Ciclo Básico
de Educación Secundaria
Escuelas Rurales

MATEMÁTICA

CUADERNO DE ESTUDIO

3

Horizontes

En las provincias donde el Nivel de Educación Secundaria es de cinco años, este material está destinado a 2° año.

Cuaderno de estudio. Matemática 3 - Serie Horizontes - 1a ed. - Buenos Aires:
Ministerio de Educación de la Nación, 2009.
193 p. : il. ; 27x20 cm.

ISBN 978-950-00-0726-9

1. Matemática. 2. Educación Rural.
CDD 372.7

Pizzurno 935, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina
Impreso en la Argentina
Hecho el depósito que marca la ley 11.723
ISBN 978-950-00-0726-9

AUTORIDADES NACIONALES

Presidenta de la Nación
Dra. Cristina Fernández

Ministro de Educación
Prof. Alberto Estanislao Sileoni

Secretaria de Educación
Prof. María Inés Abrile de Vollmer

Subsecretaria de Equidad y Calidad
Lic. Mara Brawer

Subsecretario de Coordinación Administrativa
Arq. Daniel Iglesias

Directora Nacional de Gestión
Curricular y Formación Docente
Prof. Marisa del Carmen Díaz

Directora General
Unidad de Financiamiento Internacional
A.G. María Inés Martínez

Serie Horizontes
Ciclo Básico de Educación Secundaria
Escuelas Rurales

Área de Educación Rural
Olga Zattera, *coordinadora*
Viviana Fidel, *coordinadora de materiales impresos*

Desarrollo de contenidos
Norma Saggese, *coordinadora del área de Matemática*
María Cristina Bisbal de Labato, Graciela Inés Daroca,
Alicia Susana Hevia y Norma Saggese, *autoras*
Gabriela Scarfone, *colaboradora*
Noemí Scaletzky, *procesadora didáctica*

Producción editorial
Gonzalo Blanco, *coordinación*
Doris Ziger, *edición*
María Celeste Iglesias, *documentación fotográfica*
Mario Pesci, *asistencia gráfica*
Willay Estudio, *edición, diseño y diagramación*

PROMER - Proyecto de Mejoramiento de la Educación Rural
Préstamo BIRF 7353-AR
Leonardo D. Palladino, *coordinador general*
María Cavanagh, *responsable de adquisiciones y contrataciones*
Sergio Ten, *especialista delegado*

ESTUDIAR MATEMÁTICA

El CUADERNO DE ESTUDIO 3 que hoy llega a tus manos es el último de la Serie Horizontes de Matemática. La modalidad de trabajo propuesta es similar a la que desarrollaste en los cuadernos anteriores con los que aprendiste a expresar ideas matemáticas en un lenguaje simbólico que incluye letras, signos y representaciones gráficas.

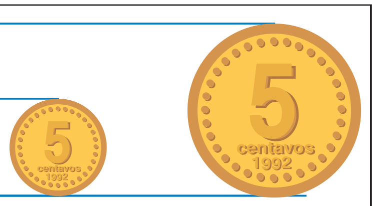
Como en los otros cuadernos de la serie, encontrarás muchas referencias históricas a los aportes que los científicos hicieron en cada momento marcando hitos en el desarrollo de la ciencia. El conocimiento de esos aportes te permitirá valorar que la Matemática es una ciencia que contribuye al desarrollo de otros campos científicos y que a su vez está en permanente cambio.

Seguramente habrás observado que en muchas ocasiones el conocimiento matemático surge en situaciones de actividad práctica. En otras, se trata de revisar y ampliar conocimientos matemáticos ya adquiridos para seguir progresando en ellos aunque tengan una aplicación inmediata.

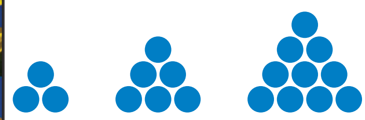
Razonar matemáticamente es una forma específica de organizar y de comunicar las ideas que surgen a medida que se avanza en el esfuerzo por buscar procedimientos para resolver problemas.

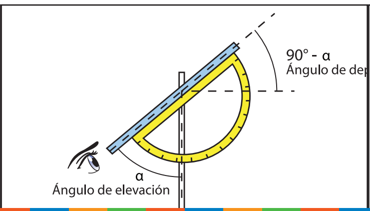
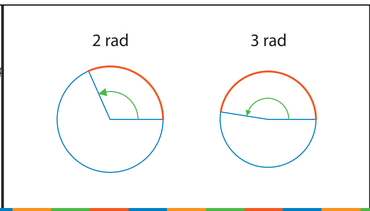
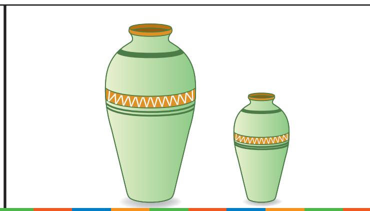
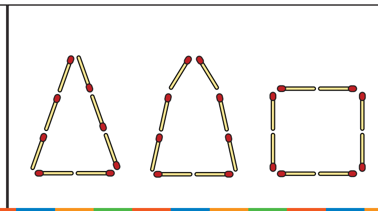
Es probable que cuando resuelvas los problemas que se te proponen en las unidades de este cuaderno te surjan muchas preguntas y dudas. De a poco, irás encontrando las soluciones. Razonando y consultando con tu docente y con tus compañeros y consultando los libros de la biblioteca, podrás chequear la validez de las respuestas halladas y la eficacia del procedimiento seguido. Este modo de razonar matemáticamente te permitirá aplicar los procedimientos a otros problemas que se te presenten, no sólo en el aula, sino también cuando tengas que resolver alguna situación más allá de lo escolar o cuando sigas cursando estudios superiores.

Deseamos que el trabajo con este cuaderno satisfaga tu interés por aprender, despierte tu curiosidad por seguir aprendiendo siempre y puedas disfrutar cada vez más de tu capacidad de pensar matemáticamente.


5
centavos
1992

10.05

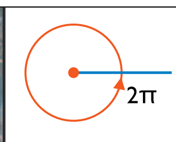


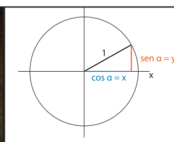
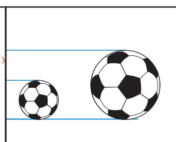
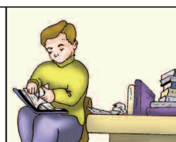
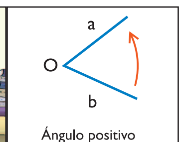

90° - α
α
Ángulo de elevación

2 rad
3 rad







¿Qué edad tenés?



2π





a
O
b
Ángulo positivo

UNIDAD 1

Matemática cotidiana

En la vida cotidiana hacemos continuamente estimaciones de tiempo, de espacio, de peso, de dinero. Por ejemplo, cuando tenemos que orientarnos para realizar un trayecto, cuando consultamos los horarios de los medios de transporte, cuando calculamos precios para ver qué compra resulta más ventajosa. También analizamos datos numéricos y hacemos estimaciones de distancias cuando leemos mapas o planos.

En la práctica, muchas veces estimamos algunas cantidades que nos interesan, sin medirlas exactamente; es decir, les adjudicamos un valor aproximado para facilitar la resolución de cálculos útiles aunque no resulten del todo precisos.

En otras ocasiones, para realizar cálculos sencillos y rápidos, redondeamos las medidas conocidas cuidando que el redondeo no nos haga cometer un error muy grande. En casi todos estos cálculos aproximados o estimados están presentes las nociones de proporcionalidad y porcentaje.

En esta unidad vas a aplicar muchos conocimientos matemáticos que ya tenés para resolver algunas situaciones prácticas y, cuando sea conveniente, usarás cálculos aproximados.

A lo largo de esta unidad vas a repasar temas que ya estudiaste en años anteriores, como proporciones, porcentajes, fracciones y números decimales; longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos. A medida que vayas realizando las actividades, consultá con tu docente si es necesario recurrir a los CUADERNOS DE ESTUDIO ***1*** *y* ***2*** *o a libros de Matemática para revisar algunos de estos temas.*

A

TEMA 1: MEDIDAS Y PORCENTAJES

1. Distancias

La siguiente tabla muestra las distancias aproximadas entre algunas capitales de provincias de nuestro país, medidas en kilómetros.

Ciudad	Buenos Aires	Catamarca	Córdoba	Corrientes	Formosa	Jujuy	La Rioja	Mendoza	Paraná	Posadas	Resistencia	Salta	San Juan	San Luis	Santa Fe	Santiago	Tucumán
Buenos Aires																	
Catamarca	1235																
Córdoba	797	438															
Corrientes	955	1049	872														
Formosa	1099	1153	976	144													
Jujuy	1627	507	830	952	1056												
La Rioja	1258	146	461	1195	1299	653											
Mendoza	1095	748	785	1521	1625	1255	602										
Paraná	482	779	341	585	689	928	802	990									
Posadas	970	1361	1184	312	456	1264	874	1833	874								
Resistencia	975	1029	852	20	124	932	1313	332	565	332							
Salta	1423	484	807	929	1033	113	630	1241	905	1241	909						
San Juan	1085	590	775	1511	1615	1097	444	1823	980	1823	1491	1074					
San Luis	775	900	465	1201	1305	1295	754	1513	670	1513	1181	1272	310				
Santa Fe	509	752	314	558	662	901	775	874	27	874	538	878	953	643			
Santiago	1019	384	430	665	1463	427	530	977	501	977	641	404	974	895	474		
Tucumán	1171	232	555	817	921	275	378	980	653	1129	797	252	822	1020	626	152	

a) Respondé a partir de los datos de esta tabla las siguientes preguntas.

1. ¿Por qué creés que el cuadro tiene valores sólo en la mitad inferior que marca la diagonal?
2. ¿Qué número se deberá poner en las casillas ubicadas sobre la diagonal?
3. ¿Con qué números se completan los casilleros situados simétricamente de un lado y otro de la diagonal? ¿Vale la pena que los escribas? ¿Por qué?

b) Una empresa quiere reunir a los gerentes de las sucursales de Salta, Tucumán, Santiago del Estero, San Juan y Santa Fe en la ciudad de Córdoba.

1. Considerando los viajes de ida y vuelta de todos, ¿cuál es el kilometraje de traslados por el que la empresa deberá abonar?
2. Para bajar los costos de las reuniones, los gerentes deciden encontrarse en una de las sucursales. ¿En cuál de ellas el número de kilómetros recorridos resultará mínimo?
3. Teniendo en cuenta los viajes de ida y vuelta, ¿cuántos kilómetros se pueden ahorrar si se reúnen en la sucursal que presenta el número mínimo de kilómetros recorridos?
4. Si podés, compará tus respuestas con las de tus compañeros. Resultará interesante conocer los diversos modos que utilizaron para encontrarlas.

A

2. Porcentajes

En esta actividad vas a resolver problemas en los que, para encontrar la solución, es necesario calcular porcentajes.

Para resolver este tipo de problemas es importante que realices en tu carpeta todas las operaciones que te parezcan necesarias, no importa si son o no las definitivas. Ese registro de los caminos que fuiste probando te permitirá reconstruir la estrategia que usaste, revisarla, corregirla y detectar posibles errores. Así, también tendrás registro de los cálculos y de los números para explicar y argumentar sobre tus procedimientos y aplicar, o no, las mismas estrategias a otros problemas similares.

a) Resolvé los siguientes problemas.

1. El precio de un artículo aumenta el 10% y luego baja el 10%.
¿Vuelve al precio inicial? ¿Por qué?
2. El precio de un artículo aumenta el 10% y luego aumenta de nuevo 10%.
El aumento total, ¿es el 20% del valor inicial? ¿Por qué?
3. En una incubadora se colocaron 320 huevos de gallina. A los 7 días se hizo la ovoscopía y se observaron 59 huevos no fértiles.

- ¿Cuál es el porcentaje de huevos fértiles?
- De los 261 huevos fértiles nacieron solamente 233 pollitos. ¿Qué porcentaje de nacimientos hubo?
- Con relación a los huevos colocados al principio del proceso, ¿qué porcentaje de nacimientos hubo?
- Calculando un 65% de nacimientos, ¿cuántos pollitos podrán nacer de 700 huevos colocados para incubar?

4. En una pequeña localidad urbana se midió la altura de todos los alumnos que comenzaban la escuela secundaria. Los datos figuran en la siguiente tabla. Los estudiantes cuya altura está exactamente en el límite de dos intervalos, se incluyeron en el intervalo superior.

Estatura (cm)	140-146	146-152	152-158	158-164	164-170	170-176	176-182	182-188
Número de alumnos	3	17	39	41	32	13	5	1

- ¿Cuántos alumnos miden menos de 164 cm? ¿Qué porcentaje del total les corresponde?
- Calculá el porcentaje de alumnos que miden entre 152 y 170 cm.
- ¿Cuál es el porcentaje de alumnos que miden menos de 190 cm?
- Estimá qué porcentaje del total corresponde a los que miden 164 cm o más. Después hacé el cálculo para ver si tu estimación fue acertada.

b) Si es posible, reunite con tus compañeros para resolver las siguientes consignas.

1. Busquen noticias periodísticas que muestren situaciones en las que la información se transmite usando porcentajes.

2. Analicen esos porcentajes y piensen cuál es la información que brindan.

TEMA 2: PROBLEMAS CON PROPORCIONES

A

3. Intereses, comisiones y descuentos

En esta actividad vas a estudiar algunas cuestiones vinculadas con el comercio en las que está presente la noción de proporcionalidad y vas a conocer el significado de algunos términos que se usan en las operaciones comerciales y bancarias. La resolución de algunas situaciones problemáticas te facilitará comprender el concepto de interés.

Es conveniente que trabajes con tus compañeros para que puedan discutir las distintas formas de resolución que encuentran.

a) Resuelvan los siguientes problemas.

1. García depositó en el banco $10 000 en un plazo fijo a un interés del 8,5% anual. Al cabo de un año, su capital se incrementa con los intereses que le paga el banco. En la siguiente tabla, pueden observar cuánto dinero gana.

Año	Dinero	Interés obtenido	Dinero acumulado
1	$ 10 000	$ 850	$ 10 850
2			
3			

• Si deja el dinero acumulado en depósito durante otro año, ¿cuánto tendrá al cabo de 2 años? ¿Y al cabo de 3 años?
• Construí en tu carpeta una tabla como la anterior y completala con los valores del capital, el interés obtenido y el capital acumulado correspondientes a cada año.

2. Si al cabo de 5 años el señor García no hubiera hecho ninguna extracción, los intereses ganados en cada año...

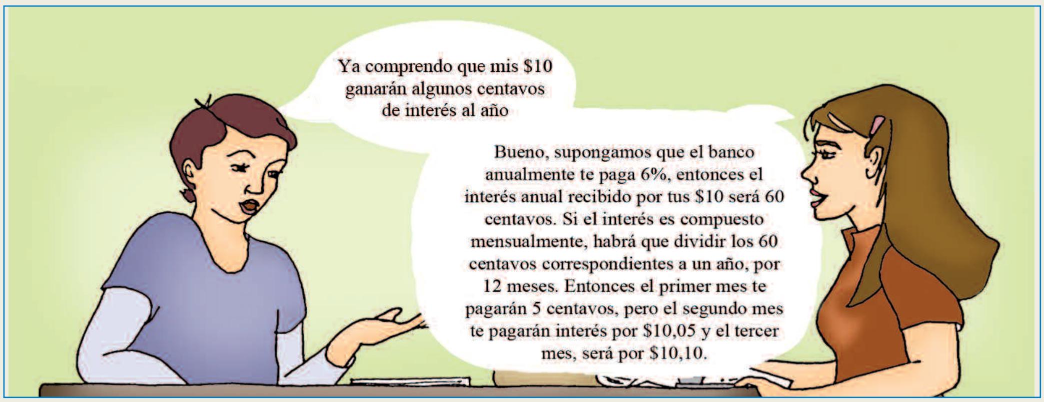
• ¿Serán proporcionales al número de años del depósito? ¿Por qué?

Se llama *interés*, *rédito* o *renta* a la ganancia que puede generar un capital, es decir, una cantidad de dinero que ha sido invertida en operaciones comerciales, depósitos bancarios, préstamos, etcétera.
Se puede hablar de interés simple o interés compuesto.

b) Leé el siguiente texto y luego tratá de explicarle a tu docente y a tus compañeros qué es el interés compuesto.

Un banco preparó un programa especial para promover el ahorro en los jóvenes. Un grupo de muchachos de un pueblo, que tenían un pequeño negocio de venta de semillas, decide averiguar de qué se trata este programa para definir si vale la pena participar con sus ahorros.

Uno de ellos, José, tenía ciertos conocimientos sobre el interés, pero al leer el folleto promocional del banco se enteró de que el interés podía ser compuesto a diario, mensual o anualmente. Se preguntó entonces qué significa interés compuesto. Necesitaba comprender la diferencia para decidir si les convenía o no participar.



c) Realizá nuevamente una tabla para poner en ella los datos y sacar conclusiones. Ya sabés cuáles son las columnas y las filas que tenés que incluir. Hacé la tabla con los datos que surgen de la conversación entre José y Paula y luego respondé las siguientes consignas.

1. ¿Por qué es más beneficioso el interés compuesto mensualmente que el interés anual?
2. Si el interés compuesto se capitalizara diariamente, ¿te parece que este interés resultaría mayor que el interés mensual? ¿Por qué?
3. ¿Estás de acuerdo con lo que piensa José? Compartí con tu docente las conclusiones a las que llegaste.
4. La lectura del párrafo anterior, ¿te ayudó a entender el significado del interés compuesto? ¿Por qué?

d) Vas a revisar otros términos que también están vinculados con operaciones comerciales y los porcentajes.
1. Leé el siguiente texto en el que se explica cada uno de estos términos.

Una **comisión** es la remuneración que recibe un agente de comercio, por ejemplo, por intervenir entre el comprador y el vendedor en una operación mercantil. Esa remuneración se agrega al costo final de la operación realizada.

Se llama **descuento** al beneficio que se otorga en el comercio por pagar al contado el importe de ciertas facturas o para premiar a algún comprador por el volumen de su compra o por haber entregado mercadería en condiciones diferentes de las estipuladas. El descuento es un porcentaje que se quita al valor inicial que debía pagar.

Por ejemplo, si una bolsa de alimento balanceado cuesta $100 y por pagarla al contado se hace un descuento del 10%, se abonará $90 al contado. A los descuentos a veces se los llama *bonificaciones*.

2. Decidí en cada caso si la operación que tenés que realizar es el cálculo de la comisión o del descuento.

2.1. El señor Gutiérrez encargó a una firma especializada una compra de materiales. El importe que pagó por la mercadería fue de $23 094. Además se facturaron $692,80 de comisión.
• ¿Cuál es el porcentaje que pagó el señor Gutiérrez a la firma comisionista?

2.2. El precio de una mercadería es de $18 550.
- ¿Cuánto habrá que abonar si se consigue el 5% de descuento?

2.3. Un implemento agrícola vale $8 750 según el precio de lista. La casa vendedora hace un 15% de bonificación y por pago al contado descuenta el 5%.
- ¿Cuánto habría que abonar por ese implemento?

En la unidad siguiente retomarás este tema al estudiar sucesiones y progresiones.

A

4. La receta por proporciones

En la actividad anterior aplicaste nociones de proporcionalidad al calcular porcentajes, intereses, comisiones y descuentos. También en la vida diaria, muchas veces se usan nociones de proporcionalidad aunque sin formalizarlas como lo hacés en la escuela.

a) Leé estas dos resoluciones diferentes frente a una misma situación y respondé en tu carpeta las preguntas que están a continuación.

1. Una cocinera debía transformar una receta que conocía para 6 porciones en una para 20 porciones. Su objetivo era decidir la cantidad necesaria de cada ingrediente y dar las instrucciones a los ayudantes de cocina para que resultara eficiente. Ella decidió hacer suficiente cantidad para 24 porciones y dividir las 4 porciones excedentes entre las otras 20 porciones. Cuando se le pidió cambiar la receta para 20 porciones exactas, dividió 20 entre 6 en su calculadora y utilizó el resultado de 3,3 para multiplicar cada ingrediente. Para que la receta fuera realizable por los cocineros, cambió cada decimal por una fracción propia para que ellos sólo trabajaran con mitades, tercios y cuartos, así, por ejemplo, 2 tazas de compota de manzanas que debían ser 6,6 tazas, lo cambió por seis tazas y media.
2. A un alumno de la escuela secundaria que estudia gastronomía se le pidió cambiar la misma receta, pero ahora para 10 porciones. Intentó resolver el problema utilizando proporciones para encontrar las nuevas cantidades, pero luego se dio cuenta de que podía resolverlo de una manera menos formal. Entonces calculó cada ingrediente para 12 duplicando la receta original y sugirió dividir las dos porciones extras entre las 10 porciones.

1. Analizá las dos situaciones, compará las estrategias de resolución de la cocinera y del estudiante. ¿En qué se parecen? ¿En qué se diferencian?
2. ¿Te parecen acertadas? ¿Utilizan conocimientos de proporcionalidad? ¿Por qué?

A 5. La proporción en Geometría

En las actividades anteriores trabajaste con situaciones de proporcionalidad en diferentes contextos. En esta oportunidad revisarás algunos problemas geométricos en los que la proporcionalidad se vincula con la semejanza de figuras.

a) Determiná las dimensiones, largo y ancho, de un terreno rectangular de 4 420 m^2 en el que las longitudes de los lados estén en la misma proporción que 11 y 15.

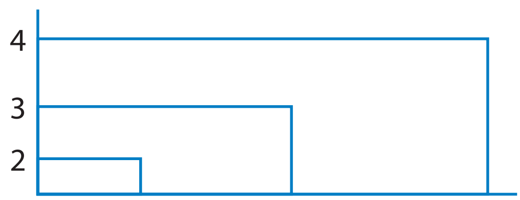
b) Determiná las dimensiones de un terreno rectangular de área 3 285 m^2 en el que los lados estén en la misma proporción que 7 y 13.

c) Los rectángulos que obtuviste en la consigna **a**, ¿son semejantes entre sí? ¿Por qué?

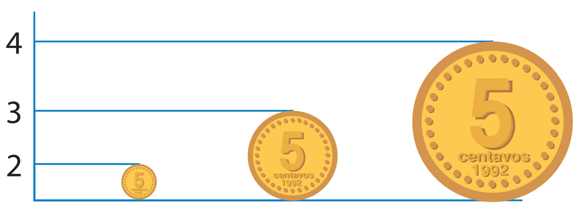
d) ¿Ocurre lo mismo con los rectángulos que obtuviste en la consigna **b**?

e) Leé los siguientes ejemplos y comentá con tus compañeros la conclusión que figura en el último párrafo.

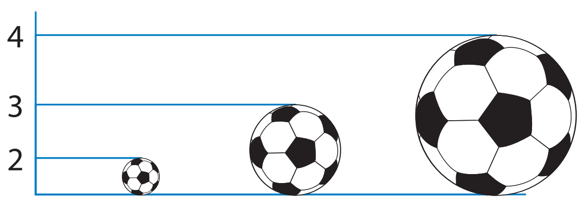
> *En la interpretación de gráficos hay que tener cuidado al considerar relaciones proporcionales. Hay que observar con atención si la proporcionalidad se establece entre longitudes, áreas o volúmenes.*



En este gráfico, los segmentos verticales constituyen la representación lineal de tres cantidades proporcionales a 2, 3 y 4.



Si estos segmentos son diámetros de tres círculos, sus áreas son proporcionales a 4, 9 y 16.



Si los círculos se convierten en esferas, la proporcionalidad se establece ahora entre los volúmenes y las cantidades 8, 27 y 64.

De acuerdo con las observaciones anteriores, en las representaciones gráficas debemos estar atentos a las proporciones a las que obedece la escala, no es lo mismo representaciones lineales, que superficiales o de volumen.

f) Leé esta historia y respondé las preguntas que aparecen a continuación.

Una vieja historia narra que cierto día un comprador se acercó a un vendedor de espárragos y le dijo: —*Traigo esta soga que mide un palmo, ¿cuánto me cobrarás por el paquete de espárragos que pueda atar con ella?*

El vendedor de espárragos pidió 10 pesos y el comprador se mostró conforme. A los dos días, el comprador volvió a encontrarse con el vendedor de espárragos:

—*Vuelvo ahora con esta soga que mide dos palmos. Acordate que por los espárragos que pude atar con la que medía un palmo me cobraste 10 pesos, así que por los espárragos que pude atar con este cordón que mide dos palmos te pagaré 20 pesos, si te parece justo.*

El vendedor aceptó, aunque se quedó con cierta duda de si el comprador lo habría engañado o no.

1. ¿Por qué duda el vendedor?
2. ¿Qué te parece que ocurre en esta situación?
3. ¿Cuál de las situaciones de la consigna **e** te sirve para graficar la propuesta del vendedor?
4. ¿Qué le dirías al vendedor para ayudarlo a aclarar sus dudas?

El conocimiento de la falta de proporcionalidad entre longitudes y áreas no es nuevo. Quintiliano fue un gran retórico latino del siglo I a.C. que advirtió que *de dos trigales vallados, uno con casi el doble de longitud que el otro, dará unas cuatro veces más trigo que el otro, no el doble.*

g) Como cierre de las actividades de esta unidad, escribí brevemente por qué es acertada la advertencia de Quintiliano.

Para finalizar

Con las actividades de esta primera unidad hiciste un recorrido a través de situaciones del mundo del trabajo y de la vida cotidiana en las que se destaca la necesidad del uso de conocimientos matemáticos. En muchas de ellas, habrás advertido la presencia de la proporcionalidad, en especial, su aplicación en la transmisión de informaciones en forma de porcentajes. Al mismo tiempo, este recorrido te permitió revisar algunos contenidos básicos de Aritmética y Geometría que necesitarás para tu estudio durante el trabajo con el CUADERNO DE ESTUDIOS 3.

Si en la escuela está disponible alguna factura que corresponda a servicios de gas, de electricidad, de agua o de impuestos, es interesante que analices con qué criterios se hacen las liquidaciones. Muchas veces, además del importe que corresponde al consumo, se paga una tarifa fija y un recargo por impuestos que no siempre son proporcionales. En las unidades siguientes volverás sobre estos temas.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Una fracción

Observá las siguientes expresiones:

$100 = 91 + \frac{5823}{647}$

$100 = 94 + \frac{1578}{263}$

$100 = 96 + x$

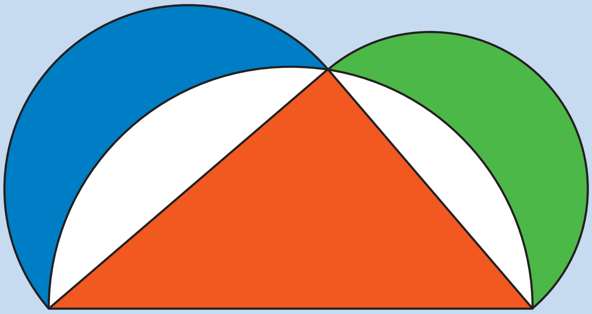
En las dos primeras expresiones, el número 100 es la suma de un número de dos cifras y una fracción. En su escritura se usaron los dígitos del 1 al 9, sin repetir ninguno. El desafío consiste en encontrar la fracción con las mismas características que verifique la última expresión.

2. Una escalera

Subiendo 1 o 2 escalones cada vez, ¿de cuántas maneras diferentes se puede subir una escalera de 6 escalones?

3. Las lúnulas de Hipócrates

Las figuras dibujadas a la izquierda y a la derecha del triángulo rectángulo se conocen como lúnulas de Hipócrates. En ambas, un arco es la semicircunferencia que tiene por diámetro un cateto y el otro arco pertenece a la semicircunferencia que tiene por diámetro a la hipotenusa. El desafío consiste en que apliques la propiedad pitagórica para verificar que la suma del área de las lúnulas es igual al área del triángulo.



Unidad 2

Sucesiones y progresiones

En la vida diaria se utilizan continuamente conjuntos ordenados de números como el de los números naturales, el de los números pares u otros conjuntos numéricos en los que cada término se puede obtener del anterior mediante una fórmula. Estas sucesiones numéricas tienen gran importancia práctica y por eso es tan interesante el estudio de sus relaciones y sus propiedades.

Por medio del estudio de las sucesiones y progresiones realizarás un repaso de los contenidos de Álgebra que estudiaste en años anteriores y en particular aquellos que aprendiste con el Cuadernos de estudio 2, como las ecuaciones, las fórmulas para regularidades y funciones. También retomarás algunas cuestiones relativas al cálculo de intereses que iniciaste en la unidad anterior. Este trabajo te facilitará la comprensión de los temas posteriores, tales como el uso de ecuaciones para la resolución de ejercicios y problemas.

TEMA 1: SUCESIONES Y PROGRESIONES

En este tema estudiarás las propiedades de ciertos conjuntos de números cuyos elementos se relacionan entre sí por alguna regla fija o patrón. Podrás descubrir ese patrón analizando el conjunto de números. Verás que, una vez que conozcas la regla, podrás encontrar un número cualquiera de la sucesión en función del anterior o del siguiente.

A

1. Sucesiones numéricas

a) Observá los siguientes conjuntos de números naturales.

I. 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, …

II. 5, 10, 15, 20, 25, 30, …

III. 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

IV. 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

V. 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, …

b) Respondé en tu carpeta.

1. Los conjuntos de números presentados, ¿siguen algún comportamiento regular, algún patrón?
2. A partir de un término, ¿se puede conseguir el siguiente mediante un cálculo sencillo?
3. En algún caso, ¿se puede conseguir el término siguiente a partir de los dos términos anteriores?

Seguramente, habrás observado que en el primer caso, la diferencia entre un término y el anterior es siempre la misma y su valor es 5. Estos números son múltiplos de cinco y todos los términos se pueden obtener a partir del primero sumando siempre 5 al anterior, es decir, que siguen un patrón de comportamiento. Si observás, verás que la sucesión de los números naturales se comporta de la misma manera, pero en este caso la diferencia que se suma al término anterior para obtener el siguiente es 1. La sucesión de los números pares responde al mismo esquema, cada uno se obtiene del anterior sumando 2. Exactamente lo mismo ocurre con los números impares que se obtienen a partir de 1. También en el segundo ejemplo se observa el mismo comportamiento: cada término se obtiene sumando 7 al anterior.

Se puede entonces imaginar variadas sucesiones de números en las que la diferencia entre todos los pares de términos consecutivos es un número cualquiera **r** distinto de cero, que se escribe $\mathbf{r} \uparrow \mathbf{0}$.

*Las sucesiones en las que un término se obtiene del anterior sumando un número constante **r** se llaman **progresiones aritméticas**.*

Las dos primeras sucesiones que observaste son ejemplos de **progresiones aritméticas.**
La tercera sucesión no es una progresión aritmética porque un término cualquiera no se obtiene sumando un número al anterior, sino multiplicándolo por un número; en este caso se trata de multiplicar por 2.
Las dos últimas sucesiones, en las que un término se obtiene sumando los dos anteriores tampoco son progresiones aritméticas; se las conoce con el nombre de *sucesiones de Fibonacci* en homenaje al gran matemático italiano de la Edad Media que las formuló por primera vez. Más adelante las analizarás con más detalle.

Los términos de una sucesión se pueden expresar simbólicamente. El primer término se representa como $\mathbf{a_1}$, el segundo $\mathbf{a_2}$, el tercero $\mathbf{a_3}$ y así sucesivamente.

Cuando se quiere mostrar que la sucesión podría continuar hasta un número no determinado de términos se hace necesario expresarla simbólicamente a través de lo que se denomina *término general*. El término general que ocupa el lugar **n** se escribe $\mathbf{a_n}$, de modo que una sucesión se simboliza:

$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \ldots \mathbf{a_n}\ldots$ donde el subíndice indica el lugar que ocupa el número en la sucesión.

2. Progresiones aritméticas

En esta actividad te vas a ocupar de las sucesiones en las que cada término se puede obtener a partir de sumar un número fijo al anterior. Ya viste que esas sucesiones particulares reciben el nombre de progresiones aritméticas.

*En toda progresión aritmética, la diferencia entre un término y el anterior se denomina **razón** de la progresión y se la simboliza con la letra **r**.*

Por ejemplo, en la primera sucesión que observaste en la actividad anterior: 5, 10, 15, 20, 25, 30, ... la diferencia entre un término y el anterior es 5, por lo tanto la razón de esa sucesión es 5.
En toda sucesión el término $\mathbf{a_n}$ ocupa el lugar **n** y su anterior ocupa el lugar **n-1**, es decir, que el término anterior a $\mathbf{a_n}$ es $\mathbf{a_{n-1}}$. En este ejemplo,
$\mathbf{a_n - a_{n-1} = 5}$ y también $\mathbf{a_n = a_{n-1} + 5}$.

Para generalizar estas expresiones a cualquier progresión aritmética se escribe
$\mathbf{a_n - a_{n-1} = r}$ y también $\mathbf{a_n = a_{n-1} + r}$.

El término general $\mathbf{a_n}$ de una progresión aritmética se puede obtener por aplicación de sucesivas sumas conociendo sólo el primer término $\mathbf{a_1}$ y la razón **r**: si el primer término es $\mathbf{a_1}$; el segundo término es $\mathbf{a_2 = a_1 + r}$; el término siguiente es $\mathbf{a_3 = a_2 + r}$, pero si aquí se reemplaza $\mathbf{a_2}$ por $\mathbf{a_1 + r}$ se obtiene:
$\mathbf{a_3 = a_1 + r + r}$ o bien $\mathbf{a_3 = a_1 + 2 \cdot r}$; $\mathbf{a_4 = a_3 + r = a_1 + 2 \cdot r + r}$, o sea $\mathbf{a_4 = a_1 + 3 \cdot r}$, ...,
$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$.

a) Para aplicar lo que aprendiste acerca de las progresiones aritméticas, resolvé en tu carpeta las siguientes consignas:

1. ¿Cuánto vale la razón en una progresión aritmética cuyo tercer término es 24 y el quinto término es 32? Calculá el primer término y escribí el término general.

2. Copiá en tu carpeta las sucesiones que aparecen a continuación y escribí dos términos más, el término general e indicá en cada caso cuál es la razón.

i. $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$, ... $a_n =$.............

ii. $b_1 = \neq$, $b_2 = 2\neq$, $b_3 = 3\neq$, $b_4 = 4\neq$, ... $b_n =$ ....

iii. $c_1 = 2$, $c_2 = 5$, $c_3 = 8$, $c_4 = 11$, ... $c_n =$.............

b) Resolvé los siguientes problemas.

En la Ciudad de Buenos Aires, el primer piso de un edificio en torre se encuentra a 7 m del nivel de la calle y la distancia entre cada uno de los siguientes pisos es de 3 m.

- ¿A qué altura está el segundo piso? ¿Y el tercero, el cuarto y el piso veinte?

Un ciclista se somete a un riguroso entrenamiento durante una semana para poder competir en una carrera. El primer día recorre 52 kilómetros y va aumentando 3 km cada día de su entrenamiento.

- Indicá cuántos kilómetros recorrió durante esa semana.

A 3. Suma de los términos de una progresión aritmética

El cálculo para resolver este último problema te habrá resultado sencillo. Pero imaginá que el ciclista siguiera aumentando 3 km a su entrenamiento, día tras día. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al cabo de 25 días, 32 días, es decir, en general, al cabo de n días? Resolver esta nueva situación no resulta tan sencillo. Mediante la siguiente actividad verás una fórmula que permite obtener de una manera simple la suma necesaria.

a) Leé el siguiente texto.

Recordaremos una anécdota del gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss que vivió entre los siglos XVIII y XIX. Cuando Gauss tenía diez años de edad, su maestro solicitó a la clase que encontrara la suma de todos los números comprendidos entre 1 y 100. El maestro, pensando que con ello los alumnos estarían ocupados durante algún tiempo, quedó asombrado cuando Gauss le entregó enseguida su pizarra con el resultado de la suma:

$$\mathbf{(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5\,050.}$$

El maestro tuvo la certeza de que el niño era una promesa para las matemáticas.

b) Discutí con tus compañeros y encuentren una explicación al procedimiento que usó Gauss para encontrar la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética de razón 1. Cuando la hayan encontrado, coméntenla con el docente.

c) Ahora intentá aplicar el mismo procedimiento para calcular la suma de los números naturales comprendidos entre 101 y 200.

> Observá que para sumar 100 números hay que repetir la suma de estos pares 50 veces, es decir, que hay que multiplicar esa suma por el número que representa la mitad de la cantidad de los términos que se quieren sumar.

d) Si en lugar de calcular la suma de los números naturales, tuvieras que calcular la suma de los números pares desde 8 y hasta 50.

1. ¿Cuántos términos tendría esa progresión aritmética? ¿Cuál es la razón? ¿Qué cálculo harías para encontrar la suma? ¿Por qué?

2. Martina y José Luis, dos alumnos de otra escuela, resolvieron este mismo ejercicio de maneras diferentes. Martina escribió en su carpeta:

8	10	12	14	16	18	
	20	22	24	26	28	
	30	32	34	36	38	
	40	42	44	46	48	50

$$8 + 100 + 108 + 116 + 124 + 132 + 50 = 638$$

En cambio José Luis hizo lo siguiente:

$8 \qquad 8 + 2 = 10 \qquad 8 + 2 + 2 = 12 \qquad 8 + 2 + 2 + 2 = 14$

$8 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16\ldots$

$a_{22} = 8 + 21 \cdot 2 = 8 + 42 = 50$

$(8 + 50) + (10 + 48) + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 = 58 \cdot 11 = 638$

• Compará tus respuestas con las de ellos y escribí brevemente tus conclusiones.

> Habrás observado en el procedimiento del pequeño Gauss para calcular la suma, que él se dio cuenta enseguida de que todas las sumas de los pares de términos equidistantes de los extremos dan el mismo resultado. Tanto Martina como José Luis resolvieron correctamente su problema aunque de modo más artesanal.

e) A continuación verás cómo encontrar una fórmula para facilitar el cálculo de la suma de cualquier número de términos de una progresión aritmética.

1. Leé el siguiente texto y resolvé las consignas en tu carpeta.

El procedimiento para obtener la suma de los **n** primeros términos de una progresión aritmética se puede generalizar en forma simbólica escribiendo la suma y volviendo a escribirla debajo con los términos en el orden contrario:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Si se suman ordenadamente ambas expresiones se obtiene el doble de la suma. Por otra parte ya viste que la suma del primero y del último término de una sucesión es igual a la suma del segundo y el penúltimo y así sucesivamente.

Entonces, sumando los pares encolumnados se obtiene el doble de la suma total:

$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$. Y, despejando, la expresión de la suma, resulta:

$S_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n)$.

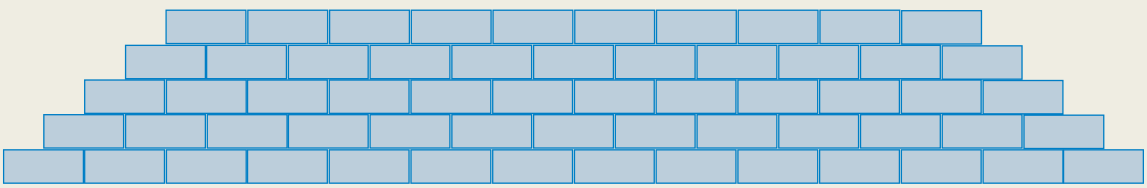
*La suma de **n** términos de una progresión aritmética es el producto del número que indica la mitad de los términos considerados por la suma del primero y del último término. Simbólicamente:*
$Sn = \frac{1}{2} n \cdot (a_1 + a_n)$.

2. Copiá en tu carpeta el siguiente enunciado y completalo.

Para calcular la suma de varios números en progresión aritmética es suficiente con conocer el primer término, ...

f) Resolvé en tu carpeta.

Un tejado tiene las tejas colocadas como en la figura, en la primera fila hay 10 tejas, en la segunda 11, en la tercera 12 y en total hay 10 filas.



1. Los números de tejas de cada fila, ¿están en progresión aritmética? ¿Cuál es la razón? ¿A qué número equivale a_1? Calculá a_{10} aplicando la fórmula correspondiente.
2. Calculá el número total de tejas aplicando la fórmula que aprendiste.

A

4. Sucesión de Fibonacci

Como viste en los ejemplos IV y V de la primera actividad, en algunas sucesiones numéricas un término se obtiene sumando los dos anteriores. A estas sucesiones se las conoce con el nombre de *sucesiones de Fibonacci*.

a) Leé el siguiente texto para conocer cómo se presentan este tipo de sucesiones.

El interés por el estudio de las **sucesiones de Fibonacci**, más allá de su formulación matemática, está en que se presentan en la naturaleza en formas curiosas. Por ejemplo, si observás una piña por el lado donde estaba sujeta a la rama, verás dos conjuntos de espiras o escamas, unas se ubican siguiendo el movimiento de las agujas del reloj y otras en sentido contrario. Si contás las espiras, su número, en una dirección y en la otra, será dos términos consecutivos de una sucesión de Fibonacci, por ejemplo, en algunas especies de pinos son 5 y 8 y en otras 8 y 13.

Lo mismo sucede con las espiras de la flor de girasol, de la margarita y de otras plantas. Esta sucesión también aparece en la formación de la concha de algunos moluscos como el caracol y en el estudio de las leyes de la herencia formuladas por Gregor Mendel, un monje y naturalista del siglo xix.

En las sucesiones de Fibonacci cada término es igual a la suma de los dos anteriores.
En símbolos: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Por ejemplo, si los dos primeros términos de una sucesión son los números 1 y 1, los términos de la sucesión de Fibonacci serán: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...

b) Copiá las siguientes expresiones y escribí en símbolos las fórmulas de dos términos más de la sucesión de Fibonacci.

1. El primer término es $\mathbf{a_1}$.
2. El segundo término es $\mathbf{a_2}$.
3. El tercero es $\mathbf{a_3 = a_1 + a_2}$.
4. El cuarto, $\mathbf{a_4 = a_2 + a_3}$, es decir, $\mathbf{a_4 = a_2 + a_1 + a_2}$, o sea, $\mathbf{a_4 = a_1 + 2\,a_2}$.
5. $\mathbf{a_5 = a_3 + a_4}$, es decir, $\mathbf{a_5 = a_1 + a_2 + a_1 + 2\,a_2}$, o bien, $\mathbf{a_5 = 2\,a_1 + 3\,a_2}$.
6. $\mathbf{a_6 = a_4 + a_5}$, $\mathbf{a_6 = a_1 + 2\,a_2 + 2\,a_1 + 3\,a_2}$, o bien, $\mathbf{a_6 = 3\,a_1 + 5\,a_2}$.

c) Escribí los primeros 10 términos de una sucesión de Fibonacci en la que los dos primeros términos son $\mathbf{a_1 = 3}$ y $\mathbf{a_2 = 7}$.

d) La sucesión de Fibonacci tiene muchas propiedades curiosas que te van a sorprender. Descubrí cada una de ellas a partir de la sucesión que comienza con los términos 1, 1, 2, 3, …

1. Continuá la sucesión hasta obtener los diez primeros términos.
2. Sumá los diez primeros términos.
3. Señalá el séptimo término y analizá la relación que se da entre la suma y el término que señalaste.
4. Construí otras sucesiones de Fibonacci distintas y realizá lo mismo que con la sucesión anterior.

En la consigna **c** habrás obtenido como conclusión la primera propiedad que se verifica en todas las sucesiones de Fibonacci y que se enuncia así: **la suma de los diez primeros términos es once veces el séptimo término.**

Tal vez la propiedad más curiosa de esta sucesión es que a medida que los términos crecen, el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión se aproxima al número de oro que estudiaste en la unidad **12** del CUADERNO DE ESTUDIO **2**.

A medida que se considera un número ***n*** *mayor, en toda sucesión de Fibonacci el cociente se aproxima cada vez más a* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *que es el número irracional* φ *cuyo valor aproximado es* $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1{,}61803\ldots$

e) Para comprobar la segunda propiedad enunciada, calculá las siguientes razones y planteá algunas más:

$$\frac{1}{3};\quad \frac{10}{7};\quad \frac{17}{10};\quad \frac{27}{17};\quad \frac{44}{27};\quad \frac{71}{44};\quad \frac{115}{71}$$

Es decir que si construimos otra sucesión de Fibonacci y, por ejemplo, tomamos dos números cualesquiera como 2 y 6, los siguientes términos serán 8, 14, 22, 36, etcétera. Si observamos la razón entre cada término y el anterior veremos que comienza en 3, sigue en $\frac{4}{3}$ y va oscilando aproximándose cada vez más a un valor que en siete u ocho pasos ya no se distingue de φ=1,618.

5. Progresiones geométricas

a) Retomá el ejemplo III de las sucesiones de la primera actividad.

3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

1. ¿Cuál es la regularidad que se puede advertir en esta sucesión?
2. ¿Hay algún modo de obtener un término a partir del anterior?

b) Observá las siguientes sucesiones en las que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo.

1, 4, 16, 64, 256, ...

$\frac{3}{5}$, 3,15, 75, 375, ...

5, -5, 5, -5, 5, ...

1. Copialas en tu carpeta.
2. Indicá cuál es ese número fijo y, en cada caso, qué operación se aplica a un término para obtener el siguiente.

A este tipo de sucesiones se las denomina **progresiones geométricas**.

*Una **sucesión numérica** es una progresión geométrica, si cada término a_n, excepto el primero, es igual al anterior a_{n-1} multiplicado por un número constante **r (r $\uparrow$ 0)**, llamado **razón de la progresión**.*

En símbolos: $\mathbf{a_n : a_{n-1} = r}$ y también $\mathbf{a_n = a_{n-1} \cdot r}$

El término general de una progresión geométrica se puede obtener conociendo sólo el primer término $\mathbf{a_1}$ y la razón $\mathbf{r}$:

a_1
$a_2 = a_1 \cdot r$
$a_3 = a_2 \cdot r$
$a_4 = a_3 \cdot r$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot r$
$a_n = a_{n-1} \cdot r$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Al multiplicar todas las igualdades, se simplifican los factores que figuran en ambos miembros. En el primer miembro sólo queda $\mathbf{a_n}$ y en el segundo queda $\mathbf{a_1}$ multiplicado por $\mathbf{n - 1}$ factores iguales a $\mathbf{r}$.

c) Escribí los tres primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y calculá el sexto término.

1. $a_4 = 3$, $r = \frac{5}{4}$

2. $a_1 = \frac{7}{9}$, $r = -3$

3. $a_3 = 2$, $r = \frac{1}{4}$

d) Leé el siguiente relato.

Cuentan que un sabio indio inventó el ajedrez y se lo mostró al rey Shirham que quedó tan entusiasmado con el juego, que le ofreció regalarle lo que pidiera.

El inventor, como muestra de su humildad, le pidió lo siguiente: un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y así sucesivamente, duplicando en cada casilla la cantidad de la anterior hasta llegar a la última.

El rey se extrañó de lo poco con que se conformaba el inventor, pero ordenó que le dieran lo que pedía. Sólo cuando sus contables echaron cuentas vieron, asombrados, que no había trigo en el granero real, ni siquiera en todo el reino para juntar esa cantidad.

1. Pensá cómo tendrías que calcular los granos de trigo correspondientes a la casilla 64.

Aunque resulte curioso, hay quienes hicieron el cálculo obteniendo como resultado el número **18 446 744 073 709 551 615**. Se trata de un número muy grande, tiene veinte cifras y el problema que implica leerlo es una tarea tan difícil que se vuelve casi imposible.

e) Como habrás observado, las progresiones geométricas de razón mayor que 1 crecen a gran velocidad. Pensá, por ejemplo, en este problema de los granos de trigo; es una situación del tipo del problema de la hoja de papel que se dobla reiteradamente que se presentó como desafío en la unidad **3** del CUADERNO DE ESTUDIO **2**. Para seguir pensando en estos casos, respondé en tu carpeta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántos tatarabuelos tiene una persona?
2. ¿Cuántos antepasados tiene una persona contando hasta sus tatarabuelos?
3. Cuando estaba resolviendo este problema, Tomás exclamó: “Entonces, ¡antes había más gente que ahora!”. ¿En qué falla el razonamiento de Tomás?

A

6. Suma de los términos de una progresión geométrica

Tal como sucedió con las progresiones aritméticas, se presentarán muchas situaciones en las que resultará necesario sumar los términos de una progresión geométrica. Esta actividad te permitirá avanzar hacia la obtención de una fórmula para cualquier caso.

a) Resolvé la siguiente situación.

