CUADERNOS PARA EL DOCENTE

MATEMÁTICA

Horizontes

Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

Presidenta de la Nación
Dra. Cristina Fernández

Ministro de Educación
Prof. Alberto Estanislao Sileoni

Secretaria de Educación
Prof. María Inés Abrile de Vollmer

Subsecretaria de Equidad y Calidad
Lic. Mara Brawer

Subsecretario de Coordinación Administrativa
Arq. Daniel Iglesias

Directora Nacional
de Gestión Curricular y Formación Docente
Prof. Marisa del Carmen Díaz

Directora General
Unidad de Financiamiento Internacional
A.G. María Inés Martínez

Cuadernos para el docente. Matemática - Serie Horizontes - 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación, 2009.
116 p.: il. ; 27x20 cm.

ISBN 978-950-00-0740-5

1. Educación Rural. 2. Formación Docente.
CDD 371.1

Área de Educación Rural
Olga Zattera, *coordinadora*
Viviana Fidel, *coordinadora de materiales impresos*

Autores
Norma Saggese, *coordinadora del área*
Gabriela Scarfone, *colaboradora autoral*
Noemí Scaletzky, *procesadora didáctica*

Área de producción editorial
Gonzalo Blanco, *coordinación*
María Celeste Iglesias, *documentación fotográfica*
Mario Pesci, *asistencia gráfica*
Willay Estudio, *edición, diseño y diagramación*

PROMER - Proyecto de Mejoramiento de la Eduación Rural
Préstamo BIRF 7353-AR
Leonardo D. Palladino, *coordinador general*
María Cavanagh, *responsable de adquisiciones y contrataciones*
Sergio Ten, *especialista delegado*

Pizzurno 935, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina
Impreso en la Argentina
Hecho el depósito que marca la ley 11.723
ISBN 978-950-00-0740-5

Agradecemos especialmente a las instituciones que han autorizado en forma gratuita la reproducción de las imágenes y los textos incluidos en esta obra.

Estimados docentes:

El Ministerio de Educación de la Nación ha realizado, durante los últimos años, diversas acciones para garantizar que todos, las niñas, niños y jóvenes que viven en las zonas más aisladas de nuestro país, tengan acceso pleno a una educación de calidad allí en los lugares donde viven.

Conscientes del camino recorrido y de lo que aún tenemos por avanzar, nuestra gestión seguirá afrontando junto con ustedes el doble desafío que esta modalidad educativa representa: la permanencia de los jóvenes en el lugar en que han elegido vivir, elección que se debe sostener en una trayectoria educativa que asegure su ingreso, avance y culminación de la escolaridad obligatoria.

La Ley de Educación Nacional, sancionada por el Congreso Nacional el 14 de diciembre de 2006, abre nuevos retos y oportunidades para educar en la ruralidad, al constituir a la educación rural como modalidad del sistema educativo y establecer la viabilidad de determinar alternativas específicas, que resulten adecuadas a los requerimientos y características de la población que habita en contextos rurales y con ello garantizar la existencia de una propuesta educativa que permita el cumplimiento de la obligatoriedad escolar.

Con el propósito de avanzar hacia una educación de calidad para todos y convencidos de la necesidad de desarrollar acciones que reconozcan las singularidades de los espacios locales, hemos desarrollado propuestas pedagógicas que se implementan de manera articulada entre la Nación y las provincias. Todas ellas contemplan el trabajo compartido de los docentes, alumnos y comunidades de una misma zona, para que todos ellos puedan planificar actividades a partir del intercambio y el consenso que representen las sentidas necesidades de cada situación local. Por otra parte, reconociendo la potencialidad de la enseñanza en instituciones de matrícula reducida, se ha pensado especialmente en los modelos de organización que determinan la constitución de grupos escolares conformados por alumnos matriculados en diferentes años de escolaridad que aprenden en el mismo espacio y al mismo tiempo. Se trata de recuperar la tradición de la escuela primaria en cuanto a que los plurigrados garantizan la oferta escolar en comunidad pequeñas y posibilitan valorar desde la tarea docente la diversidad en el aula.

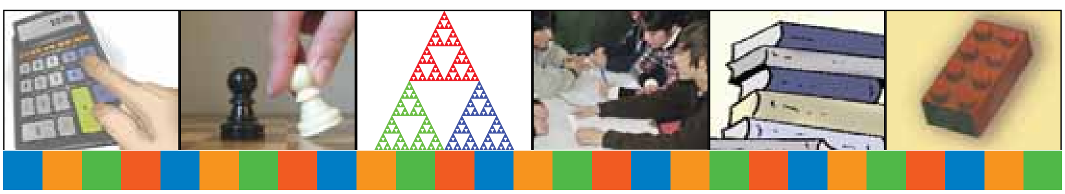
El trabajo docente en el marco de escuelas agrupadas y en el modelo de organización en pluriaño, imponen nuevos desafíos a la educación secundaria, habida cuenta de la necesaria transformación del nivel en todos los contextos, por la que se está trabajando denodadamente. Se trata de reconocer la importancia de la convivencia de formas escolares diferentes, roles docentes renovados, contenidos sustantivos para todos los alumnos y alumnas, resignificados en cada contexto, a la luz de la valoración y el reconocimiento de los saberes y necesidades locales.

En esa dirección se busca que este material acompañe el trabajo cotidiano de los docentes y se propone que las orientaciones que se expresan en él se enriquezcan desde la experiencia de cada uno de ustedes y desde la construcción compartida en las instancias de encuentro con los colegas de escuelas cercanas.

Se espera, entonces, que las diversas propuestas que se plantean, contribuyan a mejorar las prácticas de enseñanza en las escuelas rurales de todo el país y favorezcan la construcción de aprendizajes valiosos de modo de avanzar en el desarrollo de una educación de calidad con igualdad de oportunidades para todos nuestros niñas, niños y jóvenes.

Alberto Estanislao Sileoni
Ministro de Educación

ÍNDICE



Introducción

Este Cuaderno está destinado al equipo docente que se desempeña en el Ciclo Básico de la Educación Secundaria Rural y en tal sentido tiene como propósito poner a su disposición los fundamentos de la propuesta, hacer explícitos los argumentos didácticos y ofrecer orientaciones para la puesta en práctica.

Se trata de un material pensado para acompañar la tarea de los docentes, colaborando con información, sugerencias y orientaciones para la toma de decisiones, por ejemplo, sobre la planificación y organización del trabajo en el aula, el uso de materiales y recursos, el acompañamiento a los alumnos, el desarrollo de proyectos y otras tareas que implica llevar adelante **Horizontes.**

La propuesta para el área de Matemática, al igual que las correspondientes a otras áreas, se orienta a cubrir los aprendizajes de una selección de contenidos contemplados en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) para ser trabajados durante este Ciclo, a los que podrán incorporarse otros que las autoridades provinciales, locales e institucionales consideren significativos.

Los contenidos y actividades toman en cuenta, tanto las particularidades de las escuelas rurales y su comunidad, como las oportunidades que debe ofrecer la Escuela Secundaria a los jóvenes durante su formación, más allá del lugar del país donde residan. También se reconoce que son los participantes del acto educativo —profesores, maestros y alumnos— quienes completan y definen la propuesta de enseñanza durante la tarea cotidiana, en el marco de la particular modalidad organizacional definida en cada provincia para la implementación del Ciclo Básico de la Educación Secundaria en ámbitos rurales, según cada realidad institucional, las características del grupo que conforman, su historia escolar previa, sus intereses y necesidades, etcétera.

Recorrer el contenido de este Cuaderno es, en cierto modo, recorrer la propuesta del área desde las primeras decisiones tomadas respecto de qué aprenderán los alumnos, cómo, por qué, para qué, pasando revista a los criterios a partir de los cuales se organizan la enseñanza y el aprendizaje. Desde ese marco conceptual se abordará el análisis de propuestas concretas diseñadas para el trabajo en el aula, se reflexionará sobre su sentido y significado y se tomarán en cuenta sugerencias que puedan contribuir a la tarea de enseñar.

Emprender este recorrido en paralelo con una mirada atenta sobre el contenido de los Cuadernos de estudio favorecerá la comprensión acerca de cómo están pensados esos materiales, tanto desde la perspectiva de uso y aprovechamiento por parte de los alumnos, como desde las decisiones y modalidades de intervención correspondientes del equipo docente. Los Cuadernos de estudio dan dirección a la tarea de alumnos y docentes. Es por

eso por lo que en este material se retoman desarrollos, propuestas, consignas que ellos contienen, para analizar los modos en que los alumnos estarán avanzando en su aprendizaje y qué aportes didácticos puede ofrecer el equipo docente para un buen acompañamiento a la tarea del alumno con su CUADERNO DE ESTUDIO de Matemática.

En cuanto a lo específico del área, la Matemática puede considerarse tanto una herramienta para el progreso social, por sus aportes al desarrollo comercial y tecnológico y a la modelización de fenómenos naturales o sociales, como una estructura formal con definiciones y reglas perfectamente organizadas. Así, la enseñanza de la Matemática debe considerar simultáneamente ambos aspectos: por un lado el instrumental, vinculado con la resolución de situaciones en el contexto social y por otro lado, el aspecto formativo asociado al desarrollo de estructuras lógicas de pensamiento y la transmisión de saberes culturales.

En los distintos documentos curriculares provistos por el Ministerio de Educación de la Nación y los de las jurisdicciones, la referencia al área de Matemática no se limita sólo a enunciar los contenidos, sino que se plantea claramente un enfoque sobre su enseñanza que retoma las líneas de las investigaciones más recientes en el campo de la didáctica. Según estas renovadas perspectivas se considera que el nudo central de la formación matemática es la resolución de problemas. Esta concepción constituye una preocupación para muchos docentes, aún cuando sus propuestas de enseñanza puedan diferir. En ocasiones, se entiende por "resolver un problema" sólo la posibilidad de acertar con los cálculos necesarios para resolverlo. En cambio, desde esta perspectiva didáctica se reconoce la resolución de problemas como una actividad mental compleja en la que no se trata solamente de calcular una respuesta numérica; es un proceso mucho más amplio que consiste en la identificación del problema inmerso en una masa de información, el reconocimiento de la situación a la que pueden aplicarse métodos matemáticos, la búsqueda de la técnica adecuada para resolverlo y, al llegar a una solución, poder explicitar el modo en que se lo ha resuelto. Posteriormente, es fundamental la tarea del docente para institucionalizar los descubrimientos de los alumnos y otorgar entidad de conocimiento matemático a los procedimientos utilizados y a las relaciones descubiertas. Así, los saberes en juego quedan habilitados para su posterior utilización como herramientas en la resolución de nuevos problemas.

Los tipos de experiencias proporcionadas por los docentes desempeñan un papel importante en cuanto a la amplitud y a la calidad del aprendizaje. La comprensión de ideas matemáticas se puede alcanzar a lo largo de la escolarización si se compromete a los alumnos activamente en tareas y experiencias diseñadas para que profundicen y relacionen sus propios conocimientos.

1.

La propuesta de Matemática en Horizontes

1. La organización de este Cuaderno

El objetivo de este material es explicitar la propuesta pedagógico-didáctica y el enfoque del área que sustenta los CUADERNOS DE ESTUDIO del área de Matemática. Para ello se ha elegido una modalidad que permite mostrar, de modo directo y a través de algunos ejemplos, cómo están organizados y de qué manera está pensada la propuesta de enseñanza. Se han seleccionado algunas unidades de los tres CUADERNOS DE ESTUDIO por conformar **bloques temáticos.** A partir de estos “bloques de unidades” se irán señalando algunas decisiones que fueron tomadas en relación con los contenidos y su enseñanza. A medida que se presenten estos aspectos se destacarán las características de la organización didáctica, de la propuesta de enseñanza, los contenidos de Matemática seleccionados, el enfoque del área que se adoptó y algunas sugerencias y modos posibles de intervención docente. Se ofrecen orientaciones generales, aunque siempre con referencias concretas a las actividades planteadas a los alumnos en los CUADERNOS DE ESTUDIO.

Tal como fue ya explicado se considera a la unidad didáctica como organizadora de la tarea en el aula. En el interior de cada unidad, las actividades no se presentan sueltas o desconectadas sino que se articulan en una secuencia didáctica de acuerdo con un eje. Su ubicación y contenido cobran sentido en el marco de la propuesta de enseñanza. Los temas que se incluyen en cada unidad están pensados para ser desarrollados, aproximadamente, en dos semanas. No obstante, algunos temas que constituyen bloques temáticos y cuya enseñanza requiere mayor tiempo, pueden desplegarse en más de una unidad; por lo tanto, necesitarán desarrollarse en un tiempo más prolongado.

El modo de abordaje de este Cuaderno destinado a los docentes se apoya en la decisión de vincular los marcos teóricos con la práctica concreta en el aula. De manera que, a medida que se avanza en las explicaciones, se irá ejemplificando con las actividades de las unidades de los CUADERNOS DE ESTUDIO. En algunos casos, se incluirá la actividad completa y en otros, sólo una selección que permitirá indicar a qué actividad o parte de ella se está aludiendo. En esos casos se la podrá consultar en su totalidad en el material de los alumnos.

Además de la explicación del enfoque de enseñanza y de los ejemplos presentados, se incluye también un apartado con una serie de actividades para realizar con la calculadora. Se ha decidido dedicarle un lugar especial porque, además de ser una herramienta para facilitar las operaciones, la calculadora es un excelente medio para proponer problemas. Por otra parte, libera importante cantidad del tiempo que los alumnos usualmente dedican a hacer cálculos con lápiz y papel, para destinarlo a lo que realmente se considera que es aprender Matemática, es decir, comprender las operaciones y sus propiedades, apreciar los conceptos de estimación y aproximación y de este modo concentrarse en la resolución de un problema y no en los cálculos asociados a la situación.

Finalmente, se presentan algunas orientaciones para la resolución de los *Desafíos matemáticos* que se encuentran al final de cada unidad de los CUADERNOS DE ESTUDIO. El objetivo de ofrecer estos desafíos es proponer a los alumnos una colección de situaciones problemáticas abiertas, que no necesariamente están vinculadas con los temas tratados en la unidad. Pueden contener relatos, juegos, curiosidades, adivinanzas o rompecabezas que constituyen ejercicios innovadores. Por un lado, tienen rasgos comunes con los problemas que se abordan en las unidades: una incitación al ensayo, la exploración, la reflexión sobre posibilidades, la elección de estrategias y la progresiva profundización. Por otro lado, se trata de enunciados suficientemente flexibles para proponerlos a alumnos de diferentes edades sin que pierdan su atractivo.

2. Criterios de selección de los contenidos

Los contenidos del área Matemática contemplados para todo el ciclo en **Horizontes** han sido seleccionados a partir de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) aprobados por el Consejo Federal de Educación. Se han abordado todos los ejes de contenido de los NAP: Números y operaciones, Geometría y Medida, Álgebra, Probabilidad y Estadística, aunque no han sido desarrollados exhaustivamente.

Algunas unidades que responden a un eje común se han agrupado en *bloques temáticos*, tal como se puede observar en el cuadro de organización de los contenidos que se presenta en el apartado **3**.

Por ejemplo:
- En las cuatro primeras unidades del CUADERNO DE ESTUDIO 1, el eje longitudinal es el tratamiento de la **proporcionalidad**.
- En el CUADERNO DE ESTUDIO **2**, las unidades **13**: *Álgebra I*, **14**: *Álgebra II* y **15**: *Funciones*, introducen a los alumnos en el tratamiento del **Álgebra**.
- En el CUADERNO DE ESTUDIO **3** las unidades **11**: *Ecuaciones*, **12**: *Funciones II*, **13**: *Sistemas*, **14**: *Sistemas de inecuaciones* y **15**: *Funciones III*, retoman los conocimientos adquiridos y las recrean con un **enfoque funcional**.

Finalmente, una lectura horizontal de las unidades temáticas permite observar que desde el CUADERNO DE ESTUDIO **1** y hasta el **3**, algunos contenidos presentan una organización espiralada en cuanto a la amplitud y la profundidad de su tratamiento.

Por ejemplo: la unidad **5** del CUADERNO DE ESTUDIO **1,** que introduce las primeras nociones de Estadística, se corresponde con la unidad **5** de *Probabi-lidad* en el CUADERNO DE ESTUDIO **2** y en el CUADERNO DE ESTUDIO **3** se retoma el tratamiento estadístico de datos con mayor nivel de profundidad.
Lo mismo puede señalarse con relación a la unidad **9** del CUADERNO DE ESTUDIO **1** que aborda la simetría y se corresponde con la unidad **9** del CUADERNO DE ESTUDIO **2**, sobre homotecia y semejanza y en el CUADERNO DE ESTUDIO **3,** con la propiedad fundamental de la semejanza. Estas vinculaciones podrán observarse en el cuadro de organización de contenidos, en el apartado siguiente.

En esta propuesta, y siempre que la selección de contenidos lo permita, se respeta esta organización espiralada en cuanto al tratamiento de un mismo eje con diferentes niveles de amplitud y profundidad. El objetivo es facilitar la tarea del docente a cargo de un aula múltiple compartida por alumnos de diferentes edades y matriculados en distintos años de escolaridad.

En síntesis, los tres criterios señalados para la selección de contenidos —la relación con los NAP, la constitución de bloques temáticos y la horizontalidad—, permiten poner de relieve los criterios didácticos implicados en su desarrollo.

3. La organización de los contenidos

En cada uno de los Cuadernos de estudio, los contenidos seleccionados han sido organizados en dieciséis unidades cuyos títulos se presentan en el siguiente cuadro.

ORGANIZACIÓN DE CONTENIDOS DE CUADERNOS DE ESTUDIO 1, 2 Y 3 DE HORIZONTES

Unidad	Cuaderno de Estudio 1	Cuaderno de Estudio 2	Cuaderno de Estudio 3
1	Uso de los números	Números enteros	Matemática cotidiana
2	Proporcionalidad directa	Números racionales	Progresiones y sucesiones
3	Relaciones no proporcionales y proporcionalidad inversa	Potenciación y radicación. Notación científica	Potenciación y radicación
4	Escalas, mapas y planos	Introducción a la combinatoria, estrategias de conteo	Funciones I
5	Estadística	Probabilidad	Estadística
6	Triángulos	Movimientos	Trigonometría I
7	Cuadriláteros	Simetría en cuadriláteros	Trigonometría II
8	Cuerpos y figuras	Ángulos, posiciones relativas	Operaciones directas e inversas
9	Simetría	Homotecia y semejanza	Propiedad fundamental de la semejanza
10	Medición de ángulos	Relación pitagórica	Teorema de Tales
11	Medición de peso y capacidad	Volumen y área	Ecuaciones
12	Áreas en cuerpos y figuras	Relaciones métricas en figuras	Funciones II
13	Equivalencia de figuras	Álgebra I, ecuaciones, inecuaciones	Sistemas
14	El número ≠, circunferencia y círculo	Álgebra II, fórmulas de regularidades	Sistemas de inecuaciones Programación lineal
15	Polígonos	Funciones	Funciones III
16	Poliedros	Lugares geométricos	Números reales

En el cuadro se han señalado con sombreados ciertos bloques de unidades con la finalidad de destacarlos para facilitar la lectura de las posteriores observaciones, vinculadas con la selección y organización de los contenidos.

La mirada global del ciclo brinda, además, un panorama de conjunto que resultará muy útil para tomar decisiones de planificación en cada año y en la organización del pluriaño.

A

Observe la "organización de los contenidos" que se presenta en el cuadro y realice una lectura en paralelo con la lectura del índice de los Cuadernos de estudio correspondientes.

El propósito es que identifique en el cuadro:
- los contenidos previstos para cada Cuaderno de estudio y su organización en unidades;
- qué otras asociaciones existen entre los temas, además de las que han sido señaladas como ejemplos de bloques.

A partir de la lectura del índice de cada Cuaderno de estudio tendrá una aproximación a las actividades de la unidad. Puede completar este primer panorama recorriendo una unidad de cada Cuaderno de estudio para tomar contacto con las secuencias, tipos de consignas, diferentes formatos textuales, orientaciones y otros desarrollos que dan cuenta del tratamiento de los contenidos, de cómo se va guiando el trabajo de los alumnos, de los procesos en los que se los involucra y lo que se espera de ellos.

4. Matemática en Horizontes

A lo largo de los tres Cuadernos de estudio se puede observar una fuerte presencia de contenidos geométricos. Esta determinación no es casual; obedece a que las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas tanto en otras áreas de la Matemática como en situaciones del mundo real. En la vida cotidiana usamos diariamente conocimientos matemáticos, muchas veces sin darnos cuenta de ello. Por ejemplo, cuando estimamos las dimensiones de una chacra, cuando guardamos en una alacena los alimentos envasados o los libros en una biblioteca tratando de potenciar el uso del espacio. Por otra parte, la Geometría es mucho más que un conjunto de definiciones: es describir con precisión, clasificar y comprender las relaciones entre objetos de dos y tres dimensiones razonando sobre las propiedades que los definen, utilizar modelos geométricos para representar y explicar relaciones numéricas y algebraicas en el arte, las ciencias y la vida diaria. La Geometría contribuye a la formación matemática de los alumnos desde los primeros años de la escolaridad. Por esta razón en **Horizontes** se intenta ofrecer a alumnos y docentes unidades con actividades secuenciadas y recursos apropiados para que, con el apoyo de los docentes, los estudiantes puedan adquirir habilidad para describir e interpretar el entorno físico que los rodea y desarrollar su razonamiento espacial.

Los niños, desde pequeños están en condiciones de observar y describir en forma espontánea una diversidad de figuras e intuir sus propiedades. ¿Cómo puede aprovechar la escuela estos conocimientos espontáneos? Desde el comienzo de la escuela primaria, los alumnos, por ejemplo, observan en la práctica que los rectángulos son apropiados para construir embaldosados porque tienen cuatro ángulos rectos. Más adelante, con el acompañamiento del docente, serán capaces de conjeturar acerca de los rectángulos que siempre tienen diagonales congruentes y que se cortan en su punto medio.

Estas crecientes posibilidades de razonamiento a lo largo de la formación matemática de un sujeto fueron estudiados por Pierre y Marie Van Hiele quienes las describieron según diferentes **niveles** que van desde el razonamiento intuitivo de los niños del Nivel Inicial hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las Facultades de Ciencias. De acuerdo con el modelo de Van Hiele:

- el nivel 1 es denominado nivel de **reconocimiento o visualización**;
- el nivel 2, de **análisis**;
- el nivel 3 de **clasificación o abstracción**;
- el nivel 4 de **deducción**,
- el nivel 5 del **rigor**.

Esta clasificación en niveles puede orientar la tarea docente, ya que si el alumno es guiado por experiencias educativas adecuadas, se favorece su avance a través de los niveles de razonamiento, empezando como todos con el reconocimiento de figuras (nivel 1), progresar luego hacia el descubrimiento de las propiedades de las figuras y hacia el razonamiento informal acerca de estas figuras y sus propiedades (niveles 2 y 3) y culminar con un estudio riguroso de Geometría axiomática (niveles 4 y 5). Cada nivel se construye sobre el anterior y no se corresponde exactamente con los ciclos de escolaridad; el desarrollo de los conceptos espaciales y geométricos coincide con una secuencia desde planteamientos inductivos y cualitativos, hacia formas de razonamiento cada vez más deductivas y abstractas. En particular conviene señalar que el nivel de *deducción* se va construyendo a lo largo de toda la escuela secundaria en tanto que el nivel superior, el *del rigor*, en general sólo es alcanzado por quienes se dedican específicamente al estudio de la Matemática.

Se puede ver así que en **Horizontes**, la organización interna de los contenidos de Matemática propone que los alumnos logren un creciente grado de abstracción.

5. Orientaciones didácticas

Las secuencias de actividades propuestas para cada una de las unidades constituyen situaciones de enseñanza que promueven:

- **Momentos de trabajo individual y organización del aula en pequeños grupos de aprendizaje**
  Es preciso considerar que en todo proceso de aprendizaje escolar hay momentos de trabajo colectivo y momentos de trabajo individual. La producción también varía: hay producción colectiva, de pequeños grupos y producción individual. Conviene señalar que el trabajo colectivo o grupal no es igual a la suma de los trabajos individuales, sino que es otra instancia, nueva y original. Por otra parte, el trabajo en grupos promueve relaciones de convivencia escolar, contribuye a mejorar las condiciones de socialización de los alumnos y constituye un factor determinante de valiosos aprendizajes.

- **El desarrollo de la autonomía del alumno**
  Se propician situaciones de aprendizaje que promuevan la capacidad de los jóvenes de ejercer iniciativa, de no aceptar ciegamente lo que se le ofrece, sino plantear y plantearse interrogantes, defender sus convicciones, buscar respuestas por sí mismos, criticar, verificar.

- **El intercambio entre el docente y los alumnos**
  La presencia del docente con sus intervenciones es condición necesaria para los aprendizajes de los alumnos, tanto en el momento de planear la tarea y prestar su apoyo si fuera necesario, como en el de coordinar una puesta en común, en momentos determinados, en los que cada pequeño grupo tiene la posibilidad de compartir con sus pares un momento de reflexión sobre la tarea realizada.

- **La utilización del juego como recurso para el aprendizaje**
  En el caso de esta propuesta de enseñanza, se trata de juegos estructurados según pautas, normas tácitas o explícitas en las que los participantes pueden innovar siempre que haya consenso sobre las nuevas reglas. Uno de los aspectos más relevantes del uso de este recurso consiste en que los alumnos aprenden a sostener discusiones racionales acerca de un juego de base matemática. Después pueden trasladar esas condiciones de racionalidad —escucharse, argumentar razonando para defender sus ideas— a otras áreas en las que las conclusiones no resultan auto correctoras, como en el caso del saber matemático, sino que están influidas por situaciones familiares, estilos culturales o sociales diversos.

- **La sistematización de la información y la elaboración de generalizaciones**
  Se llevan a cabo a través de puestas en común de las producciones individuales y de los pequeños grupos de trabajo, coordinadas por el docente.

- **El tratamiento creciente de los contenidos temáticos**
  Se proponen situaciones que van desde la observación de las propiedades de los objetos del entorno, a los aspectos más ligados con la dimensión disciplinar.

