Apoyo al último año de la secundaria
para la articulación con el Nivel Superior

Cuaderno de trabajo para los alumnos

Resolución de problemas

Matemática

ELABORACIÓN DEL MATERIAL

Coordinación pedagógica:
Mónica Agrasar
Graciela Chemello

Coordinación autoral:
Nelci Noemi del Carmen Acuña

TEMA DISEÑAR...
Colaboradoras:
Selva Beatriz Toledo
Anabell Rodriguez

TEMA ARGUMENTAR...
Autora:
Nelci Noemi Acuña
Colaborador:
Jose Luis Mazzega

TEMA DECIDIR...
Autora:
Lillian Teresita Buyatti
Colaboradora:
Edit Molinaro

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN
Unidad de Información y Comunicación
GABRIEL FABIÁN LEDESMA
MARIO PESCI

DISEÑO DE TAPAS
Campaña Nacional de Lectura
MICAELA BUENO

Primera edición: Abril de 2007

Diseñar...

¿Qué relaciones elegir?

Introducción

Desde la antigüedad, el ser humano ha observado las formas geométricas en la naturaleza y las ha utilizado en sus representaciones artísticas, de tal manera que encontramos elementos geométricos en multitud de formas: decoraciones de vasijas, frisos, construcciones arquitectónicas, etc. Desde las pinturas rupestres, los adornos espirales en la cerámica primitiva o en la decoración del palacio de Knosos en la isla de Creta, hasta las expresiones artísticas más modernas, los hombres y las mujeres han estado interesados por el análisis y representación de las formas y las relaciones entre sus medidas así como por su proporción.

El conocimiento de las nociones matemáticas presentes en las producciones artísticas permite comprenderlas mejor y también usarlas en nuevas creaciones. Prueba de ello son los estudios de las proporciones del cuerpo humano realizados en el Renacimiento por Leonardo da Vinci y también por Le Corbusier a fines del siglo XIX.

En las creaciones artísticas o de diseño, el componente matemático es un factor más que aparece junto con la luz, el color, o el volumen. La forma y el tamaño, su análisis, interpretación y manipulación, no es el único componente del planteamiento artístico, pero si es una de las bases de su estructura.

En este módulo nos ocuparemos de recorrer algunas nociones matemáticas ligadas al diseño en dos y tres dimensiones, y a la toma de decisiones sobre la producción de objetos, imágenes visuales, edificios. Se perfilan así algunos de los temas que revisaremos en este módulo: la teoría de proporciones que es fundamental para la creación y combinación armónica de las partes de una obra, las relaciones en los poliedros regulares o semirregulares que sirven en la mayoría de los casos como estructura básica en arquitectura, escultura o diseño tridimensional, los estudios numéricos que ayudan a un conocimiento más completo de los materiales a partir de sus propiedades cuantitativas para decidir más críticamente sobre su uso, las transformaciones geométricas que permiten estudiar la regularidad o simetría de las formas y el orden gráfico, y también son utilizadas para crear la ilusión del movimiento, y la construcción de curvas tales como el círculo, la elipse, la parábola y diversas espirales, todas ellas muy usadas en las construcciones, en el diseño y en las artes en general.

El recorrido propuesto a través de los distintos textos y actividades en este módulo tiene como objetivo que los alumnos reconozcan los elementos geométricos en las obras presentes en el espacio físico que los rodea, sean capaces de abordar situaciones problemáticas de esa realidad y encontrar soluciones utilizando los conocimientos aritméticos y geométricos.

Capítulo 1: Diseñar objetos

Cuando se trata de elaborar papelería, diseñar un folleto u organizar una presentación que incluye materiales gráficos es necesario tener en cuenta tanto las normas técnicas que condicionan la producción, por ejemplo las dimensiones estándar de las hojas de papel, como las proporciones que guardan los distintos objetos presentes en un mismo trabajo de diseño.

Por otra parte también hay que considerar el aprovechamiento de los recursos para minimizar los costos.

Papelería y envases para la Fiesta Nacional de la Naranja

La localidad de Bella Vista, en la provincia de Corrientes, es uno de los centros de producción citrícola más importante de la zona, con varias plantas envasadoras de jugos que la hacen ideal para celebrar la Fiesta de la Naranja, cuyo origen se remonta hacia el año 1942.

En el año 1970 se organiza la primera Fiesta Provincial de la Naranja en la que jóvenes y niños se volcaron a pintar murales alusivos a tal acontecimiento y de la que participó toda la comunidad.

El éxito inicial se fue repitiendo a lo largo del tiempo y, a pesar de que año tras año la citricultura debió sortear números obstáculos, avances y retrocesos, esta gran fiesta del agro, de la industria y la cultura es desde el año 2002 fiesta nacional.

Historia de Bella Vista

Su origen data del año 1774, en un lugar denominado San Fernando de Garzas poblado por aborígenes provenientes del Gran Chaco. Años después se denominaba **"La Crucecita"** a este lugar utilizado para amarrar los barcos durante la noche cuando navegar el Paraná se hacía dificultoso.

En 1825, el gobernador Pedro Ferré, que fue quien contempló el bello paisaje desde el Río Paraná y la nombró "Bella Vista", aprobó su fundación. Guerras civiles, invasión de las fuerzas paraguayas de 1865, son algunos de los hechos ocurridos en esta ciudad. En una de sus esquinas, un solar con naranjos de antaño indica el sitio de reunión de la comunidad en aquellos momentos.

Las islas de la zona plagadas de selvas en galería, que cubren los arroyos, permiten encontrar especies como la espina de corona, timbó, lapacho negro y curupí. La belleza de su paisaje, junto con sus excepcionales playas, plazas y costanera, ponen a Bella Vista a la vanguardia del turismo de la zona.

Los Bellavistenses valorizan a la naranja como un elemento simbólico, que los identifica ante los demás; por ello existen tributos hacia la naranja y las naranjeras tanto en la música chamamecera, en la poesía, en el canto, en la escultura, en la pintura.

Fuente: http://www.corrientes.com.ar/bellavista/historia.htm

En el marco de la organización de la fiesta los representantes del Municipio de Bella Vista conjuntamente con la Comisión de Citricultores de la ciudad, se reúnen anualmente para distribuir tareas ligadas a la confección de papelería y de recuerdos con el isologo de la Fiesta para regalar a las autoridades y visitantes.

Actividad 1: Analizar proporciones

Consideremos por ejemplo, el caso del equipo técnico que es el encargado de solicitar a una imprenta de la localidad la confección de: carpetas, folletos, credenciales, entradas, invitaciones, afiches de promoción para la ciudad y localidades vecinas, entre otras cosas.

Para la elaboración de los materiales gráficos, la empresa contratada deberá regirse por las normas para la realización de insumos gráficos establecidas por la Subsecretaria de Organización y Control de Gestión de la Provincia. El papel que utiliza se presenta generalmente en los formatos que se muestran en el cuadro:

Formato A4 (210 x 297 mm) 75 g/m² Formato Foto Carta (216 x 279 mm) 75 g/m² Formato Foto Oficio (216 x 356 mm) 75 g/m² Formato A3 (297 x 420 mm) 75 g/m² Formato A4 (210 x 297 mm) 70 g/m² Formato Carta (220 x 280 mm) 70 g/m² Formato Oficio (220 x 340 mm) 70 g/m²- Formato Foto Oficio (216 x 356 mm) 70 g/m²	*Para saber…*El Instituto Argentino de Normalización (IRAM) es una asociación civil sin fines de lucro cuyas finalidades específicas, en su carácter de Organismo Argentino de Normalización, son establecer normas técnicas, sin limitaciones en los ámbitos que abarquen, además de propender al conocimiento y la aplicación de la normalización como base de la calidad, promoviendo las actividades de certificación de productos y de sistemas de la calidad en las empresas para brindar seguridad al consumidor.

Fuente: http://www.celulosaargentina.com.ar/productos/normas_calidad.php

El equipo organizador de las charlas técnicas, que serán desarrolladas en el predio en el que se realizará la fiesta Nacional de la Naranja, solicita con meses de anticipación a los disertantes la elaboración de un resumen de sus ponencias en formato A4 con márgenes superior e inferior de 2,5cm y derecha e izquierdo de 2cm en formato digital. Estos resúmenes se entregan a los asistentes dentro de una carpeta junto a folletos y demás información acerca de las fiestas que se realizan en Bella Vista.

Para la tapa y contratapa de la carpeta se seleccionan distintas imágenes y la prueba de diseño es realizada en formato A4. *(Figura 1)*

Además es necesario hacer las invitaciones que serán enviadas desde el municipio a las distintas comunidades, en las que va un membrete y el isologo de la Fiesta. *(Figura 2)*

Las entradas para el Festival, también llevan el isologo. Además, la Municipalidad pide que tanto en las invitaciones como en las entradas se imprima en el margen inferior izquierdo, el logo del Municipio. *(Figura 3)*

Figura 2

Fuente Imagen:
Folleto Fiesta Nacional
de la Naranja

Figura 3

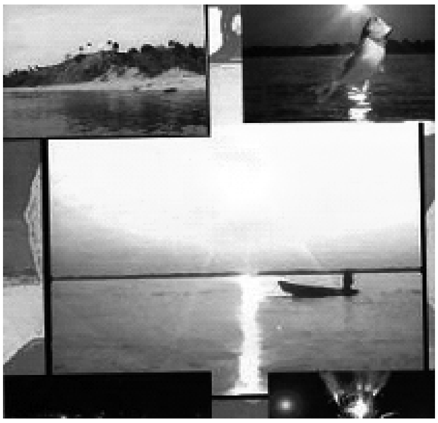


Figura 1

1.1 ¿En que formatos puede confeccionarse la carpeta para que quepan las hojas A4?

1.2 ¿Qué formato se debe elegir si se desea que, para lograr un diseño más armónico, se mantenga la proporción entre los lados de las hojas de los resúmenes y los lados de la carpeta?

1.3 Para ampliar las imágenes de la tapa y contratapa de tal forma que coincidan con el formato elegido para la carpeta ¿qué factor de ampliación hay que usar?

1.4 Las entradas para el Festival, tendrán formato A6, por ser un tamaño manejable y el equipo técnico pide que en el margen superior izquierdo de la entrada vaya el isologo con formato A9 y el logo del Municipio en formato A10. ¿Qué dimensiones podría tener la caja de texto para colocar el precio de la entrada, el número que le corresponde, la fecha, etc?

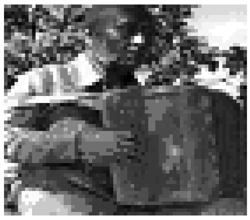
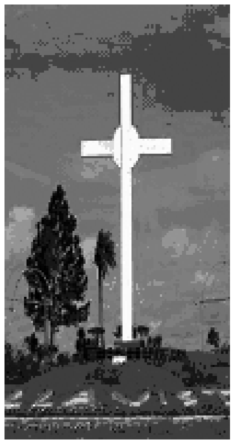
Si lo desean pueden realizar un esquema a escala donde se vean los distintos componentes de la tarjeta de entrada.

Sabías que…

Las normas DIN aplicadas al papel se han impuesto a otras tipologías de hojas. El éxito del sistema radica no en las medidas de las hojas sino en el hecho de que todas estas hojas tienen la misma “forma” y al romper (por el lado largo) cualquiera de estas hojas en dos trozos iguales salen dos hojas de la misma serie. La relación entre el largo y el ancho es la raíz cuadrada de dos (1,41…). Así en el sistema DIN formato A un lado de una hoja es arbitrario... pero todos los demás lados de todas las hojas del sistema quedan determinados por ese factor 1,41...(o si se quiere al revés por el factor mitad 0,70…). También puede hacerse otra observación que lleva a la misma conclusión: si una hoja del sistema tiene el doble de superficie que la hoja siguiente de la serie, las longitudes de las hojas semejantes (de igual forma) estarán relacionadas por la raíz cuadrada de dos.

Fuente: Alsina, Claudi “Viaje al País de los Rectángulos”.Red Olímpica, p. 111

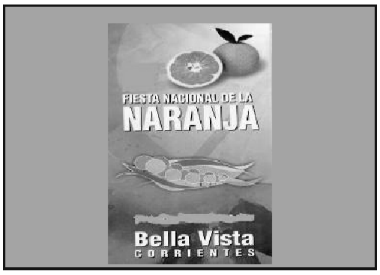
1.5 También se van a confeccionar mini posters en papel ilustración con formato A10 para promocionar la Fiesta. Para hacerlos se dispone de algunas fotos reveladas en papel de 13 cm por 19 cm. ¿Cuál tendría que ser el porcentaje de ampliación para que la imagen cubra todo el poster?

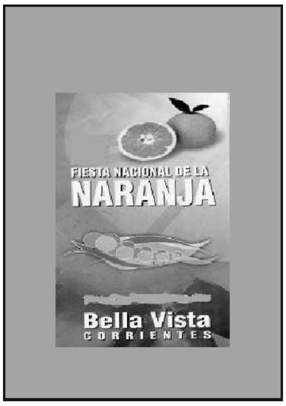
Monumento a la Naranjera. Representa al fruto símbolo de Bella Vista. En Plaza Pedro Ferré. 	Barrancas de Bella Vista desde el parque Cruz de los Milagros 	Monumento a Rubén Miño, celebre músico bellavistense, defensor de nuestro chamamé. Ubicado en la Plaza de los Músicos Desaparecidos, calle Sud América y Av. Ingeniero Humberto Canale. 	Parque Cruz de los Milagros 

Actividad 2: Optimizar medidas

Consideremos ahora, la tarea del equipo de planeamiento que está pensando en la fabricación de vasos plásticos con el isologo de la Fiesta para regalar a las autoridades y a las reinas visitantes.

2.1 Para la confección de los vasos, el fabricante tiene que considerar que todo el contorno exterior del vaso se cubre con un calco adhesivo con el isologo, que se hará en formato A5.





Para recordar….

Long. Circunferencia = $\pi \cdot 2 \cdot r$

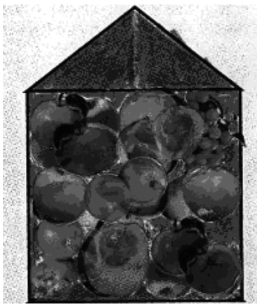
Vol. Cilindro = Área base x altura

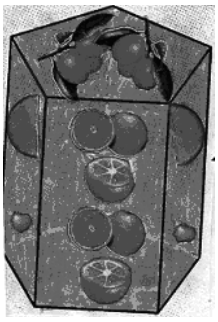
Vol. Cilindro = $\pi \cdot R^2 . H$

Comparen estos dos modelos de calcos y decidan cuál es el que se debe encargar a la imprenta si se quiere que el vaso tenga el mayor volumen posible.

2.2 El dueño de una de las cantinas que estarán en el predio de exposiciones, encarga a la misma empresa vasos plásticos cilíndricos de 200 cm^3 y 250cm^3 de capacidad para cerveza y gaseosas en los que se pegará un calco con el logo de su empresa. ¿Qué dimensiones podrían tener los vasos? ¿De qué dimensiones podrían ser los calcos para que puedan pegarse en cualquiera de los vasos?

2.3 Para confeccionar las cajas en las que se entregarán los vasos, la Municipalidad encomendó al encargado del sector de licitaciones, la organización de un concurso para los alumnos de las escuelas medias. Del mencionado certamen los diseños finalistas fueron los siguientes:





Si ustedes fueran integrantes del jurado, ¿qué diseño elegirían para que el gasto de material a utilizar sea el menor posible, teniendo en cuenta las dimensiones que debe tener la caja para que quepa un vaso? Para tener elementos para decidir, sepárense en tres grupos y, en cada grupo, elijan un diseño, dibujen el patrón o molde correspondiente y realicen los cálculos necesarios para determinar la cantidad de cartón necesaria. Para hacerlo tengan en cuenta las dimensiones del vaso que determinaron en el apartado 2.1.

Luego comparen los resultados obtenidos por cada grupo y decidan cuál sería el diseño ganador.

Para recordar…

Se dice que un polígono esta inscripto en la circunferencia si la distancia del centro a cualquier vértice del polígono es igual al radio.Se dice que un polígono esta circunscrito en la circunferencia si la distancia del centro a cualquier lado del polígono es igual al radio.

Volumen de prisma = Área Base . Altura

Área de Polígonos regulares inscriptos = (Perímetro . Apotema) / 2

Área de Polígonos regulares circunscriptos = (Perímetro . Radio) / 2

Actividad 3: Formas de trabajar en matemática

3.1 En la actividad 1 trabajaron con hojas de distintos tamaños de la serie A. Si las medidas de sus dimensiones son respectivamente a y b; siendo b>a y cortamos por la mitad del lado mayor, obtenemos un rectángulo de dimensiones a y b/2.

Reiterando la operación obtenemos un rectángulo b/2 y a/2. El rectángulo siguiente tendrá de dimensiones b/4 y a/2 y así sucesivamente. Observamos que la relación entre el lado mayor y el menor es siempre la misma, las hojas que obtenemos tienen la misma proporción y es próxima a $\sqrt{2}$.

> **Para recordar:**
>
> Dos polígonos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales y sus ángulos respectivamente congruentes.

a. Organicen una tabla con las dimensiones de las hojas de la serie A, desde el tamaño A3 al A10 y expliciten el factor de ampliación que es necesario utilizar para pasar de un elemento a otro de la serie.

b. ¿Qué factor hay que utilizar para pasar de A4 a A6?¿Y de A10 a A4?

c. Expliciten cómo pueden determinar el factor que es necesario utilizar para pasar de un formato a otro cualquiera de la serie.

d. Hasta aquí han trabajado con rectángulos semejantes ¿En que casos es posible dibujar triángulos semejantes? ¿en cuáles no? Con base a la siguiente información, determinen si los triángulos son semejantes:

- los tres ángulos de cada uno de los dos triángulos miden 45°, 65° y 70° y sus lados son proporcionales.
- dos lados de un triángulo miden 4cm y el tercero 5cm. El ángulo comprendido entre los primeros mide 77°. En el segundo triángulo los lados correspondientes miden 8,8 y 10cm y el ángulo correspondiente se conserva.

e. Analizar las situaciones que se describen a continuación y determinar si se trata o no de figuras semejantes.

- Dos triángulos cualesquiera.
- Dos triángulos ABC, A’B’C’ en los que el ángulo desigual mide 45°.
- Dos triángulos rectángulos ABC y A’B’C’ en que un ángulo agudo de ABC es congruente con el ángulo agudo de A’B’C’ correspondiente.
- Dos cuadrados cualesquiera.

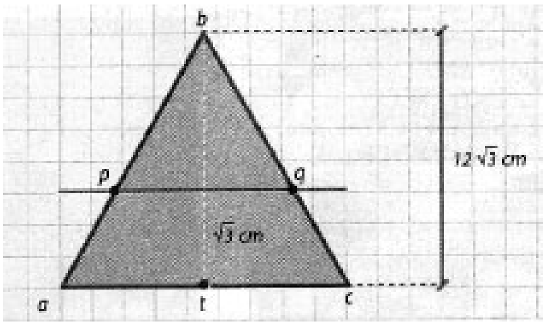
3.2 Consideren ahora que se realizan distintas ampliaciones de un cuadrado utilizando una fotocopiadora. Recuerden que la ampliación al 20% por ejemplo, significa que el largo, el ancho, la diagonal, resultarán de una longitud mayor en un 20%.

a. Analicen cómo varía el área de esos cuadrados y realicen un gráfico que les permita encontrar rápidamente el valor de área para cualquier ampliación que deseen.

b. Comparen el crecimiento del área del cuadrado y el crecimiento de su contorno, en relación con la ampliación del lado. Expresen mediante fórmulas ambos crecimientos y realicen las gráficas cartesianas correspondientes. ¿Cómo se comportan? ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?

3.3 En un triángulo equilátero abc, el segmento bt es la altura correspondiente al lado ac y pq // ac.

a. Con los datos de la figura calculen qué porcentaje del área del triángulo abc representa el área del triángulo pbq.



b. ¿Es cierto que la razón entre los lados de los triángulos es la misma que la razón entre sus áreas?

c. Si el área del triángulo abc es 9, mientras que la de un triángulo a'b'c' semejante con el triángulo abc es 4, ¿cuál es la razón de la homotecia por la cuál se corresponden?

d. Si dos triángulos, abc y a'b'c', son semejantes y la razón de semejanza del primero al segundo es 1/3, ¿cuál será el área del triángulo abc si la del triángulo a'b'c' es 126cm^2?

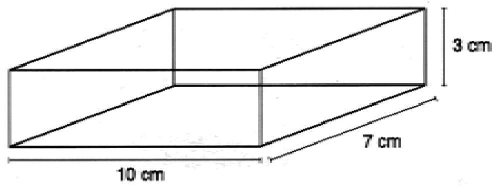
3.4 En la actividad 2 usaron fórmulas para calcular volúmenes cilindros y de distintos prismas, y analizaron su relación con la superficie lateral del objeto. Para avanzar en el análisis de estas variaciones consideren los casos siguientes y elaboren en grupo una síntesis en relación con las conclusiones que obtengan.

a. Si la superficie lateral es la misma, ¿cómo varía el volumen de un cilindro en función de sus dimensiones?

b. ¿Es cierto que para el mismo volumen, cuanto mayor es la cantidad de lados que tenga la base de un prisma regular, menor es la superficie total?¿Por qué?

c. ¿Cómo varía el volumen de un prisma rectangular si: una de sus dimensiones se duplica, una de las dimensiones se duplica y otra se triplica, o las tres dimensiones se duplican?

3.5. Consideren el caso siguiente, en el que se plantea la necesidad de tener en cuenta distintas condiciones para construir una caja. Respondan a las preguntas y luego discutan con sus compañeros las cuestiones que se plantean en el recuadro Para reflexionar.



Juan tiene que construir cajas de 210 cm^3 de volumen. Empieza construyendo cajas de 10 cm de ancho, 7 cm de fondo y 3 cm de alto.

a. Después de construir algunas, piensa que puede construir cajas de 1/2 cm de alto, 30 de fondo y 14 de ancho, ya que también tendrían 210 cm^3 de volumen. ¿Es cierto lo que piensa Juan?

b. Escriban una ecuación que represente la relación entre las dimensiones de la caja de Juan y su volumen y encuentren otras dimensiones posibles de las cajas para el mismo volumen.

c. Juan debe seguir construyendo cajas con el mismo volumen, pero quiere que el área, sin considerar la tapa, sea de 179 cm^2. ¿Puede construir una caja de estas características cuyo ancho sea 1/2cm, el alto mida 14cm y el fondo sea de 30cm?

d. Representen por medio de ecuaciones las condiciones para el área que impone Juan para sus cajas.

e. A Juan ahora se le ocurre que, además, en sus cajas, la suma del ancho, el fondo y el alto sea 21,5 cm. ¿Cómo representarían por medio de ecuaciones todas las condiciones que impone Juan para sus cajas?

f. ¿Puede construir Juan cajas de 2,5cm de alto, 7cm de fondo y 12cm de ancho? ¿Puede construir Juan cajas de 2cm de alto, 6,5cm de fondo y 11cm de ancho?

g. Juan sabe ahora que otra partida de cajas debe satisfacer que sus volúmenes sean de 475 cm^3, que el área total sea de 5562,5 cm^2, y que la suma de su ancho, alto y fondo sea de 24,5 cm. ¿Cómo representarían por medio de un sistema de ecuaciones todas estas condiciones?

Para reflexionar

En el problema de las cajas de Juan pueden observar que, en principio, se planteaba una ecuación que representara la condición sobre el volumen. Luego, cuando Juan pensó en el área total de las cajas, debimos agregar otra ecuación que representara esta nueva condición. Así vimos que cajas que satisfacían la condición sobre el volumen, podían no satisfacer la condición impuesta para el área. Las cajas que quería construir Juan debían satisfacer ambas condiciones a la vez. Cuando Juan piensa en la suma de los valores de las aristas se da cuenta de que el número de posibilidades que tiene para construir sus cajas ha cambiado. ¿De qué manera ha cambiado? ¿Cuántas son las condiciones que debe tener en cuenta simultáneamente?

3. 6 a. Dados dos números positivos s y p busquen un rectángulo de perímetro 2s cm y área p cm^2 para los siguientes valores de s y p.

s= 15 y p =36

s =41 y p= 402

s= 39 y p= 402

b. ¿Qué condiciones deben cumplir los números s y p para que se pueda encontrar un rectángulo de perímetro 2s cm y área p cm^2?

c. ¿Para qué valores de s y p el sistema de ecuaciones siguiente tiene solución única, para qué valores tiene soluciones reales y distintas, y para qué valores no tiene solución real?

$x + y = s$

$x \cdot y = p$

3.7. En distintos puntos de las actividades anteriores formularon explicaciones y dieron razones acerca de procedimientos realizados. ¿Tuvieron dificultades para hacerlo? ¿Cuáles?

3.8. En el Anexo pueden encontrar más problemas para ampliar y profundizar los temas abordados en este capítulo.

Actividad 4: Miradas sobre el mundo de la matemática

En las actividades anteriores del capítulo hemos analizado proporciones entre las dimensiones de distintos objetos. El estudio de las proporciones en el cuerpo humano también ha interesado a numerosos artistas y matemáticos.

Uno de los dibujos más conocidos de Leonardo da Vinci es el hombre de Vitruvio, en el que muestra una visión del hombre como centro del Universo al quedar inscrito en un círculo y un cuadrado.

En él se realiza un estudio anatómico buscando la proporcionalidad del cuerpo humano, el canon clásico o ideal de belleza. Sigue los estudios del arquitecto Vitrubio (Marcus Vitruvius Pollio) arquitecto romano del siglo I a.C.

a. Lean el texto siguiente

Las Proporciones del Hombre de Vitruvio

Vitrubio, el arquitecto, dice en su obra sobre arquitectura que la naturaleza distribuye las medidas del cuerpo humano como sigue: que 4 dedos hacen 1 palma, y 4 palmas hacen 1 pie, 6 palmas hacen 1 codo, 4 codos hacen la altura del hombre. Y 4 codos hacen 1 paso, y que 24 palmas hacen un hombre; y estas medidas son las que él usaba en sus edificios. Si separas la piernas lo suficiente como para que tu altura disminuya 1/14 y estiras y subes los hombros hasta que los dedos corazón estén al nivel del borde superior de tu cabeza, has de saber que el centro geométrico de tus extremidades separadas estará situado en tu ombligo y que el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero.

La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura. Desde el nacimiento del pelo hasta la punta de la barbilla es la décima parte de la altura de un hombre; desde la punta de la barbilla a la parte superior de la cabeza es un octavo de su estatura; desde la parte superior del pecho al extremo de su cabeza será un sexto de un hombre. Desde la parte superior del pecho al nacimiento del pelo será la séptima parte del hombre completo. Desde los pezones a la parte de arriba de la cabeza será la cuarta parte del hombre. La anchura mayor de los hombros contiene en sí misma la cuarta parte de un hombre. Desde el codo a la punta de la mano será la quinta parte del hombre; y desde el codo al ángulo de la axila será la octava parte del hombre. La mano completa será la décima parte del hombre; el comienzo de los genitales marca la mitad del hombre. El pie es la séptima parte del hombre. Desde la planta del pie hasta debajo de la rodilla será la cuarta parte del hombre. Desde debajo de la rodilla al comienzo de los genitales será la cuarta parte del hombre. La distancia desde la parte inferior de la barbilla a la nariz y desde el nacimiento del pelo a las cejas es, en cada caso, la misma, y, como la oreja, una tercera parte del rostro.

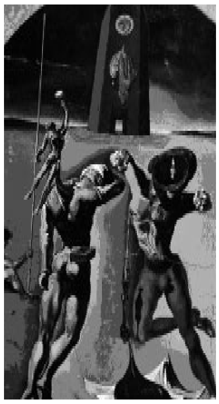
Fuente: http:// w.w.w.co.terra.com/salud/interna

b. Escriban a través de expresiones matemáticas las relaciones que se explicitan en el texto.

c. Lean *Los secretos del hombre del renacimiento* de Theoni Pappas en la Antología

¿Qué propiedad o propiedades permitirían justificar lo expresado en el artículo por Leonardo “La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura”?

Capítulo 2: Construir con distintas proporciones



Todas las culturas tienen distintas manifestaciones artísticas que la historia del arte ha tratado de sistematizar y relacionar entre sí. Cuando la arquitectura, la escultura, la pintura y la música tienen unas series de características comunes, puede hablarse de un estilo e identificar un origen geográfico, o incluso un sentimiento religioso. Si bien este tipo de clasificaciones es totalmente convencional, lo cierto es que sirve para ordenar los conocimientos que cada cultura tiene de sí misma y de los demás. Si se tiene interés por la historia de la humanidad, se está obligado a conocer la cultura y el arte, que son la expresión colectiva e individual de una sociedad y de quienes la constituyen.

Para recordar:

Se dice que dos segmentos, como pueden ser los dos lados de un rectángulo, están en la razón áurea, o divina proporción, si el mayor es igual al producto del menor por el número

(1 + “5) / 2 = 1,618.

Usualmente se usa la letra Φ para representar este número.

Entre los arquitectos de hoy y entre los de hace muchos años siempre se ha considerado que el hombre construye las cosas para servirse y gozar de ellas. Por consiguiente, las dimensiones que conforman las construcciones han de ser hechas guardando entre sí determinadas proporciones entre ellas y las de su propio cuerpo.

Desde los griegos, la obra arquitectónica estaba sujeta a proporciones numéricas concretas, como el caso de la proporción aúrea, que obedecían a sus ideales de belleza y geometría. En uno de los libros de los Elementos, el segundo “Álgebra y Geometría”, Euclides presenta la Sección Áurea: una proporción que cumplen los lados de ciertos rectángulos y su razón es un número irracional llamado: Número de Oro.

Actividad 1: Analizar dimensiones

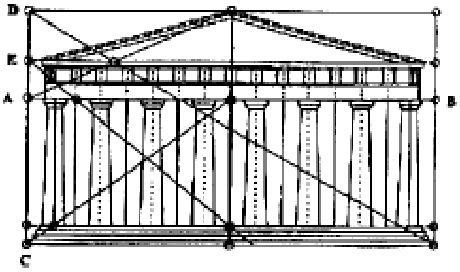
Los diseños arquitectónicos y la belleza en las medidas

Muchos consideran que los rectángulos de sección de oro son más armoniosos y placenteros a la vista y el número áureo aparece, en las proporciones que guardan edificios, esculturas, objetos, partes de nuestro cuerpo...

¿Es posible afirmar que hay una proporción que sea más armoniosa que otra o que sea más “natural” para la especie humana?

Para tener más elementos que permitan responder a esta pregunta analizaremos las proporciones presentes en distintas construcciones.

1.1 El Partenón, (del *griego* Παρθενος *Parthenos*, virgen; uno de los adjetivos que servían de sobrenombre a *Atenea*) es el templo *griego* situado en la *Acrópolis de Atenas* dedicado a *Atenea Parthenos*, diosa protectora de la ciudad de Atenas. Es el monumento más importante de la *civilización griega antigua* y se lo considera como una de las más bellas obras *arquitectónicas* de la humanidad. Es uno de los principales templos *dóricos* que se conservan. Mide 69,5 x 31 *m* en planta y 18 metros de altura. Su ancho y alto están en una proporción particular, que también se repite en todas las líneas de construcción una y otra vez.



Fuente:
www.ionlitio.com/category/arquitectura/

Sabías que:...

-…el arquitrabe[1] del Partenón tiene un inclinación para que al mirarlo desde lejos no parezca curvado hacia abajo.-…también las columnas tienen un ángulo de inclinación hacia el centro para que no semejen estar hacia fuera.

-… la escalinata que lo rodea tiene escalones muy grandes, incómodos de subir caminando, pero que están proporcionados con las dimensiones de todo el edificio. Para subir hay una escalinata central con escalones más pequeños.

En la figura comprueben, de manera aproximada, si

$AB/CD = \Phi$, $AC/AD = \Phi$ y $CD/CA = \Phi$.

1.2 La Catedral de la Inmaculada Concepción se levanta frente a la plaza Moreno, en la manzana comprendida por las calles 14 y 15 y los boulevares 51 y 53 de la ciudad de La Plata en la provincia de Buenos Aires.

Con ladrillo a la vista y por lo tanto inconfundible y bellamente rojiza, se ha convertido en un símbolo característico de la ciudad. En el estilo neogótico es la más grande de América: su superficie es de 7000 m^2, tiene capacidad para 14.000 personas, mide 120 m de largo por 76 m de frente, y la altura tomada hasta la cruz es de 97m. Fue inaugurada al público en 1932, cuando la ciudad cumplía su cincuentenario.

La catedral neogótica platense fue inspirada en las catedrales góticas de Amiens (Francia) y de Colonia (Alemania). Las medidas de la catedral platense son: largo interior 106 metros; ancho interior del crucero, 67 metros, ancho de la nave mayor,

[1] Parte inferior del entablamento clásico que descansa directamente en los capiteles de las columnas y soporta el friso.

13 metros; ancho total de las naves laterales, 13 metros; sala de canónigos, 4,50 por 21 metros; altura de la bóveda de la nave mayor, 37 metros; altura exterior de la linterna, 76 metros, interior 46 metros.

Determinen si en esta catedral algunas medidas están relacionadas o no con el número áureo.

1.3 La ciudad de Córdoba, en España, muestra una rica mezcla de culturas ya que fue un centro urbano importante del imperio romano y un centro comercial y cultural de muchísima importancia entre los siglos VII y XIII al ser conquistada por los árabes. ¿También se encuentra la razón áurea en las construcciones características de esta ciudad?

a. Lean el siguiente texto basado en un artículo del matemático y escultor Luis Ramos, sobre las proporciones en la arquitectura, arte y escultura de Córdoba.

La proporción cordobesa

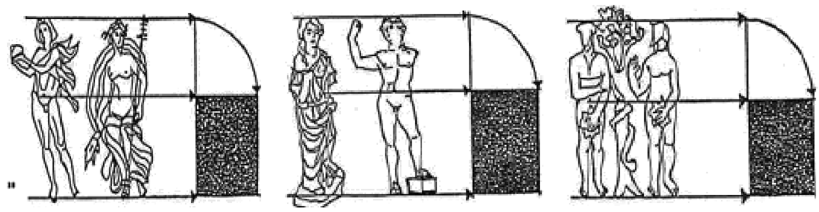
Trescientos años a.C. en el libro IIº de sus "Elementos de Geometría", Euclides de Alejandría trata por primera vez de la "media y extrema razón", "proporción áurea", "proporción armónica" o "regla de oro". Doce siglos después, sus "Elementos" fue traducida por Ishaq Ibin Iluncin, publicada por Alhazen y estudiada en las escuelas de Córdoba. Esta ciudad fue depositaria del tesoro euclideano durante la Edad Media, situación que cambió con una de las primeras acciones de espionaje científico de que se tiene conocimiento.

En 1120, un británico adiestrado en el idioma, costumbres y disfrazado de estudiante hispanoárabe, logró sacar una copia de "Los Elementos" que fue publicada en 1472. Hasta 1535 en que se descubre el texto griego, el mundo no cuenta más que con esta traducción árabe; por lo que los trabajos de Leonardo da Vinci y Luca Pacioli (decisivos para el Renacimiento), se hicieron a partir del texto cordobés.

Era razonable pensar que en Córdoba las construcciones respetaran de la proporción áurea, sin embargo esto no es así.

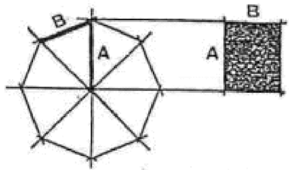
Refiriéndonos, en concreto a la cultura romana, y a ejemplos existentes en el museo arqueológico local, encontramos que los cordobeses romanos autores de relieves, esculturas y mosaicos han preferido proporcionar sus figuras humanas según la proporción 1:3.

Nos encontramos ante una nueva invariante en la arquitectura y el arte cordobés,



la proporción 1:3 o "canon cordobés".