La crecida de un río destruyó el puente de acceso a una pequeña localidad por lo que se pidió la colaboración de voluntarios para organizar grupos de ayuda. El primer día concurrieron 4 amigos, el segundo día cada uno llevó a otros 2, al día siguiente cada uno de ellos llevó a otros 2 y así siguieron durante varios días.

1. ¿Cuántos voluntarios trabajaron en el quinto día?
2. ¿Cuántas jornadas desempeñó el total de los voluntarios a lo largo de 7 días?
3. ¿Qué cálculo debiste realizar para responder a la pregunta 2? Intentá hallar una fórmula que te permita resolver el problema con los datos indicados.

Para expresar la suma de una progresión geométrica en cualquier caso, seguí con atención este procedimiento:

Si querés calcular los **n** términos de una progresión geométrica, podes escribir simbólicamente

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Si multiplicás los dos miembros de la igualdad por **r** resulta,

$$S_n \cdot r = a_1\, r + a_2\, r + a_3\, r + \ldots + a_{n-2}\, r + a_{n-1}\, r + a_n\, r$$

pero $a_1\, r = a_2$, $a_2\, r = a_3$, … o sea

$$S_n \cdot r = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_n{-}1 + a_n + a_n\, r$$

y restando la suma S_n, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ queda:

$$S_n \cdot r - S_n = a_n\, r - a_1$$

porque los demás sumandos se simplifican; entonces se puede escribir

$$S_n \cdot (r - 1) = a_n\, r - a_1$$

o bien

$$S_n = \frac{(a_n r - a_1)}{r - 1}$$

Esta expresión se lee:

"La suma de ***n*** *términos de una progresión geométrica es el cociente de la diferencia entre el último término multiplicado por la razón y el primer término, dividido por la razón disminuida en uno".*

b) Ahora podés verificar los cálculos que realizaste para resolver el problema anterior aplicando la fórmula de la suma de una progresión geométrica.

c) Si hoy recibís una moneda; mañana, dos: pasado, cuatro y así sucesivamente. ¿Cuántas monedas tendrás al cabo de un mes?

El concepto de sucesiones numéricas es muy amplio. Cada una de ellas queda caracterizada por una fórmula que indica cómo se construyen los sucesivos términos. La complejidad de esa construcción depende de las operaciones involucradas. Hasta aquí trabajaste con diferentes tipos de sucesiones y viste que algunas reciben el nombre de progresiones, son las sucesiones en las que cada término se obtiene del anterior por reiteración de una suma o de una multiplicación. Por otra parte, pudiste observar que tanto en las progresiones aritméticas como en las sucesiones de Fibonacci, que no están incluidas en las progresiones, sólo interviene la suma, en cambio en las progresiones geométricas se aplican la multiplicación y la potenciación. El estudio de las propiedades de las progresiones tiene muchos años de historia, entre otras razones, porque algunas de esas propiedades se aplicaron a la Aritmética comercial. Resulta un importante desafío distinguir el ritmo de crecimiento de las progresiones y calcular, por ejemplo, en cuánto tiempo se duplicará una cantidad de dinero puesto a un interés determinado.

TEMA 2: INTERÉS GENERADO POR UN CAPITAL

En la unidad **1** de este Cuaderno viste algunas nociones acerca de interés simple y compuesto. En este tema vas a profundizar esos conocimientos vinculándolos con la aplicación de lo que aprendiste sobre sucesiones y progresiones.

A

7. ¿Simple o compuesto?

Cuando calculamos el interés de un capital, lo que hacemos es analizar qué va sucediendo con ese capital a lo largo del tiempo. El cálculo del interés que se utiliza en economía se basa en la aplicación del cálculo de sucesiones.

a) Leé los dos problemas siguientes y conversá con tus compañeros para determinar cuál es la diferencia entre ambos.

1. Una institución bancaria ofrece un interés anual del 5%, eso significa que por cada 100 pesos que se depositen, al cabo de un año pagará 5 pesos.
Si se depositan $1000 durante 5 años en un banco que da un interés del 5% anual y cada año se recogen los intereses producidos, al cabo de los cinco años, ¿cuánto podrá retirarse en concepto de interés? ¿Cuánto dinero habrá en el banco?
2. Si se depositan $1000 durante 5 años en un banco que da un interés del 5% anual y recién al cabo de los 5 años se va a retirar el dinero, ¿en cuánto se han convertido los $1000?

b) Escribí en tu carpeta un breve comentario que explique la diferencia entre recoger los intereses cada año y recogerlos todos juntos al final de varios años.

Para calcular en cuánto dinero se convierte un capital al cabo de un año al 10% hay que pensar:

CAPITAL		Intereses		TOTAL
$100	producen	$10	y se convierten en	$110
$C	producen	$C\,\frac{10}{100}$	y se convierten en	$1,1 C

De modo que para calcular en cuánto se convierte un capital al cabo de 1 año al 10%, se multiplica el capital por 1,1.

En el problema **2**, los intereses no se retiran por lo que al cabo de un año pasan a incrementar el capital y al siguiente año también producen intereses como se ve en esta tabla:

Capital al comienzo del año		Intereses	Capital al final del año
1° año	1000	100	$1100 = 1\,000.(1,1)$
2° año	1100	110	$1210 = 1\,000.(1,1)^2$
3° año	1210	121	$1331 = 1\,000.(1,1)^3$
4° año	1331	133,10	$1464,10 = 1\,000.(1,1)^4$
5° año	1464,10	146,41	$1610,51 = 1\,000.(1,1)^5$

c) Si en lugar de depositar 1 000 durante 5 años se depositan durante 8 años, ¿en cuánto se convertirían?

Un capital **C** durante un año al **i**% anual produce unos intereses de $\frac{\mathbf{C.i}}{\mathbf{100}}$ y por lo tanto se convierte en $\mathbf{C} + \frac{\mathbf{C.i}}{\mathbf{100}}$ que también se puede escribir: $\mathbf{C \cdot (1 + \frac{i}{100})}$.

Si los intereses pasan cada año a formar parte del capital, al cabo de ***t*** *años el capital se habrá transformado en* $C \cdot (1 + \frac{i}{100})^t$.

El interés compuesto consiste en sumar periódicamente al capital los intereses. Este proceso de sumar los intereses al capital cada vez que se liquidan se llama ***capitalización*** *y el período usado para capitalizar los intereses se llama* ***período de capitalización****.*

d) Resolvé en tu carpeta:

1. ¿Cuál será la suma que se obtenga al final de 6 años por una cantidad de $10 000 a un interés compuesto anual del 8%?

2. Calculá el dinero que se recibirá en concepto de intereses y el valor acumulado de un capital de $50 000 depositado al 16% mensual durante 2 años.

Conversá con tu docente para ver si es conveniente que resuelvas otros problemas vinculados con interés simple o compuesto.

Para finalizar

En esta unidad conociste sucesiones ordenadas de números que se pueden obtener aplicando al primer término las mismas operaciones, reiteradas veces. Según las transformaciones que se apliquen en cada caso, distinguiste casos particulares de sucesiones: las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. En ambos casos encontraste las fórmulas que permiten calcular la suma de los términos conociendo el primero, la razón y el número de términos.

Por la frecuencia con que aparecen en la naturaleza, también aprendiste a construir sucesiones de Fibonacci y viste algunas de sus propiedades. A través de ese caso particular te iniciaste en el estudio de las tendencias de las sucesiones y comprobaste que a medida que crecen los términos de las sucesiones de Fibonacci, el cociente entre dos términos contiguos se aproxima al número de oro.

Más adelante aplicaste lo que aprendiste de las sucesiones a la comprensión de la diferencia entre colocar un capital a interés simple o compuesto. Esta aplicación es de tal importancia que es conveniente que la tengas siempre presente ya que, al momento de depositar un capital, la ganancia que produzca variará según el tipo de interés que se le aplique y, quizá, este conocimiento te permita tomar mejores decisiones en el momento de calcular beneficios.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Construcción geométrica de la sucesión de Fibonacci

Trabajá en una hoja de papel cuadriculado realizando los siguientes pasos:
En el centro de la hoja dibujá un cuadrado de 1 cm de lado, llamalo A.
Dibujá otro cuadrado A' de modo que con el anterior formen un rectángulo de 1 cm por 2 cm.
Dibujá otro cuadrado 2 cm de lado que tenga un lado común con el rectángulo. Llamalo B.
Dibujá otro cuadrado C, de lado consecutivo al lado mayor del rectángulo que forman los otros tres.
Seguí dibujando cuadrados consecutivos D, E, etcétera, de lado igual al lado mayor del rectángulo que forman los anteriores.
Los lados menores de los rectángulos que se van formando constituyen la sucesión de Fibonacci.
El desafío consiste en que midas tu hoja y digas hasta qué término de la serie podés dibujar.

Medios proporcionales

a) Entre 1 y 16 escribí tres números *p, q* y *r* de modo que 1, *p, q, r,* 16 estén en progresión geométrica.
b) Hacé lo mismo con 3, *m, n, p,* 48.
c) Hacé lo mismo con 32, *m, n, p,* 2.

Esta operación recibe el nombre de ***interpolación de medios proporcionales***. Te desafiamos a que expliques por qué se llama así.

2. El autor de novelas

Un escritor publica una novela cada 2 años. Cuando publica su séptima novela, la suma de los años en los cuales fueron publicadas es 13 986. ¿En qué año publicó su primera novela?

3. El charco de pintura

Juan andaba en su bicicleta por un camino y pasó sobre una mancha de pintura fresca de unos 10 cm de ancho. Después de continuar un tramo en línea recta se dio vuelta y miró hacia atrás. ¿Cómo son las marcas que vio en el pavimento?

UNIDAD 3 Potenciación y radicación

En el desarrollo de esta unidad vas a continuar con el estudio de dos operaciones que son inversas entre sí: la potenciación y la radicación. Avanzarás en la resolución de las operaciones con diferentes clases de números y aplicarás sus propiedades para resolver distintos problemas.

En el caso de contar con una calculadora podrás hacer los cálculos más rápidamente.

*Para poder empezar a trabajar este tema, es preciso que revises lo que ya sabés sobre la potenciación de números naturales y de números racionales. Podés releer los contenidos de la unidad **3** del* CUADERNO DE ESTUDIO **2**. *Si no trabajaste antes con ese material, el docente te indicará qué actividades realizar antes de comenzar esta unidad.*

TEMA 1: POTENCIACIÓN: OPERACIONES COMBINADAS Y PROPIEDADES

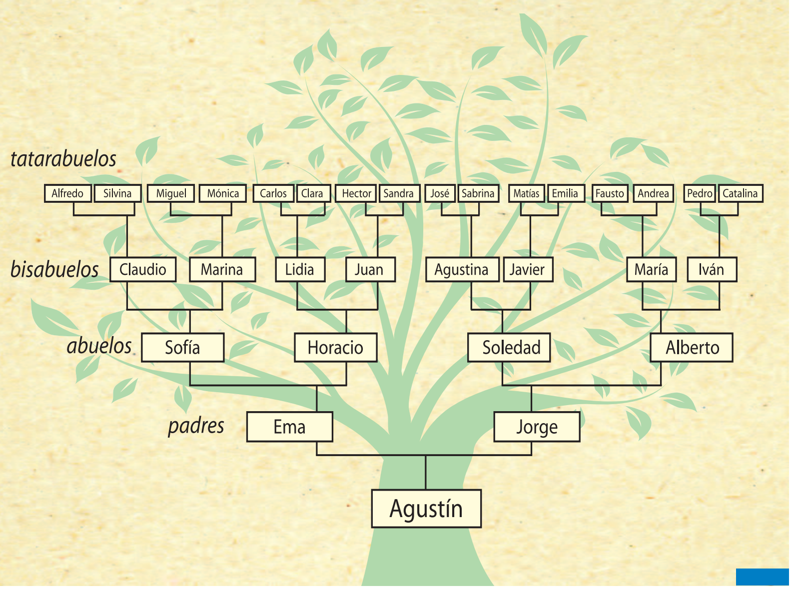
A

1. Potencias con exponente natural

En esta primera actividad vas a trabajar con la idea más elemental de la potenciación. Se trata de multiplicar sucesiva y repetidamente un número racional una cantidad determinada de veces.

a) Leé la siguiente información y luego resolvé las consignas que siguen.

Un árbol genealógico es un esquema en forma de árbol que muestra las relaciones de parentesco entre distintas generaciones de una familia. A partir de un diagrama arbolar como el siguiente, es posible calcular la cantidad de parientes que corresponden a una persona.



1. Discutí con tus compañeros qué operación matemática permite averiguar cuál es la cantidad de personas que corresponden a cada uno de los grados de parentesco indicados hasta llegar a tatarabuelo. Entonces, ¿cuántos tatarabuelos tiene una persona?
2. Escriban las conclusiones en sus carpetas.

b) Compará tus conclusiones con la información que presenta el siguiente texto.

Ya sabés que, por ejemplo, en lugar de escribir 3.3.3.3 se puede escribir 3^4 que se lee tres elevado a la cuarta potencia o bien tres a la cuarta. Del mismo modo, el número de abuelos resulta de elevar al cuadrado el número de padres, es decir que cada persona tiene $2^2 = 4$ abuelos y $2^4 = 16$ tatarabuelos.

Cuando se calcula una potencia, el número que se multiplica reiteradamente se llama ***base****, el número de veces que se multiplica la base se llama* ***exponente*** *y el resultado de la operación es la* ***potencia****.*
En símbolos

exponente

$$b^x = p$$

potencia

base

c) Para seguir aplicando lo que sabés acerca de la potenciación, vas a trabajar con potencias cuyos exponentes son números naturales, pero las bases son números pertenecientes a diferentes conjuntos numéricos.
1. Copiá este cuadro en tu carpeta y completalo.

Potenciación	Número Base	Exponente	Resultado	Signo del resultado
$(-0{,}6)^2$	Decimal negativo	Par	0,36	+
$(3)^3$	Entero positivo			
$(-4)^5$	Entero negativo			
$\left(\frac{2}{5}\right)^2$	Fraccionario positivo			
$\left(-\frac{2}{5}\right)^2$	Fraccionario negativo			

2. Inventá otros dos ejemplos de potenciación para las dos últimas filas del cuadro.

d) En el cuadro anterior calculaste potencias de números enteros positivos y negativos con exponente par o impar y de números racionales positivos y negativos.
Observá los resultados para responder a estas preguntas:

1. ¿En qué casos los resultados de las potencias con base negativa son positivos?
2. ¿En qué casos los resultados de las potencias con base negativa son negativos?
3. ¿Por qué ocurre eso?
4. Compará tu trabajo con el de tus compañeros.

Del trabajo realizado hasta aquí se puede concluir que para las potencias de números racionales con exponente natural se cumple que:

Si la base es negativa y el exponente es par, el resultado es positivo.
Si la base es negativa y el exponente es impar, el resultado es negativo.

Tené presente que las conclusiones obtenidas anteriormente son válidas para exponentes pares o impares, pero no para el caso del 0 (estudiarás este caso especial en la actividad **6** de esta unidad).

A 2. Operaciones combinadas

En la próxima actividad encontrarás operaciones combinadas que incluyen la potenciación.

*Para poder resolver cálculos que emplean más de una operación tenés que retomar el estudio del orden jerárquico de las operaciones que ya viste en la unidad **1** del Cuaderno de estudio **1** y en la unidad **3** del Cuaderno de estudio **2**. Allí se indica cómo proceder cuando tenés que resolver operaciones combinadas. Consultá con tu docente si es necesario que recurras a esos Cuadernos antes de comenzar con la siguiente actividad.*

a) Analizá los siguientes cálculos, resolvelos y luego explicá brevemente el orden en el que los hiciste y qué función cumplen los paréntesis.

1. $6 + 2^3 . 5 =$
2. $(6 + 2^3). 5 =$
3. $(6 + 2)^3. 5 =$
4. $6^2 + 2 . 5^3 =$
5. $(0{,}4^2 + 2{,}1) . 4 + 1000 =$
6. $(0{,}4 + 2{,}1)^2 . 4^2 + 1000 =$

b) El siguiente cuadro sintetiza cómo se resuelven las operaciones combinadas, incluida la potenciación, según el orden jerárquico de las operaciones. Leelo para constatar los procedimientos que realizaste y revisar tus cálculos anteriores.

Si hay paréntesis:	**Si no hay paréntesis:**
Las operaciones que encierran los paréntesis deben ser resueltas previamente.	- Las sumas separan más que las multiplicaciones; - las multiplicaciones separan más que las potenciaciones.

En la actividad que sigue vas a profundizar en el análisis de las propiedades de la potenciación que ya iniciaste en la unidad **3** del CUADERNOS DE ESTUDIO **2**.

A

3. Exploración de las propiedades en la potenciación

La siguiente es una actividad de exploración.

a) Si disponés de una calculadora, confeccioná en tu carpeta una tabla donde aparezcan los exponentes (de 1 a 7) y las bases (de 1 a 10). Completá cada celda de la tabla con el resultado de cada operación.

b) Si no disponés de una calculadora vas a trabajar con la tabla de potencias ya confeccionada que se presenta a continuación.

Exponente / Base	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	8	16	32	64	128
3	3	9	27	81	243	729	2187
4	4	16	64	256	1024	4096	16384
5	5	25	125	625	3 125	15625	78125
6	6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	7	49	343	2401	16 807	117649	823543
8	8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	9	81	729	6561	59049	531441	4782969
10	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000

c) Observá la tabla para responder por escrito a las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué las sucesivas potencias de 1 dan como resultado 1?

2. ¿Por qué la primera potencia de cualquier base da por resultado la base?

3. ¿7^2 es lo mismo que 2^7? ¿Por qué? La respuesta a esta pregunta, ¿permite asegurar que la potenciación no es una operación conmutativa? ¿Por qué?

4. Para averiguar si la potenciación es asociativa o no, resolvé paso a paso según indican los paréntesis, por ejemplo $(4^3)^2$, y fijate si da lo mismo que 4^{3^2}. ¿Qué conclusión sacás?

Esta actividad que realizaste te fue presentada como una actividad de exploración y es muy importante en Matemática. Al responder a las preguntas, a partir de la observación y del análisis de los datos del cuadro, fuiste verificando algunas de las propiedades de la potenciación. Enfrentar una situación problemática y tratar de resolverla, pone a prueba los conocimientos que tenés, te lleva a probar, a volver a intentarlo, y, a veces, a equivocarte. También puede suceder que a tus compañeros o a vos mismo se les ocurran diferentes modos de resolverla. Este proceso es parte del aprendizaje y te ayudará a comprender mejor cada uno de los temas que estudies.

Como conclusión de la actividad exploratoria que realizaste es conveniente puntualizar que:

I. La potenciación no es una operación conmutativa.

II. La potenciación no es una operación asociativa.

En ambos casos un contraejemplo es suficiente para mostrar que estas propiedades no son válidas para la operación potenciación.

En la unidad **3** del Cuaderno de estudio **2** viste la importancia del uso de un contraejemplo cuando se trata de afirmar que una propiedad no es válida en cierto ámbito. Por ejemplo: la adición es conmutativa porque $a + b = b + a$; la multiplicación es conmutativa porque $a \cdot b = b \cdot a$; en cambio, la división no es conmutativa porque un contraejemplo como $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$ pone en evidencia esa no validez y es suficiente para generalizar que en la división $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$

A 4. Producto de potencias de igual base

Para seguir estudiando las propiedades de la potenciación vas a analizar qué ocurre en el siguiente caso.

a) Calculá los siguientes productos de potencias.

1. $2^5 \cdot 2^1$

2. $2^4 \cdot 2^2$

3. $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2$

4. $2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3$

5. 2^6

Habrás podido observar que todas estas expresiones son productos de potencias de la misma base y que todas conducen a una misma potencia: 2^6.

En todos los casos, el exponente 6 es la suma de los exponentes de los factores.

b) Copiá el siguiente cuadro en tu carpeta y completalo según la forma de trabajo que se desarrolla en la primera fila. Al completar cada una de las columnas del cuadro irás desarrollando paso a paso, el procedimiento para multiplicar potencias de igual base.

Producto de potencias de igual base	Multiplicación de factores base	Número de factores	Expresión con un exponente	Resultado
$3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$	$(3 \cdot 3) \cdot 3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3)$	$2 + 1 + 3$	$3^{2+1+3} = 3^6$	729
$(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)$				
$5^3 \cdot 5^4$			$\left(\frac{1}{2}\right)^{3+1+1} = \left(\frac{1^5}{2}\right)$	
$a^3 \cdot a^2 \cdot a^2$				

Propiedad de la potenciación:
Cuando se multiplican dos o más potencias de igual base el resultado es una potencia de la misma base con un exponente que es la suma de los exponentes de los factores.
En símbolos: $a^x \cdot a^y \cdot a^z = a^{x+y+z}$

Si prestás atención, verás que al calcular el producto de potencias de la misma base, comenzaste por realizar experiencias con números en casos particulares y posteriormente pasaste a un razonamiento más abstracto, con letras y números. Esta tarea te permitirá abrir una vía al proceso de construcción de las generalizaciones.

En la actividad que sigue vas a retomar el estudio del cociente de potencias de igual base, para conocer más propiedades de la potenciación.

A

5. Cociente de potencias de igual base

Vas a resolver algunas divisiones entre potencias que tienen la misma base, tal como lo hiciste en la actividad anterior con la multiplicación.

a) Copiá, en tu carpeta, el cuadro que aparece a continuación. Completalo según la forma de trabajo de las primeras filas.

Cociente de potencias de igual base	Cociente de factores base	Número de		Expresión	Resultado
		dividendo	divisor		
$4^3 : 4$	$(4 \cdot 4 \cdot 4) : 4$	3	1	$4^{3-1} = 4^2 16$	
$(2)^5 : (2)^3$	$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) : (2 \cdot 2 \cdot 2)$	5	3	$2^{5-3} = 2^2$	4
$a^4 : a^3$					
$a^n : a^p$					

Después de haber seguido este procedimiento, podés comprender otra propiedad de la potenciación. Cuando se dividen dos potencias de igual base el resultado es una potencia de la misma base con un exponente que es la diferencia entre los exponentes de las potencias del dividendo y del divisor. En símbolos: $a^x : a^y = a^{x-y}$.

Ya sabés cómo hallar la potencia de un número entero o fraccionario cuando el exponente es positivo. En la actividad que sigue, analizarás otra propiedad al encontrar las potencias con exponente cero.

6. Potencias con exponente cero

En esta actividad vas a aplicar lo que aprendiste sobre el cálculo de un cociente de potencias que tienen la misma base.

a) Resolvé:

I. $5^5 : 5^2 =$

II. $(-\frac{2}{5})^4 : (-\frac{2}{5})^3 =$

III. $(\frac{1}{3})^4 : (\frac{1}{3})^2 =$

1. Considerá la división $\mathbf{2^3 : 2^3}$.Resolvé la operación escribiendo el dividendo y el divisor como producto de factores 2.
2. ¿Cuál es el resultado de $\mathbf{2^3 : 2^3}$?
3. Siguiendo la regla del cociente de potencias de igual base, ¿cuál es el exponente para: $\mathbf{2^3 : 2^3}$?

b) Copiá el cuadro que sigue en tu carpeta. Completalo según la forma de trabajo de las primeras filas. Incluí un ejemplo en la tercera fila.

Operación indicada	La base como factor y divisor	La base con un único exponente	Exponente	Resultado	Potencia 0
$2^3 : 2^3$	$\frac{2.2.2}{2.2.2} = \frac{8}{8} = 1$	$2^3 \div 2^3 = 2^{3\text{-}3} = 2^0$	0	1	$2^0 = 1$
$(-3)^2 : (-3)^2$	$\frac{(-3)\ (-3)}{(-3)\ (-3)} = 1$	$(-3)^{2\text{-}2} = (-3)^0$	0	1	$(-3)^0 = 1$
			0	1	
$a^7 : a^7$					
$a^n : a^n$					

Habrás observado que para cualquier base positiva o negativa la potencia de exponente 0 vale 1.

La potencia de cualquier número distinto de cero y exponente cero es uno. En símbolos: $\boldsymbol{a^0 = 1}$ *con* $\boldsymbol{a \uparrow 0}$.

Ahora bien, elevar el número **0** a cualquier potencia natural es obtener como resultado 0 porque se trata de multiplicar **n veces 0.** ¿Puede existir la potencia 0^0? Si existiera la potencia nula de cero, vale decir 0^0, tendría que ser 0 como lo es para toda potencia de base 0; pero también el resultado tendría que ser 1, como lo es para toda potencia de exponente 0. Por lo tanto, nos enfrentamos a una imposibilidad: no se puede definir 0^0 sin quebrar las reglas anteriores.

La potencia 0 de base 0, es decir 0^0 *carece de sentido, no está definida.*

En la actividad siguiente realizarás el esfuerzo de trabajar algebraicamente. Esta tarea implica operar con igualdades donde los números se representan con letras.

A 7. Otras propiedades de la potenciación

En esta actividad se trata de demostrar cómo se calcula la multiplicación de potencias de igual exponente, es decir, de encontrar la forma de calcular la potencia enésima del producto de los números **a** y **b**, en símbolos: $\mathbf{(a \,.\, b)^n}$, a partir de las verdades seguras que ya conocés.

a) Copiá el siguiente cuadro y completá la columna ***Porque se aplica*** con la definición o la propiedad que corresponda.

Expresión algebraica	Porque se aplica:
$(a \bullet b)^n = \underbrace{(a \bullet b)\,(a \bullet b)\ldots(a \bullet b)}_{n \text{ factores}}$	la definición de potencia.
$(a \bullet b)^n = \underbrace{a \bullet a \ldots a \bullet}_{n \text{ factores a}}\ \underbrace{b \bullet b \ldots b}_{n \text{ factores b}}$	
$(a \bullet b)^n = a^n \bullet b^n$	

Observando la tabla se ve que en la primera columna hay una serie de expresiones simbólicas. En la segunda columna se debe mencionar los fundamentos que se aplican para el pasaje de una expresión a la de más abajo. De este modo, en la segunda fila de la tabla, la agrupación de factores se deduce de la primera fila por aplicación de la ***conmutatividad del producto***. La expresión de la tercera fila resulta de la segunda por aplicación de la ***definición de potencia***.

Como consecuencia de seguir el encadenamiento de las deducciones escritas en el cuadro, vale decir, *de seguir un proceso de demostración*, se obtiene como resultado de la identidad $(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^n = \mathbf{a}^n \bullet \mathbf{b}$. Esa identidad es la expresión simbólica de la propiedad distributiva de la potenciación con respecto al producto.

En ese caso, las letras pueden representar cualquier número de un conjunto y su uso permite demostrar la generalización de ciertas propiedades para todos los elementos del conjunto.

Cuando en Matemática se trata de demostrar algo, es necesario establecer una cadena de deducciones que permita llegar a una conclusión segura a partir de otras verdades seguras que fueron establecidas o probadas previamente.

TEMA 2: RADICACIÓN

Hasta aquí trabajaste con potencias. Por ser una operación no conmutativa, la potenciación tiene dos operaciones inversas. En este tema trabajarás sobre una de ellas: la radicación. Esta operación permite encontrar la base cuando se conoce una potencia y el exponente.

A

8. Cuadrados perfectos

a) Calculá los cuadrados de los números que figuran en la primera fila; copiá la tabla en tu carpeta y completala.

Número	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**20**	**50**	**100**
Cuadrado									

Recordá que el área de un cuadrado se encuentra calculando el cuadrado de la medida del lado. Por eso los números de esta tabla dan las áreas de los cuadrados cuyos lados tienen como medida los números dados.

b) Elegí dos columnas de la tabla y dibujá en papel cuadriculado o milimetrado, los cuadrados cuyos lados midan lo que indica la primera fila y las áreas, el correspondiente valor, en la segunda. No olvides indicar qué unidades usaste para el lado y cuál corresponde al área.
Por tratarse de cuadrados perfectos podés dibujar las figuras de modo de hacer coincidir exactamente los lados con las líneas del papel que indican la unidad (cm o mm) que elegiste para medir.

c) Los números de la segunda fila de la tabla que completaste en la consigna **a** son ejemplos de números cuadrados. Escribí cinco ejemplos de números enteros que no sean cuadrados.

A

9. Radicación en los números racionales

En esta actividad trabajarás con otros números que no son cuadrados perfectos.

a) Comenzá leyendo este texto:

Si se toma como punto de partida un número y se le aplica una operación se llega a un resultado. Se puede volver al número inicial partiendo del resultado final aplicándole la operación inversa. Por ejemplo, aplicando la división como operación inversa de la multiplicación; $4 \xrightarrow{x3} 12$ y partiendo del resultado final $12 \xrightarrow{\div 3} 4$.

Del mismo modo, en la operación potenciación, conociendo dos de los tres elementos —base, exponente y potencia— se puede calcular el tercero. Cuando se da el resultado de la operación efectuada y se buscan los números con que se operó se está realizando la operación inversa.

$$\mathbf{4 \cdot 4 = 4^2 = 16} \text{ y } \mathbf{\sqrt{16} = 4}.$$

Dicho de otro modo, aplicar a un número la operación raíz cuadrada consiste en encontrar los dos factores iguales que dan como producto ese número.

$$\mathbf{(-4) \cdot (-4)} \text{ también da } \mathbf{16} \text{ y } \mathbf{\sqrt{16} = \pm 4}.$$

b) Copiá el cuadro siguiente y completalo siguiendo el modelo de la primera fila. La **x** señala el número que se busca en cada caso.

Escritura de la potencia	Base	Exponente	Resultado de la potencia
2^3	2	3	8
	x	2	25
	7	x	343
	3	4	x
	x	5	32
$1,2^3$	1,2	3	x

La operación que permite encontrar las respuestas de la segunda columna, o sea la base correspondiente en cada caso, es la **radicación**.

La raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado y se indica con el signo $\sqrt{\ }$.

Por convención el índice 2 no se escribe, por lo tanto, la raíz cuadrada queda expresada por el signo radical.

En cambio, en la expresión $\sqrt[3]{8} = 2$,

8 es el radicando, 3 es el índice y 2 es la raíz.

En este caso y en todos los casos diferentes de 2, es necesario indicar el índice.

El signo radical $\sqrt[n]{a}$ se lee raíz enésima de a o bien raíz de índice n de a.

La raíz enésima de un número es la operación inversa de elevar a la potencia enésima y se indica con el signo $\sqrt[n]{\ }$.

La raíz enésima de un número ***a*** *es el número* ***b*** *si la potencia enésima de* ***b*** *es* ***a****.*
En símbolos: $\sqrt[n]{a} = b$ *si* $b^n = a$.

Para los números que no son cuadrados perfectos se puede encontrar una raíz cuadrada aproximada.

Por ejemplo: si lo que buscamos es la $\sqrt{42}$, es decir, el lado de un cuadrado cuya área sea 42 unidades cuadradas, no hay ningún número entero que elevado al cuadrado dé 42, ya que: $6^2 = 36$ y $7^2 = 49$. Por lo tanto como $36 < 42 < 49$ es $6 < \sqrt{42} < 7$. De este modo, no se obtiene un valor exacto de la $\sqrt{42}$, pero sí aproximado. Si tenés oportunidad de usar una calculadora podés encontrar que $6,3 < \sqrt{42} < 6,4$ y seguir aproximando.

b) Resolvé en tu carpeta completando los espacios en blanco como se muestra en el primer ejemplo:

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$
$\sqrt[4]{81} =$ .... porque ....
$\sqrt[3]{125} =$ .... porque ....
.... $< \sqrt[3]{149}$ ....$<$ porque ....
$\sqrt[4]{76} =$ .... porque ....
.... $< \sqrt{12}$ ....$<$ porque ....

c) Resolvé en tu carpeta el cálculo de la raíz cuadrada del número racional $\frac{25}{100}$ Tené en cuenta que podés aplicar la propiedad distributiva de la radicación haciendo: $\sqrt{25 \div 100}$

La raíz cuadrada de un número fraccionario es el número racional que tiene como numerador la raíz cuadrada del numerador y como denominador la raíz cuadrada del denominador.

d) Calculá las siguientes raíces, escribí el resultado como fracción y como expresión decimal.

1. $\sqrt{\frac{25}{10.000}} =$
2. $\sqrt{\frac{25}{81}} =$
3. $\sqrt{\frac{8.000}{343}} =$

A 10. Propiedades de la radicación

Para estudiar este tema comenzarás por resolver algunas operaciones que te permitirán explorar las propiedades de la radicación.

a) Resolvé:

1. $\sqrt{9} \bullet \sqrt{4} =$

2. $\sqrt{9} \bullet 4 = \sqrt{36} =$

• Si hacés primero el producto de los radicandos y luego la raíz $\sqrt{9} \bullet 4 = \sqrt{36}$, ¿se llega al mismo resultado que calculando cada una de las raíces y multiplicándolas luego entre sí?

b) Explorá los siguientes casos y luego respondé a las preguntas.

1. $\sqrt{100} \;/\; \sqrt{4} =$

2. $\sqrt{\frac{16}{25}}\ \sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{49}{16}}\ \sqrt{\frac{25}{9}} =$

3. $\sqrt{\frac{49}{16}}\ \sqrt{\frac{25}{9}} =$

- ¿Cuáles son los índices de las raíces?
- ¿Es lo mismo hallar las raíces primero y luego el producto que calcular primero el producto de los radicandos y luego la raíz?
- ¿Es lo mismo hallar las raíces primero y luego el cociente que calcular primero el cociente de los radicandos y luego la raíz?

c) Si podés, compará tus respuestas con tus compañeros y consulten con el docente. Después de haber resuelto estas operaciones podrás comprender las propiedades de la radicación.

Cuando se multiplican dos o más raíces cuadradas el resultado es la raíz cuadrada del producto de los radicandos. En símbolos: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.
Decimos por ello que la radicación es distributiva con respecto a la multiplicación de los radicandos.

Cuando se dividen dos raíces cuadradas el resultado es la raíz cuadrada del cociente de los radicandos. En símbolos: $\sqrt{a} \div \sqrt{b} = \sqrt{a \div b}$.

A

11. Para saber lo que sabés

Las siguientes consignas te permitirán aplicar lo que aprendiste en esta unidad. En cada caso y después de resolverlas escribí en tu carpeta las conclusiones.

a) Resolvé las siguientes potencias.
1. 0^2, 0^5, 0^7, 0^{10}.
2. 1^5, 1^8, 1^2, 1^{10}.
3. 3^1, 5^1, 9^1, 10^1.
4. 2^0, 3^0, 8^0, 10^0.
5. 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6.

b) Consultá la tabla de potencias que construiste en la actividad **1** y escribí los siguientes números como potencias, en más de una forma: 32, 64, y 81.

c) Escribí como una sola potencia y luego resolvé:

1. $(-3)^4 \cdot 5^4 \cdot (-2)^4 =$

2. $((5)^2)^3 =$

3. $(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^4 =$

4. $(0,2)^3 \cdot (1,5)^3 \cdot (0,7)^3 =$

5. $(-1,5)^2 \cdot (-1,5)^0 \cdot (-1,5)^2 =$

d) Escribí dos potencias que den como resultado:

1. 0 ….

2. 1 ….

3. la base.

e) Copiá en tu carpeta y completá cada igualdad para hacerla verdadera poniendo los números que correspondan en el lugar de los puntos suspensivos.

1. $2^3 \cdot 3^{3\ldots} = 6^{\ldots\ldots}$

2. $(-0,2)^2 \cdot 4^2 = (\ldots\ldots)^2$.

Para finalizar

En esta unidad ampliaste tus conocimientos acerca de dos operaciones: la potenciación como operación directa y la radicación, como la operación inversa para hallar la base conociendo el exponente y la potencia.

Aprendiste que hay propiedades que tienen validez en algunas operaciones y no tienen sentido en otras, por ejemplo, que la potenciación y la radicación no son operaciones conmutativas. Esta reflexión es muy importante en cuanto al contenido matemático, pero más aun en cuanto al desarrollo del pensamiento matemático: pudiste ver que un contraejemplo es suficiente para afirmar la no validez de una propiedad y que, en cambio, para afirmar rigurosamente una generalización es necesario recurrir a un proceso de demostración.

La tarea realizada te permitirá aplicar estos conocimientos a otras situaciones para seguir ampliando tus conocimientos matemáticos.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. La edad de Florencia

Observá la siguiente situación:

- Ayudá a Marta a descubrir la edad de Florencia.
- Inventá otros desafíos similares para presentárselos a algún compañero.

2. El adivinador

Algunas cuestiones sirven de entretenimiento, pero muestran, al mismo tiempo, el uso de las operaciones matemáticas para simular adivinanzas. Observá este ejemplo:
Se le pide a una persona que escriba el año en que nació, el de una fecha memorable para ella y luego que escriba los números que corresponden a los años transcurridos desde cada uno de estos dos acontecimientos y el presente año. Por último, se le pide que sume los cuatro números.
El adivinador simula pensar profundamente y "adivina" que, si el año en el que se realizó este acertijo fue el 2006, la suma dio 4012; si en un año posterior al 2006 debe añadir dos unidades al 4012 por cada año que transcurra.
¿Podés explicar por qué se cumple esto?

3. Un desafío con potencias

Expresá el número 17 como la suma de los cuadrados de tres números enteros, no necesariamente distintos. Hacé lo mismo con el número 36 y con el número 98.

UNIDAD 4

Funciones 1

En esta unidad vas a continuar con el estudio de las funciones que iniciaste en el CUADERNO DE ESTUDIO 2. En muchas de las actividades encontrarás problemas similares a los que resolviste en otras ocasiones; sin embargo, en esta oportunidad vas a analizarlos desde el punto de vista de las funciones. Este trabajo requerirá que elabores y utilices representaciones simbólicas, gráficas, en tablas y verbales.

A medida que avances en la tarea, el análisis y la comprensión de las relaciones y funciones serán de mayor nivel de complejidad que los que realizaste en años anteriores. En particular, vas a trabajar con relaciones que se pueden representar gráficamente mediante rectas, que por esta razón reciben el nombre de *funciones lineales*. El análisis de las ecuaciones de las rectas te permitirá relacionar este tema con la Geometría como una forma de introducirte en el estudio de la Geometría analítica.

TEMA 1: FÓRMULAS, TABLAS Y GRÁFICOS FUNCIONALES

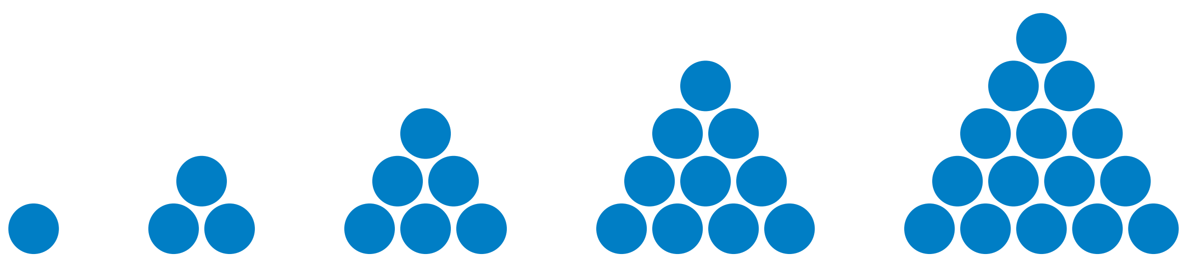
A

1. El lenguaje de las funciones

El objetivo de esta actividad es trabajar el significado de algunos términos matemáticos que están relacionados con el estudio de las funciones tales como: correspondencia, variables independientes y dependientes, dominio e imagen de una correspondencia y función.

*En la unidad **15** del CUADERNO DE ESTUDIO **2** ya trabajaste con estos conceptos. Podés revisar su significado en las actividades desarrolladas en dicha unidad o consultar algún libro de Matemática de la biblioteca de tu escuela.*

a) Dibujá en tu carpeta agrupaciones triangulares de puntos como las siguientes y agregá otra agrupación más que tenga 6 filas de puntos.



b) Para registrar las observaciones que se indican a continuación, copiá en tu carpeta una tabla como esta.

Número de puntos de la base	Número total de puntos
1	1
2	3
3	5
...	...
...	...
...	...

1. Observá el número de puntos que está en la fila de la base de cada una de las agrupaciones y, a partir de tus observaciones, completá la tabla con los datos de todos los triángulos.

Tal como surge de la observación de la tabla anterior, los números de la columna de la izquierda así como los de la derecha toman distintos valores: por esta razón se denominan variables.

2. Observá la tabla y respondé:

- Según la posición que los números ocupan en la tabla, ¿cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?
- En Matemática, ¿qué letras se usan para designar, en general, a esas variables?
- Pensá si la correspondencia que muestra tu tabla es una función y explicá por qué.

En el ejemplo **a** de las formas triangulares, al conjunto que tiene como elementos los números que representan los puntos de la base de cada triángulo: 1, 2, 3, 4, 5, 6 se lo denomina *dominio* de la función y se escribe *Dom (f)* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. También se lo llama conjunto *de partida* y se lo suele simbolizar con la letra *A*. El conjunto formado por los números que representan el total de puntos, se llama *imagen de la función*, se escribe

Im (f) = {1, 3, 6, 10, 15, 21} y se lo suele simbolizar con la letra *B*.

*Se llama **dominio** de una correspondencia al conjunto de valores que toma la variable **x**. Cuando un valor de **y** corresponde a un valor de **x**, se dice que ese valor **y** es una imagen de **x** y que **x** es su **preimagen**.*

*Una correspondencia es **función** cuando a cada elemento del **dominio** le corresponde una y sola una **imagen**.*

En general, para indicar una función numérica se utiliza la siguiente notación, $f : A \longrightarrow B$ que se lee "función de A sobre B, con dominio A e imagen B" o bien $y = f(x)$ que se lee "función de x con variable independiente x y variable dependiente y". En el lenguaje simbólico de las funciones es lo mismo escribir y que $f(x)$.

Las funciones más frecuentes en Matemática son aquellas en las que a cada número de un dominio le corresponde otro número del conjunto imagen. Por ejemplo, la función …"siguiente de" …, tiene dominio en el conjunto de los números naturales y a cada número natural le hace corresponder otro número del mismo conjunto que es su siguiente.

c) Conversá con tus compañeros y discutan cómo se resuelve el siguiente problema. Anoten en la carpeta todos los datos que necesiten para poder resolverlo.

Pensá en una familia de rectángulos que tengan la misma altura y ancho variable. Por ejemplo, la altura constante es de **3** unidades y el ancho **x** variable. La fórmula del área de esos rectángulos es Área = **3 x**.
Si el dominio de **x** fueran todos los números reales (racionales e irracionales) comprendidos entre 1,2 y 2,5.

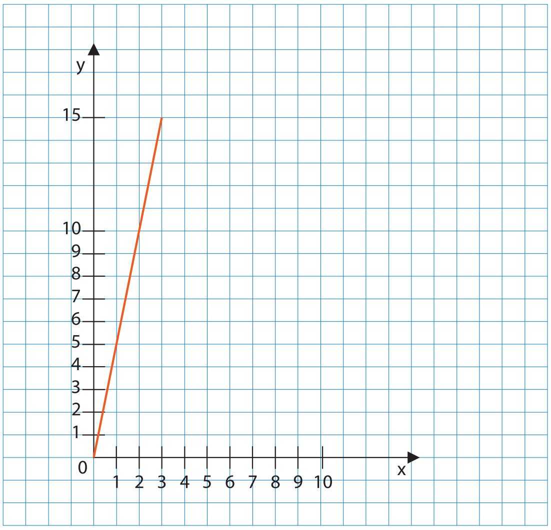
1. ¿Es posible construir una tabla con todos los posibles valores **x** y los respectivos valores del área; es decir **3 x**?
2. ¿Por qué?

2. Funciones lineales

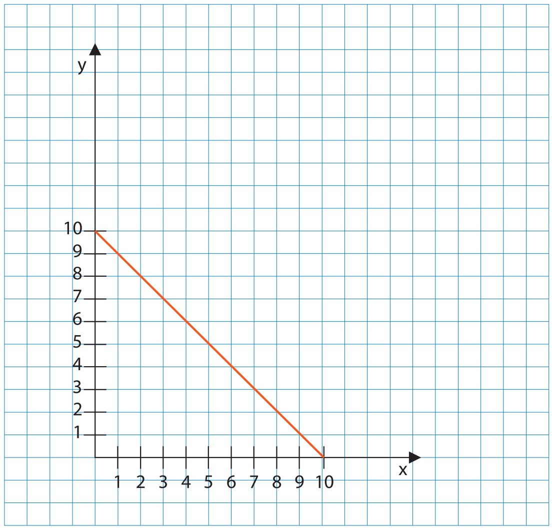
En esta actividad trabajaste con funciones mediante fórmulas y tablas. Pero tal como lo estudiaste en los Cuadernos de estudio **1** y **2**, las funciones también pueden indicarse mediante gráficos cartesianos. En la actividad que sigue, analizarás los gráficos de funciones que ya conocés.

a) Observá estos tres gráficos que corresponden a diferentes funciones.

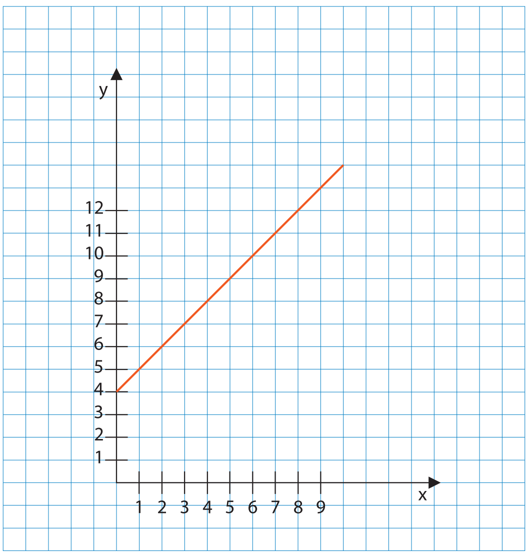
1. Perímetro de pentágonos regulares en función del lado.



2. Alto de rectángulos de perímetro 20 dm en función del ancho.



3. $y = x + 3$ es una función lineal no proporcional.



b) Copiá los gráficos en tu carpeta y para cada uno de ellos resolvé las siguientes consignas:

1. Seleccioná la fórmula que representa cada función y copiala debajo del gráfico.

y = 10 – x	**y = x + 1**	**y = x – 1**	**y = 4 x**	**y = 5 x**	**y = 1 – x**

2. Indicá cuál es el dominio y cuál es el conjunto imagen.
3. Analizá cada caso y decidí si se trata, o no, de una función de proporcionalidad directa. Justificá tus decisiones.

Como habrás observado, los gráficos de estas funciones están formados por puntos que pertenecen a una misma recta. Por esa razón, en el lenguaje matemático, estas funciones se llaman **funciones lineales**.

Las funciones cuyos puntos [x,y] están alineados sobre una recta se denominan ***funciones lineales****.*

Cuando en una función lineal el punto (0,0) pertenece a la recta que representa a la función en el gráfico, decimos que se trata de *funciones de proporcionalidad directa*. En los otros casos, cuando el punto (0,0) no pertenece a la recta, se trata de *funciones lineales no proporcionales*.

Si se analizan los ejemplos anteriores se puede ver que:
- $y = 5\,x$ es una función de proporcionalidad directa;
- $y = 10 - x$ es una función lineal no proporcional;
- $y = x + 1$ es una función lineal no proporcional.

c) Leé las siguientes características de las funciones lineales y fijate si se cumplen en los ejemplos mencionados anteriormente. En cada caso definí cuál es el dominio de la función.
- En las ecuaciones correspondientes a las funciones lineales, las variables **x** e **y** están elevadas a la primera potencia.
- Si el dominio de una función lineal es discontinuo (por ejemplo, los números enteros) la función no se representa por un trazo continuo, sino por puntos alineados.

Habrás podido observar que en esos tres ejemplos el exponente de las variables **x** e **y** no se escribe porque se trata de la primera potencia y por lo tanto las ecuaciones que corresponden a esas funciones son ecuaciones de **primer grado**. Si definiste el dominio de la función en el conjunto de los números enteros, ese dominio es discontinuo y en ese caso la función quedará representada por puntos. En cambio, si en el dominio se incluyen todos los números reales, racionales e irracionales, la representación es un trazo recto continuo.