A

Cada una de las orientaciones anteriores juega un papel importante en el desarrollo de la propuesta didáctica. Le sugerimos que busque en las actividades de los tres CUADERNOS DE ESTUDIO del alumno algún ejemplo de cada una de ellas. Una vez ubicada la actividad y la consigna, puede realizar el ejercicio de anotar qué intervenciones docentes le parece que podrán favorecer esta perspectiva adoptada.

A modo de ejemplo se plantean algunas preguntas vinculadas con los momentos de trabajo individual y organización del aula en pequeños grupos de aprendizaje para orientar su reflexión:

- ¿Qué indicaciones o consignas puede aportar para propiciar que en el trabajo grupal se realice un real intercambio de argumentos entre los alumnos?
- ¿De qué modo destacar y mostrarles a los alumnos que en el trabajo en grupos se puede producir una idea nueva y diferente de la que cada uno sus integrantes posee por separado?

La actividad que se propuso es una primera aproximación a los CUADERNOS DE ESTUDIO para comenzar a conocer sus características. A medida que realice una lectura más completa y profundice el análisis de las unidades, podrá retomar estas primeras anotaciones y reconsiderarlas.

2.

Organización y desarrollo de las secuencias didácticas

1. La organización de secuencias de actividades en unidades de aprendizaje

En la organización de las unidades se han tenido en cuenta las sucesivas etapas que constituyen momentos o *fases* del proceso de aprendizaje y la centralidad del conocimiento geométrico. Interesa destacar que desde la perspectiva de **Horizontes**, el aprendizaje de la Matemática es un proceso complejo muy distinto de la adquisición de los algoritmos por un ejercicio de la memoria. En el aprendizaje se pueden presentar obstáculos, errores de razonamiento, de estimación o de cálculo, avances y retrocesos que a veces el docente sanciona. Sin embargo, en lugar de sancionarlos, estos "errores" que presentan los chicos pueden ser aprovechados por el docente porque son reveladores de las estrategias de los alumnos que muchas veces sorprenden por su originalidad.

Una verdadera *situación problemática* obliga al alumno a superar una dificultad por medio de un nuevo aprendizaje, ya se trate de una simple transferencia, de una generalización o de la construcción de un conocimiento totalmente nuevo (Perrenoud).

En estos Cuadernos de estudio, las situaciones de aprendizaje se incluyen en una secuencia didáctica en la que cada situación es una etapa de una progresión que constituye una *unidad de aprendizaje*.

La organización de esas *unidades* tiene como objetivo favorecer el pasaje del alumno a través de los distintos momentos de desarrollo de su razonamiento mediante la presentación de actividades significativas que estén a su alcance. Las *secuencias didácticas* de las unidades de Matemática presentan actividades que apuntan a procesos cognitivos diferentes y que responden, en general, a una serie de momentos o *fases*.

Se trata de:

- **Actividades que apuntan a brindar información** en las que se pone en discusión cierto material que contribuye a clarificar el contexto de trabajo.
- **Actividades que apuntan a una orientación dirigida** proporcionando material por medio del cual el alumno aprende las principales nociones del campo de conocimiento que se está explorando. El material y las nociones que se trabajarán, fueron seleccionadas en función del nivel de razonamiento de los alumnos.
- **Actividades que contribuyen a la explicitación de los resultados encontrados por los alumnos.** Los orienta en el proceso de apropiación del lenguaje matemático pertinente a través de intercambios y discusiones en clase, conducidos por el docente.
- **Actividades de orientación libre**, que proporcionan al alumno materiales con varias posibilidades de uso. El docente puede dar diferentes instrucciones, según su conocimiento sobre los alumnos, que les permitirán diversas formas de actuación.
- **Actividades de integración** en las cuales se invita a los alumnos a reflexionar sobre sus propias acciones, que realizaron en las fases anteriores. De este modo el estu-

diante tiene la posibilidad de adquirir una nueva red de relaciones cada vez más amplia que se conecta con la totalidad del dominio explorado. Este nuevo nivel de conocimiento, adquirido a través del desarrollo de la unidad, es la base para continuar con el estudio de las unidades siguientes.

Es importante aclarar que estos diferentes tipos de actividades no se presentan obligatoriamente en todas las secuencias, sino que conforman distintas propuestas de organización para la enseñanza del tema de una unidad. La propia dinámica de la tarea didáctica, en algunas circunstancias, requiere la inclusión de algunas y no de otras.

Es conveniente que el docente resuelva con anterioridad las actividades de los Cuadernos de estudio. De este modo, podrá realizar una reflexión antes de cada clase acerca de las orientaciones que deberá proponer a sus alumnos para que puedan resolver esas actividades o de la necesidad de aprendizajes previos que necesita promover. Dado que algunas podrán resultar más sencillas que otras, es muy importante que el docente pueda decidir en qué actividades debería intervenir para apoyar los aprendizajes de los alumnos y de qué maneras diferentes podría hacerlo. Es importante recordar que los alumnos deben intentar resolver solos los problemas. También por esta razón, se destaca la conveniencia de anticipar la lectura para disponer de estrategias de trabajo y de intervención docente en los casos en que las actividades presenten alguna dificultad.

1.1. Las nociones geométricas

La organización de las secuencias de actividades que se proponen en cada unidad está fuertemente determinada por el contenido temático seleccionado.

Dada la importancia de los conocimientos geométricos y su vinculación con la práctica cotidiana es importante que los niños, en los primeros años de su escolarización, desarrollen destrezas de visualización a través de experiencias que les permitan manipular distintos objetos geométricos a su alcance.

Los alumnos del Segundo Ciclo generalmente dominan las nociones de posición relativa como arriba, detrás, cerca, entre, a la derecha, a la izquierda y pueden usar cuadrículas para localizar objetos y medir la distancia entre puntos situados en rectas horizontales o verticales. Estas experiencias iniciales facilitan luego el abordaje en el plano de las coordenadas rectangulares, que son de gran utilidad para resolver problemas de Álgebra.

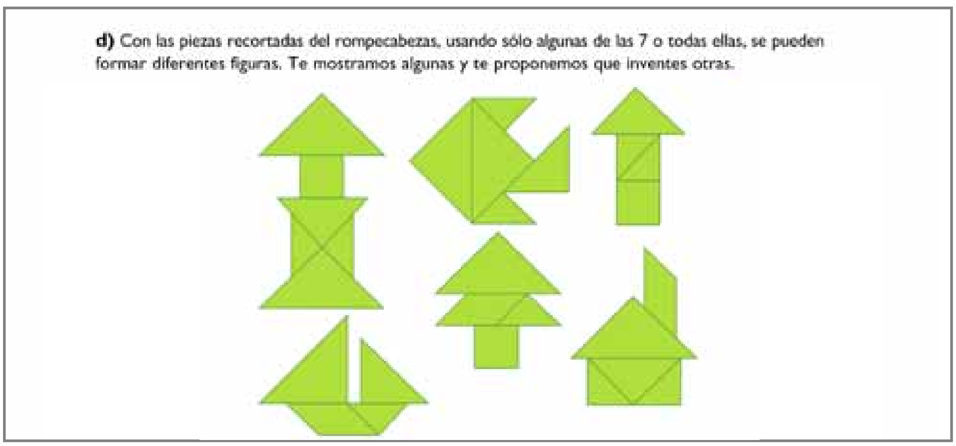
En la escuela secundaria, cuando los alumnos estudian temas como la semejanza y la congruencia deberían aprender a utilizar el razonamiento deductivo y técnicas para probar sus conjeturas acerca de situaciones espaciales. Por ejemplo, en este nivel, se propone un recurso geométrico como la recta numérica, que brinda una interpretación de los números naturales y puede utilizarse más tarde para representar operaciones con otros tipos de números. Además constituye el soporte para la construcción de la noción de línea de tiempo indispensable en el área de Ciencias Sociales.

También al abordar el estudio de la proporcionalidad, la Geometría ofrece innumerables ejemplos que permiten el estudio de correspondencias crecientes, decrecientes, proporcionales y no proporcionales. Por ejemplo, el estudio de la variación entre la base y la altura de los rectángulos del mismo perímetro.

A Analice a modo de ejemplo de esta perspectiva, el estudio de la variación entre la base y la altura de los rectángulos del mismo perímetro. Puede consultarlo en el CUADERNO DE ESTUDIO **1**, página **40**.

Las ideas geométricas también facilitan el estudio de las mediciones. Los niños pequeños empiezan por comparar y ordenar objetos en la etapa en que la longitud es el centro de la atención utilizando expresiones cualitativas como: más largo y más corto. A medida que avanzan en estas experiencias la incorporación de la noción de *medida* lleva al uso de fracciones para continuar con el estudio del perímetro, el área y el volumen.

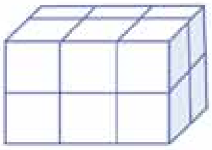
En el CUADERNO DE ESTUDIO **1**, unidad **1**, se propone la exploración del cambio de los atributos de un objeto y cómo afecta a ciertas medidas, por ejemplo, separando y agrupando de otra forma las piezas de una figura para que adviertan que puede cambiar el perímetro, pero no cambia el área.


d) Con las piezas recortadas del rompecabezas, usando sólo algunas de las 7 o todas ellas, se pueden formar diferentes figuras. Te mostramos algunas y te proponemos que inventes otras.

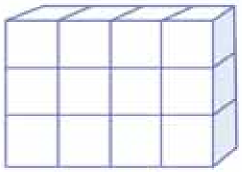
Esta idea se puede ampliar explorando cómo puede variar la superficie total de un prisma recto rectangular sin modificar su volumen, tal como se observa en el CUADERNO DE ESTUDIO **1**, unidad **12**, actividad **4**.

g) Lée la siguiente información y comparala con las anotaciones que hiciste en tu carpeta. Si es necesario, modificá tus respuestas.

Hay cuerpos que tienen el mismo volumen pero distinta forma y área.



Volumen: 12 cm^2
Área total: 32 cm^2



Volumen: 12 cm^3
Área total: 38 cm^2

h) Conversá con tus compañeros y con el maestro acerca de lo que aprendieron en esta actividad.

1.2. Los números y las operaciones

La opción elegida toma la Geometría como eje del desarrollo de los contenidos, sin dejar de lado el manejo de los números naturales y fraccionarios.

En la resolución de los problemas geométricos, los alumnos podrán mostrar su capacidad para:

- usar diferentes formas de representación de los números;
- establecer relaciones entre ellos al realizar operaciones;
- aplicar propiedades de la adición y multiplicación;
- calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables.

En esta serie de cuadernos se puede notar una progresión en el uso de los números. En el CUADERNO DE ESTUDIO **1** los números se usan en la resolución de problemas; en el CUADERNO DE ESTUDIO **2** se consideran las propiedades estructurales de los conjuntos de números enteros y racionales y el CUADERNO DE ESTUDIO **3** culmina con la presentación del conjunto de los números reales y su característica de completitud.

Es importante señalar que ciertas nociones como la proporcionalidad se abordan en relación con la resolución de problemas desde los primeros años de escolaridad y se generalizan, consolidan y formalizan progresivamente a lo largo de toda la trayectoria escolar del estudiante. Por esa razón hemos elegido para comentar más adelante y con mayor profundidad, una unidad del CUADERNO DE ESTUDIO **1** en la que, junto con la reflexión acerca de los números y las operaciones, el eje de contenido temático es la proporcionalidad.

1.3. De los procedimientos locales a los procedimientos expertos: el tratamiento de la proporcionalidad

Al analizar el tratamiento que se le da en la escuela a la proporcionalidad se puede apreciar que en un principio se la utiliza como una “herramienta útil” y mucho más adelante como una función. De tal modo, los alumnos más jóvenes se enfrentan a numerosos problemas que resuelven apoyándose implícitamente en las propiedades de la proporcionalidad:

- la idea de “tantas veces más o tantas veces menos” (si compro el triple de objetos, pagaré el triple) es una de las *propiedades de linealidad* que usan con mayor frecuencia aunque no la hayan aprendido en la escuela;
- el *coeficiente de proporcionalidad* es puesto en juego particularmente en los casos en los que se vinculan dos magnitudes de la misma naturaleza como en el caso de las mezclas (cinco vasos de agua por cada uno de jarabe) o en la ampliación y reducción de figuras a escala (las dimensiones en el papel son cien veces más pequeñas que en la realidad). En la escuela, aprenderán luego cómo simbolizar el coeficiente de proporcionalidad y cómo operar con él.

En el CUADERNO DE ESTUDIO **1**, unidad **3**, actividad **4** y después de haber explorado diversas relaciones en tablas y gráficos, los alumnos abordan la noción de coeficiente o constante de proporcionalidad.

a) Leé esta información paso a paso y aplicala para analizar los casos de proporcionalidad con los que trabajaste en esta unidad y en la anterior.

En la unidad anterior estudiaste correspondencias de proporcionalidad directa y viste que en cada una de ellas se puede determinar un **coeficiente de proporcionalidad** o **constante de proporcionalidad** que se indica por un número **k**, tal que si **a** y **a'** son dos números correspondientes, **a'** resulta de multiplicar **a** x **k**. En las correspondencias de proporcionalidad directa, para identificar al coeficiente de proporcionalidad, basta con conocer un único par de correspondientes, al que podemos llamar (s, s') porque si k x s = s' entonces $k = \frac{s'}{s}$.

La expresión $\frac{s'}{s}$ que indica un cociente recibe el nombre de **razón**.

Por ejemplo, en la siguiente tabla, los números 9 y 13,5 son un par de correspondientes y su cociente 13,5 : 9 = 1,5 recibe el nombre de razón; entonces, la razón o constante de proporcionalidad es k = 1,5.

Rectángulo	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
Alto en cm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ancho en cm	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15	16,5

Dado que la constante tiene el mismo valor numérico para todos los pares de una misma correspondencia, entonces el cociente entre los elementos de dos pares cualesquiera es el mismo y puede expresarse, en general, como la igualdad entre dos cocientes: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, expresión que se

Al finalizar la escuela primaria, la noción de proporcionalidad está ligada a cierto tipo de razonamiento contextualizado, apoyado por alguna de las dos propiedades recién mencionadas: crecimiento lineal y constante de proporcionalidad.

Un *concepto* se va formando a medida que los sujetos van descubriendo qué tienen en común todos los elementos que pertenecen a una clase. Vale decir que advierten aquello que es común y luego pueden discernir qué objetos no cumplen con las condiciones necesarias para pertenecer a esa clase. Por eso, en el trabajo con la proporcionalidad también es necesario presentar a los alumnos situaciones en las que el aumento en las dos variables en juego no sea proporcional, es decir situaciones de *crecimiento no proporcional*.

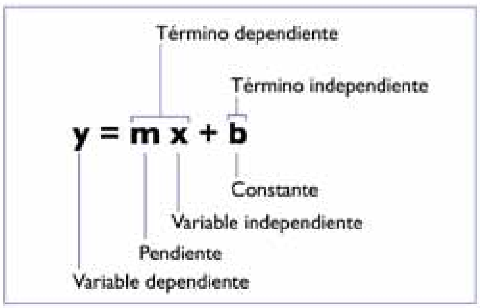
En los Cuadernos, el tratamiento de la proporcionalidad pone en evidencia que, desde un principio, los alumnos pueden resolver situaciones de proporcionalidad poniendo en juego *procedimientos locales y personales*, como lo hacían en la escuela primaria. Poco a poco, a partir del estudio de las proporciones numéricas y de la construcción del significado del coeficiente de proporcionalidad, esos procedimientos locales se irán generalizando y serán reemplazados por otros *procedimientos expertos*.

Desde esta perspectiva didáctica, el reconocimiento de una situación de proporcionalidad no es condición previa a su resolución, sino que interviene en el curso de su tratamiento. Del mismo modo, surgen situaciones que ponen en juego las nociones de porcentaje, velocidad, escala o bien medición con cambio de unidades. Los problemas son resueltos con relación al sentido de la situación, utilizando el mismo tipo de razonamiento y limitándose a los datos disponibles.

A lo largo de los CUADERNOS DE ESTUDIO, se desarrolla un tratamiento sistemático de la proporcionalidad y de sus aplicaciones considerando progresivamente procedimientos generales (por ejemplo, el cálculo de porcentajes) que se apoyan en *procedimientos locales y personales* que, como hemos dicho, los alumnos han utilizado en la escuela primaria y más adelante son reemplazados por otros procedimientos expertos.

Por ejemplo, el estudio de la función lineal en el CUADERNO DE ESTUDIO **3**, unidad **4**, proporciona un marco algebraico para el tratamiento de situaciones de proporcionalidad.

e) Copiá en tu carpeta el siguiente esquema con los nombres de los elementos de las funciones lineales. Te resultará de utilidad para ubicar los nombres de esos elementos en la ecuación general de la recta.



El lector encontrará en la tercera parte de este Cuaderno otros ejemplos para diferenciar *procedimientos locales y personales* de *procedimientos expertos* que se adquieren en la escuela, en la resolución de los desafíos **6** de la unidad **9** y **3** de la unidad **10**, ambas del CUADERNO DE ESTUDIO **3**.

1.4. Las nociones de estadística y probabilidad

La unidad **5** de cada uno de los tres CUADERNOS DE ESTUDIO forma parte de una secuencia de actividades relacionadas con conceptos de estadística y probabilidad que introducen a los alumnos en la toma de decisiones en situaciones en las que sólo se dispone de datos variables y afectados por la incertidumbre.

Históricamente la estadística y la probabilidad nacieron como una necesidad de explicar la evolución de poblaciones a lo largo del tiempo y manejar datos numéricos con espíritu crítico. Sin embargo conviene que los alumnos no se concentren únicamente en problemas descriptivos, sino también que traten problemas dinámicos de poblaciones con comportamiento aleatorio caracterizado por el azar.

El abordaje de este tipo de problemas es una excelente oportunidad para que comprendan cómo se aplica la matemática tanto a la resolución de problemas diversos —económicos, geográficos, sociales y de otras áreas del conocimiento— como a los juegos de azar.

Desde la escuela primaria se estimula a los alumnos para que lean, interpreten y utilicen diversas formas de representación de datos (listados, tablas, cuadros, diagramas, gráficos). A lo largo de los tres años de este ciclo se va profundizando el uso de estos recursos, en particular en el dominio estadístico, ya que el análisis crítico de la información comunicada por los medios a través de esos soportes es muy importante en la formación de los jóvenes. Como ciudadanos responsables deben ser lectores críticos de la información que suministran los medios mediante gráficos, escalas y porcentajes.

2. Los contenidos bloque por bloque y unidad por unidad

En este apartado se realizarán comentarios más específicos acerca de los contenidos correspondientes a cada uno de los CUADERNOS DE ESTUDIO. Estas reflexiones sobre el material brindan nuevos recursos que se pueden aplicar a la planificación y a la definición de las estrategias para el trabajo en el aula.

En cuanto a la organización interna de los CUADERNOS DE ESTUDIO, se presentan en forma general las decisiones curriculares y didácticas tomadas en las distintas unidades, con una explicación más detallada sobre las unidades que toman como eje la iniciación al álgebra y las funciones a lo largo de los tres Cuadernos.

Luego se presentarán, a modo de ejemplo, algunos comentarios sobre la unidad **3** del CUADERNO DE ESTUDIO **1** en el apartado “El desarrolllo de una unidad didáctica”. A medida que se exponen las actividades de la unidad se incluyen observaciones que explican la perspectiva teórica desde la cual se ha decidido incluir los conceptos. También se irán destacando los diversos formatos de texto y las fases de la secuencia didáctica que ya fueron anteriormente explicitadas. Las observaciones y comentarios sobre esta unidad, podrán ser transferidas a otras unidades de los CUADERNOS DE ESTUDIO.

2.1. Las unidades del CUADERNO DE ESTUDIO 1

En el siguiente cuadro analítico se despliegan las dieciséis unidades en las que está organizado su desarrollo. Una lectura exploratoria muestra que han sido abordados los cuatro ejes que organizan los NAP: números y operaciones, Geometría y medida, Álgebra, Probabilidad y estadística.

UNIDAD	TÍTULO	CONTENIDO
1	Número y operaciones	¿Cómo se usan los números? El significado de las operaciones. El uso de la calculadora elemental. Operaciones con fracciones, expresiones decimales. Jerarquía de las operaciones.
2	Proporcionalidad	Correspondencias numéricas. La proporcionalidad directa.
3	Proporcionalidad inversa	Correspondencias numéricas, uso de tablas y gráficos. Razones y proporciones. Relaciones de proporcionalidad inversa. Coeficiente de proporcionalidad inversa. Figuras geométricas de la misma área y distinta forma. Relaciones crecientes y decrecientes no proporcionales.
4	Escalas en mapas y planos	Escalas en: - Relaciones de correspondencia de uno a uno y de uno a más de uno. - Representación gráfica y representación numérica. - Construcción e interpretación de planos. - Lectura e interpretación de mapas. Porcentaje en: - La relación porcentual como fracción. - Los casos de las correspondencias porcentuales menores a 100 y de las mayores a 100. La resolución de cálculos empleando la calculadora.
5	Estadística	Moda. Frecuencia relativa. El promedio y la media. Representaciones gráficas. Organización de datos.

6	Triángulos	Clasificación de triángulos según la medida de sus lados. Clasificación de triángulos según la medida de sus ángulos. Propiedad triangular.
7	Cuadriláteros	Construcción a partir de sus diagonales. Propiedades. Caracterización de cuadriláteros. Diagonales y romboides.
8	Cuerpos y figuras	Clasificación de cuerpos geométricos: poliédricos y redondos. Elementos de los cuerpos geométricos: aristas, caras, vértices. Ángulos diedros, triedros y poliedros. Poliedros regulares. Relación de Euler.
9	Simetría	Transformaciones en el plano: simetrías. Eje de simetría. Determinación de los ejes de simetría en figuras geométricas. Orientación de los puntos de un plano, convenciones de sentido: sentido horario y sentido antihorario. Invariantes en una simetría. Reglas y algoritmos para dibujar imágenes simétricas. Composición de simetrías. Rotaciones.
10	Medida de ángulos	Ángulos. Representación y elementos. Medida de ángulos. Pares de ángulos complementarios, suplementarios y consecutivos. Pares de ángulos adyacentes, interiores y exteriores de un polígono. Bisectriz.
11	Medición de volumen, capacidad y peso	Medidas de capacidad y volumen. Relación entre volumen, capacidad y peso. Medidas justas, medidas aproximadas.
12	Perímetros y áreas en cuerpos y figuras planas	Perímetro de figuras y cuerpos. Áreas en cuerpos y figuras.
13	Equivalencia de figuras	Embaldosados. Unidades de área. Fórmulas para calcular el área de algunos cuadriláteros. Teselaciones.
14	La circunferencia y el círculo	Elementos de la circunferencia y el círculo. El número pi (π).
15	Polígonos	Elementos y clasificación de polígonos. Polígonos regulares.
16	Poliedros	Elementos de los poliedros. Propiedades de los poliedros.

La construcción del concepto de proporcionalidad

Una lectura rápida del CUADERNO DE ESTUDIO **1** le permitirá observar que en las primeras unidades se parte de los números y las operaciones para abordar luego el concepto de proporcionalidad que no sólo es fundamental en el área de matemática sino en todas las disciplinas científicas. De tal modo, las primeras cuatro unidades pueden considerarse como un único **bloque temático** vinculado con la construcción del concepto de proporcionalidad que, como otros, no se adquiere en unas pocas semanas de clase, sino que va evolucionando a lo largo de la vida de un sujeto.

En la primera unidad, en relación con el eje **números y operaciones**, se intenta que los alumnos revisen sus concepciones acerca del significado de las operaciones que ya conocen desde la escuela primaria para que el concepto de proporcionalidad que subyace en las operaciones multiplicativas sea interpretado sin dificultades en las unidades siguientes. En cuanto al aprendizaje del cálculo, el desarrollo actual de la tecnología facilita el acceso a instrumentos de cálculo que se han instalado progresivamente en la vida cotidiana. A veces, la disponibilidad de las calculadoras, pone en duda el valor de la enseñanza del cálculo con lápiz y papel; pero también se considera necesaria su aplicación en la resolución de problemas significativos y el desarrollo de habilidades de cálculo mental y aproximado, que sirven de anticipación y control a la ejecución de las operaciones con calculadora.

Seguramente los alumnos ya han realizado algún reconocimiento de situaciones proporcionales. El propósito de este bloque es que revisen sus concepciones acerca de cómo se relacionan las cantidades estableciendo correspondencias y que puedan distinguir las relaciones de proporcionalidad de aquellas que no lo son. Finalmente, que distingan entre las relaciones de proporcionalidad, aquellas que son de proporcionalidad directa de las que son de proporcionalidad inversa.

Si bien sólo se hace aquí una aproximación al concepto de **función** es probable que este punto de vista resulte novedoso. Se trata de hacer explícitos tres aspectos característicos de las funciones: *dependencia, variación, y correspondencia.*

En el tratamiento funcional de la proporcionalidad, la *dependencia* indica que cada valor de una variable (dependiente) está en íntima e indestructible relación con valores de la otra variable (independiente). El término *variación* se refiere a la diferencia que en un sentido u otro pueden experimentar las variables consideradas. Por último, hablar de *correspondencia* significa la existencia de una relación entre los elementos de uno o más conjuntos.

La estadística y la Geometría

El creciente interés por utilizar la información que proviene de los medios masivos de comunicación y que ha sido procesada según métodos estadísticos, es también un objetivo escolar y constituye otro eje de la organización del CUADERNO DE ESTUDIO **1**. La unidad **5** introduce a los alumnos en aprendizajes significativos: recoger datos, organizar los propios y los ajenos, y representarlos en gráficos y diagramas que resulten útiles a la hora de analizar algunos métodos, de hacer inferencias y tomar decisiones a partir de ellos ya sea en cuestiones vinculadas con los negocios, la investigación o la vida cotidiana.

Para comprender las ideas estadísticas fundamentales, los alumnos deben trabajar directamente con datos. A medida que progresen en su organización encontrarán nuevas ideas y procedimientos sobre números, álgebra, medida y Geometría. Trabajar con el análisis de datos y la probabilidad ofrece a los estudiantes una forma natural de conectar la Matemática con otras asignaturas y con las experiencias de la vida cotidiana. De ese modo pueden comprender el sentido de formular encuestas, estudios de información y experimentación, y aprender que algunos problemas dependen de las hipótesis que se establezcan y tienen cierto grado de incertidumbre.

