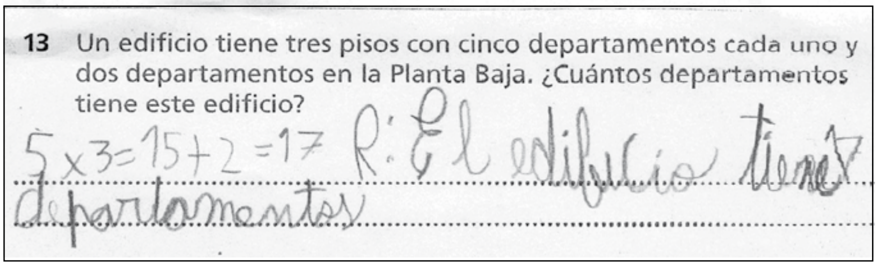
Es interesante señalar que con los valores que se proponen, el problema puede simplemente resolverse sumando. La multiplicación no resulta una herramienta necesaria para encontrar la solución.

Esto muchas veces sucede en el ámbito de la escuela, donde los docentes proponen a sus alumnos la resolución de determinadas situaciones previendo que serán resueltas con una herramienta particular y los niños luego utilizan otras. Es claro que los alumnos generalmente no usarán una estrategia que no consideren necesaria o con la cual no estén demasiado familiarizados. La suma les resulta, en este caso, más cercana que el producto.

EJEMPLOS DE RESOLUCIONES DE ALUMNOS

En este apartado tomaremos producciones de alumnos y las analizaremos intentando imaginar qué conocimientos, relaciones, estrategias, cada uno de ellos ha puesto en juego. Decimos que imaginaremos porque, por supuesto, no tenemos forma alguna de saber con certeza si nuestras afirmaciones se corresponden efectivamente con lo que los niños pensaron. Sin embargo, en este ensayo de suposiciones, nos interesa rescatar el análisis didáctico y lo que nos permite pensar acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

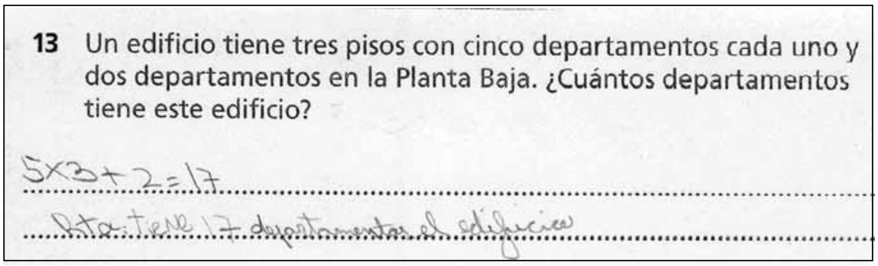
Ejemplo 1


13 Un edificio tiene tres pisos con cinco departamentos cada uno y dos departamentos en la Planta Baja. ¿Cuántos departamentos tiene este edificio?

5 x 3 = 15 + 2 = 17 R: El edificio tiene 17 departamentos

"R: El edificio tiene 17 departamentos"

Ejemplo 2


13 Un edificio tiene tres pisos con cinco departamentos cada uno y dos departamentos en la Planta Baja. ¿Cuántos departamentos tiene este edificio?

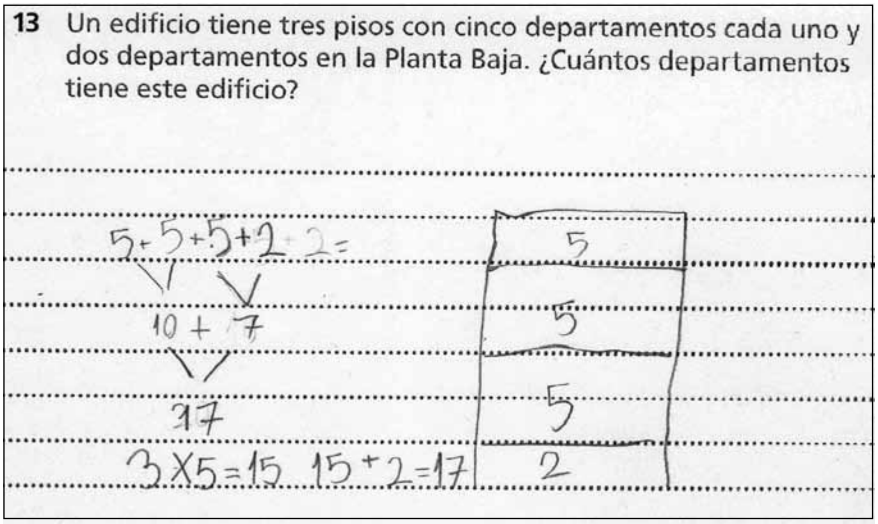
5×3+2=17

Rta: tiene 17 departamentos el edificio

"Rta: tiene 17 departamentos el edificio"

Este niño, a diferencia del anterior, puede expresar toda la relación en un solo cálculo.

Ejemplo 3


13 Un edificio tiene tres pisos con cinco departamentos cada uno y dos departamentos en la Planta Baja. ¿Cuántos departamentos tiene este edificio?

5+5+5+2 =

10 + 7

17

3X5=15 15+2=17

En el ejemplo anterior el alumno resuelve el problema sumando para luego expresar el cálculo utilizando una multiplicación y una suma. El diagrama ofrece una representación alternativa y puede constituirse en una ayuda importante.

Ejemplo 4


13 Un edificio tiene tres pisos con cinco departamentos cada uno y dos departamentos en la Planta Baja. ¿Cuántos departamentos tiene este edificio?

3x5=17 Tiene 17 departamentos

"Tiene 17 departamentos"

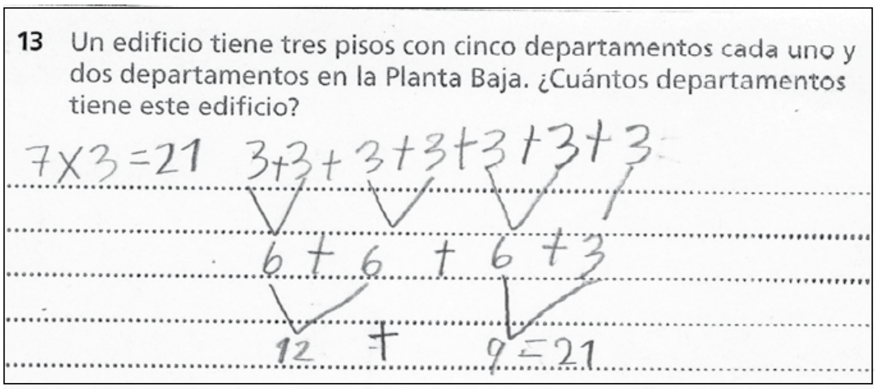
Es interesante observar cómo procedió este niño. Hace un dibujo minucioso, con todos los departamentos que corresponden a cada piso para luego, seguramente, contar el total. Pero es muy posible que su experiencia escolar le indique que todos los problemas se resuelven a partir de un cálculo y no a través del conteo, por lo que asocia su resultado a alguno –en este caso a 3×5– y lo iguala a "su" resultado. Otra opción es pensar que el alumno, al no haber aprendido a escribir cálculos con dos o más operaciones solo anota una de ellas y la otra la realiza mentalmente.

Si se pudiera interactuar con este niño para indagar sobre las razones por las que escribió ese cálculo y no otro podríamos no solo saber por qué lo usa sino que además podríamos operar sobre sus concepciones.

Entre las soluciones incorrectas hay matices y en la mayoría de los casos es posible reconocer aprendizajes.

Analicemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5



13 Un edificio tiene tres pisos con cinco departamentos cada uno y dos departamentos en la Planta Baja. ¿Cuántos departamentos tiene este edificio?

7X3=21 3+3+3+3+3+3+3

6 + 6 + 6 + 3

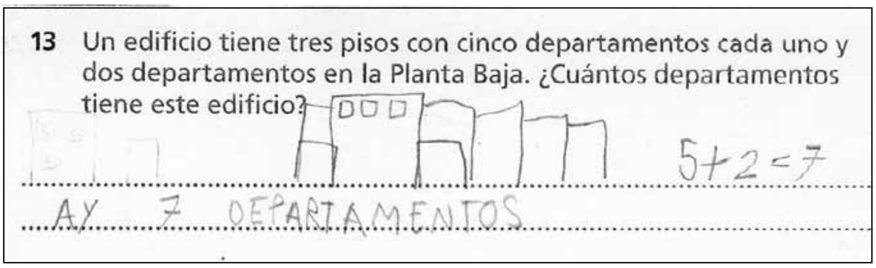
12 + 9 = 21

Este niño suma los departamentos que hay en cada uno de los pisos (1° a 3º) con la cantidad que hay en la planta baja. Ese 7, que luego multiplica por 3, pasaría a ser la cantidad de departamentos que él considera que hay en cada uno de los tres pisos, exceptuando a la planta baja. Si esa fue su suposición, entonces es correcta la interpretación que hace del uso del producto.

Pero también existe la posibilidad de que no haya reconocido qué operación utilizar para resolver el problema y haya elegido alguna porque sabe que "los problemas se resuelven con cuentas".

El siguiente ejemplo muestra el caso de un niño que está más lejos conceptualmente.

Ejemplo 6


13 Un edificio tiene tres pisos con cinco departamentos cada uno y dos departamentos en la Planta Baja. ¿Cuántos departamentos tiene este edificio?

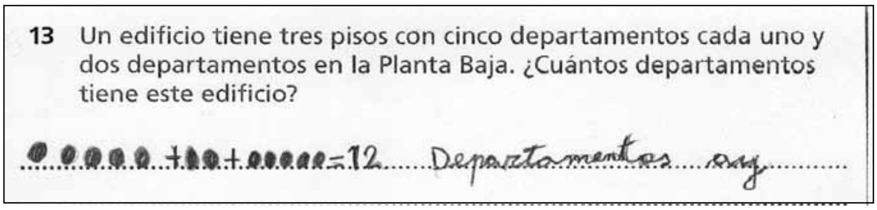
"Ay 7 departamentos"

Hay varias cuestiones interesantes para señalar aquí.

- Su solución, 5 + 2 = 7, es la suma de cantidad de departamentos. No suma cantidades inadecuadas, pues no tiene en cuenta a los pisos, que es un dato.
- El dibujo que hace indica que no comprendió la situación. Representa cinco departamentos y, debajo, otros dos. Pero además parece no comprender qué significa que hay "tres pisos", pues dibuja algo que parecen ser tres ventanas y, de hecho, no tiene este valor presente en el cálculo.

Es decir, que si bien es cierto que este niño no comprendió el significado del problema, entonces buscó una solución para la parte que sí entendió.

Ejemplo 7


13 Un edificio tiene tres pisos con cinco departamentos cada uno y dos departamentos en la Planta Baja. ¿Cuántos departamentos tiene este edificio?

"12 departamentos ay"

Aquí no hay una representación de la situación. El cálculo 5 + 2 + 5 pareciera indicar que este niño considera tres pisos: en uno hay 5 departamentos, en otro hay 5 departamentos y en el de abajo hay 2 (confunde piso con Planta Baja) y omite el 1° piso.

Es posible que algo del lenguaje o de la idea de edificio de departamentos, es decir del contexto del problema, pueda ser desconocido o mal interpretado por este alumno.

Llama la atención que representa los números con puntitos en un cálculo, mezclando notaciones, para luego seguramente resolver a partir de un conteo. Pareciera que este niño no dispone de un repertorio de cálculos memorizados en los que apoyarse para resolver otros.

EL SISTEMA DE NUMERACIÓN

El sistema de numeración decimal, complejo en sus características por cuanto comprende reglas de posicionalidad, admite diferentes funcionamientos cuando se trata de números escritos o enunciados, cuestiones todas que obstaculizan la temprana comprensión por parte de los niños.

La forma gráfica con la que se representa un número, por ejemplo 1348, poco dice acerca de su significado dentro del sistema de numeración. La numeración escrita es "opaca" porque las potencias de la base no se representan explícitamente a través de símbolos particulares, sino que el sujeto debe inferirlas a partir de la posición que ocupan las cifras en el número.

La numeración hablada, en cambio, tiene otras características. El nombre de un número involucra la explicitación de la descomposición aditiva y/o multiplicativa que subyacen a él. Esto se debe a que la numeración hablada **no** es posicional. Si lo fuera, la denominación oral del número 1348 sería uno tres cuatro ocho, cuando en realidad lo leemos como **mil trescientos cuarenta y ocho.** Cuando decimos una cifra enunciamos la potencia de 10 que le corresponde.

A propósito de la numeración hablada, Delia Lerner, Patricia Sadovsky y Susana Wolman[3] afirman que:

> *"En la numeración hablada, la yuxtaposición de palabras, supone siempre una operación aritmética, operación que en algunos casos es una suma (mil cuatro significa 1000 + 4, por ejemplo) y en otros una multiplicación (ochocientos significa 8 × 100, por ejemplo). En la denominación de un número, estas dos operaciones aparecen en general combinadas (por ejemplo, cinco mil cuatrocientos significa 5 × 1000 + 4 × 100) y –como para complicarle la existencia a quien intente comprender el sistema- un simple cambio en el orden de enunciación de las palabras indica que ha cambiado la operación aritmética involucrada: cinco mil (5 x 1000) y mil cinco (1000 + 5), seiscientos (6 × 100) y ciento seis (100 + 6)".*

Desde muy temprana edad los niños construyen conceptualizaciones que les permiten escribir números, interpretar y compararlos. La tarea para la enseñanza es lograr vincular sus conceptualizaciones con los

3 - Lerner, Sadovsky y Wolman, 1994. Op. Cit.

saberes considerados válidos, lo cual genera un problema didáctico: cómo enseñar un objeto complejo utilizando argumentaciones que sean comprensibles para el nivel de conocimientos de los alumnos. Para que esto sea posible, los docentes deberían repensar sobre las reglas que rigen nuestro sistema de numeración y no considerarlas como si solo se tratara de técnicas de traducción de las cantidades a una versión gráfica, para la que únicamente hay que aprender los criterios que regulan esa traducción.

El problema que se presentó en la evaluación es el siguiente:

16 ¿Cuál de los equipos calculó **mal** el total de puntos?

	Fichas de 10 puntos	Fichas de 1 punto	Total de puntos
Equipo rojo	14	5	145
Equipo verde	1	28	29
Equipo azul	1	0	10
Equipo amarillo	8	9	89

Respuesta: ....

Explicá cómo lo averiguaste: ....

La situación plantea un problema vinculado con la agrupación decimal, que no es la trivial. En este caso solo se puede descomponer en unos y dieces y no hay restricción sobre la cantidad de cada uno. En la descomposición en unidades, decenas y centenas, que es una actividad habitual en la escuela, cada potencia de diez puede aparecer un máximo de 9 veces, que no es lo que ocurre en este problema. Esta característica convierte a esta situación en más desafiante y hace que los niños tengan que analizar qué representa cada uno de los números que aparecen en la tabla.

En el caso en que la cantidad de unos no excede a 9, la escritura del número resulta directa y coincide con la yuxtaposición de las cifras[4]. No sucede lo mismo cuando la cantidad de unos es 10 o más. Por ejemplo, para el equipo verde hay 1 de 10 y 28 de 1, que hace un total de 10 + 28 = 38.