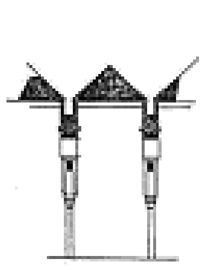
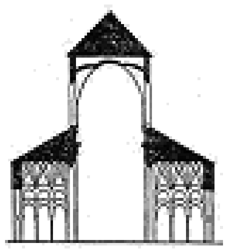
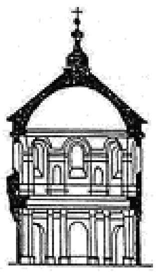
La división (razón o fracción) entre el radio de la circunferencia circunscrita y el lado del octógono regular resultó ser un nº irracional que por redondeo es igual al determinado empíricamente (en la práctica 1,3). De esta manera la proporción nacida de la realidad cordobesa quedó instalada en la mística de los números, concretamente en el Nº 8 (en el octógono regular).



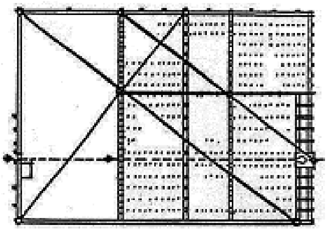
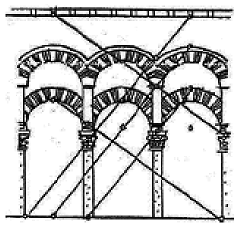
$$\frac{A}{B} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = 1'307$$

El octógono aparece en la Mezquita, en el Mihrab. En varias torres, en muchas fuentes y en otras construcciones de carácter religioso o civil.

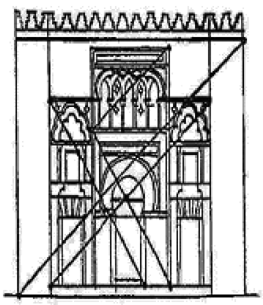
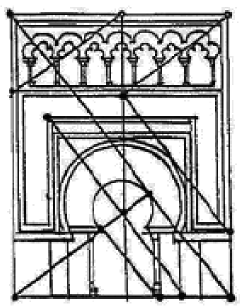
También es notable que la pendiente que llegan a alcanzar los tejados es de 37º. Esta inclinación coincide prácticamente con la de la diagonal de un rectángulo cordobés con el lado mayor como base y se encuentra en las cubiertas de la Mezquita, en el tejado verde de la Catedral, y en Santa Victoria el más alto de la ciudad.

En la Mezquita se plantea la arquitectura prefabricada, modular y crecedera, y este crecimiento sigue una líneas regidas por los rectángulos cordobeses.

La geometría de la fachada de Al-Hakam II y la fachada del Mihrat también se someten en su estructura a la proporción cordobesa.

Otros muchos edificios emplean en su composición la proporción cordobesa. Son muy numerosos los edificios, incluso contemporáneos que están trazados con el rectángulo cordobés como base de composición. No se sabe si los autores de estas obras las proporcionaron consciente o por puro sentimiento. Lo que queda comprobado es que cuando una obra de arte cordobesa resulta bien compuesta, encierra esta determinada proporción. Y siendo esta proporción un hecho empírico frente a la idealización de la proporción áurea, cabe la posibilidad de que su empleo haya surgido o se haya extendido en otros pueblos de cultura y etnia afines a la cordobesa.

Fuente: http://www.islamyal-andalus.org/control/noticia.php - BOLETÍN N° 36 -02/2005

De la lectura del texto se puede concluir que históricamente en la arquitectura no solo se ha trabajado con el número de Oro, sino con otros irracionales.

b. Construyan un octógono regular y estableciendo la razón que se menciona en el texto; expresen numéricamente el valor del número irracional que corresponde a la razón entre el radio de la circunferencia y el lado del octógono.

1.4 La capilla de St. Benedictusberg, en una abadía benedictina de en Vaals, Holanda fue diseñada en el siglo XX por el arquitecto Hans van der Laan siguiendo una razón que no es la del número de oro.

a. Lean el siguiente texto e identifiquen la proporción usada por este arquitecto.

El Número Plástico y La Divina Proporción
por Juan C. Dürsteler

Escala y proporción son conceptos claves en las representaciones visuales. La divina proporción durante siglos y, más recientemente, el número plástico de Van der Laan se han propuesto como preferencias estéticas para la proporción. Sin embargo no está claro si realmente tienen un valor estético o de simplificación del entendimiento ni si están conectadas a nuestra naturaleza o no.

Desde antiguo existe la idea de que determinadas disposiciones en serie de números reflejan mejor o peor ciertas propiedades de la naturaleza. De hecho éste es el concepto subyacente de escala. Una escala es una sucesión de números ordenados que suele servir a modo de comparación para definir proporciones entre el universo real y el que se quiere representar [posiblemente de forma gráfica].(...)

En arquitectura las proporciones son importantes y desde hace mucho tiempo los arquitectos se preguntan qué relaciones entre los tamaños de los distintos elementos arquitectónicos son las más apropiadas, es decir las más placenteras estética o funcionalmente.

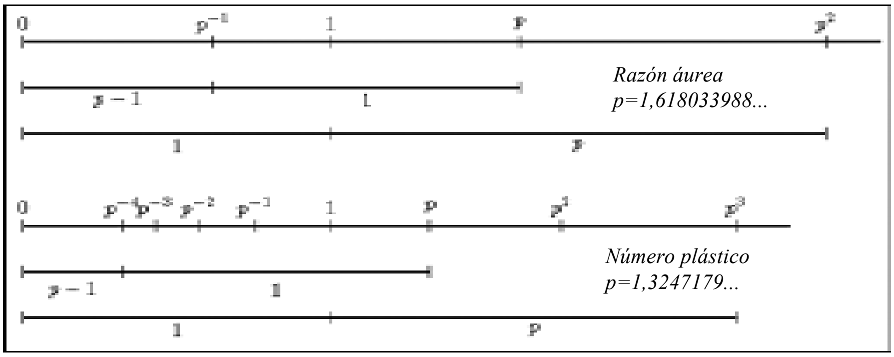
La gracia de la razón áurea es que es una proporción que se encuentra con cierta frecuencia en la naturaleza, especialmente en la geometría, pero también en las proporciones aproximadas del cuerpo humano.

De ello hay muchos ejemplos interesantes en la *web* de Ron Knotts de la Universidad de Surrey o (en este caso bastante más discutibles) en *Goldennumber.net.* Pero también hay muchos errores de concepto alrededor de Fi.

Por ejemplo es un error común pensar que en el caparazón del Nautilus, un cefalópodo marino, Fi juega un papel importante. Esto no es así, su caparazón es una espiral logarítmica no una espiral áurea, como se puede ver en "*Spirals* and the Golden Section" de John Sharp. Muchas atribuciones de proporciones áureas a fenómenos naturales son solo aproximaciones voluntaristas.

Pero volvamos a nuestro interés, el número Fi es un representante de los denominados números mórficos que tienen la interesante propiedad de que existen dos valores k y l para los que se cumple que

$$p + 1 = p^k$$
$$p - 1 = p^l$$



Condición de número mórfico. k=2 y l=1 dan la razón áurea, k=3 y l=4, el número plástico. El gráfico muestra las interesantes propiedades de estos dos número. Si p es la razón áurea, 1+p=p2 y p-1=1/p. Si p es el número plástico se cumple p-1= p-4 y p3=p+1.

Fuente: artículo Morphic numbers

En seguida nos preguntamos ¿existe algún número mórfico aparte de la sección áurea? Arts Fokkink y Kruijtzer de la Universidad de Delft demuestran en su artículo "*Morphic numbers*" que solo existen dos números mórficos: la sección áurea y el número plástico (1,3247179...), descubierto en 1928 por el arquitecto y monje benedictino Hans van der Laan, (1904-1991) que lo utilizó como base para sus construcciones arquitectónicas.

Respondiendo a nuestra pregunta ¿podrían ser la sección áurea o el número plástico la proporción ideal para realizar representaciones gráficas? No hay ningún indicio irrefutable que así lo indique. Sir William Playfair reputado como uno de los primeros en usar gráficos de barras en el siglo 18, usó predominantemente valores próximos a la sección áurea para proporcionar sus gráficos, aunque también hizo uso de otras proporciones.

Edward Tufte apunta que las preferencias visuales por las proporciones en las formas rectangulares se han venido estudiando desde 1860 por parte de los sicólogos que han encontrado una suave preferencia por las proporciones alrededor de la sección áurea pero con una variación que va desde 1,2 hasta 2,2.

La existencia de una proporción "natural" que conectase con las raíces preceptivas de la especie humana no es un despropósito. De existir proporcionaría una base sobre la que construir escalas armoniosas y gráficos probablemente menos engorrosos de manejar. Una idea relacionada es la de que, dada la naturaleza fractal del mundo, la visualización de la información en forma fractal quizá sea más próxima a la manera natural de captar el mundo y por tanto pueda ser ventajosa.

Aunque la idea es muy atractiva, lamentablemente no se encuentran evidencias irrefutables de ello. La forma en que procesamos la información perceptiva los seres humanos es en gran parte un misterio todavía. Los estructuralistas consideran por ejemplo que todas las representaciones son arbitrario-convencionales, negando la posibilidad de que haya representaciones sensoriales, innatas, comprensibles sin necesidad de aprendizaje. Otra gente piensa de muy distinta manera...

Frente a esta situación se impone el pragmatismo. Siguiendo a Tufte, si la naturaleza de la representación sugiere su propia forma, síguela. Si no, usa preferentemente una proporción más ancha que alta con una proporción que te parezca útil o satisfactoria.

En mi opinión personal, el uso consistente de una escala coherente, sea la sección áurea, la escala de Van der Laan o cualquier otra proporción es una buena elección para construir representaciones armoniosas. Pero la clave aquí es la consistencia, no la proporción en si misma.

Fuente: http://www.infovis.net/printMag

b. ¿El número de plástico mencionado en el texto es el mismo que llamaron el cánon cordobés? ¿Por qué?

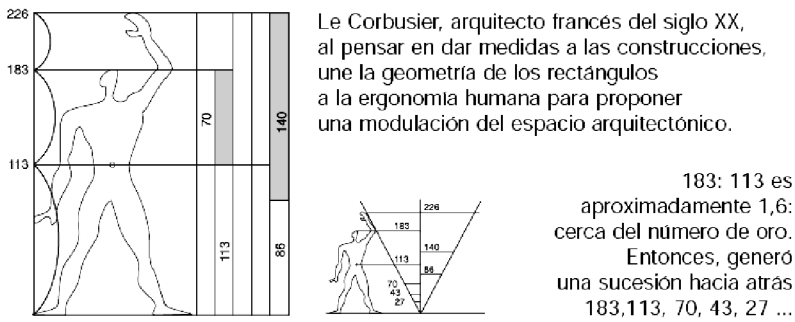
c. Si la variación alrededor de la sección áurea va desde 1,2 hasta 2,2 ¿cuáles son los posibles valores, considerando solo hasta los décimos que puede tomar?

d. Comprueben las condiciones de número mórfico para la sección áurea.

Actividad 2: Organizar relaciones

Uno de los grandes arquitectos del siglo xx fue el francés Charles Édouard Le Corbusier (1887-1965). Uno de sus logros más influyentes en la arquitectura moderna fue la consideración del "modulor", fórmula basada en la estatura humana y aplicable, hoy día, a la construcción de viviendas, envases y otros objetos de uso diario. En esta propuesta en la que el genial arquitecto supo unir la geometría de los rectángulos con la ergonomía humana para proponer una modulación razonable del espacio arquitectónico.

En la siguiente figura se presentan las medidas principales de la propuesta de Le Corbusier:



Fuente imagen: El número de oro y otros irracionales Lamina3/2 Equidad

Nótese que fijada la altura 183 cm o 6 pies ingleses, la altura de la cintura corresponde, estadísticamente, a 113, lo cual lleva a la razón 183:133=1,6...cercana al número de oro:

Le Corbusier consideró entonces la sucesión de Fibonacci hacia atrás:

... 27, 43, 70, 113, 183 ...

y el doble de la misma:

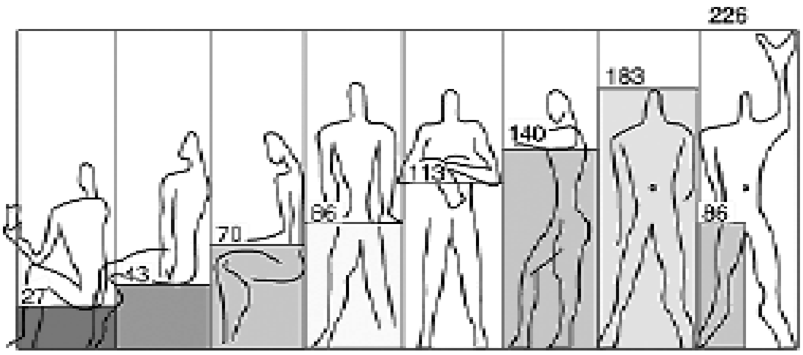
... 54, 86, 140, 226, 366 ...

así Le Corbusier logra unir sucesiones de Fibonacci, con proporciones áureas en relaciones antropométricas humanas. Nada más, ... ni nada menos.

Leonardo de Fibonacci (1179-1250) descubrió un conjunto ordenado de números, que hoy se conoce como sucesión de Fibonacci y que, además de estar relacionado con distintos fenómenos de la naturaleza, tiene una gran variedad de aplicaciones en física y matemáticas.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765...

¿qué número sigue ...?



Fuente imagen: El número de oro y otros irracionales Lamina3/2 Equidad

Le Corbusier realizó trabajos empíricos y experimentales que le pudieran conducir con rigor al Modulor. Para contemplar el dimensionado humano debía relanzarse la antigua base metrológica basada en las longitudes antropomórficas (codos, brazos, palmas, pies...) Para facilitar la producción en serie debía crearse un módulo generativo, enlazable, subdivisible. Para lograr la producción internacional debía llegarse a un dimensionado modular que hiciera compatible el sistema métrico decimal europeo con el anglosajón.

Fuente: Claudia Alsina "Viaje al País de LOS RECTANGULOS" Red Olímpica.

a. Establezcan la razón entre varios pares de números contiguos en la sucesión de Fibonacci y comparen en cada caso dicha razón con el número de oro.

b. Establezcan la razón entre varios pares de números contiguos en la modulación de Le Corbusier y comparen en cada caso dicha razón con el número de oro.

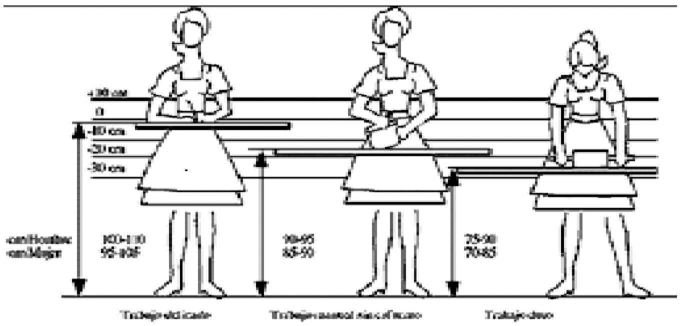
2.2 a. Lean el siguiente texto.

La Ergonomía es la ciencia que estudia la comodidad, esto es, la relación entre las palancas naturales del cuerpo (muñeca, codo, hombro, cadera...) y las medidas corporales para adaptar a la dimensión humana herramientas, muebles y viviendas. Alguna vez habréis lavado platos en una cocina y habréis acabado con dolor de espalda. Esto es debido a que la altura de la encimera no está ergonómicamente calculada para vuestra estatura. (También barrer con una escoba con un palo demasiado corto es una estupenda manera de tener un buen dolor de espalda). Esto ocurre por que antiguamente la gente era más baja y las encimeras estaban calculadas a una altura de 80cm, adecuadas a esa estatura y las escobas también. En la actualidad, el estándar es una altura de 90cm y en casas de gente de bastante altura ya se están poniendo a 1 metro de altura. Si piensas que unos pocos minutos han bastado para provocarte dolor de espalda, imagina las consecuencias de estar años trabajando en lugares y con elementos no calculados ergonómicamente. Resulta igualmente incómodo utilizar un taladro o un martillo a una altura superior a la del hombro. Forzamos cuello y hombro, abdominales y piernas cuando simplemente subiendo a una silla el mísmo trabajo resulta cómodo y fácil. Vamos a ver algunas normas ergonómicas básicas:

Elemento	Medida correcta	Observaciones
Mesa comedor:	72 cm	
Mesa cocina:	70 cm	
Silla comedor:	47 cm	
Silla cocina /banco:	45 cm	Más baja porque la mesa también lo es.
Espacio para sentarse en la mesa por persona:	60 cm	Si la distancia es menor, se estorban mutuamente con los codos.
Altura de cama:	31 de canapé + 15-16 de colchón: 46-7 cm	Es decir, la altura de una silla. Una cama más baja impide que una persona mayor pueda levantarse sin ayuda.
Escalones:	Escalones: 17cm (huella) 28-30 cm (Contrahuella)	Intenta subir los escalones que suben a Cort sin tropezar...
Pasillos / escaleras:	Pasillos / escaleras: Mínimo 90 cm	
Teclado del Ordenador	A la altura de los codos	
Pantalla del Ordenador	A la altura de la cara	Si está más baja, se acaba con dolor de cuello.
Yunque:	De pie, brazo estirado pegado al cuerpo y puño cerrado: los nudillos tienen que tocar el yunque.	Si está más bajo puedes lastimarte el codo.

b. ¿Hay alguna relación entre las medidas establecidas en el cuadro anterior y las medidas de Le Corbusier?

c. Analicen el esquema siguiente y discutan qué criterios consideran que se tuvieron en cuenta para hacerlo. ¿Piensan que vale para cualquier población?¿en qué estudios podría basarse? ¿Encuentran alguna coincidencia con el estudio de Le Corbusier?



Actividad 3 Formas de trabajar en matemática

3.1 En la actividad 1 han trabajado con el número de oro.

a. Realicen ahora su construcción grafica siguiendo las instrucciones que figuran en el tratado de Euclides:

· Dibujen un segmento ab de longitud 1 y, perpendicularmente a él, otro segmento unidad, ac.

· Marquen el punto medio, o, del segmento ac y tracen la circunferencia de centro o y radio oa.

· Unan b con o y prolonguen hasta cortar la circunferencia en el punto d, obteniendo el segmento bd. La Medida de este segmento es el número de Oro.

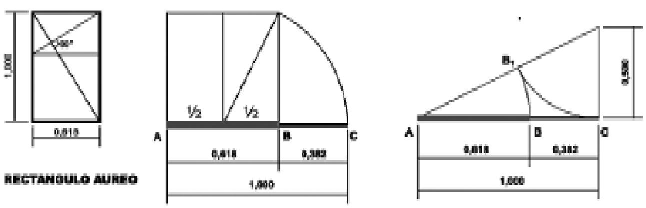
b. Justifiquen por qué a partir de esta construcción se obtiene Φ.

3.2 En la actividad 2 trabajaron con las medidas establecidas por Le Corbusier y la aproximación de los cocientes de la sucesión de Fibonacci al número de oro, es decir los valores del misma oscilan alrededor de Φ. Esta proporción se puede encontrar en muchas figuras geométricas, como en el rectángulo y triángulo siguientes.

a. Analicen cada una de las construcciones y describan cuál sería un posible procedimiento para construir cada uno de ellos.

3.3 Los griegos que seguían las teorías de Pitágoras observaron que el número de oro se encontraba al relacionar la diagonal y el lado de un pentágono regular.

a. Construyan una circunferencia de radio 3cm, con un pentágono regular inscripto.



b. Determinen la razón entre cualquiera de sus diagonales y uno de sus lados. ¿Al cambiar la longitud del radio de la circunferencia cambia el valor de dicha razón?

3.4. En una clase de matemáticas el profesor pidió a los alumnos que dentro de un cuadrado de área 4 cm^2 dibujaran otro cuadrado de manera tal que los vértices del cuadrado más pequeño coincidieran con los puntos medios de los lados del cuadrado que lo contenía. Luego preguntó cuál era la medida del lado del cuadrado más pequeño. Dos alumnas, Belén y Valentina no tenían calculadora y, después de pensar un rato, llegaron a la conclusión de que la medida del lado del cuadrado menor era un número entre 1,41 y 1,42. Facundo obtuvo en su calculadora 1,414213 y Rocío 1,414213562.

a. ¿Cómo les parece que razonaron Belén y Valentina para obtener esa aproximación?

b. Al día siguiente, los chicos seguían discutiendo cuánto medía el lado exactamente. Aunque habían utilizado una calculadora que daba más cifras decimales que las que habían obtenido Facundo y Rocío, no encontraban en ellas un período. Luego de un rato, Belén dijo: "No vale la pena que sigamos discutiendo. Ningún número racional al cuadrado dará 2 justo. Fíjense por ejemplo en el resultado de Facundo: basta con mirar las cifras decimales, no podrá jamás dar ceros al hacer la multiplicación. Todas las calculadoras están aproximando el resultado".
¿Pueden explicar lo que dijo Belén?

3.5. Que un número sea irracional significa que no puede expresarse como una razón de números enteros. El conjunto de los números enteros contiene al de los naturales y los números enteros pueden pensarse como racionales de denominador 1. ¿Qué relación encuentran entre el conjunto de los números irracionales y los otros conjuntos numéricos? ¿Por qué se afirma que con los irracionales se completa la recta numérica?

3.6. El número $\sqrt{2}$ es irracional. Si lo calculan con la calculadora, obtendrán un valor aproximado, ya que su expresión decimal tiene infinitos decimales, y la calculadora proporciona solo 8 ó 10. Veamos ahora una forma de representar con precisión algunos irracionales al menos la forma ideal, ya que en la práctica factores como el grosor del lápiz y errores inevitables de medición causan un resultado aproximado.

a. Dibujen un cuadrado sobre la recta numérica, haciendo coincidir un lado con el segmento con extremos en 0 y 1. Tracen la diagonal que pasa por el 0.

Al hacer esta construcción, obtuvieron un triángulo con un lado sobre la recta numérica; ¿qué clase de triángulo es teniendo en cuenta sus ángulos? ¿Cuánto mide la diagonal que marcaron? ¿por qué?

b. Tomen con el compás la medida de la diagonal y transporten sobre la recta numérica esta medida a partir del 0. ¿Qué número irracional están representando?

c. Construyan sobre la recta un rectángulo de base igual al segmento que marcaron y altura de longitud 1 y vuelvan a trazar la diagonal que pasa por el 0 ¿Qué número pueden representar con esta construcción?

d. Si el rectángulo que construyeron en el punto anterior tuviera altura de longitud 3, ¿cuál es el número que podrían representar?

e. ¿Cómo representarían $\sqrt{7}$?

3.7. En distintos puntos de las actividades anteriores formularon explicaciones y dieron razones acerca de procedimientos realizados. ¿Tuvieron dificultades para hacerlo? ¿Cuáles?

3.8. **a**. En el anexo pueden encontrar más problemas para ampliar y profundizar los temas abordados en este capítulo.

b. También pueden ingresar a la página *http://mate.dm.uba.ar* donde encontrarán la versión digital del libro *Matemática…¿Estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades*, de Adrián Paenza. Realizar las actividades a, b, c y d que se plantean al final de “Distintos tipos de Infinito” (Pág. 68-86) y la situación planteada en “El número **e**” (Pág. 62-68) les permitirá profundizar este tema.

c. Para conocer otras situaciones en las cuales aparece el número de oro, pueden visitar algunas de las siguientes páginas web.

http//rt000z8y.eresmas.net/Elnumero

http//es.wikipedia.org/wiki/Número_áureo

http//www.comenius.usach.cl/webmat2/proyectos/Numerodeoro.htm

http//gaussianos.blogsome.com/2006/10/03/la-proporcion-divina-el-numero-phi/

http//www.omerique.net/calcumat/numerooro.htm

http//gaussianos.com/la-proporcion-divina-el-numero-phi/

Actividad 4 Miradas sobre el mundo de la matemática

El uso de la proporción áurea produce una estilización de las figuras que busca la “belleza divina”. En las siguientes imágenes podemos observar dicha proporción áurea.

Cineva | Nacimiento de Venus | Raquel Welch

fuente: http://descartes.cnice.mecd.es/index.html

4.1. Lean en la antología “Matemática en el cuerpo humano “ de Theoni Pappas y analicen la descripción que realiza del nacimiento de Venus. Expresen matemáticamente las relaciones que se explicitan en el mismo y discutan cuáles son las relaciones que se pueden extraer de la lectura en relación a la matemática y el cuerpo humano.

4.2. Para ampliar el tema de la sucesión de Fibonacci pueden leer “El jardín matemáticamente anotado”, también de Theoni Pappas. ¿Cuáles son los objetos que aparecen en la naturaleza, que se encuentran relacionados con está sucesión? ¿A tu entender, la sucesión es una creación del hombre o un descubrimiento?

Capítulo 3 Dibujar guardando proporciones

Muchas veces se necesitan imágenes u objetos de grandes dimensiones, como por ejemplo cuando se diseña una escenografía para una obra de teatro o una carroza para un desfile en época de carnaval. Hoy se cuenta con computadoras que permiten trabajar en un modelo pequeño y luego ampliarlo tanto como se desee para obtener una “gigantografía”, como las que se usan en los carteles publicitarios o las marquesinas de los negocios. Las imágenes son impresas por sistema digital, sobre todo tipo de papeles, lonas plásticas o telas. Sin embargo cuando no se cuenta con esta tecnología es posible hacer dibujos muy grandes manteniendo la forma de un diseño conociendo algunas reglas para hacerlo. De hecho, antes de la existencia de las computadoras se hacían diseños y construcciones gigantes.

Las ampliaciones de polígonos se resuelven trabajando con homotecias, pero el trabajo con curvas tiene otros desafíos.

Actividad 1 Generar espirales

Las espirales son objetos matemáticos que parecen expresar movimiento. Abarcan una familia de curvas que va desde las espirales bidimensionales hasta las espirales tridimensionales como la helicoide y la concoide. “Se llama espiral a la curva plana descripta por un punto que se desplaza alrededor de otro punto y alejándose de él en cada vuelta.” Dependiendo de cómo este punto se aleje y desplace del centro se obtienen distintos tipos de espirales.

Enraizado en la cultura de la provincia, el carnaval de Corrientes es una tradición que quiere ser compartida cada verano con el resto del país. La magia de los carnavales se empieza a sentir cuando las manos laboriosas comienzan a bordar los trajes, y esa sensación crece en las noches de verano, mientras las calles se colman de gente ansiosa por compartir el calor de los corsos. La ciudad de Paso de los Libres mezcla magia y fantasía, mientras que Monte Caseros vive el lujoso Carnaval del Arte, con la curiosa fusión de ritmos de batucada y candombe. Esta buena costumbre se extiende a Santo Tomé, Paso de la Patria, La Cruz, Curuzú Cuatiá y Mercedes. Avanza hasta Esquina, Goya, Alvear, Bella Vista, Empedrado y Corrientes Capital. Tradición, ritmo y colores recorren la provincia, mostrando noches de brillo a todo el territorio nacional En los meses de enero y febrero, el festejo del Carnaval de Bella Vista, Corrientes, se convierte en una atracción turística irresistible. El vestuario de los comparseros, colmado de lentejuelas, piedras, canutillos, plumas y strass, se complementa con carrozas temáticas, música y baile que hacen vibrar a todo el público presente.

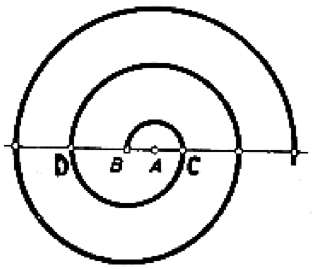
Los diseñadores de los trajes de comparsa, tienen en cuenta cierta regularidad en los mismos; como por ejemplo las simetrías en los espaldares, como se muestra en el diseño siguiente, a su derecha la foto de la bastonera que utilizó dicho diseño en el año 2006:

Tema: "Historia del Cine "Representa: Películas de Epoca"

Bastonera - Constanza Rivolta-

¿Qué figuras geométricas se utilizan en estos diseños?¿Cómo se realizan?

1.1 Un diseñador utilizó las espirales llamadas "espiral de dos centros" en el espaldar de uno de los trajes.



Espiral utilizada en el espaldar

a. A partir del dibujo elaboren un instructivo que permita construir una espiral de dos centros partiendo de un segmento de longitud 1cm.

Comparen su instructivo con el realizado por otros compañeros y decidan si hay alguno que resulte más claro que otro o si es necesario elaborar uno nuevo para asegurar que la figura que se obtiene es la deseada.

b. ¿Cuál tendrá que ser la distancia inicial AB para que en 5 pasos se obtuviera una espiral de 1 metro de ancho? ¿Y si tuviera que tener 5 metros?

c. ¿Cómo varía la distancia FG en función de la variación de la distancia inicial AB?

d. Si el diseño del siguiente espaldar se realiza con caños de cobre, sabiendo que para su realización se le indicó al herrero que parta de un segmento cuya longitud sea de 25cm ¿cuántos metros de caño se necesita para cada espiral?¿y en total para este diseño?

1.2. Para el bordado del vestido de la Reina de una de las comparsas el diseñador creó otra espiral a partir del siguiente procedimiento:

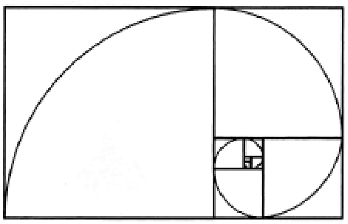
"Se construye un triángulo rectángulo isósceles de lado 1, a partir de la medida de la hipotenusa construir otro triángulo rectángulo cuyo unos de sus catetos sea la hipotenusa del triángulo anterior y cuya altura siempre sea 1, se continúa con este procedimiento hasta que quede formada una espiral"

a. Siguiendo este procedimiento dibuja la espiral que se forma partiendo de un triángulo isósceles rectángulo de 1cm de lado, de tal forma que quede como la que se observa en el vestido. ¿Cuántas veces es necesario seguir dicho procedimiento?

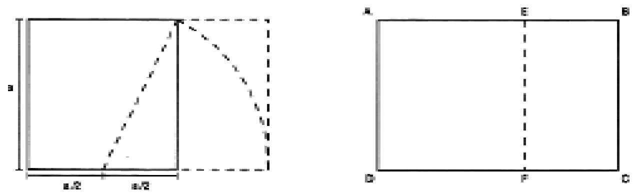
b.¿Cuál tendrá que ser la distancia inicial para que en 6 pasos se obtuviera una espiral de 60 cm de ancho? ¿Y si tuviera que tener 6 metros?

c. ¿Cómo varía el ancho de la espiral en función de la variación de la distancia inicial, para un número n de pasos?

1. 3 También es posible dibujar espirales apoyándonos en una serie de rectángulos áureos.



"Para hacerla comenzamos por dibujar un cuadrado cualquiera, unimos el punto medio de la base con un vértice no alineado con él, y abatimos este segmento sobre la base, como se muestra en la figura"



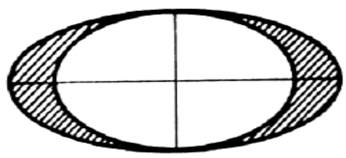
El rectángulo ABCD es un rectángulo áureo. Lo más curioso de este rectángulo es que EBCF también es áureo y, si lo dividimos de tal manera que en su interior queden determinados un cuadrado y un rectángulo, el nuevo rectángulo interior también es áureo. Podemos seguir así indefinidamente, obteniendo siempre rectángulos áureos.

Trazando las diagonales de los cuadrados y uniendo sus extremos con arcos de circunferencia, se obtiene la espiral áurea.

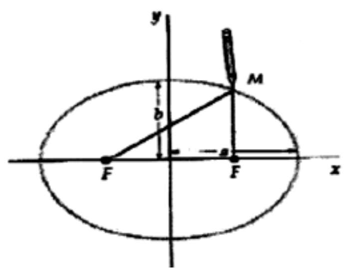
Si como en el caso de la actividad 1.1 se necesitara calcular la cantidad de caño necesaria para hacer una espiral de grandes dimensiones de esta clase ¿Qué fórmula matemática permite calcular la longitud de la espiral, cualquiera sea el tamaño del cuadrado que tome como medida? Discute con tus compañeros la validez de la misma.

Actividad 2 Generar otras curvas

2.1. El diseñador de otra comparsa quiere diseñar la siguiente figura para la comisión de frente, para ello utiliza dos elipses.



"Una forma práctica de dibujarlas es fijar dos puntos con clavos o alfileres, atar los extremos de un hilo fuerte o una cuerda a los clavos y mover un lápiz como indica la figura"



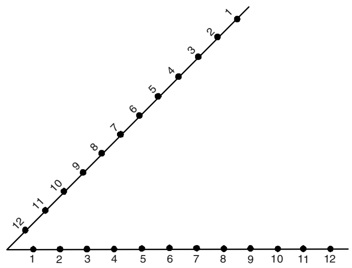
a. Dibujen varias elipses con este método y exploren cómo deben variar la distancia entre los clavos y la longitud del hilo para obtener un diseño como el de la figura.

b. Si se desea ampliar el diseño de modo que el alto y el ancho de la figura midan el doble, ¿hay que variar la distancia entre los clavos, la longitud del hilo o ambos? ¿cuánto deben modificarse?

2.2 También hay formas prácticas de dibujar curvas usando una regla.

a. Exploren los siguientes procedimientos ¿Qué figura se puede obtener con cada uno de ellos?

"Dibujen un ángulo de 45º y marquen puntos a 1 cm de distancia en cada uno de los lados. Numeren los puntos como se muestra en la figura y unan los pares de puntos con el mismo número".



"Sobre una hoja de papel dibujen una recta y un punto F exterior a ella. Marquen unos 20 puntos sobre la recta y doblen el papel de modo que el punto F se superponga con cada uno de ellos. Marquen los dobleces que se obtienen."

b. Analicen los procedimientos del item anterior y discutan si cambia la forma de la curva cuando se modifican las dimensiones del dibujo que se toma como punto de partida.

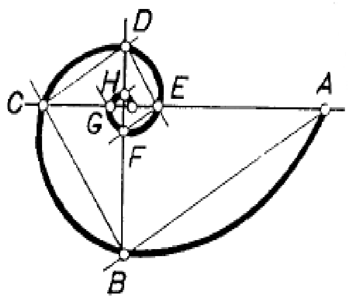
c. Si se desea ampliar el dibujo de modo que la curva sea más abierta ¿qué hay que variar?

Actividad 3 Formas de trabajar en matemática

3. 1 En la actividad 1 realizaron una espiral de 2 centros combinando semicircunferencias pero también es posible construir espirales basándose en segmentos relacionados convenientemente.

Las espirales arquimedianas tienen la separación entre espiras o vueltas constante.

Existen otras espirales en las cuales esta separación no es constante. Una de las espirales más importantes de este tipo es la espiral equiangular o logarítmica.

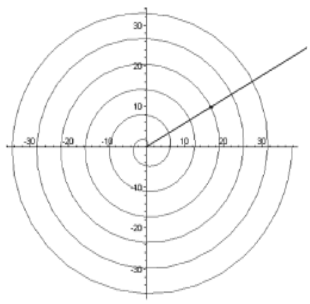


Se puede construir mediante el siguiente procedimiento: partiendo de unos ejes coordenados, trazamos un segmento que corte al semieje positivo de abscisas en A y al negativo de ordenadas en B. Por B trazamos la perpendicular a este segmento que corta al semieje negativo de abscisas en C. Por C trazamos la perpendicular al segmento BC que corta al semieje positivo de ordenadas en D, y continuando con este proceso obtenemos los puntos E, F, G, H. Uniendo, mediante arcos o segmentos curvilíneos, los puntos A, B, C, D, E,...obtenemos la espiral logarítmica o equiangular

a. Construyan mediante este procedimiento una espiral equiangular, de manera que el punto A tenga de coordenadas (15, 0) y el punto B (0, -10).

b. ¿Qué cambiaría en la descripción del procedimiento si en lugar se girar la espiral en sentido horario, girara en sentido antihorario?¿Existe más de una modificación posible? Expliciten las que encuentren.