Los procesos de medida

Las unidades **6** a **16** están dedicadas a la Geometría y los procesos de medida.

Desde los geómetras griegos hasta los niños de hoy, los instrumentos de trazado geométrico —regla, escuadra y compás— han permitido representar ideas, pensar sobre ellas, concebir los desplazamientos y las transformaciones sobre una geometría casi concreta que, sin embargo, permite pensar en operaciones aún sin necesidad de realizarlas.

A medida que se trabaja sobre representaciones, los alumnos desarrollan sus posibilidades de generar conjeturas, analizarlas con sus compañeros y poner en juego, de manera consciente, los conocimientos adquiridos. Así se darán cuenta de que al hacer una **medición experimenta**l siempre se trabaja con un error, que depende de los instrumentos que se puedan utilizar. Este conocimiento los ayudará en el momento de efectuar mediciones, a elegir entre los elementos disponibles, aquellos que se adecuen a los fines deseados.

En el desarrollo de estas unidades el docente encontrará ejercicios de consolidación y práctica de lo aprendido y también juegos o problemas que promueven nuevos aprendizajes y que pueden compartir grupos de alumnos que no cursen el mismo año de estudios.

Para organizar los conocimientos sobre los cuerpos geométricos es muy importante experimentar directamente con materiales concretos, por eso es recomendable la confección del formaedro sugerida en la unidad **6**. Las observaciones conducirán a expresar las ideas, revisando y ampliando el vocabulario específico: *cuerpo, figura, poliedro, cara, vértice, arista, cúspide, poliedro, poliedro regular, pirámide, prisma, cono, cilindro, esfera, circunferencia, círculo, radio, diámetro, base, altura*. A los términos anteriores hay que agregar *ángulo diedro, plano, recta, semirrecta*, cuyo significado no se puede mostrar concretamente, sino que es necesario imaginarlos pensando en extender sin límites un modelo material.

Cuando en las actividades se sugiere a los alumnos la manipulación de materiales, por ejemplo, las piezas de un rompecabezas como el tangrama o de rectángulos de determinadas condiciones, se trata de favorecer la construcción de conceptos. Lo importante es que el uso de estos materiales motive a los estudiantes a describir sus acciones con palabras. Es necesario promover esta situación, pidiéndoles que expliquen sus procedimientos ya sea por escrito o de modo verbal. Esta necesidad de comunicar un procedimiento exige al alumno volver sobre sus pasos y pensar de nuevo en el camino seguido, en definitiva, reflexionar acerca de su propio proceso de aprendizaje.

2.2. Las unidades del Cuaderno de estudio 2

En el cuadro que se presenta a continuación se despliegan los contenidos de las dieciséis unidades correspondientes al Cuaderno de estudio 2.

Unidad	Titulo	Contenido
1	Números enteros	Contar en dos sentidos. El orden de los números enteros. Las operaciones con números enteros. Valor absoluto.
2	Números racionales	¿Qué son los números racionales? Características de los números racionales. Densidad. Valor absoluto y operaciones con números racionales.
3	Potenciación y radicación Notación científica	Potenciación con exponente natural. Las propiedades de la potenciación. La radicación. ¿Qué es la raíz cuadrada? Notación científica para números muy grandes o muy pequeños.
4	Combinatoria y estrategias de conteo	Combinatoria. Los diagramas arbolares en la combinatoria. Combinaciones. Permutaciones. Cambios en el orden.
5	Probabilidad	Cálculo de probabilidades. Imposible 0, seguro 1. Situaciones y experimentos.
6	Transformaciones geométricas	Transformaciones en el plano. Movimientos: traslaciones y rotaciones. Simetrías.
7	Cuadriláteros y simetría	Características de los cuadriláteros. Cuadriláteros simétricos. Ejes de simetría, bases medias, mediatriz. Figuras ubicadas en diferentes cuadrantes.
8	Ángulos, posiciones relativas	Rectas en el plano. Ángulos formados por dos rectas secantes. Ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante.
9	Más transformaciones: homotecia y semejanza	¿Qué es la homotecia? Imágenes homotéticas. El centro y la razón de homotecia. La semejanza. Homotecias, semejanzas y símbolos.

10	La relación pitagórica	Un rompecabezas. La demostración de Leonardo. Aplicaciones de la relación pitagórica. Las ternas de números pitagóricos.
11	Volumen y áreas de prismas y pirámides	Volumen de un cuerpo. Superficie lateral y total. Cálculo del volumen de prismas y pirámides.
12	Relaciones métricas	Relaciones métricas en polígonos. Ángulos exteriores e interiores de un polígono. La relación áurea.
13	Álgebra I	Ecuaciones e inecuaciones. El álgebra como instrumento. Expresiones algebraicas equivalentes.
14	Algebra II (Ecuaciones de primer grado e identidades)	Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Del lenguaje coloquial al lenguaje algebarico. Identidades algebraicas.
15	Funciones	Imágenes y dominio de una correspondencia. ¿Qué correspondencias son funciones? Funciones definidas por fórmulas.
16	Lugar geométrico	Espacios geométricos. Definición gráfica y simbólica de espacios geométricos. Lugares geométricos: circunferencia, bisectriz, mediatriz, base media.

La lectura de los títulos de las tres primeras unidades anticipa que los contenidos han sido seleccionados poniendo especial énfasis en que los alumnos se inicien en el conocimiento formal de los conjuntos de números enteros y racionales y su representación sobre la recta numérica. El avance en la comprensión conceptual de los números racionales les permitirá superar las resoluciones mecánicas de cálculo con fracciones y apreciar la densidad del conjunto de los racionales como su característica esencial.

Los contenidos que se abordan en las unidades **4** y **5** están vinculados con la organización de datos. Esta serie se inició en la unidad **5** de Estadística del Cuaderno de estudio **1** y prepara a los alumnos para retomar y ampliar las nociones de Estadística en la unidad **5** del Cuaderno de estudio **3**. El objetivo es que puedan razonar estadísticamente y desarrollar las habilidades necesarias para llegar a ser no sólo consumidores inteligentes sino sobre todo, ciudadanos bien informados capaces de tomar decisiones bien fundamentadas.

A partir de la unidad **6,** los temas de Geometría están imbricados con la introducción al álgebra que será contenido específico de la unidad **13** y con los problemas de medición que se presentan constantemente en la vida diaria. Se trata de que los alumnos analicen las características y las propiedades de las figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollen razonamientos matemáticos sobre relaciones métricas. También, que localicen y describan relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación y apliquen movimientos y simetrías al análisis y la resolución de problemas espaciales. Se espera que los estudiantes avancen en la producción y validación de conjeturas sobre relaciones y propiedades geométricas, desde las argumentaciones empíricas hacia otras más generales.

A través de las actividades que se les proponen en este Cuaderno, los alumnos deberían comprender lo que significa que en una transformación geométrica se conserve la distancia y la forma, como ocurre en las traslaciones, las rotaciones y la simetría y cómo las homotecias permiten ampliar o reducir el tamaño de las figuras originales conservando su forma.

Dado que la escuela es transmisora de bienes culturales que la sociedad fue construyendo a lo largo de siglos y conservan su vigencia hasta hoy, se presenta el caso de la propiedad pitagórica en la unidad **10,** cuyas aplicaciones son innumerables.

El bloque de Álgebra

Como se señaló en el inicio, las unidades **13, 14** y **15** del CUADERNO DE ESTUDIO **2** conforman un bloque temático. Todos los documentos curriculares vigentes destacan la importancia de capacitar a los estudiantes en una introducción al Álgebra de modo tal que los ayude al reconocimiento, uso y análisis de expresiones algebraicas y variaciones, funcionales o no, en sus diferentes representaciones y en situaciones diversas.

La aproximación al Álgebra que se propone en este proyecto es partir de problemas y resolverlos poniendo en acto el procedimiento algebraico que implica pasar del enunciado verbal a la puesta en ecuación. Este paso del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico es precisamente la escritura de ecuaciones que aparecen entonces como un medio adecuado para la resolución de problemas y el cálculo literal como el medio para accionar en la búsqueda de las soluciones.

La resolución de las ecuaciones necesita del conocimiento de un cierto número de reglas de cálculo literal que los alumnos construyen a medida que analizan las situaciones que se les presentan. Apropiarse paulatinamente del lenguaje del Álgebra implica, por ejemplo, dejar de considerar al signo "=" como una señal para realizar alguna operación e interpretarlo como un indicador de equivalencia y equilibrio entre los dos miembros de una igualdad. Es un proceso que lleva tiempo y no se alcanza en un año de estudio sino que se va consolidando a medida que el alumno llega a la comprensión de lo que representan los símbolos y cómo se manejan las operaciones algebraicas. Si bien los alumnos han utilizado antes en la aritmética la mayoría de los símbolos del Álgebra, ampliar su nuevo significado no se logra de un día para otro. Por esta razón en el CUADERNO DE ESTUDIO **2**, se retoman las cuestiones del Álgebra y las funciones en varias unidades.

En muchas ocasiones, en la escuela se inicia a los alumnos en los conceptos de ecuación y solución de una ecuación mediante definiciones formales. Muchos libros de texto también eligen este camino. Sin embargo, también se observa en muchos casos un reiterado fracaso en el aprendizaje. Esta observación conduce a pensar en la necesidad de buscar otros caminos en la enseñanza para que los alumnos se aproximen al tratamiento algebraico de los problemas. Las publicaciones de los investigadores y las experiencias de otros colegas dan fundamento a la propuesta que se ha desarrollado en estos materiales con relación a la enseñanza del Álgebra y las funciones.

Por ejemplo, para retomar los conocimientos de Álgebra y Geometría desde una nueva perspectiva, la última unidad del Cuaderno de estudio **2** se refiere al concepto de lugar geométrico que es un conjunto de puntos que satisfacen una condición determinada que puede expresarse mediante una ecuación.

En el proceso de aprendizaje del Álgebra se suelen presentar dos problemas que son inversos:

- encontrar el lugar geométrico que corresponde a los puntos que satisfacen a la ecuación;
- dado un lugar geométrico, hallar la ecuación que lo representa.

Un lugar geométrico puede ser una recta, una línea curva, un plano, una superficie curva… Teniendo en cuenta que los objetos matemáticos son entes puramente conceptuales y que se conciben como resultado de abstraer las propiedades comunes de determinados objetos o de identificar sus regularidades, en los Cuadernos de estudio se intenta que los alumnos recorran un camino de elaboración de esos procesos de abstracción y generalización. Esto implica diseñar secuencias de actividades con la graduación requerida para que el estudiante pueda transitar a lo largo de su escolaridad por crecientes niveles de generalización.

2.3. Las unidades del Cuaderno de estudio 3

Atendiendo siempre a que la construcción de un concepto es un proceso lento de aproximaciones sucesivas hacia formas de razonamiento de complejidad creciente, en este Cuaderno, como en los anteriores, se pueden distinguir bloques de contenidos temáticos que abarcan varias unidades.

Las tres primeras contienen aproximaciones a la teoría de los números. Algunos de los temas de las unidades que siguen parecerán más abstractos, como los modos de razonar en términos estadísticos, las nociones de trigonometría, la dependencia funcional entre variables, el aprendizaje del lenguaje algebraico. Una característica de estos contenidos es el desarrollo de la capacidad de reconocer particularidades y generalizaciones en un proceso determinado. Esta capacidad se promueve con la introducción sucesiva de modelos simples de situaciones que permitan pasar, por ejemplo, de la proporcionalidad a la relación funcional más general y la Geometría métrica. De ahí la importancia del pasaje de la aritmética al Álgebra y que se insista en la equivalencia de los lenguajes verbal, simbólico y gráfico con el uso de diagramas de árbol, tablas y coordenadas.

El siguiente cuadro muestra los contenidos analíticos de las unidades del Cuaderno de estudio **3** con el que culmina **Horizontes.**

Unidad	Título	Contenido
1	Matemática cotidiana	Medidas y porcentajes. Proporcionalidad en el cálculo de jornales y pago de servicios. Préstamos y créditos, noción de interés, comisión y descuento.
2	Sucesiones y progresiones	Sucesiones, término general. Suma de **n** términos de una progresión aritmética. Sucesión de Fibonacci. Progresiones geométricas. Suma de *n* términos. Interés compuesto. Deudas. Análisis de la tendencia en las sucesiones.
3	Potenciación y radicación	Potenciación en N y Q: revisión de operaciones combinadas y propiedades (con exponente entero). Propiedades de la potenciación: exploración y justificación. Radicación en Q: definición, ejemplos. Propiedades de la radicación en Q: exploración.
4	Funciones Fórmulas, tablas y gráficos funcionales	El lenguaje de las funciones: definición, notación. Imagen y contraimagen de un elemento. Dominio y codominio. Sistemas de ejes cartesianos, tablas y diagramas de flechas. Función lineal: definición. Pendiente. Ordenada al origen.
5	Estadística	Términos estadísticos: población, muestra, variables, frecuencia absoluta y relativa. Valores centrales: promedio, moda y mediana. Histogramas. Estudio de la dispersión: varianza. Desviación típica.
6	Trigonometría I Razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo	Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente. Cálculo aproximado. Uso de calculadora. Cálculo de las razones trigonométricas de ángulos particulares. Resolución de triángulos rectángulos. Ángulos de elevación y depresión.
7	Trigonometría II (Funciones trigonométricas de ángulos en un sistema de ejes cartesianos)	Generación de ángulos positivos y negativos. Razones trigonométricas en los 4 cuadrantes. Signo de las funciones. Triángulos oblicuángulos. Medida de un ángulo en radianes.
8	Operaciones directas e inversas	Operaciones directas. Propiedades, reversibilidad. Elemento neutro y absorbente. Asociatividad, conmutatividad, distributividad. Operaciones inversas: resta, división, radicación.

9	Propiedad fundamental de la semejanza	Propiedad de los lados y de los ángulos de dos polígonos semejantes. Triángulos semejantes. Propiedad fundamental de semejanza de polígonos. Criterio de semejanza de triángulos. Aplicación a la resolución de problemas. Razón entre las áreas de dos polígonos semejantes.
10	Teorema de Tales	Razones entre segmentos. Propiedades de los segmentos determinados por tres o más paralelas cortadas por dos transversales. Teorema de Tales. Aplicaciones. Semejanza de triángulos.
11	Ecuaciones	Identidades. Ecuaciones lineales completas: resolución, distintos caminos. Ecuaciones equivalentes. Reglas. Ecuaciones que no tienen solución. Resolución de ecuaciones con la calculadora.
12	Funciones II	Función creciente. Función decreciente. Función constante. Ceros de una función. Gráficos. Fórmula de una función lineal. Problemas Rectas paralelas y perpendiculares. Gráficas de funciones trigonométricas.
13	Sistemas	Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Distintos métodos de resolución. Resolución gráfica y analítica.
14	Sistemas de inecuaciones	Inecuaciones. Representación gráfica de semiplanos. Programación lineal. Restricciones. Polígono de soluciones posibles. Optimización de la función objetivo.
15	Funciones III	Funciones cuadráticas. Parábolas. Cambios en los valores de los parámetros de las curvas de una misma familia. Sistemas de representación: enunciado verbal, tabla de valores, ley algebraica y gráfico de la función. Expresión polinómica, canónica y factorizada.
16	Números reales	Números racionales: no periódicos y periódicos. Números irracionales: radicales, π, φ. Representación de radicales sobre la recta real. Cálculo de la raíz cúbica de un número. Completitud del conjunto de los números reales

Las actividades de la unidad **1** tienen como propósito que los alumnos adquieran el bagaje esencial de la matemática cotidiana que los acompañará en su vida presente y futura. Una idea central es que reconozcan la importancia de la matemática en cuestiones de la vida cotidiana: calcular un descuento, entender la caducidad de un medicamento, revisar los recibos de los servicios elementales, comparar precios en función de la capacidad de los envases, distinguir entre dos hechos probables cuál es el que tiene mayor probabilidad de ocurrir, elaborar un presupuesto mensual de gastos, calcular la diferencia entre el dinero que presta un banco y el que se le devuelve y muchas otras situaciones que se pueden presentar en la vida de cualquier persona.

La Matemática se usa a diario tanto en las compras, traslados, pago de transportes, pago de servicios esenciales, como en la división de un gasto entre varias personas, la recaudación de dinero para un gasto grupal o el cálculo del tiempo que se tarda para llegar a un destino. Las necesidades cotidianas a las que se hace referencia se vinculan con los procedimientos de contar, localizar, medir, diseñar y explicar, haciendo un uso práctico de los aprendizajes escolares.

En la unidad **2** se inicia el estudio de las **sucesiones y progresiones** a partir de poner en práctica una ley de formación o bien por el camino inverso, es decir deduciendo la ley de formación a partir de la presentación de los términos de una sucesión. El cálculo de las sumas y productos en las progresiones se aplica luego a la resolución de problemas y los cálculos de interés.

El estudio de las operaciones de **potenciación y radicación** iniciado en la unidad **3** del CUADERNO DE ESTUDIO **2** se retoma en la unidad **3** del CUADERNO DE ESTUDIO **3**. En este nivel no se trata de desarrollar demostraciones rigurosas, sino de que los alumnos se vean en la necesidad de utilizar letras al referirse a regularidades y propiedades válidas para cualquier número. Este paso al lenguaje algebraico muestra que el Álgebra puede considerarse, inicialmente, como una generalización de la aritmética.

Más adelante, en la unidad **8** se exploran y analizan en general las **operaciones inversas**, y en carácter de tales, se establecen relaciones entre las reglas de acción que surgen de las propiedades de cada una y que rigen la operatoria cuando se trabaja con una sola operación o con varias de ellas. Se le ha dado un tratamiento especial a los procedimientos utilizados en el caso de las operaciones combinadas, para volver sobre el orden jerárquico de las operaciones, que es un tema tratado desde el CUADERNO DE ESTUDIO **1** y amerita ser revisto y profundizado.

Es probable que los alumnos se sorprendan al descubrir que si bien el resultado de una división entre números racionales es equivalente al producto que se obtiene multiplicando el dividendo por el inverso del divisor; en símbolos: $m \div n = m \times \frac{1}{n}$, el número 0 no tiene inverso y ninguna división con divisor 0 puede resolverse.

Los procedimientos estadísticos

También en el CUADERNO DE ESTUDIO **3**, la unidad **5** se refiere a *estadística*. Esta horizontalidad en la selección de los temas de las unidades tiene como propósito facilitar la tarea del docente a cargo de un aula múltiple. Como en los casos anteriores, las actividades propuestas tienen por objetivo que los alumnos puedan interpretar críticamente la información presentada en tablas y gráficos que aparece en libros y periódicos; calcular y comunicar información numérica de manera adecuada y aplicar conocimientos matemáticos a otras ciencias como las Ciencias Sociales y las Ciencias Naturales. Los datos numéricos con los que trabaja la estadística provienen de una gran diversidad de fenómenos de la vida social, política y económica, cuya enumeración sería interminable. La información cuantitativa que ofrecen los datos procesados y lo que estos conceptos estadísticos facilitan es la organización de esa información cuantitativa resumiéndola, caracterizándola, tipificándola, disponiéndola de forma que pueda ser comparada con otras informaciones provenientes de datos masivos.

En la vida cotidiana de los alumnos, los conceptos estadísticos aparecen aplicados a cuestiones diversas. Desde el punto de vista de la didáctica, todos estos elementos en los que la estadística ya está presente en su uso civil, forman parte también de las experiencias de los alumnos. Por otra parte, en el terreno de la inferencia estadística, los fenómenos son más complejos y de naturaleza abstracta, ya que atañen a la posibilidad de obtener conocimiento a partir de la observación de las características de casos. No es el objetivo que los alumnos sean expertos en estadística. Basta con el manejo de tablas de doble entrada, todo tipo de diagramas y el conocimiento de los contenidos clásicos de estadística descriptiva como las medidas de centralización y dispersión.

Geometría y nociones de trigonometría

Las unidades **6** y **7** constituyen un bloque en el que se presentan contenidos de *trigonometría*. El propósito de la unidad **6** es que los alumnos descubran las razones trigonométricas y las apliquen a la resolución de triángulos en situaciones reales. En la unidad siguiente se amplía el estudio de las relaciones trigonométricas en los triángulos a los ángulos situados en los cuatro cuadrantes. También se espera que los estudiantes profundicen sus conocimientos de Álgebra al establecer relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo y utilicen el lenguaje adecuado para expresarlas. El uso de calculadoras brindará una posibilidad de cálculo inmediato de las razones trigonométricas y las operaciones con ellas. Para descubrir la constancia de estas razones se construyen nuevos triángulos semejantes al primero. De este modo reaparece aquí un concepto estudiado en la unidad de semejanza del CUADERNO DE ESTUDIO **2** que es el de la proporcionalidad de los lados. Este momento puede ser considerado como de evaluación del aprendizaje de ese concepto. Este trabajo llevará a destacar que las razones trigonométricas no dependen de los lados del triángulo, sino de la amplitud del ángulo.

En este bloque los alumnos trabajan sobre aspectos clave de la Geometría en cuanto a la elaboración de modelos y procesos de descripción, cálculo, representación y argumentación. La Geometría es un lugar temático adecuado para observar que mediante el trabajo con las representaciones los conceptos se reorganizan constantemente y se reestructuran en redes cada vez más amplias y más ricas.

En la unidad **9** del Cuaderno de estudio **2** los alumnos trabajaron sobre homotecias y llegaron a definir el concepto geométrico de *semejanza. Una homotecia es una trasformación geométrica que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor de modo que a partir de una figura original se obtiene una imagen que tiene la misma forma que la original.* Esta conservación de la forma está vinculada con el concepto de *semejanza* que los alumnos abordarán en esta unidad **9**. El concepto de semejanza es más amplio que el de homotecia. En este último, las figuras se pueden agrandar o achicar pero su posición queda rígidamente determinada por un punto (centro) y un número (razón). En cambio la semejanza es independiente de la posición que ocupen las figuras. Presenta un aspecto más dinámico que la homotecia. Las figuras pueden estar en posiciones muy distintas y seguirán siendo semejantes aunque, además de ampliaciones y reducciones, se les apliquen diversas combinaciones de movimientos que las desplacen en el plano a cualquier posición.

El bloque de funciones

El propósito que guía la organización de las unidades del Cuaderno de estudio **3** es que los alumnos profundicen y avancen en el estudio algebraico de *funciones* que iniciaron en los Cuadernos anteriores. En la unidad **4** y en la **12** se plantea la revisión del vocabulario específico indispensable para retomar el tema en las unidades siguientes y en el bloque constituido por las unidades **13**, **14** y **15**.

Una de las preocupaciones prioritarias del abordaje de los distintos temas seleccionados para estas unidades es que los conceptos que se desarrollarán cobren sentido al vincularse con el lenguaje cotidiano utilizado generalmente por los alumnos. Este vocabulario puede estar algunas veces identificado con un concepto matemático y otras no. En lo cotidiano, el uso de la palabra *ecuación*, es poco frecuente. Sin embargo muchas veces se puede emplear una ecuación para expresar una relación numérica, aun sin tener conciencia de ello. Por ejemplo, al decir que la edad de Analía es la mitad que la de Beatriz, se habla en términos de relaciones, pero no se explicita la simbolización equivalente: $a = \frac{b}{2}$ porque nadie hace un recorrido algebraico para expresar lo que le resulta obvio; en cambio, cuando el problema es complejo la representación simbólica es muy ventajosa y por ello conviene que los alumnos vivencien las ventajas de la simbolización algebraica.

La estrategia de resolución de problemas es fundamental en la educación matemática y posibilita su incidencia en otras áreas del conocimiento, pero también son propias de la acción matemática las estrategias que desarrolla el propio proceso de elaboración de modelos: la experimentación, la predicción, la confrontación, la detección de fenómenos dependientes.

Ante situaciones como el espacio recorrido por un móvil o el estiramiento de un resorte según la fuerza que se le aplica, entre otros, los científicos analizan cómo se vinculan las variables en juego y buscan fórmulas matemáticas que describan las relaciones que tienen alguna regularidad. Cuando la relación se caracteriza por una velocidad de cambio constante, se está en presencia de un modelo lineal: en matemática se lo define como *función lineal* porque su representación es una línea recta.

Más adelante, en la unidad **13,** se estudian fenómenos que dependen de más de una variable y se corresponden con sistemas lineales que pueden o no tener solución algebraica. Cuando se incorporan funciones con condiciones restrictivas representadas por inecuaciones los puntos correspondientes al sistema forman polígonos funcionales cuya solución es necesario optimizar mediante el procedimiento matemático denominado *programación lineal.*

El estudio de las funciones cuadráticas complementa el trabajo ya iniciado en unidades anteriores sobre las funciones matemáticas más importantes. En este caso, este estudio resulta de interés no sólo en matemática, sino también en física y en otras áreas del conocimiento. Son ejemplos de relaciones cuadráticas, entre otras, la trayectoria de una pelota lanzada al aire y la que describe una catarata al caer desde lo alto de una montaña. La oportunidad de poder examinar a través de una sucesión, las gráficas de una familia de curvas de acuerdo con los diversos valores de un parámetro, ofrece un campo experimental para la imaginación, ya sea que el alumno la realice en forma individual o con un pequeño grupo.

> Seguramente el docente puede seleccionar un conjunto numeroso de actividades relacionadas con este tema, como la aplicación de las distintas fórmulas, pero desde esta unidad didáctica se hace hincapié en el concepto de función cuadrática y de su respectiva representación gráfica, la parábola, para diferenciarla de la otra familia de funciones ya estudiada: la de las funciones lineales y sus respectivas representaciones gráficas: las rectas.

En la actividad **3** de la unidad **13** aparecen las tres formas de escribir una función cuadrática: *polinómica, factorizada o canónica.* El tiempo que puede asignársele a la enseñanza de estos temas es una decisión del docente a cargo del grupo, y dependerá no sólo del tiempo que haya estimado previamente, sino también de la disponibilidad de textos adecuados y de la destreza que hayan alcanzado sus alumnos en los procedimientos algebraicos.

En cuanto al Álgebra, los símbolos tienen muchas ventajas sobre las palabras como medio para escribir las ideas matemáticas, pero la elección de los símbolos no es absoluta ni definitiva y en cada momento depende de las convenciones que se hayan establecido en el proceso, lento pero enriquecedor, de la construcción de las nociones algebraicas.