A

3. Elementos de las funciones lineales

En esta actividad estudiarás otras características de las funciones lineales. Para realizarla te conviene trabajar sobre papel cuadriculado.

a) Graficá en un par de ejes cartesianos la función lineal $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

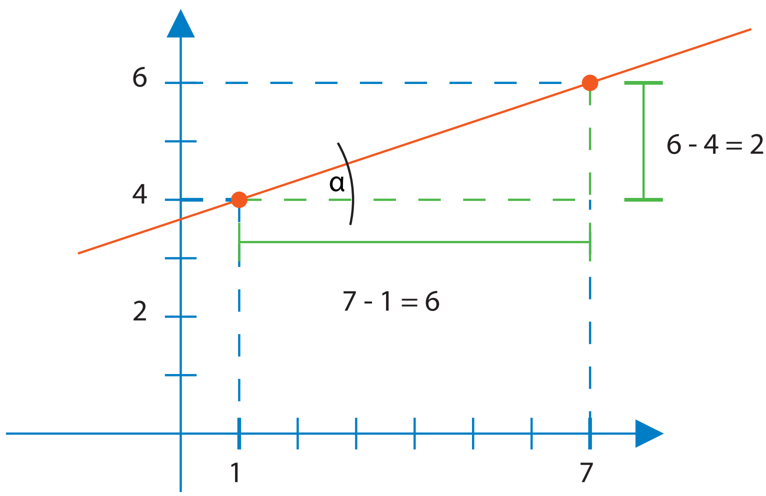
Por tratarse de una función lineal, es suficiente que determines el valor de **y** para dos valores cualesquiera de **x**, por ejemplo 1 y 7, y traces las respectivas coordenadas. Verás que los dos puntos que obtengas te permitirán trazar la recta que grafica la función.

b) A partir del trazado de la recta, ha quedado determinado un triángulo rectángulo de vértices (1,4) (7,6) y (7,4).

1. Observá tu gráfico y resolvé lo que se pide en cada consigna:

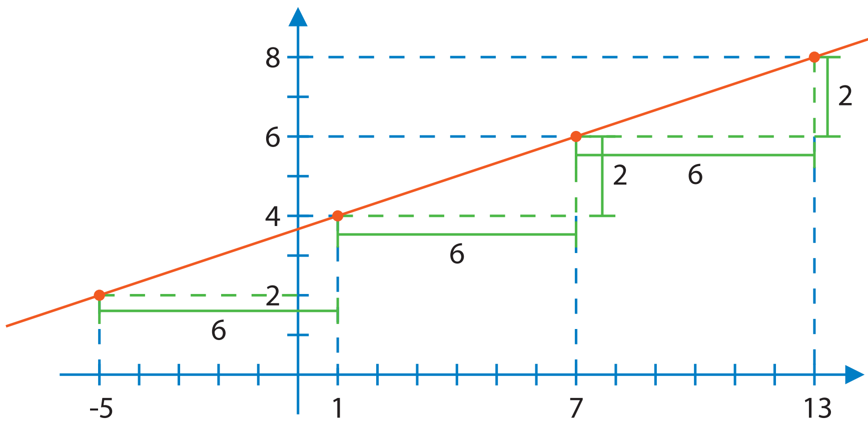
- marcá en el gráfico el ángulo que forma la recta con el eje **x**. Llamalo α.
- Fijate cuánto mide cada uno de los catetos y anotalo en el gráfico.

Si trabajaste bien, tu gráfico será como este:



La resta (diferencia) entre las ordenadas (6 - 4) se representa por el símbolo Δ y (Δ es la letra griega *delta* mayúscula). La resta (diferencia) entre las abscisas (7 – 1) se representa por el símbolo Δx.

c) Observá el siguiente gráfico. Podrás comprobar que entre dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, se puede trazar un triángulo rectángulo.



Tal como surge del gráfico, la razón de los catetos de cada triángulo tiene siempre el mismo valor, en este caso $\frac{1}{3}$. Esa razón se llama *pendiente de la recta* (m).

En símbolos: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde m es el número que indica la razón entre las dos diferencias Δy y Δx.

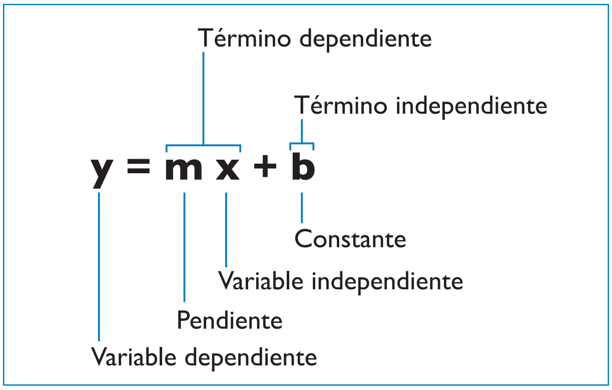
Observá que para un mismo valor de Δx la pendiente m depende directamente de Δy. Si Δy es un número pequeño, la recta estará poco inclinada con relación al eje x, en cambio, si Δy es mayor, también es mayor m y la recta tendrá mayor inclinación.

d) Calculá el valor que toma **y** en la ecuación $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ \mathbf{x} + \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$ cuando la variable independiente **x** vale 0. Es decir, calculá qué valor tiene la ordenada en el punto de abscisa 0.

Tené en cuenta que a una función lineal le corresponde en símbolos la ecuación de una recta, por ejemplo, $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ \mathbf{x} + \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$ · Cuando la variable independiente **x** vale 0, la ordenada tiene el valor del término independiente, es decir, del término que no tiene **x**, en este ejemplo es $\frac{11}{3}$ y el punto de coordenadas $(0,\frac{11}{3})$ pertenece a la gráfica de la función. Para el punto (0,y) en el que la variable independiente **x** tiene valor 0, se dice que **y** es la ordenada al origen.

*Se llama **ordenada al origen** al valor que toma la función para **x** = 0.*
*En la ecuación de la recta, la ordenada al origen es el **término independiente**.*

e) Copiá en tu carpeta el siguiente esquema con los nombres de los elementos de las funciones lineales. Te resultará de utilidad para ubicar los nombres de esos elementos en la ecuación general de la recta.



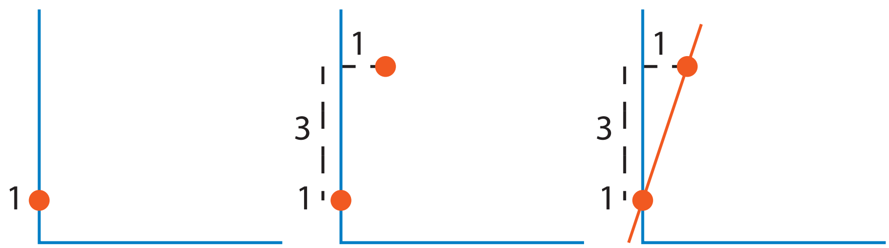
La ecuación general de la recta es $y = m\,x + b$ donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen.

Por ejemplo, en la ecuación de la recta $y = 2\,x + 3$, la variable dependiente es y, la variable independiente es x, el término independiente es *3* y la pendiente es *2*.

Ya el matemático griego Euclides (siglo IV a.C.) estableció que dos puntos de un plano determinan una única recta a la que pertenecen. Cuando se conoce la ecuación de una recta, para graficarla no es necesario construir una tabla de valores, sino que es suficiente con determinar dos puntos de ella, o bien un punto y la pendiente, es decir, el ángulo que forma la recta con la dirección horizontal.

Por ejemplo, si se conoce un punto como la ordenada al origen y la pendiente de la recta, esos dos elementos son suficientes para graficarla.

De este modo, para graficar la recta $y = 3\,x + 1$, en la que la pendiente es 3, y la ordenada al origen es 1, conviene marcar primero 1 unidad hacia arriba en el sentido positivo del eje y porque $b = 1$ es positiva. Ese punto de coordenadas (0,1) pertenece a la recta. A partir de ese punto se marcan 3 unidades hacia arriba y una hacia la derecha porque $m = 3$ es el cociente entre $\Delta y = 3$ y $\Delta x = 1$.



f) Representá la recta $y = -\frac{1}{2}x - 2$. Luego respondé.

1. ¿En qué sentido sobre el eje **y** marcaste la ordenada al origen? ¿Por qué?
2. ¿Cómo usaste el valor de la pendiente para determinar las coordenadas de otro punto de la recta?

Si una función lineal tiene pendiente positiva, la función es ***creciente****, vale decir que si* $\mathbf{x_2}$ *toma un valor mayor que* $\mathbf{x_1}$*, entonces* $\mathbf{y_2}$ *es mayor que* $\mathbf{y_1}$*.*
Si una función lineal tiene pendiente negativa, la función es ***decreciente****, vale decir que si* $\mathbf{x_2}$ *toma un valor mayor que* $\mathbf{x_1}$*, entonces* $\mathbf{y_2}$ *es menor que* $\mathbf{y_1}$*.*

A

4. Posiciones relativas de dos rectas

En la actividad anterior aprendiste a representar una función lineal a partir del conocimiento de su ecuación. Ahora verás cómo identificar, mediante el análisis de las pendientes, pares de rectas paralelas y pares de rectas perpendiculares.

a) Representá en un mismo gráfico las rectas $\mathbf{y_1 = 2\,x + 2}$ e $\mathbf{y_2 = 2\,x + 3{,}5}$.
¿Qué elementos de ambas ecuaciones indican que las dos rectas son paralelas?

b) Representá en un mismo gráfico las rectas $\mathbf{y_3 = -\,x - 2}$ e $\mathbf{y_4 = -\,3\,x - 2}$.
¿Qué elementos de ambas ecuaciones indican que las dos rectas son perpendiculares?

c) Copiá las siguientes funciones lineales (todas ellas con dominio en los números racionales).

I. $f_1(x) = \frac{2}{3}x - 2;$

II. $f_2(x) = -\frac{4}{3}x - 3;$

III. $f_3(x) = 6x + 2;$

IV. $f_4(x) = 6x.$

1. Indicá la ordenada al origen y la pendiente de cada una de ellas.
2. Observando las ecuaciones, ¿podés anticipar qué diferencia habrá en la representación de las funciones f_1 y f_2?
3. ¿Y en las de las funciones f_3 y f_4?

d) Escribí las ecuaciones de dos rectas que sean perpendiculares y tengan distintas ordenadas al origen.

e) Escribí las ecuaciones de dos rectas paralelas que sean decrecientes.

f) Antes de leer el texto de la actividad **5**, reunite con tus compañeros y escriban un breve comentario que exprese lo que aprendieron sobre funciones lineales y sus ecuaciones.

Siempre que puedas, compartí la tarea que te propone este Cuaderno con tus compañeros. Tené en cuenta que cada uno aportará a la discusión algo diferente según lo que haya entendido, y el intercambio entre ustedes y la reflexión compartida enriquecerán la comprensión de todos.

5. Actividades para seguir aprendiendo

Las funciones lineales cumplen un importante papel en el análisis cuantitativo de los problemas económicos. El siguiente texto es un ejemplo.

Cuando una empresa produce cualquier bien o presta un servicio, tiene que utilizar una cantidad de productos que posean valor económico. Esto le genera costos, que en relación con la producción total se distinguen como *costos fijos* y *costos variables*. Los primeros, como lo indica su nombre, son independientes de las cantidades de un artículo que se produzca o de un servicio que se preste, por ejemplo, el alquiler del local, determinados impuestos, etcétera. En cambio, los costos variables dependen de la cantidad que se produzca de ese artículo o del servicio que se preste, por ejemplo: costos de los materiales, de mano de obra productiva, etcétera. El costo total es la suma de ambos; es decir **costo total = costos variables + costos fijos**.

Se trata de una función lineal de la forma **f(x) = a x + b**, en la que el costo variable por **x** unidades de artículos que se producen es proporcional al número de artículos producidos a un costo **a** por cada uno. En cambio, los costos fijos de producción son constantes, se pueden indicar con un número **b** en pesos. Podemos observar que si se confeccionan 1, 5 u 8 artículos se mantiene el mismo valor de costo fijo, por eso decimos que **b** es una función constante.

a) Lee la siguiente situación y teniendo en cuenta lo visto hasta ahora, resolvé las consignas que se proponen a continuación.

Si el costo variable de un artículo fuera de \$0,80, la función de costo variable se expresaría $C_V(\mathbf{x}) = 0{,}80\ x$. Si el costo fijo fuera, por ejemplo, de \$ 6, la función de costo fijo se expresaría $C_F(x) = 6$. Como el costo total para producir x artículos es la suma del costo variable y el costo fijo resulta que $C_T(x) = 0{,}80\ x + 6$ tiene la forma de una función lineal $C_T(x) = ax + b$.

1. ¿Cuál es la ordenada al origen?
2. ¿Cuál es la pendiente de la recta?
3. ¿Qué significado tiene cada uno de esos números?
4. ¿Cuál es el dominio de la función costo? ¿Y el conjunto imagen?
5. Indicá el costo total para producir 20, 50 y 100 artículos.
6. Graficá la función.

Para finalizar

Las actividades que realizaste te habrán permitido conocer nuevos aspectos de las funciones avanzando sobre lo que aprendiste el año anterior. En particular conociste la existencia de funciones lineales, sus características y la forma de representarlas.

El trabajo sobre la representación gráfica de las funciones lineales te permitió relacionar este tema con la Geometría al estudiar las ecuaciones de las rectas y lo que ellas informan.

El concepto de función va más allá de la Matemática por sus importantes aplicaciones en las demás ciencias. En las próximas unidades tendrás oportunidad de volver sobre este tema.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Las agujas del reloj

Un reloj atrasa 15 minutos cada 2 horas. Cuando marca las 5:15 el minutero queda fijo, pero el reloj sigue funcionando. Al cabo de 3 h 20 m de tiempo real, ¿cuánto medirá el ángulo que debe recorrer la aguja horaria para señalar las 12:00?

2. Dos diagonales

Dibujá un hexágono regular y trazá dos diagonales que tengan un mismo extremo y los otros dos estén en vértices consecutivos. ¿Qué ángulo forman estas diagonales? Observá el resultado e inventá un problema parecido y proponéselo a tus compañeros.

3. Los hermanos

Entre los hijos de una familia, cada chico tiene tantas hermanas como hermanos, pero cada chica tiene solamente la mitad de hermanas que de hermanos ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la familia?

3. Los unos y los otros

Cuatro personas tienen distintos animales y vehículos. Sabiendo que:

1. Aníbal tiene un perro.
2. El dueño del gato tiene una bicicleta.
3. El dueño del loro vive a la derecha de Pablo.
4. Pablo vive a la derecha de Aníbal.
5. Matías tiene una moto.
6. Luis vive a la izquierda del dueño del canario.
7. El dueño de la moto vive a la derecha del dueño del auto.

- ¿Quién tiene la camioneta?

Unidad 5 Estadística

Cuando se escuchan noticias en la radio y en la televisión, se leen los periódicos o alguna revista, suele encontrarse gran cantidad de datos numéricos. Estos datos se pueden referir al desempleo, a los deportes, a la producción industrial, a la esperanza de vida o a otros temas de interés para los ciudadanos y para los que gobiernan y toman decisiones basadas en la información que poseen. Esos números se denominan *cifras estadísticas*. Los procedimientos para recoger, clasificar, resumir, analizar datos y elaborar conclusiones a partir de esa información son estudiados por la Estadística. Algunos problemas que afectan a gran número de personas (como el control de las enfermedades o el uso racional del agua potable) se pueden estudiar con la ayuda de estos procesos matemáticos cuyos resultados se muestran mediante distintas expresiones numéricas o gráficas.

La información que permite estudiar cómo se comporta alguna característica de cierta población se reúne en tablas o series estadísticas. En particular, las formas de representación que analizarás en esta unidad son útiles cuando se maneja gran cantidad de información a partir de la cual se pueden realizar deducciones o inferencias que resultan confiables.

A

1. Para saber lo que sabés

Antes de comenzar con el desarrollo de las actividades de esta unidad es conveniente que revises el significado de algunos términos que se usan en Estadística y que aprendiste en años anteriores.

Términos estadísticos

- **Población:** es el conjunto de individuos (personas o cosas) sobre los que se realiza una estadística.
- **Muestra:** es un conjunto de individuos que han sido seleccionados de una población y que la representan fielmente; el modo de elegir la muestra determina si será representativa o no del conjunto al que pertenece.
- **Variable estadística:** es una característica de la población que se quiere estudiar y que puede variar por algún motivo, es decir, que puede tener distintos valores.
- **Frecuencia absoluta:** es el número de veces que se presenta cada valor de la variable estadística.
- **Frecuencia relativa:** es la frecuencia expresada como un porcentaje con respecto al total de observaciones.

Valores centrales o medidas de centralidad

- **Media o promedio:** es igual a la suma de todos los valores observados dividida por el número de observaciones realizadas.
- **Moda:** es el valor de la variable que tiene mayor frecuencia.
- **Mediana:** es el valor central que separa a las observaciones, previamente ordenadas en dos grupos de igual cantidad de datos cada uno.

*Si tenés alguna duda respecto del significado y uso de alguno de estos términos, consultá con tu docente acerca de la conveniencia de volver a revisar la unidad **5** del* CUADERNO DE ESTUDIO ***1*** *o de consultar alguno de los libros de la biblioteca de tu escuela.*

A

2. Histogramas

En esta actividad vas a confeccionar un gráfico estadístico formado por rectángulos. Este tipo de gráficos se suele utilizar cuando se quiere presentar datos que han sido organizados agrupándolos por intervalos.

En una escuela urbana, el profesor de Educación Física registró, en centímetros, la talla de sus 40 alumnos e hizo las siguientes anotaciones:

165	**160**	**163**	**175**	**174**	**160**	**165**	**154**	**168**	**165**
168	**168**	**158**	**162**	**160**	**161**	**162**	**166**	**163**	**159**
178	**169**	**178**	**169**	**171**	**170**	**168**	**150**	**167**	**168**
149	**165**	**168**	**156**	**175**	**168**	**173**	**172**	**163**	**164**

Como quería mostrar los resultados en un gráfico y las alturas registradas eran muy diversas, consideró conveniente agrupar primero los datos en intervalos de 5 centímetros de amplitud, aunque podría haber tomado intervalos más pequeños o más grandes.

a) Podés organizarte para trabajar con un compañero de la siguiente manera:

1. Copien en la carpeta una disposición de los intervalos como la siguiente:
entre 148,5 y 153,5: . . . . .Total: . . . .
entre 153,5 y 158,5: . . . . Total: . . . .
entre 158,2 y 163,5: . . . . .Total: . . . .
entre 163,3 y 168,5: . . . . .Total: . . . .
entre 168,5 y 173,5: . . . . .Total: . . . .
entre 173,5 y 178,5: . . . . .Total: . . . .

2. Mientras uno de ustedes va leyendo las alturas registradas, el otro hará una marca en el intervalo al que corresponde. Tengan en cuenta que si agrupan las marcas que van realizando en manojos de 5 después les resultará más fácil contar cuántas marcas corresponden a cada intervalo.
3. Luego de contarlas, escriban las frecuencias totales, es decir, cuántas alturas fueron registradas para cada intervalo.
4. A partir de esta información ya organizada, van a realizar el gráfico.

*Un **histograma** es un gráfico de barras que, para cada intervalo de la variable en estudio, muestra un rectángulo con base en una línea con los valores considerados y altura proporcional a la frecuencia.*

- Construyan, en papel cuadriculado, un histograma de seis rectángulos, uno por cada intervalo. En el **eje x** escriban los límites de los intervalos y en el **eje y** las frecuencias correspondientes. Peguen el histograma en sus carpetas.

b) En la unidad **5** del CUADERNO DE ESTUDIO **1** aprendiste a calcular los valores centrales de una serie de datos estadísticos. Respondé en tu carpeta cuál es la moda, la mediana y la media o promedio de los datos registrados por el profesor de Educación Física.

A 3. Estudio de la dispersión: varianza

Luego de revisar las medidas de centralidad, en esta actividad estudiarás cómo se puede medir la dispersión de los datos cuando en una estadística se encuentran muy alejados del promedio.

Tal como estudiaste en años anteriores, los *valores centrales* o *parámetros* (como la *moda*, la *mediana* y la *media o promedio*) resumen en un sólo número la serie de datos que forman parte de una distribución. Se considera que su utilidad es mayor cuanto mejor representan a todo el conjunto.

El *promedio* o *media aritmética* es el valor central más utilizado en los trabajos de Estadística. Esto se debe a que su significado puede interpretarse inmediatamente y, por otro lado, resulta muy sencillo calcularlo. Sin embargo, no siempre es el valor más representativo de los datos considerados. En algunos casos, el valor del promedio puede estar fuertemente influido por los valores extremos de la serie que se está estudiando. Esto ocurre cuando esos valores extremos están muy alejados del promedio.

Los siguientes ejemplos te permitirán comprender la relación entre los valores centrales y la utilidad que poseen.

En una familia donde la abuela tiene 78 años, la madre 40, el padre 45, la tía 43 y los hijos 5, 8 y 11; los extremos (que son 5 y 78 años) están muy alejados del promedio, que es de 33 años. En este caso el promedio de edades de los miembros de esa familia carece de representatividad.

Otro ejemplo. El alumno A obtiene las siguientes notas: 7; 8; 7; 9; 8; 9; 9; 9; 8, 9; mientras que las del alumno B son: 3, 8, 9, 1, 6, 7, 1, 8, 8. La media o promedio del alumno A es 8,30 y la del alumno B, 5,1. En el primer caso, la media proporciona buena información acerca del rendimiento escolar de A porque la mayoría de las notas están cercanas al promedio general; es decir, que los valores observados están muy concentrados alrededor del promedio, por lo tanto, es muy representativo de la situación de este alumno. En cambio, el promedio del alumno B no resulta representativo ya que el conjunto de notas que se busca representar es disperso.

Para que un valor central sea representativo de una población debe ser lo más próximo posible a las características de la población total que se está investigando.

Este es otro ejemplo. Si las estaturas, en metros, de los miembros de una familia son: 1,20; 1,32; 1,48; 1,65; 1,69; 1,85; el promedio es 1,53 pero no resulta muy representativo porque los valores encontrados para las estaturas distan mucho de ese promedio. Por lo tanto, no tiene sentido presentar el dato "promedio de alturas", ya que no brinda buena información sobre esta familia. En cambio, como viste en el caso de las alturas de los alumnos de una sección escolar, conocer el promedio de alturas de los chicos resulta de utilidad.

Para mejorar la representatividad de un parámetro, en toda distribución estadística, se debe considerar el promedio y la ***dispersión*** *de los datos con respecto a él. Esa dispersión o desviación de los datos es una* ***medida descriptiva*** *que indica la mayor o menor concentración de los datos con relación a un parámetro de centralización.*

a) Leé la siguiente tabla en la que se indican las temperaturas, en grados centígrados, tomadas en dos ciudades, C_1 y C_2, el día 15 de cada mes de un mismo año, a las 12 del mediodía.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
C_1	26	25	20	15	14	11	11	14	15	14	19	24
C_2	37	38	24	14	10	6	-2	6	12	13	20	28

1. Observá los datos de la tabla y calculá, para cada una de las ciudades, la diferencia entre el mayor y el menor valor. Esa diferencia se llama *rango* o *recorrido* de una distribución.
2. ¿En cuál de las dos ciudades el rango de los valores registrados es más amplio?
3. Calculá la temperatura media en las dos ciudades.
4. ¿Te parece que en ambas la media o promedio es igualmente representativo? Justificá tu respuesta.

*El **rango** o **recorrido** de una distribución de datos es la diferencia entre el mayor y el menor valor. Si el rango de una distribución es grande indica que existen valores muy alejados de la media.*

Habrás observado que si bien los dos promedios que obtuviste son parecidos (17,3° C para C_1 y 17,2° C para C_2) a lo largo del año las temperaturas son más moderadas en C_1 que en C_2, en la que son notablemente más extremas. Como el promedio no pone en evidencia esas diferencias respecto de la media, será necesario buscar un procedimiento más adecuado que permita conocer esa información.

b) Construí en tu carpeta una tabla como la siguiente. Colocá en cada casilla la diferencia entre el valor registrado y el promedio, como se muestra en los ejemplos:

	C_1	C_2
Enero	26 -17,3 = 8,7	37 - 17,2 = 19,8
Febrero		
Marzo		
Abril		
Mayo		
Junio		
Julio	11-17,3= -6,3	-2-17,2= -19,2
Agosto		
Septiembre		
Octubre		
Noviembre		
Diciembre		

La diferencia entre el valor registrado y el promedio te permitió conocer a qué distancia del promedio está cada uno de los datos.

*En estadística, se llama **dispersión** a la distancia entre los datos y el promedio.*

Como habrás podido observar, algunas diferencias tienen signo positivo y otras, negativo. Podría suceder que las diferencias de distinto signo se compensaran y entonces la suma de las desviaciones resultara nula. Para evitar eso, se considera el cuadrado de cada una de las desviaciones ya que los cuadrados son siempre positivos.

Por ejemplo: $(37 - 17{,}2)^2 = 19{,}8^2 = 392{,}04$.

$(-2 - 17{,}2)^2 = (-19{,}2)^2 = 368{,}64$.

En estadística se usa el símbolo $\bar{x}$ para representar a la media o promedio. En símbolos, el procedimiento anterior se puede entonces generalizar escribiendo:

- $(x_i - \bar{x})$ que simboliza la diferencia entre un valor y el promedio; el subíndice i representa al número que indica cuál es la posición en la tabla del valor x que se está considerando.
- $(x_i - \bar{x})^2$ es el cuadrado de la diferencia entre el valor considerado y el promedio.
- El símbolo Σ (que es la letra griega sigma mayúscula) se usa para representar la suma de *n* términos que se puede calcular mediante una fórmula.

Para estimar la dispersión de un conjunto de datos con relación al promedio, en estadística se define la varianza.

Se llama ***varianza*** *a la suma de los cuadrados de todas las diferencias $(x_i - \bar{x})$ desde x_1 hasta x_n dividida por el número de términos.*

Se simboliza: ***Varianza*** $= \dfrac{\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

Observá que en la expresión simbólica anterior el signo Σ, tiene un subíndice y un exponente que indican los sucesivos valores que toma el subíndice **i** de **x** en cada uno de los términos de la sumatoria.

c) Para calcular la varianza en el caso de las temperaturas de las ciudades C_1 y C_2 con las que trabajaron en la consigna **b** sigan los siguientes pasos:

1. Calculen para cada ciudad el cuadrado de las diferencias que obtuvieron en la consigna **b** y completen una tabla como la siguiente:

		C_1		C_2	
		$(x_i - x)$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - x)$	$(x_i - \bar{x})^2$
Enero	**1**	8,7	75,69	19,8	392,04
Febrero	**2**				
Marzo	**3**				
Abril	**4**				
Mayo	**5**				
Junio	**6**				
Julio	**7**				
Agosto	**8**				
Septiembre	**9**				
Octubre	**10**				
Noviembre	**11**				
Diciembre	**12**				
		$\sum_1^{12} = 313{,}83$		$\sum_1^{12} = 1721{,}68$	
		$\dfrac{\sum_1^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = 26{,}15$		$\dfrac{\sum_1^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = 143{,}47$	

2. Respondan entre todos:
- ¿Cuál es el valor de **n** en la fórmula de la varianza?
- ¿Qué indica el subíndice **i**?
- ¿Cuál de las dos ciudades presenta mayor varianza? ¿Por qué?

4. Desviación típica

En esta actividad trabajarás sobre el uso de estas medidas de dispersión y sus símbolos a partir de otro problema.

a) Trabajá con la siguiente situación problemática, siguiendo las indicaciones de las consignas.

Para efectuar un control de calidad de los paquetes de arroz que envasa una empresa, se tomaron como muestra 200 paquetes. En la tabla siguiente se muestran los pesos encontrados y la tabla de frecuencias.

Peso en gramos (x_i)	Frecuencia (f_i)
498	8
499	60
500	102
501	24
502	6
Total	200

Para calcular la varianza estadística como medida de la dispersión de esta distribución, es necesario calcular primero el promedio de los pesos registrados y las distancias de cada valor a ese promedio.

1. Realizá en tu carpeta una tabla como la siguiente para volcar los resultados que obtengas siguiendo estas indicaciones:

Peso en gramos	Frecuencia	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2\ f_i$
498	8	498 – 499,8 = - 1,8	$-1{,}8^2 = 3{,}24$	3,24 . 8 = 25,92
499	60			
500	102			
501	24			
502	6			
Total	200			

2. Usá la calculadora para realizar las siguientes operaciones:

- Determiná el promedio $\bar{x}$ de los pesos de los 200 paquetes.
- Calculá la distancia de cada valor x_i al promedio.
- Elevá al cuadrado esas diferencias.
- Multiplicá esos cuadrados por las frecuencias respectivas.
- Sumá los valores de la columna $(x_i - \bar{x})^2\ f_i$ y habrás obtenido la varianza de esa distribución.

Si se calcula la raíz cuadrada de la varianza de una distribución de datos, se obtiene lo que en Estadística se llama **desviación típica**.

La desviación típica de una distribución se representa con la letra griega σ (es la letra griega sigma minúscula) e indica la distancia entre los datos de una distribución y el valor del promedio.

En símbolos: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - x)^2}{n}}$.

La fórmula anterior permite calcular la desviación típica. Su importancia práctica es que cuanto mayor es la desviación típica, más dispersos están los datos con respecto al promedio.

b) A continuación trabajarás con un ejemplo numérico para que te quede más clara la importancia del uso de la desviación típica.

En las tablas siguientes se dan las notas obtenidas por dos grupos de alumnos en un examen.

Grupo A

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	1	0	0	4	10	8	5	6	3	3

Grupo B

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	1	1	2	4	5	5	5	4	3	2

1. Calculá la media de las notas para cada grupo, redondeando los décimos.
2. ¿En cuál de los dos grupos te parece que será mayor la desviación típica?
3. Para comprobar si tu estimación fue correcta calculá la desviación típica de la distribución de datos de cada grupo siguiendo los pasos indicados en el punto **1** de la actividad **4**. Compará tu trabajo con el de tus compañeros.

Habrás podido comprobar que cuanto mayor es la desviación típica, más dispersos están los datos con relación a la media o promedio.

c) Revisá el desarrollo completo de esta unidad y confeccioná con tus compañeros un afiche “para recordar” con el significado de los términos estadísticos que aprendiste: histograma, media o promedio, rango o recorrido, varianza, desviación típica de una distribución. Consulten con el docente en qué libros de la biblioteca pueden encontrar otros problemas interesantes para seguir aprendiendo sobre este tema.

Para finalizar

En esta unidad aplicaste muchos de los conocimientos de Estadística que adquiriste en años anteriores. Revisaste la noción de población o universo sobre el que se realiza una estadística y la conveniencia de trabajar sobre una muestra representativa de toda la población. Organizaste datos en intervalos para construir histogramas que tienen la ventaja de que permiten visualizar una presentación de la totalidad de los datos y sus respectivas frecuencias.

Al revisar las características de los valores centrales o medidas de centralización, viste que si bien el promedio es el más usado, no siempre es representativo de la muestra en estudio. Cuando los valores observados se encuentran muy alejados del promedio, es necesario completar la información con las medidas de dispersión: el rango y la desviación típica son los más útiles.

También aprendiste a usar algunas letras griegas como nuevos símbolos que en Matemática representan elementos característicos de la Estadística. Estos conocimientos te resultarán de utilidad al aplicarlos al estudio de otras áreas de conocimiento como las Ciencias Sociales y las Ciencias Naturales.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Adivina adivinador

Pedile a un amigo que escriba un número de dos cifras sin que vos lo veas, que lo multiplique por 10 y del resultado reste un múltiplo de 9 menor o igual que 81. Pedile que te diga el resultado y vos adivinarás el número que escribió.
Si el resultado es de tres cifras, formá un número con las dos primeras y sumále la cifra de las unidades. En cambio, si el resultado es de dos cifras sumálas entre sí. En ambos casos obtendrás el número secreto. El desafío consiste en que encuentres por qué este procedimiento no puede fallar.

2. Una rollo de tela

Si mido un rollo de tela de 2 metros en 2 metros me sobra uno, si mido de 3 en 3 me sobran dos metros, si mido de 4 en 4 me sobran tres, si lo hago de 5 en 5 me sobran cuatro y de 6 en 6 me sobran cinco. Sabiendo que el rollo tiene menos de 100 metros, ¿cuál es su longitud?

3. Otro sudoku

En la unidad **15** del CUADERNO DE ESTUDIOS **1** te iniciaste en este juego, es muy simple: hay una cuadrícula de 81 cuadrados, organizados en 9 cuadros de 3 × 3, vale decir de 9 cuadrados cada uno. Algunos de estos cuadrados, casi siempre alrededor de 30, ya vienen con una cifra escrita.
Este rompecabezas numérico ideado por Howard Games se publicó por primera vez en Nueva York en 1979 con el nombre de ***Number place*** (el lugar de los números). En 1984 la idea fue introducida en un periódico japonés con el nombre de *Suji wa dokushin ni kagiru* ("los números deben estar solos"), y posteriormente se abrevió esta nomenclatura al nombre por el que hoy se lo conoce en casi todo el mundo: sudoku (números solos).
El objetivo del juego es colocar en los cuadrados vacíos los números que faltan de modo que en cada cuadro de 3 × 3 estén todos los números del 1 al 9, con la condición de que cada número aparezca solamente una vez en cada fila horizontal y en cada columna vertical del cuadro completo.
Resolvé el que aparece a continuación:

6				4	3	1		
1		9				2		
3	5		1	8				
	6				7		3	
				5				
	3		4				9	
				9	6		1	8
		1				7		2
		6	8	2				9

4. Otro sudoku

Por si te quedaron ganas de resolver otro sudoku.

				4	7	3		2
						9		
		4	6	5				
	2	5			3		1	
	3		5		6		9	
	7		8			6	3	
				6	4	1		
		1						
9		2	1	8				

UNIDAD 6 Trigonometría

En todas las épocas, la gente necesitó resolver problemas prácticos de medición muy diversos: delimitar terrenos, realizar construcciones, medir distancias inaccesibles, lograr la mayor exactitud en la determinación de la posición y el rumbo en la navegación, avanzar en el conocimiento de la Astronomía. Para resolver algunos de estos problemas, en la antigüedad surgió una rama de la Matemática que intentó dar respuesta a estas cuestiones, la Trigonometría, que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Justamente, la palabra *trigonometría* es una síntesis de *tri* (tres), *gonos* (ángulos) y *métrica* (medida).

En esta unidad, entonces, vas aprender Trigonometría y con ella, cosas nuevas sobre los triángulos y los ángulos; pero sobre todo, vas a aprender cómo aplicarla a problemas reales, tales como el cálculo indirecto de distancias a las que no se puede acceder directamente, por ejemplo, la medición de la altura de árboles o edificios que no se puede realizar usando una cinta métrica.

TEMA 1: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En la primera parte de esta unidad trabajarás con las relaciones métricas que se establecen entre los lados de los triángulos rectángulos.

A

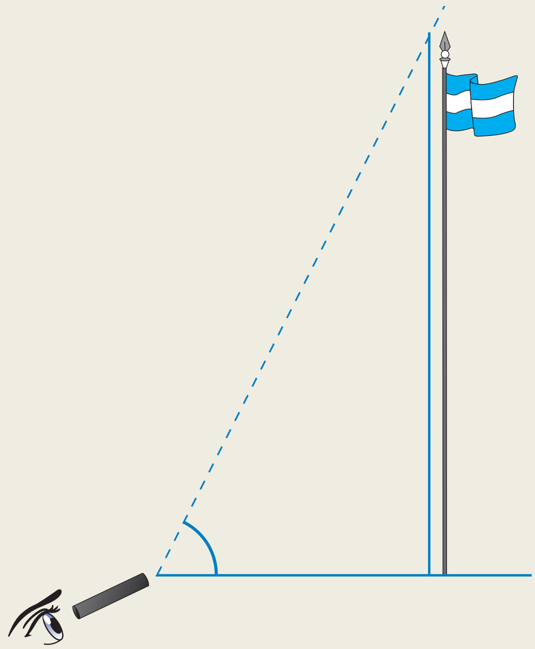
1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

Vas a comenzar a conocer las herramientas que nos da la Trigonometría, para poder resolver problemas como el que se presenta a continuación.

En esta actividad utilizarás elementos de geometría y una calculadora.

a) Leé la siguiente situación.

Martín es alumno de una escuela rural. Un día llega un inspector de las obras de ampliación de la escuela para verificar, entre otras cosas, si el mástil tiene la altura que figura en los planos. Martín se pregunta cómo va a hacer el inspector para medir el mástil que es bastante alto. Sorprendido, observa que el inspector saca un instrumento de medición, se ubica a 2 metros del pie del mástil y mira a través del instrumento al punto más alto del mástil. Dice que así mide el **ángulo de elevación** que se forma con la línea visual que se dirige al objeto y la **línea horizontal** que está representada por los dos metros del piso que lo separan del mástil. Martín se pregunta cómo es posible que conociendo un ángulo y un lado de un triángulo rectángulo se pueda medir una altura.



Cuando hayas completado el desarrollo de las actividades de esta unidad seguramente estarás en condiciones de responder a la pregunta que se hace Martín.

b) Dibujá un triángulo BAC, rectángulo en A, y el ángulo β de 60°. Medí con mucho cuidado la longitud de los tres lados: **a**, la hipotenusa, **b**, el cateto opuesto al β y **c**, el cateto opuesto a γ.

1. Hallá las razones $\frac{b}{a}$; $\frac{c}{a}$ y $\frac{b}{c}$

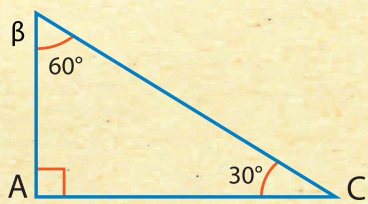
2. Trazá una recta paralela al lado AC de modo que corte a las semirrectas BA y BC en los puntos A' y C'. El triángulo BA'C', ¿es semejante al BAC? ¿Por qué? Calculá las razones entre los pares de lados de BA'C' como hiciste para el otro triángulo BAC.

3. Dibujá otro triángulo BA"C" repitiendo el proceso indicado en el punto 2.

4. Compará esas razones con las anteriores y escribí tu conclusión.

Las razones que hallaste son las razones trigonométricas del ángulo agudo del triángulo rectángulo BAC.

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo se definen en función de los lados del triángulo rectángulo al que pertenece y son independientes del tamaño del triángulo.



*Se llama **seno** de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la **razón** entre el **cateto opuesto** al ángulo y la **hipotenusa**.* **sen** $\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$.

*Se llama **coseno** de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la **razón** entre el **cateto adyacente** al ángulo y la hipotenusa.* **cos** $\beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$.

*Se llama **tangente** de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la **razón** entre el **cateto opuesto** al ángulo y el **cateto adyacente**.* **tg** $\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}$.

Habrás observado que si se trazan rectas paralelas a un lado de un triángulo, por ejemplo, una paralela al lado **b**, y se aumenta el tamaño de los otros lados trazando las semirrectas que los incluyen, se obtienen triángulos semejantes al anterior y, por lo tanto, las razones trigonométricas del ángulo β siguen siendo las mismas. Este hecho muestra que las razones trigonométricas dependen solo de la amplitud de los ángulos y no de la longitud de los lados del triángulo.

A

2. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

Además de las razones entre los lados de un triángulo rectángulo que observaste en la actividad anterior, existen otras tres razones que son las inversas de estas. Es conveniente que las conozcas aunque la popularidad de las calculadoras ha hecho que hoy solo tengan un valor histórico.

a) Escribí en tu carpeta las razones mencionadas en la actividad anterior. Al lado de cada una escribí la razón inversa.
Por ejemplo, la razón inversa de $\frac{b}{a}$ (sen $\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$) es $\frac{a}{b}$

Cada una de las nuevas razones tiene su nombre:
$\frac{a}{b}$ es la cosecante de β (cosec β); $\frac{a}{c}$ es la secante de β (sec β) y $\frac{a}{b}$ es la cotangente de β (cotg β).

b) De acuerdo con lo que leíste en el texto anterior, definí con tus palabras estas nuevas razones trigonométricas. ¿Qué relación existe entre los pares de razones consideradas?

Este recuadro sintetiza la escritura simbólica de las razones trigonométricas inversas.
$\text{cosec}\ \beta = \frac{1}{\text{sen}\beta}$; $\sec \beta = \frac{1}{\cos\beta}$; $\text{cotg}\ \beta = \frac{1}{\text{tg}\beta}$.

Las razones trigonométricas cosecante, secante y cotangente se usan muy poco porque al ser inversas del seno, coseno y tangente respectivamente, de un mismo ángulo, es suficiente con calcular las razones directas. Por eso en las calculadoras encontrarás tres teclas con los nombres; **sin** **cos** **tan** estas razones son suficientes para calcular todas.

c) Trabajá con un compañero. Dibujen un triángulo rectángulo cualquiera BAC. Escriban simbólicamente el co- ciente entre el seno y el coseno del ángulo β; reemplacen cada una de esas razones por el cociente entre los respectivos lados del triángulo (*a, b* o *c* según corresponda). Realicen todas las operaciones que puedan. ¿Qué obtuvieron?

La razón entre el seno y el coseno de un ángulo se llama tangente: $\frac{\text{sen}\ \beta}{\cos\ \beta} = \text{tg}\ \beta$

Otra relación muy importante que se verifica en todo triángulo rectángulo es que la suma del cuadrado del seno y el coseno de un ángulo tiene valor 1.
En símbolos: $\text{sen}^2\ \beta + \cos^2\ \beta = 1$. Esta relación se llama *relación pitagórica* porque es similar a la que expresa el teorema de Pitágoras.

d) Aplicá la relación entre el seno, el coseno y la tangente de un ángulo que aprendiste en la consigna **c** y la relación pitagórica para resolver:

1. Dado sen $\alpha = 0{,}5$ calculá el coseno y la tangente de α.
2. Dado cos $\beta = 0{,}78$ calculá el seno y la tangente de β.

A

3. Uso de la calculadora

En la actividad **1** de esta unidad calculaste en forma aproximada las razones de los ángulos mediante la medida de segmentos. Pero cuando hay que realizar cálculos complejos y con cierta precisión, necesitamos resolver esos cálculos de otra manera.

a) Leé el siguiente texto en el que se te explica cómo usar la calculadora cuando estás haciendo cálculos trigonométricos.

Para obtener datos precisos en Trigonometría, se hace uso de una calculadora científica utilizando las teclas **sin** seno, **cos** coseno y **tan** tangente.

Hay calculadoras en las que primero se introduce el valor del ángulo y luego la tecla con el nombre de la función. Por ejemplo, para calcular el seno de 50 se inserta el número 50 y luego la tecla **sin** y en el visor aparecerá 0,7660444.
En otros modelos se pone en primer lugar el nombre de la función que se quiere calcular y luego se introduce el ángulo. Por ejemplo, para calcular la tangente de 75 se usa la tecla **tan** y luego 75. En el visor aparecerá 3,7320508.
Los valores de los dos ejemplos tienen 7 cifras decimales. Para hacer cálculos en general es suficiente con utilizar un número menor de cifras; por ello es conveniente redondear hasta los décimos o centésimos, según la precisión que el cálculo requiera.
La calculadora da un valor aproximado de las razones trigonométricas, es decir con un error muy pequeño; pero cuando se opera con ese valor el error puede aumentar y es necesario estar alerta.

b) Usá la calculadora y redondeá hasta los centésimos para calcular:

1. sen 75°
2. cos 15°
3. tg 14°
4. cos 60°
5. cos 35°
6. sen 55°

c) Compará con tus compañeros los valores encontrados y si hay diferencias discutan a qué se deben. Escriban en sus carpetas la conclusión a la que llegaron. Muéstrensela a su docente.

d) Comprobá si en todos estos casos se cumple la siguiente información.

El seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento.

El manual de la calculadora se refiere a la función seno. En la unidad **4** podés revisar la definición de función. En efecto, se trata de una función porque para cada ángulo hay un único valor que le corresponde como seno.

Como una medición nunca es muy precisa, los valores de las razones que se obtienen de este modo no son muy confiables para resolver problemas reales que requieren cálculos con cierta precisión.

e) Respondé en tu carpeta: ¿por qué el coseno y la tangente de un ángulo son funciones? Compará tu respuesta con las de tus compañeros.

A

4. Cálculo de las razones trigonométricas de algunos ángulos particulares

Las funciones trigonométricas de algunos ángulos particulares (0º, 30º, 45º, 60º y 90º) se pueden calcular fácilmente sin necesidad de hacer uso de la calculadora. Al realizar esta actividad podrás encontrar los valores del seno, coseno y tangente de algunos ángulos notables.

a) Construí un triángulo rectángulo isósceles. Llamá **a** a la hipotenusa y **b** a cada uno de los catetos.

1. ¿Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes? ¿Por qué?

2. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos agudos de los triángulos isósceles rectángulos?

3. Si los catetos **b** de un triángulo isósceles rectángulo miden una unidad de longitud, ¿cuánto mide la hipotenusa **a**?

Seguramente para calcular a aplicaste la propiedad pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$ y sabiendo que $b = c = 1$ llegaste a que $a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$.

4. Teniendo como datos $b = 1$ y $a = \sqrt{2}$, aplicá la definición de seno de un ángulo para calcular el seno de un ángulo de 45°.

En los libros de Matemática, encontrarás la expresión sen 45º $= \frac{\sqrt{2}}{2}$. Esta expresión es equivalente a sen 45º $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ que tiene por denominador un número irracional $\sqrt{2}$, pero se puede transformar en otra expresión equivalente cuyo denominador sea un número racional si se multiplica el numerador y el denominador por el factor $\sqrt{2}$.

$$\text{sen } 45º = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5. Calculá el coseno y la tangente de un ángulo de 45°. Tené en cuenta que el triángulo con el cual estás trabajando es isósceles rectángulo.

b) Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo de 0°, imaginá un triángulo en el cual uno de sus ángulos agudos disminuye su amplitud hasta llegar a ser nulo.
Si te parece necesario, dibujá como ayuda un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos lo más pequeño que puedas. Respondé a estas preguntas:

1. En ese caso, ¿qué le ocurre a la hipotenusa y a los catetos?
2. Con esos datos calculá el valor de las razones seno, coseno y tangente de 0°.

c) Teniendo como guía el trabajo que realizaste para averiguar las razones trigonométricas de un ángulo de 45°, calculá las razones trigonométricas de un ángulo de 90°.

d) Copiá la siguiente tabla en tu carpeta. Completala con los valores encontrados aquí y en la actividad **1**.

	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno				$\frac{1}{2}$	
Tangente				$\sqrt{3}$	

e) Observá que en la primera fila de la tabla anterior, en la que figuran los valores del seno, el numerador va creciendo desde 0 hasta $\sqrt{4} \div 2$. ¿Ocurre algo parecido en alguna otra fila?

Seguramente habrás observado que los valores de los cosenos que escribiste en la segunda fila de la tabla anterior son equivalentes a: $\frac{\sqrt{4}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$ y $\frac{\sqrt{0}}{2}$ y por eso es fácil que en cualquier momento puedas reconstruir la tabla de memoria teniendo en cuenta que los numeradores son las raíces cuadradas de los primeros números naturales y los denominadores son siempre 2. En cuanto a la tangente, basta que recuerdes que resulta del cociente entre el seno y el coseno del mismo ángulo.

Hasta aquí trabajaste con las razones trigonométricas de los ángulos pertenecientes a triángulos rectángulos. El conocimiento de esas relaciones te permitirá resolver interesantes problemas.

TEMA 2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Una de las aplicaciones de la Trigonometría es la resolución de problemas en los que no se pueden hacer mediciones directas. En esta parte de la unidad trabajarás con el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas que aprendiste como herramientas matemáticas que te facilitarán la resolución de situaciones mediante la aplicación de esos conocimientos a los triángulos rectángulos.

A

5. Problemas con triángulos

En Matemática, resolver un triángulo es conocer el valor de sus tres lados y sus tres ángulos.

a) Para resolver el triángulo BAC, rectángulo en A, siendo la hipotenusa a = 6 cm y β= 30° seguí los siguientes pasos:

1. En primer, lugar dibujá un triángulo y sobre él escribí los datos que ya conocés.
2. Como ya conocés la hipotenusa, utilizarás las razones en las que ella interviene, que son el seno y el coseno.
sen $\beta = \frac{b}{a}$,

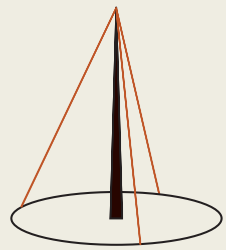
3. Esta razón permite calcular el lado **b**:
sen 30° = $\frac{b}{a}$; $\Rightarrow$ b = 6 cm • sen 30° = 6 cm • $\frac{1}{2}$, entonces **b** = 3 cm

4. Del mismo modo calculá el lado **c**.
5. ¿Cuál es la amplitud del otro ángulo agudo?
6. Escribí todos los cálculos en tu carpeta y compará las medidas que obtuviste para los lados y ángulos del triángulo BAC con los resultados obtenidos por tus compañeros.

b) Volvé al comienzo del tema 1 y respondé a la pregunta que se hizo Martín. ¿Cómo podrías responderle ahora?