3.2. La Espiral de Arquímedes queda definida por un punto que gira alrededor de un centro alejándose de él una distancia proporcional al ángulo girado. Observemos que en una Espiral de Arquímedes las espiras se separan uniformemente a medida que se desarrolla el giro. Se llama también Espiral Uniforme.



a. Comprueben que si α es el ángulo girado, a es una constante y r es la distancia al origen, la ecuación $r = a\,\alpha$ permite caracterizar la curva.

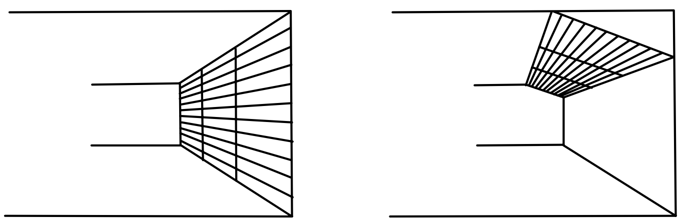
b. ¿Cómo varía el dibujo cuando varía a?

3.3. En la actividad 2 dibujaron curvas que, cuando se usa un sistema de coordenadas, pueden describirse matemáticamente con distintas ecuaciones.

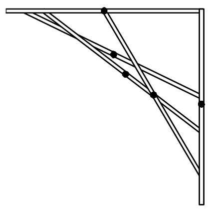
a. Para vincular el tipo de trabajo que hicieron con las ecuaciones resuelvan primero el siguiente problema.

Un portón levadizo de forma rectangular tiene una movilidad que le permite pasar de una posición vertical a una posición horizontal, como se indica en el dibujo.

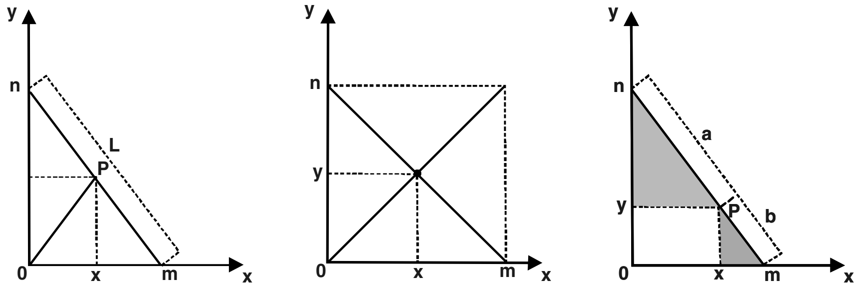
- Los puntos medios de los lados laterales se deslizan por dos correderas de sustentación. ¿Qué forma geométrica tienen las correderas?



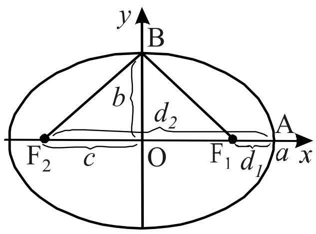
- Piensen ahora que el problema puede pensarse con el siguiente modelo: se trata de determinar la propiedad común a las coordenadas de (x, y) del punto medio P, en todas las posibles posiciones. Utilizar el teorema de Pitágoras les permitirá encontrar una expresión simbólica que expresa la relación entre estos puntos.



- Posteriormente analicen qué curva describen las distintas posiciones de P, si éste no se encuentra ubicado en el punto medio:



b. Consideren la elipse con focos en los puntos F'(-c, 0) y F(c, 0),



Tomemos un punto cualquiera P de la elipse cuyas coordenadas son (*x*, *y*). En el caso de la elipse la suma de las distancias entre PF y PF' es igual al doble del radio sobre el eje *x*. Entonces: PF + PF' = 2a.

Aplicando Pitágoras tenemos que: $\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$

Elevamos al cuadrado ambos miembros para sacar las raíces, desarrollamos los cuadrados y queda finalmente: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

- Analicen cómo varía el dibujo si

  a > b

  a < b

  a = b

- ¿Cómo resulta la ecuación si la elipse está centrada en un punto cualquiera (p, q)?

3.4 Si tienen acceso a un programa que grafique funciones, o a una computadora, pueden explorar cómo se modifica el gráfico de una curva cuando las variables de las ecuaciones toman distintos valores.

En las siguientes direcciones de internet pueden encontrar propuestas de actividades para seguir trabajando y vínculos con sitios que permiten bajar programas en forma gratuita.

http://descartes.cnice.mecd.es/4a_eso/Propiedades_de_las_conicas_representacion/elipse.htm

http://descartes.cnice.mecd.es/4a_eso/Funcion_cuadratica_parabola/index.htm

http://almez.cnice.mecd.es/~aberho/conicas/elipses_2.htm

http://www.epsilones.com/paginas/i-curvas.html#curvas-elipse

http://www.educ.ar/educar/docentes/homes/final_bus.jsp?url=M_POLI/M_PO_07P.HTML&area=39&nivel=5&id=110234&tipo=92269&contenido=240

Actividad 4 Miradas sobre el mundo de la matemática

4.1 Para ampliar sobre diseños y bordados lean “La magia de la Matemática de Theoni Pappas” en la Antología y creen una espiral matemática que no se encuentre en el mismo.

4.2 El trabajo realizado sobre figuras geométricas en este módulo tiene su origen en propiedades que, aunque muchas ya eran usadas por los egipcios y los babilonios, fueron ordenadas y sistematizadas por Euclides (330 - 275 a.C.) en la antigua Grecia. Es más, la mayoría de los conocimientos geométricos que estudiaste en la escuela pueden encontrarse en su obra los Elementos. Esta obra, formada por 13 libros, contienen tanto los principios de la teoría como los teoremas que se obtienen razonando deductivamente a partir de esos principios y durante mucho tiempo se pensó que contenía toda la matemática conocida.

Aunque ciertas ideas de Euclides ya eran cuestionadas en su época, en el siglo XVIII algunos matemáticos se interesaron por estudiar en profundidad las relaciones entre los principios que organizan la teoría de los Elementos y a partir de ese estudio elaboraron nuevas teorías geométricas, con otros principios. Estas teorías permitieron a otros científicos disponer de otros modos de entender el espacio físico.

Para ampliar este tema, y discutir luego sus impresiones con los compañeros, pueden leer *Geometría no euclidea*, de John Allen Paulos en la Antología. En ese texto el autor describe brevemente el surgimiento de de nuevas geometrías y da algunas pistas para imaginar la existencia de otras rectas, de otros planos y de otros teoremas.

4.3 La posibilidad de relacionar curvas con ecuaciones, como las que analizaron en la actividad 3, recién fue posible a partir del siglo XVII con la invención de la geometría analítica por René Descartes que permite reformular los problemas geométricos en términos algebraicos. Sin embargo, las coordenadas cartesianas no son el único sistema disponible. Por ejemplo, en la actividad 3.2 la ecuación de la espiral de Arquímedes localiza un punto mediante su distancia al origen de coordenadas y su orientación respecto de una semirrecta elegida como ángulo cero, utilizando coordenadas polares.

Consultando la página:

http://www.epsilones.com/paginas/t-historias1.html#historias-sistemascoordenadas

podrán acceder a más información sobre las características y la historia de los distintos sistemas de coordenadas.

Actividad 5 Disponibilidad de herramientas de trabajo matemático.

En el transcurso de las clases, habrán podido identificar algunas dificultades y fortalezas en relación con el uso de las matemáticas conocidas. En tal sentido, reflexionando acerca de su desempeño en relación con las siguientes cuestiones.

-¿Interpretaron la información contenidas en los textos?

-¿Comprendieron el significado de las fórmulas y expresiones coloquiales?

- Al expresar relaciones en lenguaje matemático ¿pudieron hacerlo en forma correcta desde el primer intento?

-¿Pudieron operar numéricamente y obtener resultados razonables en función de los datos?¿Controlaron si esos resultados eran una respuesta pertinente a la pregunta planteada?

-¿Pudieron elaborar argumentos matemáticos adecuados para justificar sus procedimientos ¿reconocieron errores en las argumentaciones de otros?¿pudieron contra-argumentar?

Articular los conocimientos de distintos campos para comprender más profundamente una temática es un tipo de práctica esperable de quien egresa de la escuela media. Conocer las propias fortalezas y dificultades en un campo de conocimiento permite tomar decisiones acerca de cómo encaminar los estudios que permitan completar aquellos conocimientos de los que no se disponga y se consideren necesarios.

Anexo

1. Para las invitaciones a la Fiesta de la Naranja la imprenta utilizando la hoja A4 grabo en el membrete (de 19 mm x 10 mm) el escudo de Bella Vista y el isologo de la Fiesta, para luego mandar al municipio para la redacción y envió de las mismas. Pero le falta definir el tipo de sobre que se va a utilizar para el envío y en función a ello la forma de plegar el papel.

2. Teniendo en cuenta la siguiente tabla de los distintos formatos de sobres elijan por lo menos tres sobres posibles y en función a ello la forma de plegar la hoja A4. Justifiquen sus respuestas, teniendo en cuenta que las partes plegadas deben ser iguales entre si.

FORMATO	**C0**	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**C8**
Dimensiones (en mm)	917 x 1297	648 x 917	458 x 648	324 x 458	229 x 324	162 x 229	114 x 162	81 x 114	57 x 81

3. Los encargados de la Fiesta decidieron que cada visitante se coloque una pulsera regulable de plástico para que en caso de salir del predio de exposiciones o del festival, pueda volver a ingresar sin pagar nuevamente la entrada, la decisión fue tomada para facilitar el control. La decisión también implicó tener tres colores distintos de pulseras, uno para cada noche de la fiesta, porque se había organizado tres noches de espectáculos.

a. El fabricante de las pulseras dispone de dos tipos de plásticos para su confección: rectángulos de formato A0 y rectángulos de formato A1; y considera que debe armarlas con rectángulos de medidas: ancho 2 cm y largo 25 cm . Si se le encargan 3600 pulseras de cada color, ¿cuál de los dos tamaños de plástico elegirían para desperdiciar la menor cantidad posible de material? Justifiquen la respuesta.

b. Si el pedido también incluye 150 pulseras para la Prensa y los Organizadores, con las mismas medidas. ¿Sigue conviniendo utilizar el mismo tamaño de plástico?. Justifiquen la respuesta.

4. El Municipio contrata a una empresa de la ciudad para fotografiar todo lo importante que ocurra durante la Fiesta (desde la preselección de reinas hasta el momento de cierre de la Fiesta, incluyendo todos los stands que se presenten en el predio de exposición). Dicha empresa cuenta con las siguientes medidas en fotos y papel que utiliza para las mismas:

Medidas de las fotos	
10cm x 15cm	Opción 1
13cm x 18cm	Opción 2
15cm x 21cm	Opción 3

Papel que utilizan las máquinas	
156m x 12.7cm	Tipo a
186m x 15cm	Tipo b

a. ¿Cuántas fotos de cada opción se pueden imprimir si se utiliza el tipo de papel a? ¿y si se utiliza el tipo de papel b?

b. ¿Con cuál o cuáles de las opciones de medidas para fotos se desperdicia menos papel, según sea el tipo de papel?

c. Las fotos sacadas se expondrán en un pequeño muestrario dentro del stand de la Empresa en el Predio de Exposiciones y el costo de las mismas se explicita en el siguiente cuadro:

Medidas de las fotos	Por unidad	Por 12	Por 24	Por 36
10cm X 15cm	$0.65	$9	$17.80	$22
13cm X 18cm	$0.90	$15	$22	$27
15cm X 21cm	$1.30	$17	$27.70	$38.70

Si tres amigos eligieron 4, 8 y 24 fotos respectivamente, ¿cómo les conviene hacer la compra de tal forma de ahorrar dinero?¿quién de los tres amigos se beneficia más con esa elección?¿cuánto tendrá que pagar cada uno en función a la cantidad de fotos que desea?

d. Los dueños de la casa fotográfica quieren imprimir postales con imágenes de Bella Vista para vender a los turistas. Si las dimensiones de las postales digitales que elaboran es de 13 cm x 19 cm ¿Cuál de los tipos de papel les conviene usar? ¿por qué?

5. Juan decide buscar presupuesto para forrar sus cajas. Averiguó en varias librerías y ahora está indeciso entre dos. En la librería A le cobran \$ 10 por llevarle el papel a su casa y cada m^2 lo cobran \$ 2,50. En la librería B no se cobra el envío, pero cada m2 lo cobran \$ 3,25.

a. Escriban las expresiones que le servirían a Juan para calcular lo que le cobrarían en cada una de las librerías.

b. ¿En qué librería le conviene comprar si necesita 6 m^2? ¿Y si tiene que comprar 8 m^2? ¿Y si tiene que comprar 22 m^2?

c. Representen en un gráfico lo que gastaría Juan en cada librería, según los m^2 que compre. Construir una tabla de valores podría ayudarlos a realizar este gráfico.

d. Observen las rectas que obtuvieron. Éstas se cortan en un punto. ¿Qué representa este punto en el contexto del problema?

6. Juan está pensando en cambiar de proveedor del cartón con el que construye sus cajas. Actualmente, la relación entre los m^2 que necesita comprar y lo que cobra su proveedor A es c **=** 20 **+** 0,75 x. En esta relación, x representa la cantidad de cartón en m^2, y c, lo que debe pagar Juan.

Juan está pensando en cambiar de proveedor, para cada uno de los siguientes analicen.

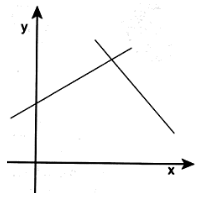
- ¿Existe alguna cantidad de m^2 para la cual sea lo mismo elegir un proveedor que otro?
- ¿En qué condiciones le conviene a Juan cada uno de los proveedores?
- Expliquen por qué. Si les parece conveniente usen gráficos para acompañar sus explicaciones.

a. Proveedor B, cobraría: c **=** 1 5 **+** 0,90 x.

b. Proveedor C, cobraría: c **=** 19 **+** 0,75 x.

c. Proveedor D, c **=** 10 **+** 0,375 x.

7. En el siguiente gráfico se han representado las ecuaciones de un sistema.



a. ¿Cuántas ecuaciones tiene el sistema? ¿Tiene solución?

b. ¿Podrían graficar una tercera recta de manera tal que el nuevo sistema no tenga solución?

8. Gonzalo es maestro mayor de obras y tiene a su cargo la construcción de una vivienda. Dispone de los planos originales que le ha dado el arquitecto; pero en un momento en que debió ausentarse, decidió fotocopiar la parte del plano que correspondía a la habitación que había que empezar a construir al día siguiente para dársela al encargado de la obra en su ausencia. Cuando le entregó la fotocopia a Pedro, uno de los albañiles, Gonzalo le aclaró que había sido reducida al 50% y que el plano original, por su parte, había sido construido en una escala de 1:50.

Luego de hacer algunos cálculos, Pedro, orgulloso de su nueva responsabilidad, empezó a dirigir la construcción. Después de un día de trabajo, los albañiles notaron que había algo extraño, las dimensiones de la habitación no guardaban relación con las dimensiones del resto de la casa.

a. ¿Qué piensan que ocurrió?

b. ¿Cuáles debieron haber sido los cálculos de Pedro para que la habitación no quedara desproporcionada con respecto al resto de la casa?

9. Durante el carnaval todos los medios gráficos envían fotógrafos para cubrir los desfiles de las distintas agrupaciones y sus elegantes carrozas. Estas fotografías se amplían y reducen para adaptarse a los formatos de las distintas publicaciones.

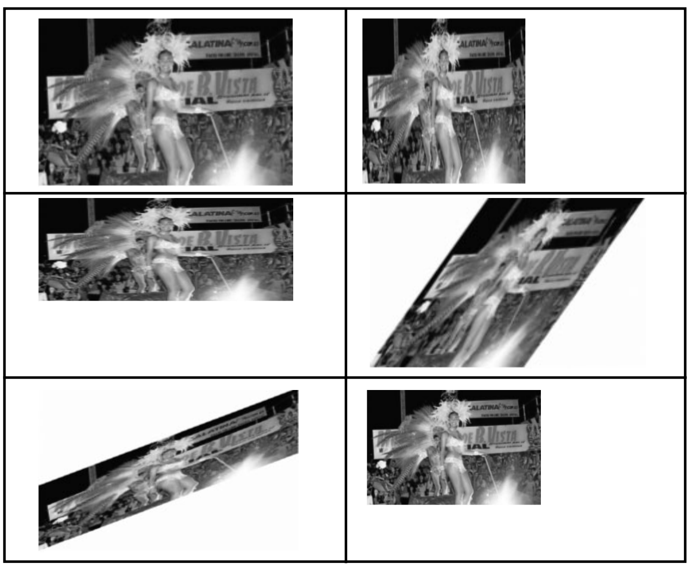
En un periódico escolar, los alumnos diagraman la portada para incluir la foto de una compañera que desfila en una comparsa. La primer foto que se muestra a continuación es la original y las tres siguientes son reducciones que realizaron a través de la computadora con el programa PAINT, utilizando la herramienta “expandir y contraer”,

¿cuáles de ellas corresponden a una reducción proporcional a la original? .

Foto original | Copia A

Copia B | Copia C

Copia D | Copia E



10. Mathilda, hábil espía de un lejano país, deja escondido en el hueco de una montaña un papel en el que reprodujo la conversación que escuchó entre Loretto y Newton.

Cuando sus secuaces logran dar con el documento que contiene vital información, no pueden descifrar lo que ha escrito Mathilda: el papel solo mide 2 cm de base por 3 cm de altura. Suponen que si lo amplían de manera tal que las dimensiones lineales del papel aumenten 3/4, podrán leer su contenido. Cuando lo amplían, se dan cuenta de que aún es muy dificultoso leer lo escrito, por lo cual deciden aumentar nuevamente 3/4 las dimensiones lineales de la ampliación. Hecho esto, logran descifrar la información.

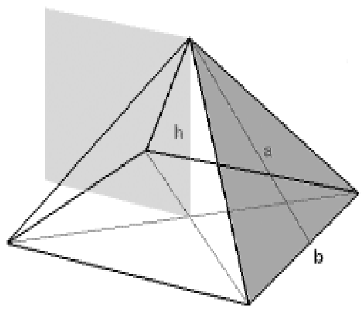
a. Dado un rectángulo de 2 cm por 3 cm, ¿podrían reproducir las ampliaciones que hicieron los secuaces de Mathilda?

b. ¿Cuáles fueron las dimensiones lineales luego de cada una de las ampliaciones?

c. ¿Cuál es la proporción entre las dimensiones lineales de la primera ampliación y las dimensiones lineales originales? Y entre las dimensiones lineales de la primera ampliación y la segunda?

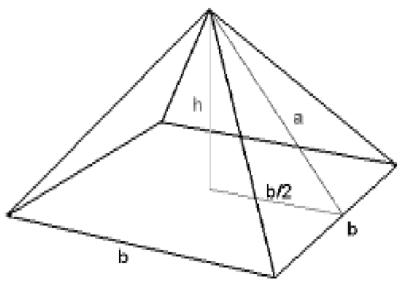
d. ¿Es cierto que si se hubiera hecho la ampliación en un solo paso, las dimensiones finales representarían 7/2 de las originales? ¿Por qué?

11. La gran pirámide de la planicie de Gizeh, la conocida como pirámide de Keops, siempre ha sido una fuente de misterios, y la mayoría están aún por resolver. Sus medidas han sido estudiadas exhaustivamente, pues los Egipcios no construyeron la pirámide dándole unas medidas al azar, sino que sus proporciones mantienen unas relaciones matemáticas muy interesantes entre sí. Medía originalmente 147m de altura, y el lado de la base tenía una longitud de 230m, aproximadamente. Hoy en día la pirámide es un poco más baja, porque a lo largo de los siglos y sobre todo en la Edad Media ha sido utilizada de cantera artificial. Las piedras de las que estaba compuesta se han ido partiendo y tallando en ladrillos más pequeños.



Según Heródoto estas áreas son iguales

Consultando la página de matemáticas *www.epsilones.com*, según el historiador Heródoto, los egipcios construyeron la gran pirámide de tal forma que el área de cada una de las caras triangulares laterales coincidiera con el área de un cuadrado de lado igual a la altura. Teniendo en cuenta lo que acabamos de decir, nos encontramos con las siguientes fórmulas:



Área de la cara lateral: $\frac{b \cdot a}{2} = h^2$

Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Fuente: La gran pirámide: pi por la raíz de fi es casi cuatro *por Paulino Valderas*

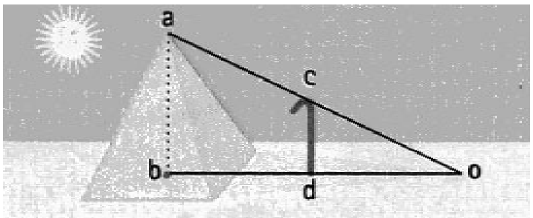
a. ¿Es cierto que las relaciones entre a y b, y entre b y h son:

a/b = Φ/2 b/h =2/”Φ?

> **Pista:** Busquen la proporción entre a, b y h. Para ello:
>
> - reemplacen la primera fórmula en la segunda y realicen los pasos algebraicos necesarios para llegar a la expresión $4a^2 - 2ab - b^2 = 0$
> - dividan por b cuadrado y consideren a/b como una incógnita (por ejemplo a/b=x)
> - resuelvan la ecuación de segundo grado que queda planteada, considerando solo la solución positiva porque se esta trabajando con la longitud de la pirámide

b. Teniendo en cuenta esto ¿en que elementos de la pirámide aparece Φ y en cual “Φ?

12. Otros de los matemáticos interesados en está pirámide fue Thales; Cuenta la historia que el matemático griego Thales de Mileto calculó la altura de la pirámide de Keops utilizando su bastón. Thales esperó un día de sol y colocó su bastón de tal manera que la sombra de éste terminara justo con la sombra de la pirámide, como muestra el siguiente dibujo.



Como ab//cd, dedujo que

$$: \frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{bo}}{\overline{do}}$$

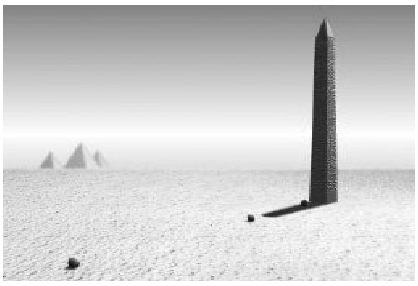
Fuente Imagen: Latorre/Spivak/Kaczor/Elizondop “Matemática 9 “Santillana EGB

a. Calculen la altura de la pirámide de Keops, considerando que el bastón medía 1 m, su sombra era de 3 m y la sombra que proyectaba la pirámide era de 438 m.

b. coinciden los cálculos con lo trabajado en el punto 2.3? .

13. El obelisco de Buenos Aires, emplazado en la *Plaza de la República*, en la intersección de las avenidas *Corrientes* y *9 de Julio*, es uno de los íconos *porteños*.

> Tiene la altura máxima permitida de acuerdo a la línea de edificación de la avenida Roque Sáenz Peña (Diagonal Norte): 67,5 m de alto, discriminados del siguiente modo: 63 m hasta la iniciación del ápice, que es de 3,5 m por 3,5 m. La punta es roma; mide 40 cm. Culmina en un pararrayos que no logra verse por la altura, cuyos cables corren por el interior del Obelisco. La base mide 49 m².Tiene una sola puerta de entrada (en el lado oeste) y en su cúspide hay cuatro ventanas, a las que solo se puede llegar por una escalera recta de 206 escalones con 7 descansos cada 8 m y uno a 6 m.
>
> Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Obelisco_de_Buenos_Aires



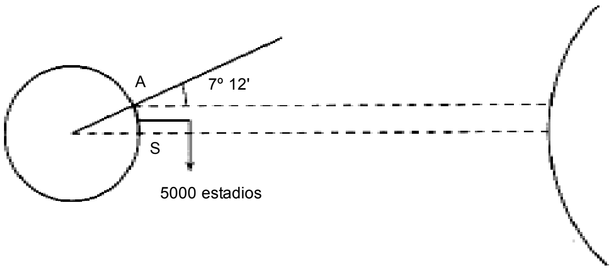
Fuente de Imagen:
www.juntadeandalucia.es/averroes/iesgaviota/fisiqui/relojsol/historia.htm

Si en lugar de calcular la altura de la pirámide de Keops, se tuviera que calcular la altura del obelisco, considerando nuevamente el bastón que medía 1 m, y su sombra de 3 m y la altura del obelisco es la que se menciona el texto, ¿cuál sería la medida de la sombra que proyectaba el obelisco para que al realizar los cálculos como lo realizó Thales se pudiera determinar la altura del obelisco?.

14. El año 300 a.C. marcó en Grecia un quiebre entre dos culturas diferentes: la primera (entre 600 a.C. y 300 a.C.), más cercana a la filosofía y a una actitud contemplativa y generalizadora de resultados; y la segunda (entre 300 a.C. y 600 d.C.), más pragmática y aplicada. Así, por ejemplo, mientras Euclides se contentó con probar que la longitud de la circunferencia era proporcional a su diámetro, Arquímedes se preocupó por calcular el valor de la constante de proporcionalidad (es decir, aproximar el valor de *it).* Esta cuestión de las proporciones y su uso para calcular fue uno de los temas predominantes en la cultura griega.

Tomemos, por ejemplo a Eratóstenes, contemporáneo de Arquímedes, quien estimó el valor del radio de la Tierra. ¿Qué hizo Eratóstenes?

No tenía relojes, ni radares, pero siendo geógrafo y astrónomo, había viajado mucho hasta terminar como bibliotecario en Alejandría. De sus travesías, conocía la ruta entre Siena (hoy Assuan) y Alejandría, que están ambas sobre un mismo meridiano. Había



observado además que, al mediodía del día más largo del año, en Siena, los rayos del sol caían perpendiculares a la superficie terrestre. Eratóstenes midió el ángulo que ese mismo día, a esa misma hora, formaban en Alejandría los rayos de sol con la perpendicular (7° 12'), y con ello y sabiendo que la distancia entre Siena y Alejandría es de 5000 estadios (aproximadamente 926 km), estimó el radio de la Tierra.

a. Usando los datos obtenidos por Eratóstenes, calculen la medida de un meridiano terrestre.

b. Calculen el valor del radio de la Tierra, usando los siguientes valores de Π y comparen los resultados:

$\Pi = 3{,}14$ $\Pi = 3{,}1416$ El valor de Π que les da su calculadora

c. ¿Qué conocimiento matemático piensan que usó Eratóstenes como recurso para plantear sus cálculos? ¿Qué relación tiene ese conocimiento con el teorema de Thales?

15. Dibujen un círculo y marquen su centro. Luego marquen dos sectores circulares (dos porciones, si el círculo representara una pizza), de modo que el segundo sea el doble del primero.

a. Expliquen cómo hicieron para conseguir que un sector sea el doble de otro y justifiquen.

b. ¿Es cierto que los sectores circulares analizados tienen uno el doble de área que el otro? ¿Por qué?

c. ¿Qué relación se cumple entre los ángulos centrales y las longitudes de los arcos de circunferencia correspondientes a los sectores circulares considerados?

d. ¿Se puede considerar que la relación considerada se verifica siempre? Justifiquen su respuesta.

16. Se cuenta que los antiguos griegos necesitaban construir un túnel a través de una colina, para llevar agua desde un lago hasta su ciudad. Una vez fijadas la entrada (A) y la salida (8) del túnel, se preguntaron cómo determinar la dirección en que debían excavar para llegar de A a B. Imaginaron la recta que definía la dirección y sobre ella dos puntos (uno a cada lado de la colina), visibles ambos desde un punto exterior, y decidieron que bastaba con encontrar la medida del ángulo a que determinan las semirrectas con origen en dicho punto, que pasan por A y B.

a. ¿Por qué basta con conocer la medida del ángulo α para determinar la dirección buscada?

b. ¿Podían medir ese ángulo directamente? ¿Por qué?

c. ¿Qué medidas tomaron y cómo calcularon el ángulo si solamente conoclan las propiedades de la semejanza de triángulos?

Argumentar
¿a dónde nos conduce?

Introducción

En la vida en sociedad, estamos permanentemente inmersos en situaciones de comunicación en las que intercambiamos ideas, opiniones y, frente a las diferencias, necesitamos argumentar a favor de una idea propia y analizar si nos parecen valederas las razones de nuestros interlocutores, para avanzar en el propósito de convencer y convencernos, propio de una comunidad que elabora consensos sobre normas y valores.

¿En qué se apoyan las argumentaciones? Según la situación de la que se trate, los argumentos se pueden referir a diferentes cuestiones, pero siempre habrá alguna racionalidad detrás de ellos.

Cuando el intercambio de argumentos se produce entre los integrantes de una comunidad de producción de conocimientos, se van elaborando formas de argumentación y criterios de aceptación de resultados propios para tratar los objetos de su campo de estudio.

En algunos períodos, se producen dudas sobre los criterios de validación utilizados y entonces se revisan analizando su pertinencia e investigando sobre el origen de las dudas planteadas.

En este capítulo nos proponemos aportar al estudio de la práctica de validación en matemática de los lectores que es esencial para trabajar en forma autónoma, considerando los criterios que en ella funcionan y mostrando su importancia en el trabajo de los matemáticos.

Para ello tomaremos en el primer capítulo la cuestión de cómo analizar razonamientos que llevan a contradicciones o a sorpresas: las paradojas.

En el segundo capítulo avanzaremos en la reflexión sobre los procesos de razonamiento utilizados al resolver algunos problemas y cómo asegurar la validez de las conclusiones.

En el último, consideraremos diferentes alternativas que se usan en matemática para demostrar y veremos a través de ejemplos, el largo y complejo camino que va desde la elaboración de conjeturas hasta la obtención de demostraciones.

Capítulo 1: Las paradojas

Cuando frente a la resolución de un problema surge una respuesta inesperada, una afirmación que es, o parece ser, absurda, solemos sentirnos desafiados: ¿cómo saber si la afirmación es realmente absurda? Estamos frente a una paradoja, y necesitamos aclarar el razonamiento que hemos realizado, haciendo un análisis pormenorizado de los principios fundamentales que lo afectan.

El termino paradoja viene del griego (para y doxos) y significa “mas allá de lo creíble”.

Aunque el término *paradoja* tiene diferentes significados, se puede tomar en sentido amplio como “aquel resultado que, por contrario a la intuición y al sentido común, alcanza a provocar un sentimiento de sorpresa” ... y la sorpresa genera el deseo de desentrañar sus secretos.

En la matemática existen tres tipos de paradojas. Hay proposiciones absurdas y contradictorias que proceden de falsos razonamientos, las paradojas de esta clase suelen llamarse falacias. Hay teoremas que parecen extraños e increíbles, pero que, por ser lógicamente inatacables han de aceptarse incluso aunque trasciendan la intuición o la imaginación. La tercera clase, consiste en las paradojas lógicas que aparecen en conexión con la teoría de conjuntos y que han dado por resultado un reexamen de los fundamentos de la matemática.

¿Qué son las falacias? Son aquellas en las que se contradice el denominado principio del tercero excluido que afirma lo siguiente: “Cualquier enunciado proposicional es verdadero o es falso; pero no se pueden dar ambas cosas simultáneamente”. O también, que, para un cierto enunciado p, si decimos que su valor de verdad es verdadero, entonces debe ocurrir que el valor de verdad de no p, sea falso. Es decir que, si se llega a considerar que un cierto enunciado “p” es verdadero, y a la vez que ese mismo enunciado es falso, estamos en presencia de una contradicción. Del mismo modo, si se llega a considerar que un cierto enunciado p es verdadero, y su negación “no p” también es verdadera. Y las contradicciones claro, nos indican que algo de lo razonado no funciona.

Actividad 1: Algunas paradojas lógicas

Las paradojas lógicas, como los cuentos populares y las leyendas, han tenido sus predecesoras en la antigüedad. La mayoría se origina en lo que se conoce como “falacias del círculo vicioso” que se deben a la omisión de un principio fundamental: que el todo de una totalidad no puede ser él mismo miembro de la totalidad”. Vamos a considerar algunas paradojas lógicas.

A los antiguos griegos los tenía perplejos que enunciados de apariencia perfectamente clara no pudieran ser ni verdaderos ni falsos sin contradecirse a sí mismos.

Epiménides fue un poeta cretense legendario que vivió hacia el siglo VI antes de cristo, a quien se atribuye la frase siguiente:

“Todos los cretenses son mentirosos”.

Si se admite que los mentirosos mienten “siempre” y que los no mentirosos dicen “siempre” la verdad, la frase da pie a una contradicción lógica: ¿por qué?

La frase no puede ser verdadera porque entonces Epiménides sería mentiroso, y, por lo tanto, esto que él nos dice tendría que ser falso. Por otra parte tampoco puede ser falsa, porque se deduciría entonces que los cretenses son veraces, y, por consiguiente, lo que Epiménides dice sería verdad. Es una frase indecidible ¡ni verdadera ni falsa!

Decimos que esta frase es autoalusiva pues en ella Epiménides se refiere a sí mismo. Esta paradoja, conocida con el nombre de paradoja del mentiroso, tiene diferentes versiones, veremos algunas

1.1.a. La frase “Esta frase es falsa” es una versión sencilla de la paradoja del mentiroso, pues también tiene la forma de una frase que habla de sí misma. Analiza por qué se llega a una contradicción.

1.1.b. Hay abundantes ejemplos de enunciados contradictorios del mismo estilo. Algunos de ellos son: una pintada en una pared con el texto o un anuncio con grandes letras en un periódico como los de la figura.

¡BASTA DE PINTADAS!

No lea este anuncio

Inventen alguno y compártanlo con sus compañeros.

1.1.c. También las declaraciones autoinvalidantes son de este estilo, por ejemplo, el aforismo de Bernard Shaw “la única regla de oro que existe es que no existen reglas de oro”, y la del es de este tipo la frase del economista británico Alfred Marshall “Toda frase breve acerca de la economía es intrínsecamente falsa”.

Inventen alguna frase así y compártanla con sus compañeros.

1.1.d. En los casos que analizaste, la frase habla de sí misma. Considera también el ejemplo siguiente para decidir si es V o F y, si el enunciado que lo niega tiene el valor de verdad opuesto. “Esta frase consta de siete palabras”

1.2. Una variante muy analizada en tiempos medievales de la paradoja del mentiroso, muestra que la fuente de confusión de las paradojas no sólo está ligada a la autoalusión.
Consideremos el diálogo siguiente:

Platón: La próxima declaración de Sócrates será falsa.

Sócrates: ¡Platón ha dicho la verdad!

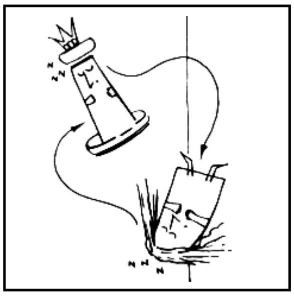
¿Por qué es una paradoja? Llamemos A a la frase de Platón y B a la de Sócrates. Si A es verdadera, entonces B será falsa. Pero si B es falsa, entonces A es verdadera, con lo que A es verdadera y falsa.

Al pasar de una a otra tenemos una situación de dos regresiones, cada una se refiere a la otra. Se parece al conocido ejemplo del huevo y la gallina, que es también de regresión pero infinita.

1.2.a. Considera un par de espejos enfrentados ¿cómo dirías que es la regresión, dual, infinita, circular?

1.2.b. Analiza el juego entre ensueño y realidad en lo que dice Alicia, del conocido libro de Lewis Caroll, ¿cómo dirías que es esta regresión, dual, infinita, circular?

Estoy soñando con el rey rojo. También el duerme y sueña conmigo, que estoy soñando con él, quien sueña conmigo...¡Cielos! ¡Esto se repite sin cesar!”

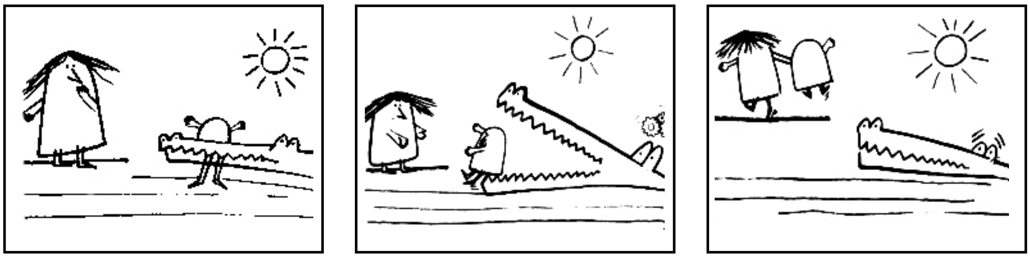


1.2.c. Lee la historia siguiente del cocodrilo y el niño y piensa por qué el cocodrilo dejó escapar al niño y qué esperaba que le dijera la madre del niño

Un cocodrilo atrapó al bebé de una madre

Cocodrilo: ¿Voy a comerme a tu niño? Responde correctamente y te lo devolveré ileso

Madre: ¡Ay! ¡Ay! ¡Ay! ¡Te vas a comer a mi hijito!



Actividad 2: Miradas sobre el mundo de la matemática.

Las paradojas lógicas, se comprenden introduciendo metalenguajes. Tal como explica Gardner en *Ajá, Paradojas que hacen pensar*, sólo pueden considerarse a la vez, en un mismo plano, enunciados de un mismo tipo. Decir algo de otro enunciado es referirse a él en un metalenguaje y entonces no puede ser considerado en un mismo tipo.

2.1. Lee el texto “Metalenguajes” de M. Gardner, en la antología.

2.2. Teniendo en cuenta lo que se expresa en el texto, identifica en qué nivel están las siguientes implicaciones:

* En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos.
* a + b + c = 180º
* Si un triángulo es equilátero, sus ángulos interiores son de 60º.
* En todo triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos son complementarios.
* Analizar qué propiedades de un triángulo valen en geometrías no euclideanas permite entender mejor las que valen en las euclideanas.
* Si a + b = 90º, entonces el triángulo es rectángulo.

* En la geometría del caucho, un triángulo y un cuadrado son figuras equivalentes.

2.3. Piensen en otros ejemplos donde se puedan apreciar estos niveles de metalenguajes.

Actividad 3: Algunas paradojas aritméticas

En la historia de las matemáticas han pesado fuertemente las afirmaciones relativas a los números que han sorprendido y confundido a los matemáticos por contrarias a la intuición, porque no parecían razonables de acuerdo con los conocimientos de su época.

Entre los ejemplos clásicos, es interesante mencionar que a los griegos les resultaba paradójico que la diagonal de un cuadrado de lado unidad no pudiera medirse exactamente por más exacta que fuera la regla. Ellos pensaban que siempre era posible medir un segmento con otro que se tomara como unidad y que se podía expresar esa relación con un número racional. Sin embargo, tal como verán en el capítulo 3 de este material, al razonar sobre esa posibilidad encontraron que esto era falso. Esto dio lugar al desarrollo del estudio de los números irracionales.

3.1. a. La perplejidad que produce en quienes no se han puesto a pensar en ellos, hace parecer un truco de magia algunos resultados numéricos que pueden explicarse recurriendo a la aritmética. Lean el problema siguiente y luego analicen si el razonamiento utilizado es válido, y expliquen por qué sí o por qué no lo es.

Un billete de menos

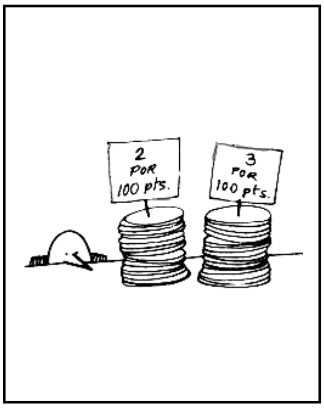
Una disquería hace una oferta de CD's, poniendo 30 de rock a razón de 2 por $10 y 30 de reaggee a razón de 3 por $10. Al cabo del primer día los había vendido todos.

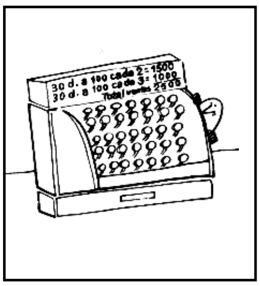
Por los CD's del lote de 2 por $10 obtuvieron $1500 y por los del lote de 3 por $10 obtuvieron $1000. En total el primer día ingresaron $2500. Al día siguiente el encargado puso 60 CD's más.

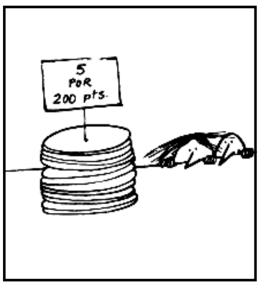
El vendedor pensó "¿Para qué molestarme en clasificarlos?

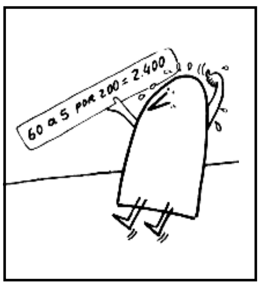
Podría vender lotes de 5 por $20 pesos y el resultado será el mismo".

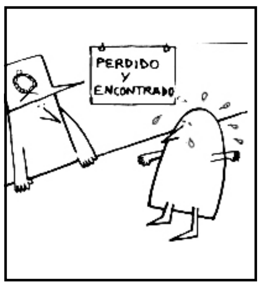
Sin embargo, a la hora de contar la recaudación tenía $2400.











3.1.b. Lean "El ubicuo número nueve" en la antología. ¿Qué nociones matemáticas explican la regla del nueve? Expliquen ustedes cómo funciona la prueba del 9 en el cálculo 23 x 15.

3.1.c. Analicen el razonamiento siguiente que llega a un absurdo y expliquen por qué.

Supongamos que a + b = c y supongamos que a = 3 y que b = 2. Tenemos la igualdad

$$a + b = c$$

Multipliquemos por (a + b) ambos miembros

$$(a + b)(a + b) = c(a + b)$$

Operando queda

$$a^2 + 2ab + b^2 = c(a + b)$$

Ordenando los términos tenemos

$$a^2 + ab - ac = -ab - b^2 + bc$$

Y sacando factor común

$$a(a + b - c) = -b(a + b - c)$$

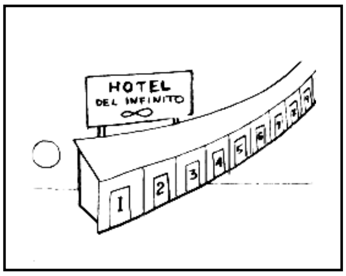
Dividiendo a ambos lados por (a + b – c)

$$a = -b \quad \text{ó} \quad a + b = 0$$

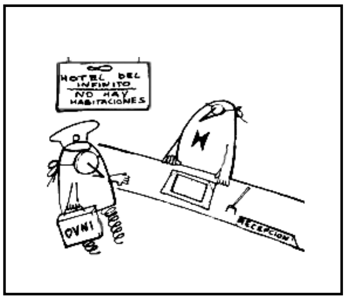
3.2.a. Para avanzar con otro ejemplo, lean el problema siguiente en el que el Dr Zeta le cuenta a su hijo cómo ubican pasajeros en un hotel y luego expliciten si encuentran alguna cuestión que desafía su intuición.

El hotel del infinito

Dr. Zeta: —En el centro de nuestra galaxia hay un hotel enorme, llamado el Hotel del infinito. Tiene un número infinito de habitaciones que se extienden hasta un espacio de dimensión superior a través de un agujero negro. Las habitaciones están numeradas de 1 en adelante.



Un día, estando ocupadas todas las habitaciones, llegó el piloto de un OVNI que iba camino a otra galaxia. A pesar de no disponer de habitaciones, el gerente consiguió dar alojamiento al piloto, trasladó al ocupante de cada habitación a la siguiente y así la 1 quedó libre para el piloto.



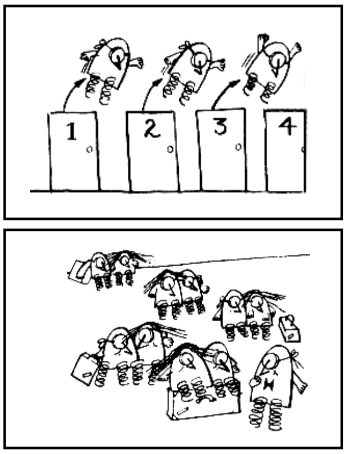
Al día siguiente se presentaron 5 parejas de luna de miel ¿podría el hotel recibirlos? Sí, el gerente no tuvo más que trasladar a cada ocupante a la habitación de número 5 unidades mayor.

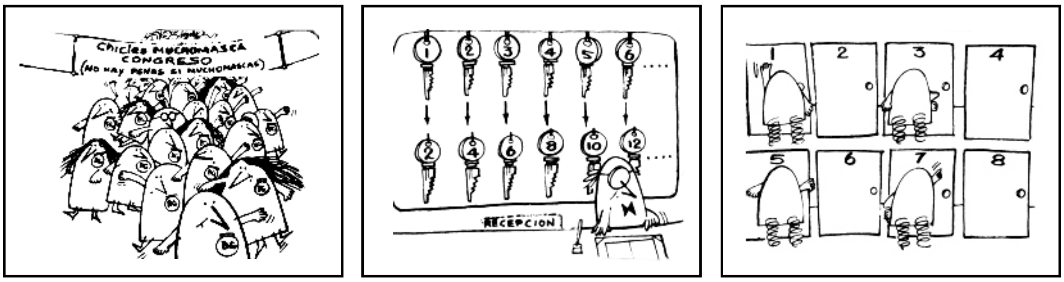
Ese fin de semana llegó un número infinito de comisionistas de chuicle para celebrar una convención.

Hijo: —Comprendo que el hotel pueda atender a un número finito de recién llegados, pero ¿como dar lugar a un número infinito de ellos?

Dr. Zeta: —Sin dificultad, hijo. El gerente pidió a cada ocupante mudarse a una habitación con el número doble del que tenía.

Hijo: —Claro, así se ocupaban todas las habitaciones pares y ¡quedaban libres las impares!





3.2.b. Al igual que les habrá ocurrido a algunos de ustedes al leer el problema del hotel, los matemáticos del siglo pasado encontraron paradójico que todos los miembros de un conjunto infinito puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los miembros de algún subconjunto del dado, mientras que por otra parte podrían existir conjuntos infinitos entre los cuales es imposible establecer una correspondencia biunívoca.

3.2.c. Identifiquen en el mismo texto las relaciones que encuentra entre estos temas y algunos textos literarios en el texto de la antología,

Actividad 4: De cómo las paradojas intervienen en la formulación de nuevos problemas matemáticos

¿En que consiste el trabajo de un matemático? No resulta sencillo describirlo pero, en una primera aproximación, podemos decir que ellos trabajan tratando de contestar las preguntas que se formulan. Para hacerlo, formulan conjeturas sobre cómo responderlas, tratan de validar las conjeturas y también, de revisar lo que han pensado cuando aparecen paradojas.

Podemos decir que las matemáticas están ahora mismo inmersas en un proceso febril de desarrollo. Como consecuencia de ello, aparecen esporádicamente resultados y avances espectaculares. Pero todo esto no sería posible sin el trabajo en muchos casos anónimo de todos los matemáticos que contribuyen a su avance.

En julio del año 2003, en la revista “Investigación y ciencia”, apareció un artículo que ilustra la importancia que las paradojas tienen en los problemas que los matemáticos se plantean y por lo tanto en la evolución del conocimiento matemático.

4.1. Lee el artículo y el relato del intercambio entre Russell y Frege.

Ordenadores, paradojas y fundamentos de la matemática.
Gregory J. Chaitin.

Grandes pensadores del siglo XX han demostrado que la incompletitud y la aleatoriedad medran incluso en el mundo austero de la matemática

Todos saben que los ordenadores son aparatos muy prácticos. Tanto, que se han vuelto indispensables en el funcionamiento de una sociedad moderna. Pero hasta los informáticos han olvidado —exagero, pero sólo un poco— que fueron inventados para que ayudasen a aclarar una cuestión filosófica concerniente a los fundamentos de la matemática.

¿Sorprendente? Sí, en verdad. Comienza esta asombrosa historia con David Hilbert, un célebre matemático alemán, que a principios del siglo XX propuso la formalización completa de todo el razonamiento matemático. Pero resultó que era imposible formalizar el razonamiento matemático, por lo que, en cierto sentido, su idea fue un tremendo fracaso.

Sin embargo, en otro sentido, tuvo un gran éxito. Porque el formalismo ha sido uno de los grandes dones que nos ha hecho el siglo XX. No para el razonamiento o la deducción matemática, sino para la programación, para el cálculo, para la computación. Una pieza olvidada de la historia intelectual. Me propongo referir aquí esa historia sin detenerme en los detalles de índole matemática. Será, pues, imposible explicar plenamente la obra de quienes hicieron las aportaciones fundamentales, entre ellos Bertrand Russell, Kurt Gödel y Alan Turing. Aun así, el lector paciente debería poder captar la esencia de sus argumentos y comprender en qué se inspiraron algunas de mis propias ideas sobre la aleatoriedad inherente a la matemática.

Las paradojas lógicas de Russell

Voy a empezar con Bertrand Russell, matemático que al pasar el tiempo se tornaría filósofo, primero, y por último, humanista. Russell constituye una figura clave porque descubrió algunas paradojas muy perturbadoras en la lógica misma. Es decir, halló casos en los que razonamientos en apariencia impecables conducen a contradicciones. Las aportaciones de Russell fueron fundamentales para que se difundiese la idea de que estas contradicciones causaban una crisis grave y habían de ser resueltas de algún modo. Las paradojas que Russell descubrió atrajeron mucho la atención en los círculos matemáticos, pero, curiosamente, tan sólo una de ellas acabó llevando su nombre. Consideremos el conjunto de todos los conjuntos que no son un elemento de sí mismos. Preguntemos entonces: “¿Es este conjunto elemento de sí mismo?”. Si fuera elemento de sí mismo, no lo sería, y recíprocamente. El conjunto de todos los conjuntos mencionados en la paradoja de Russell encuentra un símil en el barbero de un pueblo pequeño y apartado: el barbero rasura a todos los hombres que no se afeitan ellos mismos. Tal descripción parece francamente razonable hasta que se pregunta: “¿Se afeita el barbero a sí mismo?”. Se afeita a sí mismo si, y solamente si, no se afeita a sí mismo. Desde luego, se podría decir: “¿Y a quién le importa ese hipotético barbero? ¡Todo eso no es más que un absurdo juego de palabras!”. Pero cuando lo que se está dilucidando es el concepto matemático de conjunto, no resulta tan fácil dejar de lado un problema lógico.

La paradoja de Russell es un eco, en la teoría de conjuntos, de otra paradoja muy anterior, ya conocida por los antiguos griegos. A menudo se la llama paradoja de Epiménides, o paradoja del mentiroso. Se dice que Epiménides exclamó: "¡Esta aseveración es falsa!". ¿Lo es? Si su aseveración es falsa, ha de ser verdadera. Pero, si es verdadera, es falsa. Así que, cualquiera que sea la hipótesis sobre su veracidad, estamos en conflicto.

Otra versión de la paradoja, en dos enunciados, reza: "El enunciado siguiente es verdadero. El enunciado precedente es falso". Cada enunciado, individualmente, parece estar claro, pero, combinados, crean un sinsentido. Es posible desdeñar tales paradojas, considerándolas juegos de palabras sin significado, pero algunas de las más grandes inteligencias del siglo XX se las tomaron muy en serio. Una de las reacciones a la crisis de la lógica fue la tentativa de Hilbert, que trató de eludirla por medio del formalismo. Si encontramos conflictos al seguir razonamientos que parecen correctos, la solución consiste en utilizar la lógica simbólica para crear un lenguaje artificial y ser muy cuidadosos al especificar sus reglas, de modo que no surjan contradicciones. Después de todo, el lenguaje cotidiano es ambiguo: no siempre se sabe de cierto cuál es el antecedente de un pronombre.

En Investigación y ciencia, julio 2003 págs. 28 – 35.

Una carta con resultados indeseables

El surgimiento de paradojas fue uno de los principales factores que propició una herida a la "noción de verdad matemática" aceptada por Hilbert y la corriente filosófico-matemática denominada el formalismo.

El matemático y lógico alemán Gotlab Frege (1848-1925) se había propuesto llevar a cabo el llamado "programa lógico" consistente en deducir toda la matemática de la lógica y darle así la más sólida de las bases. Dicho programa puede realizarse en dos pasos: primero se definirán los conceptos matemáticos en función de los conjuntos y segundo, demostrar los teoremas matemáticos usando únicamente la lógica. Consideraba: "Los matemáticos deben hacer frente a la posibilidad de encontrar una contradicción que convierta el edificio completo en ruinas. Por esta razón me he sentido obligado a volver a los fundamentos lógicos generales de la ciencia…" (De Lorenzo, 1995).

Es así como se dedicó durante un cuarto de siglo a construir la fundamentación lógica del análisis, con tal fin elaboró un sistema formal que intentaba servir como fundamento de las matemáticas.

En 1902 Frege estaba terminando su obra: "Las leyes fundamentales de la aritmética", con la cual creía haber dado la solución de fundamentación lógica de la matemática mediante la teoría de conjuntos cuando recibió la carta de Bertrand Russell, en la cual le explicaba que había encontrado una paradoja en esa teoría.

Frege escribió al pie del segundo volumen de la obra que estaba concluyendo: "Difícilmente pueda encontrarse un científico con algo mas indeseable que notas que ceden los fundamentos de una obra que acaba de terminar. En esta situación me encuentro al recibir una carta del señor Bertrand Russell cuando el trabajo estaba casi en imprenta". Lo que demuestra la paradoja de Russell es que el principio de abstracción es falso; y es este aspecto el que hace contradictorio el sistema de Frege.

4.2. ¿En que sentido podemos decir que el conjunto de ambos textos muestra un ejemplo de las marchas y contramarchas que se dan en la producción de conocimientos?

4.3. Responde consultando a tu profesor, qué se puede decir hoy sobre el intento de deducir toda la matemática a partir de un conjunto de puntos de partida?

Actividad 5: Formas de trabajar en matemática

Razonamientos en los que se analizan las consecuencias lógicas de afirmar la verdad de un enunciado, caminos insospechados a los que conduce un razonamiento sin fallas, trucos aritméticos...

En las actividades de este capítulo han recorrido problemas donde, al llegar por un razonamiento a un cierto resultado, se produce una sorpresa. Esto lleva a dudar de lo pensado y a analizar cómo se ha pensado, cuáles fueron los puntos de partida y cuáles los caminos utilizados.

5.1. Identifiquen para cada una de las paradojas de la actividad 3, cuáles son los conocimientos que permiten comprender aquello que en un principio causa sorpresa.

5.2. ¿Un nuevo truco de magia? Lean el texto del problema, que es una adaptación del aparecido en “El hombre que calculaba”, analicen si el razonamiento utilizado es válido, y expliquen por qué funciona.

Un reparto imposible

Tres hombres discutían y Beremiz, el calculador, que viajaba a Bagdad con un amigo se acercó a informarse.
—Somos hermanos —explicó el más viejo— y recibimos como herencia 35 camellos. Según la voluntad de nuestro padre, me corresponde a mí la mitad, a mi hermano Hamed una tercera parte y a Namir, el más joven, sólo la novena parte. Ninguna de las particiones que ensayamos hasta el momento nos resulta aceptable. ¿Cómo hacer tal partición?
—Muy sencillo —dijo Beremiz— Yo me comprometo a hacer con justicia el reparto pero antes permitidme agregar a estos 35 camellos el de mi amigo, que nos trajo hasta aquí. Tendrías que recibir la mitad de 35 que son 17 y ½. Pues bien recibirás la mitad de 36 que son 18; sales ganado así que nada tienes que reclamar.
Y dijo al más joven
—Tú Namir, tendrías que recibir la novena parte, o sea 3 camellos y una parte de otro. Te daré la novena parte de 36 que son 4. Tu ganancia también es notable. En cuanto a tí Hamed, tendrías que recibir 1/3 de 35 que son 11 y un poco más. Recibirás 1/3 de 36 que son 12, tú también sales ganando.
Por esta ventajosa división les corresponden entre los tres 34 camellos, 1 es de mi amigo y el que queda es justo que me corresponda por haber resuelto el problema a satisfacción de todos.

5.3. Consulten en su grupo y con su profesor si conocen otros ejemplos de paradojas. Son ejemplos geométricos interesantes la curva “copo de nieve” en la que un área finita tiene un perímetro infinito y algunos dibujos tomados por Escher como el de las escaleras circulares donde unos tramos suben y otros bajan.

CAPÍTULO 2: Conjeturas y teoremas

Cuando tenemos que resolver un problema en forma autónoma, necesitamos usar algunos criterios que nos permitan dar por válidos los resultados que obtenemos. Los diversos caminos por los que un mismo problema puede ser abordado, nos ponen en la situación de tomar decisiones que nos permiten avanzar... y a veces nos hacen retroceder... ¿Cómo podemos asegurarnos de que nuestra respuesta es matemáticamente válida?

Los razonamientos, considerados como procesos de pensamiento, son aquellos mediante los cuales se sacan conclusiones a partir de cierta información. En ocasiones, la gente saca conclusiones basadas en sus propias observaciones. Al observar varias veces que una acción produce el mismo resultado, se concluye, en general, que esa acción tendrá siempre el mismo resultado. A esta clase de razonamiento se le llama razonamiento inductivo. Y a la conclusión que se saca del razonamiento inductivo se le llama generalización. En matemáticas, es posible avanzar de esta manera para formular "conjeturas", es decir enunciados generales de los cuales se sospecha que pueden ser verdaderos.

El proceso del razonamiento deductivo requiere, en cambio, aceptar alguna cuestión general para obtener conclusiones para casos particulares y, en el caso particular de las matemáticas, la aceptación de unas cuantas generalizaciones básicas sin comprobarlas. Estas generalizaciones se llaman "postulados". Todas las demás generalizaciones que pueden derivarse de ellos con la ayuda de definiciones, postulados y la lógica del razonamiento deductivo, se llaman "teoremas", y se requiere de este proceso para probar que son verdaderas.

En este capítulo, consideraremos diferentes problemas, para analizar luego si los procesos de razonamiento que se utilizan para resolverlos conducen a conjeturas o a teoremas.

Actividad 1: Los pitagóricos, los números y las generalizaciones.

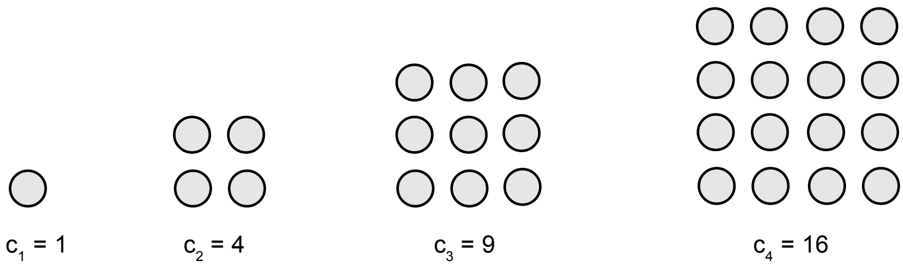
Pitágoras de Samos, personaje semilegendario, fue el creador de un gran movimiento metafísico, moral, religioso y científico. El saber geométrico de los pitagóricos estaba en la geometría elemental, y, aunque un conocimiento práctico como el del Teorema de Pitágoras aparece ya en los cálculos sumerios, fueron los pitagóricos los que, tanto para este como para otros conocimientos, rebasaron los simples cálculos aritméticos y geométricos y supieron integrarlos en un sistema deductivo. Fueron los primeros en analizar la noción de número, definieron los números primos, algunas progresiones y precisaron la teoría de las proporciones.

Pitágoras desarrolló un método de representar los números mediante agrupamientos de piedras (de hecho, la palabra *cálculo* significa "manojo de piedra").

A continuación, están representados los primeros "números cuadrados", llamados así porque la cantidad de piedras que los integran se pueden disponer formando un cuadrado.

1.1. Responde a las siguientes preguntas sobre los números cuadrados:

1.1.a. ¿Cuál es el quinto número cuadrado? ¿Y el vigésimo?

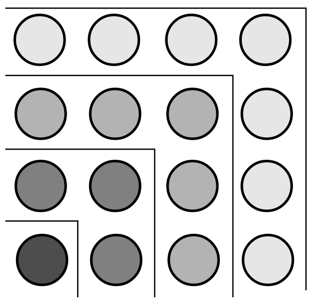


1.1.b. ¿Cómo se forman los números cuadrados? Elabora una conjetura.

1.1.c. Reúnanse con sus compañeros en grupos pequeños y traten de expresarla simbólicamente. Confronten la respuesta obtenida con otros grupos. ¿Todos pensaron lo mismo? ¿Otros pensaron diferente? Pónganse de acuerdo en una formulación.

1.1.d. ¿Qué sucesión obtienen? ¿Cuál es la suma de sus cincuenta primeros términos? ¿Cuál es la suma de todos sus términos?

1.1.e. En el siguiente gráfico se intenta mostrar cómo se obtiene cada número cuadrado a partir del anterior. Busquen algún patrón en la cantidad de piedras que hay que agregar cada vez.



1.1.f. Para cualquier número natural n, ¿cuánto vale 1+3+5+ ... + (2n – 1)?

1.1.g. Un grupo expresó como conclusión lo siguiente: “Los números cuadrados son aquellos que se forman con la suma de los números impares consecutivos, partiendo del uno”.

Otro grupo dice: “Los números cuadrados son aquellos que pertenecen a la sucesión $S_n = n^2$ donde n son todos los naturales” (en símbolos: $\forall n \in$ N) ¿Son equivalentes estas dos conclusiones?

Otro modo de expresar la propiedad es: “Cualquier número cuadrado n puede pensarse como la suma de todos los números impares desde el 1 hasta el n-ésimo”, es utilizando el símbolo de sumatoria:

$$\sum_{i=0}^{n} 2i + 1 = (n+1)^2$$

Sumatoria

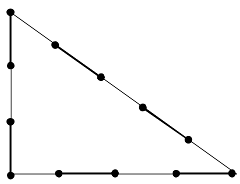
La letra griega sigma mayúscula, Σ, es una notación abreviada para designar una suma. Por ejemplo, la suma $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ puede escribirse con el signo de adición como:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{que se lee “la suma de } x_i \text{ desde } i = 1 \text{ hasta } i = n\text{”.}$$

Aquí, i se llama *índice de adición* y es una variable que varía entre los números 1, 2, ..., n. La expresión $i = 1$ debajo del signo Σ indica que 1 es el valor inicial adoptado por i, y la n arriba del signo Σ indica el valor terminal de i. Al símbolo x_i se le llama *sumando*; es una función de i que adopta los valores x_1, x_2, ..., x_n, respectivamente, cuando i adopta los valores 1, 2, ..., n. El signo Σ dice que los valores adoptados por el sumando han de ser sumados

Actividad 2: Una relación muy conocida con ternas numéricas

2.1. Para formar un ángulo recto, los egipcios en el siglo X a.C., dividían un cordel en doce partes iguales, con nudos que separaban cada una de esas partes. Luego formaban un triángulo con lados de longitudes 3, 4 y 5. Eso utilizaban en sus construcciones y todavía hoy lo usan los albañiles para determinar ángulos rectos.



Los funcionarios reales y los constructores utilizaban una “escuadra” construida con una cuerda de trece nudos, ubicados a una misma distancia. Así determinaban ángulos rectos para delimitar terrenos o para ubicar construcciones orientadas según los puntos cardinales, como las pirámides.

Estos tres números 3, 4, y 5, se relacionan de una manera particular, ya que, si se elevan al cuadrado, es posible combinarlos de modo que el cuadrado de uno de ellos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos; cumplen la relación $3^2 + 4^2 = 5^2$.

¿Habrá otras ternas de números naturales que cumplan esa relación? O, formulado de otra manera, ¿Qué números a y b naturales cumplen que la suma de sus cuadrados es un número natural c cuadrado?

Por ejemplo, a = 2 y b = 1 no lo verifican ya que la suma de sus cuadrados es 5, que no es un número cuadrado.

Por otra parte a = 3 y b = 4 sí lo verifican, ya que la suma de sus cuadrados es 9 + 16 = 25 que es 5 al cuadrado.

Las soluciones (a, b, c) a este problema se la llaman una ternas pitagóricas. Muchos ejemplos de ellas ya eran conocidos por los babilonios: (6,8,10), (5,12,13), ...

El problema fue resuelto de manera más general por Diofanto en el siglo III, que descubrió cómo generar estas ternas aunque tal vez la solución ya era conocida por los babilonios y la utilizaban para obtener sus ternas. La solución que se transcribe aquí es la misma que dio Diofanto pero, claro está, en notación matemática actual.

Si m y n son dos números naturales cualesquiera,
entonces los números $m^2 - n^2 = a$ y $2\,m\,n = b$, son los catetos
y $m^2 + n^2 = c$, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
Por ejemplo, para $m = 2$ y $n = 1$ resulta
$m^2 - n^2 = 3$, un cateto
$2\,m\,n = 4$, otro cateto
$m^2 + n^2 = 5$, la hipotenusa

2.1.a. Encuentren más ternas pitagóricas. ¿Hay alguna terna pitagórica con c = 7?

2.1.b. Sabemos que estas ternas están relacionadas con triángulos que tienen un ángulo recto. Consideren los siguientes enunciados:

* Si un triángulo tiene lados de longitudes 3, 4 y 5, entonces es un triángulo rectángulo y tiene un ángulo recto opuesto al lado mayor.

Este enunciado es un “ejemplo”que los egipcios comprobaron mediante la experimentación.

* Se da un triángulo con lados a, b, y c. Si esos lados cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$, el triángulo es rectángulo y tiene un ángulo recto opuesto al lado mayor.

Este enunciado es una “generalización”, ¿es posible comprobar su validez mediante la experimentación? ¿Por qué?

2.1.c. Realicen la siguiente construcción: elijan dos números y traten de construir un triángulo rectángulo que tenga dos lados con esos dos números como medida en cm.

2.1.d. Escriban los pasos que realizan.

2.1.e. ¿Cómo pueden asegurar que la figura que resulta es un triángulo rectángulo?

2.1.f. Alguien escribe el siguiente procedimiento de construcción:

- trazo AB = 6 cm C
- trazo la perpendicular de AB en A.
- trazo la circunferencia de centro B, de 10 cm de radio
- en la intersección tengo el punto C

Dice que, con este procedimiento se obtiene un único triángulo porque “si tengo dos lados, el tercero está impuesto, no se puede elegir” ¿Tiene razón? ¿Por qué?

2.1.g. ¿Cómo harías para saber si este procedimiento de construcción es válido para que el triángulo sea rectángulo?

2.1.h. En grupo, comparen las conclusiones a las que arribaron.

Cuando obtenemos conclusiones relacionado propiedades, como seguramente han hecho al justificar la construcción en el punto 2.1.f., decimos que esas conclusiones están probadas.

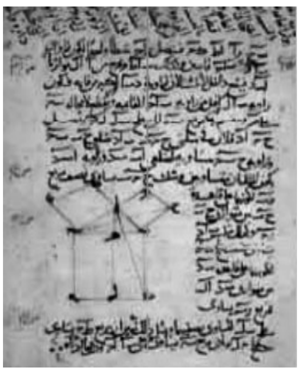
Teorema y teorema recíproco

¿A qué denominamos en matemáticas, ocuparnos de la demostración lógica de ciertas afirmaciones? Cualquier sistema lógico debe empezar con algunos términos no definidos (o no definibles), definiciones y postulados o axiomas. A partir de ello, se pueden hacer otras afirmaciones, llamadas teoremas, que deben probarse empleando las reglas de la lógica.
Un teorema es una proposición de la forma p => q, y se denomina teorema recíproco a la proposición q => p. Demostrar un teorema, consiste en probar que la implicación p => q es verdadera. Como consideramos que p es siempre verdadera, al demostrar que q es verdadera se demuestra la verdad de la implicación.

Actividad 3: La demostración del teorema de Pitágoras

La propiedad de los triángulos rectángulos que estuvieron revisando en la actividad anterior, es conocida como el Teorema de Pitágoras. Euclides presenta este teorema en el Libro I de su famosa obra “Elementos”, que constituyó la primera obra organizada que recopiló los conocimientos matemáticos producidos en el mundo griego antiguo hasta los tiempos de su elaboración. El libro toma como punto de partida cinco postulados y va presentando cada proposición demostrada a partir de las anteriores. A la demostración de este teorema dedica dos proposiciones, la 47 y la 48, que es la proposición recíproca de la 47.

3.1. a. Lean la demostración de cada proposición, teniendo en cuenta que Euclides representa los números cuadrados por las áreas de los cuadrados. Esta perspectiva que asocia los números a las formas, propia del modo de pensar griego, la has visto también en la actividad 1 de este capítulo.



Manuscrito árabe del s.XIII

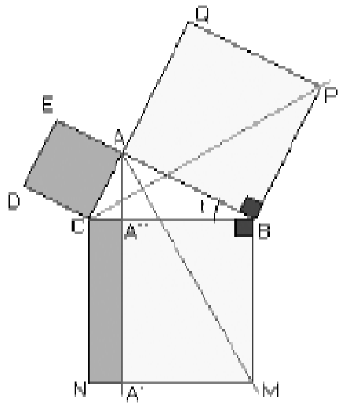
Euclides I, 47

“En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el ángulo opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo recto”.
Considerando la figura adjunta, Euclides prueba que el área del cuadrado NMBC es igual a la suma de las áreas de los cuadrados ABPQ y CAED.

Trazamos por A una perpendicular a CB hasta que corte a NM en A' y que divida al cuadrado NMBC en dos rectángulos A'MBA'' y NA'A''C.

A continuación unimos A con M y C con P.

Los triángulos MBA y CBP son iguales pues tienen el mismo ángulo B = 90 + t e iguales los lados que lo determinan (BP = AB y BM = BC)



Se verifica:
[Área triángulo MBA] = 1/2 MB.MA' = 1/2 (MB.MA') = 1/2 [Área rectángulo A'MBA'']

Por otra parte:
[Área triángulo CBP] = 1/2 BP.QP = 1/2 (BP.QP) = 1/2 [Área cuadrado BPQA]

Por tanto:

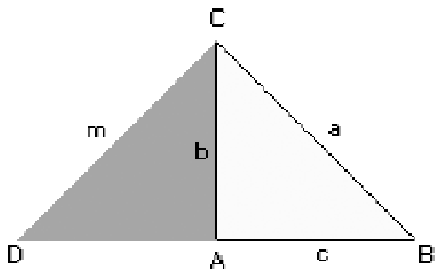
[Área triángulo MBA] = [Área triángulo BPC] = = 1/2 [Área cuadrado BPQA] = 1/2 [Área rectángulo A'MBA'']
Es decir el cuadrado BPQA y el rectángulo A'MBA'' son equivalentes.
Análogamente demuestra que el rectángulo NA'A''C es equivalente al cuadrado CAED.

Euclides I, 48

"Si el cuadrado construido sobre uno de los lados de un triángulo es equivalente a los cuadrados, juntos, de los otros dos lados, el ángulo formado por esos dos lados es recto".
Sea el triángulo ABC y
supongamos $a^2 = b^2 + c^2$

Tracemos por A una perpendicular a AC y sobre ella tomamos AD igual a AB.
Unamos D con C.
Como DA = AB = c también lo serán sus cuadrados, es decir:

$$DA^2 = AB^2 = c^2$$



Si sumamos b^2, tendremos:

$$DA^2 + b^2 = c^2 + b^2$$

Pero: $m^2 = DA^2 + b^2$

pues DAC es recto; por p 47

y $a^2 = b^2 + c^2$ por hipótesis.

Luego el cuadrado sobre el lado DC (es decir m^2) es equivalente al cuadrado sobre BC (es decir a^2),
por lo que el lado DC será igual al lado BC.
Puesto que DA es igual a AB y AC es común DA y AC serán iguales a BA y AC y la base DC igual a BC por lo que el ángulo DAC será igual a BAC, y como DAC es recto, el BAC también es recto.

Fuente: http://www.arrakis.es/~mcj/teorema.htm

3.2. ¿Pudieron leer y comprender las demostraciones? Registren en una lista las propiedades utilizadas en cada una de ellas.