Es conveniente aclarar que para conducir esta línea de trabajo, el docente tiene que ser flexible y estar atento para saber cuándo y de qué modo intervenir. A veces para alentar a los alumnos a través de preguntas o comentarios pertinentes y otras, guardando silencio ante alguna pista falsa, dando tiempo a los alumnos a darse cuenta solos de que esa pista no lleva a ninguna parte.

2.4. El desarrollo de una unidad didáctica

En este apartado se toma como soporte la unidad **3** del Cuaderno de estudio **1** —que forma parte del bloque temático referido a la enseñanza de la proporcionalidad— para ejemplificar cómo se desarrollan las secuencias didácticas en Matemática y para exponer algunos comentarios acerca de la labor del docente en la progresión de los aprendizajes de los alumnos.

Si bien el título de la unidad es *Proporcionalidad inversa*, para la construcción de este concepto es necesario que los alumnos hayan afianzado previamente las nociones de razones y proporciones, que iniciaron en unidades anteriores en los casos de proporcionalidad directa. Así podrán establecer, deducir y analizar las características de las correspondencias de proporcionalidad inversa que implican la aplicación de esas nociones.

A medida que se presentan las actividades, se incluyen notas que explican la perspectiva teórica desde la cual se han enfocado los conceptos de la disciplina. También se irán destacando los diversos formatos de texto y las fases de la secuencia didáctica que ya fueron anteriormente explicitadas.

En las unidades de los Cuadernos de estudio, la explicación de los contenidos se realiza a través de diferentes tipos de textos. A su vez, las consignas y las distintas referencias a los textos se indican a través de íconos que guían a los alumnos en su proceso de aprendizaje, con los cuales se irán familiarizando a medida que avancen en la resolución de las actividades.

Teniendo en cuenta que la educación es en esencia un proceso interpersonal, en muchas oportunidades se les menciona la necesidad de comparar sus producciones con las de otros compañeros y conversar con el docente acerca de las conclusiones a las que arribaron. En tales circunstancias, el enseñante puede facilitar los aprendizajes de los alumnos sin imponer sus conocimientos matemáticos. Reexaminar de forma colectiva la progresión llevada a cabo facilita una revisión reflexiva y ayuda a los alumnos a tomar conciencia de las estrategias que pusieron en práctica para que queden disponibles ante nuevas situaciones problemáticas.

En particular, el propósito de esta unidad es que los alumnos revisen sus concepciones acerca de cómo se relacionan las cantidades, establezcan correspondencias inversamente proporcionales y las distingan de las que sólo son decrecientes pero no proporcionales.

Para ello se abordan los siguientes contenidos:
- correspondencias numéricas, uso de tablas y gráficos;
- razones y proporciones;
- relaciones de proporcionalidad inversa, coeficiente de proporcionalidad inversa;
- figuras geométricas de la misma área y distinta forma;
- relaciones crecientes y decrecientes no proporcionales.

■■■ Cuando un niño sabe que por cada planta de tomates se colocan tres cañas atadas y encuentra que para un surco de 5 plantines necesita 15 cañas, pone en juego una relación de proporcionalidad directa que le hace corresponder a cada elemento del primer conjunto (plantines de tomates) tres elementos del segundo (cañas).

■■■ El establecimiento de relaciones de proporcionalidad directa pone en juego diversos conceptos. Al efectuar operaciones de multiplicación y división ya comienzan a utilizarse estas relaciones. Se reconoce que así como 2 veces 7 es 14, para el producto 6 x 7, que tiene como resultado 42, se emplea implícitamente la relación que hace corresponder al triple de 2, el triple de 14. Esta es una de las propiedades de la proporcionalidad directa.

■■■ En cambio, cuando observamos una germinación de semillas de maíz, podemos apreciar en su crecimiento que, si bien siempre a más días le corresponde más altura, y que durante algunos días ese crecimiento es proporcional al tiempo transcurrido, luego deja de variar proporcionalmente. Esto significa que esta correspondencia entre el crecimiento y el tiempo transcurrido es una relación creciente, pero no es una relación de proporcionalidad directa.

Este ejemplo muestra que la tan esgrimida frase “a más, más y a menos, menos” no constituye un criterio suficiente para asegurar la proporcionalidad directa. Si bien es una condición necesaria, no resulta suficiente porque para que exista proporcionalidad directa deben darse además otras condiciones.

Unidad 3 del Cuaderno de estudio 1. Proporcionalidad inversa

Las distintas actividades de la unidad se proponen:

- poner a los alumnos en situación de experimentar los conceptos con recursos materiales o estableciendo relaciones entre los datos de los problemas;
- hallar e identificar los pares ordenados de una correspondencia;
- poner de relieve la diferencia entre funciones inversamente proporcionales y aquellas que sólo son decrecientes;
- contribuir a la reelaboración de los conceptos de perímetro y área de una figura;
- ejemplificar las propiedades de la relación de proporcionalidad inversa, trabajando en distintos marcos: numérico, gráfico, geométrico, físico;
- emplear las diversas representaciones de una relación para extraer conclusiones sobre sus propiedades.

Todas las unidades comienzan con un texto en negrita que anticipa al alumno cuáles son las ideas o ejes que encontrará en los temas de la unidad. Es interesante recordarle que preste atención siempre a este tipo textos en los que se anticipan también los objetivos del trabajo en el aula.

Unidad 3 Proporcionalidad inversa

En la unidad anterior analizaste relaciones de correspondencia y en particular aprendiste a reconocer relaciones de proporcionalidad directa. Su característica es el crecimiento según una constante de proporcionalidad. En esta oportunidad vas a profundizar en el estudio de otras situaciones crecientes o bien decrecientes que no siempre son proporcionales. Mediante el uso de tablas y gráficos vas a distinguir otro tipo particular de correspondencias: las relaciones de proporcionalidad inversa. A través de las seis actividades que te ofrece esta unidad, vas a poder explorar distintas situaciones en las que se dan relaciones de decrecimiento inverso y proporcional, analizarás sus características y también aprenderás a representar gráficamente este tipo de relaciones. Como siempre, al final la unidad vas a encontrar algunos desafíos matemáticos para que resuelvas cuando decidas.

Tanto los alumnos como los docentes encontrarán aquí buenas orientaciones para las tareas propuestas.

Tal como se expresó anteriormente, el tratamiento de los contenidos comienza siempre por lo que los alumnos conocen y se desarrolla respetando un grado creciente de complejidad. Por esta razón, la primera actividad en todas las unidades, recupera información considerada previa y que ya ha sido elaborada por los alumnos en otras unidades o años escolares y que resulta fundamental para el contenido que se quiere enseñar. En particular en este caso la actividad 1 posibilita revisar la comprensión de los temas trabajados en la unidad anterior y evaluar los aprendizajes alcanzados en cuanto a proporcionalidad directa. Por tanto, constituye una buena oportunidad de intervención docente para que los alumnos vinculen los contenidos ya estudiados con los propios de esta unidad.

En esta actividad se propone el uso de un piolín anudado para que se pueda observar cómo varía con continuidad el ancho y el alto de los rectángulos que tienen como contorno ese piolín.

No dejes de consultar con tu maestro cómo organizar la tarea en esta unidad y cuánto tiempo podés dedicarle a cada actividad. Tampoco te olvides de ordenar los trabajos en la carpeta, escribiendo siempre el número y nombre de la actividad.

TEMA 1: SITUACIONES DE CORRESPONDENCIA

A 1. "Alambrar y sembrar"

Para profundizar en el estudio sobre las situaciones de proporcionalidad, vas a empezar considerando la comparación entre perímetro y área de una figura. En esta primera actividad podrás explorar si dos parcelas rodeadas por la misma cantidad de alambre tienen necesariamente la misma superficie disponible para sembrar.

Se podrá ver que en el caso límite, cuando el piolín queda tenso, el rectángulo se transforma en un par de segmentos superpuestos que no encierran ninguna superficie. Los alumnos podrán relacionar esta actividad con otras familias de rectángulos que se analizan en la unidad correspondiente al tema medida.

Cada vez que el alumno encuentre este ícono deberá procurar diversos materiales para poder realizar la actividad siguiente. Es importante anticipar esta necesidad tratando de prever en qué tiempo o para qué día deben tenerlos listos, en función del desarrollo de las actividades que vayan realizando.

Para responder al problema del punto **d)** *hace falta que tengas preparado: un piolín que no sea elástico, papel cuadriculado y 25 cuadrados de papel de 1 dm^2. Podés utilizar cualquier papel. Recordá tener listo este material antes de comenzar con esa actividad.*

a) Teniendo en cuenta que en los alrededores del lugar donde vivís tal vez hay terrenos sembrados y que al mirarlos habrás notado que en general los terrenos no tienen todos la misma forma ni el mismo tamaño, dibujá alguna huerta que hayas visto y registrá todo lo que observaste: ¿cuánto mide aproximadamente?, ¿tiene alambre alrededor? Si no pudiste observar una huerta real, pensá cómo se podría hacer una huerta en el terreno de la escuela y dibujá el plano en tu carpeta.

En este caso se requieren algunos materiales concretos para realizar una exploración. El trabajo de construcción que puedan realizar los alumnos y la posterior observación facilitará los aprendizajes.

En la consigna **b** de la primera actividad hay un ícono que indica que la tarea es grupal.

b) Pensá en la siguiente situación y luego respondé en tu carpeta las preguntas que siguen.

Una escuela tiene dos espacios disponibles para construir una huerta. Un vecino donó un rollo de alambre y la directora lo hizo cortar en dos partes iguales para que los alumnos, organizados en dos grupos, trazaran sus propias huertas y usaran todo el alambre que recibieron para rodearla.

1. ¿Te parece que las dos huertas van a quedar iguales?
2. Explicá si usar la misma cantidad de alambre para rodearlas asegura que las huertas sean del mismo tamaño.
3. Comentá lo que pienses con el maestro o con otros compañeros.

Tanto la manipulación de materiales como el trabajo en grupos, favorecen a todos los alumnos en la construcción de conceptos y la posibilidad de enunciar con palabras, situaciones del mundo en que vivimos. Por eso es importante solicitarles que expliquen sus procedimientos ya sea por escrito o verbalmente.
La necesidad de comunicar un procedimiento exige al joven volver sobre sus pasos y pensar de nuevo en el camino seguido y así aprender algo acerca de cómo aprendió.

En el siguiente formato se presentan aquellos conceptos que se consideran fundamentales para la construcción de los contenidos que se articulan en la secuencia y que por lo tanto, los alumnos deben tener presentes. El docente les puede sugerir que queden anotados en la carpeta ya que también les será útil tenerlos “a mano” o disponibles para poder ubicarlos y recuperarlos fácilmente cuando necesiten consultarlos en actividades subsiguientes, o en el momento de repasar, o estudiar para una evaluación.

Por ejemplo, en la consigna **c** de la misma actividad se explican estos conceptos necesarios para resolver un problema.

- *La* ***medida de una cantidad*** *es el número que indica las veces que entra la unidad en la cantidad a medir. Por ejemplo, cuando decimos que una chacra tiene 5 hectáreas significa que la medida es el número 5 y se ha tomado como unidad la hectárea.*
- *El* ***perímetro*** *de una figura es la medida de su contorno y todo contorno encierra una* ***superficie****.*
- *Cuando se ha elegido una unidad de superficie adecuada, la medida de la superficie de una figura es un número que se llama* ***área****. Por ejemplo, el área de la chacra es 5.*
- *El área de un rectángulo se obtiene multiplicando el largo por el ancho.*

Ya se ha usado este tipo de textos identificados con el signo de admiración, que hacen referencia a nuevas definiciones o a conceptos nodales. En este caso, se presentan conceptos como el de *medida*, *perímetro* y *área* que constituyen nociones básicas para el trabajo en Geometría. Por su gran importancia es necesario que el alumno las comprenda y maneje con fluidez para poder usarlas luego en otros problemas o tareas. El docente puede analizar estas definiciones buscando las relaciones, por ejemplo las diferencias, entre los conceptos que están destacados con negrita en el cuadro.

El trabajo con cuadros, tablas y gráficos y las experiencias con material concreto son aprendizajes relevantes para los alumnos. El uso de todas estas representaciones les facilita a los estudiantes establecer relaciones matemáticas que conlleven a la solución de cada situación.

A 2. Razones y proporciones

a) Leé esta información paso a paso y aplicala para analizar los casos de proporcionalidad con los que trabajaste en esta unidad y en la anterior.

En la unidad anterior estudiaste correspondencias de proporcionalidad directa y viste que en cada una de ellas se puede determinar un **coeficiente de proporcionalidad** o **constante de proporcionalidad** que se indica por un número **k**, tal que si **a** y **a'** son dos números correspondientes, **a'** resulta de multiplicar **a x k**. En las correspondencias de proporcionalidad directa, para identificar al coeficiente de proporcionalidad, basta con conocer un único par de correspondientes, al que podemos llamar (s, s') porque si k x s = s' entonces $k = \frac{s'}{s}$.

La expresión $\frac{s'}{s}$ que indica un cociente recibe el nombre de **razón**.

Por ejemplo, en la siguiente tabla, los números 9 y 13,5 son un par de correspondientes y su cociente 13,5 : 9 = 1,5 recibe el nombre de razón; entonces, la razón o constante de proporcionalidad es k = 1,5.

Rectángulo	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}
Alto en cm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Ancho en cm	3	4,5	6	7,5	9	10,5	12	13,5	15	16,5

Dado que la constante tiene el mismo valor numérico para todos los pares de una misma correspondencia, entonces el cociente entre los elementos de dos pares cualesquiera es el mismo y puede expresarse, en general, como la igualdad entre dos cocientes: $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, expresión que se denomina **proporción**.

En toda proporción a' y b se denominan **extremos** y a y b' son los **medios**.

Una propiedad característica de las proporciones es que el producto de los medios es igual al producto de los extremos. En símbolos a' x b = a x b'.

Volviendo a los valores de la tabla anterior, dos pares cualesquiera de correspondientes constituyen una proporción, por ejemplo (2;3) y (7;10,5) corresponden a razones iguales y se pueden escribir como proporción: $\frac{2}{3} = \frac{7}{10,5}$.

Hay correspondencias que resultan de operaciones aritméticas que asignan a cada valor de **x** un único valor de **y**. Son las que más adelante llamaremos funciones. En cambio, en otras, como en el caso de las temperaturas máximas y mínimas de un mismo lugar, los gráficos y las tablas son útiles para mostrar los datos recogidos.

La secuencia lógica propuesta indica que luego de recuperar los conceptos previos es posible avanzar en la explicación del tema propio de la unidad. Tal como lo expresa el título, esta actividad aborda nuevas definiciones y propiedades que contribuyen a una mayor comprensión de las relaciones de proporcionalidad.

La correspondencia anterior entre el largo y el ancho de los rectángulos del mismo contorno es una relación decreciente, pero no es una relación de proporcionalidad inversa.
Si bien es cierto que a medida que crece el largo, el ancho disminuye, se trata de mantener constante el perímetro, es decir una suma $\mathbf{x + y = s}$, y no se conserva la igualdad de todos los productos de cada par de valores correspondientes o sea que no se cumple la condición $\mathbf{x \cdot y = k}$ que caracteriza a la proporcionalidad inversa.

La importancia de esta clase de actividades, que muchos adultos nunca tuvieron la oportunidad de experimentar, lleva a los alumnos a reflexionar acerca de qué figuras del mismo perímetro no necesariamente tienen la misma área.

Este ejemplo nos permite destacar que la frase “a menos, más y a más, menos”, es una condición necesaria pero no suficiente para asegurar la existencia de proporcionalidad inversa que es, precisamente, el título de esta unidad.

Es importante dialogar con los alumnos acerca de la utilidad de visualizar los datos en una gráfica y resaltar la importancia de emplear esta representación para extraer conclusiones que efectivamente se desprendan de este. Usted puede intervenir cuidando que los alumnos no añadan información errónea, como unir los puntos por una línea continua en el gráfico de las temperaturas que aparece en la unidad **2**, página **26**, ya que se trata de temperaturas diarias máximas que no varían en forma continua. En cambio, en el caso presentado en la actividad **3**, página **45**, aunque en el gráfico anterior sólo se han dibujado los rectángulos de medidas enteras, la hipérbola representa la variación continua del largo y el ancho de todos los posibles rectángulos del mismo perímetro.

El problema que sigue en la actividad **4** también se refiere a la proporcionalidad inversa entre el número de cartas y el número de jugadores.

4. Otros problemas para pensar

a) Resolvé en tu carpeta los siguientes problemas. Podés usar tablas, gráficos o explorar razones y proporciones.

1. Para un juego hay que repartir las 48 cartas de un mazo entre todos los jugadores por igual, sin que sobre ninguna carta. ¿Pueden entrar a ese juego 5 jugadores? ¿Y 6? Anotá todos los casos posibles de 2 o más jugadores y cuántas cartas le tocan a cada uno.

2. Con la producción de fruta de su huerta, una familia prepara una cierta cantidad de dulce. Si lo envasa en cajoncitos de 3 kilos necesita 30 cajoncitos. Si con esa cantidad de dulce llena 90 frascos, ¿qué cantidad de dulce contiene cada uno? Y si en cambio usa frascos de medio kilo, ¿cuántos puede llenar? ¿Y con frascos de un cuarto kilo?

b) Mostrale tu trabajo al maestro y conversá con él sobre lo que observaste.

La representación gráfica resulta una serie de puntos que pertenecen a una hipérbola, pero sería incorrecto dibujar la hipérbola con un trazo continuo porque no se trata de una variación continua, sino solamente entre números enteros (cartas-jugadores).

El párrafo siguiente se encuentra en la página **46** del CUADERNO DE ESTUDIO **1** e indica el carácter de las últimas actividades de la unidad. En él se destaca que la actividad **5** es de revisión y síntesis de lo aprendido.

La actividad que sigue te va a servir para repasar todo lo que trabajaste sobre proporciones. Como en todas las actividades que te proponen revisar lo que aprendiste, podés ver si realizaste todas las actividades, completarlas, volver a leer los textos destacados, analizar tus respuestas...

Es necesario tener en cuenta que los materiales necesarios para una actividad suelen ser solicitados con anterioridad, en el texto de las actividades previas, de este modo se da la oportunidad de buscarlos con antelación para tenerlos disponibles en el momento de usarlos. Una lectura anticipada por parte del docente facilitará la preparación de todo lo necesario.

Las distintas actividades de esta unidad permitieron analizar las características que presentan las relaciones de proporcionalidad inversa:

- **el producto de las magnitudes correspondientes es constante;**
- **la razón entre dos magnitudes es inversamente proporcional a la razón inversa de sus correspondientes;**
- **la representación gráfica de los puntos pertenecen a una curva llamada hipérbola.**

A

Elija uno de los tres CUADERNOS DE ESTUDIO.

- Explórelo identificando en cada unidad los temas o contenidos principales. Por ejemplo, busque las conexiones entre los títulos de los temas y de las actividades y los textos destacados.
- Lea los textos en negrita que abren y cierran cada unidad y busque relaciones entre ambos.

La búsqueda de las conexiones que se puedan establecer entre títulos, temas y actividades es una buena estrategia didáctica para realizar cuando los estudiantes comienzan a trabajar con una unidad nueva. De este modo estarán anticipando cuál es la secuencia que estudiarán, lo que les facilitará encontrar las relaciones entre contenidos y disponer de elementos para organizar la tarea.

Todas las unidades terminan con un párrafo titulado "Para finalizar". En el que corresponde a esta unidad **3** se sugiere una actividad colectiva de evaluación de lo aprendido en cuanto a proporcionalidad.

Para finalizar

Como cierre de esta unidad y para que puedas comprobar cuánto aprendiste te pedimos que analices con tus compañeros las siguientes situaciones y digas si son de proporcionalidad o no y expliques tu respuesta. En caso afirmativo, especificá si se trata de proporcionalidad directa o inversa.

a. El número de cajas y el número de alfajores en cada una cuando se tiene que envasar una misma cantidad, por ejemplo, 24 alfajores.
b. El número de botellas iguales de gaseosa y la cantidad de vasos iguales que pueden servirse con ellas.
c. El combustible que resta en el tanque de un motor y el tiempo de funcionamiento.
d. El número de partes en que se divide una unidad y el tamaño de cada parte.
e. La edad de una persona y el aumento de su peso.

Generalmente en el texto "Para finalizar" se incluyen reflexiones acerca del recorrido conceptual de la unidad y algunas anticipaciones acerca de la aplicación de esos conceptos en las unidades siguientes.

En la unidad **8** del CUADERNO DE ESTUDIO **1** se presenta este tipo de guión.

Para finalizar

En esta unidad aprendiste muchas cosas acerca de los cuerpos y de sus propiedades a través de la resolución de estas actividades:

Actividad 1: Formaedro.
Actividad 2: Poliedros regulares.
Actividad 3: Relación de Euler.
Actividad 4: Un panal de abejas.
Actividad 5: Los cuerpos redondos.
Actividad 6: Exploración geométrica de un objeto.
Actividad 7: Unidades cúbicas.

En todas las unidades que estudiaste hasta ahora se presentó al final una síntesis de los contenidos trabajados. Esta vez la síntesis la vas a hacer vos. Releé los títulos de las actividades y, tomando como modelo las síntesis finales de las unidades anteriores, explicá con tus palabras, en forma breve, lo que aprendiste en cada una. Es bueno que vayas haciendo anotaciones de los temas más importantes que estudiaste en cada actividad para ayudarte a elaborar después la síntesis. Podés conversar con un compañero antes de escribirla. Estos conocimientos que ahora vas a sintetizar te van a ser muy útiles cuando más adelante estudies las medidas de los cuerpos.

Desde esos textos se guía a los alumnos para que sean ellos los que hagan la síntesis de lo que aprendieron en la unidad.

En este apartado se ha intentado mostrar la estructuración interna de una unidad didáctica y transparentar así las ideas teóricas que fundamentan la organización elegida.

En la concepción de **Horizontes,** una unidad no se reduce a una simple presentación secuenciada de conceptos y procedimientos, sino que atiende a otros organizadores como componentes fundamentales para articular el diseño, el desarrollo y la evaluación de las unidades didácticas. A continuación señalamos los que en este caso fueron más relevantes, tomando las expresiones de Luis Rico Romero en *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (Barcelona, ICE Horsori, 1997).

> *En primer lugar, consideramos los errores y dificultades usualmente detectados en el aprendizaje de las matemáticas que se presentan sobre cada tópico, así como los problemas u obstáculos de aprendizaje que se detectan o plantean para cada concepto.*
>
> *En segundo lugar, la diversidad de representaciones utilizadas para cada sistema conceptual, junto con algunas de las modelizaciones usuales de los correspondientes conceptos.*
>
> *En tercer lugar, la fenomenología de los conocimientos implicados, así como las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenidos.*
>
> *En cuarto término, la diversidad de los materiales de tipo manipulativo y de los recursos que pueden emplearse en la enseñanza de cada tópico.*
>
> *Y, en quinto término, la evolución histórica de cada campo e, incluso, de cada concepto.*

La finalidad de este apartado ha sido acercar a los docentes algunos elementos para reflexionar acerca de sus propias actividades de planificación y diseño de unidades didácticas.

3.

Acerca del cálculo y de la calculadora

En la práctica escolar se distinguen tres tipos de cálculo: mental, instrumental y escrito. El desarrollo de las competencias en cálculo mental es prioritario, pero hay que distinguir qué es necesario memorizar o automatizar de aquello que es posible reconstruir. El cálculo mental, ya sea exacto o aproximado, implica los dos aspectos: *cálculo mental automatizado* y *cálculo mental reflexivo*.

El *cálculo mental automatizado* se limita al conocimiento de memoria de resultados y reglas. En tal sentido ciertos resultados como los de las tablas de multiplicar o algunas reglas como la multiplicación por 10 por 100 por 1.000, deben memorizarse para que estén directamente disponibles en todo momento.

En cambio, el *cálculo mental reflexivo* corresponde a la capacidad de obtener el resultado de un cálculo por procedimientos personales, por ejemplo, la descomposición en cálculos más sencillos. El alumno elabora un razonamiento numérico que implícitamente se apoya en las propiedades de las operaciones (conmutatividad, distributividad, asociatividad) y sobre el conocimiento de resultados memorizados. Si fuera necesario escribirá ciertos cálculos intermedios. En una misma clase, los procedimientos utilizados por los alumnos pueden ser muy diversos y dar lugar a intercambios e interesantes debates.

Por ejemplo, pueden obtener el resultado de 6 × 15 de distintos modos:
- 2 ×15 × 3 (utilizando implícitamente la asociatividad, la conmutatividad, el conocimiento de dobles y triples);
- 6 × 10 + 6 × 5 (utilización implícita de la distributividad);
- 10 × 6 = 60 y 60 : 2 = 30 y 60 + 30 (por el conocimiento de que multiplicar por 5 es multiplicar por 10 y dividir por 2);
- (6 × 30) : 2 o (6 × 5) × 3 (utilización implícita de la asociatividad).

Las distintas formas de resolución del ejemplo anterior muestran que los procedimientos elaborados dependen de las concepciones de los alumnos. El dominio del cálculo numérico aporta también una ayuda a la elaboración de estrategias para tratar de resolver un mismo problema con otros números con los que los cálculos resulten más sencillos y se pueda verificar fácilmente el procedimiento de resolución.

En el *cálculo por escrito,* el objetivo esencial reside en la comprensión de los algoritmos utilizados. En la escuela primaria, los alumnos han calculado sumas y diferencias de decimales, productos de dos números naturales o de un decimal por un entero y, en el caso de la división, cocientes y restos con la posibilidad de escribir sustracciones intermedias y productos parciales para determinar una cifra del cociente.

En este ciclo, el *cálculo instrumental,* es decir, el uso de la calculadora, justifica un aprendizaje que tiene diferentes propósitos de uso:

- como útil de cálculo;
- como instrumento con el que se busca comprender ciertas regularidades;
- en la exploración de fenómenos numéricos;
- como fuente de problemas y ejercicios.