Se trata de un problema interesante pues, según dónde esté ubicada la cantidad mayor que 10 varía la interpretación que los niños pueden hacer acerca de cómo hallar la solución. Si la cantidad de dieces es mayor que 9, como en el ejemplo del equipo rojo (hay 14 dieces, 140, y 5 unos, es decir un total de 145), el número final resulta de la yuxtaposición de las cantidades. No ocurre lo mismo cuando la cantidad de unos es mayor que 9, como hemos visto en el ejemplo del equipo verde.

EJEMPLOS DE RESOLUCIONES DE ALUMNOS

Ejemplo 1

16 ¿Cuál de los equipos calculó **mal** el total de puntos?

	Fichas de 10 puntos	Fichas de 1 punto	Total de puntos
Equipo rojo	14	5	145
Equipo verde	1	28	29
Equipo azul	1	0	10
Equipo amarillo	8	9	89

Respuesta: El equipo verde porque 10 + 28 = 38

Explicá cómo lo averiguaste: porque ay uno que esta nomvrado como uno y esta en la fila del 10.

*"**Respuesta**: El equipo verde porque 10+28 = 38.*
***Explicá cómo lo averiguaste**: porque ay uno que esta nomvrado como uno y esta en la fila del 10."*

Es evidente que, para este alumno, ha sido posible dar alguna razón sobre la regla según la cual un número cambia de valor por estar en el grupo de los dieces "aunque se los nombre como 1". Su argumento muestra una comprensión acerca de que el valor de una cifra resulta relativo en función de su posición, además de que efectivamente, lo-

4 -Entendiendo, en este caso, por cifras, la cantidad de dieces seguida de la cantidad de unos.

gra operar usando la fila de los unos y la de los dieces, realizando los canjes necesarios para resolver el cálculo y establecer con ello que el equipo verde es quien calculó de modo incorrecto el total de puntos.

Se hace visible que este alumno ha realizado un avance en la conceptualización sobre la numeración que le aporta éxito en la resolución sin necesidad de realizar todos los cálculos, y le posibilita validar argumentos. Es que "dominar las características del sistema de numeración posicional decimal permite anticipar resultados de cálculos sin necesidad de hacerlos, así como controlar que los resultados obtenidos sean pertinentes[5]".

El siguiente alumno provee otra explicación que da cuenta de la posicionalidad:

Ejemplo 2

16 ¿Cuál de los equipos calculó **mal** el total de puntos?

	Fichas de 10 puntos	Fichas de 1 punto	Total de puntos
Equipo rojo	14	5	145
Equipo verde	1	28	29
Equipo azul	1	0	10
Equipo amarillo	8	9	89

Respuesta: el equipo verde.

Explicá cómo lo averiguaste: porque el 1 del equipo verde son diez puntos y ellos los sumaron como 1.

*"**Respuesta**: El equipo verde.*
Explicá cómo lo averiguaste: porque el 1 del equipo verde son diez puntos y ellos lo sumaron como 1."

No solo indica que "el 1 del equipo verde son diez puntos" sino que además explica en qué consistió el error cometido: "ellos lo sumaron como 1".

5 - *"Los números naturales y el sistema de numeración" en: Itzcovich, H. (coord.) La Matemática escolar, Aique, 2007.*

Ejemplo 3

16 ¿Cuál de los equipos calculó **mal** el total de puntos?

	Fichas de 10 puntos	Fichas de 1 punto	Total de puntos
Equipo rojo	14	5	145
Equipo verde	1	28	29
Equipo azul	1	0	10
Equipo amarillo	8	9	89

Respuesta: el equipo verde eta mal

Explicá cómo lo averiguaste: porque en fichar de 10 puntos se significa que es por 10 y hai en la tabla el uno debría estar en 10, pero dice 28+1=29 y por esa esta mal

*"***Respuesta***: El equipo verde eta mal.*
Explicá cómo lo averiguaste*: porque en fichas de 10 puntos se significa que es por 10 y hai en la tabla el uno debería estar en 10, pero dice 28 + 1 = 29 y por eso esta mal"*

Este niño indica claramente que para saber cuánto representan las fichas de 10 puntos "hay que multiplicar por 10" y aclara, muestra, que en el caso del equipo verde el 1 no fue multiplicado por 10.

Indica cuál es la operación que hay que hacer para calcular el total de puntos, lo que constituye una afirmación general, válida para cualquier caso. Es a partir de esa generalidad que puede dar cuenta que los puntos fueron mal calculados para el equipo verde.

Otras resoluciones, aunque presentan una respuesta correcta, dan explicaciones que no son las esperables por los docentes. El siguiente es un ejemplo de ello.

Ejemplo 4

16 ¿Cuál de los equipos calculó **mal** el total de puntos?

	Fichas de 10 puntos	Fichas de 1 punto	Total de puntos
Equipo rojo	14	5	145
Equipo verde	1	28	29
Equipo azul	1	0	10
Equipo amarillo	8	9	89

Respuesta: Equipo Verde

Explicá cómo lo averiguaste: lo Avergue porque el Equipo Verde es el unico que esta asi.

*"**Respuesta**: Equipo Verde.*
***Explicá cómo lo averiguaste**: lo averigue porque el Equipo Verde es el único que esta asi."*

El alumno encuentra en qué caso el puntaje está mal calculado sin recurrir a ninguna razón matemática, a partir de observar los números de la tabla. Para dar esta respuesta, es muy posible que el niño haya considerado que el puntaje total registrado del equipo verde es el único de los cuatro cuyas cifras de las columnas de puntajes parciales no se yuxtaponen para formar el puntaje total.

Esta resolución nos muestra que a veces se llega a la respuesta correcta por razones ajenas a la matemática. El alumno hizo un buen trabajo de observación y la "falta" es del problema, que permite este tipo de análisis.

Al respecto, veamos otro ejemplo :

Ejemplo 5

16 ¿Cuál de los equipos calculó **mal** el total de puntos?

	Fichas de 10 puntos	Fichas de 1 punto	Total de puntos
Equipo rojo	14	5	145
Equipo verde	1	28	29
Equipo azul	1	0	10
Equipo amarillo	8	9	89

Respuesta: El equipo que se equivoco fue el equipo verde

Explicá cómo lo averiguaste: porque el equipo rojo da bien y los otros tambien pero el verde dio mal en ves de dar 128 dio 29.

*"***Respuesta***: El equipo que se equivoco fue el equipo verde.*
Explicá cómo lo averiguaste: porque el equipo rojo da bien y los otros también pero el verde dio mal en ves de dar 128 dio 29."

Aunque las respuestas son correctas, las explicaciones plantean un punto de debate. El tipo de explicación que usan estos alumnos consiste en la comparación de resultados: "Esto está mal porque tiene que dar esto y no da". Se trata de un tipo de explicación matemáticamente aceptable porque exhibe un contraejemplo, es válida en tanto se compara lo que da con lo que debería dar (si lo que da no es lo que debería dar, está mal).

Ahondando un poco más en este tipo de explicación podemos ver que informa que una afirmación es incorrecta pero no por qué lo es, no proporciona fundamentos. Solo compara resultados.

Como estos niños contrastan con un valor incorrecto, entonces la explicación les dio por azar. Probablemente para este grupo todas hubiesen sido correctas si el total del verde hubiese sido 128.

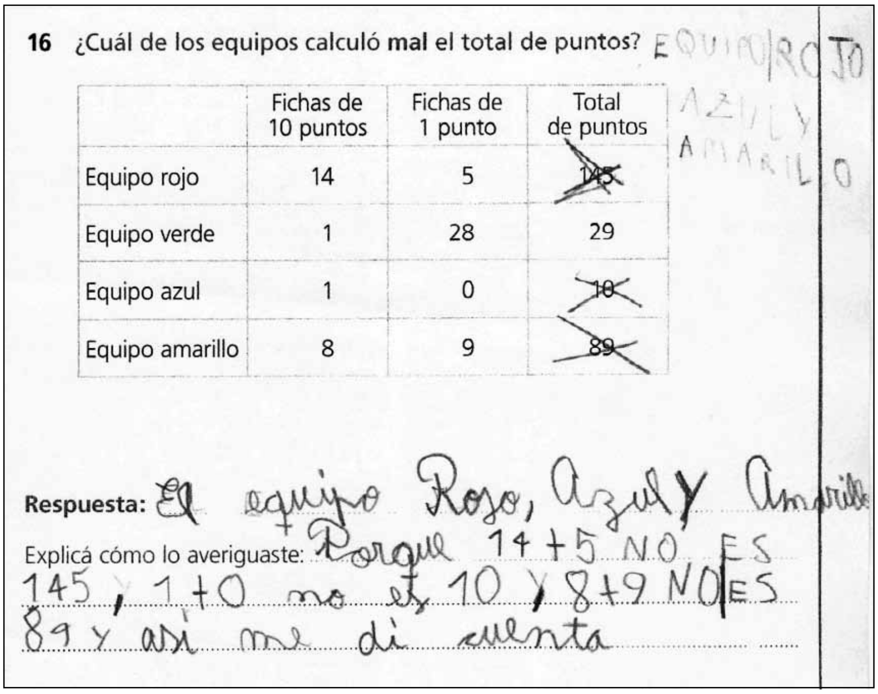
Estos alumnos no llegan a vislumbrar que la cantidad total de puntos se obtiene a través del resultado de 1×10 + 28, y no escribiendo las cantidades una a continuación de la otra para formar 128.

Tal y como veníamos diciendo, el problema lleva a la idea de que hay que poner las cantidades "una al lado de la otra", pero eso solo funciona cuando las fichas que valen 1 son números entre 0 y 9.

Algunos niños encuentran la respuesta correcta y además pueden explicarlo. Otros no logran dar razones, mientras que hay alumnos que dan razones equivocadas. Resulta un desafío pensar en cómo ayudar a un alumno para que la explicación tenga que ver con la posibilidad de comunicar adecuadamente aquello que sustenta su producción y sobre cada una de las decisiones que ha tomado para dar esta respuesta. En el caso en que tome decisiones erróneas o no vinculadas con la matemática es necesario ponerlas en discusión, buscar cómo llevar a estos niños a una contradicción, que les permita avanzar en sus conceptualizaciones.

Veamos ahora ejemplos de análisis erróneos del problema.

Ejemplo 6



16 ¿Cuál de los equipos calculó **mal** el total de puntos? EQUIPO ROJO AZUL Y AMARILLO

	Fichas de 10 puntos	Fichas de 1 punto	Total de puntos
Equipo rojo	14	5	~~145~~
Equipo verde	1	28	29
Equipo azul	1	0	~~10~~
Equipo amarillo	8	9	~~89~~

Respuesta: El equipo Rojo, Azul y Amarillo

Explicá cómo lo averiguaste: Porque 14+5 NO ES 145, 1+0 no es 10 y 8+9 NO ES 89 y así me di cuenta

*"**Respuesta**: El equipo Rojo, Azul y Amarillo.*
*E**xplicá cómo lo averiguaste**: Porque 14 + 5 no es 145, 1 + 0 no es 10 y 8 + 9 no es 89 y así me di cuenta"*

El alumno toma como válido y correcto el cálculo hecho en el caso del equipo verde, donde claramente se sumaron las cantidades de fichas de cada tipo. A partir de ahí deduce que en los otros tres casos el cálculo es erróneo, pues no se sumaron los valores de las correspondientes columnas.

Es interesante observar que, a pesar de que la pregunta está hecha en singular: "¿Cuál de los equipos calculó mal el total de puntos?", este alumno da tres respuestas.

En el siguiente caso, si bien la respuesta es incorrecta, la forma de explicar el cálculo efectuado resulta rica para analizar.

Ejemplo 7

16 ¿Cuál de los equipos calculó **mal** el total de puntos?

	Fichas de 10 puntos	Fichas de 1 punto	Total de puntos
Equipo rojo	14	5	145
Equipo verde	1	28	29
Equipo azul	1	0	10
Equipo amarillo	8	9	89

Respuesta: Amarillo, azul.

Explicá cómo lo averiguaste: Por que si a 8 le sumas 2 es 10 le sumas 3 es 13 y si a treca le suma 2 es 15 le sumas 2 es 17 entonces es 17. no es 89. Si a 1 le sumas 0 es 1. no es 10.

"Respuesta: Amarillo, Azul.
Explicá cómo lo averiguaste: Por que si a 8 le sumas 2 es 10 le sumas 3 es 13 y si a trece le sumas 2 es 15 le sumas 2 es 17 entonces es 17. No es 89. Si a 1 le sumas 0 es 1. No es 10."

Es bien interesante cómo relata el cálculo realizado. Permite ver cómo se fueron componiendo sumas parciales referidas al puntaje del equipo amarillo, 8+2=10, luego suma 3 y obtiene 13 y sigue componiendo hasta llegar a 17, con lo que describe la secuencia de cálculos que le permiten afirmar "lo que es" y lo que no es. Se apoya en cálculos conocidos para encontrar el resultado de otros que desconoce.

Se trata de una respuesta que, sometida a discusión facilitaría la revisión del error, por cuanto comunica minuciosamente cada paso realizado.

ALGUNOS PROBLEMAS QUE ABONAN A LA COMPRENSIÓN DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN

El aprendizaje del sistema de numeración se inicia antes de que los niños ingresen a la escuela y se extiende a lo largo de ella. Son muchos los aspectos de los sentidos de los números a construir, para lo cual es necesario presentar a los alumnos situaciones variadas donde se pongan en juego.

Por supuesto, aquí solo presentamos algunos ejemplos.

Problema 1
Escriban en la calculadora el número 48.

a) Piensen cálculos con el 48 donde en el resultado solo cambia "el dígito[6] de atrás". Escríbanlos en el cuaderno y verifiquen los resultados con la calculadora.
b) Piensen cálculos con el 48 donde en el resultado solo cambia "el dígito de adelante". Escríbanlos en el cuaderno y verifiquen los resultados con la calculadora.

La resolución de este problema requiere que los niños utilicen la posicionalidad del sistema de numeración, aunque no de manera explícita. Así se espera que analicen que para que solo "cambie" el 8 podrán sumar 1 o restar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8.

Determinar qué cálculo es necesario hacer para que solo "cambie" el 4 es una tarea más compleja. Es posible que, en una primera instancia, los niños intenten sumar o restar números de un dígito. La calculadora, en este caso, les dará información importante sobre las decisiones que toman y, a partir del análisis de esos resultados los alumnos podrán intentar nuevas estrategias o ajustar las que han utilizado. En esta ida y vuelta de cálculos se podrá llegar a la conclusión de que el 4 en realidad representa un 40 y, por lo tanto, para que cambie, hay que sumar o restar 10, 20, 30, etc.

Será tarea del docente trabajar sobre la explicitación y discusión de los criterios que utilizan los alumnos para darse cuenta de cuánto hay que sumar o restar, lo que constituye una fuente de aprendizaje.

6 - *"Los números naturales y el sistema de numeración" en: Itzcovich, H. (coord.) La Matemática escolar, Aique, 2007.*

Problema 2

Un juego se juega en parejas. Se arrojan dos dados de diferentes colores, por ejemplo rojo y blanco. Cada puntito del dado rojo vale 10, y cada puntito del dado blanco vale 1. Cada alumno, en su turno, tira ambos dados y anota los puntos obtenidos. Gana el que obtiene más puntos luego de una cierta cantidad de jugadas.