Teniendo como datos un lado y un ángulo de un triángulo rectángulo, el uso de las razones trigonométricas permite conocer todos los demás elementos del triángulo.

c) Ejercitá lo que aprendiste resolviendo los siguientes problemas. Tené en cuenta, como en la actividad anterior, que realizar un esquema y anotar en él los datos que ya tenés te ayudará en la interpretación de la situación.



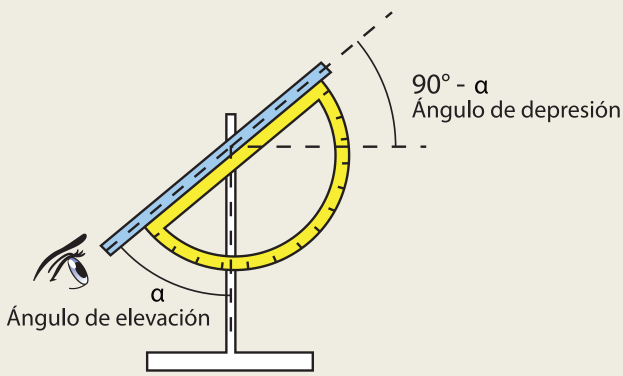
1. Un poste vertical está sostenido por tres cables que van desde el punto más alto del poste hasta tres puntos ubicados en el suelo. Cada uno de esos puntos está a 12 metros del pie del poste. Si cada cable forma un ángulo de 75° con el poste, ¿Cuántos metros de cable se usaron? ¿Qué altura tiene el poste?
(Ayuda: si no disponés de calculadora, en la actividad 3 podés encontrar el seno de 75°).
2. Una escalera que mide 3,6 metros se apoya en un edificio y el ángulo que forma la escalera con la pared es de 30°. Calculá la distancia del pie del edificio hasta donde se apoya la escalera en el suelo.
3. A cierta hora del día los rayos del sol caen formando un ángulo de 30° con el piso. ¿Qué altura tiene un mástil que proyecta una sombra de 15 metros? Leonardo mide 1,75 m, ¿cuánto medirá su sombra a esa misma hora?

A 6. Ángulos de elevación y depresión

A partir de aquí trabajarás en otras aplicaciones de la Trigonometría. Se trata de problemas prácticos vinculados con ángulos de elevación y ángulos de depresión.

a) Reunite con otros compañeros para resolver las siguientes situaciones. Al finalizar muéstrenle las soluciones el docente.

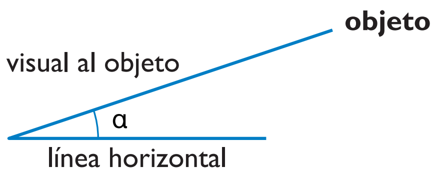
Analicen esta figura que es el esquema de un aparato casero construido para medir ángulos en altura. Consta de un pequeño mástil con un tornillo alrededor del que se mueve un transportador de madera al que se ha adosado un trozo de tubo. El observador puede enfocar su vista al punto más alto de un objeto cuya altura quiere determinar.

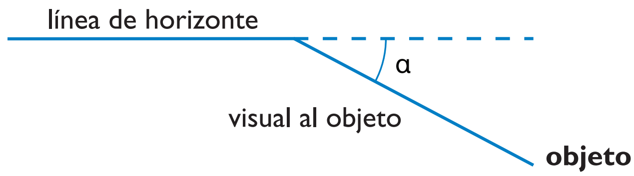


1. Observen el esquema y expliquen cómo usarían este aparato para medir el ángulo (90° - α).

El *ángulo de elevación* y el *ángulo de depresión* que se forman entre la visual dirigida a un objeto y una línea horizontal que esté en el mismo plano, constituyen dos conceptos importantes en situaciones reales de cálculo.

*Si un objeto está por encima de la horizontal se llama **ángulo de elevación** al ángulo formado por una línea horizontal y la visual dirigida al objeto.*





*Si un objeto está por debajo de la horizontal se llama **ángulo de depresión** al ángulo formado por una recta horizontal y la visual dirigida hacia el objeto.*

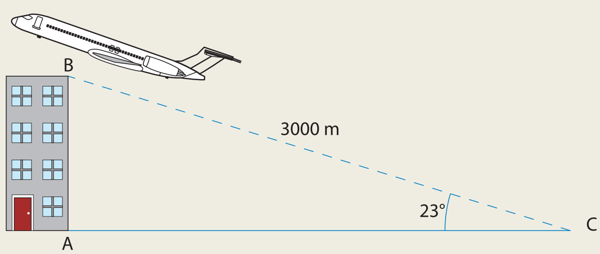
2. Desde un punto que está a 8,2 m del pie de un edificio sobre el nivel del suelo, el ángulo de elevación a la parte alta del edificio es de 30°. ¿Cuál es la altura del edificio?

3. Releé el problema de Martín que está al comienzo de esta unidad. ¿Cómo se relaciona con el problema que acabás de resolver en el punto 1? ¿Podés contestarle a Martín su pregunta?

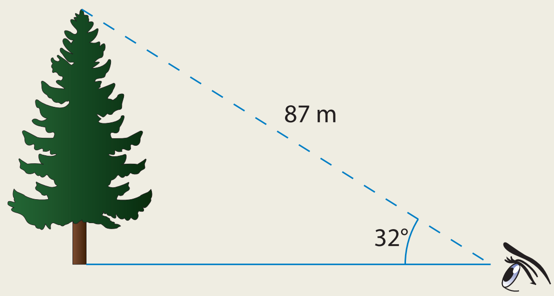
4. Desde la parte alta de una torre de 120 m de altura, el ángulo de depresión de un objeto colocado en el plano horizontal de la base de la torre es 24°. ¿A qué distancia está el objeto del pie de la torre? ¿A qué distancia está el objeto del observador?

5. Un avión despega con un ángulo de elevación de 23°. Calculá:

- la altura AB a la que se encuentra el avión cuando ha recorrido 3000 metros;
- la distancia desde el punto de despegue C hasta el punto terrestre A en que se localiza al avión en ese momento.



6. Encontrá la altura de un árbol si el ángulo de elevación de un observador al extremo superior de éste es de 32 ° y la distancia del observador a la cúspide es de 87 metros.



Para finalizar

Los temas que has visto y desarrollado en esta unidad te han introducido en las nociones elementales de la Trigonometría: las *razones trigonométricas.* En un principio trabajaste con ángulos orientados. Analizaste las razones trigonométricas en triángulos rectángulos. Estas relaciones trigonométricas entre ángulos y lados de triángulos rectángulos cumplen con propiedades que habrás descubierto a medida que fuiste trabajando en tu carpeta y son las que permiten resolver problemas de medida indirecta en situaciones en las que no es posible acceder directamente a las distancias que se quieren medir.

La aplicación de las relaciones que estudiaste en esta oportunidad te permitirá seguir avanzando en la próxima unidad de Trigonometría.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

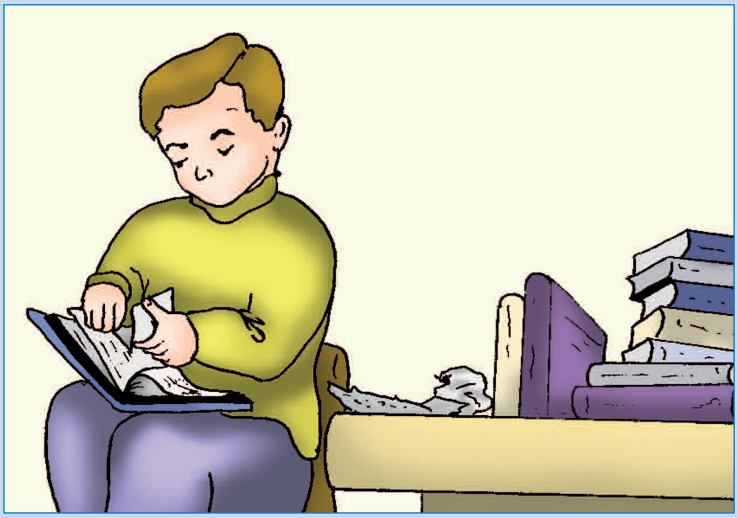
1. Encontrá el ángulo

Con una calculadora es posible hallar directamente las razones trigonométricas de un ángulo. El desafío consiste en encontrar el ángulo del cual se conoce el seno, el coseno o la tangente. Por ejemplo, determinar el ángulo α en los siguientes casos:

a) Si sen α = 0,616
b) Si cos α = 0,140
c) Si tg α = 2,05

2. Libros rotos

Andrés tiene cuatro años y su más reciente travesura consiste en arrancar hojas de los libros. La primera página que arrancó estaba numerada con el número 153 y la última con un número escrito con las mismas cifras en otro orden. ¿Cuántas páginas, no hojas, arrancó?



3. Borrar cifras

Borrá diez cifras del número **12345123451234512345** de manera que el número que quede sea lo más grande posible.

4. Una adivinanza

Augustus de Morgan fue un matemático inglés nacido en la India y fallecido en Londres en 1871. Acostumbraba entretenerse planteando adivinanzas y problemas ingeniosos. Este interesante personaje del siglo XIX, planteó esta adivinanza sobre su edad:
En el año x^2 yo cumplí x años. ¿En qué año nací?
• ¿Adivinaste el año?

UNIDAD 7

Trigonometría 2

En esta oportunidad continuarás el estudio de la Trigonometría que iniciaste en la unidad anterior, pero esta vez abordarás las razones trigonométricas desde el punto de vista de las funciones.

Trabajarás no solamente con los ángulos de los triángulos rectángulos, sino también con todos los ángulos referidos a un sistema de ejes coordenados. Verás que los ángulos orientados de ese modo pueden ser positivos o negativos a diferencia de lo que ocurre en Geometría que siempre considera los ángulos de modo estático, siempre positivos. También verás de qué modo incide el signo en las aplicaciones de las funciones trigonométricas.

Las actividades te permitirán descubrir relaciones entre las funciones trigonométricas y también resolver problemas a partir de los conocimientos que ya adquiriste.

Reunite con tus compañeros para realizar las actividades cuando así se indica y discutan no solamente las posibles soluciones de los problemas y las conclusiones, sino también los procedimientos que utilizan.

TEMA 1: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN UN SISTEMA DE EJES CARTESIANOS

Las razones trigonométricas presentadas en la unidad anterior fueron definidas para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. En esta oportunidad se amplían estas nociones y también se van a considerar ángulos mayores que un ángulo recto.

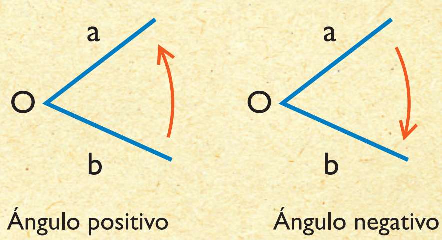
A

1. Generación de ángulos positivos y negativos

Imaginate un trompo que gira, una calesita que da vueltas o las agujas de un reloj. Si te preguntaran cuál es el ángulo de giro del trompo o de las ruedas mientras se desplazan a lo largo de un recorrido, ¿qué contestarías? En esta actividad estudiarás que hay ángulos mayores que un giro completo, o sea, mayores que 360º.

a) Leé atentamente el siguiente párrafo.

Los ángulos se generan dejando fijo uno de los lados y haciendo girar el otro. Si el giro se hace en sentido contrario al de las agujas del reloj, es decir, en sentido antihorario, la convención más generalizada considera que el ángulo es positivo y cuando el lado gira en sentido horario, el ángulo se considera negativo.

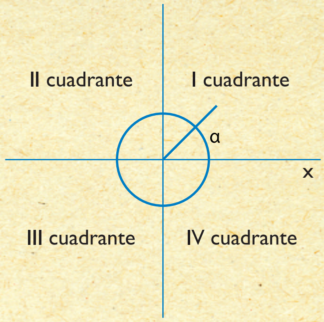


b) Teniendo en cuenta la definición anterior dibujá los siguientes ángulos:

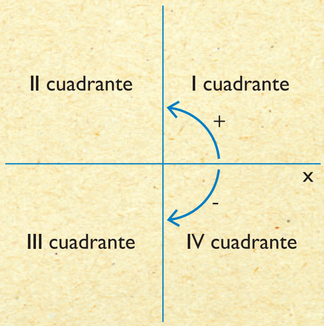
1. un ángulo positivo y otro negativo señalando con flechas el sentido en que has generado a cada uno.

2. un ángulo de 120° y otro de –120° que tengan un lado en común.

Para definir las funciones trigonométricas de ángulos cualesquiera es necesario referirlos a un sistema de ejes cartesianos. Como se ve en la figura, estos ejes determinan cuatro cuadrantes:



Al trazar ángulos referidos al sistema de ejes, se acuerda que el lado fijo del ángulo coincide con el semieje positivo de **x**, es decir, la semirrecta horizontal con extremo en el origen y sentido hacia la derecha. El otro lado que se desplaza girando en uno u otro sentido, estará en alguno de los cuatro cuadrantes.



Para identificar un ángulo, además de su amplitud, se indica si es positivo o negativo y a qué cuadrante pertenece según la posición alcanzada por el lado que ha girado.

α pertenece al I cuadrante.

Recordá que el signo del ángulo está dado por el sentido en el que se genera. Por lo tanto, los ángulos positivos son aquellos en los que el lado móvil se desplaza recorriendo los cuadrantes en la secuencia I, II, III, IV y los negativos en la secuencia contraria.

c) A continuación hay un listado con las posiciones de diversos ángulos, copiá todas en tu carpeta y completalas con el cuadrante que corresponde. A modo de ejemplo, se ha completado la primera afirmación.

1. El ángulo + β está comprendido entre 0° y 90°, en símbolos: 0° < α < 90°, entonces pertenece al primer cuadrante.

2. El ángulo + β es 90° < β < 180°, entonces ....

3. El ángulo - β es el opuesto de + β, entonces ....

4. El ángulo + γ es 180° < γ < 270°, entonces ....

5. El ángulo + δ es 270° < δ < 360°, entonces ....

6. El ángulo - δ es el opuesto de + δ, entonces ....

7. El ángulo + ε es 450° < ε < 540°, entonces ....

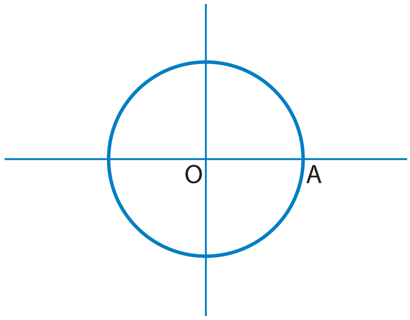
Para realizar esta actividad vas a necesitar escuadra y compás.

2. Funciones trigonométricas de ángulos del primer cuadrante

En esta actividad aprenderás a trazar una **circunferencia trigonométrica**.

a) Dibujá un sistema de ejes cartesianos ortogonales y trazá una circunferencia con centro en el origen O.

b) Marcá el punto de intersección de la circunferencia con el semieje positivo *x* y designalo con la letra A. Considerá que la medida del radio OA tiene valor 1.



La circunferencia que trazaste se llama circunferencia trigonométrica.

*La **circunferencia trigonométrica** es la circunferencia con **centro** situado en el origen de los ejes de un sistema de coordenadas y de **radio** igual a la unidad.*

La circunferencia trigonométrica que dibujaste en la consigna a te permitirá encontrar las funciones trigonométricas o funciones circulares de un ángulo orientado, es decir, un ángulo con vértice en el origen de coordenadas y al que le corresponde un signo según su ubicación en el sistema cartesiano.

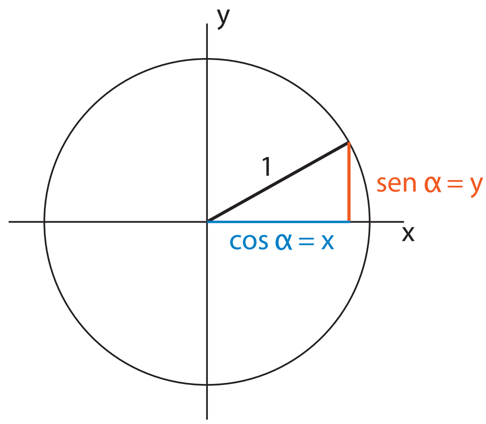
c) Marcá un ángulo α con vértice en O cuyo lado fijo sea el semieje positivo de ***x*** y el otro lado gire en sentido contrario a las agujas del reloj de modo que el ángulo quede incluido en el primer cuadrante.

d) Designá con **P** el punto en el que el lado libre corta a la circunferencia. Trazá sobre los ejes las coordenadas del punto **P**: abscisa *x* = **OM**; ordenada y = **MP**. El triángulo formado por las coordenadas (x , y) de **P** y el radio **OP** de la circunferencia es rectángulo.

e) Escribí las definiciones del seno y el coseno para el ángulo **MOP**; o sea α.

Teniendo en cuenta la definición de circunferencia trigonométrica, si la medida del radio de la circunferencia es 1, la expresión de la función seno es $\mathbf{sen}\ \alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{1} = y$,

y la expresión de la función coseno es
$\cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{1} = x$.



En una circunferencia trigonométrica, el ***seno*** *de un ángulo está dado por la medida de la ordenada del extremo de su lado libre.*

f) En una circunferencia trigonométrica, ¿qué segmento representa al coseno de un ángulo del primer cuadrante? ¿Cuál es su medida? ¿Por qué?

En una circunferencia trigonométrica, el ***coseno*** *de un ángulo está dado por la medida de la abscisa del extremo de su lado libre.*

A partir de conocer la medida del seno y del coseno de un ángulo se puede deducir una relación fundamental en Trigonometría.

g) Tené en cuenta que en una circunferencia trigonométrica el radio mide 1. Observá el triángulo rectángulo que dibujaste en el punto **2** de la consigna **d** y escribí la relación pitagórica entre sus lados.

Seguramente escribiste que $y^2 + x^2 = 1$ o bien que $PM^2 + OM^2 = OP^2$.

*Para cualquier ángulo, la suma del cuadrado del seno y el cuadrado del coseno es igual a la unidad. Esta propiedad se conoce como **relación pitagórica**. En símbolos:* $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$.

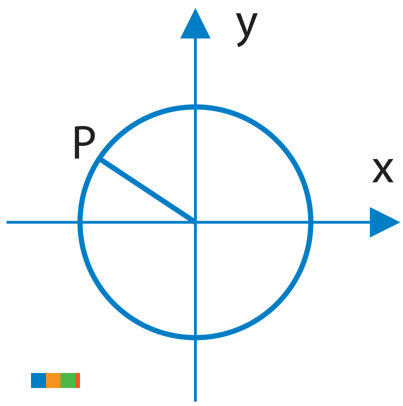
A

3. Funciones trigonométricas de ángulos del segundo cuadrante

Resolvé esta actividad con tus compañeros y consultando con tu docente.

a) Construyan una figura como la siguiente, marquen sobre los ejes, las coordenadas del punto **P**.

1. Usen los datos para expresar la función seno del ángulo β.
2. Observen la circunferencia trigonométrica que dibujaron en el punto **1** de esta actividad y expresen la función coseno del ángulo.
3. ¿Cuál de las coordenadas del punto **P** representa al coseno del ángulo β? ¿Qué signo tiene el coseno de β?
4. SI el ángulo β aumenta su amplitud, ¿cómo se modifican los segmentos que representan al seno y al coseno de β?
5. ¿Para qué valor del ángulo β el seno se anula?
6. ¿Para qué valor del ángulo β el coseno se anula?
7. ¿Habrá un ángulo para el cual las funciones seno y coseno sean iguales? Justifiquen sus respuestas.
8. Si bien es cierto que a cada ángulo le corresponde un solo seno, un solo coseno y una sola tangente, la afirmación recíproca no es cierta, vale decir que dado el valor de un seno, por ejemplo sen x = 0,5 hay más de un ángulo que tiene como seno ese valor 0,5. ¿Cuáles son esos ángulos?
9. Mencionen dos ángulos distintos que tengan el mismo coseno.



Centro O; radio 1; β: ángulo del segundo cuadrante.

En un sistema de ejes, las coordenadas de un punto pueden ser positivas o negativas. De acuerdo con las definiciones de las funciones trigonométricas el seno, el coseno y la tangente de un ángulo toman valores positivos, negativos o nulos según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo.

A 4. Signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

En la presente actividad analizarás el **signo de las funciones** trigonométricas.
Para determinar los signos de las funciones seno y coseno de un ángulo podrás usar las definiciones que conocés o bien considerar las líneas trigonométricas que las representan. Tené presente que se ha convenido que el radio de la circunferencia trigonométrica vale 1 y es siempre positivo.

a) Respondan en sus carpetas.

1. El signo de **x** e **y** de un ángulo del primer cuadrante es positivo, ¿qué signo tienen las funciones seno, coseno y tangente de ese ángulo?

2. Si el ángulo pertenece al segundo cuadrante, ¿qué signos tienen sus coordenadas **x** e **y**?

3. Determinen el signo de las funciones seno, coseno y tangente de un ángulo del segundo cuadrante.

4. Organicen, en la carpeta, una tabla como la que sigue en la que figure el nombre de las funciones trigonométricas y complétenla con los signos de ellas en los cuatro cuadrantes.

Función	Cuadrante			
	I	II	III	IV
sen	+	+	-	-
cos	+	-		
tg	+	-		

5. Comparen el trabajo entre ustedes y muéstrenselo al docente.

En Geometría se miden los ángulos en grados, minutos y segundos sexagesimales. En Trigonometría, además de ese sistema, se usa también el sistema circular que en las aplicaciones físicas es mucho más práctico y directo que el sistema sexagesimal.

A 5. Medida de un ángulo en radianes

En esta actividad estudiarás el **sistema circular** de medición de ángulos a partir de una sencilla experiencia.

Para poder calcular el camino recorrido por alguna partícula en una trayectoria circular, el sistema sexagesimal de medida de los ángulos no resulta adecuado pues relaciona al ángulo con su abertura considerada de manera estática y no con el arco que describe un punto al moverse sobre una circunferencia.

Por esta razón se creó el sistema circular de medida de ángulos que se aplica en casi todas las ramas de la ciencia sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos. El movimiento de las olas del mar, el sonido o el flujo de corriente eléctrica alterna son ejemplos de fenómenos periódicos.

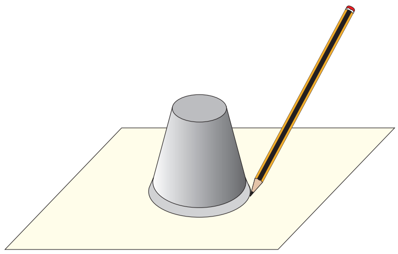
a) Poné un vaso boca abajo sobre una hoja de papel para dibujar una circunferencia y pasá el lápiz por el contorno.

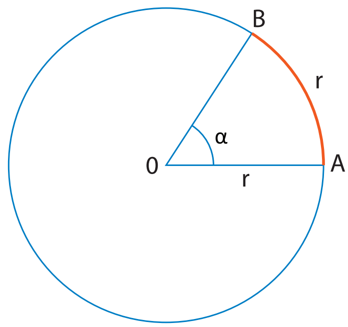
1. Sacá el vaso, localizá el centro O de la circunferencia y usá un hilo para marcar sobre él, con un lápiz, los dos extremos del radio.

2. Volvé a poner el vaso, ajustá el hilo a su alrededor y señalá sobre el papel los dos extremos A y B del radio que habías marcado sobre el hilo.

3. Quitá el vaso y trazá los dos radios OA y OB de la circunferencia que corresponden a la longitud del radio.

4. Escribí la letra r sobre el arco AB. Habrás obtenido una figura semejante a esta.





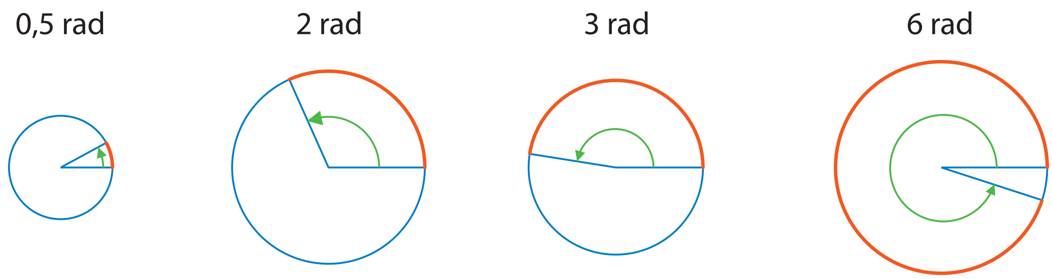
El ángulo α se llama *radián*.

*El sistema circular de medición de ángulos tiene por unidad a un ángulo que abarca un arco cuya longitud es igual al radio. Esa unidad se denomina **radián**.*

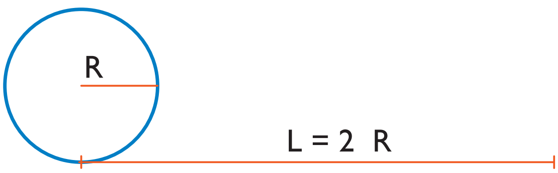
Observá que si la medida del radio de la circunferencia considerada es 1, el arco que abarca un ángulo de un radián también tiene longitud 1. Si la medida del radio fuera el doble, el ángulo que correspondería a un arco igual al radio, también sería de 1 radián.

Cualquiera sea el radio de una circunferencia, el ángulo central que corresponde a un arco igual al radio, es de 1 radián.

b) Dibujá ángulos de 2 radianes, de 0,5 radianes, de 3 radianes y de 6 radianes. Si te parece conveniente usá el vaso y el hilo que usaste en la consigna **a**. Compará tus dibujos con los siguientes para ver si los dibujaste correctamente.



c) Para responder a las siguientes preguntas tené en cuenta que la longitud de la circunferencia es el producto del diámetro por el número ≠ o bien 2≠ r, porque el diámetro equivale a 2 radios.



1. ¿Cuánto mide, en radianes, un ángulo llano?
2. ¿Cuánto mide, en radianes, un ángulo recto?
3. ¿Cuánto mide, en radianes, un ángulo de 45°?

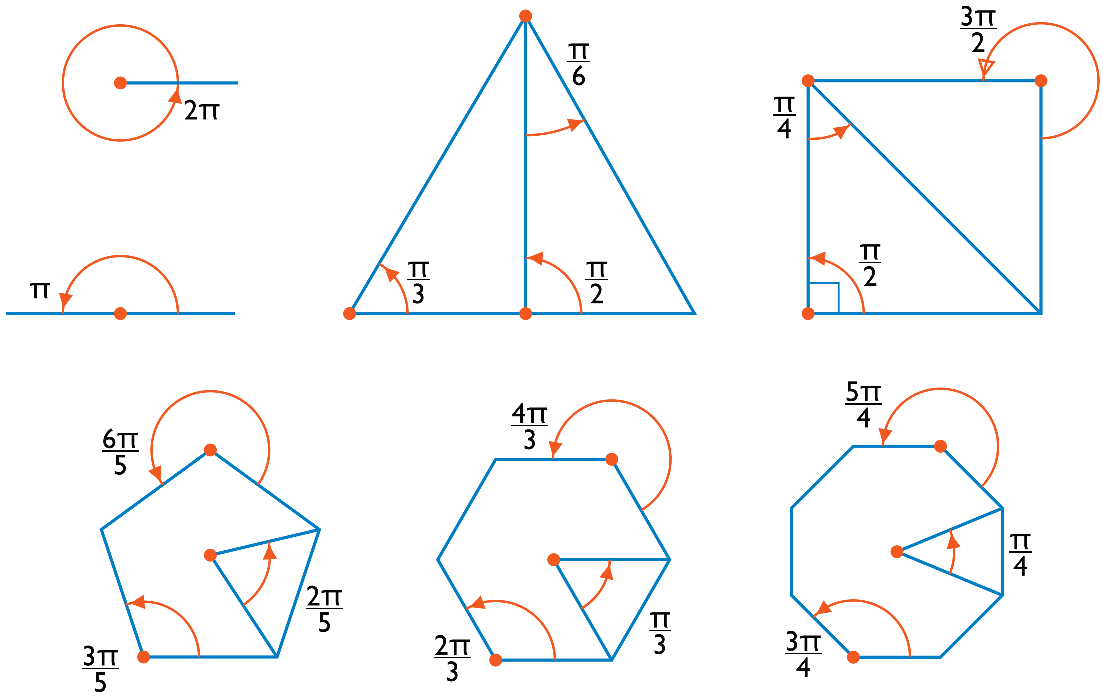
Las respuestas anteriores te permiten observar que el número de radianes de un ángulo de un giro completo es 2≠, vale decir que 360° expresado en radianes es: **$360° = 2\pi$**

$$\mathbf{1\ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{3{,}1416} = 57°\ 17'\ 44''.$$

Un ángulo de 1 radián mide aproximadamente 57 grados 17 minutos 44 segundos sexagesimales.

d) Resolvé en tu carpeta los siguientes ejercicios:

1. Observá las siguientes figuras geométricas en las que los ángulos se midieron en radianes y calculá la amplitud en radianes de los siguientes ángulos: 90°; 60°; 45°, 30 °, 180° y 270°.



2. Copiá una tabla como la que sigue y completala con las medidas correspondientes a los ángulos indicados, en grados o radianes y compará tu tabla con las de tus compañeros.

Grados	0°	30°			90°		135°	150°		240°		360°
Radianes	0		$\frac{\neq}{4}$	$\frac{\neq}{3}$		$\frac{2\neq}{3}$			$\neq$		$\frac{3\neq}{2}$	$2\neq$

En la unidad correspondiente al estudio de funciones apreciarás otras ventajas del sistema circular en la representación de las funciones trigonométricas.

Para finalizar

En la unidad anterior estudiaste las razones trigonométricas de los ángulos interiores de los triángulos rectángulos. En esta oportunidad avanzaste en el estudio de la Trigonometría, es decir, de las funciones trigonométricas de los ángulos ubicados en cualquiera de los cuatro cuadrantes de un sistema de referencia. Analizaste sus signos y también las líneas trigonométricas que representan a cada función.

Ya sabías medir ángulos en el sistema sexagesimal; aprendiste, ahora, también a medir ángulos en el sistema circular cuya unidad de medida es el radián. Más adelante, estudiarás las funciones trigonométricas de cualquier ángulo para lo que resulta muy útil la medición en radianes. Ese tipo de trabajo te permitirá establecer nuevas relaciones y resolver otros problemas de mayor complejidad vinculados con la Matemática y con otras ciencias.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Las relaciones trigonométricas fundamentales

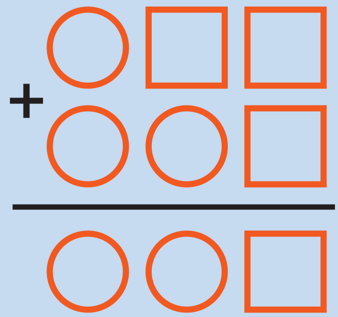
Utilizando las relaciones trigonométricas fundamentales ($\mathbf{sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1}$ y $\mathbf{tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}}$), verificá que:

1. $tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$.

2. $(1 - sen^2\,\beta) \times (1 + tg^2\,\beta) = 1$.

2. Pares y nones

Con los números del 1 al 9 hay que hacer la suma que aparece en la figura colocando los números pares en los cuadrados y los impares en los círculos.



3. Adivinanza con trabalenguas

Yendo de Villaseca a Villanueva me encontré con siete viejas; cada vieja, siete sacos; cada saco, siete tejas. ¿Cuántas viejas, sacos y tejas en camino a Villanueva?

4. Una espiral con dos centros

Primero seguí estas instrucciones para construir una espiral y luego resolvé los desafíos.

a) En el medio de una hoja de papel trazá sobre una recta horizontal un segmento **AB** de 2 cm. Marcá el punto medio del segmento **AB** y llamalo **C**.
b) Usá el compás para trazar en el semiplano superior una semicircunferencia de radio **AC**.
c) Haciendo centro en **A** trazá una semicircunferencia de radio **AB** en el semiplano inferior. Llamá **D** al extremo del diámetro sobre la recta.
d) Haciendo centro en **C** trazá una semicircunferencia de radio **CD**. Llamá **E** al extremo del diámetro sobre la recta.
e) Seguí trazando semicircunferencias alternando los centros **C** y **A**.

A partir de tu dibujo podés contestar:

1. ¿Qué medida tendría que tener el segmento **AB** para que con 5 semicircunferencias la espiral tuviera 80 cm de ancho?
2. Si **AB** fuera de 1 cm, ¿cuántas semicircunferencias se pueden dibujar en tu hoja de papel?

Unidad 8

Operaciones directas e inversas

Como ya sabés, la adición y la sustracción son operaciones inversas. Por ejemplo, el efecto de sumar 6 a una cantidad se puede anular restándole 6 al primer resultado. En Matemática, la reversibilidad de una operación se vincula con la existencia de la operación inversa.

Muchas veces es necesario deshacer o anular el efecto producido por la aplicación de una operación. En ese caso, el efecto de la operación directa se anula aplicando la operación inversa.

En esta unidad estudiarás cómo se relacionan entre sí las operaciones directas y sus inversas. También analizarás cuáles cumplen con las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva. La aplicación correcta de esas propiedades y el análisis de sus significados te permitirá acercarte a la resolución de diferentes situaciones.

TEMA 1: OPERACIONES DIRECTAS E INVERSAS

En la unidad **2** del Cuaderno de estudio **2** empezaste a trabajar con números racionales (**Q**) y aprendiste que en el conjunto de esos números están incluidos otros campos numéricos: el de los enteros (**Z**) y el de los números naturales (**N**). Por esta razón, las propiedades de las operaciones en los números racionales son válidas también para las operaciones con números enteros y números naturales.

$$\mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q}$$

Uno de los hallazgos más importantes que hiciste al trabajar con números racionales fue descubrir que para restar se puede realizar una suma equivalente, es decir, que el resultado de la resta **a** – **b** es el mismo que el de sumar a **a** el opuesto de **b**; es decir, **a** + (-**b**). Por ejemplo, la resta 27 – 12 se puede pensar como la operación que da como resultado el número **r** que sumado a 12 da 27, es decir: **r** + 12 = 27, o bien como la suma 27 + (-12). Por esta razón se dice que la suma es una operación directa y que la resta es la operación inversa de la suma.

La adición, la multiplicación y la potenciación se consideran operaciones directas.

A

1. Seguir el camino inverso

En esta primera actividad vas a trabajar con operaciones que ya conocés para descubrir cómo se relacionan entre sí.

a) Observá los siguientes ejemplos en los que partiendo del número 4 se obtiene como resultado 16. Copialos y respondé en cada caso:

$4 + 12 = 16$	$16 - 12 = 4$
$4 \times 4 = 16$	$16 \div 4 = 4$
$4 - (-12) = 16$	$\sqrt{16} + (-12) = 4$
$4^2 = 16$	$16 = 4$
$4 \div \frac{1}{4} = 6$	$16 \times \frac{1}{4} = 4$

1. ¿Qué operación se aplicó a 4 para obtener 16?
2. ¿Cuál es la operación que a partir de 16 dio como resultado 4?
3. ¿En qué clase de números están planteadas las operaciones?

Como pudiste ver, en todos los cálculos interviene el mismo número inicial y el mismo resultado final. Sin embargo, el resultado depende de la operación efectuada y también del conjunto numérico con el que se opera. Fijate que en la primera, la segunda y la cuarta líneas se opera con números naturales; en la tercera, con enteros y en la última línea con racionales.

- *La **sustracción** o resta es la operación inversa de la adición o suma.*
- *La **división** es la operación inversa de la multiplicación: el cociente es el inverso del producto.*
- *La **radicación** es una operación inversa de la potenciación.*

A 2. Asociatividad y conmutatividad

En primer lugar, vas a explorar la **asociatividad** en las operaciones directas: adición, multiplicación y potenciación. Más adelante, explorarás si esas operaciones son, o no, **conmutativas**.

*Tené presente que el signo **x** entre dos factores, se puede reemplazar por un punto (como lo utilizamos en otras unidades) y en algunos casos, omitirlo porque queda sobreentendido.*

a) Resolvé los siguientes cálculos respetando el orden que indican los paréntesis.

$0{,}25 + (0{,}5 + 0{,}75) =$

$(0{,}25 + 0{,}5) + 0{,}75 =$

$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$

Si se comparan los resultados y los respectivos términos de las dos sumas, seguramente observarás que cuando se reitera una operación (en este caso la suma), los componentes pueden asociarse de diferente manera y el resultado no cambia.

*Si al cambiar los componentes que se asocian no cambia el resultado, se dice que la operación es **asociativa**.*

En la multiplicación $0{,}4 \cdot (-\frac{1}{5}) \cdot 6$, se puede realizar una posible asociación entre $-\frac{1}{5}$ y 0,4 y otra, entre $-\frac{1}{5}$ y 6 . Como el resultado es el mismo, se puede efectuar el cálculo indistintamente y por eso se escribe: $0{,}4 \cdot (-\frac{1}{5}) \cdot 6$ sin usar paréntesis que indique asociación.

b) Para averiguar si la potenciación es, o no, asociativa, resolvé paso a paso, según indican los paréntesis, $(3^4)^2$. Fijate si da lo mismo que 3^{4^2}. ¿Qué conclusión sacás?

c) Nombrá las operaciones directas y mencioná si son, o no, asociativas.

Seguramente encontraste que la adición y la multiplicación son operaciones asociativas y que no ocurre lo mismo con la potenciación. Por ejemplo, $(4^3)^2$ no es lo mismo que $4^{(3^2)}$, puesto que $4096 \uparrow 262144$. El primer miembro de la desigualdad proviene de $(4^3)^2$, escritura que indica que hay que elevar al cuadrado el cubo de 4, o sea 64, vale decir que $64^2 = 4096$, en cambio $4^{(3^2)}$ indica elevar 4 a la novena potencia porque 3^2 es 9, vale decir $4^9 = 262144$.

d) Después de haber explorado la asociatividad de las operaciones directas verás cuáles de ellas son conmutativas. Para ello leé el siguiente texto.

Una operación es **conmutativa** si el resultado de **a*b** es el mismo que el que se obtiene de **b*a** (se usa el símbolo * para expresar de modo general cualquier operación).

La igualdad **a + b = b + a** se cumple para todo par de números racionales **a** y **b**. Del mismo modo la igualdad **a × b = b × a** se cumple también para todo par de números racionales. En cambio $\mathbf{a^b}$ no es lo mismo que $\mathbf{b^a}$, vale decir que $\mathbf{a^b} \uparrow \mathbf{b^a}$.

e) Explorá esta propiedad pensando otros ejemplos de la conmutatividad en las operaciones directas.

f) Nombrá las operaciones directas y mencioná si son o no conmutativas.

A

3. Distributividad

a) Copiá los dos cuadros que siguen y completalos con el resultado de las operaciones. En los casos E y F escribí los cálculos que no están, conservando la misma organización de los otros ejemplos del mismo cuadro.

b) Compará los resultados con otros compañeros y si hay diferencias coméntenlas con el docente.

Primer cuadro		
	Cálculo	**Resultado**
A	$-2 \times 6 + -2 \times -13 =$	
B	$\frac{4}{5} \times -9 + 0{,}2 \times -9 =$	
C	$-7{,}5 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}3 =$	
D	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times -\frac{4}{9} =$	
E		
F	$-\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times -\frac{2}{3} =$	

Segundo cuadro		
	Cálculo	**Resultado**
A	$-2 \times (6 + -13) =$	
B	$\left(\frac{4}{5} + 0{,}2\right) \times -9 =$	
C	$(-7{,}5 + 2) \times 0{,}3 =$	
D	$\frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{3} \times -\frac{4}{9}\right) =$	
E	$12 \times (-5{,}2 + 0{,}3) =$	
F		

Los ejemplos anteriores corresponden a la **distributividad** que es una propiedad general de la multiplicación con respecto a la adición. Cuando las multiplicaciones y adiciones se combinan de la forma **a · m + a · p**, el resultado es equivalente al que se obtiene de multiplicar el factor común por la suma de los otros dos, **a · (m + p)**.

*La propiedad **distributiva** de la multiplicación con respecto a la suma se expresa formalmente:* ***a · (m + p) = a · m + a · p***.

• • • La propiedad distributiva

Esta propiedad resulta útil para transformar un cálculo en otro equivalente que sea más fácil de resolver. Por ejemplo, la expresión $(-12 + 30) \bullet (-\frac{1}{3})$ se puede cambiar por $-12 \bullet -\frac{1}{3} + 30 \bullet -\frac{1}{3}$ y se calcula $4 + -10 = -6$.

A veces conviene pasar de la expresión $a \bullet m + a \bullet p$ a su equivalente $a \bullet (m+p)$.

A los procedimientos de transformación de una expresión en su equivalente se los denomina:

I. Sacar **factor común**: es expresar $\mathbf{a \cdot m + a \cdot p}$ como $\mathbf{a \cdot (m + p)}$.

II. **Distribuir**: es expresar $\mathbf{a \cdot (m + p)}$ como $\mathbf{a \cdot m + a \cdot p}$.

Por ejemplo: $(-0,2) \cdot 3 + (-0,2) \cdot 6,5$ se puede cambiar por $(-0,2) \cdot (3 + 6,5)$ y se calcula $(-0,2) \cdot 9,5 = -1,90$.

En general, estos procedimientos se aplican en fórmulas donde se usan letras y números.

Por ejemplo: sacar factor común: $-3\,c\,d\,n + -3\,c\,h$ da por resultado $-3\,c\,(d\,n + h)$.

Otro ejemplo: $2\,x\,y\,z + -2\,h\,x\,y$ da por resultado $2\,x\,y\,(z - h)$.

Distribuir: $2\,y\,(a + b)$ da por resultado $2\,y\,a + 2\,y\,b$.

c) Releé en este recuadro la información que ya estudiaste cuando realizaste la actividad **2** de la unidad **3** del CUADERNO DE ESTUDIOS **2**.

No es lo mismo el cuadrado de la suma de dos números que la suma de sus cuadrados.
Por ejemplo $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ y $(3+ 4)^2 = 7^2 = 49$.
No es lo mismo $3^2 + 4^2$ que $(3 + 4)^2$ ya que $25 \uparrow 49$.
En símbolos: siendo **a** y **b** dos números cualesquiera, $\mathbf{a^2 + b^2 \neq (a + b)^2}$.

d) Ahora estás en condiciones de contestar esta pregunta: la potenciación, *¿es distributiva con respecto a la adición?* Justificá tu respuesta y escribí un ejemplo para ilustrarla.

A

4. Elemento neutro y elemento absorbente

Hasta ahora estudiaste las propiedades de las operaciones directas y viste que si se las aplica convenientemente permiten realizar cálculos sobre ecuaciones equivalentes cada vez más sencillas y así llegar a encontrar sus soluciones.

En esta oportunidad, estudiarás el comportamiento particular de dos números, el 1 y el 0, en distintas operaciones.

a) Copiá en tu carpeta los siguientes ejercicios y resolvelos.

1. $12 \times 1 =$
2. $\frac{3}{5} - \frac{3}{5} =$
3. $2,4 \div 2,4 =$
4. $35000 - 35000 =$
5. $3600 + 0 =$
6. $\frac{3}{5} \div \frac{3}{5} =$
7. $12 \times 0 =$
8. $25 \times 1 =$
9. $23 \div 23 =$
10. $23 \div 1 =$
11. $0 \times 135 =$
12. $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} =$
13. $1 \times 10 =$
14. $1 - 0 =$
15. $1,25 \times 0 =$
16. $(-4) + 0 =$
17. $0 \div 10 =$
18. $0 + 1,5 =$
19. $0 - 5 =$
20. $4 + (-4) =$
21. $0 \div 3 =$
22. $15^1 =$
23. $15^0 =$
24. $1^3 =$
25. $\left(\frac{2}{3}\right)^0 =$
26. $\sqrt{1} =$

b) Observá los cálculos anteriores y respondé las siguientes preguntas. En cada caso anotá los ejemplos correspondientes con las operaciones que resolviste en la consigna anterior.

1. ¿En qué casos la operación sobre un número da como resultado el mismo número?
2. ¿En qué casos la suma da 0?
3. ¿En qué casos la resta da 0?
4. ¿En qué casos el producto da 0?
5. ¿En qué casos el cociente da 0?
6. ¿En qué casos el producto da 1?
7. ¿En qué casos el cociente da 1?
8. ¿Cuál es el efecto de poner el número 1 como sumando?
9. ¿Cuál es el efecto de poner el número 1 como factor?
10. ¿Cuál es el efecto de poner el número 1 como base?
11. ¿Cuál es el efecto de poner el número 1 como exponente?
12. ¿Cuál es el efecto de poner el número 1 como radicando?

Al contestar estas preguntas habrás observado que:

- al sumar o restar **0** a cualquier número, ese número no cambia;
- al multiplicar o dividir por **1** cualquier número, ese número no cambia;
- al elevar a la potencia **1** cualquier número, ese número no cambia;
- al extraer la raíz cuadrada de **1**, ese número no cambia.

Una operación sobre un número da como resultado el mismo número cuando:

- en la adición y sustracción, uno de los términos es **0** como sumando o como sustraendo;
- en la multiplicación o división, uno de los factores es **1** como divisor o factor;
- en la potenciación o radicación, el número **1** actúa como exponente o como radicando.

*Un número es **elemento neutro** de una operación si el resultado de operar con él sobre cualquier otro número da como resultado ese mismo número.*
*El **0** es el elemento neutro de la adición y la sustracción y el **1** es el elemento neutro del producto y del cociente.*

Es interesante observar las siguientes propiedades de los elementos neutros y de las operaciones:

La suma de un número racional y su opuesto da por resultado el neutro **0**. El número **-a** (opuesto de **a**) es el inverso aditivo de **a**.

El producto de **a** (distinto de 0) por el número racional $\frac{1}{a}$ es el neutro 1. El número $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo de **a**.

El único número racional que no tiene inverso es el **0** porque no hay ningún número que multiplicado por 0 dé como resultado 1. En cambio, si un número se usa como componente de una operación y siempre da como resultado ese mismo número, se dice que el número es **absorbente** en esa operación. Por ejemplo, el número 0 es absorbente en la multiplicación porque cualquier número multiplicado por 0 da como resultado 0. En símbolos $\mathbf{a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0}$.

Análogamente, en la potenciación el número **1** como base es absorbente porque cualquiera sea el valor de **n**, $1^n = 1$.

c) Copiá este cuadro y respondé a las preguntas anotando **sí** o **no** en cada casilla según corresponda.

Pregunta	Como sumando	Como factor	Como base	Como exponente	Como radicando
¿El 0 es neutro?					
¿El 0 es absorbente?					
¿El 1 es neutro?					
¿El 1 es absorbente?					

d) Pensá algunos ejemplos para cada operación y escribí tus conclusiones para la adición, la multiplicación y la potenciación.

TEMA 2: MÁS SOBRE LAS OPERACIONES INVERSAS

A continuación vas a ver algunas particularidades de las operaciones inversas (resta, división y radicación) que se presentaron en el tema **1**.

A

5. Resta o sustracción

Hallar el resultado de la resta o sustracción equivale a responder a la pregunta *¿cuál es el número que sumado al sustraendo da por resultado el minuendo?*

La respuesta es sencilla y podrás encontrarla con los recursos de cálculo que aprendiste en tus primeros años de escolaridad, siempre que se trate de números naturales.

Para los casos en que la resta aparece combinada con otras operaciones es importante conocer un procedimiento más general.

a) Copiá en tu carpeta y completá el siguiente cuadro con la ecuación en suma.

	Resta	Minuendo	Sustraendo	Ecuación en suma
A	-0,5 – 10,3	-0,5	10,3	x + 10,3 = -0,5
B	17 - 42	17	42	x + -42 = 17
C	$\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)$			
D		5,2	-12	
E				$\frac{4}{5}$ r = $\frac{11}{4}$
F		-12,2	-3,08	
G		a	b	r + -b = a

b) Resolvé las ecuaciones que formulaste en el cuadro. Escribí las restas numéricas de la primera columna y el resultado obtenido en cada ecuación.

c) Observá los ejercicios que resolviste y respondé:

1. En la resta **a – b** = **r** ¿qué es **a**?, ¿qué es **b**? y ¿qué es **r**?

2. ¿Es **r** = **-b + a** una solución de la ecuación? ¿Por qué?