Los alumnos deben familiarizarse con el uso inteligente de la calculadora elemental. La utilización pertinente no es espontánea y demanda un aprendizaje situado. Los alumnos deben formarse en una lectura crítica de los resultados leídos en el visor, con un control particular de la razonabilidad de ese resultado a través de un cálculo mental aproximado.

Para que la calculadora se convierta en un buen aliado es necesario conocer sus posibilidades. Las siguientes actividades tienen como propósito el conocimiento del potencial del uso de la calculadora ya que la disponibilidad de estos útiles de cálculo conduce a repensar los objetivos de la enseñanza del cálculo. Si se dispone de calculadoras para los alumnos, podrán plantearse a decisión de los docentes.

Actividad 1

Es tal la variedad de modelos de calculadoras que puede ocurrir que distintas calculadoras respondan de forma diferente a las mismas teclas. Las más elementales tienen teclas que resuelven las cuatro operaciones: +, -, × y ÷ y algunas otras para diversas funciones.

- Poné tu calculadora en funcionamiento apretando la tecla AC (ON) e investigá qué se ve en el visor cuando presionás las distintas teclas y qué tecla te permite borrar.

Después de haber explorado tu calculadora vas a trabajar sobre tres situaciones.

Situación 1

La calculadora de Ana tiene, entre otras teclas, una que dice OFF y otra ON/CE en cambio la de Luis tiene esas mismas teclas y otra CE y en la calculadora del maestro hay dos teclas rojas AC y C.

Para investigar cuál es la diferencia entre apretar la tecla AC o C vas a resolver en tu carpeta algunos cálculos sencillos.

- Poné como título “Actividad 3. Calculadora”.
- Copiá los cuadros siguientes y completá lo que se ve en el visor.

Tecla que toco	6	+	5	+	5	+	3	AC	4	+	3	=
Veo en el visor	6	6	5	11								
Tecla que toco	6	+	5	+	5	+	3	C	4	+	3	=
Veo en el visor	6	6	5									

• Compará los dos cuadros y pensá qué información se borró en cada caso. Tomá una hoja cualquiera como borrador y anotá tus conclusiones para que puedas preparar una ficha “ayuda memoria” sobre el uso de la calculadora. Al terminar la actividad, pasá en limpio tu “ayuda memoria” para tenerlo siempre a mano.

Situación 2

• Hacé en tu carpeta las siguientes multiplicaciones con lápiz y papel y con la calculadora y después respondé las preguntas. Recordá que la coma decimal se marca con la tecla que tiene un punto. Compará los resultados que obtengas en las dos columnas.

Multiplicaciones	Con lápiz y papel	Con calculadora
45,6 x 8000000 =		
95,7 x 4000000 =		

• Con lápiz y papel obtuviste números de 9 cifras, ¿se pueden escribir en la calculadora?
• Observá que en estos casos aparece en el visor una letra E. ¿Qué significa esa letra E?
• Anotá tus observaciones en la ficha “ayuda memoria” que empezaste en la situación anterior.

Situación 3

Una alumna tenía que resolver el siguiente problema: *“Si se compran 5 kg de cebolla y 8 bolsas de papas de 3 kg cada una, ¿cuánto pesa toda la compra?”*. Anotó en su carpeta: 5 + 8 x 3 = 29 y quiso verificar su procedimiento con la calculadora.

Para eso tecleó:
5 + 8 x 3 = y en el visor obtuvo 39.

Como estaba segura de que el resultado debía ser 29 y no 39, pensó que era un problema del orden seguido al efectuar el cálculo y tecleó el producto en otro orden:
5 + 3 x 8 = y en el visor ¡obtuvo 64!

Para poder interpretar estos sorprendentes resultados:
• Copiá en tu carpeta el siguiente cuadro y completálo con los resultados que obtenés usando lápiz y papel y con los que obtenés con la calculadora; después comparálos.

Cálculo	Con lápiz y papel	Con calculadora
$2 + 5 \times 7 =$		
$2 + 7 \times 5 =$		
$20 - 8 \times 2 =$		
$20 - 2 \times 8 =$		

- ¿Pensás que la calculadora realizó con los mismos números, los mismos cálculos que vos? ¿Por qué?
- Anotá lo que descubriste en tu ficha "ayuda memoria". Si no estás seguro, consultá con tu docente.

No hay dudas de que el problema de la alumna se resuelve calculando: $5 + 8 \times 3 = 5 + 24 = 29$, pero para que la calculadora haga esas operaciones hay que aprender a accionarla de una manera especial.

Al pulsar sucesivamente 5 + 8 x 3 = la calculadora acciona como si se tratara de resolver: $(5 + 8) \times 3 = 13 \times 3 = 39$, vale decir que efectúa la multiplicación sobre la suma acumulada hasta ese momento.

La mayoría de las calculadoras puede almacenar resultados para luego sumarlos o restarlos porque tiene una memoria aditiva que se acciona con las teclas MRC M+ y M- .
Hay otros modelos de calculadora que no tienen la tecla MRC sino otras que cumplen las mismas funciones, por ejemplo MR y MC .

- Pulsá las siguientes teclas:
  2 x 4 M+ 2 0 ÷ 5 M+ MRC

- Anotá en tu carpeta qué cálculo resolviste y qué resultado te dio la calculadora.

- Hacé lo mismo con las siguientes teclas:
  MRC AC 1 2 x 4 M+ 2 0 ÷ 5 M- MRC

- Usá M+ y M- para resolver los siguientes cálculos y registrá en qué orden pulsaste las teclas.

  $108 \div 12 + 18 \times 3 =$

  $\frac{36 \times 70}{21} - \frac{15 \times 40}{6} =$

- Anotá en tu "ayuda memoria" para qué sirven las teclas M+ M- MRC .

• Ahora que aprendiste a usar la calculadora, escribí en orden la serie de teclas que debió pulsar la alumna para resolver el problema de esta Situación 3.

• Leé atentamente la síntesis siguiente y comparala con lo que anotaste en tu "ayuda memoria". Si es necesario, o si las teclas de tu calculadora son diferentes, corregilo y tenelo siempre disponible porque te resultará de gran utilidad.

• La tecla C borra sólo lo que está en el visor.
• La tecla AC borra todo lo que se hizo hasta ese momento.
• El visor sólo puede mostrar un número de hasta ocho cifras.
• La tecla • representa la coma decimal.
• Toda nueva operación que se introduzca actúa sobre el número acumulado hasta ese momento.
• La tecla M+ guarda en la memoria el resultado de una operación y lo deja listo para ser sumado.
• La tecla M- guarda en la memoria el resultado de una operación para ser restado.
• La tecla MCR recupera el resultado de las sumas y restas en la memoria aditiva.
• Para borrar la memoria aditiva hay que apretar nuevamente la tecla MRC y la AC.

Actividad 2

Trabajá en tu carpeta. Recordá poner el número de la actividad y un título adecuado.

Ya viste la necesidad de usar fracciones o expresiones decimales cuando se trata de medir una cantidad. Ahora que disponés de una calculadora, ¿te parece que se puede usar para operar con fracciones? Para encontrar la respuesta te proponemos que trabajes sobre algunas situaciones.

Situación 1

• Copiá este problema: Hay que repartir 3 alfajores entre 4 chicos. ¿Qué operación aritmética hay que hacer? Poné el signo entre los números y escribí el resultado.
3 … 4 = …
• Averiguá qué responde la calculadora para cada una de estas series de teclas, copiá la primera y anotá lo que sucede en las siguientes:

3 ÷ 4 =   3; 3; 4; 0,75

1 ÷ 2 M+ 1 ÷ 4 M+ MRC

7 5 ÷ 1 0 0 =

- Compará los tres resultados y comentá tus observaciones con tus compañeros y el docente.

Situación 2

Vas a explorar otras fracciones.

- Realizá con lápiz y papel las divisiones entre el numerador y el divisor de cada fracción de estos ejemplos: $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{10}$
- Hacé lo mismo con estos otros ejemplos: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{2}{11}$
- Anotá qué diferencias observaste entre el conjunto de fracciones del primer ejemplo y las del segundo.
- Leé atentamente las informaciones de los recuadros siguientes y verificalas con tu calculadora usando los mismos ejemplos y otros que te propongas.

Para anotar una fracción en la calculadora se hace la división entre el numerador y el divisor, el visor muestra la expresión decimal de la fracción.

- Si la división entre el numerador y el divisor da resto cero, la expresión decimal de la fracción es exacta. Por ejemplo:
  $\frac{3}{4} = 0{,}75$ $\frac{5}{8} = 0{,}625$

- Cuando los restos se repiten indefinidamente, la expresión decimal es periódica. Por ejemplo:
  $\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots$ $\frac{1}{11} = 0{,}0909\ldots$

- Para anotar la igualdad entre la fracción y su expresión periódica se escribe un arco sobre las cifras que se repiten.

En el visor de la calculadora sólo aparecen las cifras de la expresión decimal periódica que se pueden ver, y eso significa que las demás fueron truncadas o recortadas. El resultado del truncamiento es una expresión decimal aproximada. Por ejemplo, podemos decir que $\frac{1}{3}$ es aproximadamente igual a 0,3 o a 0,33 o a 0,3333333.

Cuando se trata de sumar fracciones hay que:

1. Pulsar la primera fracción como si fuera una división.
2. Guardarla en la memoria aditiva de signo + M+ .
3. Pulsar la segunda fracción como si fuera una división.
4. Guardarla en la memoria aditiva de signo + M+ .
5. Obtener el resultado de la memoria pulsando la tecla MRC .

Para restar fracciones hay que seguir los mismos pasos que para sumar cambiando en el paso 4 la tecla M+ por la tecla M-.

Si al dividir el numerador por el denominador de una fracción aparecen expresiones decimales periódicas y se usa la memoria de la calculadora, el resultado final puede variar

Por ejemplo: $\frac{2}{3} + \frac{7}{9} =$

2 ÷ 3 M+ 7 ÷ 9 M+ MRC da en el visor 1,4444443 porque se truncan las expresiones decimales, es decir = 0,6666666 + 0,7777777 = 1,4444443

Para multiplicar fracciones hay que:

1. Pulsar la primera fracción como una división.
2. Pulsar x .
3. Pulsar la segunda fracción como una división.
4. Pulsar = .

Para dividir fracciones hay que seguir los mismos pasos que para multiplicar cambiando en el paso 3, la segunda fracción por su inversa.

Anexo

Orientaciones para la resolución de los desafíos matemáticos

En este apartado se encuentran algunas referencias acerca de los desafíos matemáticos que se presentan en cada una de las unidades de los tres Cuadernos. Su lectura le permitirá tener disponibles algunos procedimientos para resolverlos que serán útiles para orientar a sus alumnos.

Como se anticipó en la presentación de este Cuaderno, se trata de actividades que, si bien no plantean situaciones directamente relacionadas con los contenidos de cada unidad, ofrecen la oportunidad de brindar a los alumnos momentos diversos para reutilizar los contenidos del área.

> Cada docente decidirá cuándo sugerir a los alumnos su resolución. Pueden contemplarse, por ejemplo, los tiempos en que alguno terminó antes el trabajo esperado o considerar la necesidad de otros para incrementar el trabajo en Matemática. Incluso pueden ser una alternativa para seguir trabajando más allá de la escuela. Nuevamente, comparar las resoluciones y explicar los procedimientos que seleccionaron para resolverlos constituirá un interesante momento de interacción.

Desafíos del Cuaderno de estudio 1

▸ Unidad 1

1. Se busca un número

- Por la primera condición la cifra de la decena de mil es 1 y la de la unidad de mil es 0, el número es de la forma: 10 - - -
- Analizar qué cifras pueden ocupar el lugar de la unidad por tratarse de un número impar. Luego, surge con facilidad el número 10.545

2. Cuadrados mágicos

Si se suma 1 a cada número del cuadrado se obtiene otro cuadrado mágico, en el que la suma de las filas, columnas y diagonales se incrementa en 3.

Al multiplicar todos los números de un cuadrado mágico por un mismo número se obtiene otro cuadrado mágico en el que la suma queda multiplicada por ese número, por ejemplo:

$$a + b + c = 15$$
$$2 \cdot (a + b + c) = 2 \cdot 15$$

Para completar el tercer cuadrado: 1, en la primera columna; 5, en la segunda columna y 2, en la tercera columna.

Diseño de cuadrados mágicos

Si bien los alumnos pueden intentarlo por tanteo y cálculos, a continuación se presentan dos métodos interesantes para la construcción de cuadrados mágicos.

- **Cuadrados mágicos de orden impar**

Paso 1: Se escriben los números del 1 al n^2. Por ejemplo, 1 al 25. Se escribe el 1 en la casilla superior del rombo y se seguirá de forma oblicua como se ve en el cuadrado. El cuadrado mágico será un cuadrado inscrito en el rombo que hemos formado.

				1				
			6		2			
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
			24		20			
				25				

Paso 2: Trasladamos los números de las esquinas del rombo a las casillas vacias que hay en el lado opuesto del cuadrado.

				1				
			6		2			
		11	24	7	20	3		
	16	4	12	25	8	16	4	
21		17	5	13	21	9		5
	22	10	18	1	14	22	10	
		23	6	19	2	15		
			24		20			
				25				

Paso 3: Quitamos las esquinas del rombo: ya tenemos un cuadrado mágico de orden impar.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

• Cuadrado mágico cuyos lados tengan un número de casillas múltiplo de 4

Dibujar el cuadrado. Colocar los números comenzando por el 1 en su orden natural desde arriba a la izquierda hasta abajo a la derecha. Dividir el cuadrado en subcuadrados de 4x4 como muestra la figura en un cuadrado de 8x8, y dibujar una "X" en cada subcuadrado, de modo que su centro coincida con el centro del subcuadrado que la contiene.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Los números no "tocados" por las X (en negro en la figura) quedarán en las casillas en que se encuentran, mientras que los "tocados" por las X, serán movidos. La forma de hacer ese movimiento es simetrizar con respecto al centro del cuadrado total los números "tocados" o, lo que es igual, invertir el orden en que han sido colocados en el cuadrado. La figura muestra cómo hacerlo en nuestro caso y el cuadrado mágico ya construido.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

3. Un juego con puntaje

Se trata de un juego sencillo, pero interesante para trabajar las operaciones, el orden y los paréntesis en forma conveniente.

4. Una caja de fósforos

• Para la resolución de este problema se puede hacer una tabla con las dos variables (cuadrados /fósforos) tal como la que se muestra:

1 c --------------------- 4 F
2 c --------------------- 7 F
3 c --------------------- 10 F
4 c --------------------- 13 F

A simple vista puede verse que el número de fósforos es el número de cuadrados por 4, menos el número de cuadrados anterior. O sea

$$F = 4 \cdot c - (c - 1)$$

De lo que resulta, **F = 3. c + 1** y en el caso de 14 cuadrados: 43 fósforos

• Usando esta última fórmula, se puede resolver con sencillez el otro ítem:
(222-1) ÷ 3 = 73 cuadrados y quedan 2 fósforos sin usar.

5. Un anciano bromista

En este tipo de acertijos conviene analizar los mensajes de a uno controlando que no se llegue a una contradicción, o sea en este caso, que no resulten verdaderos dos mensajes.

Por ejemplo, si se supone que el mensaje 1 es verdadero, entonces la clave está en el sobre blanco y como consecuencia, los otros 2 mensajes deben ser falsos. Veamos, si el segundo es falso, se llega a una contradicción, porque la clave debería estar allí y no en el primero, por lo tanto, la segunda clave sería también verdadera, cosa imposible porque contradice la consigna. El problema se resuelve al considerar verdadero sólo el tercer mensaje y entonces la clave está en el sobre celeste.

▸ Unidad 2

1. Etiquetas rectangulares

Esta actividad se resuelve con calculadora. La consigna **d** permite verificar lo trabajado en "Una familia de rectángulos".

2. Números capicúas

Ejemplo 1: Partimos del número 12 y resulta que 12 + 21 = **33**.

Ejemplo 2: Partimos del número 48 y resulta que 48 + 84 = 132 no es capicúa, por tanto no hay más que repetir el proceso para obtener:

132 + 321 = **353**

Ejemplo 3: Partimos del número 96 y resulta que
96 + 69 = 165; 165 + 561 = 726; 726 + 627 = 1353; 1353 + 3531 = **4884**

Ejemplo 4: Partimos del número 102 y resulta que 102 + 201 = **303**
Ejemplo 5: Si se prueba con el 187, es seguro que tras 23 sumas llegamos a un número capicúa, **8.813.200.023.188**

3. Palabras y frases

Algunos ejemplos de palabras palíndromos:
*Ana/arenera/**anilina/ananá/Oruro/oso**/Otto/**radar**/reconocer/**rotor**/salas/**seres**/somos*

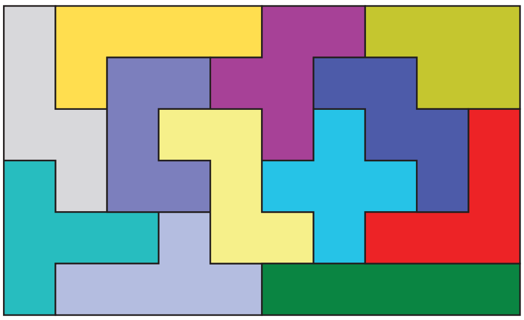
Algunos ejemplos de frases palíndromos:
¿Acaso hubo búhos acá? (Juan Filloy)
Allí si María avisa y así va a ir a mi silla. (HG)
Anita la gorda lagartona no traga la droga latina.
Anita lava la tina. (Popular en México)
Dábale arroz a la zorra el abad. (Tal vez uno de los más populares)
La ruta nos aportó otro paso natural.
Nada, yo soy Adán. (Guillermo Cabrera Infante)
No lata, no: la totalidad arada dilato talón a talón. (Juan Filloy)
No sólo no lo son. (Título de una canción del grupo Mano de Santo)
Se lo creí, mareada. Era miércoles. (Luciana Rezzónico)
Sé verlas al revés. (Diego Vidal)

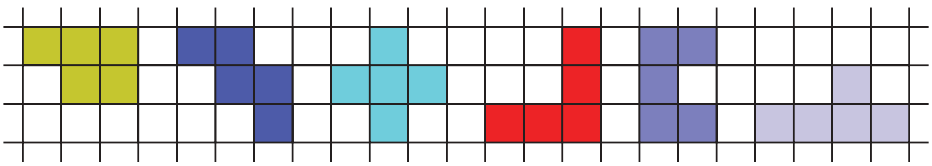
▸ Unidad 3

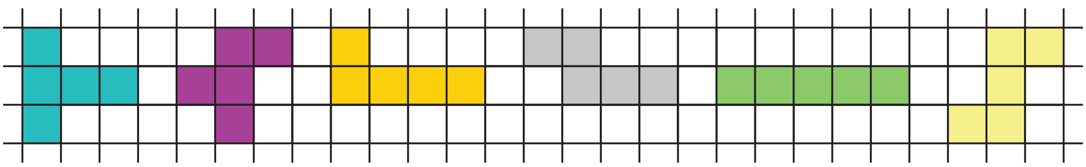
1. Rompecabezas–dominó

Tetraminos y Pentominos

Con cinco cuadrados se pueden construir 12 pentominos distintos. La siguiente figura muestra una teselación de un rectángulo 6 x 10 con todos los pentominos.







2. Colocar números

• La ubicación correcta de los números es la siguiente

	7	
3	1	4
5	8	6
	2	

• La cuadricula indicada se completa fácilmente recurriendo a simples sumas y restas.

3. Adivinanzas

Para este tipo de actividades se sugiere ir analizando los números posibles que se pueden colocar en cada lugar. De ese modo, se deduce con facilidad cuáles deben descartarse y así se obtiene el numero buscado. En este caso la solución es **4520.**

4. La familia de ocho proporciones

Un ejemplo posible es **a = 3 b= 9 c= 2 d= 6**

▸ Unidad 4

1. Las pesas

La mayoría de las personas sugieren que son necesarias seis pesas: **1, 2, 4, 8, 16 y 32 kg** pues piensan colocar las pesas en uno sólo de los platillos y el objeto que hay pesar en el otro. De esta manera, todos los pesos pueden lograrse:

1 kg =1
2 kg = 2
3 kg = 2 + 1
4 kg = 4
5 kg = 4 + 1
....

....
40 kg = 32 + 8

Bachet propone realizar la tarea con sólo cuatro pesas de **1, 3, 9 y 27 kg** colocando las pesas en ambos platillos. Hay que tener en cuenta que las pesas que se ubiquen junto al objeto asumen un valor negativo, entonces los pesos pueden obtenerse de la siguiente manera:

1 kg = 1
2 kg = 3 – 1
3 kg = 3
4 kg = 3 + 1
5 kg = 9 - 3 – 1
....
....
40 kg = 27 + 9 + 3 + 1

2. Clavijas alineadas

No tiene solución porque luego de dos o tres intentos ya resulta imposible contar con el espacio vacío en forma contigua o con una sola clavija por medio.

3. Los días

La cantidad de días del año no es múltiplo de 7 puesto que al dividir 365 ÷ 7 el resto es 1. Esto explica por qué siempre el día del cumpleaños será un día siguiente al del año anterior.

La única opción que existe para que un mes tenga tres días domingos pares es que el primero sea el 2 de ese mes; el otro sea 16 y el ultimo, 30. Por tanto, el día 15 será un sábado.

4. Todos unos

Se deduce con facilidad que se multiplicó por 9 observando la cifra de las unidades.

▸ Unidad 5

1. Un número curioso

Los 5 primeros productos tienen la particularidad de estar formados por los mismos 6 dígitos que intervienen en uno de los factores, pero en diferente orden.

En el caso del producto por 7, lo llamativo es que sus cifras son todos 9. Del 8 en adelante, se observa algo muy peculiar: en el producto se obtienen todos los dígitos, salvo uno. Lo notable es que el que está ausente puede hallarse sumando los 2 dígitos que sobran.

Por ejemplo: **142 857 x 8 = 1 142 856**. En este caso, el ausente es el 7, pero hay un 6 y un 1, que sumados dan ese número ausente.

2. Otro problema de Malba Tahan

A continuación se indica el planteo de la ecuación, considerando como “x” al número buscado.

$$\frac{1}{5}\cdot x + \frac{1}{3}\cdot x + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x - \frac{1}{5}\cdot x\right) + 1 = x$$

Haciendo los cálculos se llega a que el numero de abejas es x = 15.

3. Alimentos para animales

Hay 5 tipos de bolsas diferentes. Como el enunciado indica que se quiere envasar la misma cantidad de alimento por cada tipo de ellas, significa que se deberá envasar 3000 kg por cada tipo.

Por tanto, se obtendrán:

1000 bolsas de 3 kg;
600 bolsas de 5 kg;
300 bolsas de 10 kg;
200 bolsas de 15 kg;
150 bolsas de 20 kg.

Como se observa, en todos los casos se envasa un total de 3000 kg.

4. Con las cuatro operaciones

Hay varias opciones. Por ejemplo:

12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100.

Usando sólo cuatro signos, también puede obtener 100:

123 + 4 - 5 + 67 – 89 = 100.

▸ Unidad 6

1. Construcción de un triángulo

Se pueden construir dos triángulos. Uno rectángulo, con dos ángulos de 45° y otro triángulo con un ángulo de 45° y otros dos, de 67° 30´ cada uno.

2. Pares y nones

La respuesta es NO, puesto que la suma de los quince primeros números naturales impares responde a la expresión: **Si = 1 + 3 + 5 +…27 + 29 = 225**. En cambio la suma de los quince primeros números pares es **Sp = 2 + 4 +…+ 28 + 30 = 240**.
Ambas expresiones no dan el mismo resultado.

3. Triángulos en triángulos

Quedaron formados triángulos semejantes.
4 triángulos iguales al más pequeño. Se sugiere trabajar con material concreto.

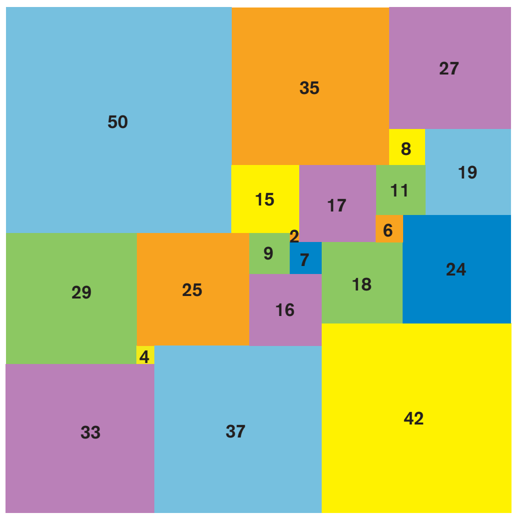
▸ Unidad 7

1. ¿Qué número borraste?

Después de probar con varios ejemplos, los alumnos podrán advertir que la suma del número borrado y el número obtenido con las cifras restantes da por resultado siempre un múltiplo de nueve.

2. Embaldosar cuadrados

A continuación se presenta la única solución hallada por este matemático holandés.



En 1992, Bouwkamp y Duivestijn publicaron 205 cuadrados simples con entre 21 y 25 teselas.

3. Embaldosar rectángulos con cuadrados

Las medidas de los lados de los 13 cuadrados utilizados son : 3, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 24, 31, 33, 36, 39, 42.

▸ Unidad 8

1. "6174", un número mágico

- Siempre es posible llegar al 6174 con la única condición que los cuatro dígitos no sean iguales.
- El número máximo de pasos es siete.
- El número de pasos está determinado por la relación entre los dígitos y no por su valor.

Comentarios sobre el problema

Todos los números de cuatro cifras, ordenadas de mayor a menor, se pueden clasificar en ciertas formas según la diferencia entre sus cifras. Por ejemplo, el número 8721 es de la forma 7 - 5, donde 7 es la diferencia entre 8 y 1; 5 es la diferencia entre 7 y 2. Hay otras formas, por ejemplo, el número 9651 es de la forma 8 - 1, donde 8 es la diferencia entre 9 y 1; 1 es la diferencia entre 6 y 5.

En general, un número entero *abcd* es de la forma *x - y*, si se cumple que, ordenados sus dígitos de mayor a menor ***a - d = x* y *b - c = y*.**

Se puede demostrar que: "Todo número *abcd* conduce al 6174 en un sólo paso si y sólo si es de la forma 6 – 2". Si el lector está interesado en esa demostración, la encontrará a continuación.