Al jugar, los niños elaborarán diversas formas de registrar el puntaje, algunas más eficientes que otras. En un espacio de discusión colectiva se podrá armar un cuadro indicando la cantidad de puntos de a 10, la de puntos de a 1 y el total obtenido, para promover la reflexión acerca de la relación entre la escritura del número total y cada uno de los números obtenidos en cada dado.

Al estar acotada la cantidad de puntos de cada uno a valores entre 1 y 6, la lectura del puntaje total puede hacerse en forma directa, por ejemplo:

Puntos de a 10	Puntos de a 1	Total
3	5	35
1	4	14

En este caso, a diferencia del problema planteado en la prueba, el puntaje total en cada jugada es la "yuxtaposición" de los puntos de 10 y 1, puestos en ese orden, lo cual brinda una oportunidad para plantear la discusión acerca de la diferencia entre las dos situaciones.

Otra cuestión a plantear es la comparación de las distintas estrategias usadas por los alumnos para calcular la suma de los puntajes.

Estos permiten instalar conclusiones acerca del valor de los números según la posición que ocupan.

Problema 3. Juego del Cajero

Materiales: Para cada grupo de cuatro niños: 100 billetes de $1, 30 billetes de $10 y 6 billetes de $100.
- 3 cajas para que el cajero guarde las distintas clases de billetes
- Cartones con números del 8 al 30 (un número por cartón)

Juego: La clase se organiza en grupos de a 4 niños. En cada grupo se elige a un alumno para que sea el cajero, quien tendrá los billetes.

Los otros alumnos por turno, extraen un cartón y le piden al cajero la cantidad de dinero expresada en el cartón, especificándole cuántos billetes de cada tipo desean. Si por ejemplo, un alumno extrae el cartón que dice 35 puede pedir 35 billetes de $1, 1 de $10 y 25 de $1 o 2 de $10 y 15 de $1 o 3 de $10 y 5 de $1. Juegan 3 veces cada uno conservando los cartones y el dinero que ganan cada vez. Al finalizar los 3 turnos, el maestro pregunta cuánto dinero posee cada niño y quién es el que tiene más dinero.

Este juego tiene varias finalidades:

- Utilizar descomposiciones aditivas de números.
- Comprender y utilizar las reglas de la numeración oral.
- Hacer funcionar los cambios 10 contra 1 en dos niveles: diez billetes de 1 se cambian por uno de 10, 10 billetes de 10 se cambian por uno de 100.
- Diferenciar las cifras según su posición en la escritura de un número, asociándoles una cierta cantidad de billetes.

Una vez finalizada la primera etapa del juego, será tarea del docente relevar colectivamente los diferentes procedimientos utilizados por los niños para calcular el total de ganancias. Un punto sobre el que es importante insistir tiene que ver con la posibilidad de verificar lo hecho: los cambios serán correctos cuando haya una correspondencia entre el total de billetes y el total de los números de los cartones. Se trata de una estrategia de control.

Luego del juego es posible proponer problemas de familiarización, similares a los siguientes[7].

a) Alguien ha extraído los cartones que dicen 15, 20 y 8. Dice que en total ha obtenido 42. ¿Es correcto?

7 - *Tomados de Beatriz Ressia de Moreno. Maria Emilia Quaranta. El aprendizaje y la enseñanza de la numeración escrita y del cálculo mental con los alumnos del Primer Ciclo de la escolaridad básica en el contexto de los Centros de Apoyo Escolar.*

b) Alguien tiene los siguientes billetes: 10 10 10 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ¿Cuánto dinero tiene?

c) Sumando sus cartones alguien ha obtenido 56. ¿Qué billetes puede ser que tenga? Proponé distintas posibilidades.

d) Los cartones de otro chico suman 66. ¿Qué billetes tiene? Proponé dos posibilidades.

En una nueva etapa de juego, se propone que el cajero no puede dar más de 9 billetes de una misma clase.

Se apunta a que, en un trabajo de reflexión colectivo, se concluya que alcanza con mirar el número para saber qué hay que pedir al cajero. Por ejemplo, si se extrae un cartón con el 38, se piden 3 billetes de $10 y 8 de $1.

Este juego admite muchas variantes, por ejemplo, que cada jugador extrae 5 cartones de una vez y debe calcular su ganancia antes de pedir los billetes al cajero, quien paga solo una vez.

También pueden agregarse billetes de $1.000 y, luego del juego, es posible plantear las siguientes preguntas:

- ¿Cuánto se pagó en cada caso?

$	trece billetes de $100, cuatro de $10 y cinco monedas de $1
$	cinco billetes de $100 y dos monedas de $1
$	diez billetes de $100
$	diez billetes de $100, nueve monedas de $1 y diez billetes de $10

-¿Cuál es la menor cantidad de billetes de $100 y de $10 que usarías para formar cada uno de los siguientes precios?

a) $ 3. 440
b) $ 1.090
c) $ 700
d) $ 1.020

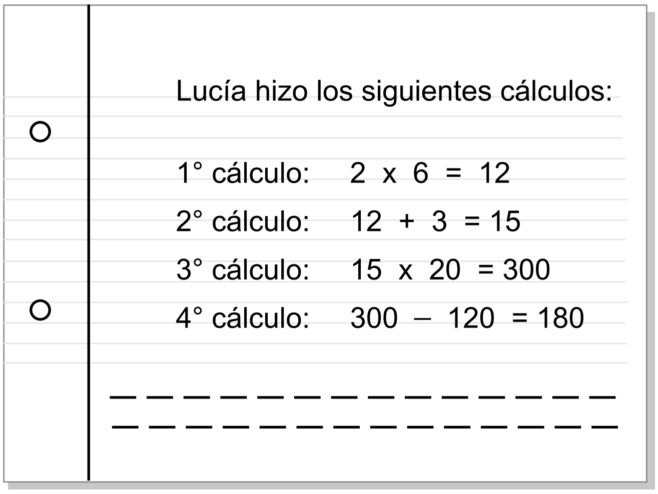
6° AÑO DE ESCOLARIDAD

ANÁLISIS DE ÍTEMS O ACTIVIDADES CERRADAS

Con este objetivo, proponemos un problema correspondiente a cada uno de los niveles de desempeño.

Nivel Alto

6 En una escuela hay dos cursos de cada año de 1° a 6° y un curso de 7° a 9°. Cada curso tiene 20 alumnos. En el total de los alumnos hay 120 chicos más que chicas. ¿Cuántas chicas hay?



¿Qué averiguó Lucía cuando hizo el 3° cálculo?

A) El número total de chicas.

B) El número total de alumnos.

C) El número de cursos de la escuela.

D) El número de alumnos de 1° a 6° año.

Respuestas

A)	22,78 %
B)	33,96 %
C)	14,80 %
D)	15,83 %

Omisiones 12,63 %

La resolución de este problema requiere de la interpretación del significado de cada cálculo en términos del contexto del problema. Se trata de una situación no habitual para los alumnos, debido a que no son ellos los encargados de encontrar cálculos para resolver el problema, sino que tienen que encontrarle sentido a cálculos propuestos por otro.

El hecho de que el problema no sea habitual y que requiera de una interpretación lo convierte en complejo, como lo muestran los resultados obtenidos.

Un recorrido posible para los alumnos es realizar las siguientes interpretaciones:

- $2 \times 6 = 12$ es la cantidad de cursos de 1° a 6°.
- $12 + 3$ es la cantidad de cursos de 1° a 9°, porque a la cantidad de cursos de que hay hasta sexto grado se le agregan los que hay entre 7° y 9°.
- Como hay 20 alumnos en cada curso, $15 \times 20 = 300$ es la cantidad total de alumnos de la escuela.

El 34% de los alumnos evaluados lo resolvió correctamente. Pero es de destacar que la gran dispersión que se observa entre las opciones incorrectas y la cantidad de omisiones muestra la dificultad que esta situación plantea a los niños. Interpretar un procedimiento de resolución dado y encontrarle sentido a un cálculo hecho por otro no es ciertamente una tarea simple.

Nivel Medio

14 Se repartieron 240 toneladas de cereal en 12 graneros iguales. ¿Cuántos graneros de igual dimensión que los anteriores se necesitarán para guardar 360 toneladas?

A) 8

B) 10

C) 18

D) 50

Respuestas

A)	7,97 %
B)	13,53 %
C)	48,66 %
D)	15,75 %

Omisiones 14,16 %

Este problema, que puede pensarse dentro del campo de la proporcionalidad, admite diferentes formas de ser resuelto, pero siempre se requiere varios pasos. Cada modo de resolución puede oscilar entre lo algorítmico (“regla de tres”) o métodos más artesanales. De todos modos, la obtención de la resolución no es inmediata y requiere de un proceso más complejo que en el ejemplo anterior.

Por ejemplo:

- Si para 240 toneladas se necesitan 12 graneros, para 120 toneladas se necesitarán 6 y para 360 (240 + 120) se usarán 12 + 6 = 18 graneros.

- Si para 240 toneladas se necesitan 12 graneros, en cada uno entran

  $$240 \div 12 = 20 \text{ toneladas.}$$

  Entonces, si se tienen 360 toneladas y se las quiere repartir en grupos de 20, se tienen $360 \div 20 = 18$.

Un número muy próximo al 50% de los alumnos evaluados lo respondió correctamente: 18 graneros.

Los niños que optaron por B o por D no reconocieron la relación de proporcionalidad que se da entre las variables y lo resolvieron intentando otro camino pero con un procedimiento equivocado: restando y sumando las toneladas de cereal y luego dividiendo por el número de graneros.

Por otra parte, el 8% de los alumnos reconoció que es un problema de proporcionalidad pero lo trabajó como si fuera de proporcionalidad inversa.

Nivel Bajo

5 ¿La división $\boxed{732 : 4}$ da como resultado 183. ¿Cuál es el resto?

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

Seguramente este problema no ha presentado demasiadas dificultades para los alumnos porque se trata de una situación conocida por ellos. En la escuela es habitual que se proponga resolver cálculos.

El hecho de que se trate de una situación "escolarizada", conocida por los alumnos, hace que su nivel de dificultad y por lo tanto el grado de desafío sea menor.

De esta manera, el 68,09% de los alumnos evaluados contestó correctamente identificando que el resto de la división es 0.

Respuestas

A)	68,09 %
B)	7,61 %
C)	8,19 %
D)	9,77 %

Omisiones 6,34 %

El ítem en cuestión plantea, a pesar de su aparente simpleza, diferentes formas de ser abordado para su resolución que merecen ser discutidas en el seno de una clase. Si bien es esperable que muchos niños apelen a resolver el cálculo sin tener en cuenta que se da como dato el cociente, existen otras formas de resolución que ponen en juego relaciones entre los elementos de una división u otros conceptos. Por ejemplo, el resto puede obtenerse como la diferencia entre 732 y el producto 183×4. También podría pensarse que 732 es múltiplo de 4 pues puede expresarse como $7 \times 100 + 32$, y 100 y 32 son múltiplos de 4, por lo que el resto al dividirlo por 4 es necesariamente cero.

INFORME DE ÍTEMS O ACTIVIDADES ABIERTAS

PROBLEMA: LAS FRACCIONES

Los niños llegan al momento de aprender los números racionales luego de un trabajo de larga data con los números naturales. Han construido certezas, algunas de las cuales valen para ese conjunto de números y no para los racionales, pudiendo llegar a constituirse en un obstáculo para su aprendizaje. Por ejemplo, saben que el producto de dos números –naturales– es siempre mayor o igual que ambos, una afirmación que pasa a ser verdadera solo bajo ciertas condiciones en el campo de los números racionales. Antes de comenzar con el estudio de los números racionales, los números naturales constituyen para los alumnos "los números", pues para ellos no existen otros. Las verdades que van construyendo a partir del trabajo con los naturales valen, por lo tanto, para todos los números que ellos conocen. ¿Por qué habrían de pensar que pueden dejar de ser válidas para otro conjunto numérico que ni siquiera sospechan que existe?

Pero esto además conlleva toda una problemática compleja. Cuando los niños parten de la idea de que, por ejemplo, el resultado de una división tiene que ser menor o igual que el dividendo, se trata de una herramienta que usarán para controlar sus cálculos. Entonces, si un alumno obtiene que $125 \div 5 = 205$, puede saber que ese no es un resultado posible porque 205 es mayor que 125. Ahora bien, muchos niños extienden esta propiedad al conjunto numérico de los racionales, creyéndola válida también allí. Es así como no logran aceptar como correcto el resultado $2 \div 0{,}1 = 20$, pues el cociente es mayor que el dividendo.

El aprendizaje de los números racionales implica una ruptura con lo que los niños saben: los números dejan de tener siguiente, se necesitan dos números para representar uno, la multiplicación no necesariamente puede interpretarse como una suma reiterada del mismo número, el producto no siempre es mayor que los factores, el cociente en la división no siempre es menor que el dividendo, un número con más cifras puede ser menor que uno con menos cifras (1,97989 es menor que 2), el mismo número se puede expresar de distintos modos (fracciones equivalentes, expresión decimal)…

En su expresión fraccionaria, los números racionales se utilizan para expresar repartos, medidas (en tanto relaciones entre partes y todos), porcentajes y escalas, y también para tratar relaciones de proporcionalidad. En su expresión decimal, se vinculan al contexto del dinero y la medida.

Pero ¿qué sucede con la enseñanza de las fracciones en la escuela?

Habitualmente se presentan situaciones de fraccionamiento, a partir de las cuales los niños rápidamente aprenden que el "número de abajo" indica la cantidad de partes iguales (o de igual área) que tiene que tener el entero y el "número de arriba" cuántas hay que pintar.

También hay un largo tiempo dedicado a la enseñanza de los algoritmos de cálculo con fracciones y decimales.