3.3. En la primera demostración que realiza Euclides (proposición 47) prueba que "el cuadrado BPQA y el rectángulo A'MBA'' tienen áreas equivalentes". Dice también que "el rectángulo NA'A'' C es equivalente el cuadrado CAED" mediante un procedimiento análogo". Les proponemos realizar la demostración de esta última afirmación.

3.4. Si tuvieron dificultades para comprender las demostraciones, ¿cuáles fueron?, ¿a qué se deben? ¿Cómo puedes mejorar estas dificultades?

Actividad 4: Formas de trabajar en matemática.

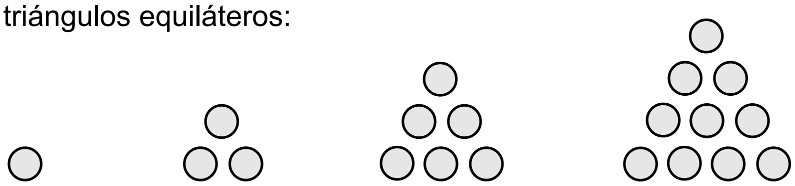
En este capítulo han encontrado que, en ocasiones, el análisis de regularidades da lugar a la elaboración de afirmaciones que llamamos conjeturas.

En el problema sobre los números cuadrados han podido establecer, mediante razonamientos inductivos, una generalización que les ha permitido formular una conjetura. Es decir, tienen un enunciado sobre el que sospechan que puede ser cierto, pero sobre el que no pueden asegurar que sea verdadero.

Una de las formas de probar la conjetura, que se utiliza en casos como el del problema de los números cuadrados, es el "principio de inducción completa". Se puede usar esa forma pues ésta vale para proposiciones que se refieren a una variable que sólo admite valores enteros positivos.

4.1.a. Para conocer esta forma de razonamiento denominada *Inducción Matemática* o *Inducción Completa*[1], pueden mirar cómo se prueba la conjetura sobre los números cuadrados por este método, en el Anexo de este capítulo.

4.1.b. Aquí les representamos los cuatro primeros "números triangulares", llamados así porque con la cantidad de piedras que los integran se pueden formar triángulos equiláteros:



$t_1 = 1$ $t_2 = 3$ $t_3 = 6$ $t_4 = 10$

* Cuál es el siguiente?
* Busquen algún patrón en la cantidad de piedras que hay que agregar cada vez. ¿Cuál será el octavo número triangular?
* Escriban una conjetura sobre cómo obtener números triangulares.

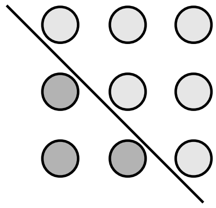
4.2. También hemos visto que, para que una afirmación pase a ser una propiedad válida, es necesario deducirla de otras, encadenando propiedades que lleven desde la o las ya conocidas y seguras hasta la que se quieren asegurar.

4.2.a. Las distribuciones geométricas de los números permiten aparecer como más evidentes algunas propiedades de los números.

[1] Fuente: Álgebra. Charles H Lehmann. Editorial Limusa. Grupo Noriega editores. México. Cap.7, pp.153-155).

Observen la recta que aparece en el tercer número cuadrado (c3) y vean que se puede pensar como la suma de dos números triangulares consecutivos, el segundo número triangular (t2) y el tercer número triangular (t3):

c3 = t2 + t3.



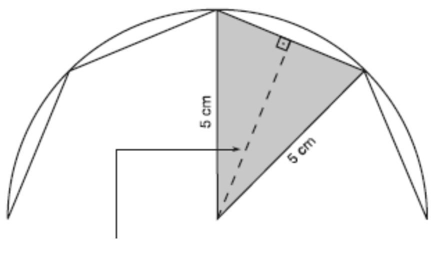
* Exploren con otros números cuadrados y expresen algebraicamente la conjetura que formulen para un número cuadrado cualquiera n.
* La sucesión 1, 2, 3, 4, etc. es una sucesión aritmética. A partir de la expresión anterior, pueden hallar la suma de los primeros n términos.
* En las sucesiones anteriores, en algunos casos podían obtener un valor de forma recurrente, si conocían el anterior. Expliquen cómo lo calculaban en cada caso.
* Buscando regularidades en las figuras, trataron de llegar a una fórmula que permitiera conocer cualquier término sin tener que hallar todos los anteriores. Expliquen en cada caso cómo lo pensaron.
* Demuestren la siguiente propiedad: “Si se suma el enésimo número triangular más el anterior, se obtiene el enésimo número cuadrado”.
* Existe la propiedad que dice: “Cualquier número triangular multiplicado por 8 da un número cuadrado”. Verifíquenla con algunos ejemplos. ¿Pueden probarlo?

4.3. A su vez, cuando una propiedad se demuestra puede ser utilizada para resolver diferentes cuestiones. Traten de resolver las siguientes a partir de la propiedad de Pitágoras.

4.3.a. Representen en una recta numérica el número 5, tomando como unidad aproximadamente 2 cm, y expliciten el procedimiento realizado paso por paso.

4.3.b. Utilicen el teorema de Pitágoras para ubicar 2 en una recta numérica, usando sólo una regla no graduada y un compás

4.3.c. Calculen el perímetro de un octógono regular, inscripto en una circunferencia de 5 cm de radio, y determinen su área.



Altura del triángulo= Apotema del octógono

Actividad 5: Miradas sobre el mundo de la matemática

Para ampliar la idea de teorema, pueden leer en la antología “Metodología de la Matemática. El método axiomático.” de César Trejo.

Capítulo 3: El trabajo de los matemáticos y las demostraciones.

Podemos decir que las matemáticas están ahora mismo inmersas en un proceso febril de desarrollo. Como consecuencia de ello aparecen esporádicamente resultados y avances espectaculares. Pero todo esto no sería posible sin el trabajo en muchos casos anónimo de todos los matemáticos que contribuyen a su avance.

¿En que consiste el trabajo de un matemático? ¿Cómo demuestra?

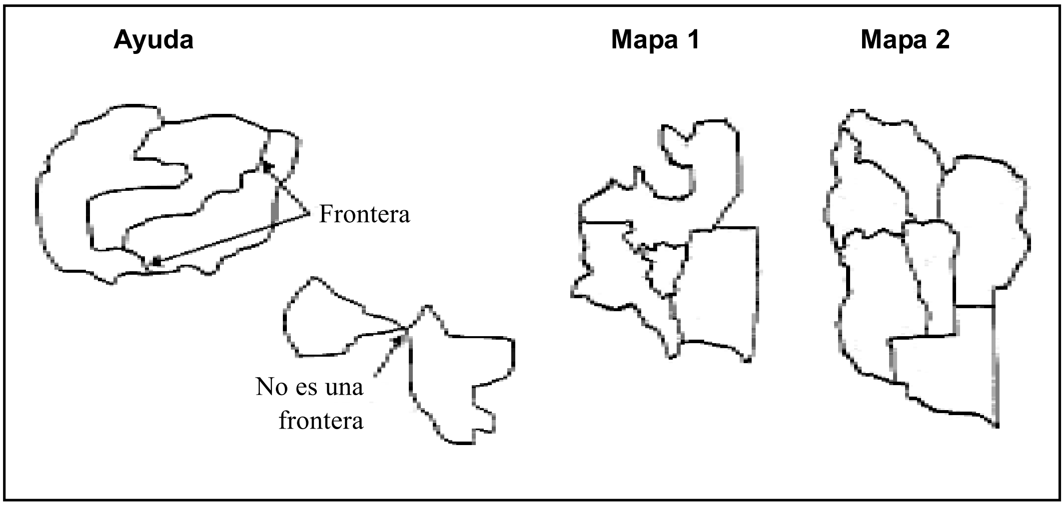
Una primera respuesta consiste en asociar su trabajo a un largo camino desde la formulación de conjeturas hasta encontrar demostraciones, camino en el que puede encontrarse con paradojas, y en el que, a veces cuando se cree arribar a un resultado seguro se tiene que volver a empezar. En este capítulo consideraremos el camino de dos propiedades que requirieron del esfuerzo de muchos y de mucho tiempo para adquirir el status de tal. También veremos que, aunque todas las demostraciones siguen las reglas de la lógica, hay más de una manera de usarlas para demostrar.

Actividad 1: Cuando las demostraciones son esquivas

Los mapas son la representación de un lugar y seguramente, en la clase de Geografía has tenido que colorear alguno. Los mapas están divididos en regiones más pequeñas, son los países (o provincias). Dos países (o provincias) son vecinos si comparten una frontera, y no sólo un punto, es decir que se pueda pasar de una región a otra cruzando una línea.

A continuación se presentan mapas a modo de ayuda, para identificar la frontera. Intenta colorear los mapas usando las siguientes reglas:

* Usar el menor número posible de colores
* Dos países (o provincias) vecinos que tienen una frontera común (y no sólo un punto), no deberán quedar coloreados del mismo color.



1.1.a. ¿Cuántos colores utilizaste para colorear los mapas? ¿Podrías haberlo hecho con menor cantidad de colores? Compara tus soluciones con otro grupo.

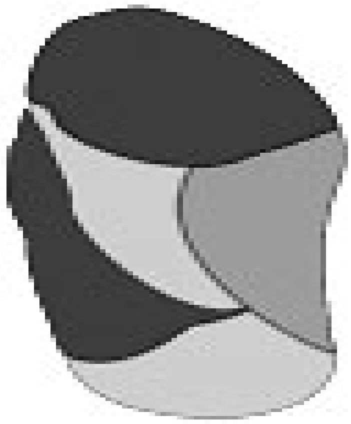


Figura 1

1.1.b. Esta es la solución de un alumno que utilizó solamente tres colores. ¿Cumple con las condiciones pedidas? *(Figura 1)*

1.1.c. Alguien de la región central-nordeste afirma que bastan sólo tres colores para colorear la región. Comprueba si esta afirmación es verdad. *(Figura 2)*

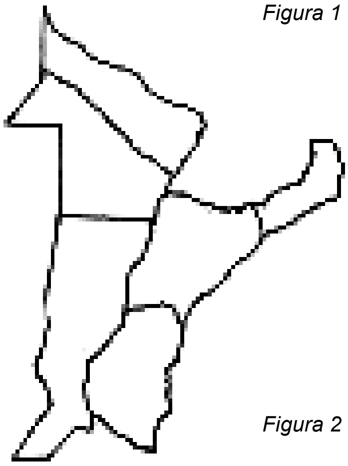


Figura 2

1.1.d. Te proponemos que compruebes otras posibilidades con otros mapas (puedes subdividirlos en varias regiones). Luego enuncia alguna afirmación sobre la cantidad de colores necesarios para colorearlos.

1.1.f. En grupo discutan sobre las afirmaciones enunciadas. Luego contesten: ¿Qué cantidad de colores serán necesarios para colorear cualquier mapa con “n” regiones?

1.2. La actividad anterior trata de un problema matemático muy antiguo. Es el llamado “problema de los cuatro colores”. Durante muchos años, matemáticos y no matemáticos, expertos y novatos intentaron resolver el problema de los cuatro colores, es decir, demostrar que bastan sólo cuatro colores para colorear un mapa cualquiera con las condiciones expresadas en la actividad. El problema se hizo tan famoso en el medio matemático, que en 1878 el matemático inglés Arthur Cayley lo propuso oficialmente a la Sociedad Matemática de Londres (London Mathematical Society) como un problema a resolver.

1.2.a. Para conocer más sobre este problema, les proponemos que lean el siguiente texto que apareció en la contratapa de un conocido diario, aunque no es común un teorema en un diario. Pero el Dr. Adrián Paenza es un gran divulgador de las matemáticas y la lectura ampliará la comprensión de la cuestión.

Problema de los cuatro colores
Adrián Paenza

Yo sé que usted nunca tuvo que colorear un mapa desde que dejó el colegio primario. Y ni siquiera estoy tan seguro de que hubiera sido el caso. De hecho, no creo que los chicos de hoy tengan que colorear mapas "a mano", aunque uno nunca sabe.

El hecho es que hay un teorema que tuvo a los matemáticos muchos años sin encontrar la solución. Y se trató de lo siguiente: supongamos que uno tiene un mapa. Sí, un mapa. Un mapa cualquiera, que ni siquiera tiene que corresponder con la realidad de una región.

La pregunta es, "¿cuántos colores hacen falta para colorearlo?". Sí: ya sé. Uno tiene entre sus "pinturitas" o en la computadora, muchísimos colores. ¿Por qué preguntarse cuántos colores distintos son necesarios, si uno puede usar muchos más de los que necesita? ¿Para qué podría servir calcular una "cota" máxima? Y en todo caso, ¿qué tiene que ver el número cuatro?

La Conjetura de los Cuatro Colores surgió de la siguiente manera: Francis Guthrie era un estudiante de una universidad en Londres. Uno de sus profesores era Augustus De Morgan.

Francis le mostró a su hermano Frederick (que también había sido estudiante de De Morgan) una conjetura que tenía con respecto a la coloración de unos mapas y, como no podía resolver el problema, le pidió a su hermano que consultara al renombrado profesor.

De Morgan, quien tampoco pudo encontrar la solución, le escribió a Sir William Rowan Hamilton, en Dublín, el mismo día que le hicieron la pregunta, el 23 de octubre de 1852:

"Un estudiante me pidió que le diera un argumento sobre un hecho que yo ni siquiera sabía que era un hecho, ni lo sé aún ahora. El estudiante dice que si uno toma una figura (plana) cualquiera y la divide en compartimentos pintados con diferentes colores, de manera tal que dos adyacentes no tengan un color en común, entonces él sostiene que cuatro colores son suficientes".

Hamilton le contestó el 26 de octubre de 1852 y le dijo que no estaba en condiciones de resolver el problema.

De Morgan continuó pidiendo asistencia a la comunidad matemática, pero nadie parecía encontrar una respuesta.

Cayley, por ejemplo, uno de los matemáticos más famosos de la época, enterado de la situación, planteó el problema a la Sociedad de Matemática de Londres, el 13 de junio de 1878, y preguntó si alguien había resuelto la Conjetura de los Cuatro Colores.

El 17 de julio de 1879, Alfred Bray Kempe anunció en la revista *Nature* que tenía una demostración de la Conjetura. Kempe era un abogado que trabajaba en Londres y que había estudiado matemáticas con Cayley en Cambridge. Cayley le sugirió a Kempe que enviara a publicar su Teorema al *American Journal of Mathematics* en donde fue publicado en 1879. A partir de ese momento, Kempe ganó un prestigio inusitado y su demostración fue premiada cuando lo nombraron miembro de la Sociedad Real (Fellow of the Royal Society) en donde actuó como tesorero por muchísimos años. Es más: lo nombraron "Caballero de la Reina" en 1912.

Kempe publicó dos pruebas más del ahora Teorema de los Cuatro Colores, con versiones que mejoraban las demostraciones anteriores. Sin embargo, Percy John Heawood, en 1890 encontró errores en las demostraciones de Kempe. Si bien mostró por qué y en dónde se había equivocado Kempe, Heawood probó que con cinco colores alcanzaba para colorear cualquier mapa. Kempe aceptó el error ante la sociedad matemática londinense y se declaró incompetente para resolver el error en la demostración, en su demostración.

Todavía en 1896, el famoso Charles De la Vallée Poussin encontró también el error en la demostración de Kempe, aparentemente ignorando que Heawood ya lo había encontrado antes. Heawood dedicó 60 años de su vida a colorar mapas y a encontrar potenciales simplificaciones del problema (la más conocida dice que si el número de aristas alrededor de cada región es divisible por 3, entonces el mapa se puede colorear con cuatro colores), pero no pudo llegar a la prueba final.

El problema seguía sin solución. Muchos científicos en el mundo le dedicaron buena parte de sus vidas a probar la Conjetura sin suerte. Y obviamente, hubo mucha gente interesada en probar lo contrario. Es decir: encontrar un mapa que no se pudiera colorear con cuatro colores.

Recién en 1976 (sí, 1976, hace sólo 30 años) la Conjetura tuvo solución y pasó a ser, nuevamente, el Teorema de los Cuatro Colores. La demostración corrió por cuenta de Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quienes con el advenimiento de las computadoras, lograron probar el resultado. Ambos trabajaban en la Universidad de Illinois en Urbana, en la localidad de Champaign.

Usaron más de 1200 horas de las computadoras más rápidas que había en la época hasta poder demostrar la conjetura. Tanto es así, que el Teorema de los Cuatro colores constituye el primer caso en la historia de la matemática, en donde la computadora ha tenido una incidencia tan fuerte, como que permitió que un resultado que venía evadiendo a los matemáticos durante más de un siglo fuera resuelto.

Naturalmente, la demostración trajo gran desazón en el mundo de la matemática, no porque se esperara que el resultado fuera falso (en realidad, todo lo contrario) sino porque era el primer caso en donde la máquina (en algún sentido) estaba superando al hombre. ¿Cómo no poder encontrar una demostración mejor? ¿Cómo no poder encontrar una demostración que no dependiera de un agente externo?

Es que los cálculos más optimistas establecen que para poder comprobar lo que hicieron Appel y Haken “a mano”, por una persona que le dedicara 60 horas por semana, necesitaría ¡cien mil años! para cumplir con la misma tarea. Los detalles de la demostración fueron publicados en dos *papers* que aparecieron en 1977. Muchos matemáticos, aún hoy, no aceptan como válida esa demostración. En todo caso, aceptan decir que hay indicios muy fuertes para suponer que el Teorema es cierto, pero hasta que no haya una demostración que no requiera el uso de las computadoras, varios integrantes de la comunidad no dan por cerrado el caso.

Lo notable es que los seres humanos, dos en este caso, lograron reducir el problema a casos particulares. Muchos casos, que quizás hubieran llevado varias vidas para comprobar. Las computadoras hicieron el resto, pero lo que quiero enfatizar acá es que sin el hombre, las computadoras no hubieran sabido qué hacer, ni para qué.

Bibliografía http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-75396-2006-10-31.html

1.2.b. ¿Cómo y a cargo de quien surgió la conjetura?

1.2.c. ¿Cuál fue el circuito que siguió la misma, quiénes participaron en ella?

1.2.d. ¿Dónde y a cargo de quién estuvo la primera demostración?

1.2.e. Como te habrás dado cuenta, probar una conjetura tiene muchas idas y vueltas.

Si tuvieras que contar a un amigo este proceso, ¿cómo lo harías? Elabora una presentación de no más de una hoja.

1.2.f. ¿Cuál fue la contribución de la computadora en la resolución del problema?

Actividad 2: Una condición necesaria y suficiente

Hemos visto que un parte esencial del trabajo de un matemático es demostrar implicaciones. En efecto, si queremos demostrar una proposición p; podemos usar como hipótesis todos los teoremas y axiomas conocidos y a partir de ellos, deducir p. Si llamamos P a la conjunción de todas estas afirmaciones, lo que queremos probar es que $P \rightarrow p$.

Al trabajar con demostraciones, algunas expresiones que se utilizan frecuentemente tienen un significado preciso. Es el caso de la expresión "condición necesaria y suficiente".

Para ver qué significa veamos un ejemplo de los capítulos anteriores.

Si un triángulo es rectángulo, la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Este teorema afirma que si un triángulo es rectángulo, *necesariamente* se infiere que la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. Por lo tanto, la existencia de un ángulo recto es una *condición necesaria* para que se cumpla que la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Pero el *recíproco* de este teorema también es verdadero, es decir:

Si la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, el triángulo es rectángulo.

Este teorema afirma que la existencia de una igualdad entre la suma de los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa es *suficiente* para que el triángulo sea rectángulo. En consecuencia, decimos que la existencia de la igualdad mencionada es una *condición suficiente* para que el triángulo sea rectángulo.

Entonces podemos combinar ambos teoremas en el siguiente enunciado único: *Una condición necesaria y suficiente* para que un triángulo sea rectángulo es que la suma de los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa sean iguales.

Una frase equivalente que con una frecuencia sustituye a la anterior es *"si y sólo sí"*. Así, por ejemplo, el teorema anterior puede enunciarse así: Un triángulo es rectángulo *si y sólo si* la suma de los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa son iguales.

Condición necesaria y suficiente

En general, si la hipótesis A de un teorema implica la validez de una conclusión B, entonces B es una *condición necesaria* para A. Si, además, recíprocamente, B implica la validez de A, entonces B es una *condición suficiente* para A.

Definición

Consideremos ahora el concepto de condición necesaria y suficiente en relación con el significado del término *definición*. Dar la *definición de un objeto* significa describirlo de tal modo que se le pueda identificar con toda precisión entre todos los objetos de su clase. Analizando cuidadosamente esta afirmación se concluye que: una definición expresa una condición necesaria y suficiente para la existencia del objeto definido.

2.1. Una forma de demostrar es partir de la verdad de p y tratar de establecer la verdad de q. Prueben con este método que "para todo número, si un número es par, entonces su cuadrado es también par", es decir "$\forall$ x : x es par; $\Rightarrow$ x^2 es par"

2.2. Otra forma de demostrar consiste en partir de la falsedad de q y determinar la falsedad de p. Prueben con este método que "si el cuadrado de un número es par, entonces el número es par", es decir "x : x^2 es par $\Rightarrow$ x es par"

2.3. Todo teorema es una afirmación de que si cierta cosa es verdadera; entonces otra cosa también verdadera. Por ejemplo "Si dos rectas que se cortan forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos"

La parte *si* de un teorema se llama hipótesis, enuncia lo que se *supone*.

La parte *entonces* se llama la *conclusión*, enuncia lo que hay que *demostrar*.

(Geometría moderna. Morse-Downs)

Identifica la hipótesis y la conclusión de cada uno de los siguientes enunciados:

- Si a = b y b = c ; entonces a = c.
- Si a = b , entonces a + c = b + c
- Si dos ángulos son complementarios, entonces cada uno es agudo.

2.4. Escriban cada uno de los siguientes enunciados en la forma si … entonces:

- Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.
- La intersección de dos planos es una recta.

2.5. Si ABC es un triángulo con AB = AC.

2.5.a. Enuncia una conclusión con estos datos. Justifica.

2.5.b. Con los datos presentados, ¿es posible que el siguiente enunciado sea válido?: "Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los dos ángulos opuestos son congruentes". Si la respuesta es afirmativa, demuéstralo. ¿Estamos en presencia de un teorema? Justifica.

2.5.c. Reúnanse en grupos y comparen sus resoluciones. Acuerden una resolución para exponerla al resto de la clase. Escriban los argumentos utilizados.

Actividad 3: Falsedad y contraejemplo

Una generalización es un enunciado que se cumple siempre en un determinado dominio de validez. Por ejemplo, si decimos que "todo número entero que termina en 0 o cifra par es divisible por 2" y lo aceptamos como verdadero, no encontraremos ningún ejemplo de número entero que termina en 0 o cifra par que no sea divisible por 2.

Para demostrar que una generalización es falsa, suele citarse un contraejemplo, es decir un ejemplo en el que la generalización enunciada no se cumpla. El contraejemplo pone en evidencia que lo enunciado no se cumple "siempre", condición la falsedad de una generalización.

Se presenta la siguiente generalización a modo de ejemplo: "Si un cuadrilátero tiene cuatro lados congruentes, tiene cuatro ángulos congruentes".

Esta afirmación no necesariamente es cierta, para demostrar que esta generalización es falsa se presenta la siguiente figura de análisis:

La siguiente figura tiene todos su lados congruentes (es un rombo), pero los ángulos no son congruentes.

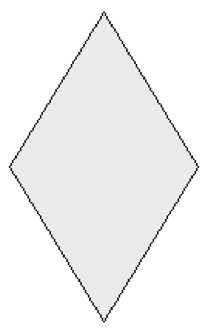
Es un contrajemplo y alcanza para asegurar que la generalización es falsa.

3.1. Para los enunciados siguientes, busquen un contraejemplo para demostrar que son falsos.

*Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos, tiene un par de lados congruentes.

*Si un triángulo tiene un ángulo recto, tiene dos lados congruentes.

3.2. Elijan tres enunciados cuya falsedad puedan probar con un contraejemplo. Intercambien los encontrados con sus compañeros.



Actividad 4: Reducción al absurdo

La demostración por el absurdo es muy empleada en matemática. Un ejemplo es la que determina que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional.[2]

Un *número racional* es una fracción a/b , donde a y b son enteros; podemos suponer que a y b no tienen ningún factor común, ya que si lo tuvieran podríamos sacarlo. El decir que "$\sqrt{2}$ es irracional" es meramente otra manera de decir que 2 no puede expresarse en la forma $(a/b)^2$ y esto es lo mismo que decir que la ecuación $a^2 = 2b^2$ no puede satisfacerse para valores enteros de a y b que no tienen factor común.
Supongamos que $a^2 = 2b^2$ es cierta, siendo a y b enteros sin ningún factor común. Resulta que a^2 es par (ya que $2b^2$ es divisible por 2) y por consiguiente que a es par (ya que el cuadrado de un número impar es un número impar).
Si a es par, entonces: a = 2 c para algún valor entero de c y por lo tanto

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2 \text{ ó } b^2 = c^2$$

De aquí que b^2 es par y por lo tanto (por la misma razón de antes) b es par.
Es decir a y b son pares y por lo tanto tienen el factor común 2.
Esto contradice nuestra hipótesis y por consiguiente es falsa.

4.1 Completen el siguiente cuadro con los pasos que se van desarrollando de la demostración anterior y contesta las cuestiones que se van enunciando:

Expresión	Procedimiento aplicado	Cuestiones
$\frac{a}{b}$		¿Hay alguna condición para a y b?
$\left(\frac{a}{b}\right)^2$		¿Qué clase de números son a^2 y b^2?
$a^2 = 2b^2$		¿Qué tipo de número es la expresión $2b^2$? ¿Y a^2?
$a = 2c$ con "c" є Z		¿Qué tipo de número es a?
$b^2 = 2c^2$		¿Qué tipo de números son b^2 y c^2? ¿A qué conclusión llegas?

4.2. Vemos que el procedimiento para probar que p q es verdadera es suponer que q es falsa. Si se llega a contradecir algún resultado conocido, diremos que este absurdo provino de suponer que p q era falsa, por lo que debe ser

[2] A continuación se transcribe tal demostración, extraído de "El Mundo de las Matemáticas". Nº 5. *Sigma*. James Newman. Cap. 8. pág. 421.

verdadero. Al negar la implicación dada, es posible suponer la verdad de p - q y examinar las consecuencias de esta negación.

Prueben por el absurdo que “si x es impar, entonces x^2 es impar”.

Actividad 5: Lo que se cuenta sobre las matemáticas y el trabajo de los matemáticos

En el año 2006, se resolvió un problema planteado hace 100 años por un célebre matemático francés, Jules Henri Poincaré. La conjetura busca explicar la geometría del espacio tridimensional, planteando el estudio de las propiedades geométricas de los objetos que no se modifican al ser estirados, doblados o comprimidos. Se trata de un planteo tan difícil que ni el mismo Poincaré pudo probarlo. Y, aunque describirlo es una misión sólo para iniciados, diferentes publicaciones dieron cuenta de la obtención de este resultado.

5.1. Lean cada uno de los artículos.

La conjetura de Poincaré sobre la propiedad geométrica de los objetos
Habrían resuelto un enigma matemático de cien años

Un científico ruso publicó la solución por Internet y hasta ahora no fue refutado. Tendría derecho a exigir el premio de un millón de dólares que ofrecen en EE.UU.

Un investigador ruso que trabaja prácticamente aislado podría haber solucionado uno de los problemas matemáticos más antiguos y complejos: la llamada Conjetura de Poincaré. A diferencia de un teorema —algo que el científico demuestra—, la conjetura es el planteo de un problema que se cree cierto pero que no se ha podido confirmar ni refutar.

Planteada hace 100 años por un célebre matemático francés, Jules Henri Poincaré, con el tiempo, la Conjetura llegó a convertirse en el problema abierto más notable de la topología geométrica, con destacables implicaciones para la física, similar en importancia al Ultimo Teorema de Fermat —resuelto en 1994 después de 350 años—, y a la Hipótesis de Riemann, aún sin resolver.

El interés en resolverlo se avivó después de que, en mayo de 2000, el Clay Mathematics Institute, de Cambridge, Massachusetts, anunció oficialmente la apertura del concurso Millennium Prize Problem que premia con un millón de dólares a cada resolución de los siete problemas matemáticos más importantes del milenio —uno de ellos es la Conjetura de Poincaré— que hasta hoy no han sido resueltos.

Una de las reglas del premio especifica que la solución propuesta deberá estar expuesta previamente, por un período de al menos dos años, al escrutinio de la comunidad matemática internacional, luego de publicar el trabajo en una revista científica.

Lo cierto es que hay tal cantidad de producción sobre el tema que la American Mathematical Society dedicó un código de clasificación de temas (57M40) para los artículos que pretenden demostrar o refutar la Conjetura de Poincaré. Los académicos también hablan de una cierta enfermedad que esto ha generado —que llaman con humor “Poincaritis”—, por la cual no pueden dejar de probar la Conjetura ininterrumpidamente durante al menos 20 años. Prisioneros de esta pasión enfermiza han

sido científicos como R. H. Bing, John Stallings, John Hempel, y C. D. Papakyriakopoulos.
Así las cosas, si la comunidad científica internacional mira ahora hacia Rusia es porque desde noviembre de 2002 parecen haberse sucedido las evidencias de que Grigori "Gisha" Perelman encontró la solución del problema que, desde hace un siglo, busca encontrar una fórmula que explique la geometría del espacio tridimensional.
Perelman es un investigador del Instituto Steklov de Matemáticas de la Academia Rusa, en San Petersburgo, reconocido como un sobresaliente especialista en geometría diferencial. Además, el rigor y la solidez de su trabajo gozan de prestigio en la comunidad matemática. Pasó sus años de formación en Estados Unidos y luego trabajó 8 años en Rusia sin difundir ninguno de sus trabajos en publicaciones científicas.
Nadie sabe si Perelman se propone ganar el millón de dólares. Aunque surgió el año pasado de un relativo silencio y ofreció disertaciones a matemáticos expertos en varias universidades en Estados Unidos, todavía no cumplió con los requisitos de enviar su trabajo a las publicaciones científicas: lo difundió en Internet.
Sus desarrollos están siendo estudiados por algunos de los más importantes matemáticos del mundo en busca de fallas. Según acaba de afirmar James Carlson, presidente del Instituto Clay, hasta ahora ha pasado con éxito las revisiones.
Según explicó el prestigioso científico argentino Manuel Sadovsky a Clarín, las conjeturas implican teorías cada vez más complicadas. "Es un mérito muy grande tener un problema propio. Los investigadores de mayor nivel impulsan estos elencos de problemas porque en el camino de su esquiva resolución dan lugar a importantes avances científicos".
En este caso, la respuesta al interrogante de Poincaré podría ayudar a comprender mejor la fórmula del universo.

Fuente : http://www.clarin.com/diario/2004/01/10/s-04101.htm

Para la Revista *Science*, el principal logro del 2006 fue la resolución de la conjetura de Poincaré

La solución planteada por los *matemáticos chinos* ocupó el lugar más destacado en el Top Ten de los acontecimientos científicos del año. El segundo puesto fue para la confirmación de que los Neandertales se separaron del hombre moderno hace 450 mil años. Entre tanto, el coreano *Woo Suk Hwang* protagonizó el "fraude científico" de 2006.
La resolución de la conjetura de Poincaré y la polémica suscitada en la comunidad científica hasta que finalmente se alcanzó un consenso sobre este problema matemático es el principal logro en el ámbito científico en el año 2006, según la lista elaborada por la revista *Science*.
La *conjetura de Poincaré*, que sostiene que la esfera tridimensional es la única variedad compacta tridimensional en la que todo lazo o círculo cerrado se puede deformar en un punto, fue resuelta en junio de este año por los matemáticos chinos Zhu Xiping y Cao Huaidong. Los expertos se basaron en los trabajos preliminares del ruso Grigori Perelman, quien, tras siete años de trabajo, publicó una *explicación del Teorema en Internet*, dudosa para muchos matemáticos.

Aparte del consenso alcanzado en torno al problema planteado en 1904 por el matemático Henri Poincaré, considerado el padre de la Topología, *Science* destaca otros nueve trabajos, entre los que predominaron los relacionados con la biomedicina y los grandes avances conseguidos en cuestiones de investigación celular y proteínica.
El segundo puesto del listado lo ocupa la confirmación de que los Neandertales se separaron del hombre moderno hace 450.000 años y el tercer lugar es para los trabajos medioambientales que denuncian que las dos grandes placas que cubren la Antártida y Groenlandia están perdiendo hielo a un ritmo que se acelera.
En el lado opuesto, entre los acontecimientos más criticables del año, la revista señala "el fraude científico" y los perjuicios causados por "la falta de honestidad" de investigadores como el coreano Woo Suk Hwang, cuyos *supuestos avances* sobre células madre embrionarias finalmente fueron desmentidos.

Fuente: http://www.clarin.com/diario/2006/12/25/um/m-01333717.htm

ES RUSO Y RECHAZA EL "NOBEL DE MATEMATICA"
El hombre más inteligente del mundo no quiere premios

El científico ruso Grigori Perelman, reconocido como el hombre más inteligente del planeta por haber resuelto un intríngulis matemático conocido como la "Conjetura de Poincaré", está esquivando desde hace días la posibilidad de recibir la medalla Fields, que se entregará el 22 de agosto en Madrid. Sus compañeros de trabajo del Instituto Matemático Steklov, de San Petersburgo, comentaron que, para él, "el dinero y los premios no son lo más importante".
En 2002, este singular científico resolvió la hipótesis matemática de Poincaré, que ha intrigado a la humanidad durante el último siglo. Hijo de otro prestigioso matemático, Yakov Perelman, autor del famoso manual "Amusing Phisics", heredó de él algunas excentricidades.
Grigori decidió un día abandonar su puesto de profesor y le dedicó ocho años a la resolución del problema matemático. "Es un hombre ensimismado. A veces da la impresión de estar un poco chiflado. Pero eso no es un defecto sino una cualidad de todos los buenos matemáticos", lo describió Yevgueni Damaskinski, colega suyo en el instituto.
La medalla a la que accedería el ruso es considerada el "Premio Nobel" de la Matemática, un premio que se entrega cada cuatro años en el Congreso Internacional de Matemáticos.
Si el científico no asiste a la reunión, no será la primera vez que rechace un reconocimiento. Ya lo había hecho en 2000, cuando no aceptó el millón de dólares que ofreció el Instituto Clay de Massachusetts, en los Estados Unidos, a quien resolviera uno de los siete enigmas matemáticos del milenio.
Aquella vez, Perelman, a quien llaman Grisha (diminutivo de Grigori), fue lapidario en las explicaciones: "No creo que ser el más inteligente del planeta, a juicio de un instituto privado estadounidense, sea un gran honor".
Inteligente y con convicciones, es un misterio más entre otros tantos enigmas aritméticos.

Fuente: http://www.clarin.com/diario/2006/08/20/sociedad/s-05101.htm

5.2.a. En los tres artículos publicados en el diario Clarín se menciona la conjetura Poincaré. ¿Qué sostiene la conjetura?

5.2.b. Hemos planteado que conjetura es un juicio o una idea que se forma a partir de indicios o de datos incompletos o no comprobados y que no se ha demostrado fehacientemente; y un teorema, es una proposición demostrable a través de la lógica, mediante reglas de deducción aceptadas convencionalmente. Tras la resolución de Perelman; y en base a los datos que contienen las tres noticias, la conjetura de Poincaré, ¿Ya es un teorema? Elabora argumentos de tu posición.

5.2.c. Enuncia tres acontecimientos relacionados con el trabajo de Perelman.

Actividad 6: Lo que cuenta un matemático sobre las matemáticas y su trabajo

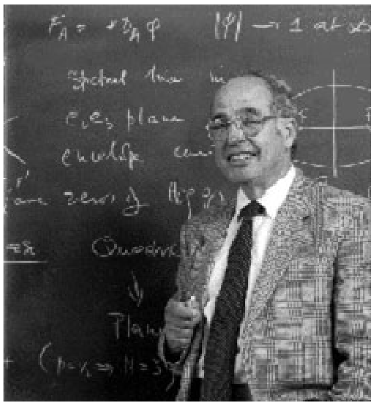
6.1. Lean la entrevista a Sir Michail Atiyah.