Si el número *abcd* siendo $a > b > c > d$, es de la forma 6 - 2, entonces se cumple que:

a - d= 6; luego **d = a - 6**
b - c = 2; luego **c = b - 2**

Escribiendo el número *abcd* en potencias de 10 de mayor a menor y luego de menor a mayor y restando ordenadamente, se tiene:

$$\begin{array}{ccccccc} 10^3\,a & + & 10^2\,b & + & 10\,(b-2) & + & (a-6) \\ -10^3\,(a-6) & + & 10^2\,(b-2) & + & 10b & + & a \\ \hline 6 \times 10^3 & + & 2 \times 10^2 & - & 20 & - & 6 \end{array} = 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 7 \times 10 + 4$$

que corresponde a la escritura decimal del número 6174.

2. Un proceso curioso de repeticiones

Con el uso de la computadora se comprobó que, empezando con cualquier número menor que un millón sucede lo mismo. No se sabe todavía si ocurre lo mismo con cualquier número de partida.

3. Cajas de fósforos

Si una cajita midiera 1cm x 3 cm x 5 cm, con tres cajas se pueden formar diferentes bloques al multiplicar por 3 cada una de sus dimensiones, es decir 3 x (1 x 3 x 5). De este modo resultan: un bloque de 3 x 3 x 5, otro de 1 x 9 x 5 y un tercero de 1 x 3 x 15. Cuando se trabajara con 36 cajitas, se puede hacer el mismo razonamiento: 36 (1 x 3 x 5) recordando además que 36 = 1 x 2 x 2 x 3 x 3.

4. Un rompecabezas hexagonal

La figura que no aparece en el rompecabezas es el cuadrado.

▸ Unidad 9

1. Suma de impares

La suma de los números impares desde 1 hasta 100 es S =1 + 3 + 5 +…+ 95 + 97 + 99. Se puede observar que 1+ 99 = 3 + 97 = 5 + 95 = 100 y que la suma queda formada por 50 sumas de pares que dan por resultado 100. La suma total de los números impares desde 1 hasta 101 es 50 ⋅100 +101= 5101.

Entre 1 y 199 hay 100 números impares cuya suma es 10 000. Entonces, si se agrega el siguiente impar que es 201, se obtiene como resultado 10 201.

2. Un teléfono

Si se plantea el algoritmo de la multiplicación, surge inmediatamente que el número es 10 256, dado que 410 256 = 4 • 102 564.

3. Cortar una madera

El problema de cortar la madera tiene una solución interesante:

4. Los aprobados

El número de aprobados es 20 porque es el único número menor que 35 al que se le puede calcular el 95% y obtener un número entero. De los 35 alumnos aprobaron 20 y de ellos 19 obtuvieron 7.

5. El adivino infalible

Supongamos que el número pensado es ab.

El procedimiento que se pide es $(a \cdot 2 + 5) \cdot 5 + b - 25$, y realizando las operaciones se obtiene la expresión polinómica del numero pensado $10 \cdot a + b$.

Por ejemplo, si el número pensado fuera 39,
$(3 \cdot 2 + 5) \cdot 5 + 9 - 25 = 11 \cdot 5 - 16 = 55 - 16 = 39$.

▸ Unidad 10

1. Un juego sobre cuadrícula

La estrategia consistiría en tratar de llegar al cuadro de arriba, a la derecha, ubicándose a un número par de casilleros respecto del de llegada. Según que el número de columnas sea par o impar convendrá o no, ser el primero en empezar.

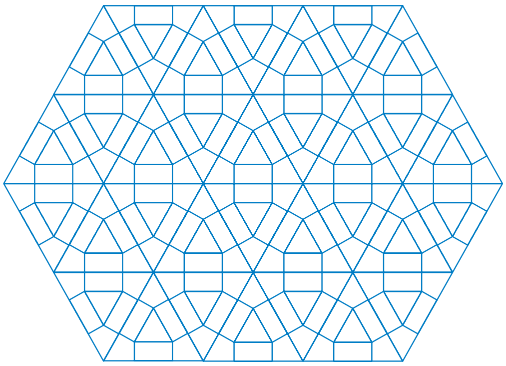
2. Otro problema sobre cuadrícula

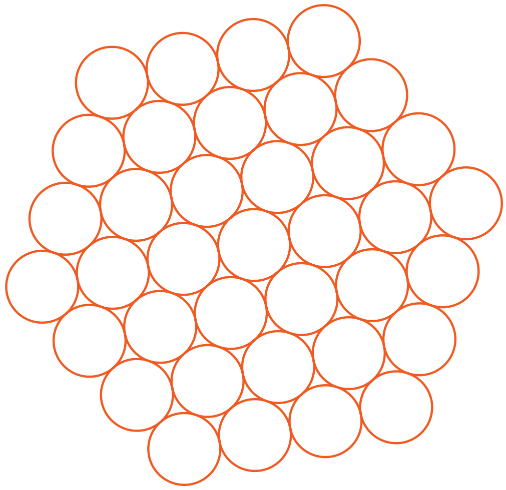
Cuando se avanza por la diagonal de un rectángulo donde los lados son números enteros, los cuadrados que se atraviesan son menos que si se recorrieran los lados, porque la diagonal es la hipotenusa del rectángulo. Cuando los lados no son enteros, atraviesan más cuadrados.

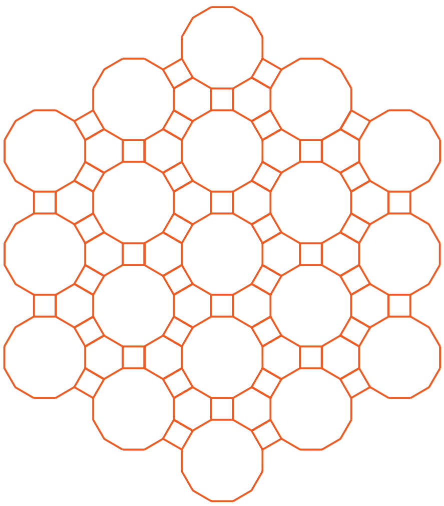
3. Mosaicos semirregulares

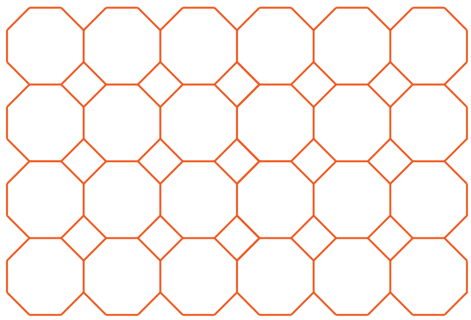
Los mosaicos semirregulares se forman utilizando polígonos regulares de igual medida de lado, pero de más de un tipo respecto al número de lados.

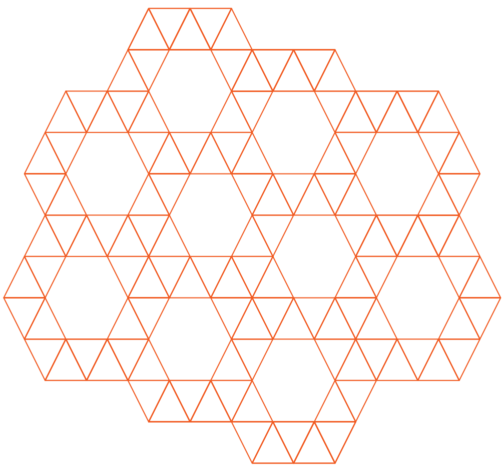
A continuación se muestran los ocho tipos.

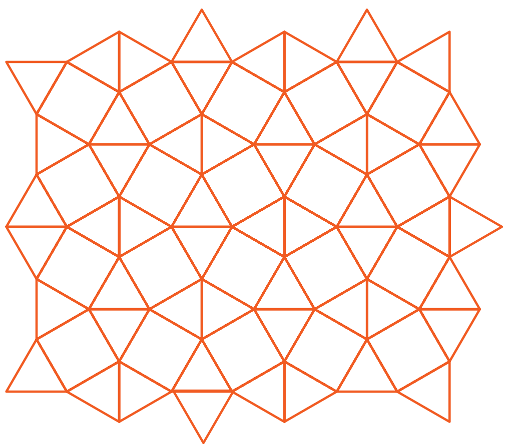


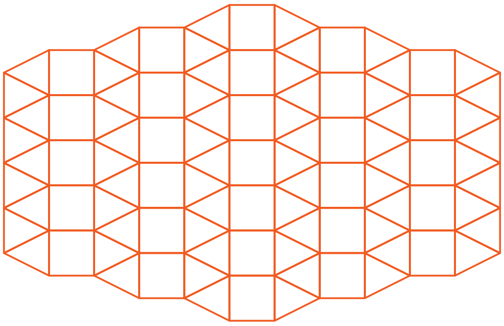


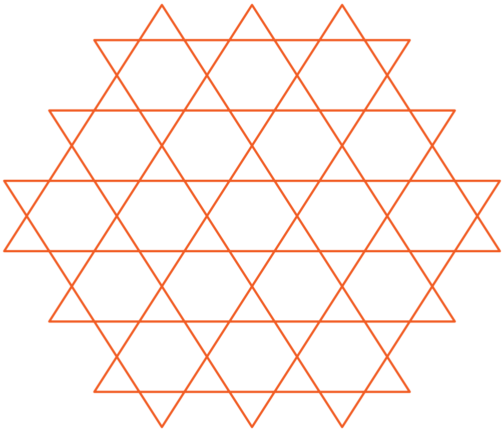












4. Dar vuelta las copas

La solución depende de que el número de copas sea par o impar.

5. Más triángulos equiláteros

Se completa la tabla con los datos indicados y se puede advertir que entre las ultimas dos columnas existe una relación de correspondencia directa, cuya constante de proporcionalidad es **k = 6**.

▸ Unidad 11

1. Adivinar la edad

No puede fallar porque si se supone que el mes de nacimiento es **ab** y las cifras de la edad **cd**, los cálculos que se piden son:

[(ab · 2 + 5) · 50 + cd] y al resultado hay que restarle 250.

Efectuando las operaciones: 100 ab + 250 + cd - 250 = 100 ab + cd = ab00 + cd = abcd con lo cual se obtuvo el número compuesto por el mes de nacimiento seguido de la edad.

2. El abuelo Ramón

Hay tres pastillas fuera de los frascos, dos **A** y una **B**. El abuelo saca otra pastilla del frasco **B** para completar las cuatro.

Esas cuatro pastillas las partió por la mitad y obtuvo de cada lado cuatro mitades, dos mitades de **A** y dos mitades de **B**.

Se tomó las primeras cuatro mitades y la noche siguiente las otras cuatro. Después siguió el tratamiento sin problemas.

3. Ubicar números

En la intersección del triángulo y el cuadrado van: **5, 7,9**.
En la intersección del círculo y el cuadrado va: **6**.
En la intersección del triángulo y el círculo va: **4**.
En la porción del círculo que no se interseca con otra figura van: **10 y 8**.

4. Dominó

La propuesta es interesante no sólo desde el punto de vista matemático, por los procesos de pensamiento que se ponen en juego, sino también por la posibilidad de involucrar al alumno en la construcción de materiales de trabajo que aportará a la Juegoteca de la escuela.

▸ Unidad 12

1. De rectángulos y triángulos

Se empieza asignando variables a las distancias, llamando "**x**" al ancho, "**y**" al alto, "**d**" a **DD´** y "**e**" a la distancia del vértice **D** hasta la intersección con la revista superior.

Después se halla en forma simbólica las expresiones del área tapada y del área visible y luego se las resta, se advierte que se llega a una expresión como la siguiente:

$$A_T - A_V = x.\ d - d.\ e$$
$$= d.\ (x\text{-}e) \text{ factor común}$$

y como por dato $x > e$, entonces $A_T > A_V$

2. El pastor y su rebaño

Este es un sencillo problema de proporcionalidad inversa. Si con el mismo alimento se necesita alimentar a **x** cantidad de cabezas durante 5 meses, se plantea que: $3 \cdot 36 = 5 \cdot x$

Despejando **x**, resulta $21{,}6 = x$

Si durante cinco meses puede alimentar a **21** cabezas, entonces deberá vender **15** de las que tiene el pastor en su rebaño y le sobrará algo de forraje.

3. Cubos pintados

A fin de que en cada cara aparezcan todos los colores, se deben ubicar los cubos de igual color formando una diagonal, es decir, que su único contacto sea un vértice.

4. Un d

5	1	2	6	5	1	2	6	5	1	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
2	6	5	1	2	6	5	1	2	6	5
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	1	2	6	5	1	2	6	5	1	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
2	6	5	1	2	6	5	1	2	6	5
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	1	2	6	5	1	2	6	5	1	2

La fila central se construyó a partir de la casilla central 1 haciendo rodar el dado 90° siempre hacia la derecha y hacia la izquierda. Las columnas se construyeron a partir del número de la fila central haciendo rodar el dado hacia arriba y abajo.

El **1** es vecino de todos los otros menos del **6**. Partiendo del **1** en sentido vertical se obtienen **1, 3, 6, 4**.

▸ Unidad 13

1. Un número secreto

Si el número secreto es **ab**, los cálculos propuestos se pueden simbolizar **ab 10** al que se le puede restar **81 o 9**.

Por ejemplo, si el número secreto fuera **47**, las operaciones serían: **470 - 81 = 389**, como tiene tres cifras se toman las dos primeras y se le suman las unidades: **38 + 9 = 47** que es el número secreto. Otro ejemplo: si el número secreto fuera 12, se multiplicaría por 10 y se le restaría **81**, es decir, **120 - 81 = 39** y por ser un número de dos cifras, para obtener el número secreto se las suma: **3 + 9 = 12**.

2. Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	**4**	**6**	7	**8**	**9**	**1**	**2**
6	**7**	**2**	1	9	5	**3**	**4**	**8**
1	9	8	**3**	**4**	**2**	**5**	6	**7**
8	**5**	**9**	**7**	6	**1**	**4**	**2**	3
4	**2**	**6**	8	**5**	3	**7**	**9**	1
7	**1**	**3**	**9**	2	**4**	**8**	**5**	6
9	6	**1**	**5**	**3**	**7**	2	8	**4**
2	**8**	**7**	4	1	9	**6**	**3**	5
3	**4**	**5**	**2**	8	**6**	**1**	7	9

▶ Unidad 14

1. Un cinturón para la Tierra

Conocido el radio, se calcula la longitud del ecuador terrestre: 40 074 155,89 metros.

Entonces, si aumentamos en un metro el radio, la nueva longitud será

L = 2 x π x 6 378 001 m = 40 074 162,17 metros

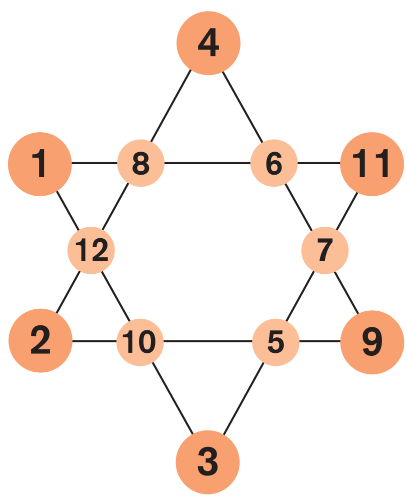
Es decir, que se incrementó en 2 **π** metros, aproximadamente 6,28 metros.

2. Un triángulo equilátero

La suma de todas las áreas obtenidas equivale a **1**.

3. Más triángulos equiláteros

Los cuatro números ubicados en los lados de cada triángulo grande suman **26**, dispuestos del siguiente modo:



4. La bodeguita

Los centros de las botellas **A**, **F**, y **K** pertenecen a una recta paralela a la pared vertical de la bodeguita. Lo mismo ocurre con los puntos **C**, **H**, y **M**. Los puntos **A**, **C**, **M**, y **K** son los vértices de un paralelogramo.

▸ Unidad 15

1. ¿Cuántas figuras?

Para obtener triángulos hay que unir tres puntos no alineados sin que importe el orden, es decir:

Si llamamos $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$, $\mathbf{a_5}$, $\mathbf{a_6}$, y $\mathbf{a_7}$ a los 7 puntos no alineados, se forman 15 triángulos con vértice $\mathbf{a_1}$: ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_4}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_5}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_6}$) ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_7}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_4}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_5}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_6}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_3}$, $\mathbf{a_7}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_4}$, $\mathbf{a_5}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_4}$, $\mathbf{a_6}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_4}$, $\mathbf{a_7}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_5}$, $\mathbf{a_6}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_5}$, $\mathbf{a_7}$); ($\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_6}$, $\mathbf{a_7}$). Del mismo modo, se forman 10 triángulos que no tienen vértice $\mathbf{a_1}$, 6 triángulos que no tienen vértices en $\mathbf{a_1}$ ni $\mathbf{a_2}$, 3 triángulos que no tienen vértices en $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, ni $\mathbf{a_3}$, y 1 triángulo que no tiene vértices en $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, ni $\mathbf{a_4}$. En total se pueden formar **35** triángulos diferentes.

2. Tres superficies de igual área

Si se considera **x** a la medida del lado del cuadrado, entonces su área es igual a $\mathbf{x^2}$. Por lo tanto, cada uno de las personas deberá contar con $\frac{1}{3}$ $\mathbf{x^2}$ y para que las 3 áreas sean iguales a $\frac{1}{3}$ de la total, las distancias **MC** y **CN** deben ser la tercera parte de la medida del lado del cuadrado.

3. Un reparto justo

Dos de ellos se llevaran 3 botellas llenas, 3 vacías y 1 llena por la mitad, cada uno. Esto es un total de 7 botellas y 3,5 de líquido por persona.

El tercero se llevara el resto, es decir, 1 botella llena, 1 vacía y 5 por la mitad. De este modo se lleva la cantidad de botellas y liquido equivalente a los demás.

4. Muchas partes con pocos cortes

Cortar el disco por su diámetro para tener dos partes iguales (se consiguen dos pedazos). Poner una mitad sobre la otra y aplicar otro corte (se consiguen cuatro trozos).

Repetir lo anterior y poner los dos partes de un lado sobre los otros dos y aplicar el último corte. Así se obtienen 8 trozos de tamaño idéntico con tres cortes.

▸ Unidad 16

1. Diagonales de un poliedro

- Tiene cuatro diagonales.
- Tienen cinco diagonales.
- No posee diagonales porque todas las caras confluyen en un vértice.

2. Cortar paralelogramos

La propiedad se comprueba efectuando un corte que cumpla la condición. Mediante una rotación se muestra que las dos partes resultan congruentes. La propiedad no es válida para los trapecios.

3. Un genio de la Física y de la Matemática

Isaac Newton nació en 1643 y murió en 1727.

4. Un problema de números

Cada uno de los números comprendidos entre **101** y **200** es **100** unidades mayor que los comprendidos entre **1** y **100** de modo que a **5050** hay que sumarle 9900, vale decir que la suma de los primeros doscientos números naturales es 14 950.

Desafíos del Cuaderno de estudio 2

▸ Unidad 1

1. Sistema de numeración y un poco de historia

Esta primera consigna bucea en la historia de la Matemática, recuperando el origen del sistema de numeración. Es interesante profundizar junto a los alumnos en su lectura y en la actividad que se propone.

2. Temperaturas extremas

- Mayor temperatura: **57 °C** y menor temperatura: **- 32 °C**.
- **57 °C > - 15 °C > - 18 °C > - 32 °C**.

3. Pares y nones

No es igual, ya que la suma de los primeros veinte impares es igual a 400 y la de los pares, 420.

4. Una fascinante familia de cuadrados

Continúan la serie $333334^2 = 111111555556$

$3333334^2 = 11111115555556$

5. Una curiosidad

Los divisores de 496 son {1,2,4,8,16,31,62,124,248,496}
Entonces, **496 = 1+ 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248**

▸ Unidad 2

1. El número desconocido

Si un número no es múltiplo de 18, tampoco lo será de 9. Por ser múltiplo de 6 también lo es de 2 y de 3. Los valores posibles son:
1032 1038 3030 3036 4038 5034 6036 7032 8034 9030

2. La herencia del campesino

De ese modo, al mayor le tocarían 6 ovejas; al segundo, 3 y al menor, 2. Eso da un total de 11 ovejas, con lo que se le podrá devolver una al vecino.

3. Una relación matemática

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x + \frac{1}{6}x = \frac{6}{6}x$$

4. Los hermanos de Marcelo

Marcelo tiene 3 hermanos.

▸ Unidad 3

1. Balas como naranjas

La suma de dos números triangulares consecutivos es un cuadrado perfecto, por ejemplo: **10 + 15 = 25.** Por tanto la pirámide podía ser de base triangular de dos pisos.

2. ¿Será cierto?

Se sugiere continuar calculando cuadrados para verificar que efectivamente las cifras de las unidades forma un periodo simétrico con relación a 5 o a 0.

a	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

3. Un problema para pensar

Esa cantidad de dobleces seria impracticable puesto que no lo permitiría el grosor alcanzado por el papel.

4. El calendario

Se verifica para cualquier cuadrado de nueve números puesto que en cualquier hoja del calendario se pasa de un número al siguiente sumando 1 y al número que hay debajo de él, sumando 7.

Los nueve números de cada cuadrado de 3 × 3 se pueden escribir en función del número menor.

Por ejemplo, $e = a + 1 + 7 = a + 8$; $f = a + 1 + 1 + 7 = a + 9$;
$i = a + 1 + 1 + 7 + 7 = a + 16$

La suma de los 9 números es: $a \cdot 9 + 72 = a \cdot 9 + 8 \cdot 9 = (a + 8) \cdot 9$

5. Un panal de rica miel

La mejor opción es la de los hexágonos, ya que cubren mayor superficie y no dejan huecos entre las celdas.

▸ Unidad 4

1. En la cancha de bochas

Con los diez nombres habría que formar ternas con la condición de que se puede repetir el ganador. Cualquiera sea el ganador del primer partido, su nombre puede estar entre los diez posibles ganadores del segundo y de los diez posibles ganadores del tercero. El diagrama arbolar tendría 10 × 10 × 10 ramas, vale decir que el número total de ternas posibles es **1000.**

2. Cuadriláteros

Diagonales iguales: **cuadrado - rectángulo - trapecio isósceles**

Diagonales distintas: **paralelogramo - rombo no cuadrado - trapecio no isósceles - romboide.**

Diagonales que se cortan en su punto medio: **cuadrado - rectángulo - trapecio isósceles - paralelogramo - rombo.**

Al realizar el árbol se podrá advertir que las diagonales de algunos cuadriláteros verifican más de una propiedad.

3. Números y más

- Desde el 11 hasta el 99 hay 89 números. Se restan del total los 8 que poseen cero y resultan **81**.
- Sin repetir los factores: **2 × 3 = 3 × 2 = 6; 2 × 5 = 5 × 2 = 10; 5 × 3 = 3 × 5 = 15**, se hallan tres productos posibles.
- Con repetición, se encuentran seis productos posibles.
- El mayor producto es **5 × 5 = 25** y el menor es **2 × 2 = 4**.

4. A ordenar

Si uno de los 6 libros ocupa el primer lugar de la izquierda, hay cinco posibilidades para el segundo lugar, cuatro para el tercero, tres para el cuarto, dos para el quinto y el sexto queda determinado. Los seis libros se pueden ordenar de izquierda a derecha de **720** maneras distintas y otras tantas de derecha a izquierda.

5. Los caballeros de la mesa redonda

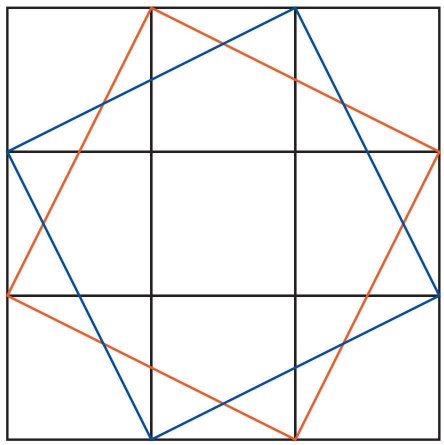
El ordenamiento en sentido horario que responde a las pautas dadas es:

Sra. Pérez, González, Sra. Salinas, Rizzo, Sra. González, Pérez, Sra. Rizzo - Salinas

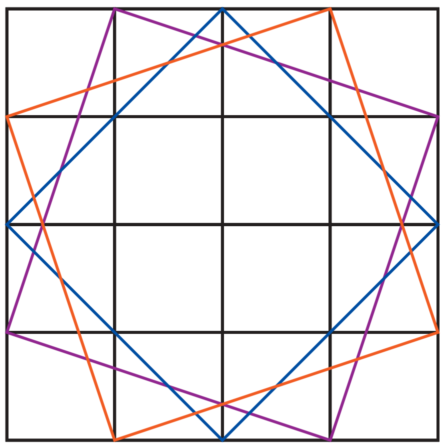
De ese modo, entre Salinas y Pérez se sentó la **Sra. Rizzo.**

6. Cuadrados en cuadrados

1. En el cuadrado graficado se pueden insertar dos cuadrados con la condición de que los vértices sean puntos de intersección de la cuadricula con los lados del cuadrado original.



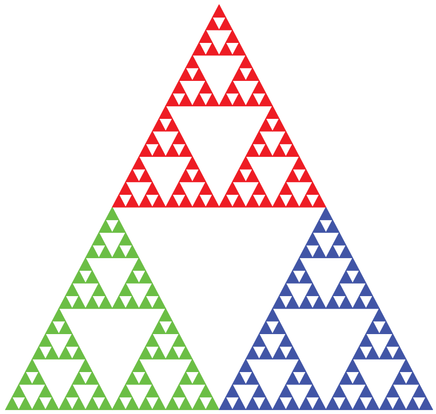
2. En un cuadrado de **4 x 4** con la misma condición se pueden insertar tres cuadrados. En un cuadrado de **5 × 5** se pueden dibujar otros 4 cuadrados y en un cuadrado de **6 × 6** se pueden dibujar 5 cuadrados. En general, en un cuadrado de **n × n** se pueden dibujar otros **(n – 1)** cuadrados más pequeños.