El problema propuesto en la evaluación es el siguiente:

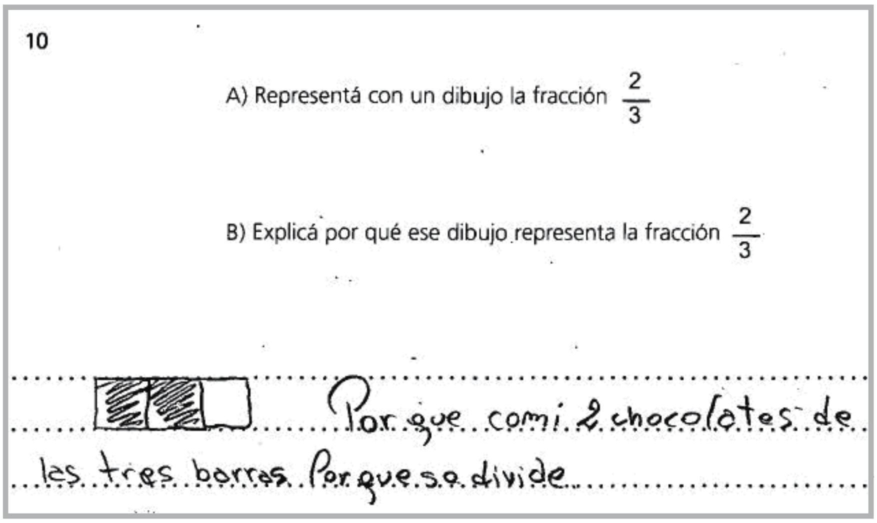
10

A) Representá con un dibujo la fracción $\frac{2}{3}$

B) Explicá por qué ese dibujo representa la fracción $\frac{2}{3}$

Contestá en las hojas de respuestas

Ejemplo I

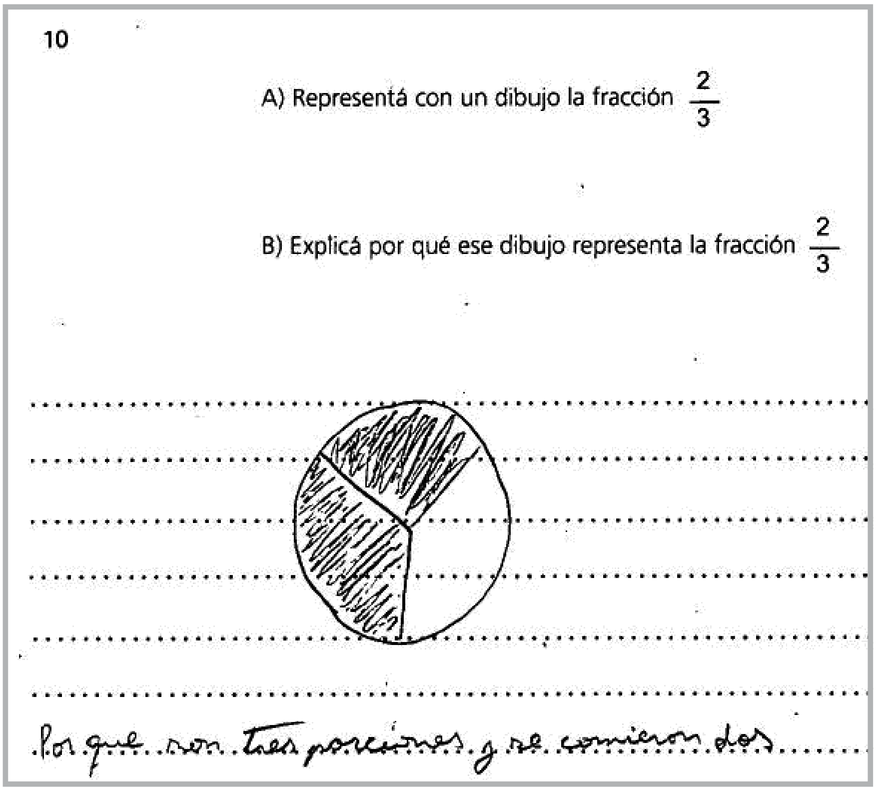

10

A) Representá con un dibujo la fracción $\frac{2}{3}$

B) Explicá por qué ese dibujo representa la fracción $\frac{2}{3}$

Porque comi 2 chocolates de las tres barras. Porque se divide

"Porque comi 2 chocolates de las tres barras. Porque se divide."



10

A) Representá con un dibujo la fracción $\frac{2}{3}$

B) Explicá por qué ese dibujo representa la fracción $\frac{2}{3}$

Por que son tres porciones y se comieron dos

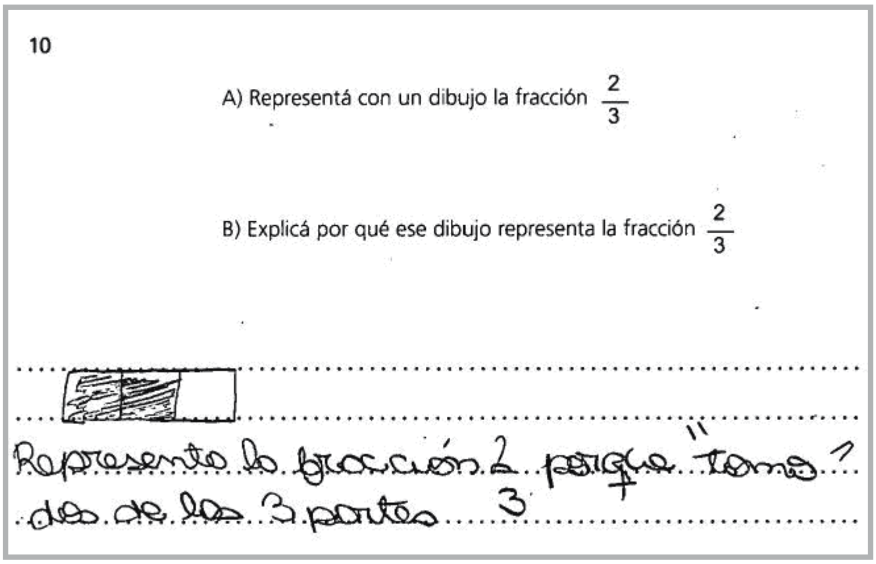
"Por que son tres porciones y se comieron dos."

Es frecuente que la presentación del concepto de fracción se haga a partir de repartos de comida. Nada de malo hay en eso. El problema es cuando los niños solo disponen de esta interpretación de las fracciones, como se evidencia en estos dos ejemplos.

Sin embargo, hay una diferencia en las explicaciones que estos dos niños brindan. El primero de ellos dice "Porque comí 2 chocolates de las tres barras. Porque se divide", que no es una explicación del todo correcta. No se comen 2 chocolates de 3 barras, sino 2 barras de 3 barras de chocolate. Este cambio, que parece sutil, muestra un cambio de unidad que mostraría que este niño no dispone de este concepto. El segundo niño sí se refiere a 2 de 3 porciones de un todo. Ninguno de los dos hace referencia a que las partes tienen que ser iguales. Pareciera que esto lo asumen como dado.

También es interesante observar que ninguno de los dos hizo un gráfico con precisión, y muestran diferentes formas de dividir el entero en 3 partes iguales. No se busca precisión en el dibujo, siempre y cuando haya precisión en los argumentos que sostienen el dibujo realizado porque de otro modo, es el mismo dibujo el que tiene que sostener la argumentación del dibujo realizado.

Ejemplo 2



10

A) Representá con un dibujo la fracción $\frac{2}{3}$

B) Explicá por qué ese dibujo representa la fracción $\frac{2}{3}$

Representa la fracción $\frac{2}{3}$ porque "tomo" dos de las 3 partes

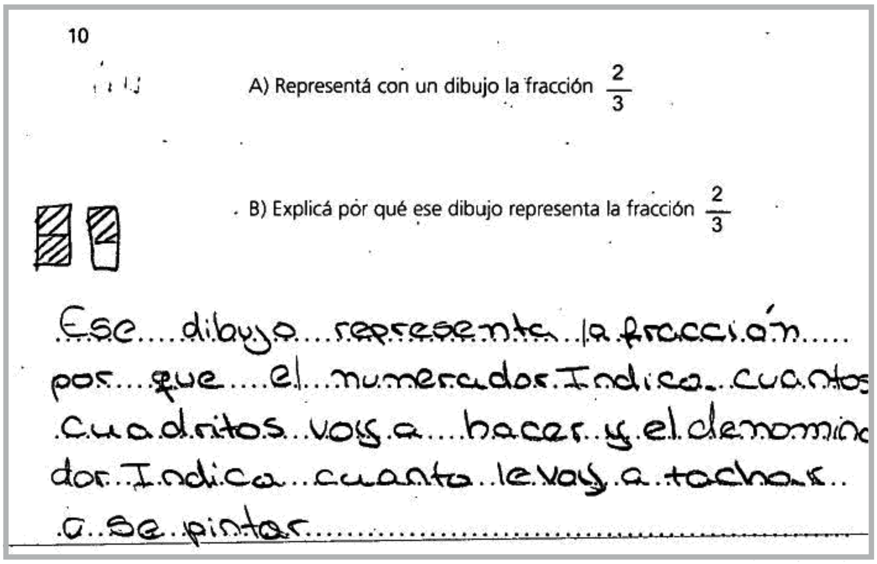
"Representa la fracción $\frac{2}{3}$ *porque "tomo" dos de las 3 partes."*

En este caso, el alumno presenta un gráfico similar a los del ejemplo anterior y da una explicación que no se apoya en la comida. Tampoco hace referencia a que las partes deben ser iguales.

El hecho que los alumnos no hagan explícito que el entero tiene que dividirse en partes iguales puede deberse a que no han resuelto ninguna situación donde el entero esté partido en partes que no sean iguales.

Las resoluciones incorrectas nos brindan datos importantísimos para pensar sobre las concepciones de los alumnos sobre las fracciones, los problemas de su enseñanza y el aprendizaje.

Ejemplo 3



10

A) Representá con un dibujo la fracción $\frac{2}{3}$

B) Explicá por qué ese dibujo representa la fracción $\frac{2}{3}$

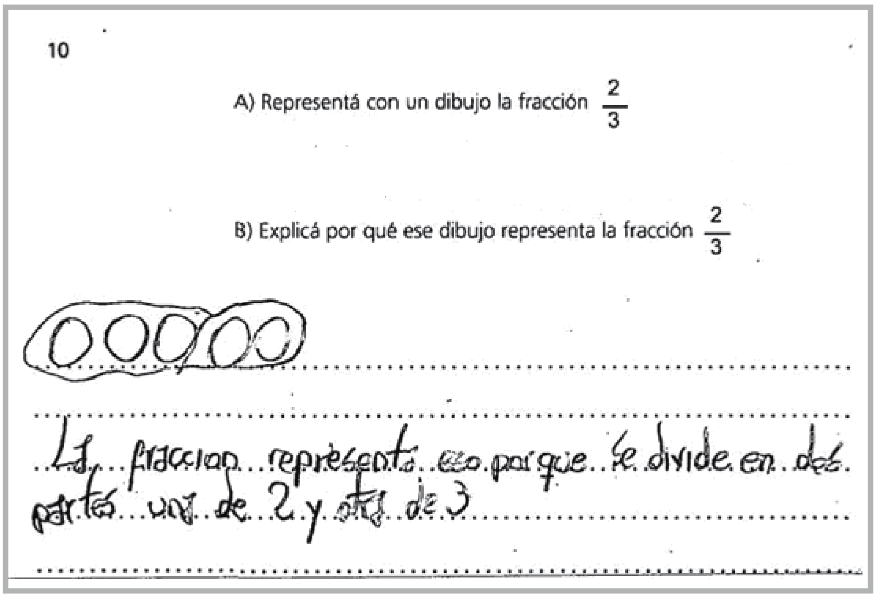
Ese dibujo representa la fracción
por que el numerados Indica cuantos
cuadritos voy a hacer y el denomina
dor Indica cuanto le voy a tachar
o se pintar

"Ese dibujo representa la fracción por que el numerador Indica cuantos cuadritos voy a hacer y el denominador Indica cuanto le voy a tachar o se pintar"

Este niño tiene noción de lo que representa cada uno de los números que constituye una fracción en una situación de fraccionamiento. Su problema es que lo recuerda en el orden inverso. No es extraño que los alumnos pregunten a sus docentes "¿Cuál era el número que indicaba lo que había que pintar?" "¿Cuál era el número que decía en cuántas partes había que partir al entero?". Detrás de estas preguntas se esconde una ausencia de comprensión del concepto en cuestión. Detrás de estas preguntas hay un aprendizaje "algorítmico" de una definición de fracción, no de un concepto.

Este niño dibuja dos enteros y la fracción que considera como $\frac{2}{3}$ es mayor que 1. Su definición de fracción no hace que se lo cuestione.

Ejemplo 4



10

A) Representá con un dibujo la fracción $\frac{2}{3}$

B) Explicá por qué ese dibujo representa la fracción $\frac{2}{3}$

La fraccion representa eso porque se divide en dos partes una de 2 y otra de 3

"La fracción representa eso porque se divide en dos partes una de 2 y otra de 3"

Este niño propone otra representación incorrecta para $\frac{2}{3}$, diferente de la anterior pero también vinculada a un aprendizaje algorítmico de la noción de fracción. En este caso no tiene en cuenta que uno de los números indica una parte "a pintar", sino que los toma como las dos partes en que hay que dividir a un entero, que por otro lado considera discreto.

Tanto en este ejemplo como en el anterior está ausente la idea de fracción como una parte de un todo. Pareciera que los alumnos la consideran como dos números por separado en lugar de uno solo.

¿QUÉ SITUACIONES ABONAN A QUE LOS ALUMNOS PUEDAN CONSTRUIR UNA NOCIÓN MÁS ACABADA DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN?

Como hemos señalado, el aprendizaje del concepto de fracción requiere de la inmersión en diversos tipos de problemas, con el tiempo de reflexión necesario para pensar sobre esos aprendizajes. No alcanza con presentar a los alumnos una lista de problemas variados, sino que cada aspecto del concepto a enseñar tiene que ir acompañado de una intencionalidad por parte del docente. Aquí solo presentaremos algunos problemas que, consideramos, tienen algún interés particular –matemático o didáctico–, pero no van a constituir un proyecto de enseñanza.

Acerca de la definición de fracción

Una definición posible para trabajar en clase es que un número (o una parte de un entero) es $\frac{1}{3}$ si 3 veces ese número es la unidad (ó 1 o el entero). A partir de ella será posible determinar que la parte sombreada en el siguiente entero efectivamente representa $\frac{1}{3}$.

pues la zona sombreada entra exactamente 3 veces en el entero.

A partir de la definición de $\frac{1}{3}$ puede definirse a $\frac{2}{3}$ como 2 veces $\frac{1}{3}$ ó 2 de $\frac{1}{3}$.

La definición anterior no se opone a la que más habitualmente se conoce[8], sino que son equivalentes, y se complementan desde un punto de vista didáctico. Es decir que la primera se adaptará mejor para resolver algunos problemas y la segunda para otros. Poder elegir cuál definición conviene usar es parte de la tarea del hacer matemática que queremos enseñar a nuestros alumnos.

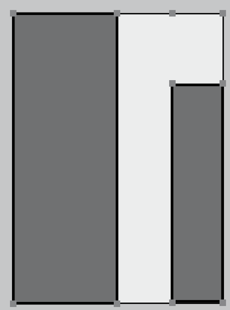
8 - Una fracción representa 1/3 si el entero (o la unidad ó 1) se divide en 3 partes iguales y se toma una de ellas.

9 - Utilizamos la palabra "trabajo" en el sentido más amplio de su término, en que implica la construcción de un conocimiento.

La definición algorítmica no solo produce "olvidos" en los alumnos, sino que además los lleva a perder el control sobre sus producciones. De haber trabajado[9] con la definición propuesta más arriba, si 3 veces $\frac{1}{3}$ es la unidad, entonces $\frac{2}{3}$ (2 veces $\frac{1}{3}$) tiene que ser menor que el entero. Este trabajo parece no haber sido hecho con los alumnos que producen un gráfico mayor que una unidad, porque es necesario que los niños estén expuestos a situaciones variadas donde tengan que estimar, tomar decisiones, y la finalidad sea justamente estas cuestiones más vinculadas al quehacer matemático.

Por ejemplo, la siguiente situación pone en relieve la importancia de disponer de partes iguales para poder saber qué fracción está sombreada.

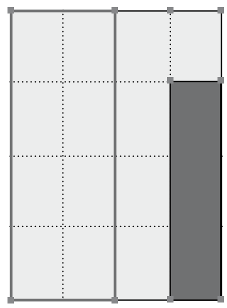
Problema 1
Escribí la parte sombreada del rectángulo como una fracción.