3. ¿Es **r** = **a - b** una solución de la ecuación? ¿Por qué?

4. ¿Son **a + -b** y **-b + a** resultados de la resta **a - b**? ¿Por qué?

El resultado de una resta de números racionales es equivalente a la suma del minuendo y el opuesto del sustraendo. En símbolos: ***a - b = a + (-b)***

Cuando se trabaja con números racionales no es necesario plantear la resta como una operación independiente de la suma. Cualquier resta se transforma en la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo.

d) Resolvé en tu carpeta aplicando, para las restas, la regla anterior.

1. $-25 - 17 =$

2. $-16{,}50 - 21{,}35 =$

3. $-\frac{5}{4} - \left(\frac{-7}{5}\right) =$

4. $3 + 2{,}7 - -4 =$

5. $-\frac{1}{4} - \left(\frac{-2}{3}\right) + \left(\frac{-5}{6}\right) =$

A

6. División

Hallar el resultado de una división es equivalente a preguntar ¿cuál es el número que multiplicado por el divisor da como resultado el dividendo? Por ejemplo, 56 ÷ 8 = **c** donde **c** es el cociente entre el dividendo 56 y el divisor 8; el número c resulta de resolver la ecuación: **c** . 8 = 56. Como 7 . 8 = 56 esto es la prueba de que 7 es el resultado correcto del cociente 56 ÷ 8.

a) Copia en tu carpeta y completá el siguiente cuadro.

División	Dividendo	Divisor	Ecuación
1. $45 \div -9$	45	-9	$x \bullet -9 = 45$
2. $210 \div 42$	210	42	$c \bullet 42 = 210$
3. $\frac{2}{3} \div \left(\frac{-1}{2}\right)$			
4.	72	- 12	
5. $\frac{4}{5} \div x = \frac{12}{15}$			
6.			$c \bullet 0{,}8 = 0{,}32$
7.	m	n	$c . n = m$

b) Resolvé las ecuaciones que formulaste en el cuadro. Escribí las divisiones numéricas de la primera columna y el resultado obtenido en cada ecuación.

c) Observá la siguiente serie de igualdades. Copialas y respondé en cada caso cuál es la transformación para pasar a la siguiente ecuación equivalente:

1. En la división $\mathbf{m \div n = c}$ ¿qué es **m**?, ¿qué es **n**? y ¿qué es **c**?

2. La ecuación $\mathbf{c \bullet n = m}$, ¿es equivalente a $\mathbf{c \bullet n \bullet \frac{1}{n} = m \bullet \frac{1}{n}}$? ¿Por qué?

3. ¿Qué resultado da el producto de los factores $\mathbf{n \cdot \frac{1}{n}}$? ¿Es cierto que $\mathbf{c = m \cdot \frac{1}{n}}$? ¿Por qué?

4. ¿Es $\mathbf{c = m \cdot \frac{1}{n}}$ una solución de la ecuación? ¿Por qué?

5. Las expresiones $\mathbf{m \cdot \frac{1}{n}}$ y $\mathbf{\frac{1}{n} \cdot m}$, ¿son resultados de la división $\mathbf{m \div n}$?

El resultado de una división de números racionales es equivalente al producto que se obtiene multiplicando el dividendo por el inverso del divisor. En símbolos: $\mathbf{m \div n = m \cdot \frac{1}{n}}$.

El **0** no tiene inverso y no se puede resolver ninguna división con divisor 0. Así como toda resta entre números racionales se puede transformar en una suma, toda división (con divisor distinto de 0) se puede transformar en una multiplicación.

Para dividir dos números racionales se puede multiplicar el dividendo por el inverso del divisor.

d) Resolvé los siguientes ejercicios:

1. $\frac{2}{3} \div -\frac{5}{5} =$

2. $-0{,}75 \div 3 =$

3. $-100 \div -0{,}01 =$

4. $-0{,}4 \div (3{,}2 - 1{,}8) =$

5. $-\frac{4}{3} \div \frac{5}{8} =$

7. Radicación

En esta actividad se hará uso de las soluciones de las ecuaciones para establecer qué significa la operación de radicación y más adelante la logaritmación.

En la actividad **2** de esta unidad viste que la potenciación no es una operación conmutativa. Eso implica que los dos componentes de la operación (base y exponente) tienen funciones diferentes y no se pueden permutar sin que cambie el resultado o potencia. Por ejemplo, en la expresión $\mathbf{4^3 = 64}$, 4 es la base, 3 es el exponente y 64 la potencia, pero si se permuta el orden de los números 4 y 3 resulta la expresión $\mathbf{3^4 = 81}$ que corresponde a otra potencia diferente.

a) Leé el siguiente texto sobre la radicación.

La **radicación** es una de las operaciones inversas de la potenciación y se aplica cuando, conocido el exponente, se quiere conocer la base que produjo una potencia.

Hallar la raíz de índice **n** de un número **r** significa averiguar qué número **p** elevado a la potencia enésima da como producto **r**. Por ejemplo, la raíz cúbica de 64 es 4 porque 4^3 es 64. La notación simbólica que aprendiste es $\sqrt[3]{64}=4$, que se lee raíz cúbica de 64 es igual a 4.

Según estas consideraciones, hallar la raíz cúbica resulta equivalente a resolver la ecuación $x^3 = 64$.

En el caso de una raíz cuadrada, en el conjunto Q de los números racionales, la ecuación $\sqrt{36} = x$ admite dos soluciones, 6 y también -6 porque 6 • 6 es 36 y también -6 • -6 es 36. Es decir, que el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{36} = x$ es S = {6, -6}.

b) Hallá las soluciones de cada ecuación:

1. $x^5 = 32$

2. $y^3 = -\dfrac{1}{64}$

3. $z^4 = 0{,}0081$

4. $w^2 = \dfrac{64}{121}$

5. $t^2 = -144$

c) Fíjense y analicen lo que escribieron Miguel y Víctor como resultado del ejercicio anterior. Comenten y escriban una conclusión:

$\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$

$\sqrt[3]{-\dfrac{1}{64}} = -\dfrac{1}{4}$ porque $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^3 = -\dfrac{1}{64}$

$\sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3$ porque $0{,}3^4 = 0{,}0081$

$\sqrt{\dfrac{64}{121}} = \dfrac{8}{11}$ porque $\left(\dfrac{8}{11}\right)^2 = \dfrac{64}{121}$

1. ¿Por qué Miguel y Víctor no resolvieron la ecuación $\mathbf{t^2 = -144}$?

2. ¿Debían haber puesto también que $\sqrt[4]{\mathbf{0{,}0081}} = -0{,}3$? ¿Por qué?

Seguramente habrás observado que $(-0{,}3)^4$ da por resultado un número positivo, 0,0081 y por eso también -0,3 es solución de $\sqrt[4]{\mathbf{0{,}0081}} = \mathbf{z}$.
Por otra parte, Miguel y Víctor no resolvieron la ecuación $t^2 = -144$ porque no tiene solución. En efecto, no existe ningún número —ni positivo ni negativo— que elevado al cuadrado dé por resultado un número negativo.

d) Resolvé las siguientes ecuaciones y contestá las preguntas.

$3^m = 81$ $\qquad$ $6^n = 216$ $\qquad$ $-2^b = -16$

$\left(\frac{5}{7}\right)^p = \frac{25}{49}$ $\qquad$ $(0{,}1)^a = 0{,}0001$ $\qquad$ $1^x = 1$

1. ¿Qué lugar ocupa la incógnita en estas ecuaciones?
2. ¿Hay ecuaciones con más de una solución?

Si el problema de hallar un exponente, conocidos la base y el resultado de la potencia, tiene una única solución, puede decirse que el exponente es el logaritmo de dicha potencia en esa base.
Por ejemplo $\mathbf{2^n = 32}$ es equivalente a hallar el logaritmo de 32 en base 2, el resultado es $\mathbf{n = 5}$ y en símbolos se escribe

$$\mathbf{\log_2 32 = 5}$$

base del logaritmo $\uparrow$ $\qquad$ $\uparrow$ logaritmo

*En general: el **logaritmo** en base **b** de un número **n** es el exponente al que hay que elevar la base **b** para obtener **n**:*
$\boldsymbol{\log_b n = p}$ *porque* $\boldsymbol{b^p = n}$.

e) Escribí en símbolos, para cada una de las ecuaciones que resolviste en la consigna **c**, el logaritmo equivalente, por ejemplo $\log_3 81 = 4$.

Como resultado de esta actividad se ve que la potenciación, por ser una operación no conmutativa, tiene dos operaciones inversas. Cuando la incógnita es la base se aplica la radicación y cuando la incógnita es el exponente se aplica la logaritmación.

Para finalizar

En esta unidad trabajaste con las operaciones directas y sus respectivas inversas. Aprendiste que la adición y la sustracción, la multiplicación y la división son operaciones inversas y que hay dos operaciones inversas para la potenciación que son la radicación y la logaritmación.

También comprobaste la importancia de las propiedades de las operaciones, ya que permiten realizar distintos caminos para llegar a un mismo resultado; estos caminos se pueden elegir según la dificultad del cálculo.

Trabajando con los distintos conjuntos numéricos, aprendiste que hay elementos destacados como son el elemento neutro de cada operación y el inverso de cada número. Viste que en los números racionales se habla de opuesto en los problemas aditivos y de inverso en los problemas multiplicativos.

Esperamos que te haya sido útil la revisión de operaciones que ya conocías de años anteriores, analizadas con respecto a sus inversas y la ampliación y profundización de sus propiedades. En las próximas unidades retomarás el trabajo con ecuaciones.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Una fracción

Un problema clásico dice:
Se debe vaciar en un gran jarrón exactamente 4 litros de agua. Se dispone de 2 jarrones, uno de 5 litros y otro de 3 litros.
¿Cómo se pueden medir los 4 litros exactos usando estos jarrones?

2. La criba de Erastóstenes

Los números naturales que tienen tres o más divisores reciben el nombre de ***números compuestos***. Por ejemplo, 6 tiene por divisores 1, 2, 3, 4, 6 y 12; el número natural 49 tiene por divisores: 1, 7 y 49.
Un número natural **n** es primo si tiene solamente dos divisores, el 1 y el mismo número, de tal modo que n ÷ 1 = n y n ÷ n = 1. El número 1 no es primo ni compuesto porque tiene un único divisor que es el número 1, vale decir 1 ÷ 1 = 1.
Eratóstenes fue un sabio griego que creó en el siglo III a. C. un método para encontrar los números primos menores que 100. Partió de un cuadro como el siguiente y fue suprimiendo ordenadamente los múltiplos de 2 (sin contar el 2), los de 3 (sin contar el 3) y así sucesivamente hasta agotar el procedimiento. Ese cuadro se conoce como Criba de Eratóstenes.
El desafío consiste en que construyas paso a paso la criba y encuentres una respuesta a algunas preguntas.

- ¿Cuál es el menor número compuesto que aparece en la tabla? ¿Por qué?
- Después de haber suprimido los divisores de los números hasta 5, ¿es necesario suprimir los divisores de 6? ¿Por qué?
- Después de suprimir los múltiplos de 47, ¿es necesario continuar con el procedimiento? ¿Por qué?
- ¿Cuántos números primos menores que 100 encontraste? ¿Puede haber más?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

3. Números de 6 cifras

Los números de 6 cifras de la forma **cdu cdu**, por ejemplo **243 243**, están compuestos por varios factores primos. ¿Qué números primos son divisores de todos los números de la forma **cdu cdu**? ¿Por qué?

UNIDAD 9

Propiedad fundamental de la semejanza

En el lenguaje de todos los días, las palabras *semejante* y *parecido* se usan como sinónimos para referirse a personas y objetos que tienen algo en común. Hay figuras que no son exactamente iguales, sino muy parecidas entre sí porque, si bien tienen la misma forma, no tienen el mismo tamaño. Por ejemplo, el original y la ampliación de una fotografía son iguales en todo menos en el tamaño. En Matemática se dice que esas figuras son semejantes y cuando decimos "de la misma forma" no hablamos solamente de figuras parecidas, sino que nos referimos a otras precisiones sobre sus características que descubrirás a medida que trabajes en esta unidad. La construcción de figuras semejantes tiene muchas aplicaciones interesantes en la arquitectura y en el arte.

A

1. Figuras semejantes

Vas a comenzar por la búsqueda de procedimientos que permiten obtener una figura que tenga la misma forma que otra.

a) Recordá lo que ya estudiaste en la unidad **9** del CUADERNO DE ESTUDIO **2** leyendo el texto que sigue.

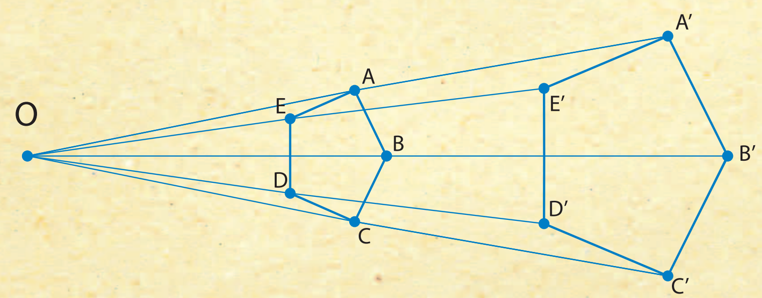
Si en dos figuras los vértices correspondientes están alineados según rectas que se cortan en un único punto o centro y los ángulos correspondientes son iguales, entonces las dos figuras tienen la misma forma y se dice que una figura es la imagen de la otra, por una transformación llamada *homotecia*.

Para identificar una homotecia es necesario señalar un punto (centro) y un número (razón).

En este caso, la razón es el cociente entre pares de distancias, es decir, entre la distancia al centro de un punto cualquiera P' de la imagen y la distancia al centro del punto P que le corresponde en la figura original.

Por ejemplo en la figura anterior, a razón k es el cociente.

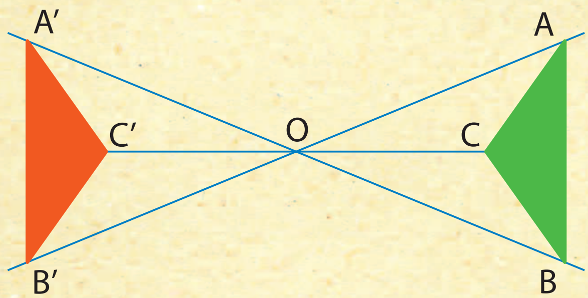
$k = \frac{A'C}{AO} = \frac{B'C}{BO} = \frac{C'C}{CO} = \frac{D'C}{DO} = \frac{E'C}{EO} = 2.$



El polígono A'B'C'D'E' es la imagen de ABCDE por la homotecia de centro O y razón k.

Cuando la razón **k** es un número positivo, la homotecia es directa como en la figura anterior. Si la razón es un número negativo, la homotecia es inversa.

El signo de la razón depende de la posición de O respecto de A y A'. Si la razón es positiva, A y su imagen A' se encuentran sobre una misma semirrecta de origen O; en cambio, si A y A' pertenecen a semirrectas opuestas de origen O, la razón es negativa y el centro se encuentra entre A y A'.



Al triángulo ABC se le ha aplicado una homotecia de centro O y razón -1.

b) Construí las siguientes figuras según el procedimiento que se indica.

1. Dibujá en tu carpeta un triángulo **ABC**. Marcá un punto **O** exterior y construí la imagen **A'B'C'** que resulta de aplicar a **ABC** la homotecia de centro **O** y razón -2.

2. Dibujá un triángulo **MNP**, marcá un punto interior **O** y construí la imagen **M'N'P'** aplicando a **MNP** la homotecia de centro **O** y razón 1,5.

3. Dibujá un cuadrilátero cualquiera **ABCD** y seguí las mismas instrucciones que en los puntos **1** y **2**.

c) ¿Por qué considerás que la aplicación de homotecias es un buen procedimiento para hallar figuras semejantes? Discutí tu respuesta con tus compañeros.

A 2. Distintas definiciones de semejanza

En los libros de Matemática se pueden encontrar diversas definiciones de semejanza. En esta actividad vas a analizar dos de ellas.

a) Leé las siguientes definiciones.

- Dos rectángulos son semejantes si en cada uno de ellos la razón entre el largo y el ancho es la misma.
- Dos rectángulos son semejantes si sus respectivos largos tienen la misma relación que sus anchos.

b) Observá los dos rectángulos que aparecen a continuación y,

1. escribí, en símbolos, la relación a la que se refiere la primera de las definiciones anteriores;

2. hacé lo mismo que en el punto anterior utilizando la segunda definición.

c) ¿Considerás que las dos definiciones son equivalentes? ¿Por qué?

d) Tomá una hoja de papel de tamaño A4. Medí el largo y el ancho y anotá sus medidas.

1. Marcá los puntos medios de los lados más largos, unilos con una línea y cortá la hoja en dos partes por esa línea. ¿Cómo son los rectángulos que obtuviste respecto al rectángulo original?

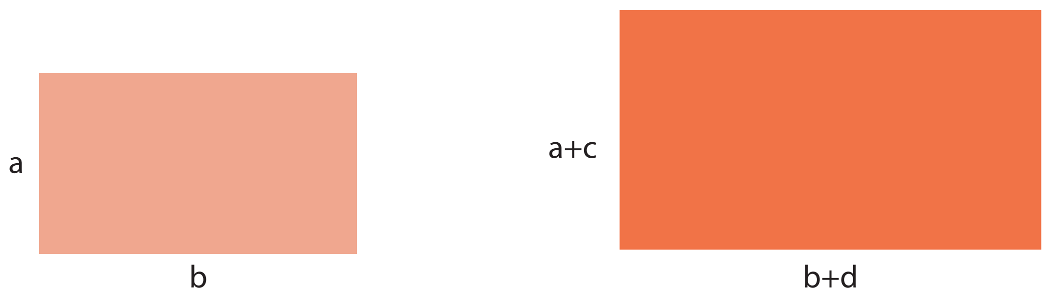
2. Cortá otra vez una de las partes en dos. ¿Cómo son respecto a la anterior? ¿Y con respecto a la hoja entera?

3. Volvé a hacer lo mismo y verificá a través de las medidas del largo y el ancho si sigue habiendo la misma relación.

4. Si en lugar de partir de una hoja tamaño A4, hubieras tomado un papel tamaño oficio, las relaciones anteriores, ¿también se cumplirían?

e) Dibujá dos rectángulos iguales de lados **a** y **b**. Al largo y al ancho de uno de ellos agregale dos segmentos, **c** y **d** que sean respectivamente proporcionales a **a** y a **b**, es decir: $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$, por ejemplo $\mathbf{c} = \frac{1}{3}\mathbf{a}$ y $\mathbf{d} = \frac{1}{3}\mathbf{b}$

El nuevo rectángulo de lados **a** + **c** y **b** + **d**, ¿es semejante al primero? Explicá por qué.



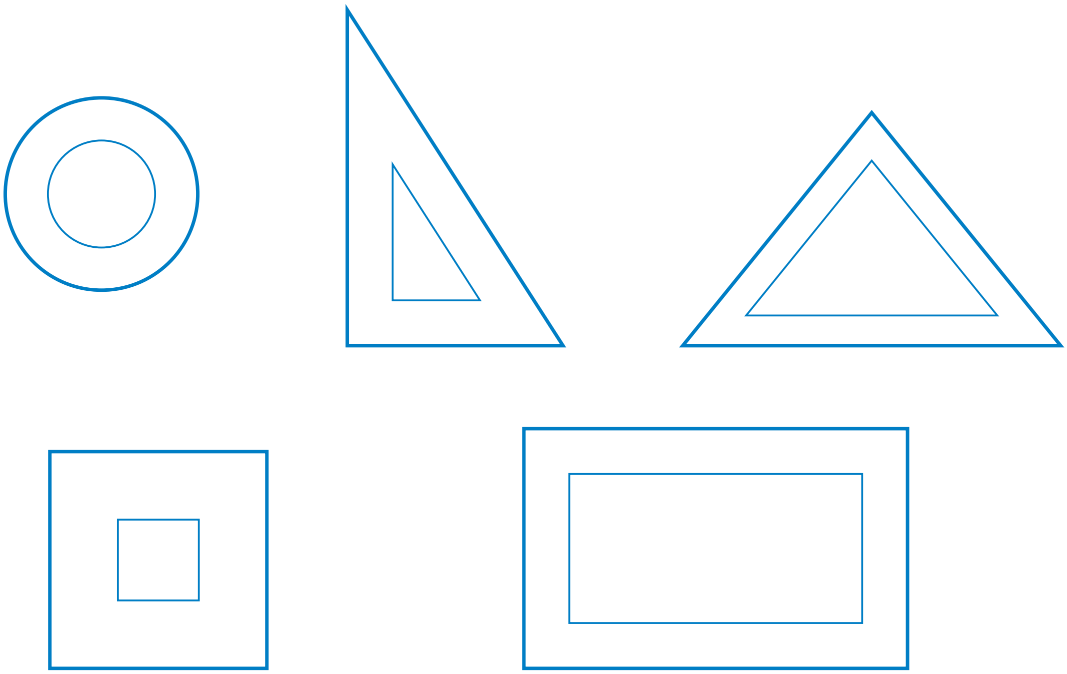
Las experiencias anteriores permiten enunciar que:
para que dos rectángulos sean semejantes es suficiente que sus lados sean proporcionales.

A

3. ¿Son semejantes?

A continuación analizarás otros procedimientos de construcción de figuras.

a) A las figuras que se encuentran a continuación se les agregó una banda de ancho constante. Observalas con atención y resolvé las consignas. Tal vez te ayude calcar las figuras para poder trabajar con ellas.



1. Para obtener figuras semejantes, en todos los casos, ¿basta agregarle a la figura inicial una banda de ancho constante en todo su contorno?
2. ¿Sucede lo mismo si a una figura se le quita una banda de ancho constante en todo su contorno?
3. Analizá caso por caso y compará tus observaciones con las de tus compañeros.
4. En el caso de un rectángulo, ¿qué sucede al quitarle sucesivamente bandas del mismo ancho en todos los lados? Los sucesivos rectángulos que resultan, ¿tienen la misma forma que el original? Los vértices, ¿quedan alineados sobre las diagonales del rectángulo original? Compará tus respuestas con las de tus compañeros.

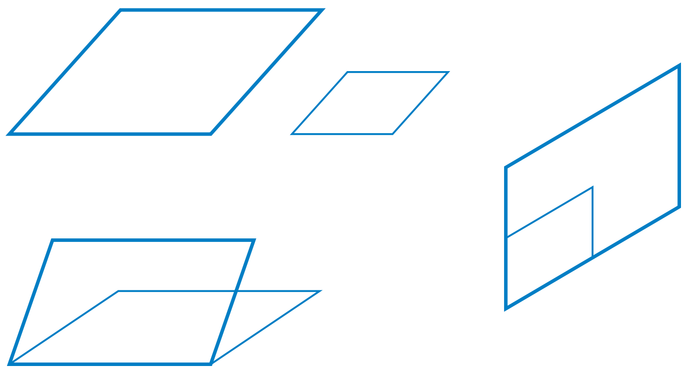
Habrás podido observar que en las figuras triangulares o en los polígonos regulares como el cuadrado, al agregar o quitar una banda de ancho constante se obtiene una figura semejante a la original. Esto no sucede en el caso de polígonos irregulares como el rectángulo: si bien con ese procedimiento se obtiene una figura del mismo número de lados no tiene la misma forma. Entonces, se puede concluir que algunos procedimientos para generar triángulos semejantes no se pueden extender a todas las figuras.

Para la siguiente actividad vas a necesitar varillas articuladas.

4. Otros polígonos semejantes

Para realizar esta actividad deberás armar un paralelogramo con las varillas articuladas. Sus lados articulados te permitirán analizar qué ocurre al moverlos.

a) Observá las siguientes figuras para responder a las preguntas del ítem **b**.



Habrás observado que los dos paralelogramos de arriba tienen lados proporcionales, pero no son semejantes y lo mismo ocurre en los de abajo a la derecha. Los de abajo a la izquierda tienen lados iguales pero son paralelogramos distintos con ángulos diferentes.

b) Comenten con otros compañeros las posibles respuestas a estas preguntas:
Para que dos paralelogramos sean semejantes,

1. ¿es suficiente con que los lados consecutivos sean proporcionales?

2. ¿se puede hablar, por ejemplo, de la forma de un único paralelogramo cuyos lados están en la razón 2 : 3?

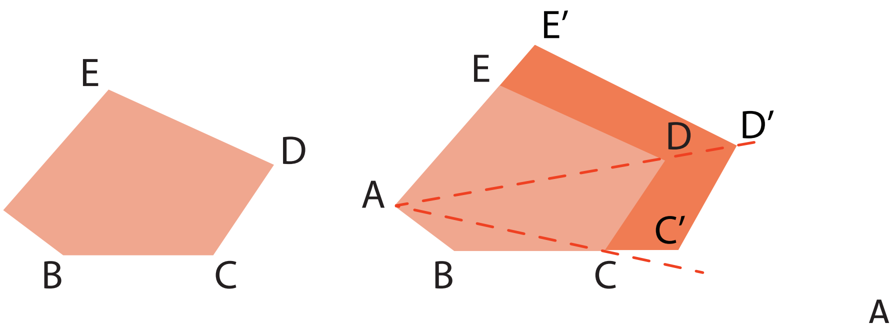
Habrán concluido que:
para que dos paralelogramos sean semejantes, además de la proporcionalidad de sus lados, es necesaria la igualdad de sus ángulos.

c) Copiá en tu carpeta y completá la siguiente afirmación seleccionando una de las dos opciones y justificá tu elección.

> Para afirmar que dos paralelogramos tienen todos sus ángulos iguales...:
> **1.** …es necesario verificar la igualdad de todos sus ángulos, uno por uno.
> **2.** …es suficiente asegurar que los dos paralelogramos tienen un ángulo igual.

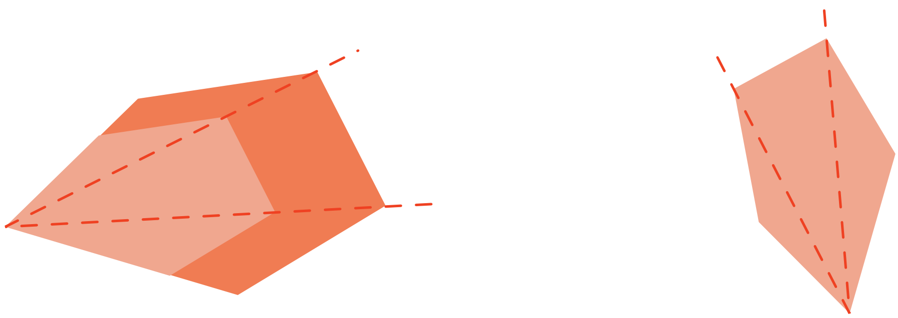
d) Dibujá un pentágono irregular ABCDE cualquiera.

1. Elegí un vértice, por ejemplo A.
2. A partir de él, trazá las semirrectas a las que pertenecen las diagonales AD y AC.
3. Remarcá con color el lado BC y trazá BC' prolongando BC 1 cm a partir del extremo C.
4. Trazá un segmento C'D' paralelo a CD de modo que D' pertenezca a la prolongación de la diagonal.
5. Trazá D'E' paralelo a DE.
6. Trazá E'E.



7. Observá tu dibujo y respondé:
- El polígono **ABC'D'E'**, ¿es semejante al polígono **ABCDE**? ¿Por qué?

e) Observá el dibujo que aparece a continuación y respondé:
1. En la figura de la izquierda, ¿el pentágono más pequeño es semejante al pentágono más grande? ¿Por qué?



2. El pentágono de la derecha resulta de haber aplicado al más pequeño dos movimientos sucesivos: una traslación hacia la derecha y luego una rotación de 90°. Este tercer pentágono, ¿es semejante al más grande?

Como resultado de estas experiencias habrás descubierto que dos figuras colocadas en cualquier posición son semejantes si tienen los respectivos ángulos iguales y los respectivos lados proporcionales.

La semejanza presenta un aspecto más dinámico que las homotecias. Esto es así porque las figuras semejantes pueden ser consideradas en posiciones muy distintas y seguirán siendo semejantes aunque se les apliquen diversas combinaciones de movimientos, de rotación y traslación, además de ampliaciones y reducciones.

5. Para ver cuánto aprendiste

a) Reunite con un compañero para leer los siguientes enunciados, algunos son verdaderos y otros falsos. Luego de discutir, analizar y comparar las respuestas, copien en sus carpetas todas las afirmaciones que sean verdaderas. Recuerden que para probar la falsedad de un enunciado, basta con encontrar un contraejemplo, es decir, un ejemplo en el que el enunciado resulte falso.

1. Para identificar un triángulo es suficiente con conocer un lado y los dos ángulos adyacentes.
2. Para identificar un triángulo es suficiente con conocer las medidas de los tres ángulos.
3. Conociendo la medida de uno de los ángulos de un triángulo escaleno se puede conocer la medida de los demás ángulos.
4. Si se duplican los lados de un triángulo, se obtiene otro triángulo, semejante al primero.
5. Para construir un paralelogramo es suficiente con conocer dos lados consecutivos.
6. Para construir un rectángulo es suficiente con conocer dos lados consecutivos.
7. Para que dos paralelogramos sean semejantes, además de la proporcionalidad de sus lados, es necesaria la igualdad de sus ángulos.
8. Conociendo la medida de uno de los ángulos de un paralelogramo se puede conocer la medida de los demás.
9. Los polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.

6. Semejanza de triángulos

En esta actividad realizarás ciertas experiencias que te permitirán establecer las condiciones necesarias y suficientes para que dos triángulos sean semejantes.

a) Dibujá un triángulo cualquiera ABC. Medí sus lados y sus ángulos con la mayor precisión que puedas. Anotá las medidas de los lados AB, BC y CD y de los ángulos $\hat{a}$, $\hat{b}$ y $\hat{c}$.

b) Tomá como datos las medidas de los ángulos **a** y **b** que anotaste y construí un triángulo A'B'C' semejante al ABC sabiendo que el lado A'B' = 1,5 AB.

c) Construí otro triángulo A"B"C" semejante al ABC sabiendo que A"B" = 2 AB , A"C"= 2 AC, y â" = â.

d) Construí otro triángulo EFG semejante al ABC sabiendo que EF = 0,5 AB, EG = 0,5 AC, y FG = 0,5 BC.

e) Si de dos triángulos sólo se sabe que dos de sus lados son respectivamente proporcionales, ¿se puede asegurar que un triángulo es semejante al otro? ¿Por qué?

• • • Criterios de semejanza de triángulos

Después de haber realizado las experiencias anteriores aprendiste que para saber si dos triángulos son semejantes basta comprobar que se cumple alguna de las siguientes condiciones llamadas *criterios de semejanza de triángulos*.

CRITERIO 1: Los dos triángulos tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.

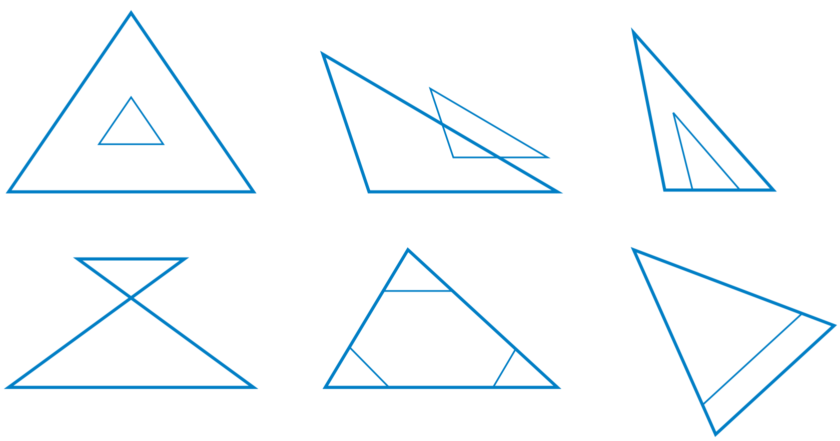
CRITERIO 2: Los dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

CRITERIO 3: Los dos triángulos tienen los tres lados proporcionales.

f) Según la experiencia que realizaste en la consigna **b** de la actividad **3**, una banda de ancho constante agregada o quitada a un rectángulo modifica la proporción entre sus lados, vale decir que modifica su forma. ¿Por qué el mismo procedimiento aplicado a los triángulos no modifica su forma?

g) Observá los siguientes triángulos y respondé.

- ¿Es cierto que lo que determina la semejanza de dos triángulos es el paralelismo de sus lados? ¿Por qué?



El establecimiento de los criterios de semejanza permite afirmar que en el caso del triángulo —único polígono rígido— las dos condiciones de semejanza (lados proporcionales o ángulos respectivamente iguales) son inseparables y una de ellas implica necesariamente la otra. Así, dos triángulos cuyos ángulos son ordenadamente iguales tienen también lados proporcionales y recíprocamente, si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, también sus ángulos son iguales.

Para finalizar

El trabajo que realizaste en esta unidad te permitió vincular lo que ya sabías acerca de la homotecia con la idea de semejanza entre figuras. El concepto de semejanza es más amplio que el de homotecia. En este último, las figuras se pueden agrandar o achicar, pero su posición queda rígidamente determinada por un punto (centro) y un número (razón). En cambio la semejanza presenta un aspecto más dinámico, las figuras pueden ser consideradas en posiciones muy distintas y seguirán siendo semejantes aunque se les apliquen diversas combinaciones de movimientos de rotación y traslación además de ampliaciones y reducciones.

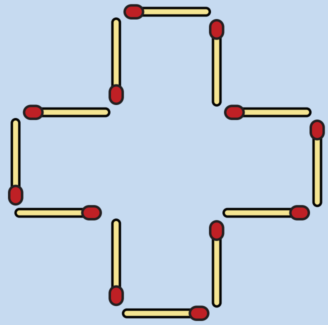
Exploraste las condiciones necesarias y suficientes para que un polígono sea semejante a otro y en particular los criterios de semejanza entre triángulos, criterios que pueden reducirse al paralelismo entre sus lados o la igualdad de sus ángulos.

Lo más importante es que a través de este tipo de actividades adquieras la clara conciencia de que un concepto matemático, incluso si es muy cercano a la experiencia, debe tener un significado preciso y unívoco.

En la unidad siguiente y a partir de lo que aprendiste en esta conocerás el Teorema de Tales (siglo VI a. C.) que desde el punto de vista histórico es probablemente, la primera demostración de una propiedad geométrica mediante el razonamiento lógico de la que se tenga registro.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

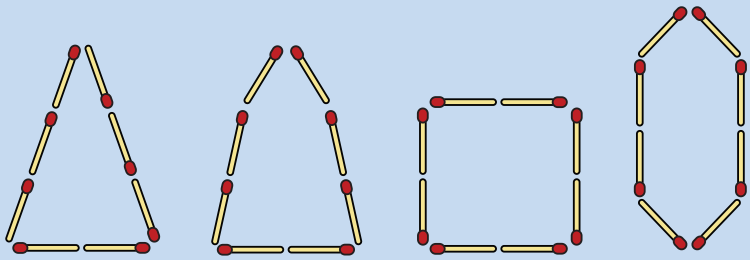
1. Con 12 fósforos



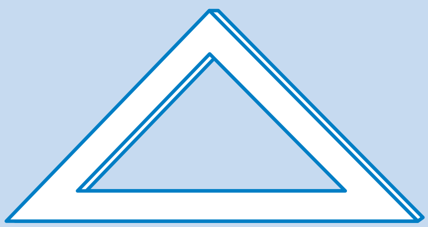
Con doce fósforos se puede construir la figura de una cruz (podrás verlo en el ejemplo), cuya área equivale a la suma de las superficies de cinco cuadrados limitados por fósforos. Cambiá la disposición de los fósforos de tal modo que el contorno de la figura obtenida sea equivalente sólo a cuatro de esos cuadrados.

2. Con ocho fósforos

Con ocho fósforos se pueden construir varias figuras convexas, por ejemplo las que se muestran a continuación. Estas figuras tienen distinta superficie. El desafío consiste en construir con 8 fósforos de perímetro la figura de superficie máxima.



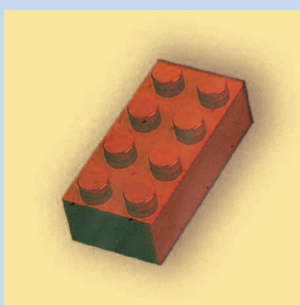
3. Las figuras semejantes



Sin hacer mediciones ni cálculos, ¿cómo ayudarías a una persona que no hubiera estudiado semejanza en esta unidad a responder a las siguientes preguntas?

- En una escuadra de dibujo, ¿son semejantes los triángulos exterior e interior?
- En un marco rectangular, ¿son semejantes los rectángulos exterior e interior?

4. Un ladrillo pequeño



Un ladrillo, de los usados en la construcción, pesa unos cuatro kilogramos. ¿Cuánto pesará un ladrillito de juguete hecho del mismo material y cuyas dimensiones: —largo, ancho y alto— sean todas cinco veces menores que las de un ladrillo común?

UNIDAD 10 Teorema de Tales

En esta unidad trabajarás con rectas paralelas y con la proporcionalidad entre segmentos.

El camino que recorrerás comienza con la revisión de la noción de medida para aplicarla luego a la razón entre dos segmentos cualesquiera y, más adelante,a la proporcionalidad entre cuatro segmentos. Por último verás la proporcionalidad entre segmentos que están ubicados sobre dos rectas que atraviesan un conjunto de rectas paralelas. Este último caso fue observado y analizado desde la Antigüedad y dio origen a lo que hoy se conoce como Teorema de Tales. Tales fue uno de los siete sabios de Grecia que vivió entre los siglos VII y VI a.C. Ese teorema es uno de los más antiguos y tiene vigencia hasta hoy porque sus aplicaciones son múltiples, tanto en problemas específicos de la Matemática como de otras ciencias y también en la arquitectura y en el arte.

TEMA 1: RAZONES Y PROPORCIONES ENTRE SEGMENTOS

En unidades anteriores trabajaste con razones entre números. Entonces, parece apropiado preguntarse si también para representar relaciones cuantitativas entre segmentos es posible recurrir a las razones entre sus longitudes, medidas con una misma unidad. Las actividades que siguen te permitirán indagar acerca de razones y proporciones geométricas entre las medidas de segmentos.

A

1. La razón entre dos segmentos

Para hallar la razón entre dos segmentos cualesquiera primero vas a revisar el concepto de **medida** y el de **razón**.

!

*Recordarás que cuando se expresa el valor de una cantidad, la **medida** es el número que acompaña a la unidad elegida. Por ejemplo, cuando se dice que el largo de un lápiz es de 19,5 cm, eso quiere decir que la unidad elegida (1 centímetro) entra 19 veces y media en la longitud del lápiz. Entonces 19,5 es la medida del lápiz expresada en la unidad centímetro. También aprendiste que para hallar la **razón** entre dos cantidades se efectúa el cociente entre sus medidas que deben estar expresadas en una misma unidad. Por ejemplo, la relación entre las distancias de una ciudad a otras dos se puede expresar mediante una razón. Por ejemplo, la distancia de la ciudad de Santa Rosa a Comodoro Rivadavia es de 1288 km y la distancia de Santa Rosa a Córdoba, 644 km. Esa relación se expresa:* $\frac{1288 \text{ km}}{644 \text{ km}} = 2$

El número 2 es la razón entre ambas distancias e indica el número de veces que la distancia menor está contenida en la mayor.

a) En primer lugar, calculá la razón entre los dos segmentos que aparecen en la imagen.

b) Respondé en tu carpeta:

1. ¿Cúal es la medida de **a** y de **b** si se elige como unidad el centímetro?
2. ¿Cuál es la razón entre sus medidas?
3. Repetí el cálculo de la razón empleando como unidad de medida el milímetro y luego el decímetro.
4. ¿Cuál es tu conclusión?

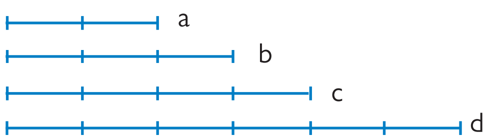
Como habrás comprobado, en todos los casos la razón es 4. Es decir que aunque cambie la unidad elegida para medir ambos segmentos, el segmento **b** entra 4 veces en el segmento **a**. En consecuencia, se puede afirmar que la razón de dos segmentos es igual a la razón de sus medidas expresadas en una misma unidad.

2. Proporcionalidad entre segmentos

Para explorar la proporcionalidad de segmentos vas a trabajar con dos pares de segmentos dados, pero en un cierto orden. Esto significa que de los cuatro segmentos se compara la razón entre los dos primeros con la razón entre los dos últimos.

a) Los cuatro segmentos dibujados a continuación son: **a, b, c, d**.

1. Calculá la razón entre los segmentos **a** y **b**.
2. Calculá la razón entre los segmentos **c** y **d**.



3. Compará las razones que obtuviste en los puntos **1** y **2**.
4. Escribí la igualdad de las razones como una proporción.

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Cuatro segmentos ordenados **a, b, c, d**, forman una proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos. En símbolos **a, b, c, d** son proporcionales si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ también se puede indicar mediante la expresión **a** ÷ **b** = **c** ÷ **d**.

Debido a la ubicación de los elementos al escribir la proporción, **a** y **d** se llaman **extremos** y **b** y **d** se llaman **medios**.

b) Dibujá cuatro segmentos **a, b, c, d** cuyas longitudes estén en relación $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$= . Indicá la longitud de cada uno en decímetros o en centímetros. Recordá que tenés que elegir la misma unidad de longitud para medir los cuatro segmentos.

c) Dibujá dos segmentos cualesquiera **m** y **r**. Dibujá otros dos segmentos **s** y **p** que sean proporcionales a **m** y **r**.

1. Escribí la proporción en símbolos y luego en forma numérica.

d) Calculen la longitud que tiene el segmento **t** sabiendo que **q, e, n, t** forman una proporción y que las respectivas longitudes son: **q** = 2,5 cm, **e** = 5 cm y **n** = 3,5 cm.

1. Hallen la longitud del segmento **t**.
2. Dibujen, cada uno en su carpeta, los cuatro segmentos.
3. Comparen el trabajo con los de otros compañeros y si tienen dudas consulten con el docente.

Para la actividad siguiente necesitarás lápiz, regla graduada, hojas lisas y hojas rayadas.

3. Propiedad de los segmentos entre paralelas

Hasta aquí comparaste segmentos proporcionales ubicados en el plano en cualquier posición. Lo que aprendiste sobre proporcionalidad de segmentos te va a servir para explorar las relaciones entre segmentos ubicados sobre dos rectas que atraviesan a un conjunto de rectas paralelas.

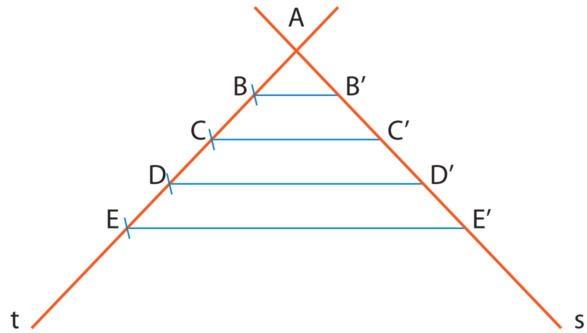
a) Tomá una hoja lisa y dibujá en ella dos rectas **s** y **t** que se corten en un punto A.

1. Marcá sobre **s** cuatro puntos ubicados cada 2 cm a partir de A y llamalos B, C, D, E.
2. Marcá sobre **t** un punto B'.
3. Marcá una recta **b** que pase por B y y por B'. Trazá rectas **c, d** y **e** paralelas a la recta **b** por los puntos C, D y E y llamá C' , D', E' a los puntos en los que cortan a la recta **t**. Quedan determinadas varias paralelas cortadas por dos transversales.
4. Releé los criterios de semejanza entre triángulos que aprendiste en la consigna **e** de la actividad **6** de la unidad anterior y respondé.

- ¿Te parece necesario medir los segmentos AB', B'C', C'D', y D'E' para verificar que son iguales? ¿Por qué?

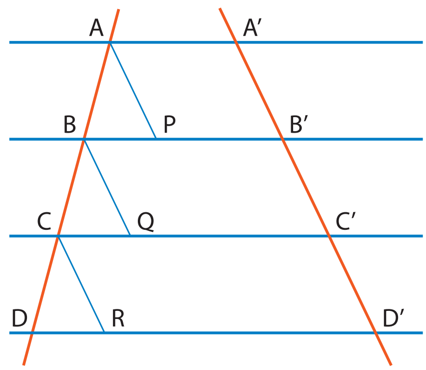
Si varias rectas paralelas son cortadas por dos transversales a **segmentos iguales** en una de ellas **corresponden segmentos iguales** en la otra.

En la construcción anterior se te indicó que tomaras segmentos de 2 cm. Pero la igualdad entre los segmentos determinados sobre las dos transversales por un conjunto de paralelas se puede generalizar a las situaciones en las que los segmentos tienen cualquier longitud mediante recursos geométricos; la condición es que los segmentos que están sobre la misma recta sean iguales.



b) Observá que en la siguiente figura cuatro rectas paralelas determinan segmentos iguales sobre una recta: AB = BC = CD; los puntos A', B', C' y D' son las intersecciones de las mismas paralelas con otra recta transversal y los segmentos AP, BQ y CR son paralelos a A'D'.

1. ¿Qué clase de cuadriláteros son AA'B'P, BB'C'Q y CC'D'R? ¿Por qué?
2. Se puede asegurar que A'B', B'C', C'D' son iguales? ¿Por qué?
3. Si las dos transversales fueran rectas paralelas, ¿se cumpliría la condición de igualdad entre los segmentos? ¿Por qué?



Esta propiedad de igualdad entre los segmentos determinados por un conjunto de paralelas sobre dos rectas transversales se puede enunciar mediante la siguiente expresión:

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos iguales sobre una recta transversal, también determinan segmentos iguales sobre cualquier otra recta transversal.

*La expresión anterior se conoce como **condición previa para el Teorema de Tales**. Es una propiedad muy importante en Geometría porque sus aplicaciones permiten resolver interesantes cuestiones, por ejemplo, la partición de un segmento.*

Para la siguiente actividad vas a necesitar papel de calcar o transparente, hojas rayadas, regla, compás y lápiz.

4. División de un segmento en partes iguales

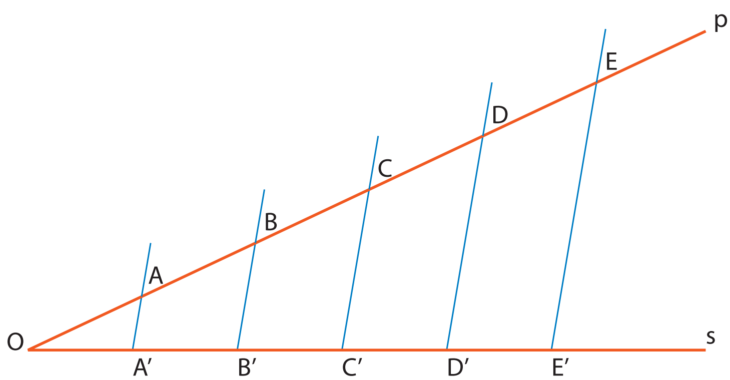
Muchas veces se necesita dividir un segmento en partes iguales, o bien, es necesario determinar una fracción de un segmento. La propiedad de los segmentos entre paralelas permite encontrar respuesta a estos dos tipos de problemas.

a) Para dividir el segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ en 5 partes iguales, segui el siguiente procedimiento:

1. Dibujá el segmento **AB** en un papel transparente.
2. Tomá una hoja rayada, superponé el dibujo del segmento **AB** sobre la hoja rayada de manera tal que el extremo A se apoye en un renglón y B en otro renglón que esté a cinco espacios del primero.
3. Marcá sobre el segmento los puntos de intersección con cada renglón.
4. ¿Cómo son las cinco partes en que queda dividido **AB**? ¿Por qué?

b) Para la división de un segmento cualquiera en partes iguales también se puede seguir otro procedimiento geométrico.

1. Dibujá un segmento cualquiera **s**. Trazá una semirrecta con origen O en uno de los extremos del segmento **s** y con la ayuda del compás marcá sobre ella 5 puntos a igual distancia, llamalos A, B, C, D y E.
2. Uní E con el otro extremo de **s** que llamarás E´.
3. Trazá por A, B, C y D paralelas a EE' que corten al segmento **s** en A', B', C' y D'.
4. ¿Los segmentos determinados sobre OE' son iguales? ¿Por qué?