"Todo el mundo admira el trabajo de Perelman en la famosa conjetura de Poincaré"

"Las matemáticas suelen ser un ejercicio solitario. Uno se sienta y piensa intensamente durante una hora". Esta cita podría ser de alguien a quien a no le gustan las matemáticas... pero nada más lejos de la realidad. El citado es Sir Michael Atiyah (22 de Abril de 1929, Londres), uno de los mayores matemáticos de todos los tiempos. Atiyah ha realizado contribuciones fundamentales en muchas áreas de las matemáticas, en especial en topología, geometría y análisis. Ya sus primeros trabajos –la 'teoría K' topológica y el 'teorema del índice'– le valieron la medalla Fields en 1966. Son desarrollos que más tarde se revelarían esenciales para algunas áreas de la física, como la física de partículas y la cosmología. Atiyah ha recibido numerosos premios y reconocimientos, incluyendo el nombramiento como 'caballero' en 1983 y la Orden del Mérito en 1992.

"La gente cree que las matemáticas son un lenguaje ya del todo escrito". ¿Cómo explicaría al público en general que las matemáticas están evolucionando constantemente? ¿Qué es un descubrimiento en matemáticas?

El público tiene buenos motivos para creer que el desarrollo de las matemáticas se frenó hace varios siglos, al nivel de la enseñanza secundaria. En primer lugar las matemáticas son muy antiguas, y las matemáticas correctas no cambian con el tiempo. La geometría euclidiana aún es correcta, como lo son el cálculo de Newton y Leibniz, mientras que la física de Aristóteles sólo interesa a los historiadores y los filósofos. Esto significa que en el colegio los estudiantes aún deben aprender (parte de) Euclides y de Newton, pero no la física aristotélica.
Y a menos que cursen estudios de mayor nivel en ciencias matemáticas, los chicos no ven desarrollos más recientes. Pero las matemáticas siguen evolucionando, a menudo en respuesta a las necesidades de otras disciplinas. Por ejemplo, la modificación de la gravedad newtoniana por parte de Einstein necesitó otras formas de geometría, e hizo ir más allá de Euclides.



Estos nuevos desarrollos en matemáticas, fruto de los sucesores de Euclides y de Newton, van calando gradualmente, y acabarán cambiando el currículo escolar de sus hijos y nietos.

Su trabajo ha sido muy importante para ciertas áreas de la física, como la teoría de cuerdas. ¿Está usted interesado también por los aspectos menos matemáticos, más 'físicos', de esta teoría? ¿Cree que es útil como 'teoría del todo'?

Estoy interesado tanto en el contenido matemático de la teoría de cuerdas como en su interpretación física. Pero aún no está claro cuánto de esta teoría explicará en última instancia el mundo real y cuánto será absorbido por las matemáticas.

¿Por qué los matemáticos se encuentran tan cómodos con la noción de infinito mientras que los físicos, si entiendo correctamente, tienden a pensar que una teoría no funciona bien cuando aparecen en ella muchos infinitos?

La noción 'del infinito' es una de las cuestiones más antiguas y difíciles de las matemáticas. Uno de los mayores éxitos en la historia de las matemáticas ha sido entender cómo interpretar y usar esta noción. El cálculo depende de entender lo infinitamente pequeño. Y a un nivel más elemental, el hecho de contar 1, 2, 3... puede seguir eternamente, ¡o hasta que uno se cansa! Esto implica un proceso infinito. Tanto los matemáticos como los físicos usan el infinito de diversas maneras. La única diferencia es que nosotros somos más cuidadosos. Ellos son más valientes (¡o temerarios!).

Tras el trabajo de Grigori Perelman, ¿puede considerarse demostrada la conjetura de Poincaré?

Todo el mundo admira el trabajo de Perelman sobre la famosa conjetura de Poincaré. Pero en las cuestiones matemáticas de esta complejidad el veredicto final está en suspenso hasta que la prueba completa no haya sido escrita, revisada por la comunidad matemática y aceptada. Aún no se ha llegado a esa fase.

Cuando coincide con otros matemáticos relevantes, ¿hablan de matemáticas? ¿Suele discutir con otros 'maestros' cómo ha evolucionado las matemáticas en las últimas décadas, por ejemplo?

Los matemáticos siempre hablamos entre nosotros. Unas veces de cosas importantes, otras sobre pequeños problemas técnicos y otras sobre el Mundial o sobre jardinería. ¡También somos humanos!

Biografía de sir Michael Atiyah
Fuente: http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Biographies/Atiyah.html

6.2. Elaboren un perfil aproximado de un matemático y en qué consiste el "hacer" de un matemático.

Actividad 7: Formas de trabajar en matemática

En este capítulo hemos planteado que:

- para demostrar la validez de una afirmación para un número finito de casos, es posible comprobar en cada uno si la afirmación vale o no.
- cuando se trata de un número infinito de casos, es necesario demostrar la validez. Para demostrar que la afirmación es verdadera, podemos probar $p \Rightarrow q$ o también, por el absurdo, demostrar $p \wedge -q$.
- para demostrar que la afirmación es falsa, alcanza un contraejemplo.

Busquen un ejemplo de demostración de cada uno de estos tipos.

Actividad 8: Disponibilidad de herramienta de trabajo matemático

Articular los contenidos de los distintos campos para comprender más profundamente una temática es un tipo de práctica esperable de quien egresa de la escuela media. Conocer las propias fortalezas y dificultades en un campo de conocimiento permite tomar decisiones acerca de cómo encaminar los estudios que permitan completar aquellos conocimientos de los que no se disponga y se consideren necesarios.

Teniendo en cuenta los conocimientos matemáticos trabajados en los distintos capítulos, a través de la resolución de problemas relacionados con los distintos campos del conocimiento utilizando modelos matemáticos, en los que han tenido que tomar decisiones, efectuar procedimientos y representaciones, y elaborar argumentos para validar sus producciones; en este apartado presentamos situaciones problemáticas que permitirán afianzar y profundizar los conocimientos matemáticos desarrollados.

- ¿Cuáles fueron tus principales dificultades respecto a:
  - Comprender los enunciados.
  - Identificar y recordar las nociones matemáticas requeridas para la resolución del problema.
  - Utilizar al resolver la noción matemática más adecuada.
  - Comprender las resoluciones y conclusiones de otros.
  - Elaborar conclusiones y expresarlas en el lenguaje matemático (usando la simbología matemática).
- ¿Cómo podrías tener elementos o estrategias de control sobre los resultados de tus resoluciones?
- ¿Cuáles podrían ser algunas estrategias para superar o mejorar estas dificultades? ¿Dónde los conseguiste? Aplícalas y anota tus adelantos.
- ¿Tuviste dudas sobre algunos conceptos, fórmulas, formas de representación, formas de razonamiento, etc.? ¿Dónde los buscaste? ¿Dónde los buscaron otros? ¿Dónde más podrías buscar?
- Plantea tres preguntas a tu profesor para mejorar tus estrategias de aprendizaje.

Anexo

Capítulo1: Las paradojas

En el capítulo hemos visto cómo algunas reglas que se usan en matemática parecen trucos cuando no se conocen las razones que las justifican

1. Expliquen por qué funcionan los criterios de divisibilidad por 2, por 3, por 4 y por 5.

2. Expliquen las reglas para operar con fracciones.

3. Consideren la siguiente figura, realicen las construcciones que se describen en la demostración[3] y traten de encontrar el error.

Vamos a demostrar que “un ángulo recto es igual a otro ángulo que es mayor que un recto”.

La figura ABCD es un rectángulo. H es el punto medio de CB.
Por H se traza una perpendicular a CB que corta a DA en J
Trazar AE = AB = DC fuera del rectángulo.
Unir C con E y determinar su punto medio. Llamarlo K.
Trazar una perpendicular a CE por K.
CB y CE no son paralelas, entonces las perpendiculares que pasan por H y K se cortan en un punto. Llamarlo O.
Unir O con E y también O con A, con B , con C y con D.
Los triángulos ODC y OAE tiene los tres lados iguales porque:
AE = DC por construcción
OD = OA porque HO es perpendicular a CB y bisectriz del ángulo DOA
OC = OE porque HO es perpendicular a CE y bisectriz del ángulo COE
Si los triángulos son iguales, los ángulos ODC y OAE también lo son
También son iguales los ángulos del triángulo isósceles ODA, o sea que ODA = OAD
JDC = ODC – ODJ
Pero JDC es recto y JAE es mayor que un recto

Capítulo 2: Conjeturas y teoremas

4. El principio de inducción completa

La Inducción Matemática o Inducción Completa[4], es una forma de razonamiento que puede usarse para demostrar relaciones o proposiciones que dependan de una variable, digamos n, que sólo admite valores enteros positivos. El método de inducción matemática para demostrar una relación particular consta, en esencia, de los tres siguientes pasos:

1. Comprobar que la relación es verdadera para n = 1, o para el primer valor admisible de n.
2. Partiendo de la hipótesis de que la relación es verdadera para cierto valor de n, digamos k, demostrar que también es verdadera para n = k + 1.

[3] Fuente: Kasner y Newman, “Paradoja perdida y paradoja recuperada”, en *El Mundo de las matemáticas*. Grijalbo.

[4] Fuente: *Álgebra*. Charles H Lehmann. Editorial Limusa. Grupo Noriega editores. México. Cap.7, pp.153-155.

3. Comprobado que la relación es cierta para n = 1 en el paso 1, del paso 2 se sigue que también es cierta para n = 2, entonces es cierta para n = 3, y así sucesivamente para todos lo valores enteros y positivos de n.

Hagamos destacar que los pasos 1 y 2 son ambos esenciales para la validez de la demostración. El paso 3 es solamente una consecuencia lógica de los pasos 1 y 2.

A continuación, te mostramos la demostración por ese principio de la propiedad de los números cuadrados que estudiaron en la Actividad 1.
Consideremos la suma de los primeros n números impares, es decir: $S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n – 1)$, en donde $2n – 1$ representa el enésimo término de la suma. Escribamos directamente la suma de los primeros cuatro casos:

$n = 1$, $S_1 = 1$

$n = 2$, $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

$n = 3$, $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$n = 4$, $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

Hemos indicado aquí que, en cada caso, la suma es igual al cuadrado del número de términos sumados, de lo cual resulta obvio inferir que la suma de n términos es *probablemente* igual a n^2. Nótese que no hemos demostrado esta relación para la suma de un número cualquiera de términos, sino que simplemente hemos comprobado que es verdadera hasta n igual a 4.
Utilicemos la inducción matemática para completar la demostración de la relación.

(1) $1 + 3 + 5 + . . . + (2n – 1) = n^2$

Supongamos que (1) es verdadera para n = k, es decir,

(2) $1 + 3 + 5 + . . . + (2k – 1) = k^2$, lo que representa nuestra hipótesis.

Añadamos ahora el término de orden k + 1, o sea, $2 (k + 1) – 1 = 2 k + 1$, a ambos miembros de (2). Obtenemos la igualdad:

(3) $1 + 3 + 5 + . . . + (2k – 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

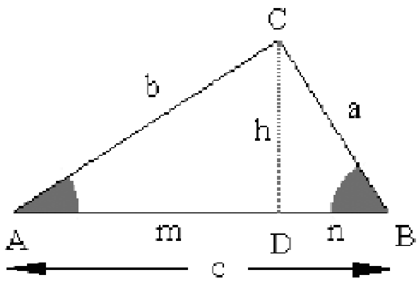
La igualdad (3), que solamente es verdadera si (2) es verdadera, representa la verificación de la relación (1) para n = k + 1. Por tanto, hemos demostrado que si la relación (1) es verdadera para n = k, entonces es verdadera para n = k + 1. El razonamiento continúa como ya se indicó: ya que la relación (1) resultó verdadera para n = 1, se sigue de (2) y (3) que también es verdadera para n = 2. Análogamente, si (1) vale para n = 2, entonces vale para n = 3, y así sucesivamente para todos los valores enteros positivos de n.

5: Más Pitágoras

En general, hay varias formas de probar un mismo resultado utilizando diferentes propiedades como punto de partida. El Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia ha sido demostrado de distintas maneras y utilizando distintas propiedades.

5.1. A continuación les mostramos dos demostraciones. En cada caso, analiza cuáles son las propiedades utilizadas para demostrar

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo



ángulo ABC es rectángulo en C.

Teorema del cateto

En el triángulo ADC

$$cos(A) = \frac{m}{b} \rightarrow b = \frac{m}{cos(A)}$$

En el triángulo BCA

$$sen(B) = \frac{b}{c} \rightarrow b = c\,sen(B)$$

Multiplicando miembro a miembro ambas expresiones

$$b^2 = \frac{m\,c\,sen(B)}{cos(A)} =$$
$$= \frac{m\,c\,sen(90 - A)}{cos(A)} = m\,c$$

Es decir:"En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella"

Teorema de la altura.

En los triángulos rectángulos ADC y DBC resulta:

h = m . tg (A)
h = n . tg (B)

Multiplicando miembro a miembro ambas expresiones

h^2 = m. n . tg (A) . tg (B)

pero tg (A) . tg (B) = tg (A) . tg (90 - A) = 1

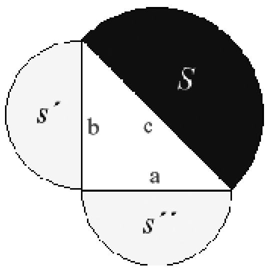
Entonces h^2= m . n

Es decir: "En todo triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que determina sobre ella"

Aplicando el teorema del coseno a cada uno de los catetos del triángulo ABC y sumando resulta:

a^2 = c.n
b^2 = c.m
$a^2 + b^2$ = c.n + c.m = c (n + m) = c^2

Fuente: http://www.arrakis.es/~mcj/teorema.htm



Si las superficies S, S' y S" son semejantes, entonces Área (S) = Área (S') + Área (S")

Generalización del teorema de Pitágoras.

Para los semicírculos de la figura, a partir de la expresión

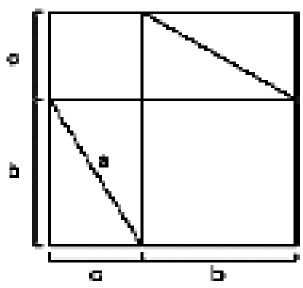
$c^2 = a^2 + b^2$

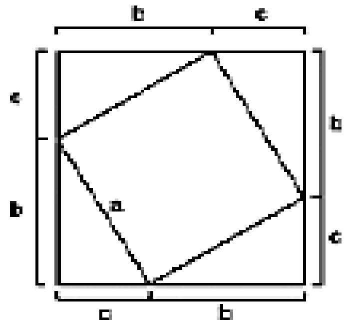
multiplicando ambos miembros $\frac{\pi}{8}$ por resulta de donde:

Área (Semicírculo *S*) = Área (Semicírculo*S'*) + Área (Semicírculo *S"*)

5.2. Analicen si los siguientes gráficos les permiten elaborar otra demostración del teorema de Pitágoras.

5.3. Podemos considerar que el teorema de Pitágoras, como todos los teoremas de la Matemática, está compuesto por dos proposiciones. En este caso son:





p: El triángulo es rectángulo.

q: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

¿Cuál de las formulaciones siguientes se corresponde con los argumentos que elaboraron en el punto **b.1.**?

“Si un triángulo es rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”

“Si en un triángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, ese triángulo es rectángulo”

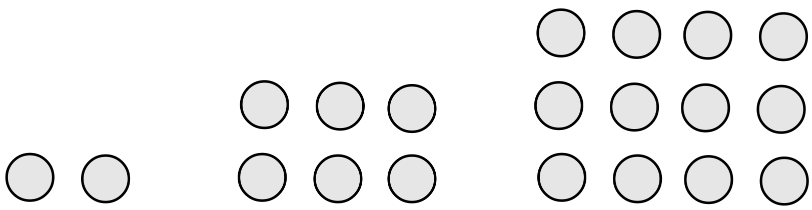
5.4. Reúnanse en grupos y enuncien afirmaciones que se refieran a triángulos rectángulos, y se refieran a sus ángulos, bisectrices, alturas, mediatrices, medianas.

5.5. Un grupo enuncia las siguientes afirmaciones. Analicen y justifiquen la validez de cada una.

- en todo triángulo rectángulo la medida del lado opuesto al ángulo recto es siempre mayor que la medida de cualquiera de los otros dos lados.
- en un triángulo rectángulo, las alturas coinciden con los lados.
- en todo triángulo las mediana coinciden con las alturas.
- si conozco las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, puedo construirlo y es único.
- si conozco la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, puedo construirlo.

6: Más números figurados

Los números rectangulares son los que tienen una cantidad tal de piedras que permiten formar



$r_1 = 2$ $r_2 = 6$ $r_3 = 12$

un rectángulo cuya base es una unidad mayor que la altura.

6.1. Dibujen los dos números siguientes. ¿Cuáles son?

6.2. Busquen un patrón que relacione cada número rectangular con el anterior.

6.3. A partir del segundo número rectangular, pueden descomponerse en un número cuadrado y “algo” más; o en dos números triangulares iguales (trazando una recta en diagonal). Analicen alguna de estas descomposiciones para varios números rectangulares, buscando un patrón, y expresen algebraicamente cómo se puede obtener el n-ésimo número rectangular

Capítulo 3: El trabajo de los matemáticos y las demostraciones

7. Encontrar razones que justifiquen que:

7.a. Dado un rectángulo ABCD, trazar una diagonal AC y por un punto P de ella trazar paralelas a los lados del rectángulo. Una corta a AB en M y DC en N. La otra corta a AD en S y a BC en R. Los rectángulos MBRP y SPND tienen la misma área.

7.b. La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual a 180º (n-2).

7.c. Si dos números son divisibles por un tercer, la suma de los dos primeros es también divisible por el tercero.

Decidir...

¿qué variables considerar?

Introducción

La producción agropecuaria ha ocupado históricamente un lugar central en la economía nacional con lo que se ha constituido en una ocupación de muchos de sus habitantes y en un elemento importante que nos distingue como país, ya que la Argentina es conocida a nivel internacional por la exportación de los productos del campo.

Distintas regiones del país se han dedicado a diferentes actividades agropecuarias: la agricultura dedicada a la producción hortícola, frutícola y cerealera, la ganadería orientada a la producción de carnes y la ganadería dedicada a la producción de leche.

Estas actividades productivas son sustentables cuando los productores y las empresas que se dedican a ellas obtienen un nivel de rentabilidad acorde al riesgo asumido. Para ello, muchas empresas y emprendimientos que se dedican a estas actividades se han organizado en con modelos mixtos, dedicadas a la agricultura y a alguna de las actividades ganaderas. Y sin duda buscan rentabilidad. ¿Por qué la búsqueda de la sustentabilidad? Porque *“cuando las empresas no obtienen el nivel de rentabilidad adecuado, existe destrucción de valor, aunque las empresas no tengan pérdidas, no son rentables. Desde el punto de vista financiero, las empresas económicamente no rentables, tienden a desaparecer a no ser que modifiquen sus estrategias económicas”.*

Es importante por lo tanto reconocer todos los determinantes que inciden en la rentabilidad, para establecer las variables sobre en que las empresas pueden actuar. Dado que la rentabilidad está relacionada tanto con las estrategias de inversión y crecimiento, con la estructura de capital y deuda, con los riesgos asumidos y con otras variables.

Se podría asimismo suponer que la rentabilidad está asegurada con la maximización de los beneficios, sin embargo, en estudios económicos[1] que indagan la relación con las variables que intervienen plantean que *“el supuesto de maximización de los beneficios (hacer máxima la diferencia entre ingresos y costos) - que ha sido en muchas oportunidades cuestionado -se utiliza frecuentemente en Microeconomía pues se considera una meta generalmente aceptada en tanto contribuye a otras potenciales tales como la supervivencia y crecimiento del negocio. En pequeñas empresas gestionadas por sus propietarios, es probable que los beneficios predominen en todas sus decisiones. En las grandes empresas, si bien puede ocurrir que los directivos tengan como objetivo la maximización de los ingresos para satisfacer a sus accionistas, la maximización del valor de mercado de la empresa sería un objetivo más adecuado, puesto que ese valor incluye la corriente de beneficios que obtiene la empresa a lo largo del tiempo. Es la corriente de beneficios que interesa directamente a los accionistas. A corto plazo, las empresas eligen el nivel de producción que maximiza los beneficios. En el largo plazo, además deciden permanecer o no en el mercado”.*

En el presente módulo se centrará en considerar cómo uso el uso de herra-

[1] Evolución histórica de la sustentabilidad de la agricultura y el tambo en el sur de Santa Fe. Períodos 1993-94 a 2003-04. Centro de la industria lechera argentina, en http/ www.cil.org.ar

mientas matemáticas puede aportar valor en el momento de tomar decisiones sobre las inversiones de productores y empresas del sector agropecuario. Para ello avanzaremos en tres capítulos que se presentan continuación del siguiente modo:

En el primer capitulo, se analizará cuales son las variables que intervienen en la toma de decisiones de empresas mixtas tambo-agricultura en el sur de Santa Fe para delinear la problemática de la sustentabilidad y considerar las conclusiones obtenidas por el estudio económico mencionado. Luego, se retomarán en situaciones sencillas relacionadas con la actividad productiva de las empresas tamberas para estudiar cómo el uso de sistemas de ecuaciones lineales planteadas a partir de los datos de la situación permite analizar las decisiones alternativas posibles.

En el segundo capitulo, se avanzará profundizando en el estudio de variables que intervienen en la producción y en la industria láctea, incluyendo restricciones para el funcionamiento del sistema y determinando condiciones de maximización de beneficios y minimización de costos recurriendo a la programación lineal. Este modelo se utiliza cuando se intenta optimizar, es decir maximizar y/o minimizar un objetivo, y su interés fundamental es tomar las mejores decisiones. Éstas se representan con variables, llamadas variables de decisión.

Finalmente, en el tercer capítulo, se considera la producción de carnes en la zona noreste del país y con ella nuevamente la problemática productiva y su rentabilidad de las empresas mixtas y la sustentabilidad. En este caso, veremos cómo otras herramientas matemáticas, las matrices, aportan a la evaluación y construcción de los datos cuando hay que operar con un gran volumen de ellos.

Capítulo 1: Seleccionar variables.

En el sur de la provincia de Santa Fe, el cambio estructural más importante, ocurrido a partir de mediados de la década de 1970, fue un progresivo reemplazo de la actividad ganadera por una rotación agrícola, con preponderancia de la secuencia trigo-soja de segunda siembra y soja de primera siembra. Este proceso de “agriculturización” es consecuencia principalmente del incremento productivo que tuvieron los granos.

Para profundizar en esta cuestión, en este capítulo, a partir de los datos del trabajo mencionado intentaremos evaluar el comportamiento económico de las actividades tambo y agricultura en el sur de la provincia de Santa Fe en las campañas agrícolas 1993-94 a 2003-04.

Mediante el análisis del desempeño económico de las empresas se determinarán las principales variables que inciden en la rentabilidad, con la finalidad de brindar algunas pautas sobre futuras estrategias económicas capaces de lograr sustentabilidad

Queremos responder a la pregunta: ¿Puede la actividad tambo ser una alternativa a tener en cuenta para incrementar la sustentabilidad del sector agrario en la región?

Al realizar cualquier investigación cuantitativa, debemos considerar los conceptos, por ejemplo de carácter económico y/o administrativo, en calidad de magnitudes que pueden tomar diferentes valores (variables) dentro de un campo de variación.

Actividad 1: La evolución de la actividad “tambo”

1.1. Consideren en el período 1992-93 hasta 2002-03 las siguientes tablas para analizar las evoluciones del número de tambos (tabla 1), del número de vacas en ordeñe, de la carga animal por establecimiento (número de vacas por tambo) y de la productividad (tabla 2).

1.1.a. En la tabla 1, ¿hay departamentos cuyos datos inciden más en los resultados finales? ¿Por qué?

1.1.b. En la tabla 2, una fila tiene los datos de la productividad de la tierra dedicada al tambo. Ésta tiene relación con la alimentación de las vacas: si se usa suplementación dietaria resulta una mejora en la calidad de la leche que se obtiene y en el precio que por ella reciben los productores. La calidad de la leche se determina midiendo los kilogramos de grasa butirosa que tiene el total de leche que se obtiene por cada ha de campo dedicada a la actividad de tambo (Kg.G.B./ha).

Esta unidad está compuesta por dos unidades simples, una que mide la magnitud peso y otra que mide la magnitud superficie.

- Anoten al menos otras tres magnitudes compuestas que conozcan.
- ¿Cómo escribirían el dato 116,44 Kg.G.B./ha si la unidad utilizada fuera g.G.B./a (gramos de grasa butirosa de la leche que se obtiene por cada área de campo dedicada a la actividad de tambo)

Tabla 1. Número de tambos por departamento en el sur de Santa Fe

CAMPAÑAS	93-94	94-95	95-96	96-97	97-98	98-99	99-00	2000-01	2001-02	2002-03
DPTOS.										
BELGRANO	43	40	40	32	33	30	31	26	30	25
CASEROS	26	26	24	18	21	18	22	22	18	20
CONSTITUCIÓN	6	4	4	5	8	4	3	5	4	2
GRAL. LOPEZ	123	121	101	109	90	90	90	89	90	77
IRIONDO	185	164	150	121	135	140	138	133	112	105
ROSARIO	24	31	36	20	17	15	16	15	10	13
SAN LORENZO	71	70	64	50	31	40	32	35	29	26
TOTAL Dptos.	**478**	**456**	**419**	**355**	**335**	**337**	**332**	**325**	**293**	**268**

Fuente: Elaboración propia en base a la encuesta ganadera IPEC. 30/06/94 al 30/06/03.

Tabla 2. Evolución de la cantidad de vacas y la productividad

Campañas 1994/95 – 2002-03

CAMPAÑAS	93-94	94-95	95-96	96-97	97-98	98-99	99-00	00-01	01-02	02-03
Nro.V.Ordeñe	34.495	36.123	33.128	32.543	36.849	40.057	41.315	40.375	36.352	35.679
Kg.G.B./ha	**116,44**	**91,20**	**83,56**	**117,12**	**144, 5**	**156,57**	**185,0**	**193,69**	**182,03**	**173,88**
Nro. V.O/Tbo	72	79	79	92	110	119	124	124	124	133

Fuente: Elaboración propia en base a encuesta ganadera IPEC.

1.2. a. ¿Cuál fue el porcentaje de variación de los valores entre el primero y el último de los ciclos agrícolas considerados para: el número de tambos, el número de vacas en ordeñe (V.O.) y los Kg.G.B./ha?

1.2. b. ¿Cuál ha sido la evolución de cada una de las tres variables en las campañas consideradas?

1.3. En el período 1993-94 a 2003-04, el sector ha pasado de: 6000 millones de litros anuales en 1992, a 10329 millones de litros anuales en 1999, y a partir del año 2000 la producción de leche cae hasta ubicarse en los 8100 millones en el año 2002. Entre los años 1999 y 2002, más de 1000 productores, el 10% del total, abandona el tambo. A juzgar por lo que se ha inferido de las tablas, ¿que se le podría sugerir a una empresa mixta que se dedica al tambo y la agricultura?

Actividad 2.: Comparación de beneficios entre el tambo y la agricultura

A fin de avanzar en la respuesta a nuestra pregunta, consideremos dos indicadores útiles para evaluar la eficiencia en el uso de los recursos de la empresa, del rendimiento de los activos (sin considerar su financiación), el beneficio y la rentabilidad.

2.1. Para el cálculo del beneficio se consideran para cada tipo de empresa los ingresos y los costos, como se indica en la tabla.

Para una empresa agrícola	Para una empresa tambera modelo
Ingreso bruto *superficie cosechada (ha) *rendimiento promedio (qq/ha) *precio del grano ($/qq)	Ingreso bruto *productividad de la tierra (Kg.G.B./ha *precio de la leche ($/l) *precio de venta de la carne de vacas que ya no producen($/kg)
Costo total labores de implantación y protección (1) insumos (1) cosecha (1) comercialización (1) impuestos (2) mejoras (2) (1) Costos directos (2) Costos indirectos	Costo total *alimentación (1) *sanidad (1) *mano de obra (1) *electricidad y limpieza (1) comercialización (1) impuestos (2) mejoras (2) *reposición de vacas (1)

El beneficio resulta de un cociente:

Beneficio = (Ingreso bruto – Costos totales) / Capital total

Beneficio o Rentabilidad = Ingreso neto / Capital total

Margen bruto = Ingreso bruto – Costo directo

La rentabilidad también resulta de un cociente

Rentabilidad = Margen bruto / Ingreso neto

Ingreso neto = Margen Bruto – Costos Fijos

2.1.a. En los indicadores correspondientes a los ingresos se han incluido las unidades en que se los mide. Por ejemplo: la unidad en que se mide el precio del grano es $/qq, es decir el precio del producto (granos) en pesos por cada quintal de grano, o el precio en pesos por cada 100kg. de grano. Identifiquen e interpreten el significado de cada una de ellas.

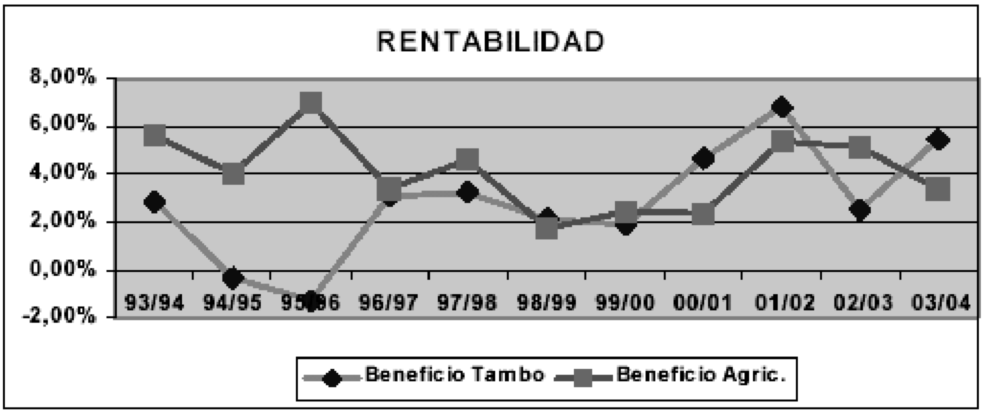
2.2. La tabla y el gráfico siguientes permitirán hacer un análisis comparativo de la rentabilidad del modelo agrícola y del modelo tambo.

Tabla 9. Relación entre el Margen Bruto e Ingreso Neto de la agricultura y el tambo

Campañas	93/94	94/95	95/96	96/97	97/98	98/99	99/00	00/01	01/02	02/03	03/04
MBTbo-MBAgr	27.453,5	42.681,8	95.550,8	6.443,5	26.973,4	-5.232,6	7.054,8	-29.644,1	-11.588,1	57.421,8	-40.101,0
MBTbo/MBAgr	0,74	0,48	0,23	0,93	0,78	**1,07**	0,91	**1,38**	**1,08**	0,59	**1,34**
Tbo compet > 1											
IN Tbo/IN Agr.	0,50	-0,08	-0,16	0,80	0,63	1,09	0,72	1,77	1,09	0,43	1,33

Elaboración propia en base a los datos del modelo

Gráfico 3. Rentabilidad de la agricultura y el Tambo



Elaboración propia en base a los datos de los modelos

2.2.a. Consideren el gráfico 3 y responde

- ¿en qué campaña o campañas compiten? (sus valores son más próximos)
- ¿en cuál o cuáles se dan las mayores diferencias?

2.2.b. Analizando la tabla, ¿podrían explicar lo respondido en 2.2.a.? ¿En qué períodos el MBAgr fue mayor que el MBTbo? ¿Cuándo coinciden? ¿Qué hay que observar en la tabla para obtener esa información? En la razón entre los IN ¿qué significan los siguientes valores: 0,50; -0,16; 1,09 y 1,77? ¿qué información suministran ?

2.2.c. Del análisis de la información del estudio del CILA (Centro de la industria lechera argentina), resultaba el tambo una actividad competitiva con la agricultura en el año 2005? ¿Por qué?

2.3. a. Consideren el cuadro siguiente elaborado para un campo de 125 há – Modelo agrícola

- ¿Qué cantidad de há se destinan para cada cultivo en cada una de las campañas?
- ¿Cuántos quintales de soja se obtienen en cada campaña? ¿Cuál es el ingreso bruto que se obtiene de dichas ventas?

Campaña	Proporción de superficie cultivada			Rendimiento unitario (qq/ha)			Precios constantes ($/qq)			Margen bruto/há	Capital	Costos Fijos$/há
	Soja	Maíz	Trigo	Soja	Maíz	Trigo	Soja	Maíz	Trigo			
1993/4	0.56	0.16	0.28	23.3	56.3	20.7	57.4	27.5	30.1	834.75	1.078.722	353,152
2003/4	0.81	0.09	0.10	28	75	26	62.40	26.43	35.66	955.15	2.493.843	279,60

2.3.b. De las 125 ha del Modelo Agrícola ¿cuántas hectáreas de soja y maíz se deben sembrar para obtener en total 4.562,5 qq y 5850qq, teniendo en cuenta el rendimiento de las campañas 1993/4 y 2003/04 respectivamente?

2.3.c. ¿Cuál sería la producción total en quintales si se rotan los cultivos del ítem 2.3.b?

2.3.d. ¿En cuáles de las alternativas anteriores se obtiene mayor ingreso bruto, considerando el precio unitario de la última campaña?

2.3.e. ¿Qué ocurriría con la producción total y el ingreso bruto de los cultivos si se siembra la misma cantidad de ha de maíz y soja? ¿Y si sólo se siembra uno de los cultivos?

2.3. f. ¿Qué se puede inferir respecto de los ingresos brutos y la productividad de cada cultivo?

2.4 Consideren el cuadro siguiente elaborado para un campo de 125 há – Modelo tambo

Campaña	KgGB/ha	$/kg GB	$/lt leche	Costo fijo $/ha/año	Margen Bruto/ha	Capital
1993/4	116	12,99	0,43	374,39	615,11	1.045.008
2003/4	190	14,33	0,47	374,64	1275,93	2.074.939

2.4.a. ¿Cuál es el ingreso bruto obtenido por KgGB en cada campaña?

¿Qué relación existe con el del modelo agrícola correspondiente a los mismos períodos?

2.4.b. ¿Cuál es el ingreso neto del modelo tambo y el del modelo agrícola?

2.4.c. Calcula el beneficio del modelo tambo y del modelo agrícola obtenido en cada campaña.

2.4.d. ¿Cuál es la rentabilidad de cada modelo en ambas campañas? ¿Qué se podría decir sobre los beneficios obtenidos en ambos períodos para los dos modelos?

Relaciona los resultados obtenidos con el gráfico 3 y realiza un análisis del mismo.

En base a este análisis, ¿ratificar tu sugerencia del item 1.3?

2.4.e. Expresa, a modo de conclusión, si en función de los resultados obtenidos es la actividad tambera una alternativa a tener en cuenta para incrementar la rentabilidad del sector agrario de la región.

Actividad 3: La producción de leche y las variables que interesan.

3.1. Lee el siguiente artículo para interiorizarte de la situación de los productores lecheros en febrero del 2007.

Una mirada sobre el panorama lechero de Febrero 2007

El equipo técnico de la SAGPYA se encuentra muy absorbido en la implementación de los subsidios a la producción lechera, y eso ha atrasado la elaboración y publicación de información estadística; extraoficialmente podemos mencionar que en el mes de Diciembre se produjo la primer baja interanual significativa de producción desde el comienzo de la recuperación (2003), que marcó una baja de 3% sobre 2005, y haría que tengamos que volver a ajustar el cierre del año 2006, con un crecimiento global de 6% sobre el año previo (después de haber crecido +10% en el acumulado Enero-Julio). Esto, que es consecuencia, en el segundo semestre, de condiciones de sequía en muchas zonas, deterioro en las relaciones de precio con los granos, y un bajo nivel de precio de la materia prima láctea, abre interrogantes sobre las reales posibilidades de crecimiento para el 2007, año en el que los tambos apuntan a mejorar sus precios, y a mediados de Febrero se aguarda ansiosamente la llegada de nuevas lluvias para empujar la recuperación de la base forrajera. En los últimos dos años, la carga animal y las subas de producción se apoyaron en un alto aporte de los granos, que en las actuales condiciones, difícilmente pueda volver a sostenerse en los mismos niveles.En la Cuenca Oeste de Buenos Aires, por lo pronto, los recibos de las usinas lácteas muestran en Enero y Febrero tasas de caída en la producción con respecto al mes anterior, que oscilan entre 7 y 10% (duplican a las del año pasado), y se ubican -según los casos- igual o por debajo de los volúmenes que se manejaban en este mismo período en el 2006. La siguiente tabla muestra los precios del mes de enero de la leche, con la aclaración de que se trata de una estimación genérica y -como tal- sólo orientativa, referida a algunas de las principales empresas que operan comercialmente en la Región, y para una leche libre de Brucelosis y Tuberculosis, con 3.55% grasa y 3.20% proteína, que tiene 25.000 UFC, 250.000 CCS, y es remitida a 4.0 ºC. Se trata de valores “estándar”, que no incluyen arreglos o acuerdos especiales. La 1º fila, se refiere a un tambo de 1200 litros/día, la 2° corresponde a un tambo de 3500 litros/día, y la 3º hace referencia a un tambo de 7000 litros/día.

LA SERENÍSIMA			DPA Ex Nestlé			SANCOR Compra Directa			QUESERÍA PYME		
$ / litro	$ / KGS	$ / KPT	$ / litro	$ / KGS	$ / KPT	$ / litro	$ / KGS	$ / KPT	$ / litro	$ / KGS	$ / KPT
0,5050	14,23	15,78	0,5000	14,08	15,62	0,5000	14,08	15,62	0,5000	14,08	15,62
0,5100	14,37	15,94	0,5200	14,65	15,25	0,5100	14,37	15,94	0,5100	14,37	15,94
0,5200	14,65	16,25	0,5300	14,93	16,55	0,5250	14,79	16,41	0,5250	14,79	16,41

Hay dos cosas que confluyeron para encontrar una salida de emergencia a la complicada situación que presentaba la lechería, contemplando las necesidades inmediatas de los tamberos: a) Una demanda fuertemente insatisfecha, que se enfrentó con un "parate" del crecimiento, y generó una necesidad extraordinaria de leche (cosa que desató la preocupación de los industriales, y del propio gobierno); y b) Los productores a través de sus Cámaras y la FAPROLE, que junto al resto de las entidades en la "Mesa Nacional", asumieron un nivel de protagonismo importante, y ganaron espacios que hasta hace poco se les mostraban esquivos.Más allá de que habrá quienes pongan el mayor acento en uno u otro de estos factores, lo más importante es que los tamberos tomen debida nota de lo que se puede lograr cuando se actúa en unidad y coordinadamente, y se den cuenta de que las organizaciones específicas que comenzaron a construir en todo el país a partir de la crisis del 2002, valen la pena, y pueden transformarse en una gran herramienta sectorial para poder alcanzar en el futuro una nueva lechería, racionalmente articulada, equitativa y competitiva, en la medida en que ellos decidan fortalecerlas con su participación y su apoyo.

Fuente: INFOTAMBO – La revista del Sector Lechero del Cono Sur- 27-03-2007

UFC: Unidad Formadora de Colonia
CCS: Conteo de Células Somáticas

3.1.a. El texto presenta una tabla de valores estimativos, para un tipo particular de leche.
¿Qué característica tiene la leche cuyos precios orientativos se especifican en la tabla?

3.1.b. ¿Qué significa en la composición de un litro de leche que contenga el 3,55 % de grasa (KGS, ó KgGB) y el 3,20% de proteína (KPT)?

3.1.c. ¿Cuánto paga SANCOR el KGS a un tambo de 3.500 litros diarios? Compara dicho valor con el que paga a un tambo de 7.000 litros, y de 1.200 litros. ¿Qué puedes inferir?

3.2. En la actividad productiva de las empresas tamberas entran en juego distintas variables, cuyo comportamiento podría considerarse lineal, y cuyas relaciones se pueden expresar a través de ecuaciones.

Considerando los datos que figuran en la tabla del texto "Una mirada sobre el panorama lechero", resuelve los problemas siguientes estableciendo ecuaciones que expresen las relaciones entre datos y variables y analizando el conjunto solución en función de la situación planteada.

3.2.a. La Cooperativa SANCOR paga a un tambero asociado $1.200 por materia grasa y proteica, en un día de producción. Sabiendo que es un tambo de 1200 litros diarios:

Siendo el intervalo de variación de cada una es (39,46) para la materia grasa y entre (32, 39) para proteínas. ¿Cuántos kilogramos de cada componente adquirió?

3.2.b. ¿Cuántos kilogramos de materia grasa puede adquirir con ese monto la empresa, pagando por 38,40 kg de materia proteica?

3.2.c. Si paga ese monto sólo por una de ellas, ¿cuál será la cantidad máxima que puede comprar de cada una?

3.3. Dos tamberos venden a distintas empresas la misma cantidad de materia grasa y de proteínas en leche, recibiendo cada uno de ellos los montos que se consignan en la siguiente tabla:

TAMBERO	$ / KGB	$ / KPT	MONTO RECIBIDO
"A" (LA SERENÍSIMA)	14,23	15,78	1.263,80
"B" (SANCOR)	14,08	15,62	1.250,70

¿Cuántos kilogramos de materia grasa y de proteínas vendieron los tamberos?

3.4. Otros dos tamberos, uno asociado a SANCOR y el otro a la QUESERÍA PYMES, dicen recibir $3.570 y $4.205 respectivamente. Si ambos cobran $14,37 por KGB y $ 15,94 por KPT,

3.4.a. ¿Cuántos kilogramos de materia grasa y de proteínas vendieron?

3.4.b. ¿Qué puedes inferir de los resultados obtenidos?

3.5. Un ingeniero químico de SANCOR quiere combinar tres tipos de leche para que la mezcla resultante tenga 900 dg de carbohidratos (lactosa), 750 dg de proteínas y 350 dg de grasa. Los decigramos de carbohidratos, proteínas y grasa, que contiene cada uno de los tres tipos de leche, figuran en la siguiente tabla. (Los datos fueron extraídos de las etiquetas de leches SANCOR)

TAMBERO	Carbohidratos (dg)	Proteínas (dg)	Grasa (dg)
1dl de leche "A"	35	15	10
1dl de leche "B"	10	20	10
1dl de leche "C"	20	15	5

3.5.a. ¿Cuántos decilitros de cada variedad de leche se deben tomar para obtener la mezcla requerida?

3.5.b. ¿Cómo validas los resultados obtenidos?

Actividad 4: Formas de trabajar en matemática

Para resolver los problemas de la actividad 3, han tenido que expresar con ecuaciones los las relaciones entre datos y variables, resolver las ecuaciones o los sistemas de cuaciones planteados, y analizar el conjunto solución en función de la situación planteada.

4.1.a. Lean los siguientes pasos de resolución para un problema de sistemas de ecuaciones lineales, y discutan si utilizaron los mismos y en el mismo orden.

I. Leer el problema todas las veces que sea necesario para su interpretación (apropiación).

II. Identificar variables y datos que intervienen, y escribir las relaciones entre ellos algebraicamente.

III. Decidir cómo conviene ir transformando la igualdad (o, “que técnica de resolución conviene utilizar”: sustitución, igualación, reducción por sumas y restas)

IV. Resolver el sistema. Clasificarlo según su resolubilidad (compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible).

V. Validar el conjunto solución obtenido.

VI. Analizar si el conjunto solución del sistema da respuesta a la situación planteada, es solución de la situación.

4.1.b. Si lo creen conveniente incluyan otras cuestiones a tener en cuenta para resolver problemas con ecuaciones.

4.1.c. En la resolución a través de transformaciones del sistema inicial, obtienen nuevas ecuaciones ¿cómo son entre sí las del sistema inicial comparadas con las que se obtienen en cada transformación? ¿por qué? ¿Cuáles transformaciones mantienen el mismo conjunto solución y cuáles no?

4.1.d. En la resolución de las situaciones ¿emplearon el método gráfico? ¿interpretaron geométricamente los sistemas obtenidos? ¿Cómo identificaron gráficamente el conjunto de solución? ¿Es siempre posible la determinación del conjunto solución con exactitud a través de este método? Ejemplifica ¿Qué permite el estudio de las posiciones relativas de dos rectas?

4.1.e. En el problema 3.5 ¿utilizarías el método gráfico? ¿Por qué? ¿Qué representa cada ecuación en ese caso? ¿Qué debes analizar para determinar si el sistema tiene o no solución?

4.2. Una fábrica envasa la leche pasteurizada en saches y cajas, para lo cual utiliza dos máquinas. En la siguiente tabla se indica el tiempo que lleva envasar en cada caso, y en cada una de las máquinas, como así también el total de horas disponibles por día en cada máquina.

Producto	Máquina 1	Máquina 2
Sache	2 seg.	4 seg.
Caja	3 seg.	2 seg.
Disponibilidad	6 horas	8 horas

4.2.a. Formula un sistema de ecuaciones que determine cuántos saches y cajas se deben envasar para ocupar todas las horas disponibles.

4.2.b. Calcula la cantidad de saches y cajas envasadas, en la totalidad de las horas disponibles.

4.2.c. Comprueba a través del método gráfico el conjunto solución obtenido. ¿De qué otra forma puedes validarlo?

4.2.d. Si la tabla fuera la siguiente:

Producto	Máquina 1	Máquina 2
Sache	2 seg.	4 seg.
Caja	1 seg.	2 seg.
Disponibilidad	6 horas	8 horas

Escribe el sistema y resuélvelo. Analiza y discute, con tus compañeros, la o las soluciones si es que existen, e interpreten gráficamente la situación planteada.

4.3 Resuelvan las actividades del Anexo de este capítulo

4.4 En las actividades 2 y 4 planteadas ¿tuvieron dificultades? ¿Cuáles? ¿Pudieron elaborar argumentos matemáticos adecuados para justificar sus procedimientos y /o conclusiones?

Capítulo 2: Minimizar y maximizar funciones

En numerosos problemas necesitamos realizar una tarea en forma óptima: minimizar la cantidad de kilómetros a recorrer para distribuir productos a distintas localidades; maximizar el rendimiento de una operación comercial; maximizar los niveles de producción; minimizar los costos de una dieta para el ganado vacuno; optimizar los recursos para que la actividad propuesta responda a normas específicas de calidad, entre otros.

Muchos de estos problemas pueden ser modelados a través de los aportes de la Matemática. Los modelos más sencillos son los llamados “programas lineales”, que facilitan tener una visión más simple de una serie de hechos reales y permite ejercer un mejor y más completo control sobre un conjunto de datos y las relaciones emergentes entre ellos.

A través de los distintos textos y actividades que te proponemos en este capítulo, pretendemos mostrar la utilización de este modelo matemático en estudios de planificación, que tiene como objetivo calcular el mayor o menor valor de una función que sea compatible con las restricciones que pesan sobre sus variables, para dar respuesta a algunos interrogantes principalmente de carácter económico, con la finalidad de obtener un máximo aprovechamiento de los recursos entre actividades alternativas. En este sentido, para realizar las actividades propuestas deberán, en colaboración con los docentes, recuperar conocimientos ya abordados en la escolaridad secundaria y reconstruir otros, comprendiendo sus posibilidades de aplicación a problemas prácticos.

Las actividades económicas que seguiremos analizando son las del sector lácteo, considerando problemáticas tanto de los productores como del transporte de leche y de las empresas que procesan la leche para elaborar diferentes productos lácteos.

Actividad 1: La importancia del transporte de la leche cruda

El transporte de la leche desde el tambo a las empresas en las que se procesa, se realiza con diferentes métodos y costos.

1.1. a. Lean el artículo siguiente

El transporte de la leche cruda

La leche es un producto perecedero que requiere necesariamente de contratos que en general son implícitos entre el productor y la industria para garantizar el retiro diario de la producción.

La producción total se estima en alrededor de 30.000.000 de litros diarios, de los cuales más del 60% son comprados por 15 grandes empresas, que poseen una gran capacidad de procesamiento en plantas con moderna tecnología, y el 40% restante se reparten en por lo menos 500 PYMES lácteas.

La recolección de la leche cruda de los tambos, para su transporte hacia los centros de procesamiento, se efectúa a través de dos métodos principales, que están relacionados con el grado de la leche que se maneja.

Un método es a través de garrafones o tarros de 40 y 50 litros, en los cuales se transporta la mayor parte de la leche, que son cargados en camiones con vagón de carga, generalmente operados por transportistas independientes o productores de leche. En estas condiciones se transporta la leche de grado industrial “C” y parte de grado “B”.

En nuestro país aún prevalece el sistema de recolección de leche en garrafones, transportándose de esta manera alrededor del 60% del volumen de leche producida.

Los materiales con que se construyen los garrafones son:

* De hierro estañado, que aún se continúan utilizando, pero si bien tienen la ventaja de su precio, no son muy recomendables por: su peso elevado (7,5 Kg. para los de 20 litros), lo poco resistentes a los choques y, lo que es más importante desde el punto de vista de calidad, su estañado es débil pudiendo quedar el hierro en contacto con la leche.
* De Plástico, que tienen grandes ventajas, como ser poco peso, insonoridad, elasticidad y ausencia de uniones en la tapa. Pero también presentan inconvenientes como: rigidez, poca seguridad en el cierre de la tapa, lentitud en los cambios térmicos, lo que impide su enfriamiento rápido, entre otros.
* De acero inoxidable, siendo este la mejor alternativa, pero su costo los torna prohibitivos.

Para transportar los garrafones con leche grado B y C se utilizan camiones con capacidad para 3 mil a 4 mil litros, los que son propiedad de productores o transportistas de la región.

El otro método es a través de camiones cisterna con sistema de enfriamiento, generalmente propiedad de la planta de procesamiento, que se utilizan para recoger la leche grado "A" de los tanques enfriadores fijos en las haciendas, o de los tanques isotérmicos de los centros de recolección. Es más económico para transportar cantidades superiores a 4.000 litros, y cada camión generalmente puede trasladar 16.000 litros de leche, capacidad que está en relación, según los reglamentos del tránsito, con el número de ejes que tenga, así pues la carga máxima para un camión de dos ejes sería de 12 toneladas, para tres ejes, sería de 19 toneladas, y para cuatro ejes sería de 22 toneladas.

En la permanente discusión sobre cual es el precio de la leche justo en un momento determinado la influencia del costo del transporte es dejada de lado. Esto se debe en parte a que las industrias procesadoras fijan un precio puesto en tambo, independientemente del costo real de recolección. Efectivamente la industria toda, grande y pequeña, subsidia los fletes más alejados reduciendo el precio que paga a los productores mas cercanos.

A los efectos de tener una idea concreta de cual es la incidencia del este factor, se presenta a continuación una tabla donde vemos el costo del transporte a medida que nos alejamos de la fábrica y a medida que la cisterna viaja con capacidad ociosa.

Se observa que los costos de transporte no sólo son muy importantes sino que a más de 120 Km de distancia el flete representa el 10% del valor de la leche aún con una cisterna casi llena convirtiendo la recolección en inviable económicamente. Este análisis del costo del flete de recolección de materia prima también se aplica en la etapa de distribución de productos terminados.

Es obvio que alguien paga esos costos de transporte. Una industria que se estructure de manera más eficiente en lo que respecta a reducir los costos de transporte podría mejorar el precio neto pagado al tambero.

Fuente: TODO AGRO "El Sector lácteo y las PYMES" 10-2006 - www.todoagro.com.ar

El costo de transporte (centavos por litro)

Km a planta	Litros día		
	2000	4000	6000
10	1.3	0.65	0.43
30	3.9	1.9	1.3
60	7.8	3.9	2.6
90	11.7	5.85	3.9

1.2.a. Identifiquen en el texto los párrafos que se refieren a los distintos métodos de recolección de la leche cruda.

1.2.b. ¿Qué relación existe entre la modalidad de transporte y calidad de leche?

1.3.a. Consideren cuáles son las variables que intervienen en el costo del transporte.

Analicen la tabla y establezcan qué relación existe entre el precio por litro y la distancia a la planta industrial para cada una de las cantidades de leche transportadas. ¿Qué ocurre con el precio del transporte si se triplica o sextuplica la cantidad de km de distancia a la planta?

Realicen un gráfico que contribuya a mostrar las relaciones que establecen.

1.3.b. Analicen la tabla y establezcan qué relación existe entre el precio por litro y la cantidad de leche transportada para cada una de las distancias indicadas. ¿Qué ocurre con el precio del transporte si se duplica o triplica la cantidad de litros transportados por día, manteniendo constante los km a planta?

Realicen un gráfico que contribuya a mostrar las relaciones que establecen.

Actividad 2: Minimizando costos y maximizando ganancias

Para cada una de las situaciones siguientes determinen el conjunto de soluciones factibles y discutan la solución óptima.

2.1. La empresa “SANCOR” produce diariamente dos artículos “A” y “B”. Para cada unidad del artículo A necesita un kilogramo de materia prima y dos horas de mano de obra. Para cada unidad del artículo B necesita un kilogramo de materia prima y una hora de mano de obra. Dispone hasta 4 kg de materia prima que pueden usarse diariamente y hasta 6 horas diarias de mano de obra. Obtiene una ganancia de $4 por cada unidad vendida del producto A, y $3 por cada unidad del artículo B.

En estas condiciones ¿cuántas unidades del artículo A y del artículo B deberá fabricar diariamente con el objetivo de maximizar sus ganancias?

2.2. Una empresa láctea fabrica dos productos A y B y desea minimizar los costos de fabricación. Ambos productos se fabrican con las mismas materias primas M y N. El producto A necesita 2 kg de M y 1 kg de N por unidad. El producto B necesita 1 kg de M y 2 kg de N por unidad. Ambas materias primas no se pueden comprar por cantidad menos de 12 kg. El reparto de los productos lo realiza un camión que para que sea rentable debe trabajar por los menos 9 horas diarias, debe viajar 1 hora para entregar cada unidad de A y 5 hs para cada unidad de B. ¿Cuál es la combinación de producción que minimiza los costos sí, el costo de cada unidad de A es de $5 y el de cada unidad de B es de $10?

2.3. Un camión térmico puede transportar como máximo 9 toneladas por viaje. En un viaje un empresario desea transportar al menos 4 toneladas de queso, y una cantidad de manteca cuyo peso no sea inferior a la mitad del peso que transporta en quesos. Sabiendo que se cobra $0,30 por kg de queso y $0,20 por kg de manteca, para obtener la ganancia máxima, ¿cómo debe cargar el camión?

Actividad 3 Incidencia de los minerales en la producción de la leche y en su valor energético

La calidad de la leche está relacionada con la alimentación de las vacas y, en muchas ocasiones es necesario darles suplementos para que la calidad sea la requerida por las empresas.

3.1. Lean el texto siguiente.

Los minerales en la producción de leche y en la conservación de su valor energético

Los minerales cumplen un importante papel en la nutrición porque aunque no proporcionan energía son esenciales para la utilización y síntesis biológica de nutrientes básicos. La deficiencia de ciertos minerales podría causar pérdidas importantes en la producción de leche y en su valor energético, debido a que estos cumplen un rol importante en la composición de la leche, en el metabolismo y en la salud en general del ganado vacuno. Siendo el valor energético de la leche entera de aproximadamente 650 Kcal/litro y en la leche descremada 340 Kcal/litro. La mayoría de las raciones alimenticias para vacas lecheras requieren ser suplementadas por los siguientes minerales: calcio y fósforo, cobre, manganeso, yodo, zinc, entre otros. Los requerimientos de calcio y fósforo favorecen la producción y composición de la leche. La deficiencia de manganeso tiene efecto directo sobre la fertilidad, además conlleva a una reducción del crecimiento y anormalidades del esqueleto. En cuanto a los síntomas más comunes por deficiencia de cobre son: blanqueo del pelaje, anemia, diarrea, cojera e hinchamiento de las articulaciones. El zinc esta involucrado en varios procesos enzimáticos y en la calcificación de los huesos; y por último la falta de yodo en la ración tiene como consecuencia la reducción de la fertilidad, nacimiento de terneros débiles o muertos y muerte fetal.Además, uno de los componentes principales de la dieta para la vaca lechera es la fibra, ya que la misma es necesaria para varias funciones: una adecuada actividad de rumia (a través del flujo de suficiente cantidad de saliva); una apropiada relación de los productos de la fermentación ruminal, dando lugar a la producción de ácidos volátiles (acético, propiónico y butírico) que se absorben a través del rumen y se utilizan como fuentes de energía para la vaca, y además el ácido acético es el precursor primario de la grasa en leche; y una buena capacidad reguladora de la acidez ruminal (capacidad “buffer” o tampón), equilibrando el PH de la leche.Alimentar bien no es exclusivamente dar una gran cantidad de suplemento y fibra, sino proporcionar una dieta que permita un balance entre energía y proteína, en función del tipo de animal, para que estos expresen su máximo potencial en el tambo, aumentando la producción láctea, elevando la concentración de proteínas de la leche y grasa butirosa, y mejorando el estado corporal.

Fuentes: “Minerales para mejorar la producción de leche y fertilidad en las vacas lecheras”
Dr. C. Gómez; Ing. M. Fernández- Dpto de Nutrición- Universidad Nacional Agraria
La Molina. “Sancor Cooperativas Unidas Limitadas”

3.2.a. A partir de la lectura del texto ¿qué conclusiones pueden extraer del importante papel que cumplen los minerales en la nutrición de las vacas? .

¿En qué incidiría una deficiencia de los mismos?

¿Qué propiedades de la leche se alterarían?

3.2.b. ¿Cuál es la importancia de la ingesta de leche vacuna en el ser humano? Discutan en grupo y registren las conclusiones.

RUMEN: El primer compartimiento grande del estómago de un rumiante del cual los alimentos se regurgitan y en el cual la celulosa es separada por la acción de las bacterias simbióticas, protozoos y población de hongos

3.3 Supongan que en un establo lechero existen problemas de deficiencia de minerales en la nutrición de las vacas. Se determina que, para subsanar esta insuficiencia, hay que suministrarles tres tipos de minerales: calcio, fósforo y cobre. Por semana cada vaca necesita consumir 437 mg de calcio, 270 mg de fósforo y 199 mg de cobre adicionales. Estos minerales se presentan en dos preparados: el "A" con dosis de 80 mg, que cuestan $2,50 y cuya composición es de un 20% de calcio, 40% de fósforo y 40% de cobre. El preparado "B", cuyas dosis son de 90 mg, cuestan $3,00, y tienen una composición de 30% de calcio, 60% de fósforo y 10% de cobre.

¿Qué número de dosis de cada preparado hará más económico el tratamiento?

¿Se puede prescindir de alguna restricción en este problema? ¿Por qué?

Actividad 4 Formas de trabajar en matemática y la programación lineal

4.1.a. Lean los siguientes pasos de resolución para un problema de optimización y discutan si utilizaron los mismos y en el mismo orden.

1. Identificar variables que intervienen o variables de decisión y escribir las relaciones entre ellas algebraicamente.

2. Identificar la función principal o función que se desea optimizar, y las restricciones que deben satisfacer las variables intervinientes en cada situación y escribirlas algebraicamente.

3. Determinar el conjunto de soluciones factibles.

4. Encontrar la solución óptima.

4.1.b. Si lo creen conveniente incluyan otras cuestiones a tener en cuenta para resolver para los problemas de optimización

4.1.c. Durante la resolución, ¿hicieron representaciones en gráficas cartesianas?

4.1.d. ¿Cómo identificaron el conjunto de soluciones factibles? ¿Por qué vale esa forma de hacerlo?

4.1.e. ¿Cómo encontraron la solución óptima? ¿Por qué vale esa forma de hacerlo?

4.2.a. Escriban un enunciado de una situación problemática en la que tengan que maximizar, cuya función objetivo sea $f(x,y) = 3x + 5y$, y que responda a las siguientes restricciones:

x + y d” 10
x + 3y d” 20
$x \geq 0$
$y \geq 0$

4.2.b. Resuelvan la situación planteada, validando su respuesta.

4.2.c. Analicen y discutan en el grupo clase, las situaciones elaboradas en los distintos grupos. ¿Son las únicas? Elaboren conclusiones.

4.3.a. ¿Puede una función objetivo alcanzar su valor óptimo en un punto “interior” de la región factible cuando las variables tienen valores enteros? ¿Puede ocurrir si se admiten valores decimales para las variables x e y? Justifiquen las respuestas y registren las conclusiones.

4.3.b. ¿Puede una función objetivo representarse por una recta horizontal? ¿Qué significaría en la situación? ¿Se podría concluir que en estos casos el punto óptimo es el punto factible que tenga mayor ordenada? Justifiquen las respuestas y registren las conclusiones.

4.4.a. Si el conjunto de soluciones factibles está representada por una región acotada, ¿dónde estaría ubicada la solución óptima, en el caso de qué la función objetivo se pueda minimizar o maximizar? Validen su respuesta.

4.4.b. ¿Pueden haber múltiples soluciones óptimas? ¿Es esto posible? ¿Cuándo o en qué caso? ¿Dónde estarían todas estas soluciones? Validen su respuesta.

4.5.a. Hallen el conjunto de soluciones factible del sistema definido por las siguientes restricciones: $2x + 2y \geq 6$; $x + 3y \geq 6$; $x \geq 0$; $y \geq 0$. ¿Qué pueden afirmar del mismo?

4.5.b. Si las condiciones anteriores se consideran asociadas al problema de maximizar.

$f(x,y) = x + 2y$, ¿Qué se puede decir del conjunto de soluciones factibles? ¿Y de la solución óptima? ¿Y si en vez de maximizar se tratase de minimizar la misma función? ¿Qué conclusiones se pueden extraer?

4.6 Resuelvan las actividades del Anexo.

4.7 En los ítemes de esta actividad formularon validaciones, desarrollaron argumentaciones utilizando contenidos matemáticos y dieron razones acerca de procedimientos realizados. ¿Tuvieron dificultades para hacerlo? ¿Cuáles?

Actividad 5: Miradas sobre el mundo de la matemática

6.1. Lean en la antología el texto “programación lineal” de Paulos

Capítulo 3: Operar con conjuntos de datos.

El fenómeno de las cotizaciones más favorables para las actividades agrícolas a mediados de los ’90, afectó no sólo a la actividad de tambo como venimos considerando desde el primer capítulo de este módulo. También ocasionó una disminución y relocalización geográfica de las existencias ganaderas, a costa de un marcado avance de la superficie sembrada con agricultura.

Sobre la base del comportamiento de algunos indicadores del sector ganadero, se proponen actividades cuya finalidad es mostrar, desde la matemática, cómo es posible trabajar con la información suministrada por fuentes idóneas, partiendo de las distintas formas de organizar los datos para una mejor lectura e interpretación de los mismos, para luego a través de modelos matemáticos dar respuesta a distintas situaciones problemáticas de empresas Agropecuarias, construyendo nuevos datos.

¿Cómo sistematizar u organizar los datos obtenidos de diferentes fuentes sobre variación de precios del producto final? ¿De qué manera se puede analizar la información para comprender la problemática agropecuaria planteada? ¿Cómo plantear soluciones al respecto?

Actividad 1: La producción de carnes en Argentina y en el MERCOSUR. La organización de datos.

1.1.a. Lean los fragmentos siguientes

La actividad pecuaria en el noreste argentino

Desde la segunda mitad del siglo XX la región subtropical Noreste, con 290.000 km², significó el 20% de las explotaciones y el 10% de la superficie agropecuaria de la República Argentina. En esa extensión, los usos productivos primarios del suelo repartieron tradicionalmente en una proporción del 9% correspondiente a cultivos, un 49% destinado a pasturas naturales y un 28% ocupado con montes naturales.La diversificación de actividades agro-ganaderas, le permitió a la región incorporarse al escenario agropecuario nacional, incrementando la comercialización interna de los productos primarios y secundarios como a su vez la exportación de algunos de esos productos como carnes, lácteos, soja, etc.; lo que resultó de gran importancia en la consolidación de las economías provinciales. La tendencia general de la agricultura en el Nordeste Argentino hacia el mejoramiento, observable a través del aumento de los rendimientos por hectárea, y del incremento de los rodeos vacunos, las producciones agropecuarias regionales, que constituyen una de las bases de las economías provinciales, ostentan claras muestras de vulnerabilidad y de escasa intensificación.La ganadería vacuna intentó encontrar las variantes más adecuadas a su situación. De hecho, los últimos 40 años han significado un largo proceso de búsqueda del “tipo” genético más apropiado al ambiente subtropical. Es así que luego de que se comprendiera en la década de los 50 que las razas bovinas europeas no prosperaban en el calor y la humedad de la región, se introdujo masivamente el cebú y sus derivados. Las dos últimas décadas significaron la búsqueda del equilibrio mediante la introducción planificada de derivados de sangre índica, obteniéndose excelentes ejemplares como es el caso del ganado Brangus.Definida la producción ganadera típica del Nordeste, la actividad pecuaria asistió en los últimos años a una serie de innovaciones en las prácticas de manejo tendientes a asegurar el recurso forrajero y la sanidad animal, con vistas a ingresar efectivamente en los nuevos mercados. Este fenómeno se torna especialmente notorio en el ganado vacuno que se comercializa en pie para proceder a su engorde en las pasturas pampeanas, donde se concentran los principales frigoríficos a escala nacional.A fines de siglo, en el Nordeste Argentino, importantes espacios subexplotados admiten una amplia gama de posibilidades de desarrollo y mejoramiento de las modalidades vigentes, dentro de su peculiaridad productiva en el quehacer agropecuario nacional y del MERCOSUR.”La visión geográfica pretende aportar una perspectiva de síntesis a una problemática que exige soluciones urgente con vistas al nuevo milenio. La potencialidad del Nordeste subtropical argentino implica una reserva de recursos, necesitada de adaptaciones internas que le permitan integrar los eslabones de su cadena productiva primaria, para poder desempeñarse con eficacia en el marco de las nuevas reglas de intercambio comercial internacional.”

Las empresas mixtas de ciclo completo

Lo mismo que ocurrió en los 90 se puede concluir para el período 2002-2004, pues también hubo cotizaciones más favorables para las actividades agrícolas. Con precios fijados en dólares y el precio de la hacienda en pesos, una devaluación ó apreciación de la divisa y/o cambios en los precios internacionales que afecten los precios internos primeros, modifica sustancialmente la rentabilidad relativa y las decisiones de producción en cada explotación.

En los que habitualmente se denominaban empresas mixtas, donde existía una rotación agrícola ganadera, la presión por aumentar la superficie con cultivos, en la mayoría de los casos confinó a la ganadería en los suelos de menor aptitud, transformándose actividades que son competitivas entre sí, que coexisten en la misma explotación. Luego de la experiencia de los ’80, con una gran descapitalización de la hacienda, el rodeo bovino además de la actividad productiva tomó el rol de reserva de capital, sobre todo en períodos de crisis institucional, política y macroeconómica, como fueron 1989 y 2002, en que la hacienda funcionó como una bien de capital y no se observó una retroacción de las existencias bovinas a pesar de que el atractivo del negocio se reducía con relación a la actividad agrícola.

Es así que una de las actividades predominantes en los sistemas mixtos es el Ciclo Completo, ya que a partir del uso de la superficie con aptitud ganadera, el uso de rastrojos y algo de suelo agrícola permite desarrollar una actividad que posibilita conservar el capital de hacienda y contribuir a los resultados económicos.

Hoy en día es frecuente escuchar que el desaliento por los bajos precios de la hacienda lleva a una caída de la aplicación de tecnología.

1.1.b. Caractericen la situación del sector productor ganadero, en particular, en la zona del noreste entre los años 50 y los 90 y desde entonces hasta el presente.

1.2. Con el fin de analizar la situación de Argentina en el MERCOSUR en los últimos años presentamos la evolución mensual del precio del kilo vivo de novillo de más de 380 kg en el MERCOSUR, en el período 2003-2006, se adjunta la siguiente tabla elaborada por el Área de Mercados Ganaderos-SAGPyA (Secretaría de Agricultura, Ganadería, Pesca y Alimentos).

Precio del kilo vivo de Novillo de Más de 380 kg en el MERCOSUR.
(En dólares por kilo en pie)

	Argentina	**Brasil**	**Uruguay**	**Paraguay**
Ene-03	0,612	0,473	0,580	0,720
Feb-03	0,628	0,438	0,577	0,720
Mar-03	0,631	0,433	0,600	0,720
Abr-03	0,651	0,470	0,574	0,720
May-03	0,647	0,490	0,580	0,720
Jun-03	0,651	0,557	0,607	0,720
Jul-03	0,660	0,581	0,675	0,510
Ago-03	0,653	0,581	0,801	0,450
Sep-03	0,631	0,597	0,869	0,520
Oct-03	0,657	0,595	0,925	0,500
Nov-03	0,647	0,594	0,850	0,610
Dic-03	0,655	0,615	0,831	0,620
Ene-04	0,663	0,626	0,804	0,597
Feb-04	0,677	0,576	0,804	0,581
Mar-04	0,680	0,556	0,802	0,550
Abr-04	0,727	0,532	0,793	0,549
May-04	0,691	0,517	0,821	0,535
Jun-04	0,658	0,544	0,843	0,528
Jul-04	0,677	0,560	0,909	0,533
Ago-04	0,695	0,576	0,950	0,563
Sep-04	0,705	0,591	0,938	0,570
Oct-04	0,679	0,557	0,921	0,573
Nov-04	0,670	0,583	0,912	0,581
Dic-04	0,676	0,620	0,877	0,586
Ene-05	0,673	0,633	0,849	0,558
Feb-05	0,728	0,635	0,850	0,588
Mar-05	0,768	0,596	0,870	0,550
Abr-05	0,764	0,640	0,861	0,545
May-05	0,773	0,694	0,871	0,538
Jun-05	0,773	0,693	0,906	0,553
Jul-05	0,801	0,683	0,941	0,573
Ago-05	0,803	0,680	0,948	0,578
Sep-05	0,769	0,660	0,949	0,598
Oct-05	0,788	0,715	0,941	0,645
Nov-05	0,832	0,706	0,923	0,658
Dic-05	0,784	0,738	0,888	0,665
Ene-06	0,778	0,740	0,886	0,640
Feb-06	0,817	0,773	0,923	0,690
Mar-06	0,834	0,780	0,916	0,708
Abr-06	0,769	0,798	0,902	0,700
May-06	0,733	0,794	0,906	0,724
Jun-06	0,689	0,793	0,965	0,768
Jul-06	0,724	0,928	1,066	0,818
Ago-06	0,741	0,926	1,096	0,852
Sep-06	0,725	0,925	1,065	0,868
Oct-06	0,745	0,914	1,065	0,984
Nov-06	0,805	0,913	1,031	1,047

1.2.a. ¿Qué relación se puede establecer entre los elementos de una misma fila y los datos de las columnas? ¿Y entre los elementos de distintas filas para una misma columna?

1.2.b. En que mes del año 2005 se registró el menor y mayor valor de la hacienda analizada, en los distintos países del MERCOSUR?

1.2.c. ¿Cómo pueden relacionar los valores relativos de los precios en Argentina comparados con los de otros países del MERCOSUR y la situación nacional descripta en los textos que leíste en el item 1.1.a.?

1.3. Para un estudio comparativo de la actividad pecuaria en el MERCOSUR, se quiere conocer

1.3.a. ¿Qué diferencias han tenido mes a mes los precios en dólares por kilo en pie durante el bienio 2005-2006 en Argentina y Brasil? Escribe la respuesta organizando la información de manera conveniente.

1.3.b. ¿Qué variación han tenido los precios en dólares por kilo en pie entre cada mes de enero y el del siguiente año para cada uno de los cuatro países?

1.4. Para responder las preguntas 1.3. de la actividad anterior, has tenido que operar con datos de dos columnas o de dos filas, considerando su ubicación en la tabla y expresando los resultados en un cierto orden relacionado con el de los datos.

En matemática se usa un símbolo para representar una información dada con muchos números, con el propósito de exhibir los datos en forma organizada y realizar una mejor manipulación de ellos. Esto permite entre otras cosas, verla con mayor claridad y organizarla en forma sistemática para tomar decisiones.

Así, otra manera de organizar e identificar sin dificultad los datos de la tabla correspondiente al “precio del kilo vivo del novillo en el MERCOSUR” del año 2005, es presentarlos a través de la siguiente disposición rectangular o arreglo, que llamaremos matriz.

$$\begin{vmatrix} 0{,}673 & 0{,}633 & 0{,}849 & 0{,}558 \\ 0{,}728 & 0{,}635 & 0{,}850 & 0{,}588 \\ 0{,}768 & 0{,}596 & 0{,}870 & 0{,}550 \\ 0{,}764 & 0{,}640 & 0{,}861 & 0{,}545 \\ 0{,}773 & 0{,}694 & 0{,}871 & 0{,}538 \\ 0{,}773 & 0{,}693 & 0{,}906 & 0{,}553 \\ 0{,}801 & 0{,}683 & 0{,}941 & 0{,}573 \\ 0{,}803 & 0{,}680 & 0{,}948 & 0{,}578 \\ 0{,}769 & 0{,}660 & 0{,}949 & 0{,}598 \\ 0{,}788 & 0{,}715 & 0{,}941 & 0{,}645 \\ 0{,}832 & 0{,}706 & 0{,}923 & 0{,}658 \\ 0{,}784 & 0{,}738 & 0{,}888 & 0{,}665 \end{vmatrix}$$

1.4.a. ¿Cuántas filas y columnas tiene esta matriz? ¿A qué fila y a qué columna corresponde el elemento 0,769? ¿Cuál es la cotización correspondiente al mes de marzo en Paraguay? **1.4.b.**. Expliquen cómo ubican los datos en la matriz. ¿Cómo expresarían abreviadamente el elemento correspondiente a la 6ta fila y 3ra columna?

1.4.b. La matriz correspondiente al 1ro y 2do cuatrimestre del año 2006. ¿Cuántas filas y columnas tiene?

1.4.c. Escriban las respuestas a las preguntas 2.3.a. y 2.3.b. en forma matricial.

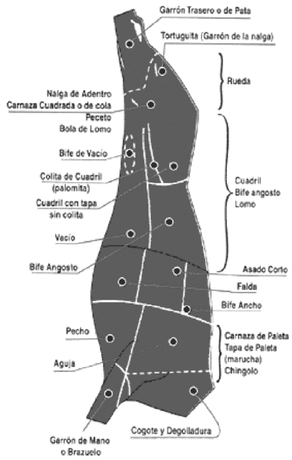
Actividad 2: La comercialización de la carne vacuna y la manipulación de datos

2.1.a. Lean el texto siguiente.

Mercado de la Carne Vacuna en Argentina

La comercialización ha sufrido grandes cambios en los últimos años, las carnicerías han disminuido su participación en los grandes centros urbanos, se han incorporado nuevos operadores y otros, como los supermercados, se han ubicado mejor. Todo ello ha provocado un fuerte impacto en el poder de negociación de los distintos actores a lo largo de la cadena, con la aparición de nuevas reglas de juego.

El sector de la carne vacuna se ha caracterizado por su alta complejidad a lo largo de los principales eslabones que integran la cadena: producción, industria, distribución y consumidor.La Argentina ocupaba hasta el 2000 (el 2001resultó totalmente atípico con el cierre casi del 98% de los mercados de carnes frescas) el quinto lugar como productor y el sexto lugar como exportador y es el país con mayor consumo de carnes por habitante; por tal razón, el arraigo de este producto en el país hace que el 85% de la producción total sea consumida localmente y el resto se exporte con una participación promedio, en la última década de 700 millones de dólares por año.La ganadería vacuna participa en un 18% del PBI agropecuario y en un 3% del PBI total, la carne de vaca representa aproximadamente el 68% del consumo total de carnes en nuestro país, y el 7,1% del gasto total en alimentos por habitante. El consumo *per cápita* de carne vacuna es de 66 kg. por año, mostrando una fuerte caída con respecto a diez años atrás cuando cada argentino consumía aproximadamente 81 kg. La comercialización de la hacienda en pie se realiza a través de remates ferias (9%), directa estancia con o sin intervención (60%), consignatario directo (4%) o a través del Mercado deConcentración de Hacienda Liniers, donde confluye la oferta y la demanda de hacienda con destino al consumo interno y se fija el precio de las distintas categorías; los que serán utilizados como referencia en los distintos canales de comercialización y en la hacienda con destino de exportación; el 19% de la faena se comercializa por este medio.La comercialización tradicional de carne en el mercado interno se basa en el traslado de la media res salida de la planta faenadora y transportada hacia cada boca de expendio en camiones refrigerados. En el mercado de la media res las categorías más utilizadas son vaquillona, ternero y novillito colocadas directamente en el local de expendio para su desposte, siendo la modalidad utilizada por los frigoríficos consumeros. Estos frigoríficos proveen de carne a supermercados e hipermercados. Los operadores del mercado interno son los matarifes carniceros.



El negocio de la exportación de carne vacuna cuenta con clientes que pueden ser los mismos importadores o también el negocio puede ser encarado a través de un intermediario como la figura del *broker*. Los importadores, en la mayoría de los casos cuentan con sistemas propios de distribución.

En relación a los Cortes, la res se divide en cuartos, de éstos el trasero es el que posee los cortes de mayor valor: lomo, bife angosto y cuadril (corazón, tapa y colita). Estos conforman el *Rump and Loin* y considerando la integración de una empresa exportadora, el principal cliente es la Unión Europea a través de la Cuota Hilton; si bien la rentabilidad de estos cortes algunos años atrás aseguraba la del negocio, en la res solo tiene una representatividad del 20 al 22%. El resto de los cortes del cuarto trasero puede colocarse como cortes congelados dentro de la Cuota GATT (Europa) o junto con los cortes del cuarto delantero, colocarlo en el mercado chileno o vender todo el cuarto delantero congelado a Israel.

Con respecto al parrillero (asado, matambre y vacío) según un estudio realizado por una cadena de supermercados, el asado se posiciona como el principal corte demandado (13%) junto con el vacío (6%) y el matambre (4%), en el mercado interno tanto en supermercados, carnicerías o en la restauración.

La máxima planificación que efectúa la empresa exportadora puede ser anual en función de la estimación que realice de cuanta cuota Hilton le pudiera corresponder, en función de ello, estipula el volumen de faena mensual, ajustable semanalmente y su esquema de integración para maximizar el sobre valor de mercado de los tres cortes de calidad.

Secretaría de Agricultura, Ganadería, Pesca y Alimentos

2.1.b. Formulen hipótesis que expliquen la disminución del consumo per cápita de carne vacuna en la última década. Argumenten por escrito las mismas, especificando su incidencia en la canasta y/o dieta familiar.

2.1.c. Establezcan las diferencias entre la comercialización tradicional y la que se realiza en la actualidad. Relacionen la comercialización interna con la problemática actual de las exportaciones de carne.

2.1.d. ¿Qué podrían decir en relación a la problemática actual de las exportaciones?

2.1.e. ¿Qué factores motivaron el conflicto entre los productores y el gobierno nacional, que se iniciara el año 2006 y continúa en el presente año?

2.2. Con los datos de la Oficina de Estadísticas de Comercio Exterior del SENASA, el Área de Mercados Ganaderos SAGPyA, elabora tablas que muestran la evolución de las exportaciones de Carnes Vacunas. Las exportaciones de Carnes Vacunas de los últimos 3 años son las siguientes:

Período	Producto (Toneladas peso)		
	Carnes frescas	Cortes Hilton	Carnes Procesadas
Ene-04	14.406	2.080	4.220
Feb-04	15.064	2.600	4.260
Mar-04	17.622	3.338	5.071
Abr-04	17.325	3.154	4.540
May-04	16.619	2.549	5.776
Jun-04	25.642	1.990	6.360
Jul-04	30.809	2.115	5.272
Ago-04	36.125	1.968	4.647
Sep-04	31.109	2.158	4.730
Oct-04	22.499	2.221	4.256
Nov-04	34.618	2.981	5.615
Dic-04	29.838	2.664	5.179
Ene-05	28.669	1.508	4.682
Feb-05	25.779	1.817	4.755
Mar-05	29.120	2.193	4.508
Abr-05	26.604	2.030	2.707
May-05	36.635	2.364	3.761
Jun-05	40.448	2.581	4.823
Jul-05	42.075	1.344	4.414
Ago-05	31.642	2.595	4.579
Sep-05	33.619	2.772	4.302
Oct-05	35.305	2.209	3.732
Nov-05	44.305	2.880	4.825
Dic-05	31.864	2.295	3.406
Ene-06	27.314	2.881	4.181
Feb-06	19.807	2.458	3.359
Mar-06	34.115	2.841	3.345
Abr-06	11.456	792	1.985
May-06	1.134	2.016	957
Jun-06	10.387	2.125	2.168
Jul-06	19.859	1.739	4.053
Ago-06	32.135	2.062	3.382
Sep-06	37.441	2.131	4.441
Oct-06	39.127	2.098	3.289

Fuente: Elaborado por el Área de Mercados Ganaderos SAGPyA con datos de la Oficina de Estadísticas de Comercio Exterior del SENASA

2.2.a. ¿Cuánto se exportó en total de cada tipo de carne en cada mes de correspondientes al 1er semestre de los años 2005 y 2006?

2.2.b. ¿Cuál fue la variación registrada en cada mes entre el 1er semestre de año 2005 y el 1er semestre del 2006?

2.2.c. Si se prevé que para el año 2007 se duplicarán las exportaciones de cada tipo de carne correspondientes a cada mes del año 2006. Calculen las exportaciones resultantes para el 1er. Semestre del 2007, de manera que quede explícito el procesamiento y manipulación de los datos representados para su obtención.

2.2.d. Consideren que cada columna con las exportaciones de cada producto es una matriz de una columna y escriban las operaciones que realizaste en los tres items anteriores como una operación con matrices.

2.3. Queremos comparar y analizar el ingreso total por tipo de carne en cada mes del 1er semestre del año 2006 con datos sobre los volúmenes exportados y los precios obtenidos.

La siguiente tabla nos da el precio en U$S / TONELADAS por mes de cada tipo de carne exportada.

2006	**Enero**	**Febrero**	**Marzo**	**Abril**	**Mayo**	**Junio**
Carnes frescas	2,699	2,533	2,431	2,482	3,432	3,726
Cortes Hilton	8,204	7,523	8,406	9,653	10,089	9,547
Carnes procesadas	2,769	3,188	3,112	3,693	3,055	3,357

Suponiendo que las exportaciones a un país europeo son las siguientes:

Meses	**Toneladas**
Enero	2000
Febrero	1500
Marzo	1600
Abril	1800
Mayo	2000
Junio	3000

2.3.1.¿Cuál es el monto de exportación de cada tipo de carne?

2.3.2. ¿Cuál es el ingreso total por dicha exportación?

2.3.3. A pesar de que la solución a las cuestiones planteadas se puede obtener sin aplicar los conceptos matriciales, expliciten las ventajas que éstos brindan con su aplicación.

2.3.4. ¿Qué pasaría si en lugar de la disposición tabular anterior tienen la siguiente?

Meses	**Enero**	**Febrero**	**Marzo**	**Abril**	**Mayo**	**Junio**
Toneladas						

¿Sería posible resolverlo multiplicando la matriz de los precios por la matriz de las toneladas vendidas? Justifiquen la respuesta.

Hay veces que es preciso rearreglar los elementos de datos en una matriz. El rearreglo puede consistir simplemente en ver el arreglo de números desde otra perspectiva o bien en manipular los datos en una etapa posterior. Un arreglo es formar la transpuesta o traspuesta de una matriz.

2.3.5. ¿De qué otra manera pueden efectuar el producto de las matrices iniciales? ¿Las matrices obtenidas son las mismas? Justifiquen su respuesta.

¿A qué conclusiones pueden arribar?

¿Existe algún caso que una matriz conmuta con otra? En caso afirmativo expliciten cual.

Actividad 3: Otra forma de resolver los problemas de la producción láctea

En el primer capítulo han trabajado con sistemas de ecuaciones lineales de 2 ecuaciones con dos incógnitas, y los habrán resuelto de diferentes formas. Veremos ahora como los sistemas de ecuaciones, cuando se trata de sistemas de n ecuaciones con n incógnitas y cuando n es 3 o es mayor que 3, pueden ser resueltos usando matrices y determinantes.

3.1.a. Analicen el razonamiento siguiente

Trabajemos con un sistema de ecuaciones genérico de 2 x 2.

$$ax + by = h$$
$$cx + dy = k$$

Si se multiplica por d la primera ecuación y por d la segunda, se obtiene

$$adx + bdy = hd$$
$$bcx + bdy = bk$$

Si se resta la segunda ecuación de la primera, queda

$$adx - bcx = hd - bk$$

O sea,

$$(ad – bc) x = hd - bk$$

Usando determinantes, esto último se puede escribir

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}$$

y así

$$x = \frac{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \text{ siempre que } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ sea distinto de cero}$$

Determinante:
Es un símbolo donde se ubican número reales que, cuando es de 2 x 2 tiene la forma y el valor siguientes : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

3.1.b. Justifiquen cada paso del razonamiento.

3.1.c. ¿Cómo es la forma del cociente que permite obtener y para el sistema planteado? ¿Qué restricción hay que poner para ese cociente? ¿Por qué?

3.1.d. Escribe un determinante de 3 x 3 en forma genérica.

¿Cómo serían las expresiones para x, y, y z en un sistema de 3 x 3?

3.1.e. Investiga cómo se resuelve un determinante de 3 x 3

3.1.f. Los determinantes de más de 3 x 3 se pueden resolver con calculadora, investiga cómo se hace.

3.2. Para los siguientes problemas, realicen lo siguiente

- Planteen el sistema de ecuaciones.
- Expresen el sistema en términos matriciales. Es decir: A . X = B, donde A es la matriz de los coeficientes, X es la matriz de las incógnitas y B es la matriz de los términos independientes.
- Resuelvan la situación usando determinantes y otro procedimiento.
- Comparen las soluciones obtenidas.

3.2.a. Una compañía fabrica quesos en dos plantas que se encuentran instaladas en Entre Ríos y Santa Fé. Durante el mes de febrero, los costos fijos en la planta de Entre Ríos son de $7.000 y el costo para fabricar un queso es de $7,50, mientras que en la planta de Santa Fé los costos fijos son de $8.000 y el costo para fabricar un queso es de $6,00. Al mes siguiente la compañía debe fabricar 1500 quesos entre sus dos plantas. ¿Cuántos deben fabricarse en cada planta durante el mes de marzo para que los costos totales de ambas plantas sean iguales?

3.2.b. La empresa DPA (ex Nestlé) elabora tres productos A, B y C, sometidos a los mismos procesos de fabricación, sujetos a las siguientes condiciones:

El proceso I lo realiza una máquina que funciona 8 horas diarias, necesitando cada unidad de A, para su elaboración 2 horas y cada unidad de B, 1 hora.

El proceso II lo realiza otra máquina que funciona 12 horas diarias, necesitando cada unidad de A, para su elaboración 2 horas y cada unidad de B, 3 horas.

¿Cuántas unidades de los productos A y B se producen para usar todo el tiempo disponible de las máquinas?

Actividad 4: Formas de trabajar en matemática.

4.1. a. En el primer capítulo, al resolver los sistemas de ecuaciones lineales, habrán usado diferentes procedimientos. Expliquen y justifiquen cada uno de ellos.

4.1.b. Planteen un problema que convenga resolver usando determinantes.

4.2

Si el sistema $\begin{cases} x - z = 2 \\ y + z = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ se escribe en la forma AX = B , con $X = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ y $B = \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$, entonces A = … ¿es de la forma a), b), o c)?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

4.3. Una compañía Láctea elabora tres productos que deben ser procesados. En la tabla que se adjunta se resumen las necesidades de las horas de trabajo y de materias primas A y B mensuales que se requieren por unidad de cada producto.

	Productos			Disponible
	1	**2**	**3**	**en el período**
Horas de trabajo por unidad	5	2	4	1.300
Kilogramos de materia prima A por unidad	15	10	16	5.700
Kilogramos de materia prima B por unidad	10	4	8	2.600

Determinen la producción, en el período considerado, de los tres productos que cubra exactamente las horas de trabajo y que utiliza toda la materia prima.

4.4. Identifiquen cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Justifiquen cada una de las respuestas.

a. Es una matriz cuadrada.

b. Si se multiplica por el escalar -1, el producto es $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c. Es una matriz 3x2.

d. Es la suma de $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4.5.

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calculen:

a. A + B ; B – A ; 3.A – 2.B

b. Comprueben la igualdad $(A + B)^t = A^t + B^t$. ¿Qué conclusiones pueden extraer?

¿Es suficiente con la verificación de sólo algunos casos para generalizar? ¿Por qué?

c. Dados m=2 y n=-1, verifiquen las siguientes igualdades y expliciten la propiedad que se cumple en cada caso:

- (m + n). A = m. A + n. A
- m. (A + B) = m. A + m. B
- m. (n. A) = (m. n). A

4.6. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para la multiplicación de las matrices A y B? Fundamenten las respuestas.

- Se puede realizar sólo si A y B son matrices cuadradas.
- Cada elemento c_{ij} es el producto de a_{ij} y b_{ij}
- A. B = B. A
- Se puede realizar sólo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

4.7. ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es cierta si el producto A**.**B es un vector columna? Justifiquen sus respuestas.

- B es un vector columna.
- A es un vector fila.
- A y B son matrices cuadradas.
- El número de renglones de A debe ser igual al número de columnas de B.

4.8. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre un sistema de ecuaciones en forma de matriz?

a. Es de la forma $A^{-1}.X=B$.

b. Si tiene una solución única, la solución será $X=A^{-1}.B$

c. Tiene solución si A no es invertible.

d. Tiene una solución única.

4.9. Resuelvan las actividades del Anexo.

4.10. En las actividades planteadas ¿tuvieron dificultades? ¿Cuáles? ¿Conocían y utilizaban en forma pertinente las nociones matemáticas que permitían resolver los problemas? ¿Controlaban si los resultados obtenidos eran una respuesta al problema planteado? ¿Pudieron elaborar argumentos matemáticos adecuados para justificar sus procedimientos?

Actividad 5:
Disponibilidad de herramienta de trabajo matemático

Articular los contenidos de los distintos campos para comprender más profundamente una temática es un tipo de práctica esperable de quien egresa de la escuela media. Conocer las propias fortalezas y dificultades en un campo de conocimiento permite tomar decisiones acerca de cómo encaminar los estudios que permitan completar aquellos conocimientos de los que no se disponga y se consideren necesarios.

Teniendo en cuenta los conocimientos matemáticos trabajados en los distintos capítulos, a través de la resolución de problemas relacionados con los distintos campos del conocimiento utilizando modelos matemáticos, en los que han tenido que tomar decisiones, efectuar procedimientos y representaciones, y elaborar argumentos para validar sus producciones; en este apartado presentamos situaciones problemáticas que permitirán afianzar y profundizar los conocimientos matemáticos desarrollados.

- ¿Cuáles fueron tus principales dificultades respecto a:
  - Comprender los enunciados.
    - Identificar y recordar las nociones matemáticas requeridas para la resolución del problema.
    - Utilizar al resolver la noción matemática más adecuada.
    - Comprender las resoluciones y conclusiones de otros.
    - Elaborar conclusiones y expresarlas en el lenguaje matemático (usando la simbología matemática).
- ¿Cómo podrías tener elementos o estrategias de control sobre los resultados de tus resoluciones?
- ¿Cuáles podrían ser algunas estrategias para superar o mejorar estas dificultades? ¿Dónde los conseguiste?. Aplícalas y anota tus adelantos.
- ¿Tuviste dudas sobre algunos conceptos, fórmulas, formas de representación, formas de razonamiento, etc.? ¿Dónde los buscaste?. ¿Dónde los buscaron otros? ¿Dónde más podrías buscar?
- Plantea tres preguntas a tu profesor para mejorar tus estrategias de aprendizaje.

Anexo

1. a) Encuentren todos los pares ordenados de números reales que satisfacen la ecuación

$4x + 3y = 5$.

b) ¿Todos obtuvieron el mismo conjunto solución? ¿Cómo es ese conjunto? ¿Cuál es el lenguaje más apropiado para definirlo?

c) Expliciten cuáles fueron los criterios utilizados para determinar su validez.

2. Las principales variedades de naranjas disponibles en Argentina para su comercialización son: Valencia, Navel y Salustiana (suman el 85% de la producción nacional). Se venden en cajones principalmente en dos mercados: la Compañía de Entrepuestos y Almacenes Generales de San Pablo (CEAGESP) y el Mercado Central de Buenos Aires (MCBA). La ganancia es de $5.75 por cada caja de naranjas Valencia, $3.25 por cada caja de naranjas Navel y $2.00 por cada caja de naranjas Salustiana. La siguiente tabla muestra el número de cajas vendidas.

Manzanas	Mercados	
	MCBA	CEAGESP
Valencia	400	360
Navel	300	500
Salustiana	600	400

Encuentren la ganancia generada por las ventas en cada mercado.

3. Un supermercado necesita para su sección de frutería un mínimo de 498 cajones de naranjas, 323 de mandarinas y 140 de limones. Los solicita a un mayorista que dispone de dos centros de distribución, C_1 y C_2. Desde C_1 lo abastecen en contenedores con 10 cajones de naranjas, 3 de mandarinas y 2 de limones; desde C_2 lo proveen en contenedores con 6 cajas de naranjas, 8 de mandarinas y 5 de limones. ¿Cuántos contenedores debe enviar el mayorista desde cada centro, si los costos de envío son de $10 por contenedor desde C_1, y de $15 por contenedor desde C_2?

4. Un utilitario tiene que transportar cuatro tipos de insumos agropecuarios: A, B, C y D, los que se llevarán en cajas. Una caja del insumo A pesa 10 Kg., una caja del insumo B pesa 15 Kg., una caja del insumo C pesa 12 Kg. y una del insumo D pesa 20 Kg. La capacidad del utilitario es de 600 Kg.

a) Determinen la ecuación adecuada para que el utilitario esté cargado en toda su capacidad.

b) Si se decide enviar 13 cajas del insumo A, 10 del B y 10 del C, ¿cuántas cajas del insumo D se enviarán?

c) Si se decide enviar un sólo insumo por vez, ¿cuántas cajas de cada insumo se podrán transportar?

d) Si cada caja del insumo A, B, C y D cuesta $98, $49, $57 y $123, respectivamente, y un cliente dispone de $1.316 para su compra, determinen: una ecuación de manera que el cliente pueda ocupar todo el dinero disponible, y una posible compra del cliente.

5. Una fábrica produce tres modelos de sembradoras, cada uno de los cuales puede presentarse en dos variedades: convencional y siembra directa. Para terminar el proceso las pintan, utilizando para ello una cantidad de litros de pintura y un tiempo de mano de obra. Los requerimientos de cada modelo y la disponibilidad de mano de obra y de pintura se consignan en las siguientes tablas:

TABLA 1	Modelo 1 convencional	Modelo 1 Siembra directa	Disponibilidad
Mano de obra (en hs)	6	8	160
Pintura (en litros)	10	20	130

TABLA 2	Modelo 2 convencional	Modelo 2 Siembra directa	Disponibilidad
Mano de obra (en hs)	6	8	160
Pintura (en litros)	15	30	210

TABLA 3	Modelo 3 convencional	Modelo 3 Siembra directa	Disponibilidad
Mano de obra (en hs)	6	8	160
Pintura (en litros)	10	8	82

El dueño de la fábrica necesita saber cuántas unidades convencionales y de siembra directa, de cada modelo, puede fabricar de manera de agotar todas las disponibilidades.

a) Planteen las cuestiones indicando que representa cada incógnita.

b) Calculen la cantidad de sembradoras convencionales y de siembra directa, que puede fabricar de cada modelo.

c) Analicen y discutan los resultados obtenidos en cada caso.

6. Para la fabricación de cada variedad de queso untable, un empleado demora un promedio de 2 minutos para seleccionar y colocar en un recipiente la materia prima, y trabaja en forma permanente durante una jornada diaria de 6 hs. La compañía asigna \$72 diarios para la producción, que se destinan sólo a pagar el material utilizado. Cada queso untable tiene un costo diario de \$0,20 en materia prima. ¿Cuántos potes de cada variedad de queso untable puede fabricarse diariamente?

7. Una empresa de transporte dispone de tres tipos de camiones A, B, C para realizar el reparto de tres clases distintas de pequeñas maquinarias agrícolas: clase I, clase II, clase III. El número de máquinas de cada clase que puede transportar cada tipo de camión está dado por la siguiente tabla:

MAQUINARIA	CAMIÓN		
	TIPO A	TIPO B	TIPO C
CLASE I	2	1	1
CLASE II	1	0	1
CLASE III	3	1	2

La empresa debe transportar 12 máquinas clase I, 4 clase II y 16 clase III. Como cada camión debe estar totalmente cargado y el costo de transporte es el mismo para cada tipo de camión, la empresa desea saber cuántos camiones de cada clase necesita para realizar la operación.

a) Planteen el problema indicando que representa cada variable.

b) Escriban el sistema y obtengan la solución, si existe. En caso de que no exista solución, modifiquen la tabla para que la tenga, sin alejarse de la realidad de la cuestión planteada.

c) Comparen los resultados obtenidos en el ítem anterior, y discutan los criterios utilizados para tal elección.

Capítulo2.

8. Maximicen la función f(x,y)= 2x + 3y, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a) Determinen el conjunto de soluciones factibles.

b) ¿Cuál es el valor máximo de la función? ¿Cómo validan su respuesta?

9. Maximicen y minimicen la función f(x,y)= 2x + 4y, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 6y \geq 12 \\ x - y \geq 2 \\ 5x + 3y \leq 30 \end{cases}$$

a) Determinen el conjunto de soluciones factibles en cada caso.

b) ¿Cuál es el valor máximo de la función? ¿Cuál es el valor mínimo de la función? Validen sus respuestas.

10. Dos alimentos A_1 y A_2 cuyos costos son $20 y $10 respectivamente, por paquete, tienen dos nutrientes N_1 y N_2. Un paquete de alimento A_1 proporciona 30 unidades de N_1 y 4 de N_2. El alimento A_1 proporciona 10 de N_1 y 8 de N_2 por paquete. Si las necesidades nutritivas son de 3000 unidades de N_1 y 800 de N_2. Determinen la cantidad que hay que comprar de cada alimento para que la inversión sea mínima.

11. Se quiere elaborar una dieta alimenticia para ganado vacuno que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos diarios, 2 mg de vitamina A, 60 mg de vitamina B y 40 mg de vitamina C. Para esto se van a mezclar dos clases de forrajes, P y Q, cuyo precio por kilo es respectivamente $0,40 y $ 0,60, y cuyo contenido en las vitaminas citadas es el siguiente:

	A	B	C
1 kg de P	1 mg	20 mg	10 mg
1 kg de Q	0,5 mg	20 mg	20 mg

¿Cómo deben mezclarse los forrajes para que se satisfagan las necesidades vitamínicas con el menor gasto posible?

12. Un bioquímico desea mezclar dos tipos de fertilizantes F_1 y F_2 para obtener un nuevo tipo apropiado para abonar la tierra dedicada al cultivo de forraje, en el que se incluyan 15 kg de potasa, 20 kg de nitrato y 24 kg de fosfatos. El fertilizante F_1 contiene 1 kg de potasa, 5 kg de nitrato y 2 kg de fosfato. El fertilizante F_2 está constituido por 3 kg de potasa, 1 de nitrato y 3 de fosfato. Si los precios de F_1 y F_2 son de $ 20 y $ 40 respectivamente, ¿cómo debe hacer la mezcla para obtener el nuevo fertilizante y que el costo sea mínimo?

13. María se encuentra agotada físicamente y su médico le aconseja tomar un energizante. Para recetarle tiene dos compuestos bioenergizantes en polvo A y B, y considera indicarle que tome una mezcla de ambos en el almuerzo. Considera importante:

- No tomar más de 150 mg de la mezcla ni menos de 50 mg.
- No tomar más cantidad del compuesto B que del A.
- No debe ingerir más de 100 mg de A.

Si 100 mg del compuesto A contiene 30 mg de vitaminas y proteínas que aportan 450 calorías, y 100 mg del compuesto B contiene 20 mg de vitaminas y proteínas que aportan 150 calorías. ¿Cuántos miligramos debe recetar de cada compuesto para indicar...

a) el preparado más rico en vitaminas?

b) el más bajo en aporte calórico?

Capítulo 3:

14. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix} x & 34 & -z \\ 12 & 1/3 & 14 \\ 3 & 79 & 35 \end{bmatrix};\quad B = \begin{bmatrix} 12 & -4 & 18 & -5 \end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 15 & -2 \\ 54 & 12 & -23 & 0 \\ 3/4 & 7 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 58 \\ -4 \\ 13 \end{bmatrix};\quad E=\begin{bmatrix} 26 & 5 \\ 39 & -1 \\ 5 & 23 \\ -2 & 7 \end{bmatrix};\quad F=\begin{bmatrix} 12 & 35 & -9 & 11 \\ 0 & 16 & \sqrt{3} & 5 \\ -6 & 12 & 51 & 4 \\ 1/2 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Establezcan el orden de las matrices.

c) Clasifíquenlas.

15. Completen las siguientes definiciones de matrices para que:

a) A de orden 3x3, $a_{ij}=2$ si $i=j$ y A sea una matriz escalar.

b) B de orden 4x5, $b_{ij}=0$ si $i=j$ y B sea una matriz triangular superior.

c) C de orden 2x4, $c_{ij}=0$ si $i > j$ y C sea una matriz triangular superior unidad.

16. Determinen si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones, justificando sus respuestas:

a) Si A admite inversa el sistema AX=B es compatible indeterminado.

b) La expresión matricial del sistema $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -3x + 4y = 12 \end{cases}$ es: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} . (x \quad y) = \begin{vmatrix} 7 \\ 12 \end{vmatrix}$

17.1 Realicen, si es posible, las siguientes operaciones: A+B; A-C; A+D-B; -A+B; E+C

siendo:

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 21 & 1/2 \\ 45 & 0 & 23 \\ -9 & 2 & 1 \end{bmatrix};\quad B=\begin{bmatrix} 15 & 21 & -4 \\ -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & 1 \end{bmatrix};\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 15 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad y \quad E=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

17.2 Hallen la opuesta de

$$A=\begin{bmatrix} 15 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1/2 \end{bmatrix}, \; B = [\,15 \quad -25 \quad 11/5\,] \quad y \quad C=\begin{bmatrix} 34 \\ -27 \\ 4/8 \\ \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

17.3. Sean las matrices $A = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ y $C= \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

Determinen AxB; BxA; AxC y CxA.

¿Qué relaciones pueden establecer entre estas matrices?

18. Las empresas A, B, C y D, de productos lácteos, cotizaron sus acciones en bolsa a \$20, \$30, \$50 y \$80 cada una, respectivamente. Al día siguiente las acciones de las cuatro empresas sufrieron una baja del 3%, 5%, 4,2% y 6%, respectivamente.

a) Escriban en una matriz los cambios registrados en las acciones.

b) Incorporen una fila (o columna) donde figure la baja en pesos de cada una de las acciones de cada empresa.

19. El departamento de planificación de la cadena de frigoríficos ha hecho un relevamiento de las ventas (en miles de pesos) registradas de lunes a viernes de una determinada semana en sus cuatro principales secciones:

Sección A:	9;	11;	8,6;	7,5;	5,5.
Sección B:	8,8;	12,2;	5,3;	10,5;	12,9
Sección C:	12,5;	14;	6,4;	12,2;	10,5
Sección D:	16;	12,5;	10,2;	16,1;	12,4.

a) Representen de la forma más clara posible las ventas de las distintas secciones registradas de lunes a viernes, para su posterior procesamiento y manipulación en la obtención de nuevos datos.

b) ¿Qué representan los elementos de la 2da. fila?

c) ¿Qué representan los elementos de la 2da. columna?

d) ¿Qué representa la suma de los elementos de la 1era. fila?

e) ¿Qué representa la suma de los elementos de la 4ta. columna?

20. La producción de energía de todas las fuentes de una región que satisfizo el consumo está dada por la matriz

$$E=\begin{bmatrix} 7,5 & 2,8 & 3,0 & 0,2 \\ 3,2 & 1,1 & 0,5 & 0,5 \\ 3,4 & 2,0 & 1,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$ (en unidades apropiadas).

Se proyecta que el consumo de energía se incrementará cada año en un 2% respecto del consumo energético del año anterior durante los próximos cinco años, teniendo en cuenta que las empresas lácteas tienen previsto una ampliación de sus plantas. ¿Cuál es la producción mínima que debe proyectarse para cuando hayan transcurrido esos cinco años, de tal manera que se satisfaga el consumo requerido?

21. Como consecuencia de problemas económicos, el directorio de una empresa láctea se ha resuelto rebajar en un 12% los gastos que superen los $1000. A continuación se muestra en una matriz distintos rubros de gastos:

$$B=\begin{bmatrix} 1230 & 1500 & 1750 & 1800 & 2000 \\ 1350 & 1400 & 1500 & 1560 & 1990 \\ 1100 & 1250 & 1740 & 1790 & 2300 \end{bmatrix}$$

a) Obtengan una nueva matriz donde figuren los rubros, ya aplicados los descuentos.

b) ¿Qué operación matricial pueden utilizar para hacer este cálculo?

22. Lean, planteen y resuelvan los siguientes problemas en términos de la multiplicación matricial.

a) Una empresa láctea procesa ciertas cantidades de unidades de tres variedades de queso Holanda: H1, H2 y H3 en dos departamentos distintos D1 y D2. Cada unidad del queso H1, necesita 2 hs en el departamento D1 y 5 hs en el departamento D2; cada unidad del queso H2 requiere 3 hs en D1 y 1 hora en D2 y cada unidad del queso H3 necesita 1 h en el D1 y 1 h en el D2. Si se producen 2, 1 y 12 unidades de los quesos H1, H2 y H3 respectivamente. ¿Cuántas horas por día debe trabajar cada departamento para procesar esa cantidad de productos?

b) Un corredor de bolsa vendió a dos de sus clientes acciones de las empresas lácteas A,B,C y D y en los precios cotizados, de acuerdo a la siguiente información: al cliente 1 le vendió 200 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B, 200 acciones de la empresa C y 250 acciones de la empresa D. Al cliente 2 le vendió 200 acciones de la empresa A, 150 acciones de la empresa b, 150 acciones de la empresa C y 250 acciones de la empresa D.

Cada acción de la empresa A, B, C, D, la vendió a $100, $150, $180 y $200, respectivamente.

Para cada cliente, ¿cuál es el importe total de las acciones adquiridas?

c) Una chacra de Bella Vista cultiva tres variedades de limones VL1, VL2 y VL3. Los limones se venden en dos mercados distintos MC1 y MC2.

En el mercado MC1, cada cajón de limones de la variedad VL1 produce una ganancia de $3.50; de la variedad VL2 $2.50 y de la VL3 $3.50; mientras que en el mercado MC2 cada cajón de la variedad VL1 produce una ganancia de $3.80, de la VL2 $2.70 y si es de la variedad VL3, $3.00.

Al mercado MC1 se llevan 400, 200 y 600 cajones de cada variedad, y al MC2 se llevan 360, 400 y 400 cajones de 100 limones de cada variedad. ¿Cuál es la ganancia de cada mercado? ¿En qué mercado conviene vender?

23. Planteen y resuelvan operando con matrices. Validen los resultados obtenidos.

a) Una empresa comercial tiene ingresos gravables de $312.000. Debe abonar dos impuestos: I1 e I2. El impuesto 2 es el 25% de la parte que queda después de que ha sido pagado el impuesto 1. El impuesto 1 representa el 10% de lo que queda después que el impuesto 2 ha sido pagado. Determinen el importe de cada impuesto I1 e I2.

b) Se conoce que este año una compañía tuvo una utilidad de 20 millones más que el año anterior. Además las utilidades del año actual fueron de un 25% más. Determinen las utilidades obtenidas en el presente año y en el año anterior.

Indice