En este caso es posible subdividir el rectángulo para determinar cuántas partes iguales forman todo el rectángulo y cuántas están sombreadas. No resulta difícil determinar que el rectángulo sombreado de la izquierda representa $\frac{1}{2}$ del entero. Es más complejo determinar qué fracción representa el rectángulo sombreado de la derecha. Para hacerlo pueden usarse los puntos para, a partir de ellos, trazar algunos segmentos.

Los niños podrán ensayar diversas divisiones del rectángulo, pero es necesario que sean iguales.

Una posibilidad es la siguiente:



Aquí se ve que el entero ha quedado dividido en 16 partes iguales, cada una de $\frac{1}{16}$ del total. Como están sombreadas 3 de ellas, entonces se trata de $\frac{3}{16}$.
La misma subdivisión sirve para determinar el total que está sombreado:
$\frac{8}{16} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$
También puede utilizarse para establecer una relación entre medios y dieciséis-avos: $\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$. La relación se apoya en que ambas fracciones representan la misma parte del entero y no en que se multiplica el numerador y denominador de $\frac{1}{2}$ por un mismo número. Ese es un modo de obtener fracciones equivalentes que nada dice sobre qué son. Una cuestión es cómo hacer para hallar una fracción equivalente a una dada, otra entender por qué esa técnica efectivamente "produce" fracciones equivalentes y otra aun es comprender qué son las fracciones equivalentes.

Muchas veces la escuela se hace cargo de enseñar cómo hacer ciertas cosas sin asegurarse de que los niños comprendan realmente qué son.

Relaciones entre fracciones y representaciones gráficas

Problema 2
El siguiente segmento mide $\frac{2}{3}$ de una unidad. Dibujen un segmento que mida $\frac{1}{6}$ de esa unidad.

El problema anterior busca que los alumnos elaboren una relación entre tercios y sextos. Es claro que el segmento puede dibujarse evitando el uso de esa relación, dibujando el segmento entero –agregándole el tercio que le falta– para luego dividirlo en sextos. Será trabajo del docente que los dos recursos se pongan en discusión, se comparen, se analicen y se establezca la relación que prevalece en uno de ellos.

¿Qué se espera que un niño piense? Que si el segmento dibujado mide $\frac{2}{3}$ de la unidad y 6 cm de largo, su mitad medirá $\frac{1}{3}$ de la unidad y 3 cm. Como la mitad de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{6}$, entonces $\frac{1}{6}$ de unidad será un segmento de 1,5 cm (la mitad de 3 cm).

Repartos

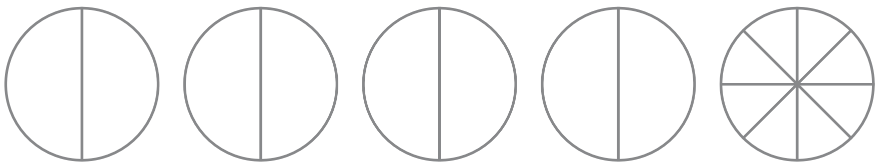
Los problemas de reparto muchas veces se consideran como contextos privilegiados para introducir y profundizar el concepto de fracción.

Problema 3
Se quieren repartir 5 alfajores entre 8 amigos de modo que cada uno reciba lo mismo y no sobre nada. ¿Cuánto le toca a cada uno?

Este problema permite utilizar diferentes estrategias (dibujos, gráficos, etc.) para encontrar que el resultado es $\frac{5}{8}$. Aun en el caso en que los alumnos no hayan trabajado la fracción ligada a problemas de repartos o si no reconocen este sentido de las fracciones, pueden explorarlo y encontrar una solución.

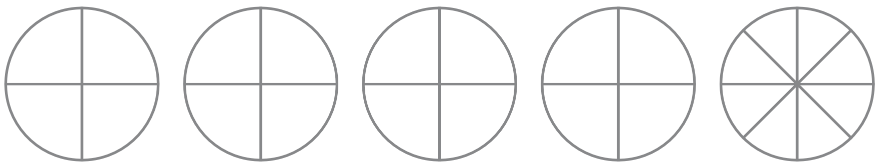
Aunque una estrategia de resolución gráfica parezca rudimentaria, en estos casos es una puerta de entrada para vislumbrar relaciones entre números. En este caso pueden hacerse los siguientes repartos:

a) Se han repartido los alfajores (o enteros, pues ya se trata de representaciones de los mismos) en 8 partes de $\frac{1}{2}$ y 8 de $\frac{1}{8}$.



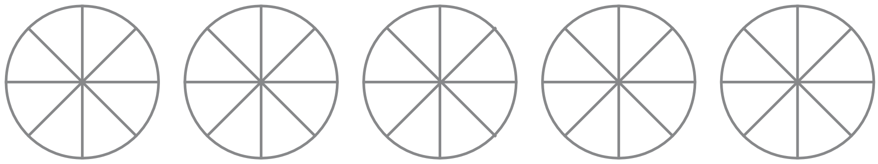
Luego, cada amigo recibe $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

b) En este caso, los alfajores se han repartido en 16 partes de $\frac{1}{4}$ y 8 de $\frac{1}{8}$.



Cada uno recibe $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ *ó* $\frac{2}{4} + \frac{1}{8}$.

c) Cada alfajor se divide en 8 partes iguales, por lo que a cada amigo le toca $\frac{1}{8}$ de cada uno.



Como hay 5 alfajores, cada uno recibe $\frac{5}{8}$ de alfajor.

Cada uno de los repartos está correctamente hecho, por lo cual lo que le toca a cada amigo en cada caso tiene que ser lo mismo. Necesariamente los valores que se obtuvieron en cada caso tienen que ser expresiones diferentes del mismo número. Es decir, $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$.

Las relaciones entre fracciones permiten validar las igualdades anteriores. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ es la mitad de $\frac{1}{2}$, por lo que $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$, luego $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$. Entonces:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ porque $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}$ porque $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$ pues 2 de $\frac{1}{8}$ más 2 de $\frac{1}{8}$ más 1 de $\frac{1}{8}$ son 5 de $\frac{1}{8}$, que son $\frac{5}{8}$.

Problema 4

Se quieren repartir 11 alfajores entre 4 amigos de modo que cada uno reciba lo mismo y no sobre nada. ¿Cuánto le toca a cada uno?

Se propone, en este caso, un reparto donde los alumnos pueden reinvertir las estrategias que puedan haber surgido a propósito de la resolución del problema anterior, pero para el caso en que a cada amigo le corresponde una cantidad mayor que 1.

Pueden ensayarse diferentes escrituras para la parte que le corresponde a cada uno, como $\frac{11}{4}$, $2+\frac{3}{4}$ ó $\frac{5}{2}+\frac{1}{4}$.

Problema 5

Para resolver el problema anterior, Ramiro utilizó la siguiente división:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

Sin hacer ningún gráfico y solo a partir del resultado de la división respondió que a cada chico le toca 2 ¾ de chocolate.
¿Podés explicar cómo resolvió Ramiro el problema?

El objetivo de este problema es hacer un primer acercamiento entre las fracciones y la división. Se busca que los niños se den cuenta de que el cociente indica la cantidad de alfajores enteros que le corresponden a cada amigo, mientras que el resto informa la cantidad de alfajores que han sobrado, 3 en este caso. Ese alfajor se puede repartir entre los 4 chicos, tocándole $\frac{3}{4}$ a cada uno. El cociente de la división es la cantidad entera que le toca a cada uno y la parte fraccionaria está dada por la fracción cuyo numerador es el resto de la división y el denominador la cantidad de chicos entre los que se reparte.

Problema 6

¿Hay alguna fracción entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$? Explicá por qué.

Apoyándose en sus conocimientos sobre números naturales, es muy posible que los alumnos piensen que no existe ninguna fracción entre las dos dadas. Para ellos, parecen "fracciones consecutivas". Sin embargo, es posible hallar fracciones entre las dadas expresándolas de manera equivalente con un denominador conveniente. Por ejemplo, las escrituras $\frac{1}{6}=\frac{5}{30}$ y $\frac{1}{5}=\frac{6}{30}$ no permiten encontrar una fracción entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$ con denominador 30, pero permiten ver que $\frac{1}{6}$ es menor que $\frac{1}{5}$, pues $\frac{1}{6}=\frac{5}{30}<\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$. Si se usa otra equivalencia, por ejemplo $\frac{1}{6}=\frac{10}{60}$ y $\frac{1}{5}=\frac{12}{60}$, es posible ver que $\frac{11}{60}$ está entre las dos fracciones dadas.

Las fracciones equivalentes no solo resultan necesarias para resolver algunos cálculos sino para comparar y encontrar fracciones entre otras.

Fracciones en la recta

El siguiente problema brinda otra oportunidad para poner en juego las equivalencias y relaciones entre fracciones así como el trabajo con escalas.

Problema 7

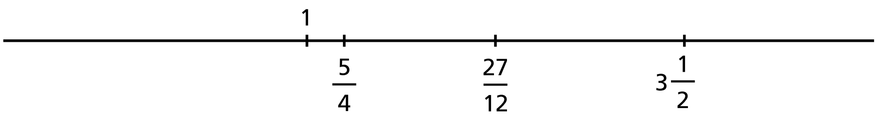
Ubicá los números $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{6}$ y 2 en la siguiente recta numérica.

¿Qué tipo de trabajo es posible hacer a partir de una recta como la anterior? En principio, es importante que los niños sepan que es suficiente disponer de dos números ubicados en la recta para poder ubicar otro cualquiera. Es decir que, a partir de conocer la ubicación de dos números cualesquiera es posible establecer una escala.

En este caso es importante saber qué diferencia hay entre los números representados, es decir $3\frac{1}{2} - \frac{27}{12}$, que es de $\frac{15}{12}$. Luego, en una distancia de 2,5 cm se representa una fracción de $\frac{15}{12}$ o, en 0,5 cm una de $\frac{3}{12}$.

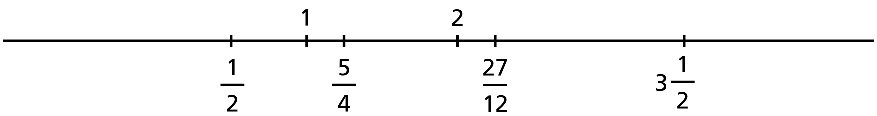
Dos centímetros y medio a la izquierda de $\frac{27}{12}$ estará $\frac{27}{12} - \frac{15}{12} = \frac{12}{12} = 1$.

Como $\frac{5}{4}$ es $1 + \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, entonces $\frac{5}{4}$ estará ubicado a 0,5 cm a la derecha del número 1.



El número $\frac{3}{6}$, que es equivalente a $\frac{1}{2}$, puede pensarse en el punto medio entre 0 y 1 o un cuarto de unidad a la izquierda de 1. Ahora bien, como $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{6}{12}$ y en $\frac{6}{12}$ está dos veces $\frac{3}{12}$ (que se representa con 0,5 cm en esta recta), entonces $\frac{3}{6}$ estará 1 cm a la izquierda del número 1.

Para ubicar al número 2 es posible partir de $\frac{27}{12}$, que puede pensarse como $\frac{24}{12} + \frac{3}{12} = 2 + \frac{3}{12}$. Luego, si a $\frac{27}{12}$ se le resta $\frac{3}{12}$ se obtiene 2. En esta recta, $\frac{3}{12}$ se representa con 0,5 cm, luego ambos números pueden ubicarse:



PROBLEMA: ÁREA VERSUS PERÍMETRO

La noción de área que habitualmente circula en la escuela primaria es más bien intuitiva, lo cual hace que los conceptos de superficie, área y medida muchas veces se confundan o se homologuen, obviando las diferencias que existe entre ellos.

Consideramos que una **superficie** es una parte del plano, el **área** representa una magnitud física, cualidad o propiedad de la superficie y la **medida** es el número asociado a ella, una vez elegida una unidad.

La didáctica de la matemática ha estudiado las dificultades y errores de los alumnos en profundidad a la hora de trabajar en problemas referidos a áreas. Entre ellos nos interesa señalar:

- El área aparece muy vinculada a la superficie y se observan dificultades para separarla de otras características de ella, en particular, de su perímetro. Es así que los alumnos

    * confunden las fórmulas para calcular el área con las que permiten calcular el perímetro.Habitualmente se inicia la enseñanza de área y perímetro trabajando con cuadrados y rectángulos y las fórmulas correspondientes a cada uno. Es así que los alumnos disponen de dos fórmulas para el cuadrado: lado×4, para el perímetro, y lado × lado para el área, que es como generalmente se expresan y simbolizan. Su similitud, y la ausencia de un trabajo sobre las magnitudes, hace que los niños las confundan –y con razón-. Lo mismo sucede que el rectángulo, donde varían las fórmulas, pero ambas se apoyan en el uso de las medidas de los mismos lados.

    * consideran que si el perímetro de una superficie aumenta, también lo hace su área y viceversa.

    * piensan que si dos superficies tienen el mismo perímetro entonces también tienen igual área.

- Los niños extienden el uso de ciertas fórmulas a situaciones donde no son válidas. Es así que no es raro encontrar casos donde multiplican las medidas de dos lados consecutivos de un paralelogramo (no rectángulo) o las de los tres lados de un triángulo para hallar su área. Se trata de errores persistentes, que se observan no solo en la escolaridad primaria, sino que se arrastran a la escuela secundaria.

- Suponen que al multiplicar las dimensiones de una superficie por un número positivo k, su área también se multiplica por k.

En su tesis, Marie Jeanne Perrin[10] plantea una serie de hipótesis didácticas a propósito de las dificultades recién señaladas.

Los problemas pueden ser analizados desde un marco geométrico, en términos de áreas de superficies o desde el aritmético, donde se considera al área como un número. En cada caso, las dificultades que exhiben los alumnos varían sustancialmente.

En el primer caso, muchos alumnos consideran que una disminución en el área conlleva una disminución de la superficie y del perímetro pero manteniendo su forma. El área y el perímetro se amalgaman con la superficie y se vinculan con su forma: se agranda o disminuye la superficie conservando su forma, el perímetro es el contorno y el área el interior.

Si se considera que el área es un número, la tarea consiste en encontrar los números pertinentes para realizar un cálculo, por ejemplo medidas de lados que parezcan características de la figura que se considere y que se combinan en una fórmula que se dispone.

Las investigaciones didácticas señalan que la enseñanza del concepto de área en tanto magnitud puede permitir a los alumnos establecer las relaciones necesarias entre los marcos aritmético y geométrico. Pero esta es una afirmación muy general, pues el proceso de enseñanza abarca muchos aspectos e involucra a diversos actores. Sabemos que no alcanza con seleccionar buenos problemas, sino que la planificación de la clase abarca otros aspectos tan necesarios como estos[11].

También informan que una identificación demasiado precoz entre magnitudes y números favorece la amalgama de diferentes magnitudes, en este caso, longitudes y áreas. Entonces, por un lado se propone la enseñanza del concepto de área como magnitud pero teniendo cuidado de no forzar la identificación entre longitudes y área. Una tarea nada fácil.

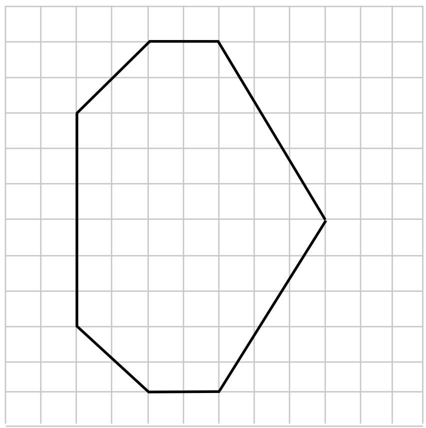
Para evitar las confusiones entre área y perímetro consideramos necesario desarrollar situaciones de aprendizaje en las que éstas se pongan en juego, tienen que ser el centro del debate en la clase.

El problema incluido en la prueba fue:

10 - Perrin, M.J. (1992). Op. Cit.

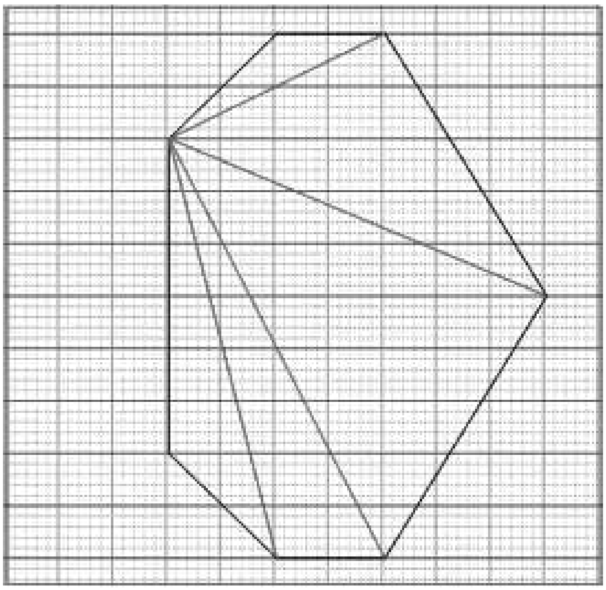
11 - Recomendamos la lectura de: Paola Tarasow. LA TAREA DE PLANIFICAR. Enseñar Matemática en la escuela primaria - Serie Respuestas. Tinta Fresca, 2007.

26 Proponé una forma de calcular el área de este polígono.



El problema propone una figura no convencional para calcular su área. Los alumnos están habituados a hallar áreas de figuras conocidas, donde el trabajo a realizar consiste en seleccionar la fórmula correspondiente para luego determinar cuáles son los datos para reemplazar en ella. En este caso, necesitarán descomponer la figura dada en otras de las que sepan calcular sus áreas y con la condición de que no se superpongan.

La elección de las subdivisiones a hacer no es simple. Por ejemplo, si la figura se subdivide en los siguientes triángulos



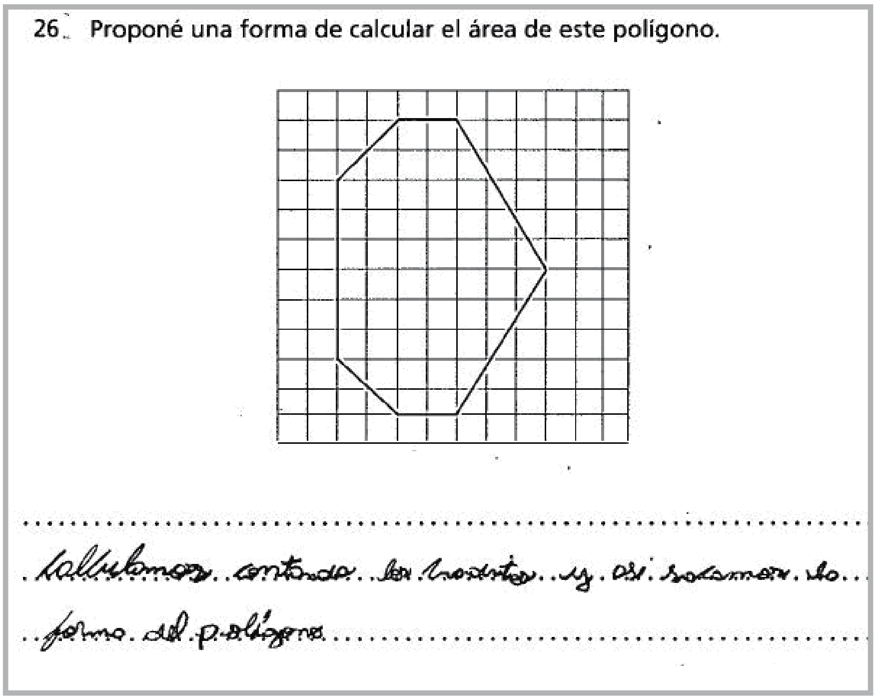
no será evidente cómo calcular el área de cada uno de ellos, pues no salta a la vista cuál es una base y una altura de cada uno.

Es decir, no solo se trata de encontrar una manera de dividir la figura en otras conocidas, sino que además tiene que ser posible calcular el área de cada una de éstas. Los alumnos no solo tienen que ser capaces de vislumbrar cómo hacer para resolver el problema, sino que además tienen que encontrar una manera conveniente de hacerlo.

Le proponemos el análisis de producciones de alumnos.

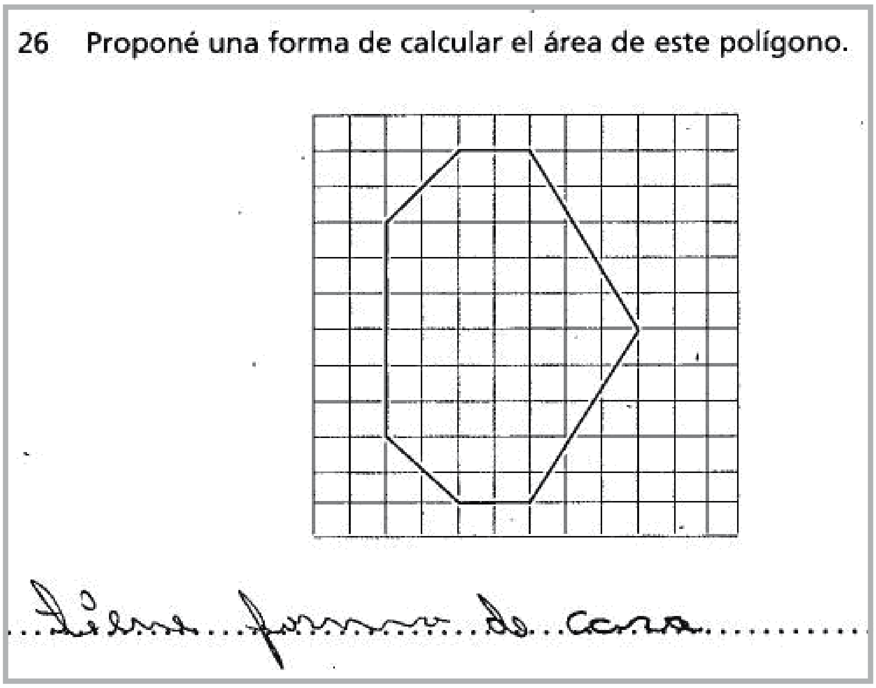
Ejemplo 1

En esta categoría de ejemplos hemos agrupado casos de alumnos que confunden el concepto de área con el de la forma de la figura, y así lo explicitan.



"Calculamos contando los cuadritos y asi sacamos la forma del polígono".

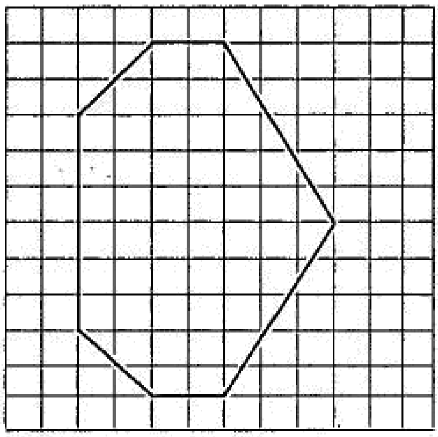
Si bien este alumno señala que cuenta "los cuadritos" –aunque no necesariamente de allí puede deducirse que está pensando en su área, luego vincula esa cantidad con la forma del polígono.



"tiene forma de cara".

En este caso, el niño buscó cuál era la forma que podía tener el polígono: "de cara". Eso, para él, es el área.

26 **Proponé una forma de calcular el área de este polígono.**



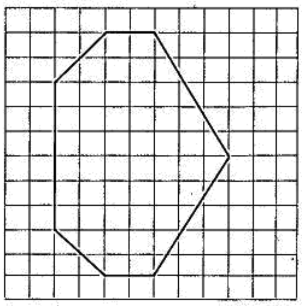
...puede..ser..un..rombo.............................

"puede ser un rombo".

El área, un rombo. Existe también la posibilidad –tal vez remota- de que el alumno haya tratado de asemejar la figura a otra conocida y con ello calcular el área.

Ejemplo 2

26 **Proponé una forma de calcular el área de este polígono.**



....

..RtA:..PROPONDRIA..SUMAR..LOS..LADOS....PORQUE....NO..SE..

PUEDE...MULTIPLICAR....PORQUE...SUS..LADOS...SON..DIFERENTE

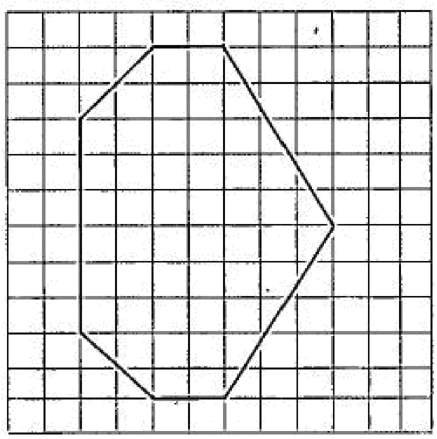
"Rta: propondria sumar los lados porque no se puede multiplicar porque sus lados son diferente".

Frente a la imposibilidad de calcular el área de la forma usual, entendiendo por esto a través de las fórmulas que este niño conoce, busca una forma alternativa. Afirma que no puede multiplicar sus lados "porque son diferentes". No podemos saber si se refiere a sus medidas o la cantidad, pero suponemos que no reconoce aquí a un problema de los que está habituado a resolver. Es, entonces, a partir de allí que propone hacer algo que sí sabe hacer y que hace en la escuela, que es sumar los lados de un polígono.

Tal vez figuras similares a estas se les presenten a estos alumnos en la escuela para calcular perímetros y no áreas. La falta de experiencia en el trabajo con este tipo de situaciones hace que algunos alumnos, en lugar de intentar buscar alguna estrategia de resolución, intenten transformar la situación en otra conocida.

No solo se trata de un problema geométrico, sino de una dificultad ligada al quehacer matemático. Estos niños solo resuelven situaciones conocidas por ellos.

26 **Proponé una forma de calcular el área de este polígono.**



L.2 + L.2 + L.3 = ...

Este alumno claramente calcula el perímetro de la figura. Es interesante analizar la forma en que lo expresa. Decide que hay lados con la misma medida, que al parecer son los dos horizontales, por un lado, los dos consecutivos del lado derecho y el vertical, por el otro, y los dos lados restantes forman el tercer grupo. Su observación no es del todo incorrecta y no necesita una regla para saberlo:

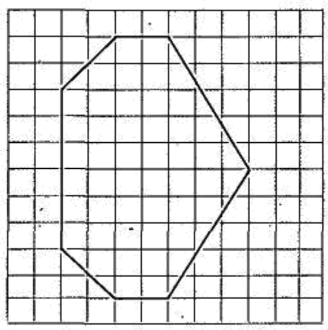
- Los dos lados horizontales tienen la misma medida, 2 cuadritos.

- Los dos consecutivos del lado derecho tienen la misma medida pues desde una punta a la otra de cada segmento "hay que moverse lo mismo": 3 cuadritos horizontales y 5 verticales. Sin embargo, estos dos no tienen por qué tener la misma medida que el lado vertical. En esa comparación parece haber usado una estimación visual.

- Los otros dos lados miden lo mismo y puede determinarse a través de un razonamiento similar al anterior (2 cuadritos horizontales y 2 verticales para ir de un extremo al otro de cada segmento).

Desde un punto de vista de la escritura que propone para el cálculo del perímetro, vemos que usa la misma letra para designar a las medidas de los diferentes lados. Sin embargo, pareciera que para este alumno esas letras no significan lo mismo porque, de haberlo hecho, seguramente la fórmula propuesta hubiese sido L·7. Entonces, usa la misma letra porque aun no dispone de conocimientos algebraicos que le permitan usar letras diferentes para valores distintos, pero así los considera.

26 Proponé una forma de calcular el área de este polígono.

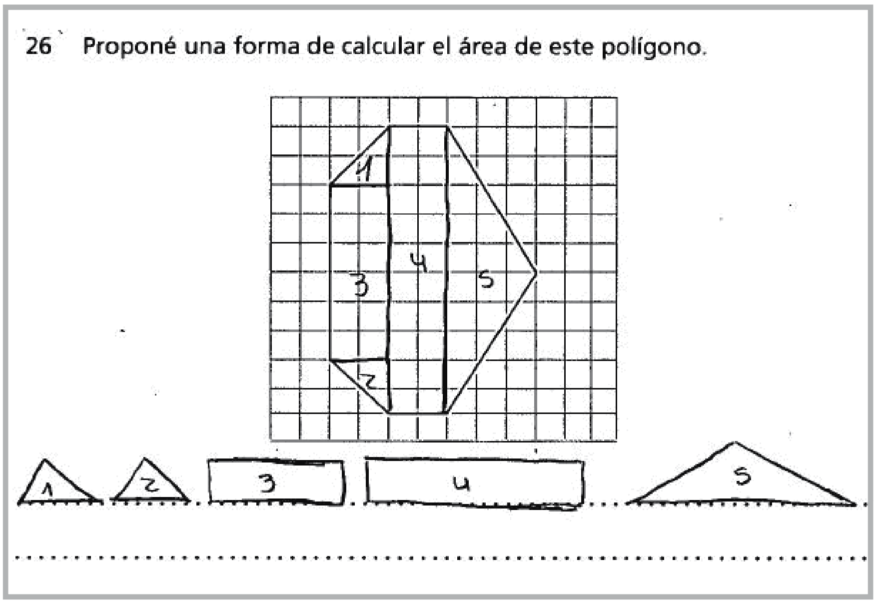


¿Cuanto es? 3 cm, 3 cm, 1 cm, 1,50 cm, 3 cm, 1,50 cm y 1 cm..

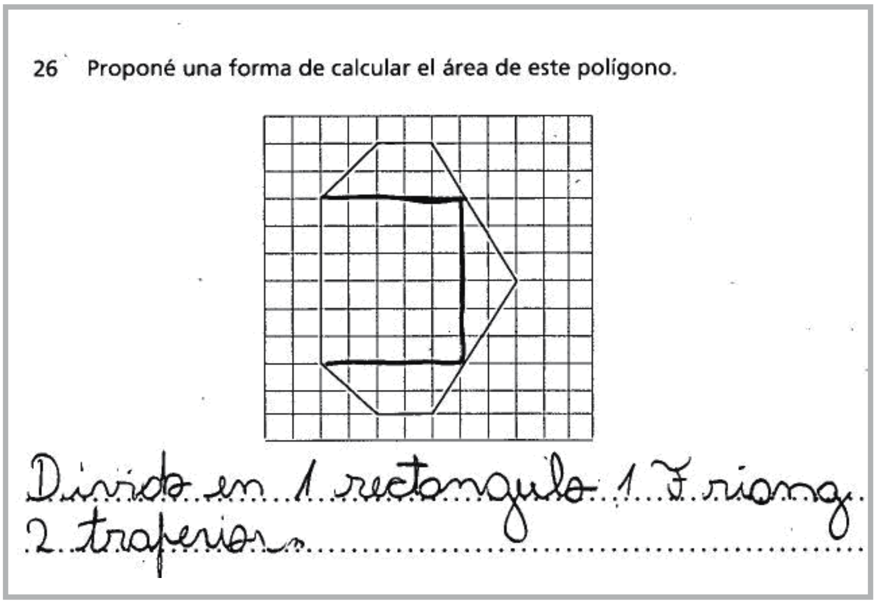
"¿Cuánto es? 3 cm, 3 cm, 1 cm, 1,50 cm, 3 cm, 1,50 cm y 1 cm".