Unidad 5

1. El juego del caos

El objetivo del juego del caos es tirar el dado cientos de veces y predecir cuál será el patrón resultante de los puntos. Muchos estudiantes que no están familiarizados con el juego conjeturan que la imagen resultante será una mancha aleatoria de puntos. Otros piensan que los puntos rellenarán completamente el triángulo. Pero ambas suposiciones son completamente falsas. La imagen resultante es cualquier cosa menos una mancha aleatoria, los puntos forman lo que los matemáticos llaman el Triángulo de Sierpinski.



Unidad 6

Las tres primeras actividades tienen, además de un objetivo lúdico, la intención de materializar y visualizar los movimientos trabajados en la unidad en función de la construcción de nuevas formas. Es recomendable llevar adelante la propuesta en forma grupal y realizar un registro detallado de los pasos seguidos a fin de que, al finalizar, se clasifiquen las transformaciónes según sean traslaciones, simetrías o rotaciones.

1. A pensar

Se consideran las mediatrices de cada segmento determinado por los puntos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ **y** $\mathbf{P_3}$.

El punto donde se cortan las tres mediatrices equidista de los puntos dados y coincide con el centro de una circunferencia que pasa por ellos.

Unidad 7

1. Los relojes

PASOS	Tiempo transcurrido desde el comienzo
Se pone en funcionamiento el reloj de 3 min. hasta que finaliza.	3 minutos
Se ponen en marcha los dos relojes a la vez. Cuando la arena del de 3 min. termina de pasar al de 8 min. le quedan 5 min.	3+3 = 6 minutos
Continúa funcionando el reloj de 8 min. Se pone en funcionamiento el reloj de 3 min. Cuando el de 3 min. termina al de 8 min. le quedan 2 min.	6+3 = 9 minutos
Continúa funcionando el reloj de 8 min. Se pone en funcionamiento el reloj de 3 min. Al cabo de 2 min. termina el reloj de 8 min. y se le da la vuelta. Cuando el de 3min. termina al de 8 min. le quedan 7 min.	9+3 =12 minutos
Se da la vuelta al reloj de 8 min. que sólo funcionará durante 1 min.	12 + 1 =13 minutos

2. Los libros

En cada conjunto de 10 libros debe haber necesariamente por lo menos una novela policial, uno de aventuras y uno de ciencia ficción, de modo que las elecciones se determinan pensando en los siete libros restantes que pueden ser de cualquiera de los tres tipos.

3. Divisiones exactas

Esto se debe a que el numero abcabc es igual a **abc x 1001** y si se descompone ese número en sus factores primos, se ve que **1001 = 7 x 11 x 13**.

4. Con un poco de historia

Para calcular la altura de un triángulo conociendo sus lados y la altura correspondiente a uno de ellos, se necesita usar la fórmula $\frac{b \times h}{2}$ o bien aplicar la fórmula de Herón. La igualdad de los resultados depende de la precisión con que se tomen las medidas.

5. Fracciones

El área del rectángulo es la mitad de la del rombo **ABCD**, ese rombo es la cuarta parte del área del cuadrado, entonces, el área del rectángulo es $\frac{1}{8}$ del área del cuadrado.

6. La escuela pitagórica

Considerando **x** la cantidad de alumnos de la escuela, se puede plantear:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{7}x + 3 = x \qquad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x - x = -3$$

realizando las operaciones resulta: **x = 28**.

Es decir, que asisten a la escuela **28** alumnos, **14** estudian sólo matemática y **7** música.

▸ Unidad 8

1. A mirar bien

Además del triángulo **ABC**, hay 9 triángulos pequeños y 3 medianos. Asimismo, pueden distinguirse 13 cuadriláteros entre los que se componen de 2 y 4 triángulos pequeños.

2. Los ángulos en la Antigüedad

Aristarco pudo determinar que la distancia entre la Tierra y el Sol, es mayor que la determinada por la Tierra y la Luna mediante propiedades de triángulos. Si el ángulo de la Tierra es de 87°, es mayor que el opuesto a la Luna por la suma de ángulos interiores de triangulo. Además en todo triangulo, al ángulo mayor se le opone el lado mayor, entonces la distancia entre la Tierra y el Sol es la mayor.

Por otro lado, la hipotenusa es el lado mayor de todo triángulo rectángulo.

3. Para seguir pensando

Si dos ángulos tienen el mismo complemento son iguales, porque el complemento es el ángulo con el que forma un ángulo recto. Lo mismo sucede cuando tienen igual suplemento.

4. El tablero de ajedrez

En un tablero de ajedrez, se pueden observar:

1 cuadro de 8x8;	**25 cuadros 4x4;**
4 cuadros 7x7;	**36 cuadros 3x3;**
9 cuadros 6x6;	**49 cuadros 2x2;**
16 cuadros 5x5;	**64 cuadros 1x1.**

La solución está dada por la suma de los cuadrados de los números del 1 hasta 8, es decir, 205.

Unidad 9

1. Las esferas

El volumen de una esfera se calcula mediante la expresión: $\mathbf{V=\frac{4}{3}\cdot \pi \cdot r^3}$.

En el caso de una esfera de 8 cm de diámetro: $\mathbf{\frac{4}{3}\cdot \pi \cdot 64 = 268}$.

Y en el caso de 512 esferas de 0,5 cm de radio: $\mathbf{\frac{4}{3}\cdot \pi \cdot 0{,}125 \cdot 512 = 268}$.

Entonces, al ser de igual material, ambas cajas tienen el mismo peso.

2. Triángulos

Si, porque ambos pueden ser triángulos isósceles y rectángulos y resultar semejantes.

Cabe recordar que la clasificación de isósceles responde a la medida de los lados, en cambio, la de triángulo rectángulo refiere a los ángulos y ambas pueden referir a un mismo triángulo.

3. Gulliver y la semejanza

- Necesitaría **12** capas de colchones, proporcional a su altura.
- Gulliver tiene un volumen **123 = 1728** veces mayor que un liliputiense. Se necesitarían **173 cocineros**.
- El peso es proporcional al volumen, por lo que una avellana en Brobdingnag pesa **1728** veces más que en la tierra.
- El diámetro de una avellana es aproximadamente **1,50 cm × 12 = 18 cm**.

4. Cercando terrenos

El terreno rectangular de mayor área que se puede alambrar con **3000 m** de alambre es un cuadrado de 750 m de lado.

Al acercarse al río y disponer de más cerco para el perímetro, el mayor terreno posible es un cuadrado de **1000** metros de lado.

5. Tornillos, tuercas y clavos

La solución del desafío consiste en leer bien el enunciado: **“no ha acertado con ninguna etiqueta”.**

Supongamos que las etiquetas de las cajas están colocadas de la siguiente manera: caja 1, etiqueta: “tornillos”; caja 2, etiqueta: “tuercas”; caja 3, etiqueta: “clavos”. El contenido de la caja 1 pueden ser tuercas o clavos. Si al sacar un elemento es un clavo, a esa caja se le coloca la etiqueta que dice “clavos” y estaba en la caja 3. En la caja 2 la etiqueta dice “tuercas” pero como está equivocada hay que ponerle la etiqueta “tornillos” que estaba en la caja 1. Con sólo ver un clavo de la caja 1 se sabe que en la caja 2 hay tornillos y en la caja 3 tuercas.

En cambio, si de la caja 1 se hubiera sacado una tuerca habría que colocarle a esa caja la etiqueta “tuercas” que estaba en la caja 2; a la caja 2 la etiqueta “clavos” y a la caja 3 la etiqueta “tornillos”. De ambos modos el problema se soluciona abriendo una sola caja.

6. Prendas y botones

Javier es un alumno de 6º año que nunca trabajó con ecuaciones y dijo:

Si María tiene 5 prendas, y le pone 1 a cada una le sobra 1 botón. En ese caso tendría 6 botones y para ponerle 2 botones a cada prenda necesitaría 10, pero según el enunciado le faltarían 2, es decir que tendría 8 botones y no 6. Esto de 5 prendas falla.

Si pienso que tiene 4 prendas y 5 botones, para ponerle 2 botones a cada prenda necesita 8. Pero como le faltan 2 tendría 6 botones y no 5. Esto tambien falla.

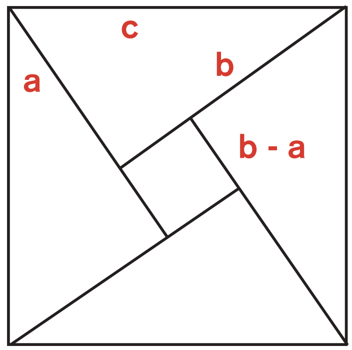
Pruebo con 3 prendas. En ese caso tendría 4 botones y para poner 2 a cada prenda le faltarían 2 botones. ¡ Acá está la solución!! María tiene 3 prendas y 4 botones.

En cambio, otros alumnos de 8º año plantearon un sistema de ecuaciones cuya única solución es b = 4; p =3

$$\begin{cases} 2\,p = b + 2 \\ p = b - 1 \end{cases}$$

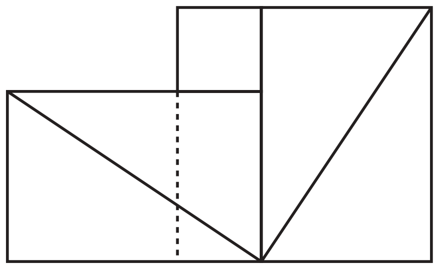
▸ Unidad 10

1. Un matemático indio



El monje matemático y astrónomo hindú, Bhaskara dio una demostración muy sencilla del Teorema de Pitágoras, del tipo de congruencia por sustracción, basada en los diagramas adjuntos, que aparece en el Vijaganita (cálculo de raíces).

El cuadrado sobre la hipotenusa se divide, como indica la figura, en cuatro triángulos equivalentes al dado y un cuadrado de lado igual a la diferencia de los catetos. Las piezas son reordenadas fácilmente para formar una figura que resulta ser la yuxtaposición de los cuadrados sobre los catetos.



La prueba geométrica se traduce enseguida en términos algebraicos al expresar la igualdad de las figuras dibujadas:

$$\mathbf{c^2 = [(\tfrac{1}{2})\ ab] + (b\text{-}a)^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 = b^2 + a^2}$$

2. Más desafíos de Bhaskara

Estos dos problemas ilustran muy bien el carácter heterogéneo del Lilavati, puesto que a pesar de su aparente semejanza y del hecho de que se pida una única solución, uno de los problemas es determinado y el otro indeterminado.

- **El bambú roto**

Al traducir gráficamente el enunciado, queda formado un triángulo de base 16 y cuya altura e hipotenusa suman **32**.

Si llamamos **x** a la hipotenusa, el cateto vertical será **32 – x**.

Aplicando la relación pitagórica:

$$\mathbf{x^2 = (\ 32 - x\ )^2 + 16^2}$$

Resolviendo los cálculos resulta la expresión:

$$x^2 = 1024 - 64x + x^2 + 256$$

en la que el valor de x es 20 y como **32 – 20 = 12**, el bambú se rompió a 12 codos del piso.

- **El pavo real y la culebra**

El problema no se puede resolver porque no se conoce ningún dato numérico que permita hacer cálculos. Sin embargo es interesante diagramar el problema y establecer algunas relaciones:

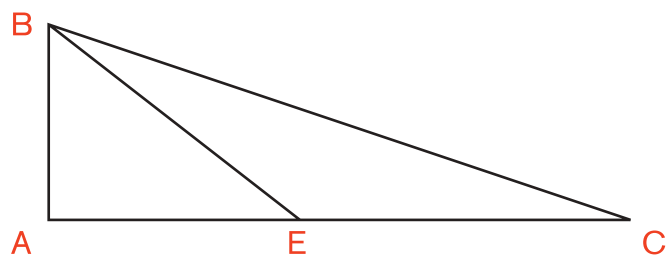
AB es la altura a la que está el pavo real.
A es el agujero de la culebra.
En C está la culebra. El pavo real captura a la culebra en E.

$AC = 3\ AB$

$BE = EC$

$AE^2 = BE^2 - AB^2$

$AE^2 = \frac{4}{3}\ AB$



3. Un desafío chino

$(3+4)^2$ expresa el área del cuadrado de lado 7; es decir **49**.
$\mathbf{2\ (3\times4) = 4\ \frac{3 \times 4}{2}}$ es el área de los cuatro triángulos de catetos a y b, es decir, **24**.

49 – 24 = 25 que es el área de un cuadrado de lado **5**.

4. El junquillo chino que fue loto indio

- Observando el esquema y aplicando la relación pitagórica:

$$(x + 30)^2 = x^2 + 150^2$$

$x^2 + 60x + 900 = x^2 + 22500$, expresión en la que $x = 360$

Es decir, que la profundidad de la laguna es de 3,60 metros.

- Es similar al anterior $(x + 1)^2 = x^2 + 4^2$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 16$, expresión en la que $x = 7,5$

La profundidad del agua es 7,5 palmos.

5. Se busca un número

El número **abcd** responde a las siguientes condiciones:

$$\mathbf{b < d} \qquad \mathbf{d = \frac{2}{3}\,a} \qquad \mathbf{a = \frac{2}{3}\,c} \qquad \mathbf{c = 3\,b}$$

Se analizan los valores que puede tomar cada cifra según las condiciones: Por ejemplo, $\mathbf{d < a}$ porque $\mathbf{d = \frac{2}{3}\,a}$ entonces $\mathbf{b < d < a}$

c debe ser el triple de **b** y además $\mathbf{b < d <}$ a entonces **c** debe ser **9**.

Si $\mathbf{c = 9}$, entonces $\mathbf{a = 6, d = 4, b = 3}$ y el número buscado es **6394**.

▸ Unidad 11

1. El prisma de Lucas

Si el volumen del prisma de Mariana es $\mathbf{M = a \cdot b \cdot c}$ (largo x ancho x alto), entonces el volumen del de Lucas será $\mathbf{L = 2\,a \cdot 2\,b \cdot c = 4\,a \cdot b \cdot c}$, es decir, el cuádruple del de Mariana, y teniendo en cuanta esta relación Pablo deberá volcar 8 veces el contenido del prisma de Mariana para llenar el de Lucas.

2. Un juego con números

Lo ideal es jugar muchas rondas para construir estrategias cada vez más refinadas y sutiles.

Por ejemplo, si juegan 4 personas y en la primera ronda más de un jugador elige el 1, ninguno de ellos podrá ser ganador.

Si después de esa primera experiencia uno sólo persiste en elegir 1 y los demás eligen un número mayor que 1, por ejemplo, 2-2-1-3 el ganador será el que escribió 1. En cambio, si todos hubieran descartado el 1, y eligieran, por ejemplo, 2-2-2-3, ganaría el que eligió 3.

3. Una variante del juego anterior

Esta propuesta es sólo de lectura para variar el juego anterior con nuevas reglas.

4. Los cuatro cuatros

El error de orden está en el ejercicio **f** ya que da **0**, por tanto, debería estar en el último lugar.

▸ Unidad 12

1. Estrella pitagórica

De un modo sencillo, utilizando la relación establecida en la actividad **6** de esta misma unidad, se despeja la longitud de la diagonal conociendo la medida del lado.

2. El número “m”

Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo **ABC**, se obtiene que la longitud de la hipotenusa es **AC = 2,236**.

Es decir, que **AE + EF + FC = 2,236** y como **EF = FC y AE = 1**, se obtiene **1 + 2 EF = 2,236**, de modo que **2EF = 1,236** y **EF = 0,618 = m** (valor del inverso del número de oro).

3. Los vasos cónicos

El volumen no es proporcional a la altura puesto que efectuando el cociente entre el volumen y la altura, en cada caso, se advierte que la razón no es constante.

4. Un problema con tablas

La única que es de proporcionalidad directa es la tercera donde **y / x = k .**

En los dos primeros casos, la razón obtenida entre las magnitudes, no es constante.

5. Construcción de una espiral

Es una interesante tarea para que los alumnos verifiquen geométricamente las propiedades de los rectángulos áureos.

▸ Unidad 13

1. El epitafio de Diofanto

La introducción de símbolos y abreviaturas para designar la variable y las operaciones que hay que efectuar para resolver ecuaciones es obra de Diofanto. Muchos autores lo consideran el padre del Álgebra moderna.

Usando la nomenclatura actual, su enunciado se plantea de este modo:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

Y efectuando los cálculos resulta que **x = 84,** por lo tanto Diofanto vivió **84** años.

2. Pirámides numéricas

987 654 . 9 + 2 = 8 888 888
9 876 543 . 9 + 1 = 88 888 888

11111111^2 = 123 456 787 654 321

A partir de un determinado número, la calculadora redondea porque en el visor sólo aparece una cantidad determinada de dígitos.

3. Cuadrados con números

Aplicando cualquier permutación de filas o de columnas se mantiene constante la suma de los dígitos. Esto se debe a que la suma goza de la propiedad conmutativa.

4. Un símbolo griego

Esta actividad es de fácil resolución. Sólo requiere prolijidad y precisión para lograr reproducir este símbolo siguiendo las condiciones dadas.

▸ Unidad 14

1. Las fichas

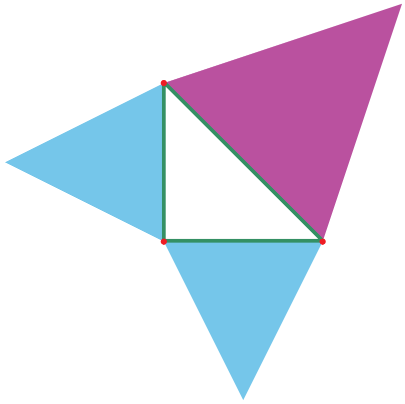
Al continuar se puede advertir, en forma intuitiva, que se obtiene un rectángulo cuya altura coincide con el lugar que ocupa en la serie y cuya base es el número consecutivo.

a = n y **b = n + 1**

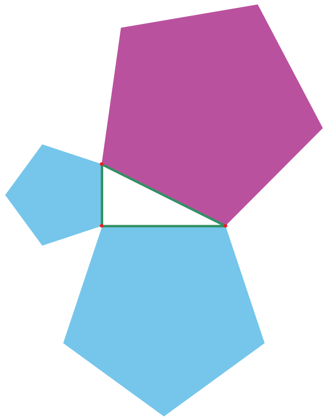
La cantidad de fichas se calcula mediante el producto de **a** y **b**, con lo cual resulta que el número de fichas es: **f = n • (n + 1)**

2. Pitágoras en acción

Los alumnos obtendrán figuras semejantes a la siguiente. Allí, se observa que: “En un triángulo rectángulo el área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos”.



En la siguiente figura se comprueba que: “En un triángulo rectángulo el área del pentágono regular construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los pentágonos regulares construidos sobre los catetos”.



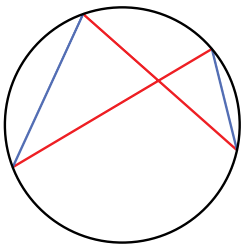
3. ¿Qué es 365?

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365$$

La suma de dos números cuadrados siguientes a esa terna es: $\mathbf{13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365}$

▸ Unidad 15

1. Proporcionalidad en la circunferencia



La propiedad es cierta porque si se forman dos triángulos interiores a la figura, se ve que son semejantes dado que tienen dos ángulos de igual amplitud.

Por lo tanto, si son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PB}{PA}$$

Y por la propiedad de las proporciones, se tienen que **PA · PC = PB · PD**

2. La cinta de Möebius

La cinta de Möebius tiene las siguientes propiedades:

- Tiene sólo una cara y, por eso, no tiene sentido hablar de cara interior y cara exterior;
- Tiene sólo un borde;
- Esta superficie no es orientable, es decir, que no tiene "arriba " ni "abajo";
- Otras propiedades:

Si se corta una cinta de Möebius a lo largo, a diferencia de una cinta normal, no se obtienen dos bandas, sino que se obtiene una banda más larga pero con dos giros. Si a esta banda se la vuelve a cortar a lo largo, se obtienen otras dos bandas entrelazadas. A medida que se va cortando a lo largo de cada una, se siguen obteniendo más bandas entrelazadas.

3. Los cordones de los zapatos

Para analizar y comparar, es recomendable sugerir a los alumnos que midan y asignen letras a los distintos segmentos a fin de hallar, la expresión que indica la longitud de cada manera.

Así podrá arribar a la conclusión que la manera que requiere cordones más largos es la de la derecha y la que requiere cordones menos largos es la del centro.

▸ Unidad 16

1. El gato

El problema se puede resolver gráficamente dibujando algunos triángulos rectángulos con la misma hipotenusa que se forman entre la pared y el suelo. La escalera está representada por esa hipotenusa. La trayectoria que describe el gato es el lugar geométrico de los puntos medios de esas hipotenusas. La curva que se forma pertenece a una parábola.

2. Triángulos

En la fórmula del área del triángulo $\frac{\mathbf{b \times h}}{\mathbf{2}}$, se conoce la base. Así, se podrá advertir que para que el área sea de 9 cm^2, si la base es de 4,5 cm, la altura debe ser de 4 cm. El lugar geométrico de los puntos que cumplen con esa condición es una recta paralela al segmento **AB** ubicada a 4 cm de distancia.

3. Un juego con números

Este tipo de entretenimientos contribuyen a ejercitar procesos de pensamiento fundamentales en matemática como son la asociación, la deducción y la inferencia. A través de un número de 4 cifras y mediante adecuadas preguntas, el alumno podrá adquirir destreza en encontrar el número propuesto.

Desafíos del Cuaderno de estudio 3

▸ Unidad 1

1. Una fracción

En la expresión 100 = 96 + x, el valor de x debe ser una fracción $\frac{abcd}{efg}$ equivalente a 4.

La solución del problema se encuentra usando las cifras **C = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8}** en las que no están 9 ni 6 porque intervienen en 96.

En la unidad **4** del Cuaderno de estudio **2** los alumnos estudiaron combinaciones y permutaciones. Para hallar (*efg*) se analizan las 24 combinaciones de los elementos de C tomados de a tres: (123) (124) (125) ... (457) (478) y sus respectivas permutaciones. De esas combinaciones hay que descartar las que no tienen las cifras 2, 4, u 8 porque para que (*efg*) sea múltiplo de 4, la cifra de las unidades (*g*) debe pertenecer a un múltiplo de 4.

Si se analizan las ternas restantes se encuentra que (*efg*) **= 357** y por lo tanto:

$\mathbf{100 = 96 + \frac{1428}{357}}$. Otra opción es $\mathbf{\frac{1756}{438}}$

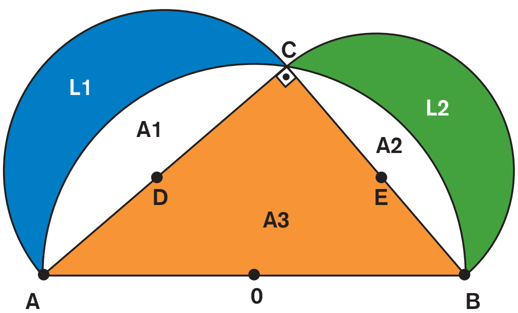
2. Una escalera

Subiendo 1 ó 2 escalones cada vez se puede subir una escalera de 6 escalones de maneras diferentes. Existen 13 formas:
(1-1-1-1-1-1) (1-1-1-1-2) (1-1-1-2-1) (1-1-2-1-1) (1-2-1-1-1) (2-1-1-1-1) (2-2-1-1) (2-1-1-2) (1-1-2-2) (1-2-2-1) (2-1-2-1) (1-2-1-2) (2-2-2).

3. Las lúnulas de Hipócrates

En la unidad **14** del Cuaderno de estudio **1** los alumnos aprendieron a calcular el área de un círculo en función del radio mediante la relación $\mathbf{a = \pi \cdot r^2}$ en la que **r** es el radio del círculo.

AC es el cateto mayor, **CB** el cateto menor y **AB** a la hipotenusa del triángulo **ACB**. El área del semicírculo de diámetro **AC** es:



$L_1 + A_1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{AC}{2}\right)^2$ y el área del semicírculo de diámetro **CB** es $L_2 + A_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{CB}{2}\right)^2$

Sumando ambas expresiones y factoreando $\frac{\pi}{2}$:

$$L_1 + L_2 + A_1 + A_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{CB}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\,\frac{AC^2 + CB^2}{4} \quad (*)$$

El área del semicírculo de diámetro **AB** es: $A_1 + A_2 +$ área **ACB** $= \frac{\pi}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2$, es decir,

$$A_1 + A_2 + \frac{AC \times CB}{2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{AB^2}{4} \quad (**)$$

Aplicando la relación pitagórica al triángulo **ACB:** $AC^2 + CB^2 = AB^2$

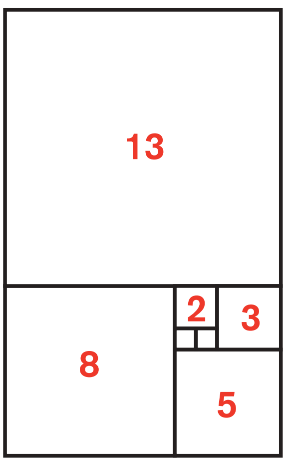
Como en las expresiones (*) y (**) los segundos miembros son iguales:

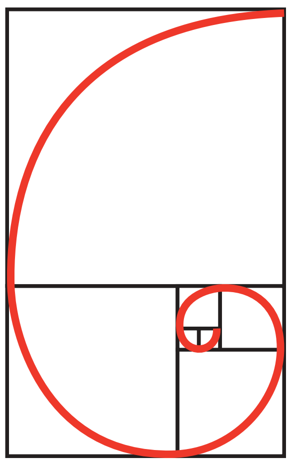
$L_1 + L_2 + A_1 + A_2 = A_1 + A_2 + \frac{AC \times CB}{2}$ y por lo tanto: $\boxed{L_1 + L_2 = \frac{AC \times CB}{2}}$ vale decir que la suma de las áreas de las lúnulas de Hipócrates es igual al área del triángulo **ABC**.