5. Repetí el ejercicio sobre otro segmento **p** = **s** tomando la semirrecta de origen O con distinta inclinación, ¿los puntos A', B', C' y D' sobre **p** están en la misma posición que en el segmento **s**? ¿Por qué?

Habrás comprobado que la solución del problema de dividir un segmento en partes iguales no depende de la semirrecta auxiliar que se trace ni de la longitud de los segmentos iguales que se determinen sobre esa semirrecta, sino de la condición previa para el Teorema de Tales que aprendiste en la actividad **3**.

c) Para aplicar lo que aprendiste realizá la división de un segmento **AB** en dos segmentos, **AC** y **CB** tales que **AC** $= \frac{2}{7}$ **AB**.

d) El segmento **CB** que dibujaste en la consigna anterior, ¿qué parte es del segmento **AB**? ¿Por qué?

> Observá que en la copnsigna **b** de esta actividad seguiste un procedimiento geométrico que también se puede aplicar cuando se trata de encontrar una fracción de una longitud dada, como en el caso **c**.

Hasta ahora trabajaste con rectas paralelas que cumplen con la condición previa del **Teorema de Tales** en la que las rectas paralelas se encuentran a igual distancia entre sí. En el tema siguiente verás el Teorema de Tales que avanza en la generalización de la propiedad cuando las rectas paralelas se encuentran a cualquier distancia entre ellas.

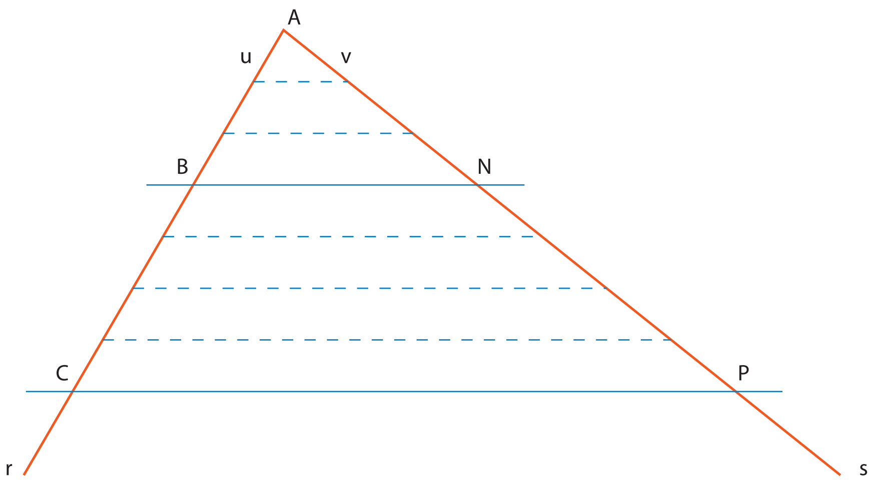
TEMA 2: TALES DE MILETO

A partir de observar el paralelismo con que los rayos del Sol llegan a la Tierra, el gran filósofo griego Tales de Mileto (624-547 a. C.) aplicó esa condición de paralelismo para efectuar mediciones que hasta ese momento parecían imposibles de realizar. Las siguientes actividades te permitirán comprender las relaciones establecidas por Tales.

A

5. Teorema de Tales

a) Observá las rectas paralelas cortadas por las transversales **s** y **r** que se muestra en la figura. Los segmentos sobre la recta **r** son iguales a **u** y los segmentos de la recta **s** son iguales a **v**.



1. Tomando **u** como unidad de medida en **r** el valor de *AB* es igual **3u** y el de *BC* es **4u**.
$\overline{AB} = 3u$ $\overline{BC} = 4u$

2. Escribí los valores de los segmentos **AN** y **NP** tomando como unidad **v**.

3. Calculá las razones $\mathbf{\frac{AB}{BC}}$ y $\mathbf{\frac{AN}{NP}}$, ¿forman una proporción? ¿Por qué?

4. Escribí la razón que forman los segmentos **AB**, **BC**, **AN** y **NP**.

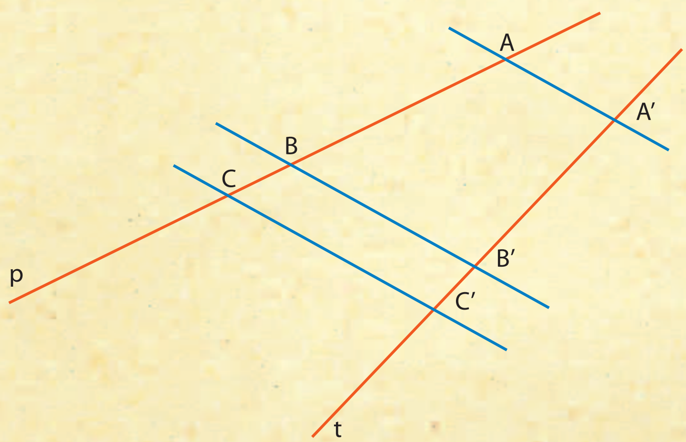
5. ¿En qué relación están los segmentos **AB** y **AC**? ¿Los segmentos **AB**, **AC**, **AN** y **AP** son proporcionales?

6. ¿Pensás que si hubieras tomado una unidad diferente que **u**, los segmentos dejarían de ser proporcionales? ¿Por qué?

Las expresiones $\frac{AB}{BC} = \frac{AN}{NP}$ y $\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AP}$ ponen en evidencia la relación de proporcionalidad entre los segmentos ubicados sobre las rectas **r** y **s**.

Este es el enunciado del teorema que hizo famoso a Tales de Mileto:
Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados sobre una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes determinados sobre la otra transversal.

Por ejemplo, los segmentos *AB* y *BC* determinados sobre la recta **p** son proporcionales a los segmentos correspondientes *A'B'* y *B'C'* determinados sobre **t**. Es decir que $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$



También se cumple la **propiedad recíproca** del Teorema de Tales. O sea, que a partir de la proporcionalidad entre segmentos sobre las transversales surge como consecuencia el paralelismo entre las rectas determinadas por sus extremos.

b) Para comprobar la propiedad recíproca del Teorema de Tales trabajarás con un ejemplo.

1. Dibujá en una hoja lisa dos rectas que se corten en un punto A y llamalas **m** y **t**.

2. Marcá sobre **m** dos segmentos consecutivos **AB** y **BC** que estén en una cierta relación, por ejemplo $\frac{2}{3}$, y marcá sobre **t** otros dos segmentos **AB'** y **B'C'** que estén en la misma relación que **AB** y **BC**, por ejemplo **AB** = 3 cm; **BC** = 5 cm; **AB'** = 1,5 cm; **B'C'** = 2,5 cm.

3. Trazá una recta que pase por los puntos B y B' y otra recta por los puntos C y C', ¿resultan paralelas? ¿Por qué?

4. ¿Ocurrirá lo mismo con cualquier otra cuaterna de segmentos proporcionales?

A

6. Aplicaciones del Teorema de Tales

En la actividad **4** dividiste un segmento en partes iguales aplicando la condición previa del Teorema de Tales. Ahora la aplicación de este teorema te permite lograr geométricamente la división de un segmento en dos partes que guarden entre sí una determinada razón.

a) Usando una hoja rayada y un papel transparente dividí un segmento **PQ** de 9 cm de longitud en dos partes respectivamente proporcionales a 3 y 4 (en el punto a de la actividad **4** resolviste un problema parecido).

1. Explicá brevemente cómo procediste para dividir el segmento.

2. Consultá con tu docente acerca de tu procedimiento.

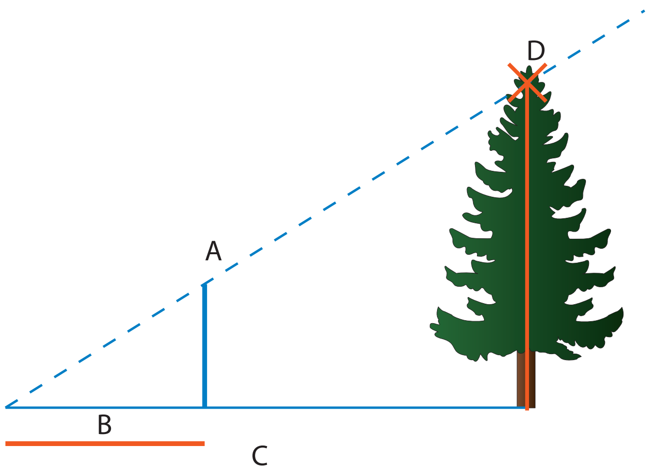
b) Usá los mismos recursos que aplicaste en la consigna anterior para determinar geométricamente un segmento **x** que sea el cuarto proporcional de otros tres segmentos. Es decir, que cumpla la proporción $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{x}$, por ejemplo, para AB =3cm, BC = 4cm y AM = 4,5cm.

c) Otra aplicación interesante del Teorema de Tales es emplear la propiedad para medir la altura de un árbol o de un objeto cualquiera a cuyo extremo no se puede acceder.

1. Observá el gráfico en el que:
- D es la altura de un árbol a medir;
- C es la longitud de la sombra del árbol en un momento dado;
- A es la altura conocida de otro objeto, por ejemplo, una persona;
- B es la longitud de la sombra de la persona en ese mismo momento.

2. ¿Es cierto que la fórmula $D = \left(\frac{A}{B}\right)$ permite calcular la altura real del árbol? ¿Por qué?

3. Luego de resolver esta actividad, compará con tus compañeros las jus-



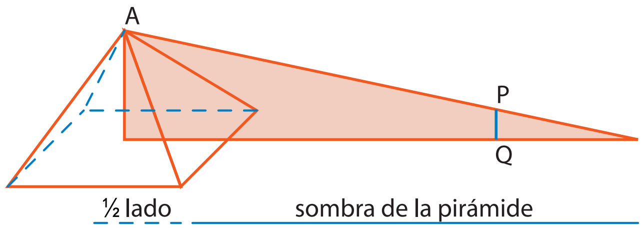
tificaciones que elaboraron y redacten entre todos una breve síntesis.

d) Para medir la altura de una pirámide, Tales colocó un bastón *PQ* en posición vertical de modo que la sombra del bastón terminase en el mismo lugar que la sombra de la pirámide como se ve en el gráfico.

Analizá el procedimiento que utilizó Tales y respondé:

1. ¿Qué proporción planteó Tales?

2. ¿Qué segmentos de los que intervienen en la proporción pudo medir de manera directa?



Lo interesante del Teorema de Tales es que se puede aplicar para buscar segmentos proporcionales cuando la razón es cualquier número y eso incluye los números irracionales.

e) Del mismo modo que construiste segmentos proporcionales en los que las razones son números naturales o números fraccionarios, en este ejercicio la razón es un número irracional porque interviene ≠.

Para rectificar una curva dibujada hay que pensar en un segmento de recta de la misma longitud que la curva tal como hiciste en la unidad **14** del Cuaderno de estudio **1** con la circunferencia.

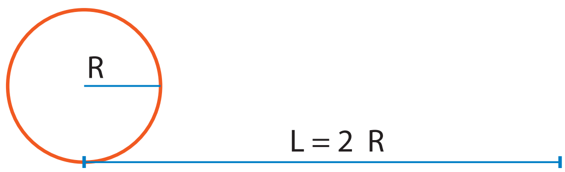
En esta figura, la circunferencia ha sido rectificada, vale decir, que el segmento L tiene igual longitud que la circunferencia de radio R.

1. Calcá este gráfico y dibujá lo necesario para aplicar el Teorema de Tales de modo que encuentres el radio de una circunferencia de 10 cm de longitud.

2. Dibujá con compás la circunferencia que es la respuesta del problema.

3. Explicá cómo lograste llegar a la solución.

4. Consultá con tu maestro y con tus compañeros sobre la solución que obtuviste y el camino seguido para ello.



Si querés comprobar que tu construcción sea correcta, podés medir los segmentos que forman proporción. Salvando los errores que naturalmente se cometen al trabajar con instrumentos de geometría, la razón entre el radio y la circunferencia es $\frac{1}{2\pi}$.

A

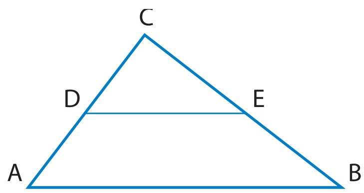
7. El Teorema de Tales y la semejanza de triángulos

a) Leé el siguiente texto en el que se enuncian las consecuencias del Teorema de Thales y resolvé la consigna **b**.

1. Toda paralela a un lado de un triángulo determina sobre los otros dos lados o sus prolongaciones, segmentos proporcionales a ellos.

Y recíprocamente:

2. Si una recta corta a dos lados de un triángulo (o sus prolongaciones) determinando segmentos proporcionales a ellos, es paralela al tercer lado



b) En la figura siguiente el triángulo ABC es escaleno acutángulo y DE // AB entonces $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$

c) ¿El triángulo DEC es semejante al triángulo ABC? ¿Por qué?

Construí un triángulo ABC escaleno y obtusángulo.

1. Trazá por un punto D del lado AB una paralela al lado BC, sombreá el triángulo ADD'que determina al cortar a los otros dos lados.

2. ¿Los triángulos ABC y ADD' son semejantes? ¿Por qué?

! Repetí la construcción con otra clase de triángulos para explorar la semejanza.

Tu tarea de exploración te permitirá afirmar que:
toda paralela a un lado de un triángulo determina con las rectas a las que pertenecen los otros dos lados un triángulo semejante al primero.

Esta propiedad es el teorema fundamental de la semejanza de triángulos y tal como resultó de tu exploración a partir del Teorema de Tales, es válida para la figura que se obtiene a partir de las dos rectas que contienen respectivamente dos lados de un triángulo cortadas por una paralela al tercer lado. No importa el punto que se elija para construir esta paralela.

Para finalizar

En esta unidad exploraste la relación enunciada en el Teorema de Tales entre el paralelismo de rectas y los segmentos que ellas determinan al cortar transversales.

Trabajaste partiendo de la relación de proporcionalidad entre segmentos para llegar a la relación de paralelismo y, recíprocamente, a partir del paralelismo obtuviste la proporcionalidad entre los segmentos determinados.

El trabajo que realizaste te permitió vincular lo que ya sabías acerca de la semejanza entre figuras con la proporcionalidad entre segmentos.

También apreciaste algunas aplicaciones prácticas del Teorema de Tales, como medir la altura de objetos que son de difícil acceso, como el pico de una montaña o la altura de un árbol, tal como hizo Tales hace catorce siglos.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El cumpleaños de Cecilia

María le dice a una amiga que hace dos días su hija Cecilia tenía ocho años, pero el año que viene cumplirá once. La amiga extrañada le dice si no se equivocó en las cifras. María afirma que lo que dijo es correcto. ¿Por qué? ¿Cuál es el día del cumpleaños de Cecilia? ¿Qué día se desarrolla la conversación?

2. Cuadros curiosos

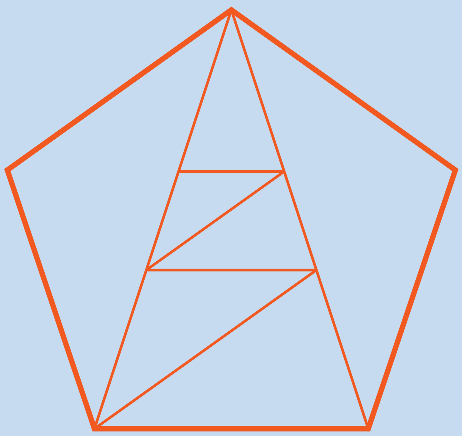
Ya sabés que para calcular el cuadrado de un número es necesario multiplicarlo por sí mismo. Pero para los números que terminan en 5 hay un método más sencillo. Consiste en multiplicar el número de decenas enteras por el número siguiente y a ese resultado agregarle las cifras 2 y 5.
Por ejemplo, si el número fuera 105, hay que multiplicar $10 \times 11 = 110$ y agregar a ese número un 2 y un 5: de modo que 11025 es el cuadrado de 105.
Otro ejemplo: para calcular 725^2 se multiplica $72 \times 73 = 5256$ y al resultado se agrega 2 y 5, es decir que $725^2 = 525625$
El desafío consiste en que expliques por qué siempre ocurre eso.

3. Edades y cuadros

Dentro de 3 años, la edad de Anita será un número cuadrado perfecto y hace tres años su edad era precisamente la raíz cuadrada de ese cuadrado. ¿Cuántos años tiene ahora Anita?.

4. Otro tangrama

a) Construí en cartulina un rompecabezas como este nuevo tangrama e incorporalo a la juegoteca.
b) Cada pieza del tangrama, ¿qué clase de triángulo es?
c) ¿Qué clase de triángulos no aparecen en el tangrama?
d) Dibujá uno de cada una de las clases que no aparecen.
e) Inventá otros rompecabezas.



UNIDAD 11 Ecuaciones

En esta unidad vas a volver a trabajar sobre un tema aritmético. Vas a retomar el estudio de las ecuaciones como una introducción al Álgebra que comenzaste en la unidad 13 del CUADERNO DE ESTUDIO 2. La palabra "ecuación" viene del latín *æquare* que significa "igualar". Ya sabés que las ecuaciones son igualdades en las que hay que descubrir un número llamado *incógnita,* representado por una letra. Algunas veces las transformaciones necesarias para la resolución de una ecuación resultan evidentes. En otros casos, hay que hacer diferentes intentos antes de lograr el camino más adecuado.

Los resultados de la Matemática teórica y aplicada con frecuencia se influyen mutuamente. Es habitual que los descubrimientos de los matemáticos teóricos tengan un valor práctico que no había sido previsto por ellos. Por ejemplo, el estudio de las propiedades matemáticas de acontecimientos que ocurren al azar condujo al conocimiento que más tarde hizo posible mejorar el diseño de los experimentos en las Ciencias Naturales y en las Ciencias Sociales. En sentido inverso, al tratar de solucionar el problema del cobro justo a los usuarios del teléfono de larga distancia, los especialistas hicieron importantes descubrimientos sobre las matemáticas de redes complejas. La Matemática teórica no siempre está vinculada con el mundo real, pero a la larga contribuye a entenderlo mejor.

Se dice que el libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático ya que las leyes físicas y químicas que explican el comportamiento de la materia están expresadas por fórmulas y ecuaciones. La riqueza del lenguaje simbólico radica en brindar la posibilidad de traducir los términos de un problema enunciado con palabras en expresiones algebraicas y así poder operar simbólicamente para resolverlo.

En esta oportunidad avanzarás en el estudio de las ecuaciones y de las estrategias para resolverlas.

TEMA 1: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

En las actividades de este tema vas a analizar los procedimientos que se deben seguir para encontrar el o los valores que son solución de una ecuación.

A partir de un problema enunciado o expresado verbalmente, se debe:

1. *Identificar qué se quiere averiguar y expresarlo como incógnita.*

2. *Plantear una* ***ecuación****, es decir, escribir una igualdad en la que esté comprendida la incógnita.*

3. *Resolver una ecuación* ***transformándola*** *en ecuaciones equivalentes y cada vez más sencillas, hasta encontrar el valor (o los valores) de la incógnita. A este proceso se lo llama* ***despejar la incógnita****.*

4. *Verificar que los valores encontrados sean soluciones de la ecuación planteada, es decir,* ***reemplazar la incógnita*** *por el valor (o los valores) hallado. Si se cumple la igualdad, entonces la solución de la ecuación será la respuesta al problema.*

*Si no recordás alguno de estos contenidos, tu docente te indicará qué actividades de la unidad **13** del CUADERNO DE ESTUDIO **2** te conviene revisar para estudiar el tema.*

A

1. Resolución de ecuaciones con una incógnita

En esta actividad explorarás distintos tipos de ecuaciones de primer grado y algunos métodos de resolución. Si bien los problemas pueden resolverse de diversas maneras, y a veces en forma intuitiva, en esta oportunidad vas a aprender un tipo de resolución que incluye las expresiones algebraicas, para seguir aprendiendo sobre ellas.

a) Leé el siguiente enunciado y analizá, paso a paso, las resoluciones a través de escrituras algebraicas que se presentan en el cuadro.

Una señora trajo de su huerta una cesta con manzanas. A una hija le dio la mitad más media manzana, a otra hija le dio la mitad de lo que le quedaba más media manzana y le quedó una manzana para ella. ¿Cuántas manzanas traía en la cesta?

	Manzanas que tiene en la cesta	Manzanas que entrega	Manzanas que le quedan
Una hija	x	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$	$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$
Otra hija	$x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}$	1
Para ella	1	1	0

Si se suma el número de manzanas que le quedan a la madre y las hijas, el total de esa suma es la cantidad de manzanas que la madre tenía al principio en la cesta. Recurriendo a expresiones algebraicas es: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}+1=x$

De este modo el problema quedó planteado en la forma de una ecuación que se puede resolver mediante sucesivos pasos o transformaciones.

Transformación aplicada	Igualdad equivalente
Ecuación por resolver:	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}+1=x$
Suprimir paréntesis:	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}+1=x$
Efectuar operaciones de adición:	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}+1=x$
Suprimir corchetes aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta:	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{x}{4}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=x$
Quitar denominadores multiplicando ambos miembros por el menor denominador común entre 4 y 2:	$2x+2+x-1+6=4x$
Efectuar operaciones:	$3x+7=4x$
Sumar el opuesto en ambos miembros:	$3x+-3x+7=4x+-3x$
Sumar:	$7=x$

Cada uno de los pasos indicados permite transformar una ecuación en otra ecuación equivalente más sencilla. Se forma así una cadena de ecuaciones en la que la última es la solución de la ecuación porque brinda el valor de la incógnita.

b) Observen los dos primeros ejemplos de resolución de ecuaciones y resuelvan los demás.

I. $5x=30 \Rightarrow \frac{5x}{5}=\frac{30}{5} \Rightarrow x=6$

II. $x+\frac{1}{5}=\frac{4}{5} \Rightarrow x+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}-\frac{1}{5} \Rightarrow x=\frac{3}{5}$

III. $x=(-2-9)\div 11$

IV. $x=12-x$

V. $5x=3+2x-3$

VI. $x^2=81$

VII. $12x-4=3x+5$

1. ¿En todas las ecuaciones tuvieron que efectuar las mismas transformaciones para despejar la incógnita?

2. ¿En todas obtuvieron como respuesta un único resultado?

3. Comparen el trabajo con el de sus compañeros.

Habrás notado que en las ecuaciones en que la incógnita está sólo en un miembro de la igualdad, por ejemplo en **I**, **II**, **III** y **VI**, la resolución es sencilla: se realizan los cálculos numéricos o bien se aplican las operaciones inversas de las indicadas respetando también el orden inverso en su aplicación.

Lo más importante es que cuando en una ecuación se opera en ambos miembros la misma transformación (ya se trate del opuesto aditivo o del inverso multiplicativo), se obtiene una ecuación equivalente.
Recordá que dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Por ejemplo, para resolver la ecuación:

-x + 13 = 5	se la puede transformar en:
-x + 13 + -5 = 5 + -5,	sumando a ambos miembros el opuesto aditivo de 5, luego operar la suma:
-x + 8 = 0	y por último sumar a ambos miembros el opuesto de **x**
-x + x + 8 = x	para obtener
8 = x	que es la solución de la ecuación.

2. Ecuaciones equivalentes

En la actividad anterior viste que para obtener una ecuación equivalente a otra se pueden aplicar algunas transformaciones a la ecuación original, por ejemplo, aplicar las propiedades de las operaciones directas.

Dada una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente si en cualquiera de los dos miembros de la igualdad original se efectúa alguna de las siguientes transformaciones o sus recíprocas:
1. *aplicación de una propiedad de las operaciones directas;*
2. *expresión de una multiplicación como suma abreviada;*
3. *expresión de una potenciación como una multiplicación reiterada.*

a) Copiá en tu carpeta la tabla siguiente. Revisá las transformaciones que figuran en el cuadro anterior e indicá si son del tipo 1, 2 o 3. Siguiendo los ejemplos que están resueltos, completá con la trasformación que se aplicó en cada caso y justificá tu decisión.

Igualdad original	Igualdad transformada	Transformación aplicada
2 • (b + d) = 7	(b + d) + (b + d) = 7	Definición de multiplicación.
2 • (b + d) = 7	2b + 2d = 7	
a • a • a = 27	a^3 = 27	Definición de potenciación.
2 • x – 3 = 3 • (x + 2)	2 • x – 3 = 3 • x + 6	Propiedad distributiva de la multiplicación.
3 • a + 2 • a = -1	(3 + 2) • a = -1	Sacar factor común.
2 • 3 • a • 5 = -15	30 • a = -15	
-x + 30 = -10	30 = -10 + x	

b) En esta ecuación se usan números racionales no enteros.

$$\frac{2 - x}{6} = \frac{3x - 2}{3}$$

1. Resuélvanla en la carpeta, siguiendo las transformaciones que se indican en cada paso del cuadro.

Transformación a aplicar	Ecuación equivalente
Multiplicar ambos miembros por el inverso de $\frac{1}{6}$.	
Resolver $\frac{1}{3} \cdot 6$	
Aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación.	
Sumar en ambos miembros el opuesto de -4.	
Sumar en ambos miembros el opuesto de -x.	
Multiplicar ambos miembros por el inverso de 7.	
Verificar si $\frac{6}{7}$ es la solución de la ecuación.	

2. Comparen el trabajo con el de sus compañeros.

3. Escriban una breve conclusión orientándose por la siguiente pregunta: ¿Para resolver esta ecuación se podrían haber aplicado otras transformaciones diferentes de las que se indicaron? ¿Cuáles? Fundamenten la respuesta.

c) Resolvé las siguientes ecuaciones indicando lo realizado en cada paso y verificá las soluciones. Además indicá en cada caso qué ecuaciones tienen solución en el conjunto de los números naturales (N), en el conjunto de los números enteros (Z) y en el conjunto de los números racionales (Q). Justificá tus respuestas.

1. $8\,(x - 1) = 3.2^2$

2. $x = \frac{100}{x}$

3. $5x = 2x + \frac{11 \cdot 7}{26}$

4. $(x - 4) : 7 = (3x + 12) : 28$

5. $x + 9\,(x - 2) = 4 - 6\,(2 - 4\,x)$

d) Compará tus procedimientos con los de tus compañeros.

e) Transformá la siguiente ecuación para obtener el valor de **x**.

$$x = \left(\frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right) \cdot 8$$

Si operaste correctamente, con seguridad obtuviste x – x = 4; o sea 0 x = 4. Esta expresión no tiene solución porque no hay ningún número que multiplicado por 0 dé por resultado 4 ya que 0 es elemento absorbente en la multiplicación y por lo tanto, cualquier número multiplicado por 0 da 0.

A 3. Distintos caminos

Para lograr despejar una incógnita y hallar su valor numérico, las ecuaciones se pueden transformar en otras equivalentes, es decir, que tienen el mismo conjunto de soluciones. En esta actividad vas a comparar distintos caminos para resolver una situación usando símbolos algebraicos.

a) Leé el siguiente problema y resolvelo como te parezca. Verificá si el resultado es razonable, es decir, si el número de camisas estampadas que hallaste tiene sentido en este problema.

> En una tienda el precio de las camisas estampadas es de $150 y el de las lisas de $100.
> Cierto día se vendieron 30 camisas y lo recaudado fue $3600. Se desea saber cuántas camisas estampadas se vendieron ese día.

b) Te presentamos a continuación dos soluciones alternativas del mismo problema para que luego las compares con la tuya.

Solución 1

Se trata de encontrar una cantidad desconocida que es la cantidad de camisas de $150 a la que llamamos **x**.

- número de camisas de $150: **x**
- importe de las camisas de $150: 150 **x**.

Escribimos las otras cantidades del problema, empleando **x**:

- número de camisas lisas: 30 – **x**
- importe de las camisas de $100 = 100 (30 - **x**)

Traducimos al lenguaje algebraico la suma de ambos importes:

- 150 x + 100 (30 - **x**) = 3600

Solución 2

Si las camisas hubieran sido todas estampadas, el importe cobrado hubiera sido de 30 x _____ = 4500
Como se vendieron algunas camisas de $100 el importe fue menor. La diferencia es:_____ - 3600 = _____
Con cada camisa de $100 se recibieron $50 menos. Los $900 corresponden a tantas camisas como diferencias de $50. Para saber cuántas camisas lisas se vendieron se efectúa la división _____ : 50 = _____ ; luego si de las 30 camisas, _____ son lisas, las estampadas fueron 12.

1. Verificá que la solución de la ecuación sea adecuada al problema.
2. Resolvé la ecuación 150 x + 100 (30 - x) = 3600 y verificá el resultado que encuentres.
3. Compará tu resolución y las soluciones **1** y **2**. ¿Cuál te parece más clara?

e) Reunite con tus compañeros, comparen las diferentes resoluciones del problema planteado en la consigna **a**, revisen los comentarios que escribieron como conclusión en el punto **3** de la consigna **b** de la actividad **2** y escriban entre todos un comentario breve acerca de las posibilidades de resolución de problemas.

4. Más problemas

a) Resolvé los siguientes problemas.

1. Tres amigos vendieron una propiedad en $200 000. ¿Cuánto le corresponde cobrar a cada uno sabiendo que cuando la compraron el primero puso el doble que el segundo y este el triple que el tercero? (Ayuda: llamá x a la cantidad que le corresponde al tercero).
2. De un tanque de combustible se gastó la mitad del contenido, después la mitad de lo quedaba y aún restan 36 litros. Calculá la capacidad del tanque.
3. El docente le dice a un niño que agregue 12 a un número dado y divida el resultado por 13. Pero el niño, que no presta atención, resta 13 del número dado y divide el resultado por 12. Lo extraño es que obtiene la respuesta correcta. ¿Cuál es el número dado?

b) Sustituí la **x** por su valor para decidir a qué ecuación corresponde cada una de estas soluciones: -3, 2, 4, 0. Justificá tus respuestas.

$2 = (2x + 5)(x + 1)$ $\qquad$ $2{,}5 + 3x = 2x + 3{,}5$

$18 = 10x - 6$ $\qquad$ $3x^2 - 6 = (x - 3)(2 + x)$

5. Reglas para obtener ecuaciones equivalentes

En la resolución de problemas aplicaste ecuaciones y pusiste en práctica muchas de las propiedades de las operaciones con las que trabajaste en la unidad **8** de este Cuaderno. El siguiente listado de reglas es una herramienta que te va a facilitar la resolución de ecuaciones, te conviene tenerlo siempre a mano.

a) Reunite con tus compañeros para leerlo. A medida que avancen en la lectura busquen ejemplos para ilustrar cada una de las reglas. Si les parece conveniente, copien las reglas en un papel afiche y péguenlo en la pared del aula.

1. En una multiplicación se puede cambiar el orden de los factores.
2. En un producto se puede omitir el signo • ("por"): **a • b = ab**.
3. La factorización o extracción del factor común **ax + bx = (a + b)x** permite pasar de una expresión con **x** como sumando a una expresión que tiene **x** como factor.
4. En una adición se puede aplicar la propiedad conmutativa de la adición a expresiones algebraicas: $x + 2 + y = y + x + 2$.
5. Se puede transformar una sustracción en adición: **a - b = a + (-b)**, por ejemplo: 3 – 5 = 3 + (-5).
6. El opuesto de una suma se puede escribir como la suma de opuestos:
-(a + b) = (-a) + (-b) = -a – b; por ejemplo: -(4 + 6) = -4 + -6 = -4 – 6
7. Aplicar la distributividad de la multiplicación sobre el producto **x (a + b) = x a + x b** permite transformar un producto con x como uno de sus factores en una suma de términos en x.
8. La misma estrategia se repite con el cociente: **(a + b) ÷ x = a ÷ x + b ÷ x**.
9. El número 1 es neutro para el producto y el cociente: **1 • x = 1 x = x** y también **x ÷ 1 = x**.
10. El número 0 es absorbente en el producto: **0 • x = x • 0 = 0**.

TEMA 2: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON LA CALCULADORA

Aunque se puede trabajar haciendo los cálculos con lápiz y papel, resulta muy útil aprender a usar la calculadora para resolver una ecuación, por ejemplo, cuando los números son muy grandes o cuando se necesita obtener el resultado rápidamente. Los métodos consisten en aproximarse a la solución reemplazando sucesivamente la **incógnita** por valores que se acerquen cada vez más al valor solución. Verás un método de **iteración** y otro de **tanteo**.

a) Vas a analizar el método llamado de **iteración** a partir de un problema enunciado en el Papiro de Rhind. Actualmente, este papiro se encuentra en el Museo Británico. Es un documento que fue escrito en Egipto en el año 1650 a.C. y contiene 87 cuestiones básicas de matemática. Comienza con la frase: "Cálculo exacto para entrar en conocimiento de todas las cosas existentes y de todos los oscuros secretos y misterios". El enunciado dice:

"Un montón y una séptima parte de este es igual a 24."

Esta ecuación se puede resolver por el método de iteración.
Vas a representar con una **x** al llamado montón. En lenguaje algebraico se escribe: $x + \frac{1}{7}x = 24$

En el primer paso se despeja una de las **x**: $x = 24 - \frac{1}{7}x$

En el segundo paso se da a **x** un valor cualquiera como una primera aproximación al valor verdadero. No importa si la aproximación es buena o no. Se elige aquí, por ejemplo, x = 10 y sustituimos 10 sólo en el segundo miembro de la igualdad, para calcular el resultado que se obtiene para **x** en el primer miembro: $x = 24 - \frac{1}{7}10$

Para resolverlo con la calculadora elemental se puede efectuar: $-10 \div 7 + 24$ y se obtiene:
x = 22,571429 que se toma como segunda aproximación de **x**.
Este valor x = 22,571429 se sustituye en el segundo miembro de la igualdad y se obtiene así $x = 24 - \frac{1}{7}22{,}571429$ y al resolver con la calculadora: x = 20,775511.

Se continúa iterando el mismo proceso con sucesivas aproximaciones.
En este caso las aproximaciones de **x** fueron:

Primera (valor inicial):	10
Segunda	22,571429
Tercera	20,775511
Cuarta	21,03207
Quinta	20,995419
Sexta	21,000655
Séptima	20,999907

Los valores que se obtienen se aproximan cada vez más al número 21. Por tanto x = 21 es la solución de $x + \frac{1}{7}x = 24$; porque $21 + \frac{1}{7}21 = 24$.

b) Ahora vas a analizar el método de **tanteo**. Se usa cuando se tiene una idea aproximada del valor de la solución.

Por ejemplo, para calcular el valor de **a**: $\mathbf{a}^3 = 2$, se sabe que **a** debe ser un número entre 1 y 2, es decir $1 < \mathbf{a} < 2$ puesto que $1^3 = 1$ y $2^3 = 8$. Se puede tomar por ejemplo, el primer valor de la aproximación como: **a** = 1,5 entonces $1{,}5^3 = 3{,}375$. Este número es mayor que 2, por lo tanto 1,5 es mayor que la solución

Para acercarnos al valor verdadero de **a**, debemos tomar un número menor comprendido entre 1 y 1,5 por ejemplo 1,2: 1,23 = 1,728.

En la siguiente tabla se registran los valores aproximados.

a está entre	Valor aproximado	Cubo del valor aproximado	El valor aproximado de a es
1 y 2	1,5	3,375	Mayor que x
1 y 1,5	1,2	1,728	Menor que x
1,2 y 1,5	1,3	2,197	Mayor que x
1,2 y 1,3	1,25	1,953125	Menor que x
1,25 y 1,3	1,26	2,000376	Casi igual que x

Después de los cinco pasos realizados se obtiene el número 1,26 cuyo cubo es 2,000376, muy próximo a 2. Es decir, que **a** es aproximadamente 1,26.

c) Usá los procedimientos que aprendiste para resolver con la calculadora.

1. $x^2 = 5$ **2.** $b^3 = 6$ **3.** $y = \sqrt{3}$

El trabajo algebraico sobre expresiones que vinculan números y letras —constantes y variables— permite operar con ellas para determinar los valores de las variables que verifican una igualdad. Los diversos caminos que facilitan la resolución de ecuaciones ponen de relieve que se pueden transformar las ecuaciones en otras equivalentes, es decir, que tienen el mismo conjunto de soluciones, hasta lograr "despejar" la incógnita y hallar su valor numérico.

Conviene destacar que cuando se aplica a un miembro de la igualdad un opuesto aditivo o el inverso multiplicativo de un número, para que se mantenga la igualdad es necesario aplicarlo a ambos miembros y operar convenientemente en cada uno aplicando las propiedades de las operaciones involucradas.

Para finalizar

En esta unidad dedicada al Álgebra analizaste los posibles pasos que deberías seguir para resolver una ecuación que tiene una única incógnita, desde el planteo hasta llegar a la verificación que te permite asegurar la razonabilidad del resultado obtenido. También aprendiste que la calculadora puede funcionar como una herramienta potente para resolver ecuaciones por iteración o por sucesivos tanteos.

Este tipo de trabajo cobra sentido cuando la expresión algebraica sobre la que se trabaja resulta de la formulación de un problema planteado en lenguaje coloquial y se la va transformando en otras expresiones equivalentes para poder encontrar la solución del problema. En síntesis, las ecuaciones constituyen una herramienta muy valiosa para la resolución de problemas, tanto de la Matemática como de otras ciencias.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Los negocios de Juan

Juan hace negocios con objetos usados. En una ocasión compró dos sillones y a la semana siguiente los vendió a 60 pesos cada uno. Si al vender uno ganó el 20% y al vender el otro perdió el 20 % ¿Ganó, perdió o recuperó lo que había pagado por ambos sillones?

2. Los cálculos de Mora

La pequeña Mora se queja de la vida que lleva porque dice: “Duermo ocho horas al día y eso hace 2920 horas, que son 122 días al año. Los sábados y los domingos suman 104 días más. Si dedico tres horas al día a las comidas, son otros 45 días. Las vacaciones de verano duran 65 días y, si me concedo 2 horas al día para ver la tele y otras distraccciones, eso supone 30 días. Y todo esto sin incluir las fiestas de fin de año”. ¿Qué resultado dan los cálculos de Mora? ¿Qué falla en el razonamiento de Mora?

3. Sudoku

En la unidad **5** de este Cuaderno resolviste algunos rompecabezas numéricos llamados sudokus. El objetivo del juego es colocar en los cuadrados vacíos los números que faltan de modo que en cada cuadro de 3 × 3 estén todos los números del 1 al 9, con la condición de que cada número aparezca solamente una vez en cada fila horizontal y en cada columna vertical del cuadro 9 × 9.

					7			4
	1	8	6		4		7	
9		4			1	3		
8		9				7	1	4
3				1	6			2
	2	1						6
		6	2			5	8	
7	8		1	9			3	
			7	6	8			

	6	7	5		2			
5		1		3				
	9					4		
4			6		7	8	1	
	7	6	3		1			9
		5					2	
				5		3		4
			2		3	9	6	

Unidad 12 Funciones 2

En el Cuaderno de estudio 2 empezaste a estudiar las funciones matemáticas. Se trata de un tema muy amplio que continuarás aprendiendo en esta unidad.

La idea de función nace a partir del estudio de los fenómenos de cambio y se expresa a través de diversos lenguajes: verbal, algebraico, gráfico, tablas. Cada uno de esos lenguajes permite poner en evidencia o destacar ciertas características de las funciones.

Por otro lado, en el mundo actual, y en particular en los medios de comunicación, existe una gran variedad de información sobre diversos fenómenos de cambio, en campos tan diversos como la economía o la meteorología, que se presenta mediante tablas y, especialmente, por medio de gráficos.

En esta unidad vas a analizar las representaciones gráficas de algunas funciones que ya conociste en unidades anteriores. Las actividades que se te plantean te permitirán seguir integrando los conocimientos que vas aprendiendo y así podrás desenvolverte cada vez con mayor seguridad y autonomía.

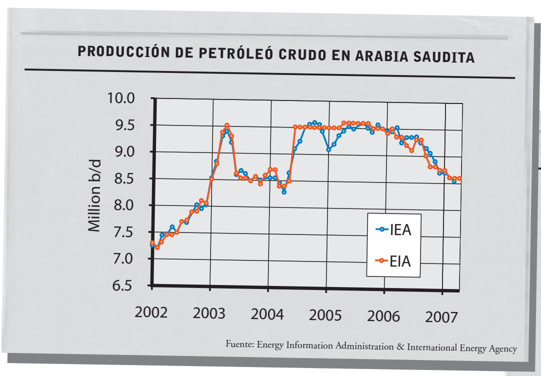
A

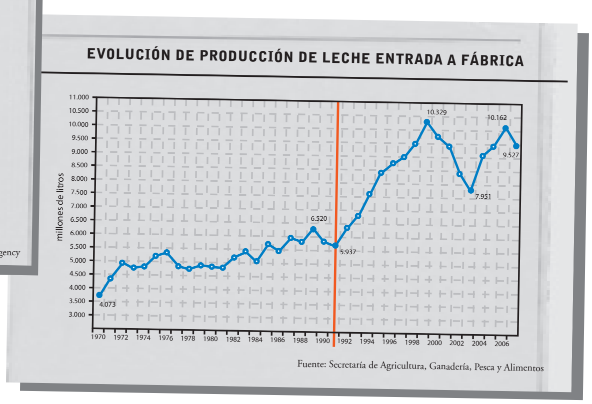
1. Comportamiento de funciones

En esta actividad vas a analizar el crecimiento de las imágenes en algunas funciones.

En libros, revistas y periódicos se presentan con frecuencia gráficos de funciones. Estos gráficos brindan mucha información acerca del comportamiento funcional; por eso es importante que aprendas a interpretarlas.

a) Cuando se desea mostrar la variación de un dato a lo largo de un período de tiempo, generalmente se usan segmentos y se unen los extremos de esos segmentos formando una poligonal. Se obtienen así gráficos lineales.





*Una función se caracteriza por tener una variable que puede tomar ciertos valores, llamada **variable independiente;** tiene una segunda variable que recibe el nombre de **variable dependiente**, cuyos valores dependen de los de la primera. Finalmente, además de las variables, una función tiene asociada una regla que permite asignar a cada valor de la variable independiente un único valor de la variable dependiente.*

b) En las siguientes tablas de funciones, elegí dos elementos distintos del dominio, teniendo en cuenta que el primero sea menor que el segundo. Compará los respectivos valores correspondientes.

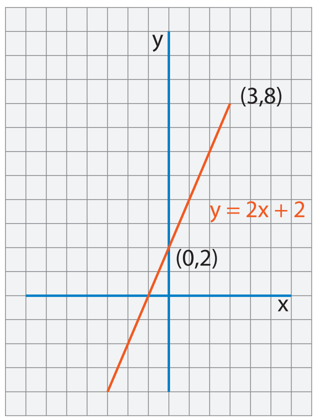
$g: N \rightarrow N \,/\, g(x) = x^3$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

$f: Z \rightarrow Z \,/\, f(x) = 2x + 2$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12

Habrás observado que en estas funciones, siempre que se toman dos valores del dominio de modo que uno sea menor que el otro, entre las imágenes se mantiene el mismo sentido de la desigualdad. Por ejemplo si **a** y **b** son elementos del dominio de la función g(x) y **a** es menor que **b**, entonces g(a) es menor que g(b).



Por ejemplo, las funciones:

$g: N \rightarrow N \,/\, g(x) = x^3$ y **$f: Z \rightarrow Z \,/\, f(x) = 2x + 2$** son funciones crecientes porque al crecer los elementos del dominio también crecen las respectivas imágenes.

Por lo tanto se puede afirmar:

*Una función es creciente cuando para todo par de elementos **a** y **b** del dominio se verifica que si **a** es menor que **b**, entonces la imagen de **a** es menor que la imagen de **b**.*

*En símbolos: **a < b** **f(a) < f(b)**.*

c) A continuación analizarás si la función **valor absoluto** es, o no, una función creciente.

1. Leé la siguiente información que estudiaste en las unidades **1** y **2** del Cuaderno de estudio **2**.

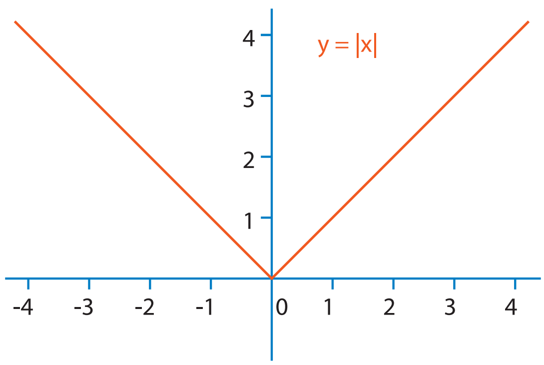
El valor absoluto de un número indica su distancia al número cero. Cualquier número, positivo o negativo, y su opuesto tienen el mismo valor absoluto porque tienen posiciones simétricas con respecto a 0. Por tratarse de una distancia, el valor absoluto es siempre positivo.

En los números racionales se define la función **h** que a cada número racional **x** le asigna su valor absoluto, es decir que **h** es una función racional con imágenes en los racionales positivos.

$h: Q \rightarrow Q^{+};\ h(x) = |x|$

2. Observá el gráfico que la representa y respondé:

- El número racional -2, ¿es mayor, menor o igual que -1,5? ¿Por qué?
- El valor absoluto de -2, ¿es mayor, menor o igual que -1,5? ¿Por qué?
- Si un número negativo **a** es menor que otro número negativo **b**, ¿qué signo tiene la desigualdad entre los correspondientes valores absolutos? Escribí la desigualdad.
- La función valor absoluto, ¿es creciente en el dominio de los números racionales negativos (Q^{-})? ¿Por qué?



El gráfico de la función valor absoluto muestra una pendiente negativa en el cuadrante de la izquierda y una pendiente positiva en el cuadrante de la derecha.

La función valor absoluto es decreciente en Q^{-} (racionales negativos) y creciente en Q^{+} (racionales positivos). Por ejemplo, -3 es menor que -0,5 y, en cambio, el valor absoluto de -3 es mayor que el valor absoluto de -0,5.

Es decir, que para dos números racionales negativos a y b, tales que a < b, los correspondientes valores absolutos no conservan el sentido de la desigualdad ya que |a| > |b|.

En símbolos: -3 < -0,5 y |-3|> |-0,5| puesto que 3 > -0,5.

La función h(x) = |x| es decreciente en el dominio de los números racionales negativos y creciente para los números racionales positivos.

*Una función es **decreciente** cuando para todo par de elementos **a** y **b** del dominio se verifica que si **a** es menor que **b**, entonces la imagen de **a** es mayor que la imagen de **b**.*
En símbolos: $a < b \rightarrow f(a) > f(b)$.

d) Al estudiar las funciones de proporcionalidad aprendiste que:

*Si al doble, triple, cuádruple, etcétera, de cualquier valor de **x** le corresponde el doble, el triple, el cuádruple valor de **y**, entonces se trata de una función de proporcionalidad directa.*

1. Las funciones de proporcionalidad directa, ¿son funciones crecientes?
2. Justificá tu respuesta.

e) Buscá el gráfico de una función de proporcionalidad inversa, por ejemplo en la unidad **3** del CUADERNO DE ESTUDIO **2,** y decidí si es o no creciente aplicando lo que acabás de aprender sobre crecimiento de funciones. Si no lo tenés, podés buscar en un libro de la biblioteca del aula el gráfico de una función de proporcionalidad inversa, por ejemplo la gráfica de $k = \frac{y}{x}$ en la que **k** es un valor constante, y respondé:
1. Las funciones de proporcionalidad inversa, ¿son crecientes? ¿Por qué?
2. Para verificar si tu respuesta es correcta decidí si es o no creciente aplicando lo que acabás de aprender sobre crecimiento de funciones.

A

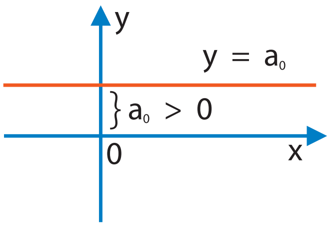
2. Gráficas de las funciones lineales

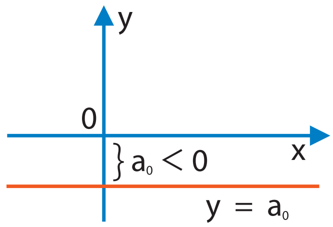
En esta actividad continuarás analizando gráficos de funciones lineales.

*En la actividad **3** de la unidad **4** de este Cuaderno trabajaste con funciones lineales y aprendiste que:*
- *Una función lineal está dada por una fórmula $f(x) = ax + b$.*
- *El gráfico de una función lineal es una recta de ecuación $y = a\,x + b$ en la que el número a es el valor de la pendiente y el número b es la ordenada al origen.*

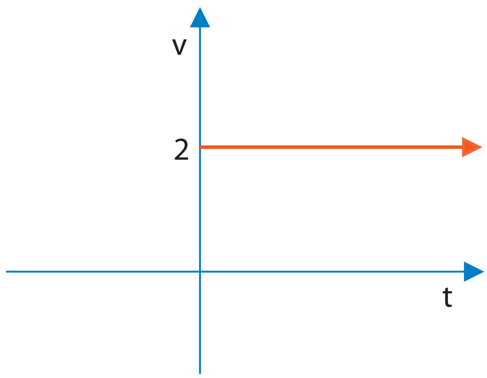
a) Representá la recta correspondiente a la función que le asigna como imagen a cualquier número racional el número 5, es decir $f: Q \rightarrow Q$; $f(x) = 5$.
1. ¿Qué valor tiene la pendiente de la recta?
2. ¿Cuál es la ordenada al origen de esa recta?
3. La gráfica, ¿corresponde a una función creciente? ¿Por qué?

Como acabás de comprobar:
Si una función está definida por la ecuación de una recta: $\mathbf{y = f(x) = a_0}$ (siendo a_0 una constante), se verifica que para todo par **a** y **b** del dominio, si **a < b es** $\mathbf{f(a) = f(b) = a_0}$.
La gráfica de esta función corresponde a una recta paralela al eje **x**, ubicada a_0 unidades por encima o por debajo del eje x dependiendo de que el signo de a_0 sea positivo o negativo.





Por ejemplo, al representar la velocidad $\left(\frac{\text{metros}}{\text{seg}}\right)$ de una partícula en función del tiempo (segundos), si se desplaza con una velocidad constante de 2 $\left(\frac{\text{metros}}{\text{seg}}\right)$, la gráfica que se obtiene es una semirrecta paralela al eje x ubicada a 2 unidades de distancia de ese eje.



Entonces,

*Una función es constante si a todos los elementos del dominio les asigna la misma imagen **a < b** es **f(a) = f(b)**. Una función constante no es creciente ni decreciente.*

b) Escribí tres funciones lineales que no sean constantes y sus correspondientes ecuaciones de rectas.
  1. Señalá en cada ecuación la pendiente y la ordenada al origen.
  2. Representá las tres rectas.
  3. Indicá, en cada caso, cuál es el valor de **y** que corresponde al valor x = 0.

Entonces,

*Se llaman ceros de una función **f** a los valores **x** del dominio que satisfacen a la ecuación **f(x) = 0**.*

c) Graficá la función f(x) = 2 x + 1 indicando pendiente y ordenada al origen.

1. Buscá la intersección de la recta y = 2 x +1 con el eje x, reemplazando y por 0. Verificalo en el gráfico que hiciste.

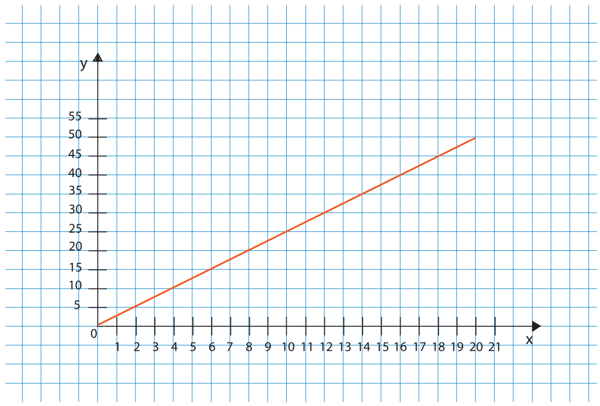
2. Los pares (2 , 5); (-1, 3), $(-\frac{1}{2}, 0)$ ¿son algunas de las posibles soluciones de la ecuación y = 2x + 1? ¿Por qué?

d) Escribí pares de valores que sean soluciones de cada una de las ecuaciones de las rectas que elegiste en la consigna **b**. ¿En qué punto cortan, cada una de esas rectas, el eje de las abscisas? ¿Y el eje de las ordenadas?

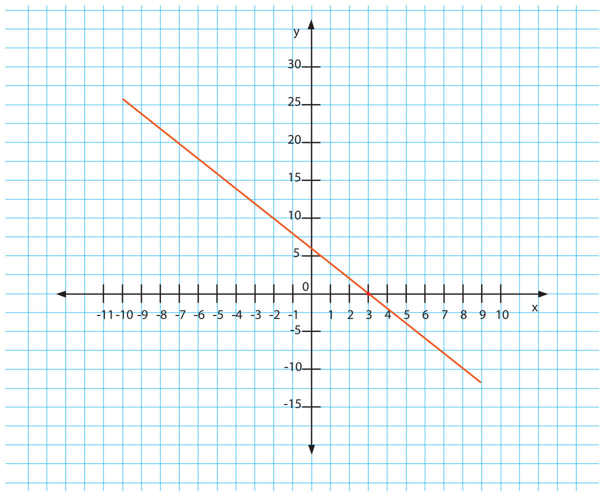
e) ¿Se pueden hallar los ceros de las funciones observando su gráfico sin usar la fórmula? Justificá tu respuesta y comparala con las de tus compañeros.

f) Buscá los ceros de las siguientes funciones lineales observando los gráficos y verificá tus respuestas usando las fórmulas.

1. Área de un triángulo de 5 cm de base en función de su altura: $f(x) = \frac{5}{2}x$



2. h (x) = 6 – 2x h: Q → Q



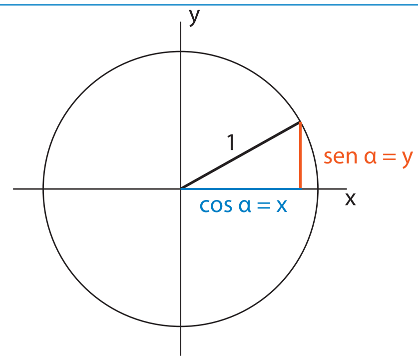
Hasta ahora analizaste el comportamiento de funciones lineales y aprendiste a distinguir funciones crecientes, decrecientes y constantes y cómo hallar analítica y gráficamente los ceros de una función.

A 3. Gráfica de funciones trigonométricas

En la actividad siguiente analizarás la representación gráfica de funciones trigonométricas realizando un estudio similar al que hiciste con las funciones anteriores.

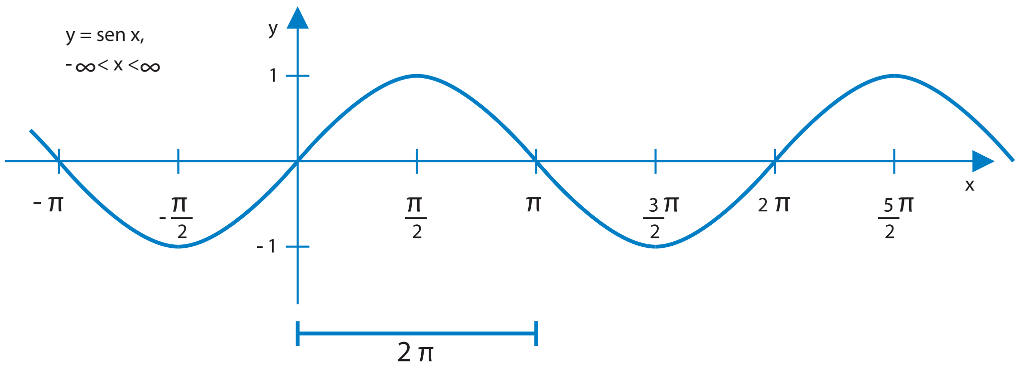
En la unidad **7** de este Cuaderno aprendiste que:

En una circunferencia trigonométrica el seno de un ángulo está dado por la medida de la ordenada del extremo de su lado libre, representada por el cateto opuesto al ángulo central.
Si un ángulo α está ubicado en el primero o segundo cuadrante, el seno de α es positivo y si pertenece al tercero o cuarto cuadrante, el seno de α es negativo.



a) La gráfica siguiente, en la que los ángulos se miden en radianes, corresponde a la función f(x) = sen x. Observá la gráfica y respondé en tu carpeta:

1. ¿Qué valor de x corresponde a un ángulo recto?
2. ¿Qué valor de x corresponde a un ángulo llano?
3. ¿Qué valor de x corresponde a un ángulo de un giro completo?
4. ¿Qué valor de x corresponde a un ángulo de 450°?



Habrás observado que si el lado móvil del ángulo gira en sentido contrario al de las agujas de un reloj, manteniéndose en el primer cuadrante, su ordenada va creciendo. Cuando el ángulo es recto $\left(\frac{\neq}{2}\right)$ la ordenada vale 1 y coincide con el radio de la circunferencia.

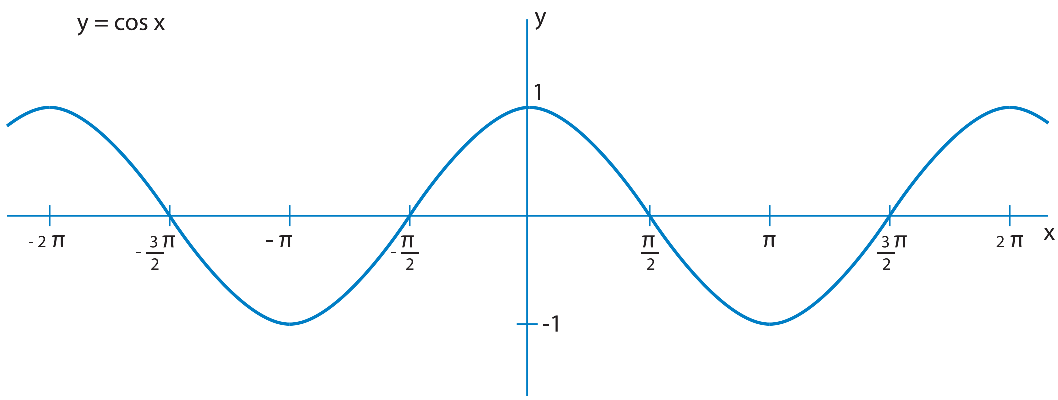
5. ¿Cuánto vale el seno del ángulo 0? ¿Y del ángulo ≠? ¿Y del ángulo $\frac{≠}{2}$?
6. ¿Qué valores de **x** representan a los ángulos mayores que un giro completo?
7. ¿Qué valores de **x** son ceros de la función **sen x**?
8. ¿Cuál es la diferencia que existe entre dos ángulos para los que la función toma los mismos valores?
9. ¿Entre qué valores de **x** la función **sen x** es creciente?
10. ¿Entre qué valores de **x** la función **sen x** es decreciente?

b) A continuación se presenta una síntesis de las características de la función seno de un ángulo que se pueden observar a partir de la gráfica.

- La función circular **y = sen x** se puede representar en un sistema de ejes coordenados: en el eje **x** se representa la amplitud de los ángulos expresada en radianes y sobre el eje **y** el valor de la función.
- La representación de la función es una curva continua.
- El dominio de la función **y = sen x** es el conjunto de los números reales; los valores de las imágenes están comprendidos entre un valor mínimo (-1) y un valor máximo (+1), vale decir, que el conjunto imagen es el intervalo cerrado [-1, 1].
- La intersección con el eje **y** es el punto origen de coordenadas (0,0).
- Las intersecciones de la curva con el eje **x** son los puntos (-≠,0), (0,0), (≠,0), (2≠,0), …
- La función toma los mismos valores cuando entre los ángulos existe una diferencia de 2≠.

Esto significa que la función es periódica y que el período es 2≠.

c) Observá el gráfico correspondiente a la función **y = cos x** y repetí para esta función el análisis que hiciste en la consigna **a** para la función **y = sen x**. Además, observá cuánto hay que trasladar la función coseno para que su gráfica coincida con la de la función seno.



d) Teniendo en cuenta la síntesis la consigna **b**, elaborá con tus compañeros un breve informe acerca de las características de la función **coseno de x**.

Para finalizar

En esta unidad analizaste el comportamiento de algunas funciones que ya conocías y las clasificaste en crecientes, decrecientes o constantes y aprendiste a determinar analítica y gráficamente los ceros de distintas funciones.

Con estos nuevos conocimientos sobre funciones retomaste el análisis particular de las funciones trigonométricas.

También aprendiste que para interpretar la gráfica de una función conviene fijarse en:

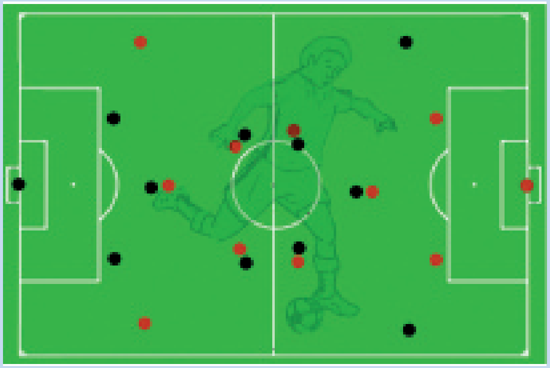
- cuáles son las variables y en qué unidades están descriptas;
- para qué valores está definida la función y para qué valores no tiene sentido;
- cuáles son los puntos notables: intersecciones con los ejes, máximos y mínimos;
- en qué intervalos la función crece o decrece.

Los gráficos de las funciones lineales y trigonométricas que analizaste tienen variadas aplicaciones en los medios gráficos, tecnológicos y científicos. Todas las ciencias actuales tratan de expresar ciertas características de los fenómenos estudiados en función de otras y cuanto más cuantitativo y medible sea este estudio, mayor será la utilidad de sus resultados.

Esta idea de función que hoy nos parece tan fácil y natural tardó varios siglos en constituirse a través del trabajo de grandes matemáticos y científicos. Tené siempre presente que las funciones describen fenómenos de cambio; su conocimiento te permitirá avanzar en el estudio de otros temas de Matemática y también en el de otras disciplinas.

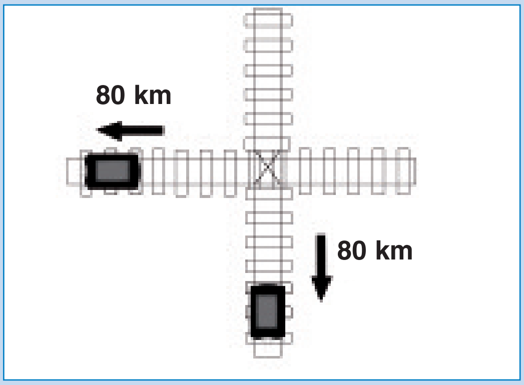
DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Equipos rivales



Dos equipos de fútbol A y B llevan jugados 13 partidos entre sí, jugando alternadamente en una y otra cancha. En 7 partidos el ganador fue el equipo local. El equipo A ganó 9 partidos en total. No hubo ningún empate.
¿Es posible saber con esta información en qué cancha se jugará el próximo partido?
En caso afirmativo, ¿en qué cancha se hará? Justificar la respuesta.

2. Trenes en movimiento



Dos trenes salen de una misma estación, uno hacia el Sur y el otro hacia el Oeste. ¿Qué distancia en línea recta los separa cuando cada uno lleva recorrido 80 kilómetros? ¿A qué distancia se encuentran de la estación de salida cuando ambos están a 100 kilómetros uno del otro y llevan recorridas distancias iguales?

3. Las monedas de Francisco

El abuelo le entregó a su nieto Francisco 15 monedas de un peso para que las acomodara formando pilas. Le dijo que, cuando terminara la tarea recibiría tantas monedas como el producto que resulta de multiplicar el número de monedas de todas las pilas. ¿Cómo puede Francisco organizar las pilas de monedas para obtener la mayor cantidad de dinero posible?

UNIDAD 13 Sistemas de ecuaciones

Una línea fundamental del trabajo matemático es identificar, en cada campo de estudio, un pequeño conjunto de ideas y reglas básicas a partir de las cuales puedan deducirse, aplicando cierta lógica, todas las demás ideas y reglas de interés en ese campo.

Cuando estás buscando conexiones entre las ideas y las reglas básicas de un campo de estudio y las que pueden deducirse de ellas, estás pensando matemáticamente. Eso te permite adquirir nuevos conocimientos sobre la base de conocimientos previos. Ponés en juego ese tipo de pensamiento cuando, a partir de lo que ya sabés, seguís avanzando en tus estudios.

En esta unidad retomarás aspectos vinculados con las funciones lineales sobre las que trabajaste en la unidad 4 de este Cuaderno. Analizarás la posibilidad de describir una recta a partir de su ecuación o de su representación gráfica en el plano. Abordarás problemas en los que las variables están ligadas por más de una relación y que implican la resolución de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales.

*Seguramente recordarás el trabajo realizado en las unidades **4** y **11** de este Cuaderno con funciones lineales y con ecuaciones. Es conveniente que tengas a mano los materiales de dichas unidades para que recurras a ellos cada vez que lo necesites.*

A 1. Resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones lineales

Tomando como base la ecuación general de una recta y sus expresiones equivalentes, vas a resolver situaciones en las que las condiciones del problema se vinculan a través de más de una ecuación.

> *En la unidad **4** de este Cuaderno estudiaste que:*
> *La expresión general de la ecuación de una recta:* $\boldsymbol{y = a \cdot x + b}$ *en la que el número* $\boldsymbol{a}$ *es la pendiente y el número* $\boldsymbol{b}$ *la ordenada del punto (0, b) en el que la recta corta el eje* $\boldsymbol{y}$.
> *Al estudiar ecuaciones en la unidad **11**, trabajaste con expresiones equivalentes de una ecuación.*

a) Leé la siguiente situación y a partir de los datos que se presentan en el problema, resolvela en tu carpeta tal como lo indican las consignas.

Para organizar una fiesta de egresados, se pidieron dos presupuestos. En el primero, la entrada cuesta \$ 18 por persona y en el otro, cobran un costo general por la fiesta de \$ 300 y, además, \$ 15 por persona.

1. Copiá en tu carpeta y completá la tabla siguiente, según el primer presupuesto, con el importe que se debería abonar teniendo en cuenta el número de personas invitadas o bien con la cantidad de personas que corresponden al importe indicado.

Número de personas	Importe
30	540
60	
	1620
120	
	2700

Si **x** representa el número de personas que concurrirán a la fiesta, e **y** el importe correspondiente, se puede afirmar que $18 \cdot x$ es la expresión matemática que permite obtener **y**.
En otras palabras, $y = 18 \cdot x$ es la fórmula de la relación que existe entre el número de asistentes a la fiesta y el gasto correspondiente teniendo en cuenta el primer presupuesto.

b) Considerando ahora el segundo presupuesto, completá la tabla siguiente en tu carpeta.

Número de personas (x)	Importe (y)
30	750
60	
	1650
120	
	2550

Verificar que los valores encontrados sean soluciones de la ecuación planteada es reemplazar la incógnita en la ecuación por el valor (o los valores) hallado. Si se cumple la igualdad, entonces la solución hallada es la respuesta al problema.

1. Verificá que la fórmula que expresa la relación entre el número de asistentes y el importe que debería abonarse sea: $\mathbf{y} = 15 \cdot \mathbf{x} + 300$.
2. ¿Existirá un número de personas (**x**) tal que para ambos presupuestos el gasto o importe demandado (**y**) sea el mismo? Pensá un modo de encontrar respuesta a esta pregunta. Probalo.
3. Compará lo que pensaste con la opinión de tus compañeros y el docente.

Un recurso posible para responder a la pregunta del punto **2** es utilizar el método gráfico. Consiste en representar gráficamente ambas relaciones, en un mismo sistema de ejes cartesianos ortogonales y hallar, si existe, el único punto del plano que pertenezca a ambos gráficos.

c) Graficá las relaciones que corresponden a los dos presupuestos para buscar, si existe, el único punto que pertenece a ambos gráficos.

*Podés consultar la unidad **12** o a tu docente si no recordás este tema.*

1. Primero elegí una escala adecuada para el eje x (número de personas) que te permita representar los datos con comodidad y otra adecuada para el eje y (importe en pesos). En el mismo sistema de ejes, representá gráficamente las relaciones $\mathbf{y = 18 \cdot x}$ e $\mathbf{y = 15 \cdot x + 300}$.

Los puntos que obtuviste para cada ecuación pertenecen a una recta y representan su conjunto solución porque son los puntos cuyas coordenadas verifican la ecuación.

2. Observá el gráfico que hiciste en la actividad **1**. Copiá en tu carpeta las preguntas que aparecen a continuación y respondelas:

- ¿Hay algún punto que pertenezca a las dos rectas?
- ¿Cuáles son sus coordenadas?
- ¿Qué cantidad de personas podrían asistir a la fiesta si se abonaran 1800 pesos, según el primer presupuesto?
- ¿Qué cantidad de personas podrían asistir a la fiesta si se abonaran 1800 pesos, según el segundo presupuesto?
- ¿Cuánto se debería abonar si asistieran 100 personas a la fiesta, según el primer presupuesto?
- ¿Cuánto se debería abonar si asistieran 100 personas a la fiesta, según el segundo presupuesto?
- ¿Qué significa el par ordenado (100;1800), de acuerdo con el problema que estamos estudiando?

En el ejemplo del primer presupuesto, los pares (x, y) que verifican $y = 18 \cdot x$ pertenecen a una recta. Los pares que verifican $y = 15 \cdot x + 300$ (segundo presupuesto) pertenecen a una recta distinta de la anterior.
Entonces, se puede pensar que si estamos buscando un número de personas (x) y un importe (y) que verifique ambos presupuestos, este par (x, y) debe pertenecer a ambas rectas.

El par ordenado (100;1800) representa al punto cuyas coordenadas (x, y) son, respectivamente, 100 y 1800, y es la solución del sistema que forman las dos ecuaciones por ser la intersección de ambas y satisfacer a las dos.

$$\begin{cases} x + y = 340 \\ 5x + 10y = 2500 \end{cases}$$

La llave que abarca las dos ecuaciones significa que las dos deben verificarse simultáneamente, es decir, que forman un sistema.

Las dos ecuaciones consideradas forman un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (x, y).

A

2. Otro problema

a) Copiá en tu carpeta el siguiente problema:

En una caja hay tornillos pequeños que pesan 5 g y tornillos grandes que pesan 10 g. En total hay 340 tornillos. El peso total de los tornillos que hay en la caja es 2,5 kg. ¿Cuántos tornillos de cada tipo hay en la caja?

1. A medida que vayas leyendo la resolución paso a paso del problema anterior, copiá en tu carpeta los datos del problema y las ecuaciones que se van deduciendo.

Paso 1
Podemos llamar x a la cantidad de tornillos pequeños e y a la cantidad de tornillos grandes.

Paso 2
Según el enunciado del problema se cumple que $x + y = 340$.

Paso 3
Como cada tornillo pequeño pesa 5 gramos, 5x representa el peso de los tornillos pequeños.

Paso 4
Como cada tornillo grande pesa 10 gramos, 10y representa el peso de los tornillos grandes.

Paso 5
También debe cumplirse, según el enunciado del problema, que el peso de todos los tornillos sea 2,5 kg que es equivalente a 2500 g: o sea que también se cumple que $5x + 10y = 2500$.

2. ¿Es necesario que el número de tornillos de cada tamaño que buscamos verifique $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 340$ y también $5x + 10\,y = 2500$? ¿Por qué? Escribí tu respuesta en la carpeta y comparala con la de otros compañeros.

b) Para resolver este otro sistema vas a recurrir otra vez al método gráfico. En este caso, el sistema de ecuaciones que debe resolverse es:

$$\begin{cases} x + y = 340 \\ 5x + 10y = 2500 \end{cases}$$

Como ya sabés, las ecuaciones lineales se corresponden gráficamente con rectas en el plano. Para hacer el dibujo necesitás dos o tres puntos de cada una de ellas.

1. Escribí tres pares (**x,y**) ordenados de modo que verifiquen: **x** + **y** = 340. Si te resulta más fácil, para hallarlos podés usar ecuaciones equivalentes, por ejemplo: **y** = 340 – **x** ó **x** = 340 – **y**.
2. Escribí tres pares ordenados que verifiquen que 5**x** + 10**y** = 2500.
Si lo creés conveniente podés recurrir a otras expresiones de la misma ecuación. Dado que en este caso no es tan sencillo hallar expresiones equivalentes, deberás trabajar con cuidado. Si en la ecuación 5**x** + 10**y** = 2500 despejás **y** correctamente obtendrás **y** = 250 – 0,5**x**.
3. Elegí una escala adecuada para el eje **x** (cantidad de tornillos pequeños) y otra adecuada para el eje **y** (cantidad de tornillos grandes). En el mismo sistema de ejes representá gráficamente las relaciones **y** = 340 - **x** e **y** = 250 – 0,5**x**.

Recordá que cada ecuación está representada por una recta.

4. Observá el gráfico. ¿Se puede leer a través del gráfico cuántos tornillos pequeños y cuántos grandes hay en la caja? ¿Por qué? Compará tu respuesta con las de tus compañeros. Si tienen alguna duda, consulten con su docente.

A

3. Tres situaciones para graficar

En esta actividad encontrarás tres situaciones que se pueden solucionar gráficamente resolviendo un **sistema de ecuaciones.**

a) Resuelvan las situaciones planteadas. Para hacerlo:
- léanlas con atención;
- nombren las incógnitas;
- escriban las dos ecuaciones lineales que forman el sistema;
- hallen pares ordenados que verifiquen cada una de las ecuaciones;
- representen gráficamente cada ecuación, después de elegir convenientemente la escala para cada eje;
- hallen la solución del sistema.

1. El perímetro de un rectángulo es 24 cm. La base mide 2 cm más que la altura. ¿Cuáles pueden ser las dimensiones del rectángulo?

2. Un teatro tiene 180 butacas, entre platea y pullman. La entrada para pullman cuesta $12 y para platea cuesta $20. Si la recaudación total de la función de ayer, a sala llena, fue $2800, ¿cuántas butacas en platea y cuántas en pullman tiene el teatro?

3. La familia Quispe —madre, padre y tres niños— fueron a presenciar un espectáculo y pagaron $31 por las entradas de todos. Los Oneto —madre, padre, abuela y dos niños— pagaron $34. ¿Cuánto costó la entrada de cada adulto y la de cada niño?

Además del método gráfico, existen otros procedimientos matemáticos que permiten resolver sistemas de ecuaciones.

4. Resolución analítica de un sistema de dos ecuaciones lineales

En la siguiente actividad, vas a conocer otras herramientas para resolver sistemas de ecuaciones. A continuación, encontrarás una síntesis de algunas ideas importantes acerca de las **ecuaciones lineales** que estuviste trabajando en esta y otras unidades sobre funciones.

a) En la siguiente actividad, van a conocer otras herramientas para resolver sistemas de ecuaciones.
1. Luego consulten las unidades **4** y **11** de este Cuaderno y decidan si les parece necesario agregar a esta lista otras ideas importantes sobre funciones y sistemas.

• Las expresiones de la forma $y = mx + b$, con m y b constantes, se llaman **ecuaciones lineales.** Por ejemplo, $y = 2x + 3$ es una ecuación lineal (lo mismo que cada una de las que consideraste en las actividades anteriores).
• El gráfico de una ecuación lineal es una recta. Los pares ordenados (0; 3); (-1; 1); (1; 5) y (2; 7) son algunos de los puntos del plano que pertenecen a la recta cuya ecuación es $y = 2x + 3$. Las coordenadas de los infinitos puntos de la recta forman el conjunto solución de la ecuación $y = 2x + 3$.
• Si se multiplican ambos miembros de la ecuación $y = 2x + 3$ por un mismo número real, por ejemplo 2, la nueva expresión $2y = 4x + 6$ es una ecuación equivalente a la dada, porque tiene el mismo conjunto solución que $y = 2x + 3$. Entonces, hay muchas otras ecuaciones equivalentes a $y = 2x + 3$.
• Las coordenadas (x; y) del punto que pertenece a las dos rectas que forman un sistema, hacen verdadera —verifican— las dos ecuaciones del sistema.

b) Copiá en tu carpeta el siguiente problema:

¡Llegó el circo al pueblo de San Lorenzo! En la función de ensayo hubo precios especiales. La entrada para los adultos se cobró \$24 y para los menores \$12. Asistieron 100 personas y se recaudaron \$1560. Se desea conocer el número de adultos y de menores que asistieron a la función.

1. Planteá las dos ecuaciones posibles, llamando **x** a la cantidad de adultos e **y** a la cantidad de menores.

Es posible que hayas obtenido el sistema $\begin{cases} x + y = 100 \\ 24x + 12y = 1560 \end{cases}$

También se puede obtener otro sistema formado por ecuaciones equivalentes, distinto al que se propone aquí. Si obtuviste un sistema equivalente consultá con tu docente para transformar convenientemente tus ecuaciones y poder así seguir el razonamiento aquí propuesto.

A partir del sistema $\begin{cases} x + y = 100 \\ 24x + 12y = 1560 \end{cases}$

Si se multiplican por 12 ambos miembros de la primera ecuación, se obtiene $12x + 12y = 1200$, que es una ecuación equivalente a la ecuación $x + y = 100$; es decir, con las mismas soluciones. Se logra así que los coeficientes de **y** en ambas ecuaciones resulten iguales.

2. Escribí el sistema que resulta con esta modificación.
3. ¿Qué otra operación se puede hacer para que los coeficientes de **x** resulten iguales? ¿Cuál de las ecuaciones modificarías? ¿Da lo mismo elegir cualquiera de las opciones? ¿Por qué?

Suponiendo que el nuevo sistema obtenido sea $\begin{cases} 12x + 12y = 1200 \\ 24x + 12y = 1560 \end{cases}$

Se resta a la segunda ecuación la primera, miembro a miembro, para lograr una ecuación con una sola incógnita: $12x + 0y = 360$, de donde se obtiene que $x = 30$. Es ahora fácil deducir que $y = 70$, dado que a partir de las condiciones iniciales del problema se sabe que $x + y = 100$.

4. Hacé las cuentas necesarias para comprobar que (30; 70) es, efectivamente, la solución del sistema.

El método con el que resolviste este problema es de tipo analítico, esto significa que no es gráfico, sino escrito. Con él resolviste este sistema mediante las operaciones de adición y sustracción. En las actividades anteriores resolviste gráficamente algunos sistemas de ecuaciones en los que se pudo encontrar la solución a partir de observar las coordenadas de la intersección de dos rectas. Este método es cómodo cuando la lectura del gráfico no ofrece dificultades. Pero pensá, por ejemplo, que si la solución de un sistema fuera el par ordenado $\left(\frac{1}{7}\,;\frac{5}{9}\right)$ sería imposible leerla con precisión en un gráfico porque se trata de fracciones.

5. Resolvé analíticamente todos los problemas propuestos en las actividades anteriores: actividad **1** (fiesta de egresados), actividad **2** (tornillos en la caja) y las tres situaciones de la actividad **3**.

A 5. Otros problemas, otros sistemas

El método analítico por operaciones de sustracción y adición no es el único posible. Vas a completar este tema consultando otros métodos en los textos de Matemática.

a) Buscá en algún libro de Matemática de la biblioteca, problemas que se resuelvan a través de un sistema de dos ecuaciones lineales.

1. Elegí un problema y realizá un afiche con:
- el enunciado del problema;
- el nombre y significado de las variables que intervienen;
- la resolución analítica;
- la resolución gráfica;
- la respuesta o solución.

b) Resolvé gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones. Representá cada uno en gráficos cartesianos distintos.

I) $\begin{cases} 3x - 5 = y \\ y = 3x + 4 \end{cases}$ **II)** $\begin{cases} -3x = y \\ y = 2x \end{cases}$ **III)** $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -4y = 6x + 4 \end{cases}$

c) Leé la información que aparece a continuación y tenela en cuenta para clasificar los sistemas dados en la consigna anterior según el número de soluciones que tengan: una, ninguna o infinitas soluciones.

Qué sucede en el gráfico	Cantidad de soluciones	Clase de sistema
Las rectas se **cortan** en un punto.	Una	Compatible determinado.
Las dos ecuaciones representan la **misma recta**.	Infinitos	Compatible indeterminado.
Las rectas son **paralelas**.	Ninguna	Incompatible.

d) El punto A = (3; 4), es la solución de un sistema de ecuaciones.

1. Escribí la ecuación de la recta **r** que pasa por (0; 0) y por A.

2. Escribí la ecuación de otra recta **s** tal que el sistema que forman las rectas **r** y **s** tengan como única solución el punto A.

3. ¿Es única la ecuación de la recta **s**? ¿Por qué?

En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cada ecuación se representa por una recta.

- Si el sistema tiene una sola solución, esta resulta ser un punto (x, y) cuyas coordenadas satisfacen las dos ecuaciones del sistema.

- Si las ecuaciones son equivalentes, el sistema tiene infinitas soluciones.

- Si las ecuaciones corresponden a rectas paralelas, el sistema no tiene solución.

Para finalizar

Importantes contenidos matemáticos como los números racionales, la proporcionalidad y las relaciones lineales están todos íntimamente conectados, por eso, cuando se abordan contenidos matemáticos nuevos, se tienen muchas oportunidades de usar y hacer conexiones con lo que ya se sabe.

Cuando algún problema concreto demanda encontrar los valores de las variables que satisfacen simultáneamente a dos ecuaciones, decimos que se trata de un *sistema*. Estas expresiones simbólicas tienen su correlato en tablas y gráficos que permiten visualizar las posiciones relativas de dos rectas y su punto de intersección que, en este caso, es la solución del problema.

Los temas que corresponden a la programación lineal que verás en la próxima unidad te ayudarán a ampliar este espacio de problemas que tienen aplicación en la economía, la administración y la actividad industrial.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Números y triángulos

Dibujá un triángulo equilátero cualquiera. Dividilo en cuatro triángulos, también equiláteros, uniendo los puntos medios de cada lado del triángulo original. Quedan determinados nueve segmentos que son los lados de los triángulos más pequeños. Distribuí los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9 en los lados de los triangulitos, sin repeticiones, de modo que la suma de los tres números correspondientes a cada triangulito sea siempre la misma.

2. Una relación pitagórica

En el triángulo ABC, C = 90°, AC = 20, y AB = 101. D es el punto medio de BC. Hallá el área del triángulo ADB.

3. Sudoku

El objetivo del juego es colocar en los cuadrados vacíos los números que faltan de modo que en cada cuadro de 3 × 3 estén todos los números del 1 al 9, con la condición de que cada número aparezca solamente una vez en cada fila horizontal y en cada columna vertical del cuadro 9 × 9.

			5			9		
	2							8
8				4				3
	5	7	1		3			2
2			9		5	3	8	
9				1				5
7				6		8	1	
		2			7			9

4. Sudoku exprés

Este juego es similar al Sudoku, pero se juega solamente con los números del 1 al 6.

	6			1	3
		2		5	6
		6			1
3		4	6		
		3			
6		1	5	3	4

UNIDAD 14 Sistemas de inecuaciones

Los problemas de administración y economía están relacionados frecuentemente con la necesidad de optimizar una función matemática. Puede ser necesario, por ejemplo, optimizar ganancias, costos, tiempos de espera, en situaciones en las que se presentan algunas restricciones. En este tipo de problemas, optimizar puede significar tanto la búsqueda del máximo como del mínimo de una función o variable de la economía, por ejemplo, los insumos, la mano de obra, el capital disponible o el tiempo de producción.

Las restricciones que presentan los problemas de ese tipo se pueden expresar, en general, a través de inecuaciones lineales. En la unidad 13 estudiaste sistemas de dos ecuaciones lineales. Por la importancia que adquieren como una herramienta matemática que se aplica en diversos campos como la industria o la administración, en esta oportunidad ampliarás el trabajo realizado mediante el estudio de inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales.

Las relaciones que se establecen entre las variables puestas en juego en el momento de optimizar un recurso dan lugar a una aplicación de inecuaciones al método matemático denominado programación lineal. Se trata de problemas que involucran gran cantidad de variables y para ser resueltos generalmente requieren de la ayuda de las computadoras. En esta unidad verás algunos ejemplos sencillos de este tipo de problemas.

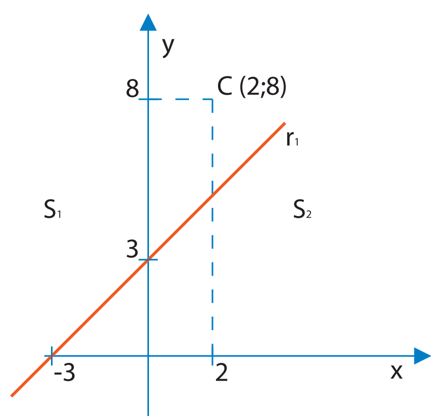
Seguramente recordarás el trabajo realizado en unidades anteriores con funciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Es conveniente que tengas a mano los materiales de dichas unidades para que recurras a ellos cada vez que lo necesites.

A

1. ¿Cómo se representa un semiplano?

La resolución de problemas se apoya frecuentemente en la representación gráfica de zonas del plano limitadas por rectas; por eso, es importante que distingas esas zonas.

a) Representá gráficamente la recta $\mathbf{r_1}$, cuya ecuación es $y = x + 3$. Indicá sus puntos de intersección con los ejes, (0; 3) y (-3; 0) y también un punto C = (2; 8) que no pertenece a $\mathbf{r_1}$. Sombreá con diferentes colores las zonas S_1 y S_2 del plano del papel, cada una de las cuales está limitada por $\mathbf{r_1}$.
Observá el esquema de la situación:



b) Escribí cuatro pares ordenados correspondientes a puntos que verifiquen la ecuación de la recta $\mathbf{r_1}$. Representalos en el gráfico.

c) La recta $\mathbf{r_1}$ divide al plano en dos zonas o semiplanos: S_1 y S_2. La inecuación $y > x + 3$ corresponde al semiplano S_1, al que pertenece, entre otros, el punto C = (2; 8).

- Pensá cómo se puede verificar esta afirmación y hacelo.
- Escribí las coordenadas de otros puntos que pertenezcan a S_1 y comprobá si esos puntos, en efecto, hacen verdadera la inecuación de la recta dada.

d) ¿Qué inecuación corresponde a $\mathbf{S_2}$? Verificalo.

e) Los puntos de $\mathbf{r_1}$, ¿pertenecen a $\mathbf{S_1}$? ¿Por qué?

f) Los puntos de $\mathbf{r_1}$ ¿pertenecen a $\mathbf{S_2}$? ¿Por qué?

El análisis de las coordenadas de puntos ubicados en las dos zonas del plano, que quedan determinadas por una recta, fundamenta la siguiente definición:
Se dice que la recta r_1 que divide a los semiplanos S_1 y S_2 es la recta borde de uno de los semiplanos S_1 o S_2.

g) ¿Qué relación satisfacen las coordenadas de los puntos del plano que pertenecen a $\mathbf{S_1}$ o a $\mathbf{r_1}$? Respondé escribiendo la inecuación correspondiente.

h) Copiá en tu carpeta y completá:

La inecuación **y** ″ x + **3** es la relación que verifican las coordenadas de los puntos del plano que pertenecen a ....

Observá que la diferencia entre escribir y ″ x + 3 y escribir $y < x + 3$ consiste en que en el primer caso los puntos de la recta satisfacen a la inecuación y ″ x + 3, en cambio, en el segundo caso, al excluirse la igualdad, la recta $y = x + 3$ no pertenece al conjunto solución de la inecuación $y < x + 3$. Por eso se adopta la convención de representar a la recta borde con línea de puntos para indicar que no pertenece al semiplano.

i) Representá en distintos sistemas de ejes cada una de las siguientes inecuaciones.

I. $y < -5x + 2$	**IV.** $3x > 2y$
II. $y \geq -6x - 4$	**V.** $-3y + 9 < 6x$
III. $-y < 2x$	**VI.** -4y ″ 5x

Comenzá representando la recta borde, cuya ecuación conviene que esté expresada en la forma $y = mx + b$. Luego indicá claramente qué convención elegís para mostrar el semiplano que se obtiene en cada caso. En general, se sombrea el conjunto de los puntos que verifican la inecuación pero en algunos libros, los autores prefieren dejar en blanco dicha zona.

j) Verificá que el semiplano obtenido en cada caso sea el correcto reemplazando en la inecuación original las coordenadas de algún punto del semiplano indicado.

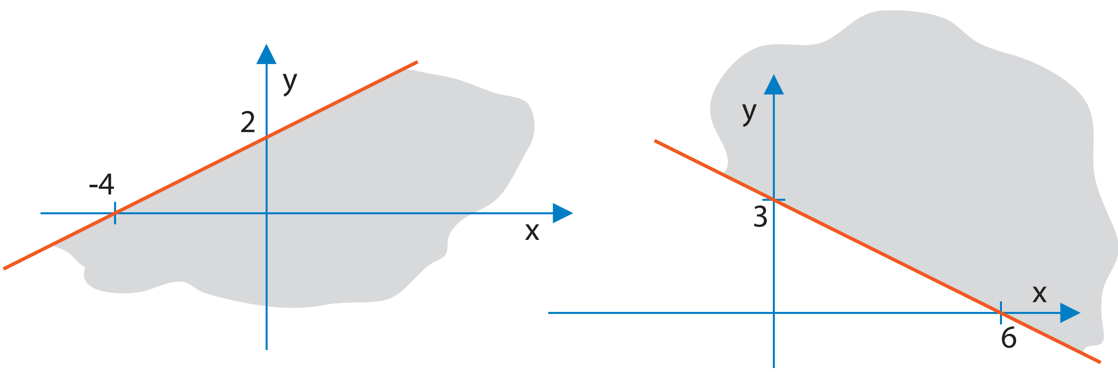
La reflexión sobre las características de los puntos que pertenecen a uno u otro semiplano te permitirá analizar cómo se vinculan con las respectivas inecuaciones.

2. Reconocimiento de inecuaciones

En esta actividad vas a formular inecuaciones a través del reconocimiento de semiplanos representados gráficamente.

a) Copiá en tu carpeta los siguientes esquemas.

b) Escribí la relación que satisfacen las coordenadas de los puntos del semiplano que se muestra sombreado en cada esquema.



*Recordá que en la unidad **4** aprendiste que las intersecciones de una recta con los ejes coordenados son los datos que permiten escribir la ecuación de la recta.*

A

3. Zonas en el plano gráfico

En las actividades anteriores ubicaste los puntos del plano que satisfacen a una inecuación o indicaste la inecuación correspondiente partiendo del gráfico de un semiplano. En esta actividad, vas a determinar la zona del plano cuyos puntos satisfacen simultáneamente a dos inecuaciones.

a) Hallá gráficamente la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones y verificala. Explicá en forma completa cómo procedés para llegar a mostrar el resultado.

I) $\begin{cases} y \;''\; 2x + 1 \\ y < \dfrac{1}{3}x \end{cases}$ **III)** $\begin{cases} 3y > 6x \\ 2x - 6y \;''\; 9 \end{cases}$

II) $\begin{cases} y \;''\; 3x + 5 \\ y < 2x + 1 \end{cases}$ **IV)** $\begin{cases} 6x - 9 < 3y \\ y + x < 10 \end{cases}$

Hallar gráficamente la solución de un sistema de dos inecuaciones lineales es representar en un mismo sistema de ejes los puntos cuyas coordenadas verifican simultáneamente ambas inecuaciones. Para ello es conveniente representar por separado el semiplano solución de cada una de las inecuaciones y, luego, analizar si existe alguna zona que sea común a ambos semiplanos. La zona común, si existe, es la solución del sistema dado.

b) Sin realizar el gráfico, investigá si el punto (2, 4) pertenece a la solución del sistema.

$$\begin{cases} x + y > 3 \\ y > 3 \\ x \;''\; 2 \end{cases}$$

c) Antes de realizar la actividad **4**, resolvé gráficamente aplicando el método que aprendiste en las actividades anteriores, dos o tres sistemas con más de dos inecuaciones. Podés buscar en los libros de la biblioteca del aula sistemas para resolver o solucionar los siguientes:

$$\begin{cases} 2x + y = 80 \\ x + y = 48 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y \leq 1 \\ x + y \geq 5 \\ y \leq 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

En las actividades anteriores trabajaste con inecuaciones y aprendiste a resolver gráficamente sistemas de inecuaciones lineales. Ahora vas a aplicar esos conocimientos a la resolución de problemas de **programación lineal**. En este tipo de problemas, los sistemas están formados por más de 2 inecuaciones, a veces 3 o incluso más.

A

4. Programación lineal

En esta actividad vas a encontrar desarrollado en forma completa un problema de *programación lineal.*

a) Copiá el problema en tu carpeta. Antes de continuar, conversá con tu docente y con tus compañeros acerca de qué significa "utilidad", "pies" de madera y "maximizar".

La empresa de muebles Cañuelas fabrica mesas y sillas de comedor. En la industria maderera el volumen de madera disponible se mide en pies.*
Para fabricar cada silla se necesitan 20 pies de madera y 4 horas de trabajo.
Para fabricar cada mesa, 50 pies de madera y sólo 3 horas de trabajo.
El fabricante dispone de 1980 pies de madera y personal a su disposición para trabajar hasta 380 horas.
El fabricante desea obtener una utilidad de $30 por cada silla vendida y $60 por cada mesa vendida.
¿Cuántas mesas y sillas se deben producir para maximizar las utilidades, suponiendo que se vende todo objeto producido?

* El pie de madera es una medida inglesa de uso tradicional en carpintería, que corresponde a 1 pie (30,48 cm) de ancho, por 1 pie de largo, por 1 pulgada (2,54 cm) de grosor.

b) Para responder a la pregunta de la situación planteada, debés seguir varios pasos.
1. El primero es volcar en un cuadro toda la información disponible, para ello copiá la siguiente tabla y completala con los datos indicados en el enunciado.

	Cantidad necesaria por cada unidad		Total dispondible
	silla	mesa	
Madera (pies)			
Mano de obra (horas)			
Utilidad por unidad ($)			

2. Si llamás **x** al número total de sillas que se producen, ¿cuál es la cantidad de madera necesaria para construir **x** sillas?
3. Si llamás **y** al número total de mesas producidas, ¿cuál es la cantidad total de madera necesaria para producir las **y** mesas?
4. Expresá los datos de los dos primeros renglones de la tabla relacionados con **x** e **y** mediante las inecuaciones respectivas.

5. ¿Tiene sentido que **x** o **y** tomen valores negativos? ¿Por qué?
6. Escribí las dos inecuaciones que indican que **x** e **y** sólo pueden tener valores que no sean negativos.
7. Representá en un mismo sistema de ejes coordenados el sistema que forman las inecuaciones que escribiste en los puntos **2**, **3** y **6**. Elegí convenientemente la escala de cada eje; pensá, por ejemplo, que si sólo se fabricaran sillas, la madera disponible alcanzaría para hacer 99 sillas.

Seguramente el sistema de inecuaciones que representaste es:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 50y \leq 198 \\ 4x + 3y \leq 380 \end{cases}$$

Este sistema de inecuaciones se denomina conjunto de restricciones del problema porque indica las condiciones que no se pueden exceder.
El conjunto solución del sistema se llama polígono de soluciones posibles. Los puntos interiores al polígono pueden ser las soluciones del problema que lo originó.

8. Coloreá en tu gráfico el conjunto solución del sistema. Nombrá los vértices del polígono y escribí sus coordenadas.
9. ¿Qué utilidad obtiene, es decir, cuánto gana el fabricante...
- si fabrica 10 sillas y ninguna mesa?
- si fabrica 6 sillas y 2 mesas?
- si no fabrica sillas y sí 5 mesas?

Los pares sillas-mesas: (10; 0), (6; 2), (0; 5) verifican la ecuación $30x + 60y = 300$.
Todos los distintos pares de números que verifican esta ecuación, representan la cantidad de mesas y sillas que se deben fabricar para que, al ser vendidas, produzcan una ganancia de $300.
$30x + 60y = 300$ es una de las rectas de isoutilidad ("isos" signfica "igual").
Llamaremos r_1 a esa recta "asociada" con $300 de utilidad.

10. ¿Cuál es la ecuación de la recta de isoutilidad $\mathbf{r_2}$, que corresponde a $600? Escribila y hallá dos pares de valores (**x; y**) que la verifiquen.
- Escribí la recta $\mathbf{r_3}$ de isoutilidad correspondiente a $1500 de utilidad.
- Dibujá en el mismo sistema de ejes donde representaste el polígono de soluciones posibles, las rectas $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{r_3}$.
- ¿Cómo resultan $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{r_3}$ entre sí? ¿Por qué?
- ¿En cuál de ellas, los pares (**x; y**) resultan más convenientes para el fabricante? En otras palabras, ¿cuáles pares representan la cantidad de mesas y de sillas que producen mayor utilidad?

11. Copiá en tu carpeta las siguientes afirmaciones y decidí si son verdaderas o falsas con relación al problema anterior.

V F Todas las rectas de isoutilidad tienen pendiente $-\frac{1}{2}$.

V F A medida que las utilidades aumentan, las rectas se alejan del (0;0).

V F Para encontrar el punto de mayor utilidad, se debe trazar la recta de isoutilidad que se encuentre lo más lejos posible de (0;0) y que tenga intersección con el polígono de soluciones posibles.

12. Mostrá en el gráfico algunas otras rectas de isoutilidad y la que proporciona la mayor de las utilidades, es decir, la recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ que pasa por (65;40).

13. Ahora, respondé la pregunta del problema propuesto: ¿cuántas sillas deben producirse para maximizar el beneficio? ¿cuántas mesas? ¿qué utilidad obtendrá el fabricante?

Para responder a las preguntas planteadas por este problema se ha **maximizado** la función **30x + 60y = u.** Esta función es la función objetivo del problema. Es decir, que es la función que se debe optimizar (maximizar o minimizar) según la situación.
El punto que corresponde a la mayor utilidad es uno de los vértices del polígono de soluciones posibles.
Para encontrar cuál de los vértices del polígono de soluciones posibles es el punto de utilidad máxima, hay que evaluar en cada vértice la función **utilidad**: u =30x+ 60y.
Podemos mostrarlo en un cuadro:

coord. del vértice	(0;0)	(0;66)	(95;0)	(65;40)
u = 30 x + 60 y	0	3960	2850	4350

*En un problema de **programación lineal** hay que identificar:*
- *el conjunto de restricciones;*
- *el polígono de soluciones posibles;*
- *la función objetivo.*

El problema se resuelve encontrando cuál de los vértices del polígono de soluciones posibles optimiza la función objetivo.

c) Para revisar lo que aprendiste, copiá este sistema en tu carpeta y, luego, respondé a las preguntas que siguen. Si tenés alguna duda, revisá el trabajo que realizaste en las consignas **a** y **b**.
Supongamos que en un problema de programación lineal es necesario minimizar

la función $\mathbf{z = 2x + 4y}$ sujeta a las restricciones: $\begin{cases} x \,''\, 0 \\ y \,''\, x + 5 \\ x + y \,''\, 10 \\ y \,''\, -5x + 5 \end{cases}$

1. ¿Cuál es la función objetivo?
2. ¿Cuál es el conjunto de restricciones?
3. Representá gráficamente el polígono de soluciones posibles.
4. Hallá el par (**x;y**) que minimiza la función **z**.

Para finalizar

Los sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales se aplican en la resolución de problemas de programación lineal. Se usan en muchos problemas de la industria, el comercio o la economía cuando se trata de encontrar un conjunto de datos que maximice o minimice, según el caso, una función que se denomina *función objetivo*.

Las funciones de ganancia y de costo son ejemplos de funciones objetivos. El sistema de igualdades o desigualdades a las que está sujeta la función objetivo refleja las restricciones; por ejemplo, las limitaciones sobre recursos como insumos o mano de obra, impuestas a la solución del problema.

Estos modelos de optimización son usados en casi todas las áreas de toma de decisiones. Cuando se manejan muchas variables, el mayor o menor éxito de estos procedimientos depende de la cantidad de información que posea quien toma las decisiones. No cabe duda de que el uso de las nuevas tecnologías de la información contribuye al éxito en la resolución de este tipo de problemas

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Montones de piedras

Hay cinco montones de piedras. Se quita $\frac{1}{5}$ de las piedras del primer montón y se agregan al segundo montón. Luego se quita $\frac{1}{5}$ de las piedras que hay ahora en el segundo montón y se agregan al tercer montón. A continuación, se quita $\frac{1}{5}$ de las piedras que hay ahora en el tercer montón y se agregan al cuarto montón. Finalmente, se quita $\frac{1}{5}$ de las piedras que hay ahora en el cuarto montón y se agregan al quinto montón. De este modo, todos los montones finalizan con 124 piedras cada uno. ¿Cuántas piedras había inicialmente en cada montón?

2. Un número de seis cifras

Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, se puede formar un número de seis cifras distintas **abcdef**, tal que el número de tres cifras **abc** sea múltiplo de 4, el número de tres cifras **bcd** sea múltiplo de 5, el número de tres cifras cde sea múltiplo de 3 y el número de tres cifras **def** sea múltiplo de 11.

3. Sudokus

Te ofrecemos un sudoku exprés y otro tradicional.
El sudoku exprés es un juego similar al sudoku, pero se juega en un tablero de 6 por 6, solamente con los números del 1 al 6. No deben repetirse en ninguna fila y ninguna columna.

1	5				
6			4		
				5	2
2	3				
		1			6
				4	1

			7	6			4	3
				3				9
5				9	8	6		
		9						5
		3		2		4		
4						7		
		1	9	8				2
3	9			1				4
2	8			4	7			

UNIDAD 15 Funciones cuadráticas

En esta unidad vas a continuar trabajando con funciones. Ampliarás el trabajo que realizaste en la unidad 12 acerca de las funciones lineales representadas gráficamente mediante rectas, con el estudio de otras funciones cuya representación gráfica es una curva.

Mediante algunos ejemplos sencillos, estudiarás las características de estas relaciones en las que la incógnita está elevada al cuadrado, y de sus correspondientes representaciones gráficas.

Frecuentemente, estas funciones, denominadas cuadráticas, describen además de situaciones matemáticas, fenómenos propios de otras disciplinas como la Física o la Economía. Su aplicación a otras ramas del conocimiento es útil para representar, por ejemplo, movimientos con aceleración constante, trayectorias de proyectiles, ganancias y costos empresariales, etcétera.

Podrás comprobar que el estudio de estas gráficas permite obtener información mediante el análisis de las funciones sin necesidad de recurrir a la experimentación.

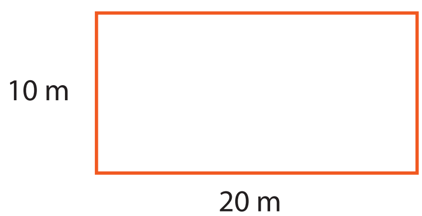
A 1. Una huerta escolar

A partir de un problema concreto, investigarás la relación funcional área-perímetro en una familia de rectángulos del mismo perímetro.

a) Leé el siguiente problema. Al terminar la actividad, estarás en condiciones de responder a la pregunta que plantea.

> En la escuela de Tres Cruces van a construir una huerta de forma rectangular. Con el dinero disponible se pueden comprar 60 metros de alambre tejido romboidal para el cerco. La directora propone que, con esa cantidad de alambre, la huerta tenga la mayor superficie posible para sembrar. ¿Qué medidas debe tener la huerta?
> Responder a esta pregunta es equivalente a encontrar la respuesta a otra pregunta que podemos expresar de la siguiente manera: ¿Cuál es el rectángulo de mayor superficie que se puede rodear con 60 m de cerco?

b) Reunite con tus compañeros para explorar qué dimensiones pueden tener los distintos rectángulos de 60 m de perímetro, por ejemplo, un rectángulo de 20 m por 10 m.



Para facilitar la tarea, trabajen con la suma del largo y del ancho de cualquiera de esos rectángulos. Prueben al menos cuatro ejemplos con largos y anchos diferentes.

c) Copien en sus carpetas la siguiente tabla y complétenla con todos los casos que hayan encontrado. Más adelante, completarán la columna libre.

Dimensiones de los rectángulos		
Altura (m)	**Base (m)**	
20	10	

d) Antes de continuar, respondan entre todos a las siguientes preguntas sobre las huertas rectangulares que propusieron.

1. ¿Pensaron en las dimensiones de una huerta cuadrada?
2. ¿Colocaron en la tabla algún caso que tenga 10 m de base y 20 m de altura?
3. ¿Tuvieron en cuenta los casos de los rectángulos rotados, es decir, los que se obtienen si se intercambian la base y la altura?

e) Tal como plantea el problema, el objetivo es construir una huerta de la mayor superficie posible. Entonces, completá la columna que quedó vacía en el cuadro del punto **c** escribiendo el área correspondiente a cada rectángulo, expresada en metros cuadrados.

f) Ahora estás en condiciones de responder a la pregunta del problema:

• ¿Qué medidas debe tener la huerta? O lo que resulta equivalente, ¿cuál es el rectángulo de mayor área que se puede rodear con 60 m de cerco? Escribí la respuesta en tu carpeta.

A

2. Las funciones cuadráticas y las parábolas

Para introducirte en el tema de las funciones cuadráticas y sus gráficos, vas a analizar los resultados de la actividad **1**, desde el punto de vista matemático. Revisarás los valores de la tabla que construiste en el punto **c** de esa actividad.

a) Llamá **x** a la base de los rectángulos e **y** al área.
Para cada valor de la base, **x**, mayor que cero y menor que 30, existe un rectángulo que tiene una cierta superficie, **y**. Completá la tabla siguiente, con los datos que calculaste en la actividad **1**.

x (base, m)	y (superficie, m^2)
20	200
10	200
15	

b) Representá gráficamente en un sistema de ejes la relación que vincula la superficie de los rectángulos de perímetro 60, **y**, en función de la base, **x**. Elegí con cuidado la escala conveniente para cada uno de los ejes de coordenadas. Si te parece necesario, buscá otros pares de coordenadas para obtener una curva más precisa.

c) Teniendo en cuenta la tabla y el gráfico que acabás de realizar, copiá en tu carpeta las siguientes afirmaciones y escribí si son verdaderas o falsas.

1. La relación que vincula la superficie de los rectángulos de perímetro 60 **(y)** en función de la base **x** no es lineal.
2. Hay pares de rectángulos con la misma superficie. Por ejemplo, el de base 20 y el de base 10.
3. Existe un único valor de la base para el que no hay dos superficies iguales.
4. Existe un valor máximo de la superficie **y = 225** correspondiente a **x = 15**.
5. La curva es simétrica respecto de una recta que pasa por el punto (15; 225).
6. La curva es cóncava hacia abajo.

Es posible obtener la fórmula que corresponde a esta relación que vincula la superficie de los rectángulos de perímetro 60, **y**, en función de la base, **x**, procediendo del siguiente modo:

Expresiones equivalentes	Justificación
$y = x \cdot h$	Aplicación de la fórmula para obtener la superficie de un rectángulo.
$y = x\,(30 - x)$	Se reemplaza la altura de los rectángulos por la diferencia entre 30 y la longitud de la base.
$y = 30\,x - x^2$	Se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la resta y se obtiene una ecuación de segundo grado.

Habrás observado que:
• La fórmula que vincula la base **x** con el área **y** de los rectángulos de perímetro 60 es:
$\mathbf{y = 30\,x - x^2}$.
• La variable independiente **x** está elevada al cuadrado por lo que es una ecuación de segundo grado, la expresión **f(x) = y** corresponde a una función cuadrática.
• La curva que representa a la función cuadrática es una parábola.

d) Copiá las siguientes ecuaciones y realizá las operaciones necesarias para indicar cuáles son ecuaciones de segundo grado. Reunite con tus compañeros para comparar los resultados.

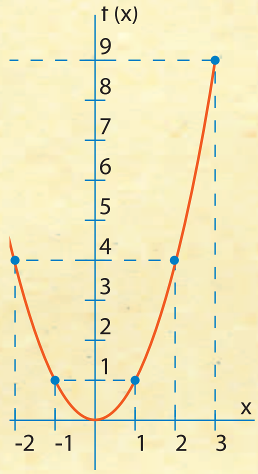
1. $3 + x = \frac{4}{2-x}$

2. $x^3 - 1 = x\,(x + 2)$

3. $x \,.\, 54x = 6$

4. $10x^3 = 5\,x^2 + 60$

La función cuadrática más sencilla es **f(x) = x²** porque la expresión **x²** no está modificada por coeficientes ni otros términos. Su gráfica es esta curva simétrica:



e) Copiá en tu carpeta la tabla de la función $\mathbf{f(x) = x^2}$ y completá los espacios en blanco.

x	-3		-1		0	0,5		2	
f(x)=x²		4		0,25	0	1			9

Se puede afirmar que:
- las fórmulas que caracterizan a las funciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado;
- las funciones cuadráticas se representan mediante parábolas.

3. Fórmula general de las funciones cuadráticas

Después de analizar la función $y = x^2$ trabajarás con la expresión simbólica general de las funciones cuadráticas.

a) Copiá en tu carpeta la siguiente situación. Podrás resolverla al terminar la actividad.

En un negocio de venta de celulares, para decidir a qué precio vender los teléfonos y obtener la mayor ganancia posible, realizaron algunas consultas y se informaron de que la ganancia **y** (en miles de pesos) en función del precio **x** (en cientos de pesos) está determinada por la fórmula:

$$y = -2x^2 + 12x - 10$$

La fórmula permite afirmar que, por ejemplo, si se vende cada teléfono a $200 ($x = 2$), la ganancia es de $6000 ($y = 6$).

b) Copiá la siguiente tabla y completala según los datos del problema.

Precio *x* (en cientos de pesos)	Ganancia y (en miles de pesos)
1	
2	6
3	
4	
5	

1. ¿Cuál es el precio de cada teléfono que permite obtener la ganancia máxima?
2. ¿Para qué precios la ganancia es nula?
3. Representá gráficamente en un sistema de ejes la relación que vincula la ganancia **y**, en función del precio de los teléfonos celulares **x**. Elegí con cuidado la escala conveniente para cada uno de los ejes de coordenadas. Si lo necesitas, buscá otros pares coordenados para obtener una curva más precisa.

Habrás observado que sabiendo que la fórmula $y = -2x^2 + 12x - 10$ correspondiente a la ganancia (y) que se obtiene en función del precio (x) de los teléfonos celulares es la ecuación corresponde a una función cuadrática y la representación gráfica es una parábola.

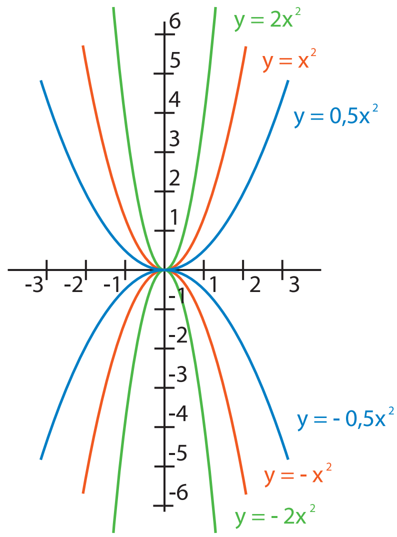
La expresión simbólica general de las ecuaciones correspondientes a funciones cuadráticas puede tener además del término de segundo grado, uno de primer grado y un término independiente.

*Una **función cuadrática** es toda función que puede escribirse en la forma **f(x) = a x2 + b x + c**, donde **a, b** y **c** son números cualesquiera, con la condición de que a sea distinto de 0. A esta expresión se la conoce como **expresión polinómica** de la función cuadrática.*

*Si **b** = 0, la ecuación es de la forma $y = a\,x^2 + c$.*
*Si **c** = 0, la ecuación es de la forma $y = a\,x^2 + bx$.*
*Si **b** = 0 y además **c** = 0, la ecuación es de la forma $y = a\,x^2$.*

c) En el gráfico siguiente, se han representado seis funciones del tipo $y = ax^2$ en las que a tiene distintos valores, **b = 0** y **c = 0**.

1. Observá el gráfico y respondé:
- ¿Qué relación encontrás entre el valor absoluto de **a** en cada ecuación y la abertura de las parábolas?



Habrás observado que:
- Todas las parábolas de ecuación $y = ax^2$ tienen por vértice el punto V = (0, 0).
- La parábola $y = ax^2$ tiene un mínimo si $a > 0$ y tiene un máximo si $a < 0$.
- Cuanto mayor es el valor absoluto de a, más cerrada es la parábola correspondiente.

d) Revisá los gráficos que corresponden a las ecuaciones $y = -2x^2 + 12x - 10$ e $y = 30\,x - x^2$ (obtenida en punto **b** de la actividad **2** y comparalos con el gráfico de la ecuación $y = x^2$.

1. Anotá las semejanzas y diferencias que observás en cuanto a:
- Las intersecciones de la curva con el eje **x**.
- Las intersecciones de la curva con el eje **y**.
- El eje de simetría de la curva.
- La existencia de máximo o de mínimo.
- La concavidad hacia arriba o hacia abajo.
- El número de términos de las ecuaciones.

2. Compará tus observaciones con las de tus compañeros y conversen sobre ellas con el docente.

Habrás observado que:
si la fórmula es del tipo $\mathbf{y = ax^2}$, la parábola es simétrica con respecto al eje **y**.

e) En este punto trabajarás con expresiones equivalentes.

1. Hacé todas las cuentas que necesites para verificar que la fórmula $y= -2\ (x\ -3)^2 + 8$ es equivalente a: $\mathbf{y = 2x^2 + 12x -10}$

Las dos fórmulas representan la misma función cuadrática, sólo que en la primera se pueden leer las coordenadas del punto máximo o vértice de la parábola, en este caso (3; 8). A las expresiones de este tipo se las conoce con el nombre de *expresión canónica de la función cuadrática.*

2. Hacé todas las cuentas que necesites para verificar que la fórmula $\mathbf{y = -2\ (x - 1) \cdot (x - 5)}$ es equivalente a $\mathbf{y = 2x^2 + 12\ x -10}$.

Las dos fórmulas representan la misma función cuadrática, sólo que en la primera se pueden leer los valores 1 y 5 de **x** que anulan la función cuadrática (son los valores de **x** cuya imagen por la función es cero, vale decir los valores de **x** que hacen **y** = **0**). A las expresiones de ese tipo se las conoce con el nombre de expresión factorizada de la función cuadrática.

En la consigna **e** de esta actividad pudiste observar que una misma función cuadrática, como la del ejemplo, se puede expresar de tres formas distintas.

- $\mathbf{y = -2\ (x - 1)\ (x - 5)}$
- $\mathbf{y = -2x^2 + 12x - 10.}$
- $\mathbf{y = -2\ (x - 3)^2 + 8}$

f) A partir de la función cuadrática cuya ecuación es $\mathbf{y = 2x^2 + -4x + 2}$, realizá su representación gráfica, sabiendo que:

- (1; 0) es el punto donde la función es mínima;
- (0; 2) es el punto de intersección con el eje **y**.

1. Para hacerlo, completá una tabla con los valores que necesites y recordá las características de las parábolas que observaste en las actividades anteriores.

2. Según lo que observaste en la consigna **e** para una misma función cuadrática se pueden escribir diferentes ecuaciones. Escribí las correspondientes a la función dada y después controlá con tus compañeros y tu docente para ver si lo hiciste bien.

4. Para seguir avanzando

Hasta acá estudiaste distintas funciones cuadráticas a partir del análisis de gráficos. Pero también existen formulas muy útiles que posibilitan conocer con rapidez el vértice y las raíces, sin necesidad de graficarlas.

a) Leé las siguientes fórmulas y verificá que se cumplan en las funciones cuadráticas de los problemas que resolviste anteriormente.

Dada una función cuadrática en la forma

$x_v = -\frac{b}{2a}$ permite hallar la abscisa del vértice (x_v, y_v) de la parábola.

$(x_1, x_2) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ permite obtener las raíces de la parábola de ecuación

$y = ax^2 + bx + c$

Conversá con tu docente para decidir si es conveniente que profundices en este tema utilizando los libros de Matemática de la biblioteca del aula.

Para finalizar

En esta unidad aprendiste que una función de la forma $y= ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, es una función cuadrática porque el término en el que la variable tiene el mayor exponente es un término cuadrático y su gráfico es una curva llamada *parábola*.

El análisis de las representaciones gráficas de las funciones brinda mucha información acerca de ellas. En el caso de las parábolas, el punto de corte con el eje y se obtiene haciendo $x = 0$ en la ecuación de la parábola. Los puntos de corte con el eje x son de la forma $(x,0)$. Sustituyendo y por 0 en la fórmula $y = ax^2 + bx + c$ se obtiene la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, cuya solución es el o los valores de x en los que la curva corta al eje horizontal.

También aprendiste que el trabajo con las ecuaciones correspondientes te puede brindar información, por un lado, acerca de las coordenadas del vértice y, por otro lado, acerca de los puntos en los que la parábola se corta con el eje de las abscisas. Es decir, que si una ecuación es de la forma $y = a(x-\alpha) . (x-\beta)$ los números α y β son los valores de x que anulan la función, o bien que si la ecuación tiene la forma $y = a(x-m)^2 + n$ el par de números (m, n) indica las coordenadas del punto vértice de la parábola que presenta un máximo o un mínimo.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. El producto de dos factores

a) Te proponemos una forma interesante para multiplicar, por ejemplo, 37 x 41.
En la primera columna figuran los resultados que se obtienen de dividir sucesivamente 37 por 2 (sólo la parte entera de cada resultado).
En la segunda, figuran los resultados que se obtienen de multiplicar sucesivamente 41 por 2.

37	41
18	82
9	164
4	328
2	656
1	1312

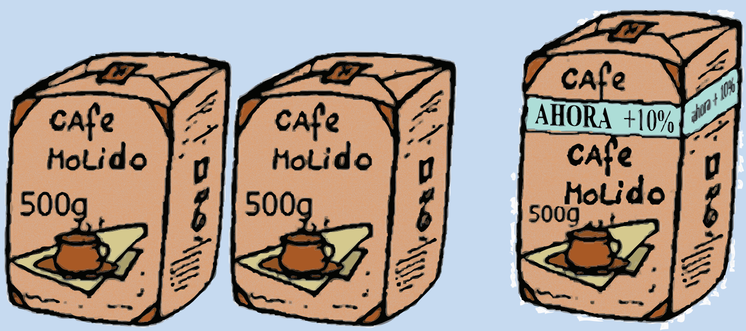
La suma **41 + 164 + 1312** es el resultado de la multiplicación: **1517**
Para elegir los sumandos, entre los números de la segunda columna, se descartan aquellos que se "corresponden" con resultados pares de las divisiones. En nuestro ejemplo, no se suman 82, ni 328, ni 656.

b) Resolvé otras multiplicaciones según el método explicado en el punto anterior.

c) ¿Te atrevés a descubrir el "truco"?

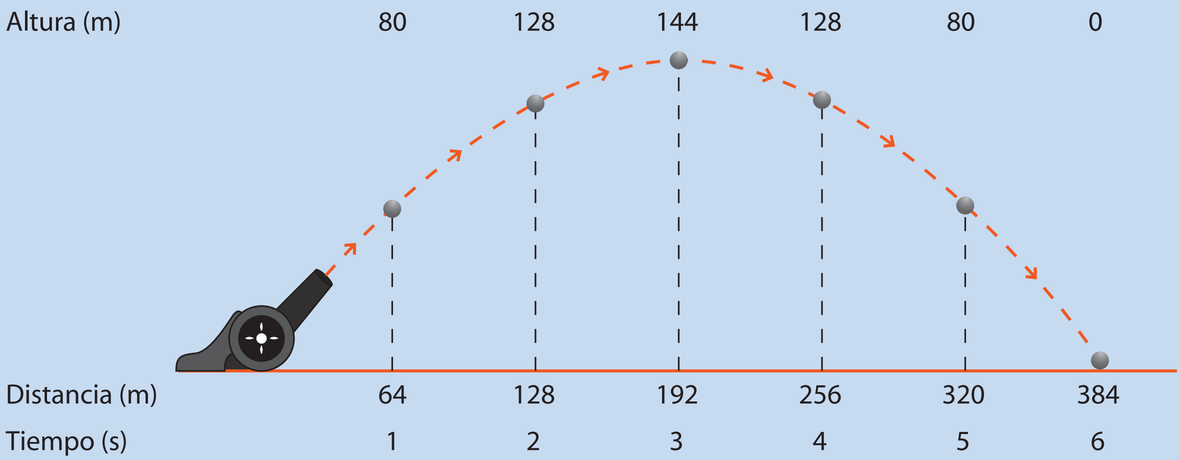
2. Los paquetes de café

En un negocio venden el paquete de 500 gramos de café a $20 el paquete. Han traído paquetes nuevos al mismo precio que contienen 10% más de café gratis. Los clientes se llevan estos paquetes nuevos y dejan los otros pero al dueño se le ocurre que si ofrece los paquetes que no tienen café gratis con el 10% de descuento en el precio va a poder venderlos todos. ¿Te parece que tiene razón? ¿Por qué?



3. Un tiro por elevación

“Donde pone el ojo, pone la bala” es una descripción de un muy buen tirador, aunque no siempre ocurre así porque si el tirador pretende que el proyectil recorra grandes distancias, su trayectoria será una parábola: el impulso inicial lo lleva hacia arriba y la gravedad lo atrae hacia abajo. Para que llegue, entonces, al destino que se quiso darle, hay que lanzarlo con cierto ángulo. Este antiguo esquema ilustra el tiro de un cañón. La altura y la distancia están medidas en metros y el tiempo en segundos. El desafío consiste en que con esos datos establezcas la ecuación correspondiente.



Unidad 16

Números reales

Cuando se realizan mediciones, por ejemplo de longitud, se pueden efectuar aproximaciones tan precisas como se desee, usando para expresarlas únicamente números fraccionarios. Esto es posible porque, por pequeña que sea su distancia sobre la recta numérica, entre dos números racionales existen infinitos otros racionales, y siempre existirá alguno que brinde la aproximación deseada.

Los números que pertenecen al conjunto de los racionales están tan próximos entre sí en la recta numérica que puede parecer que allí no caben más puntos que los racionales. Sin embargo, ya conocés otros números que también tienen su ubicación en la recta numérica como π (pi) o $\sqrt{2}$ (raíz cuadrada de 2) y que no son números racionales, porque no pueden expresarse como cociente entre dos números enteros. Esos números reciben el nombre de *números irracionales*.

Los números racionales junto con los irracionales constituyen el conjunto de los números reales que estudiarás en esta última unidad.

A

1. Sobre la recta numérica

Ya aprendiste a representar números racionales en la recta numérica. Valiéndote de ese tipo de representación, podrás determinar las relaciones de orden que existen entre los números racionales.

a) Dibujá en una hoja cuadriculada (apaisada), una familia de rectas de la siguiente manera:

1. En la primera de ellas, tomando como unidad 12 lados de cuadraditos, representá los números racionales enteros -2, -1, 0, 1 y 2. Marcá claramente el punto sobre la recta que corresponde a cada uno de ellos.

2. Debajo de la recta que dibujaste, hacé otra recta igual a la anterior marcando, además, los puntos medios de cada unidad de modo que correspondan a los números racionales, $-\frac{4}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$.

Deben quedar alineados verticalmente los puntos que corresponden a los mismos números en ambas rectas, por ejemplo, 0 y 0, -2 y $-\frac{4}{2}$, 1 y $\frac{2}{2}$

3. De esta manera, dibujá en la misma hoja otras rectas con unidad un tercio, un cuarto, un quinto, un sexto, un séptimo, un octavo, un décimo, un doceavo y, por último, un veinteavo. Tenés que trabajar con mucha precisión para lograr que queden encolumnadas las fracciones equivalentes.

b) Observando las rectas que dibujaste, copiá y respondé las siguientes preguntas en tu carpeta.

1. Si apoyás la regla verticalmente sobre el número racional 1 (recordá que además de racional, el número 1 también es entero y natural) ¿qué otros números aparecen alineados verticalmente con él?

2. ¿Y si hacés lo mismo de manera que la regla pase por el racional $\frac{3}{2}$?

3. ¿$-\frac{6}{8}$ es mayor, menor o igual que $-\frac{3}{4}$?

4. ¿$\frac{3}{5}$ es mayor, menor o igual que $\frac{7}{5}$?

5. ¿$\frac{3}{4}$ es mayor, menor o igual que $\frac{3}{10}$?

6. Dadas dos fracciones de igual denominador, ¿cuál es la mayor?

7. Y de dos fracciones de igual numerador, ¿cuál es la mayor?

8. ¿Es verdadero o falso que un número racional negativo es siempre menor que uno positivo? Fundamentá tu respuesta.

9. ¿Qué número racional se puede encontrar entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$? ¿Y entre $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{7}$?

10. ¿Existe un único número racional entre esos pares de fracciones?

c) Reunite con otro compañero para comparar las respuestas a las preguntas anteriores. Escribí otras preguntas que puedan contestarse observando todas las rectas numéricas que dibujaste. Intercambialas con las de tus compañeros y controlen las respuestas con el docente.

Habrás observado que entre dos números racionales que no sean equivalentes, por ejemplo **a** ≠ **b**, siempre se puede establecer una relación de orden, vale decir, que **a** es menor que **b**, o bien que **a** es mayor que **b**.

A 2. ¿Siempre se puede encontrar un número racional que esté entre otros dos?

Para responder a la pregunta del título de esta actividad debés realizar los siguientes ejercicios.

a) Copiá en tu carpeta los siguientes pares de fracciones.

- $\frac{3}{4}$ < .... < $\frac{5}{4}$
- $-\frac{1}{2}$ < .... < 0
- $\frac{6}{5}$ < .... < $\frac{7}{5}$
- $\frac{7}{6}$ < .... < $\frac{8}{6}$
- $\frac{3}{4}$ < .... < $\frac{3}{3}$
- $-\frac{11}{8}$ < .... < $-\frac{10}{8}$
- $-\frac{1}{7}$ < .... < $\frac{1}{7}$
- $-\frac{1}{8}$ < .... < $\frac{1}{12}$

1. Teniendo en cuenta las rectas numéricas que dibujaste en la actividad **1**, intercalá una fracción entre cada par. Si no encontrás una fracción intermedia en una misma recta, fijate en las otras.

- Te podés ayudar colocando verticalmente dos tiras de papel en cada una de las fracciones que tenés que comparar de modo que quede a la vista el intervalo entre ambas.

Habrás observado que, a veces, se puede intercalar una fracción entre otras dos de igual denominador, por ejemplo: $\frac{3}{4} < \frac{4}{4} < \frac{5}{4}$. En otros casos basta buscar una fracción que esté a la derecha de la primera y a la izquierda de la segunda. Por ejemplo, entre $\frac{7}{6}$ y $\frac{8}{6}$ se pueden intercalar $\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{9}{7}, \frac{10}{8}, \frac{12}{10}, \frac{13}{10}, \frac{15}{12}, \frac{24}{20}, \frac{25}{20}, \ldots$

2. Verificá la afirmación que acabás de leer usando la calculadora.
3. Respondé en tu carpeta: ¿se podría seguir intercalando fracciones con mayor denominador? ¿Por qué?
4. Escribí en tu carpeta seis o siete fracciones de las que pueden intercalarse entre $\frac{13}{16}$ y $\frac{13}{7}$.

b) Explorá algunos ejemplos para ver si entre dos fracciones cualesquiera, la fracción que se obtiene calculando el promedio entre ambas, se sitúa en el punto medio del segmento que tiene por extremos a esas fracciones. Podés ayudarte usando nuevamente las rectas numéricas.

*Por pequeño que sea el intervalo entre dos números racionales, es decir, por pequeña que sea la distancia entre ellos, siempre existen entre ambos, otros números racionales. Es decir, que entre dos números racionales cualesquiera, por próximos que estén, se pueden intercalar tantos racionales como se quiera. Esta propiedad característica de los números racionales se llama **densidad**. Significa que entre dos números racionales cualesquiera hay infinitos otros. Por eso se dice que el conjunto de los números racionales es **denso**.*

La **densidad** del conjunto de los números racionales sólo se puede concebir a través de un razonamiento, es decir, que no es una propiedad que se pueda visualizar. Se trata de pensar que una recta numérica no está completa con los puntos que corresponden a los números racionales. Esto se debe a que existen otros números, los irracionales, que no se pueden expresar como cociente entre dos números enteros y, sin embargo, corresponden a puntos de la recta numérica.

A 3. Números que no son racionales

En esta actividad vas a trabajar con la expresión decimal de los números racionales. Esto te permitirá distinguirlos de aquellos números que no son racionales.

a) Observá los siguientes ejemplos,

- $\frac{5}{4} = 1{,}2500000...$
- $\frac{13}{99} = 0{,}1313131313...$
- $\frac{12}{4} = 3{,}000000...$
- $\frac{131}{90} = 1{,}45555555...$

Seguramente, recordarás que una fracción siempre indica una división. Al efectuarla, se obtiene el desarrollo decimal correspondiente a ese número racional.
En los ejemplos que observaste, todos estos desarrollos de números racionales tienen una característica en común, son expresiones periódicas, porque tienen una o más cifras decimales que se repiten indefinidamente y se denominan *período*.
Los dos primeros ejemplos son expresiones decimales exactas, porque su período es cero. El tercer ejemplo es un desarrollo decimal periódico con período 13. El último ejemplo es un desarrollo decimal periódico con período 5.
Esta periodicidad distingue a los números racionales de aquellos otros que no lo son.

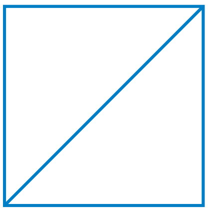
b) Usá la calculadora o hacé las cuentas de dividir necesarias para hallar el desarrollo decimal de las siguientes fracciones: $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{13}{2}, \frac{17}{6}, \frac{23}{7}, \frac{4}{9}, \frac{45}{100}$. Luego completá en tu carpeta la siguiente tabla:

Fracción	Desarrollo decimal	Período de desarrollo decimal
$\frac{3}{5}$		
$\frac{7}{8}$		
$\frac{13}{2}$		
$\frac{17}{6}$		
$\frac{23}{7}$	3,285714285714	285714
$\frac{4}{9}$		
$\frac{45}{100}$		

Existen números para los que es imposible encontrar una expresión decimal exacta o periódica, con período distinto de cero: son los ***números irracionales****. Por ejemplo,* $\sqrt{2}$.

c) Ya trabajaste sobre la recta numérica para representar números racionales, incluidos los números naturales y los números enteros. Ahora, aprenderás a ubicar sobre la recta real a los números irracionales. Leé el siguiente párrafo y copialo en tu carpeta.
Para hallar la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 (la llamaremos **x**) se puede aplicar la propiedad pitagórica:

$$1^2 + 1^2 = 1 + 1 = x^2$$
$$2 = x^2$$
$$\sqrt{2} = x$$

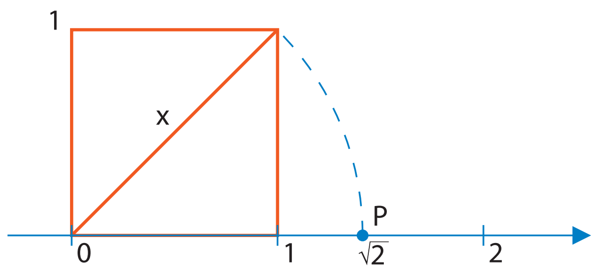


El valor de la diagonal x es entonces un número mayor que 1 y menor que 2; se escribe $\sqrt{2}$, se lee *raíz cuadrada de dos* y es un número irracional cuyo cuadrado es 2.

d) Para ubicar en la recta numérica el punto que corresponde a $\sqrt{2}$ podés recurrir a un procedimiento geométrico.

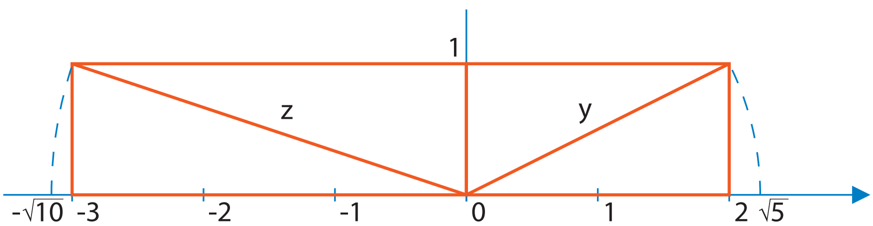
1. Trazá en tu carpeta una recta numérica tomando como unidad el lado del cuadrado.

2. Usá el compás para transportar sobre la recta, a partir de 0, la longitud de la diagonal. Observá que la diagonal es mayor que 1 y menor que 2 y el punto que corresponde a $\sqrt{2}$ está ubicado entre 1 y 2.



En el punto **2** de la consigna anterior comprobaste geométricamente que el punto correspondiente a $\sqrt{2}$ se encuentra entre los que representan a 1 y 2.

e) En la recta siguiente se han representado los puntos que corresponden a los números irracionales $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{10}$. Describí con tus palabras la justificación del procedimiento empleado.



f) El trabajo con los instrumentos de Geometría puede ser poco preciso, por ejemplo, el ancho del trazo del lápiz es un factor importante de imprecisión. Pero existen otras maneras de obtener números irracionales, por ejemplo, mediante procedimientos numéricos. Esto se explica en el siguiente texto.

Para determinar exactamente el lugar que corresponde a un número irracional sobre la recta numérica, por ejemplo $\sqrt{2}$, conviene encontrar su valor numérico con mayor precisión. El punto correspondiente a $\sqrt{2}$ se encuentra con seguridad sobre la recta numérica, entre los que representan a 1 y 2, ya que $1^2 = 1$, $(\sqrt{2})^2 = 2$ y $2^2 = 4$.

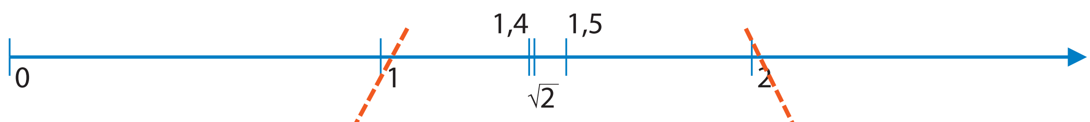
Se puede encontrar un intervalo más pequeño que [1, 2] en el que también se encuentre $\sqrt{2}$. Si se consideran los números entre 1 y 2, el límite inferior del intervalo buscado debe ser tal que su cuadrado sea menor que 2. Realizando los cálculos que aparecen a continuación encontramos los nuevos límites del intervalo:

$1,3^2 = 1,69$ demasiado pequeño.

$1,4^2 = 1,96$ demasiado pequeño.

$1,5^2 = 2,25$ demasiado grande.

Entonces, el punto $\sqrt{2}$ se encuentra entre los que corresponden a 1,4 y 1,5.

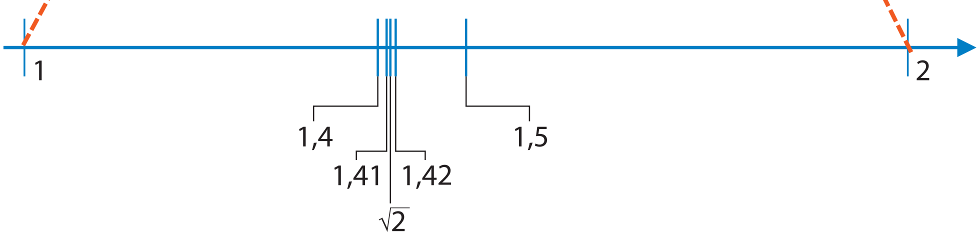


Se puede encontrar un intervalo todavía más pequeño en el cual también se encuentre $\sqrt{2}$:

$1,41 \times 1,41 = 1,9881$ demasiado pequeño.

$1,42 \times 1,42 = 2,0164$ demasiado grande.

Entonces, el punto correspondiente a $\sqrt{2}$ se encuentra entre los que corresponden a 1,41 y 1,42.



1,414 y 1,415;

1,4142 y 1,4143;

1,41421 y 1,41422.

La sucesión de intervalos es ilimitada y define a un único punto correspondiente a la raíz cuadrada buscada.

Con tiempo, paciencia y la ayuda de una calculadora, se puede continuar este proceso de estrechamiento del intervalo tanto como se quiera.

A

4. Cálculo de la raíz cúbica de un número

El mismo procedimiento de determinación de intervalos que aprendiste en la actividad anterior y te permitió calcular la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado perfecto, se puede aplicar al cálculo de una raíz cúbica. Es suficiente disponer de una calculadora. Verás un ejemplo.

a) Calcular la raíz cúbica de 5,23.

1. Si tu calculadora tiene una tecla x^y se obtiene el resultado marcando la siguiente secuencia: 5 · 2 3 x^y 3 $\frac{1}{y}x$ =. En el visor se leerá 1,7358035.

2. Si tu calculadora no tiene ninguna tecla para potencia, podés hacer el cálculo por tanteo determinando intervalos cada vez más pequeños empezando por límites enteros.

Por ejemplo, el intervalo [1, 2]: $1 < \sqrt[3]{5,23} < 2$ porque $1^3 = 1 < 5,23$ y $2^3 = 8 > 5,23$.

En la seguridad de que $\sqrt[3]{5,23}$ está entre 1 y 2 se pueden averiguar los décimos también por tanteo:

$1,5^3 = 3,375$ se ve que es menor que 5,23, entonces se puede probar con 1,7.

$1,7^3 = 4,913$ que es también menor que 5,23.

$1,8^3 = 5,832$ que es mayor que 5,23, por lo tanto:

$1,7 < \sqrt[3]{5,23} < 1,8$

3. Ya sabés que $\sqrt[3]{5,23} = 1,7$. Calculá la cifra de los centésimos aplicando el mismo procedimiento.

b) Calculá por tanteo.

- $\sqrt[3]{11}$
- $\sqrt[3]{41}$

Aunque no seamos capaces de representar exactamente por medios geométricos, todos los números irracionales a partir de su expresión decimal, es posible determinar aproximadamente, su ubicación sobre la recta numérica real.

La construcción geométrica y la determinación del valor numérico que acabás de estudiar permiten representar sobre la recta cualquier raíz irracional. Los puntos que ocupan estos números irracionales están vacíos en la recta racional, es decir, que no están ocupados por ningún punto racional. Por eso se dice que la recta racional es densa, pero no está completa. Todos los infinitos huecos que dejan libres entre sí los números racionales son ocupados por los números irracionales que de este modo completan la recta real. Esta propiedad de la recta real se conoce con el nombre de *completitud*.

5. Números reales

Además de los ejemplos que estudiaste en la actividad anterior, en el CUADERNO DE ESTUDIO **2**, tuviste oportunidad de conocer otros números irracionales: ≠ (pi) y Φ (fi) conocidos por los griegos desde la época clásica.

a) Cuando se usan números irracionales en la resolución de problemas, es frecuente usar sus aproximaciones, con la precisión que requiera el problema en cuestión. Reunite con tus compañeros para decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa.

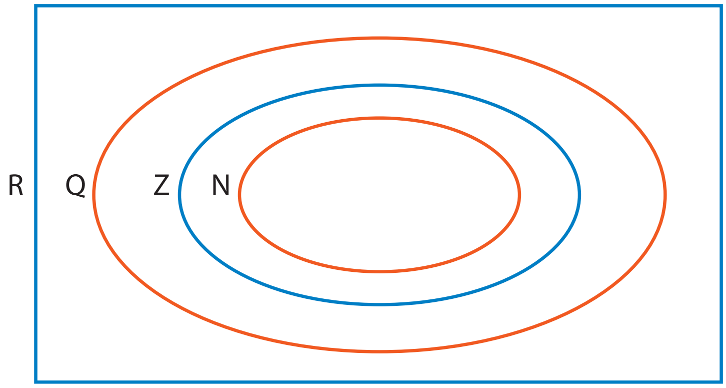
> Las aproximaciones de números irracionales son números racionales.

El número ≠ define la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro y, el número de oro, Φ, fue obtenido por los griegos como la relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado. Cuando los griegos llegaron a la conclusión de que esta relación no se podía expresar como cociente de dos números enteros, se quedaron tan conmovidos y les pareció algo tan contrario a la lógica que lo llamaron *irracional* y lo mantuvieron en secreto. Lo mismo sucedió con el número ≠.

Al trabajar con ≠ seguramente usaste alguna de sus aproximaciones: 3,14; 3,141592; 3,1416 o $\frac{22}{7}$, por mencionar solo algunas. La aproximación que se lee en algunas calculadoras es 3,141592654.

b) Conversen con el docente sobre cómo razonaron en la consigna **a** para tomar su decisión.

c) En el diagrama se muestran todos los conjuntos numéricos que conocés. Las letras R, Q, Z y N nombran, respectivamente, al conjunto de los números reales, racionales, enteros y naturales.



El conjunto formado por todos los números racionales y todos los números irracionales, forma el conjunto de los números reales.

1. A modo de síntesis del trabajo realizado en esta unidad, ubicá en el diagrama los siguientes números reales:

$5;\ \frac{6}{7};\ 0{,}345;\ 3{,}555555;\ -34;\ 0;\ \sqrt{3};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ \neq;\ \Phi$

Tené en cuenta que los números reales pueden considerarse como estructuras intelectuales. La necesidad de su creación no nace de una imposición de la práctica, porque trabajando con los números racionales la recta numérica aparece densa y sólo se advierte su incompletitud cuando se conciben los números irracionales. A la humanidad le llevó veinticinco siglos llegar al estado de conocimiento que hoy tenemos acerca de los números reales.

Para finalizar

En la práctica, los números sirven para expresar medidas y operar con ellas. Las medidas son siempre aproximadas, por eso los números decimales que se usan para resolver situaciones prácticas deben tener una cantidad de cifras decimales adecuada a lo que se quiere expresar y a la exactitud de las medidas que se usen. Por ejemplo, para expresar la superficie de un terreno no tiene sentido decir que mide 2850,97125334 m^2; es más adecuado decir que tiene 2851 m^2. Un número es racional si se puede representar como cociente entre a y b, donde a es un entero y b un entero distinto de cero. Los números racionales se pueden escribir con expresiones decimales exactas o bien como decimales periódicas. En cambio, los números irracionales no se pueden escribir como decimales exactos ni periódicos porque tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Si bien la recta racional constituye un conjunto denso, la recta real sólo se completa cuando se consideran, además de los racionales, los números irracionales. El conjunto de los números reales se caracteriza por las propiedades de densidad y completitud.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Productos curiosos

a) Multiplicá el número 76 923 por 2, 7, 5, 11, 6 y 8.
Anotá los resultados y observá sus características.
b) Hacé lo mismo para 76 923 por 1, 10, 9, 12, 3 y 4.
c) Describí tus observaciones en la forma más completa posible.

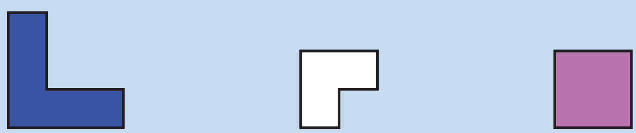
2. Potencias curiosas

- $2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
- $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
- $4^2 + 5^2 + 20^2 = 21^2$

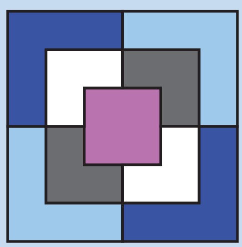
a) ¿Cómo continuarías esta sucesión?
b) ¿Siempre se verifica esta regularidad? ¿Por qué?

3. Un rompecabezas cuadrado de 6 x 6

Este cuadrado está formado por figuras de tres tipos:



a b c



a) ¿Qué fracción del rompecabezas corresponde a cada una?
b) ¿Qué fracción del total queda cubierta por las 4 piezas del tipo b?
c) ¿Qué fracción del total quedaría cubierta por la suma de una pieza a y una pieza c?
El desafío consiste en proponer la partición de un cuadrado de 6 x 6 en cuatro trozos iguales formados, cada uno, por tres piezas del tipo b.

A modo de despedida

Desde que comenzaste a trabajar con estos Cuadernos hasta hoy habrás aprendido mucho sobre Matemática. Los conocimientos que adquiriste te permitieron resolver muchos problemas prácticos y otras cuestiones interesantes específicas de la Matemática aunque no les hayas encontrado una aplicación práctica inmediata.

La Matemática depende tanto de la lógica como de la creatividad, y está regida por propósitos prácticos y por su propio interés interno. Para algunas personas, y no sólo para los matemáticos profesionales, la esencia de esta disciplina se encuentra en su belleza y en su reto intelectual.

Gran parte de la belleza que muchas personas han percibido en esta ciencia no radica en encontrar la mayor perfección o complejidad, sino al contrario, en proporcionar un gran ahorro y sencillez en la representación y la comprobación de sus ideas. La Matemática teórica no está restringida por los problemas del mundo real, pero a la larga contribuye a entenderlo mejor. A medida que la Matemática avanza, se han encontrado más y más relaciones entre partes que se habían desarrollado por separado, por ejemplo, entre las representaciones simbólicas del Álgebra y las representaciones espaciales de la Geometría.

A través del trabajo con estos Cuadernos esperamos que hayas descubierto que la Matemática forma parte del quehacer científico, que el lenguaje simbólico matemático es en extremo valioso para expresar las ideas científicas sin ambigüedad y que hayas podido disfrutar de la naturaleza del pensamiento matemático.