En este ejemplo el alumno muestra la medida de cada uno de los lados, pero ni siquiera puede expresarlo como un perímetro (aunque lo que se pedía era el área).

Ejemplo 3


26 Proponé una forma de calcular el área de este polígono.

Esta niña desarma el polígono en figuras conocidas y las numera. Su elección es además muy conveniente porque en todos los casos es posible encontrar las medidas necesarias para hacer los cálculos pertinentes.


26 Proponé una forma de calcular el área de este polígono.

Divido en 1 rectangulo 1 Triang. 2 trapesios.

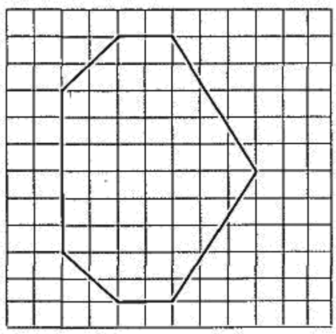
"Divido en 1 rectangulo 1 Triang 2 trapesios".

Este alumno propone otra forma válida y conveniente de subdividir la figura. Es conveniente porque es posible hallar (contando cuadraditos, en este caso) las medidas de los lados necesarios para encontrar las áreas de cada una de las sub-figuras.

Nuevamente, el alumno no indica qué hacer con cada una de las áreas. No queda claro si no lo sabe o si le resulta muy evidente.

Ejemplo 4

26 **Proponé una forma de calcular el área de este polígono.**

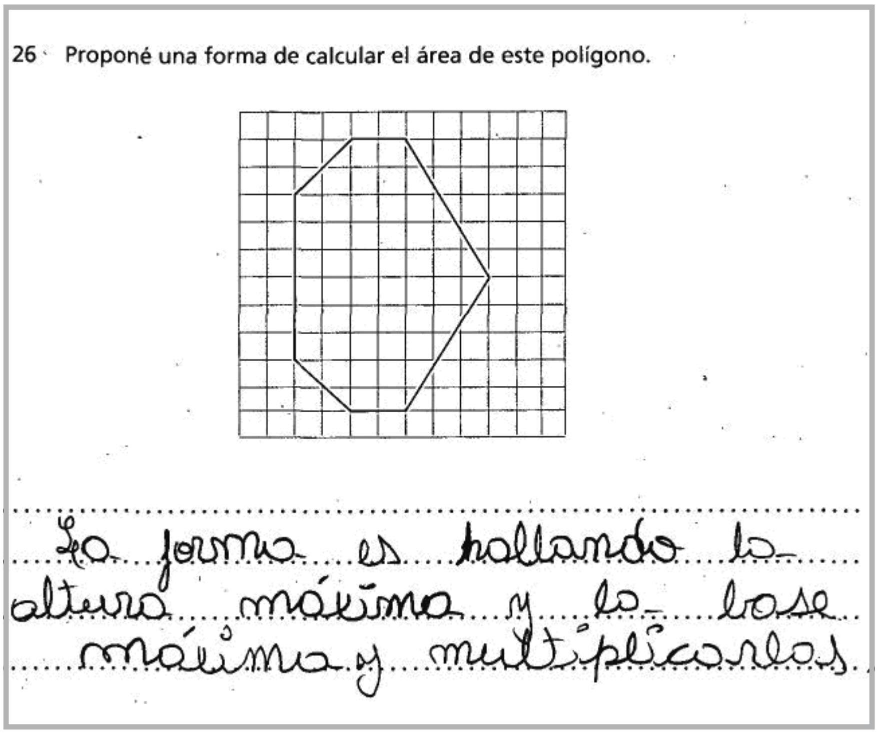


Por los cuadrados de la Hoja porque son del mismo tamaño

Respuesta: "Por los cuadrados de la hoja porque son del mismo tamaño".

No sabemos si este niño usará los cuadraditos de la hoja para calcular el área (contando los que hay "adentro" de la figura), pero plantea una condición que vale la pena mencionar. Es posible usar los cuadraditos como unidad de medida porque todos tienen el mismo tamaño. De no haber sido así, no se los podría usar para calcular el área o, al menos, hubiese sido una tarea ardua.

Ejemplo 5

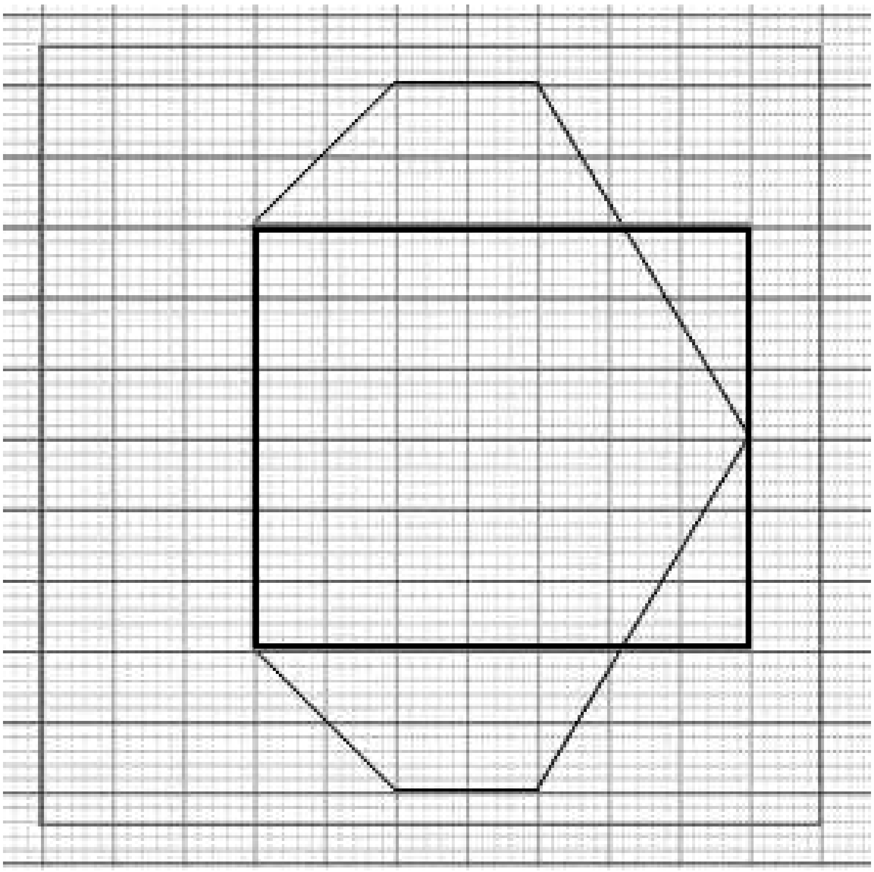


"La forma es hallando la altura máxima y la base máxima y multiplicarlas."

Este alumno adapta una fórmula conocida, la del área del rectángulo, a una figura desconocida. Es interesante observar que parece darse cuenta de que no hay una sola base ni una sola altura, por lo que decide tomar la mayor de cada una. Obtiene de esa manera un valor aproximado para el área de la figura.

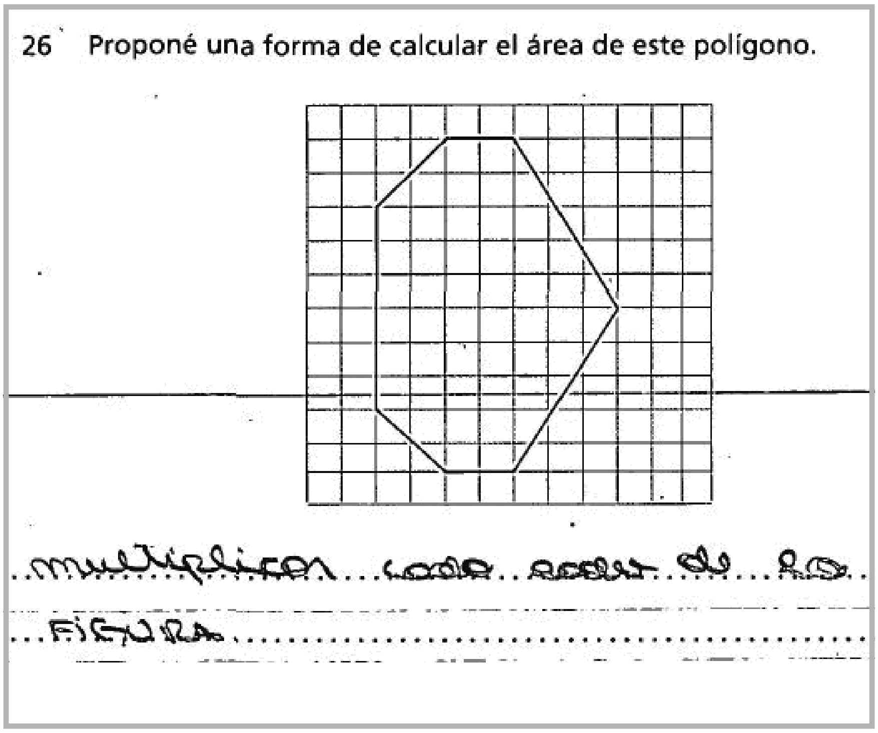
En la figura que sigue, el gráfico muestra el rectángulo (1) construido a partir de lo que un alumno podría considerar[12] como la base y altura máximas. No es difícil a simple vista analizar que el área del rectángulo verde es menor que el área del polígono: cada uno de los triángulos que "sobran" tienen menor área que cada uno de los trapecios no cubiertos por el rectángulo.

12 -No podemos realmente saber qué es lo que este alumno considera como base y altura máxima. Solo proponemos hipótesis que permitan un análisis más rico.



Por supuesto, el rectángulo que hemos dibujado no es el único posible. Incluso podríamos haber hecho uno cuya área sea mayor que la del polígono en cuestión.

Pero en todos los casos el cálculo que el alumno propone no sirve para hallar el área del polígono, aunque sí sirve como una aproximación de esa medida.


26 Proponé una forma de calcular el área de este polígono.

multiplicar cada lado de la figura

“multiplicar cada lado de la figura”.

Aquí encontramos posiblemente otro caso de generalización de la fórmula del área de un rectángulo: si con dos pares de lados perpendiculares se los multiplica (y lo mismo sucede en muchas de las fórmulas que los alumnos manejan – se multiplica–), propone hacer lo mismo en este caso.

Una observación a propósito de las resoluciones

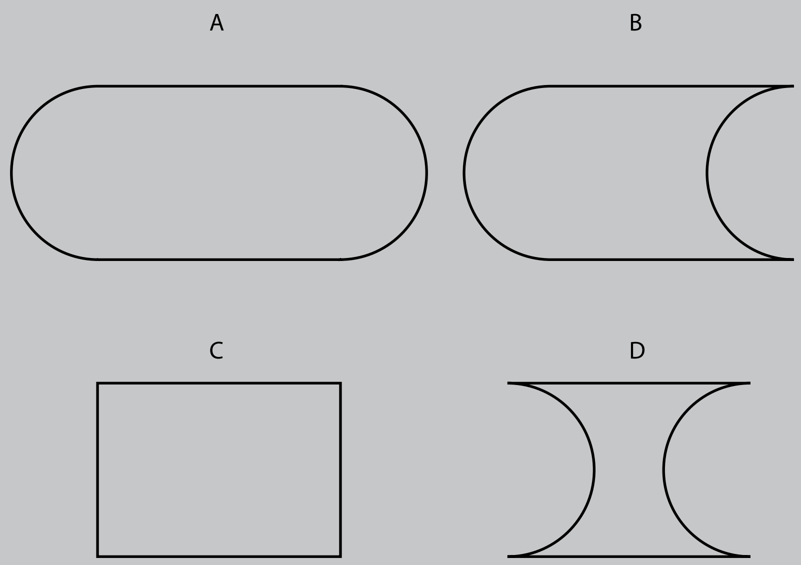
En este proceso de escritura hemos mirado y analizado muchísimas producciones de alumnos para este problema, y una cuestión que nos llamó la atención es que ningún alumno decidió directamente calcular el área. Desde un análisis a priori del problema, la consigna habilitaba para que muchos niños calculen el área, pensando en que se trata de una tarea que les resulta más cercana a sus prácticas que explicar cómo harían para calcularla.

La ausencia de estos cálculos nos llevó a pensar que, entonces, el despliegue de resoluciones (correctas o no) constituyen tareas más habituales en las escuelas: cálculo de perímetros de figuras semejantes a la del problema, cálculo de áreas de figuras simples, etc. Figuras como las que se presentaron en la prueba claramente no son utilizadas para el cálculo de áreas y sí, tal vez, para perímetros.

Problemas que permiten trabajar sobre la idea de área y perímetro

Problema

Comparen las áreas y los perímetros de las siguientes figuras:



Este es un problema donde el centro de la discusión está puesto en diferenciar área de perímetro.

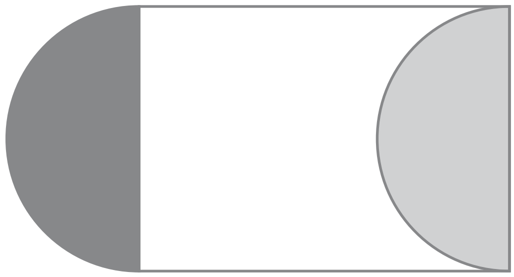
Se presentan cuatro figuras diferentes que, a simple vista, pueden compartir algunas de sus características (área o perímetro). Tres de ellas están formadas por dos segmentos y dos arcos de circunferencia, mientras que la cuarta es un rectángulo. Todas tienen la misma altura y todas comparten la medida de los segmentos horizontales.

En general, los alumnos no tienen dificultades para ordenar las figuras según su área, a ojo, pero algunos dicen, por ejemplo, que las figuras A y C tienen el mismo perímetro.

¿Cuáles son las herramientas de las que deberían disponer los niños para comparar áreas y cuáles para comparar perímetros?

Pareciera que la comparación de áreas resulta más natural, porque hasta se puede hacer superponiendo las figuras. Los niños, desde los primeros grados o aun fuera de la escuela, construyen la hipótesis de que dos figuras son iguales (en área) si al superponerlas no sobra ni falta nada. Esta idea es justamente la que en este caso permite comparar, ya que no es necesario calcular.

Así puede determinarse que la figura D tiene área menor que la figura C. Si se toma el semicírculo de la figura B y se lo ubica como en el dibujo siguiente:



es posible observar que las figuras B y C tienen igual área (distribuida de diferente manera, pero igual). Por último A tiene el área mayor.

La comparación de los perímetros es un poco más compleja.

Las figuras A, B y D, que tienen áreas diferentes, tienen, sin embargo, el mismo perímetro. Las tres están formadas por dos segmentos de la misma medida y dos semicircunferencias iguales (del mismo radio). Aunque difieren en su ubicación, los elementos son los mismos, que es lo que cuenta para el perímetro: será la suma de dos veces la medida del segmento más dos veces la longitud de la semicircunferencia o, el doble del segmento más la longitud de la circunferencia.

En cuanto al rectángulo, su perímetro es menor que el de las otras tres figuras pues las semicircunferencias tienen mayor longitud que su diámetro, que es justamente el otro lado del rectángulo. Es importante señalar que no es necesario saber calcular la longitud de la circunferencia para resolver este problema, ni siquiera la del cuadrado o rectángulo.

También puede pensarse desde un recorrido: como la distancia más corta entre dos puntos es el segmento que los une, la medida del lado del rectángulo es menor que la longitud de la semicircunferencia.

Secuencia de enseñanza [13]

A cada alumno se le entregan varias hojas de tamaño A4, una tijera e instrumentos usuales de geometría.

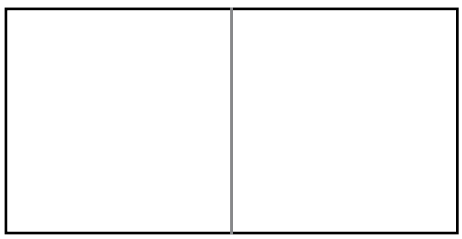
Se propone el siguiente trabajo para realizar de modo individual.
"Tienen que partir cada hoja en dos partes exactamente superponibles, sin que se pierda papel y sin pegar. Es decir que con las dos partes tiene que ser posible reconstruir la hoja inicial.
Busquen la máxima cantidad de maneras posibles de realizar esta partición."
Luego de un tiempo de búsqueda individual, se propone a los alumnos que se reúnan en grupos para discutir.

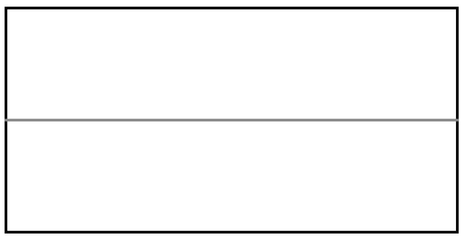
Se trata entonces de una situación en la que hay que lograr dos cosas:

- Una partición de la hoja de modo que cada parte tenga la mitad del área.

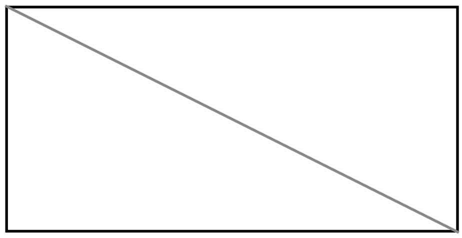
- Cada parte tiene que ser exactamente igual a la otra, es decir, tienen que poder ser superponibles.

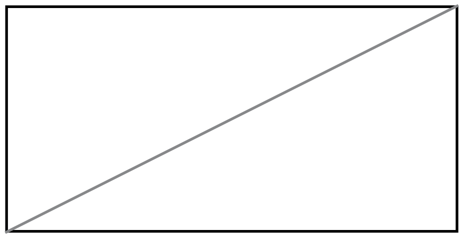
En general, las estrategias que usan los alumnos son bastante estables. Suelen comenzar por plegar la hoja en dos por las mediatrices de los lados y luego por las diagonales.





13 - *Adaptada de Butlen, Denis y Peltier, Marie-Lise (1994).*

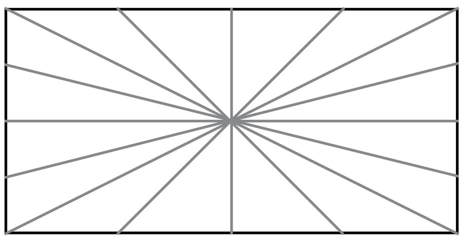




En este punto, muchos piensan que han encontrado todas las posibilidades, por lo que el docente necesita relanzar la búsqueda a través de una intervención: pide buscar más, lo cual es una confirmación de que existen más.

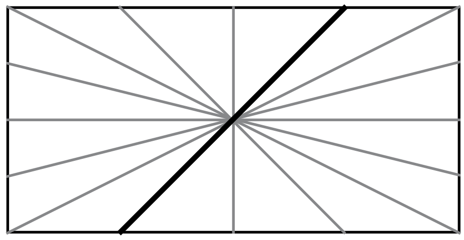
Aun así, ya hay material para una puesta en común. Se disponen de particiones de la misma hoja, claramente todas ellas representan la mitad por lo que tienen que tener la misma área aunque tienen formas diferentes. Área y forma se muestran como dos objetos distintos.

Una vez que el docente habilita el juego de la búsqueda de otras particiones, los alumnos suelen intentar diferentes ensayos con plegados. Por ejemplo, hay grupos que pliegan la hoja en dieciséis partes iguales, obteniendo lo siguiente al desplegarla:

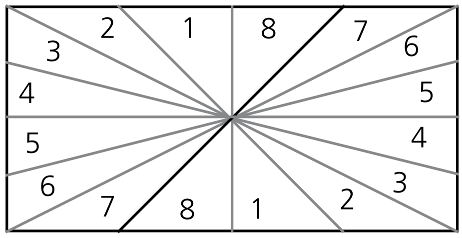


A partir de allí es que surge un nuevo problema que consiste en decidir cuál es la partición y, ciertamente no hay una única posibilidad.

Un ejemplo podría ser:

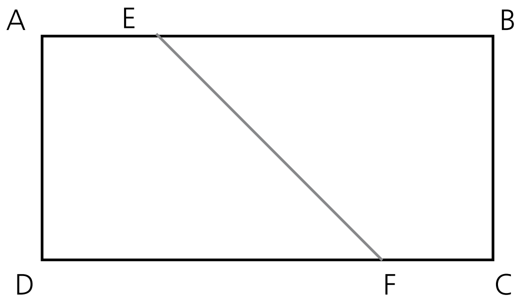


Y es posible saber que la división está bien hecha. En el dibujo siguiente hemos usado el mismo número para señalar los triángulos iguales.



Como en cada una de las partes en que ha quedada dividida la hoja hay exactamente los mismos triángulos (los triángulos que tienen el mismo número, son congruentes), entonces cada parte está formada por los mismos triángulos, por lo que tienen igual área y necesariamente tiene que ser la mitad.

Algunos grupos pliegan las hojas de modo que coincidan dos vértices opuestos. Esta estrategia produce particiones como esta:



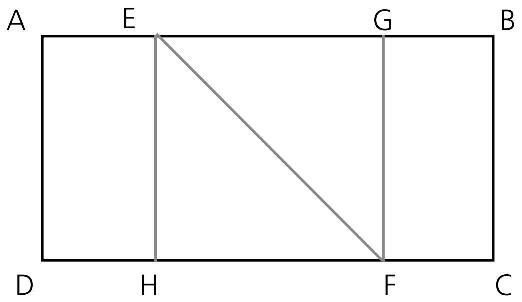
¿Cómo pueden saber los alumnos si efectivamente las dos partes son iguales (en área)? O mejor dicho, ¿cómo debería intervenir el docente para que los alumnos se lo pregunten?

Una manera, podrían responder, es recortando y superponiendo. Pero el docente podrá traccionar hacia una explicación menos empírica y más vinculada con argumentos geométricos.

Las dos figuras en que queda dividido el rectángulo son trapecios rectángulos. El pliegue, al hacer coincidir dos vértices opuestos, genera un segmento que necesariamente pasa por el centro del rectángulo (la intersección de las diagonales) pues se trata de una simetría respecto de ese punto.

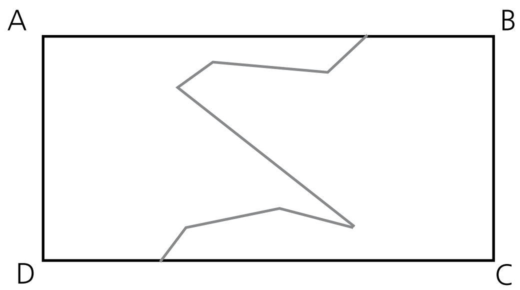
Los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{FC}$ tienen la misma medida, al igual que los segmentos $\overline{EB}$ y $\overline{DF}$. $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son lados opuestos del rectángulo y $\overline{EF}$ es un lado común a ambos trapecios. Luego, los trapecios son iguales. Otra forma de argumentar que las áreas de ambas partes son iguales consiste en trazar dos segmentos paralelos a $\overline{AD}$, uno que pase por el punto E y otro por el punto F.

Quedan así determinados dos rectángulos y dos triángulos, y no es difícil analizar que son respectivamente congruentes.



A partir del análisis colectivo de qué funciona y qué no, se podrá concluir que cualquier segmento que pase por el centro del rectángulo constituye una partición conveniente.

En una etapa posterior y en función de los conocimientos disponibles del grupo de alumnos, es posible presentar particiones hechas no a partir de segmentos pero sí simétricas con respecto al centro del rectángulo como objeto de análisis para la clase. Un ejemplo podría ser:



Más allá del trabajo de búsqueda que implica encontrar las condiciones bajo las cuales las particiones producen dos partes de igual área y, además, determinar que son infinitas, esta situación permite poner la lupa sobre cómo son estas particiones, cómo son sus áreas (todas iguales) y cómo sus perímetros.

Se trata de una situación que, con una buena planificación, puede resultar de mucho aprendizaje de nociones geométricas y acerca del trabajo en matemática.

¿Qué aporta este problema? Varias cosas:

- Si miramos el conjunto de particiones diferentes que se pueden producir, podemos adentrarnos en la relación entre área y perímetro. En cada caso la partición es diferente, pero el área de cada una de las dos partes que determina es la misma (la mitad del área del rectángulo), mientras que el perímetro varía.

- El problema permite poner en discusión la cantidad de soluciones. Por ejemplo, si se encuentra un segmento que sirve como partición, a partir de él se podrán generar infinitas particiones posibles, moviéndolo sin que deje de que pase por el centro[14].

14 - Este es un problema fértil para trabajar con algún programa de computación de geometría que permita explorar cómo se modifican las áreas y perímetros de las dos zonas en función de la variación de la posición del segmento que las separa.

BIBLIOGRAFÍA

Claudia Broitman (coord.), Horacio Itzcovich, Inés Sancha, Mónica Escobar y Verónica Grimaldi. Serie Curricular MATEMÁTICA Nº 4. Números Racionales y Geometría. Algunas propuestas para alumnos de 6º año. (2007). Disponible en www.abc.gov.ar

Butlen, Denis. Peltier, Marie-Lise. Enseigner la didactique des mathématiques aux futurs professeurs d'école. IREM. Université PARIS 7 – Denis Diderot. (1994)

Claudia Broitman, Horacio Itzcovich, Cecilia Parra y Patricia Sadovsky. Documento N° 4: Fracciones. Secretaria de Educación. Dirección de Currícula. G.C.B.A. (2001) Disponible en www.buenosaires.gob.ar

Claudia Broitman, Horacio Itzcovich. ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA EL TRABAJO CON LOS NÚMEROS EN LOS PRIMEROS AÑOS DE LA EGB. Provincia de Buenos Aires. Dirección General de Cultura y Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal. Dirección de Educación General Básica. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática. Documento Nº 5. (1999)

COPILEREM. Les Cahiers du Formateur. Tome 2. Documents pour la formation du professeur d'école en didactique des mathématiques. Séminaire de Tarbes du 17 au 19 novembre 1998. IREM de Paris VII.

Fracciones y números decimales. Apuntes para su enseñanza. Secretaria de Educación. Dirección de Currícula. G.C.B.A. (2005). Disponible en www.buenosaires.gob.ar

Itzcovich, Horacio (coord.), Moreno, Beatriz, Novembre, Andrea y Becerril, María Mónica. El abecé de…La Matemática Escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula. Aique Educación. (2007)

Itzcovich, Horacio (coord.). ALGUNAS REFLEXIONES EN TORNO A LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN EL PRIMER CICLO DE LA E.G.B. Provincia de Buenos Aires. Dirección General de Cultura y Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección Provincial de Educación de Gestión Estatal. Dirección de Educación General Básica. Gabinete Pedagógico Curricular – Matemática. Documento Nº1. (1999)

Verónica Grimaldi. Claudia Broitman (Coordinación). Serie Curricular MATEMÁTICA Nº 2 A. Numeración. Propuestas para alumnos de

3º y 4º año.

Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires. Subsecretaría de Educación. Dirección Provincial de Educación Primaria

Dirección de Gestión Curricular. (2007)

Le Berre, Maryvonne y Massot, Annik. En sixième, quels problèmes donnons-nous en géométrie? COPILEREM. Actes. XXIV Colloque des Formateurs et Professeurs de Mathématiques Charges de la Formation des Maitres. (1997)

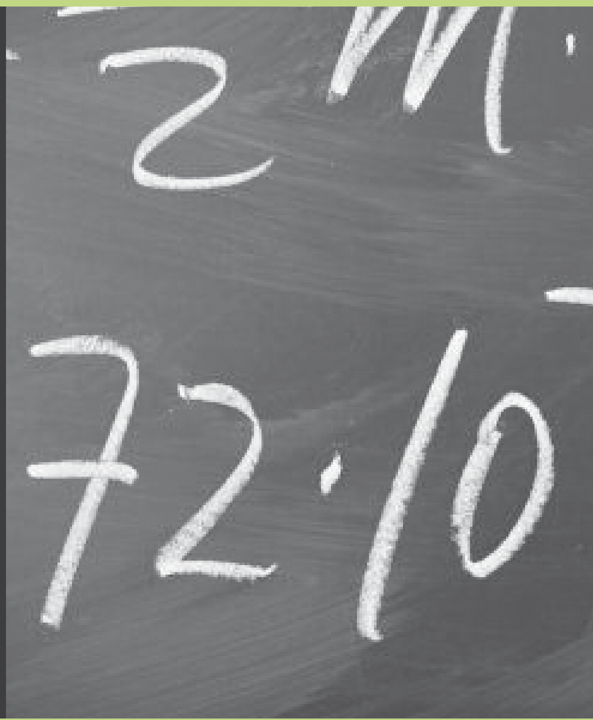
Lerner, Delia. ¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración En: Alvarado y Brizuela (comp). Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia. Ed. Paidós Educador, México DF, 2005

Beatriz Ressia de Moreno. Maria Emilia Quaranta. El aprendizaje y la enseñanza de la numeración escrita y del cálculo mental con los alumnos del Primer Ciclo de la escolaridad básica en el contexto de los Centros de Apoyo Escolar

Perrin-Glorian, Marie-Jeanne. Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6 ème. Thèse de Doctorat D'Etat. Université Paris 7. (1992)

Tarasow, Paola. LA TAREA DE PLANIFICAR. Enseñar Matemática en la escuela primaria - Serie Respuestas. Tinta Fresca, 2007.

Wolman, Susana. La enseñanza del sistema de numeración en los primeros grados, extraído de http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_1/nr_802/a_10808/10808.html (consultado en mayo de 2010).



Ministerio de
Educación
Presidencia de la Nación

DiNIECE
Dirección Nacional de
Información y Evaluación
de la Calidad Educativa