▸ Unidad 2

1. Construcción geométrica de la sucesión de Fibonacci

A partir de dos cuadrados que forman un rectángulo 1 x 2, el proceso se reitera añadiendo sucesivamente cuadrados cuyos lados son los números de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.... Cada nuevo cuadrado tiene como lado, la suma de los lados de los dos cuadrados construidos anteriormente. Los sucesivos rectángulos que van apareciendo son los rectángulos de Fibonacci. La espiral de Fibonacci se dibuja uniendo mediante arcos de circunferencias dos vértices opuestos de los sucesivos cuadrados. En los siguientes dibujos se puede apreciar este método constructivo:





2. Interpolación de medios proporcionales

- Entre 1 y 16 se pueden intercalar 2, 4, 8, porque 1, 2, 4, 8, 16 están en progresión geométrica de razón **2**.
- La progresión 3, 6, 12, 24, 48 es geométrica de razón **2**.
- La progresión 32, 16, 8, 4, 2, es geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

Esta operación recibe el nombre de interpolación de medios proporcionales porque cualquier secuencia de 4 términos constituye una proporción, por ejemplo: $\frac{16}{8} = \frac{4}{2}$.

3. El autor de novelas

En esta unidad los alumnos aprendieron que la suma de los términos de una progresión aritmética se calcula mediante la fórmula $Sn = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n)$ en la que el último término es

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$. Como el problema trata de una progresión aritmética de 7 términos y razón 2, la suma es:
$Sn = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot [x + x + (7-1)\ 2]$ es decir $13986 \times 2 = 7\times 2x + 84$, luego $27972 - 84 = 14\ x$,

$\frac{27888}{14} = x$, el cociente es 1992 por lo que el autor publicó su primera novela en 1992.

4. El charco de pintura

No vio una recta continua sino marcas alineadas y entrecortadas de aproximadamente 10 cm de largo y tan anchas como la rueda de la bicicleta

▸ Unidad 3

1. La edad de Florencia

La edad de Florencia es f, un número de 2 cifras ab en el que **b = 3**, vale decir **f = a3** y además se sabe que a^2 es el número de dos cifras **3a**. Se puede escribir $a^2 = 3a$. El único número cuadrado con tres decenas es 36, entonces, la edad de Florencia es **63**.

2. El adivinador

Si en el año 2006 se expresan dichas fechas en forma simbólica:
Año nacimiento 19ab.
Fecha memorable 19cd.

Años transcurridos desde nacimiento (2006 - 19ab).
Años desde la fecha memorable (2006 - 19cd).
Y se realizan los cálculos se obtiene el número 4012:
19ab +19cd + (2006 - 19ab) + (2006 - 19cd) = 2006 + 2006 = 4012.

Si la adivinanza se hace en un año posterior a 2006 se debe agregar a 4012 el doble del número de años trascurridos porque ese número (4012) es el doble del año 2006.

3. Un desafío con potencias

$17 = 2^2 + 2^2 + 9^2 = 4 + 4 + 9$
36 = 16 +16 +4
98 = 81 + 16 + 1

▸ Unidad 4

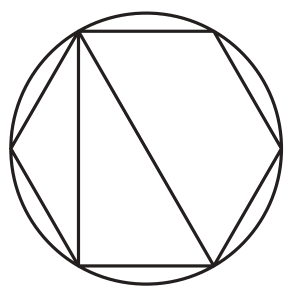
1. Las agujas del reloj

Si cada 2 horas atrasa 15 minutos, en cada hora atrasa 7,5 min. y cada 20 min. atrasa 2,5 min. Al cabo de 3 horas 20 minutos habrá atrasado

15 min. + 7,5 min. + 2,5 m. = 25min.

Como sólo avanza la aguja horaria, partiendo de 5 h 15 min. y sumando 3h 20 min. el reloj debiera marcar 8 h 35 min., pero como atrasó 25 min. está en 8 h 10 min., es decir que para llegar a las 12, debe recorrer un ángulo que corresponde a 3h + 50 min. que en sistema sexagesimal es un ángulo de **90° 25**'.

2. Dos diagonales



El triángulo formado por las diagonales y el lado del hexágono es rectángulo por estar inscripto en una semicircunferencia. Cada ángulo interior del hexágono mide 120°; uno de los ángulos del triángulo es de 60° y el ángulo que forman las diagonales es de 30°.

3. Los hermanos

En la familia hay 4 varones (v_1, v_2, v_3, v_4) y 3 mujeres (m_1, m_2, m_3).

4. Los unos y los otros

Matías tiene un loro y una moto, y vive a la derecha de Pablo.
Pablo tiene un canario y un auto, y vive a la derecha de Aníbal.
Luis tiene un gato y una bicicleta, y vive a la izquierda de Pablo.
Aníbal tiene un perro y una camioneta.

▸ Unidad 5

1. Adivina, adivinador

Para analizar el procedimiento se puede partir de algunos ejemplos, observar las regularidades e intentar una generalización. Por ejemplo:

43 x 10 = 430 **430 – 9 = 421** **42 + 1 = 43**

20 x 10 = 200 **200 – 9 = 191** **19 + 1 = 20**

17 x 10 = 170 **170 – 54 = 116** **11 + 6 = 17**

99 x 10 = 990 **990 – 54 = 936** **93 + 6 = 99**

Se puede ver que un número de **2** cifras tiene **d** decenas y **u** unidades y se puede representar por **du** . Al multiplicarlo por **10** se obtiene un número de la forma **du0**, es decir d centenas, **u** decenas y **0** unidades. Si a **du0** se le resta **9** se obtiene un número con **1** unidad y una decena menos. Se puede escribir **du0 – 9 = d(u-1)1** y cuando se forma un número con las dos primeras cifras y se le suma la cifra de las unidades se obtiene el número original pues **d(u-1) + 1 = du.** Si en lugar de restar **9** se resta cualquier múltiplo de **9** de dos cifras también es válido el mismo razonamiento.

2. Un rollo de tela

La longitud del rollo de tela es de 59 metros.

3. Otro Sudoku

6	7	2	9	4	3	1	8	5
1	8	9	6	7	5	2	4	3
3	5	4	1	8	2	9	7	6
9	6	5	2	1	7	8	3	4
4	1	8	3	5	9	6	2	7
2	3	7	4	6	8	5	9	1
5	2	3	7	9	6	4	1	8
8	9	1	5	3	4	7	6	2
7	4	6	8	2	1	3	5	9

4. Y uno más

8	1	6	9	4	7	3	5	2
2	5	7	3	1	8	9	4	6
3	9	4	6	5	2	7	8	1
6	2	5	4	9	3	8	1	7
1	3	8	5	7	6	2	9	4
4	7	9	8	2	1	6	3	5
5	8	3	7	6	4	1	2	9
7	4	1	2	3	9	5	6	8
9	6	2	1	8	5	4	7	3

▸ Unidad 6

1. Encontrar el ángulo

- Si sen $\alpha = 0,616$, entonces $\alpha = 38° 1' 29''$
- si cos $\alpha = 0,140$, entonces $\alpha = 81° 57' 8''$
- si tg $\alpha = 2.05$, entonces $\alpha = 63° 59' 48''$

2. Libros rotos

Si la última es 351, arrancó 200 páginas.

3. Borrar cifras

12345123451234512345

El número mayor es **5 534 512 345**

4. Una adivinanza

De Morgan vivió en el siglo XIX por lo que se debe cumplir que: **1801 ″ x^2 ″ 1900**.

El número x buscado debe ser mayor que 40 pues $40^2 = 1600$ y menor que 45 pues $45^2=2025$.
$41^2=1681$, $42^2=1764$, $43^2=1849$, $44^2=1936$

Luego el único número x tal que su cuadrado x^2 se encuentra entre 1801 y 1900 es x = 43, de manera que De Morgan celebró su cumpleaños número 43 en el año 1849, por lo tanto, nació en el año **1849 – 43 = 1806.**

▶ Unidad 7

1. Las relaciones trigonométricas fundamentales

- $(\text{sen}^2 x \,/\, \cos^2 x) + 1 = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) \,/\, \cos^2 x = 1 \,/\, \cos^2 x$
- $(1 - \text{sen}^2\, \beta) \times 1/\, \cos^2 \beta = \cos^2 \beta \times 1/\, \cos^2 \beta = 1$

2. Pares y nones

382+194 = 576

3. Adivinanza con trabalenguas

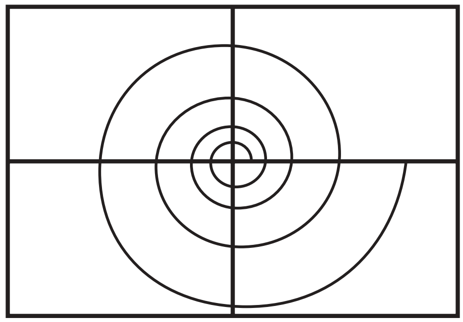
7 viejas / 49 sacos / 343 tejas

4. Una espiral con dos centros

Es interesante introducir a los alumnos en la construcción de estas figuras para las que se requiere precisión y destreza en el uso de elementos de Geometría.

Para que la espiral tenga 80 cm de ancho se requiere un segmento inicial de 16 cm.

En cuanto a la segunda pregunta, se sugiere proponer a los alumnos un trabajo en diferentes formatos de hojas, a fin de enriquecer el análisis.



▸ Unidad 8

1. Los tres jarrones

Se llena el jarrón de 5 litros y parte de esa agua se trasvasa al jarrón de 2 litros. De este modo en el primer jarrón quedan dos litros que se pasan al jarrón grande y luego se repite exactamente la misma operación para obtener otros dos litros.

2. La criba de Eratóstenes

1	2	3	4	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

El menor número compuesto que aparece en la tabla es 4 porque resulta de **2x2.**

Después de haber suprimido los divisores de los números hasta 5 no es necesario suprimir los divisores de 6 porque 6 es múltiplo de 2 y de 3

Después de suprimir los múltiplos de 47 no es necesario continuar con el procedimiento porque los demás múltiplos son mayores que **100**.

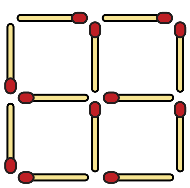
Los números primos menores que 100 son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91 y 97, vale decir veintiséis.

3. Números de 6 cifras

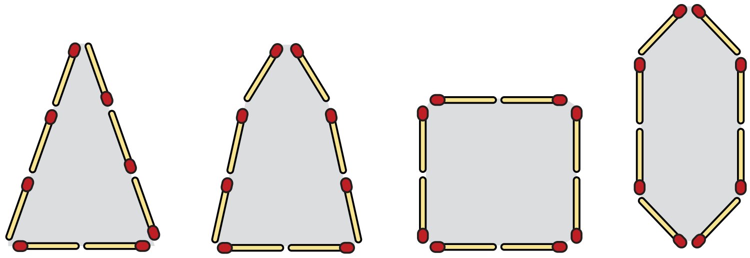
Si se multiplica un número de la forma cdu por 1001 se obtiene un número de seis cifras cdu cdu. Los factores primos de 1001 son 7, 11 y 13. Por lo tanto, los factores primos de cualquier número cdu cdu serán los de 1001 y los propios de cdu. Por ejemplo, los factores primos de **243 243** son **{ 3, 7, 11, 13}** en cambio los de **240 240** son **{ 2, 3, 5, 7, 11, 13}**.

▸ Unidad 9

1. Con 12 fósforos



2. Con ocho fósforos



Lo interesante de esta actividad no consiste sólo en la manipulación de material concreto, sino también en que sus alumnos calculen y comparen áreas de figuras de igual perímetro.

3. Las figuras semejantes

Los alumnos saben que dos figuras son semejantes si poseen sus ángulos iguales y los respectivos lados, proporcionales.

En los triángulos, al quitar una banda de ancho constante se obtiene una figura semejante a la original, cosa que no sucede en polígonos irregulares como el rectángulo. Esto se puede comprobar planteando las razones entre los lados correspondientes, se ve que no es una constante.

4. Un ladrillo pequeño

El ladrillito no sólo es cinco veces más corto que el ladrillo de construcción, sino que también es cinco veces más estrecho y más bajo; por lo tanto, su volumen y peso son **5 x 5 x 5 = 125** veces menores. La respuesta correcta es:

El ladrillito de juguete pesa **4.000: 125 = 32 gramos**.

▸ Unidad 10

1. El cumpleaños de Cecilia

Cecilia cumple los años el 31 de diciembre y la conversación se desarrolla el 1° de enero, porque el 30 de diciembre, hace dos días, tenía 8 años. Al día siguiente (31/12) cumplió 9 y en el nuevo año cumplirá diez. Por lo tanto, el año próximo cumplirá 11 años.

2. Cuadrados curiosos

Si d es el número de decenas del número cuyo cuadrado se quiere calcular y 5 es la cifra de las unidades, el número puede ser expresado así: **10d + 5.**

El cuadrado de ese número, como cuadrado de una suma será igual a **(10d + 5) · (10d + 5)** y efectuando los cálculos:

$$(10d + 5)^2 = 10^2 d^2 + 2 \cdot 10d \cdot 5 + 52 = 100d^2 + 100d + 25 \qquad 100d\,(d + 1) + 25$$

El primer término del cuadrado de **(10d + 5)** es el resultado de multiplicar las decenas (d) por la cifra d aumentada en una unidad, y es el número de centenas del cuadrado, 2 es el número de decenas y 5 el número de unidades.

Por ejemplo: $775^2 = 77 \cdot 78 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 = 6006 \cdot 100 + 25 = 600\,625$
$1085^2 = 108 \cdot 109 \cdot 100 + 25 = 1\,177\,225$

3. Edades y cuadrados

Es interesante conocer las estrategias de resolución desarrolladas por dos alumnos diferentes.

Lorena pensó en darle valores a **b** para calcular **a** de modo que **a + 3** resultara un cuadrado perfecto y armó una tabla.

b	a = b + 3	a + 3
1	4	7
2	5	8
3	6	9

Se puso muy contenta cuando encontró que 6 + 3 = 9 (cuadrado perfecto de raíz 3) y pudo probar que la edad de Anita es **6** años.

En cambio Ivo pensó que podía plantear dos ecuaciones: $a + 3 = b^2$ y $a - 3 = b$

Y sustituyendo **b** en la primera ecuación:

$$a + 3 = a^2 - 6a + 9$$
$$0 = a^2 - 6a + 9 - a - 3$$
$$0 = a^2 - 7a + 6$$

y resolviendo resulta que **a = 6**. Por lo tanto, Anita tiene **6** años.

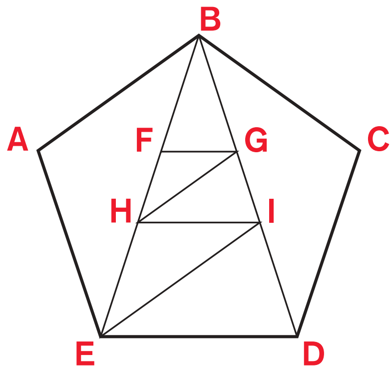
Ambos alumnos encontraron la solución correcta. Lorena se apoyó en *procedimientos locales y personales* que los alumnos utilizan desde la escuela primaria. En cambio, Ivo aplicó *procedimientos expertos* adquiridos en la escuela media, en este caso acerca de las ecuaciones de segundo grado.

4. Otro tangrama

GF II HI II ED GH II EI II AB

AB = 6 cm

La figura está compuesta por triángulos isósceles. No hay triángulos equiláteros ni escalenos. Hay triángulos acutángulos y obtusángulos, no hay triángulos rectángulos.



▸ Unidad 11

1. Los negocios de Juan

Vendió el primer sillón a $\mathbf{60 = x + \frac{20}{100}\,x}$ es decir, al precio original más el 20%.

Vendió el segundo sillón a $\mathbf{60 = x - \frac{20}{100}\,x}$

Perdió dinero puesto que compró el primer sillón a 50 pesos y el segundo a 75 pesos.

2. Los cálculos de Mora

Mora se queja porque según sus cálculos el tiempo que usa para dormir, comer, los fines de semana, tomarse vacaciones y ver la tele es de 366 días que son más de un año. Se equivoca en los cálculos porque cuenta dos veces los mismos tiempos. Por ejemplo, de las sumas que ya ha realizado cuando cuenta 65 días de vacaciones veraniegas olvida restar los tiempos dedicados a dormir, a comer, a ver la tele y otras distracciones.

3. Sudoku

6	3	5	9	8	7	2	4	1
2	1	8	6	3	4	9	7	5
9	7	4	5	2	1	3	6	8
8	6	9	3	5	2	7	1	4
3	5	7	4	1	6	8	9	2
4	2	1	8	7	9	6	5	3
1	9	6	2	4	3	5	8	7
7	8	2	1	9	5	4	3	6
5	4	3	7	6	8	1	2	9

4	7	6	5	3	8	9	2	1
5	2	3	6	9	1	7	4	8
8	9	1	7	4	2	5	6	3
6	5	7	1	8	3	4	9	2
3	8	9	4	2	6	1	5	7
2	1	4	9	7	5	3	8	6
9	6	8	3	1	4	2	7	5
7	3	5	2	6	9	8	1	4
1	4	2	8	5	7	6	3	9

▸ Unidad 12

1. Equipos rivales

No es posible asegurar en qué cancha se jugará porque depende de cuál de los dos equipos haya jugado el primer partido como local. Si el primer partido se jugó en la cancha de **A**, el partido número **14** se jugará en la cancha **B**. En cambio, si el primero se jugó en cancha de **B**, después de trece partidos, el próximo debe jugarse en cancha de **A**. El resto de la información es irrelevante porque la alternancia queda determinada según donde se juegue el primer partido.

2. Trenes en movimiento

Las trayectorias de los trenes y la distancia que los separa forman un triángulo rectángulo isósceles de lados 80 km.

La distancia que los separa es la hipotenusa, por lo tanto $\mathbf{d = \sqrt{80^2 + 80^2} = 113{,}13}$

En el segundo caso, se conoce la hipotenusa y no los catetos.

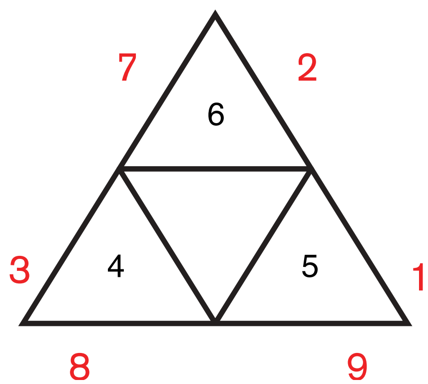
$$\begin{aligned} \mathbf{1002} &\mathbf{= x^2 + x^2} \\ \mathbf{10\,000} &\mathbf{= 2\,x^2} \\ \mathbf{5000} &\mathbf{= x^2} \\ \mathbf{70{,}7} &\mathbf{= x} \end{aligned}$$

3. Las monedas de Francisco

Le conviene formar cinco pilas de 3 monedas cada una porque **3.3.3.3.3 = 35 = 243**

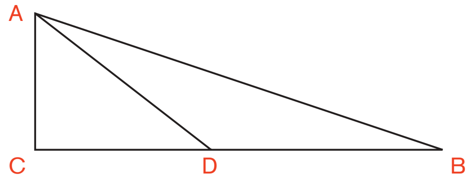
▸ Unidad 13

1. Números y triángulos



2. Una relación pitagórica

Para calcular **AB** se aplica la relación pitagórica:



AB^2 = 101^2 – 20^2 = 10 201 – 4000 = 6201

AB = 78,74 y por lo tanto **AD = $\frac{1}{2}$ AB = 39,37**

Área triángulo **ADB** = $\frac{20 \times 39{,}37}{2}$ = **393,7** unidades cuadradas.

3. Sudoku

2	3	4	5	6	1
5	1	6	3	4	2
3	4	1	6	2	5
6	5	2	4	1	3
4	2	3	1	5	6
1	6	5	2	3	4

4. Sudoku Express

4	7	6	5	3	8	9	2	1
5	2	3	6	9	1	7	4	8
8	9	1	7	4	2	5	6	3
6	5	7	1	8	3	4	9	2
3	8	9	4	2	6	1	5	7
2	1	4	9	7	5	3	8	6
9	6	8	3	1	4	2	7	5
7	3	5	2	6	9	8	1	4
1	4	2	8	5	7	6	3	9

▸ Unidad 14

1. Montones de piedras

Sabiendo que al final todos los montones **(A, B, C, D, E)** quedan con 124 piedras, se puede calcular el número inicial de cada montón. Por ejemplo, si a A se le quita $\frac{1}{5}$ de piedras para pasar a B, A queda con 124, se puede escribir:

$A - \frac{1}{5}A = 124 \qquad \frac{4}{5}A = 124 \qquad A = \frac{124 \times 5}{4}$ **A tenía 155 piedras**

$\frac{1}{5}$ de 155 se pasaron al montón B que así tuvo (B + 31), pero luego $\frac{1}{5}$ de (B + 31) se pasó a C y B quedó al final con 124, entonces

$(B + 31) - \frac{1}{5}(B + 31) = \frac{4}{5}(B + 31) = 124$

$\frac{124 \times 5}{4} = B + 31 \qquad 155 - 31 = B$ **B tenía 124 piedras**

Con el mismo tipo de razonamiento se llega a que **C** y **D** también tenían **124** piedras y el montón **E** solamente **93**.

2. Un número de seis cifras

El número es **324 561** porque **324** es múltiplo de 4, **245** es múltiplo de 5, **456** es múltiplo de 3 y **561** es múltiplo de 11.

3. Sudokus

1	5	4	6	2	3
6	2	3	4	1	5
4	1	6	3	5	2
2	3	5	1	6	4
5	4	1	2	3	6
3	6	2	5	4	1

9	2	8	7	6	1	5	4	3
1	7	6	5	3	4	2	8	9
5	3	4	2	9	8	6	1	7
8	6	9	4	7	3	1	2	5
7	5	3	1	2	6	4	9	8
4	1	2	8	5	9	7	3	6
6	4	1	9	8	5	3	7	2
3	9	7	6	1	2	8	5	4
2	8	5	3	3	7	9	6	11

Unidad 15

1. El producto de dos factores

El método se basa en multiplicar y dividir el producto por el mismo número, en este caso 2, con lo que el producto no se altera: $\mathbf{a \cdot b = \frac{a}{2} \cdot b \cdot 2}$

La elección de los sumandos está vinculada con la paridad de los factores.

Se presentan 4 ejemplos con diferentes casos: los 2 factores impares, uno par y otro impar y los 2 factores pares. Si al dividir sucesivamente uno de los factores por 2 el cociente entero es impar, la siguiente división no será equivalente porque se desconsidera un resto 1. Por eso es necesario sumar los números correspondientes a los lugares impares.

37	**41**	**41 + 164 + 1312 = 37 . 41 = 1517**
18	82	18.82 =1476
9	**164**	9 . 164 = 1476
4	328	4 . 328 = 1312
2	656	2 . 656 = 1312
1	**1312**	1 . 1312= 1312

65	**41**	**41 + 2624 = 65 . 41 = 2665**
32	82	32.82 = 2624
16	164	16. 164 = 2624
8	328	8 . 328 = 2624
4	656	4 . 656 = 2624
2	1312	2.1312 = 2624
1	**2624**	1. 2624 = 2624

65	**32**	**32 + 2048 = 65 . 32 = 2080**
32	64	32 . 64 = 2048
16	128	16 . 128 = 2048
8	256	8 . 256 = 2048
4	512	4 . 512 = 2048
2	1024	2 .1024 = 2048
1	**2048**	1 .2048 = 2048

88	**28**	**224 + 448 + 1792 = 88. 28 = 2464**
44	56	44 . 56 = 2464
22	112	22 .112 = 2464
11	**224**	11 . 224 = 2464
5	**448**	5 . 448 = 2240
2	896	2 . 896 = 1792
1	**1792**	1 .1792 = 1792

2. Los paquetes de café

Está en lo cierto porque si hace un descuento del 10%, el precio del paquete de 500 gramos de café será de $18 y estableciendo la relación peso/costo se ve que es más barato que el paquete de 550 gramos a $ 20.

3. Un tiro por elevación

Conociendo el vértice y un punto perteneciente a la parábola, podemos hallar la expresión de la altura en función del tiempo.

Si expresamos en forma canónica, resulta: $H(t) = a \cdot (x - 3)^2 + 144$ (*)
Y como el par ordenado (2,128) pertenece a la función, reemplazamos en (*)
$128 = a \cdot (2 - 3)^2 + 144$

Despejamos a de la expresión y obtenemos $a = -16$
Por lo tanto, la función resulta: $\mathbf{H(t) = -16 \cdot (x - 3)^2 + 144}$

▸ Unidad 16

1. Productos curiosos

76923 x 2	**=**	**153846**	**76923 x 1**	**=**	**76923**
76923x 7	**=**	**538461**	**76923 x 10**	**=**	**769230**
76923 x 5	**=**	**384615**	**76923 x 9**	**=**	**692307**
76923 x 11	**=**	**846153**	**76923 x 12**	**=**	**923076**
76923 x 6	**=**	**461538**	**76923 x 3**	**=**	**230769**
76923 x 8	**=**	**615384**	**76923 x 4**	**=**	**307692**

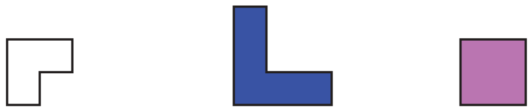
Se puede observar que este número tiene doble curiosidad. En la primera columna, se observa que todos los productos están formados por las mismas seis cifras y en el mismo orden pero con la posición corrida.

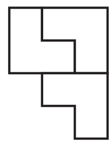
En la segunda columna lo asombroso es que los productos están formados por las mismas cifras del número dado pero con CERO después de 3. En todos los casos conservan el orden pero están desplazadas como en el caso anterior.

2. Potencias curiosas

La sucesión continúa $\mathbf{5^2 + 6^2 + 30^2 = 31^2}$
Puesto que, tal como se enuncia a continuación, planteamos la igualdad mediate expresiones algebraícas, siempre se verifica $\mathbf{a^2 + (a + 1)^2 + [a \cdot (a + 1)]^2 = [a \cdot (a + 1) + 1]^2}$

3. Un rompecabezas cuadrado de 6 x 6





Este cuadrado está formado por figuras de tres tipos:

- Las fracciones correspondientes son: **a** = $\frac{5}{36}$ **b** = $\frac{1}{12}$ **c** = $\frac{1}{9}$
- Las 4 piezas del tipo **b** cubren $\frac{1}{3}$ del total del rompecabezas.
- La suma de una pieza **a** y una pieza **c** cubren $\frac{1}{4}$ del área total.

Para cubrir un cuadrado de 6 x 6 hay que formar 4 piezas de la misma forma con tres elementos b cada una y luego ensamblarlas de la siguiente forma: