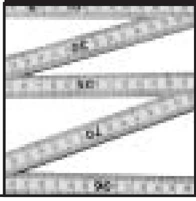
Polimodal

Matemática



PARA SEGUIR APRENDIENDO

material para el alumno

Equidad
Programa de Acciones Compensatorias en Educación
PACE

Unidad de Recursos Didácticos
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN BÁSICA

MINISTERIO de EDUCACIÓN
PRESIDENCIA de la NACIÓN

Ministro de Educación
Lic. Andrés Delich
Subsecretario de Educación
Lic. Gustavo Iaies

Unidad de Recursos Didácticos
Coordinación: Prof. Silvia Gojman

Equipo de Producción Pedagógica
Coordinación: Raquel Gurevich
Autoría: Graciela Fernández
Colaboración: Mónica V. Machiunas
Lectura crítica: Graciela Chemello

Equipo de Producción Editorial
Coordinación: Priscila Schmied
Edición: Cecilia Pisos
Edición de ilustraciones: Gustavo Damiani
Ilustraciones y mapas: Daniel Rezza
Diseño: Constanza Santamaría

PARA SEGUIR APRENDIENDO
material para alumnos

Para seguir aprendiendo. Material para alumnos es una colección destinada a todos los niveles de escolaridad, integrada por propuestas de actividades correspondientes a las áreas de Lengua, Matemática, Ciencias Sociales y Ciencias Naturales.

Las actividades que se presentan han sido especialmente diseñadas por equipos de especialistas, con el objetivo de que los docentes puedan disponer de un conjunto variado y actualizado de consignas de trabajo, ejercicios, experiencias, problemas, textos para trabajar en el aula, y puedan seleccionar aquellos que les resulten más apropiados según su programación y su grupo de alumnos. Desde la colección, se proponen situaciones contextualizadas a través de las cuales se busca que los alumnos tengan oportunidad de analizar y procesar información, de formular hipótesis, de discutir y reflexionar y de justificar sus opiniones y decisiones. La intención es contribuir, de este modo, a que los alumnos se apropien de contenidos nodales y específicos de las distintas áreas.

Esperamos que *Para seguir aprendiendo* se convierta en una herramienta de utilidad para el trabajo docente cotidiano y que resulte un aporte concreto para que los alumnos disfruten de valiosas experiencias de aprendizaje.

Unidad de Recursos Didácticos

Hecho el depósito que establece la ley 11.723. Libro de edición argentina. Impreso en Formacolor Impresores S.R.L., Buenos Aires, Argentina. Mayo de 2001. Primera edición. ISBN 950-00-0446-1

Índice de actividades

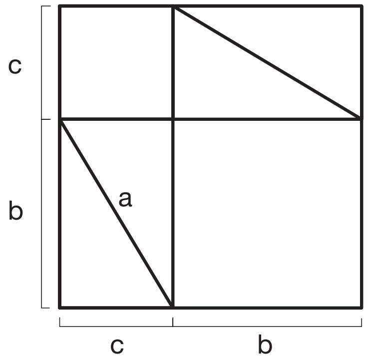
ACTIVIDAD 1

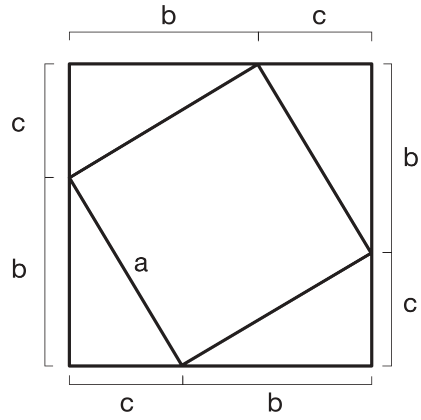
Después de intentar con poco éxito explicarle a un técnico de TV con qué medidas debía diseñar los gráficos animados que se verían por la pantalla en un programa educativo, Gustavo decidió preguntarle en qué se basaba él para hacer los diseños. “Fácil”, me dijo, “todo tiene que ser 3, 4, 5...”

Esta “terna” de números se llama terna pitagórica (de hecho es la más pequeña de las ternas pitagóricas); otras son 5, 12 y 13; 7, 24 y 25 (y hay muchas más).

a. ¿Por qué piensan que esas ternas son pitagóricas?

b. Analicen si los siguientes gráficos les permiten elaborar un argumento que justifique la propiedad que cumplen los triángulos rectángulos denominada teorema de Pitágoras.





ACTIVIDAD 2

Las ternas pitagóricas eran conocidas por los babilonios casi 2000 años a.C. también las conocían los antiguos chinos, que las usaban para resolver problemas que involucraban triángulos rectángulos, e incluso hay monumentos megalíticos de Europa Occidental (en Irlanda, por ejemplo), construídos entre 4800 y 3000 a.C., que guardan esta relación.

También en el antiguo Egipto, los “tiradores de cuerdas”, que eran los encargados de subdividir las tierras luego de la crecida anual del río Nilo, utilizaban un procedimiento muy relacionado con este teorema. Según el historiador griego Herodoto, éste es el origen de la Geometría. Los tiradores tenían una cuerda con 12 partes iguales, separadas por nudos, que usaban para trazar ángulos rectos; apelando a la terna 3, 4, 5...

a. Hagan un esquema que represente cómo se deben colocar las cuerdas con los doce segmentos para poder afirmar que un ángulo es recto.

b. Comparen si todos hicieron la misma elección y elaboren alguna justificación. ¿Hay una única manera de poner la cuerda para lograrlo?

c. Completen el siguiente enunciado (teorema recíproco del de Pitágoras): “Si en un triángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa, entonces .... ”

Para reflexionar

Podemos considerar que el teorema de Pitágoras como todos los teoremas de la Matemática, está compuesto por dos proposiciones. En este caso son:

p: El triángulo es rectángulo.

q: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

- ¿Cuál de las formulaciones siguientes se corresponde con las respuestas a la actividad 2?

  "Si un triángulo es rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

  "Si en un triángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, ese triángulo es rectángulo"

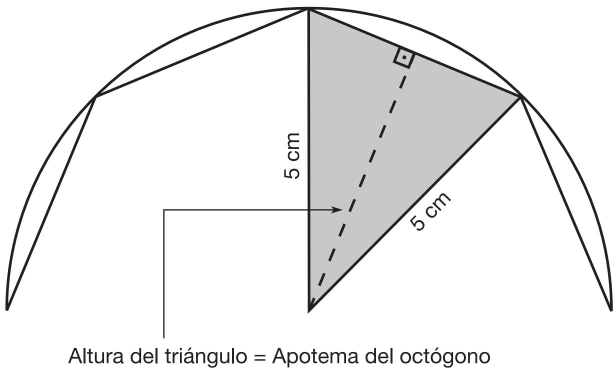
ACTIVIDAD 3

El teorema de Pitágoras tiene diferentes aplicaciones. A continuación, veremos algunas.

a. Representen en una recta numérica el número $\sqrt{5}$, tomando como unidad aproximadamente 2 cm, y expliciten el procedimiento realizado paso por paso.

b. Utilicen el teorema de Pitágoras para ubicar $\sqrt{2}$ en una recta numérica, usando sólo una regla no graduada y un compás

c. Calculen el perímetro de un octógono regular, inscripto en una circunferencia de 5 cm de radio, y determinen su área.



d. Propongan otra aplicación del teorema de Pitágoras y redacten una actividad para que resuelvan sus compañeros.

Para investigar

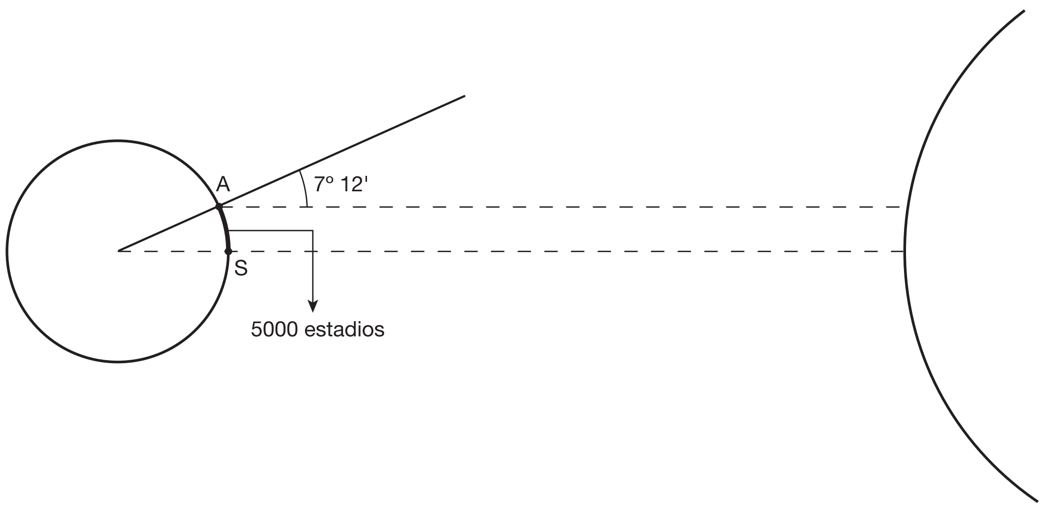
Averigüen a qué se denominan teoremas recíprocos y busquen un teorema que tenga recíproco y otro que no lo tenga.

ACTIVIDAD 1

El año 300 a.C. marcó en Grecia un quiebre entre dos culturas diferentes: la primera (entre 600 a.C. y 300 a.C.), más cercana a la filosofía y a una actitud contemplativa y generalizadora de resultados; y la segunda (entre 300 a.C. y 600 d.C.), más pragmática y aplicada. Así, por ejemplo, mientras Euclides se contentó con probar que la longitud de la circunferencia era proporcional a su diámetro, Arquímedes se preocupó por calcular el valor de la constante de proporcionalidad (es decir, aproximar el valor de π). Esta cuestión de las proporciones y su uso para calcular fue uno de los temas predominantes en la cultura griega.

Tomemos, por ejemplo a Eratóstenes, contemporáneo de Arquímedes, quien estimó el valor del radio de la Tierra. ¿Qué hizo Eratóstenes?

No tenía relojes, ni radares, pero siendo geógrafo y astrónomo, había viajado mucho hasta terminar como bibliotecario en Alejandría. De sus travesías, conocía la ruta entre Siena (hoy Assuan) y Alejandría, que están ambas sobre un mismo meridiano. Había observado además que, al mediodía del día más largo del año, en Siena, los rayos del sol caían perpendiculares a la superficie terrestre. Eratóstenes midió el ángulo que ese mismo día, a esa misma hora, formaban en Alejandría los rayos de sol con la perpendicular (7º 12'), y con ello y sabiendo que la distancia entre Siena y Alejandría es de 5000 estadios (aproximadamente 926 km), estimó el radio de la Tierra.



Usando los datos obtenidos por Eratóstenes, calculen la medida de un meridiano terrestre.

Calculen el valor del radio de la Tierra, usando los siguientes valores de π y comparen los resultados:

$\pi = 3,14$ $\pi = 3,1416$ el valor de π que les da su calculadora

Para reflexionar

¿Qué conocimiento matemático piensan que usó Eratóstenes como recurso para plantear sus cálculos?

¿Tiene ese conocimiento alguna relación con el teorema de Thales?

ACTIVIDAD 2

Dibujen un círculo y marquen su centro. Luego marquen dos sectores circulares (dos porciones, si el círculo representara una pizza), de modo que el segundo sea el doble del primero.

Expliquen cómo hicieron para conseguir que un sector sea el doble de otro y justifiquen.

¿Es cierto que los sectores circulares analizados tienen uno el doble de área que el otro? ¿Por qué?

Para reflexionar

- ¿Qué relación se cumple entre los ángulos centrales y las longitudes de los arcos de circunferencia correspondientes a los sectores circulares considerados?
- ¿Se puede considerar que la relación considerada se verifica siempre? Justifiquen su respuesta.

Para investigar

Se cuenta que los antiguos griegos necesitaban construir un túnel a través de una colina, para llevar agua desde un lago hasta su ciudad. Una vez fijadas la entrada (A) y la salida (B) del túnel, se preguntaron cómo determinar la dirección en que debían excavar para llegar de A a B. Imaginaron la recta que definía la dirección y sobre ella dos puntos (uno a cada lado de la colina), visibles ambos desde un punto exterior, y decidieron que bastaba con encontrar la medida del ángulo α que determinan las semirrectas con origen en dicho punto, que pasan por A y B.

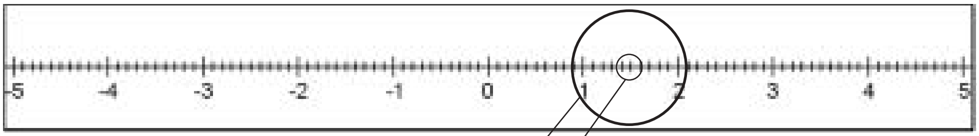
- ¿Por qué basta con conocer la medida del ángulo α para determinar la dirección buscada?
- ¿Podían medir ese ángulo directamente? ¿Por qué?
- ¿Qué medidas tomaron y cómo calcularon el ángulo si solamente conocían las propiedades de la semejanza de triángulos?

ACTIVIDAD 1

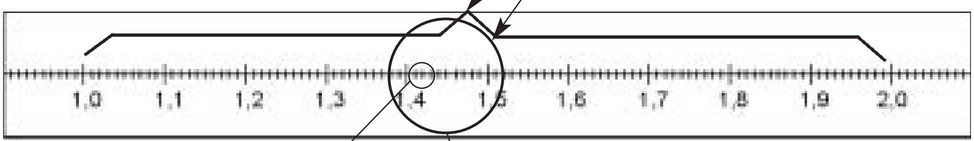
El número $\sqrt{2}$ es irracional. Si lo calculan con la calculadora, obtendrán un valor aproximado, ya que su expresión decimal tiene infinitos decimales, y la calculadora proporciona sólo 8 ó 10.

Vamos a analizar cómo pueden representarlo en la recta numérica. $\sqrt{2}$ es uno de los puntos comprendidos entre el 1 y el 2, porque $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$, y $\sqrt{2}^2 = 2$, que está entre 1 y 4.

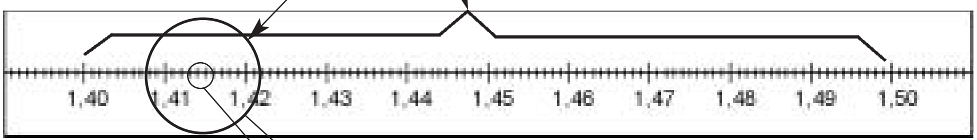
a. Podemos aproximarlo mejor, diciendo que está entre 1,4 y 1,5. ¿Por qué?



b. Podemos aproximarlo aún mejor, diciendo que está entre 1,41 y 1,42. ¿Por qué?

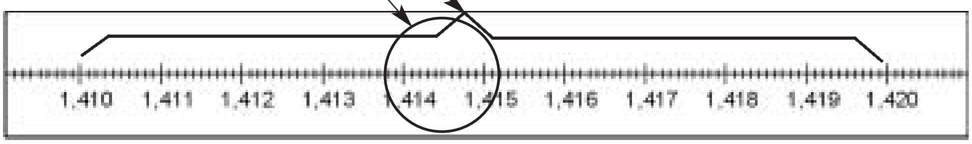


c. Podemos aproximarlo con un decimal más, diciendo que está entre 1,414 y 1,415. ¿Por qué?



Fíjense que cada uno de los gráficos de la recta numérica corresponde a una ampliación del anterior, ya que cambiamos la escala.

d. Intenten aproximarlo con un decimal más, e indíquenlo en un nuevo gráfico.



Siguiendo este proceso, cada vez encerraríamos el punto correspondiente a $\sqrt{2}$ en un intervalo de menor amplitud, es decir, lograríamos mayor precisión.

Veamos ahora otra forma de encarar la tarea, que permite representar con precisión algunos irracionales[1].

Precisamos un resultado auxiliar:

a. Usando el teorema de Pitágoras, calculen la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

b. Dibujen un cuadrado sobre la recta numérica, haciendo coincidir un lado con el segmento $\overline{0\ 1}$. Tracen la diagonal que pasa por el 0.

c. Al hacer esta construcción, obtuvieron un triángulo con un lado sobre la recta numérica; ¿qué clase de triángulo es (teniendo en cuenta sus ángulos)? ¿Cuánto mide la diagonal que marcaron?

[1] Al menos en forma ideal (ya que en la práctica factores como el grosor del lapíz y errores inevitables de medición causan un resultado aproximado).

d. Tomen con el compás la medida de la diagonal y transporten sobre la recta numérica esta medida a partir del 0. ¿Qué número irracional están representando?

e. Construyan sobre la recta un rectángulo de base igual al segmento que marcaron y altura de longitud 1 y vuelvan a trazar la diagonal que pasa por el 0 ¿Qué número pueden representar con esta construcción?

f. Si el rectángulo que construyeron en el punto anterior tuviera altura de longitud 3, ¿cuál es el número que podrían representar?

g. ¿Cómo representarían $\sqrt{7}$?

Para reflexionar

- ¿Qué relación hay entre los puntos de la recta numérica y los números reales?
- ¿De qué manera se pueden construir los números de la forma $\sqrt{\alpha}$ utilizando el teorema de Pitágoras?

Una construcción del número de oro

En un segmento AB tomamos un punto P tal que los segmentos que determina con A y B verifican que:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$$

Esta división del segmento se conoce como la "sección áurea" y el número que expresa la razón entre los segmentos se llama "número de oro" y habitualmente se anota con la letra griega Φ (phi).

a. Tomen como unidad la longitud de $\overline{AB}$. Calculen la longitud de $\overline{AP}$ y verifiquen que el valor de Φ es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b. Representen este número con construcciones como las que hicieron en el ejercicio anterior.

Para investigar

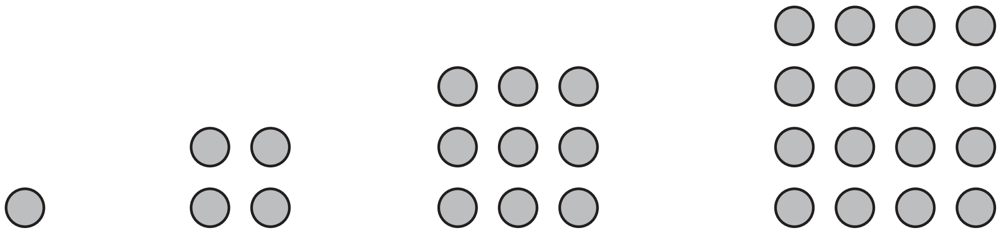
Los griegos que seguían las teorías de Pitágoras observaron que el número de oro se encontraba al relacionar la diagonal y el lado de un pentágono regular.

Analicen esta relación.

ACTIVIDAD 1

Pitágoras fue discípulo de Thales en Grecia, donde fundó una hermandad de tipo religioso, científico y filosófico, que se conoció a través del tiempo como "los pitagóricos". Ellos solían representar los números mediante piedritas, clasificándolos según las formas que pudieran darles a las distribuciones de las piedras.

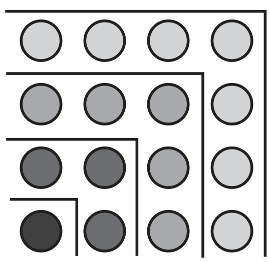
A continuación, están representados los primeros "números cuadrados", llamados así porque la cantidad de piedras que los integran se pueden disponer formando un cuadrado.



$c_1 = 1$ $c_2 = 4$ $c_3 = 9$ $c_4 = 16$

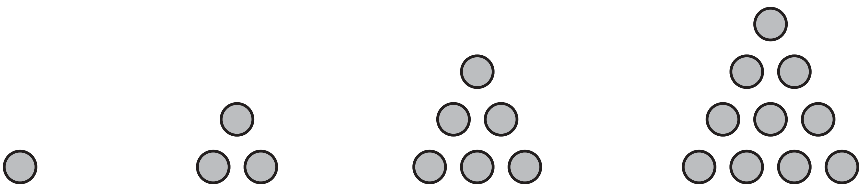
a. ¿Cuál es el quinto número cuadrado? ¿Y el vigésimo?

b. En el siguiente gráfico se intenta mostrar cómo se obtiene cada número cuadrado a partir del anterior. Busquen algún patrón en la cantidad de piedras que hay que agregar cada vez.



c. Para cualquier número natural n, ¿cuánto vale $1+3 + 5 + ...+ (2n – 1)$?

d. Aquí les representamos los cuatro primeros "números triangulares", llamados así porque con la cantidad de piedras que los integran se pueden formar triángulos equiláteros:



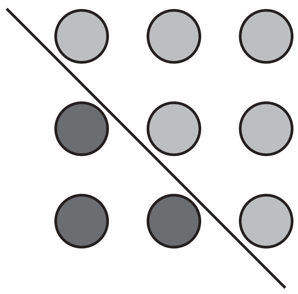
$t_1 = 1$ $t_2 = 3$ $t_3 = 6$ $t_4 = 10$

¿Cuál es el siguiente?

e. Busquen algún patrón en la cantidad de piedras que hay que agregar cada vez. ¿Cuál será el octavo número triangular?

f. Con estas distribuciones geométricas de los números pueden aparecer como más evidentes algunas propiedades de los números.

Observen la recta que aparece en el tercer número cuadrado y vean que se puede pensar como la suma de dos números triangulares consecutivos: $c_3 = t_2 + t_3$. Prueben con otros y expresen algebraicamente la siguiente propiedad: "Si se suma el enésimo número triangular más el siguiente, se obtiene el (n+1)ésimo número cuadrado".



g. La sucesión 1, 2, 3, 4, etc. es una sucesión aritmética. A partir de la expresión anterior, pueden hallar la suma de los primeros n términos.

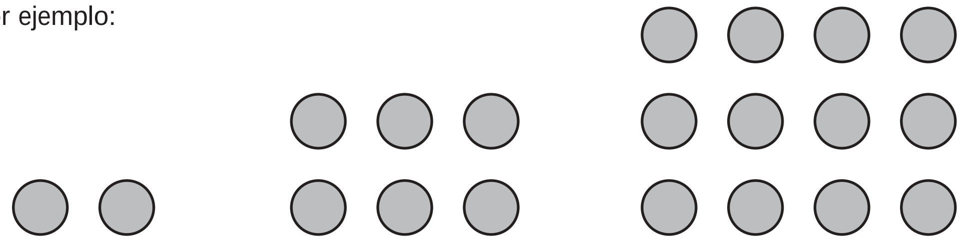
Para reflexionar

- En las sucesiones anteriores, en algunos casos podían obtener un valor de forma recurrente, si conocían el anterior. Expliquen cómo lo calculaban en cada caso.
- Buscando regularidades en las figuras, trataron de llegar a una fórmula que permitiera conocer cualquier término sin tener que hallar todos los anteriores. Expliquen en cada caso cómo lo pensaron.

ACTIVIDAD 2

Los números rectangulares son los que tienen una cantidad tal de piedras que permiten formar un rectángulo cuya base es una unidad mayor que la altura.

Por ejemplo:



$r_1 = 2$ $r_2 = 6$ $r_3 = 12$

a. Dibujen los dos números siguientes. ¿Cuáles son?

b. Busquen un patrón que relacione cada número rectangular con el anterior.

c. A partir del segundo número rectangular, pueden descomponerse en un número cuadrado y "algo" más; o en dos números triangulares iguales (trazando una recta en diagonal). Analicen alguna de estas descomposiciones para varios números rectangulares, buscando un patrón, y expresen algebraicamente cómo se puede obtener el n-ésimo número rectangular.

Para investigar

Hay una vieja leyenda sobre el origen del ajedrez. Se cuenta que el inventor se lo había obsequiado al rey Sirham de la India. El rey quería darle una recompensa. Entonces el inventor, que no quería cobrarle nada, le dijo que le diera la cantidad de trigo que resultara de tomar 1 grano por el primer casillero del tablero de ajedrez, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto y así, cada vez, el doble, hasta terminar. Al rey le pareció que era muy poco lo que pedía; y ordenó a sus sabios que calcularan el total y que se lo entregaran inmediatamente.

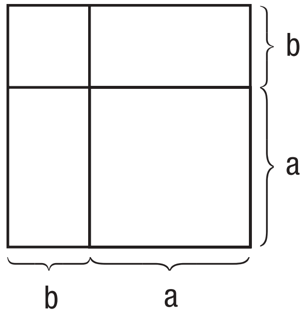
Se llevó una sorpresa.

- Investiguen por qué.
- ¿Qué tipo de sucesión es: 1, 2, 4, 8, ...? Enuncien todas las propiedades que conozcan de este tipo de sucesiones.

ACTIVIDAD 1

Podemos asociar algunas expresiones algebraicas con el cálculo de áreas de figuras geométricas. Por ejemplo, tenemos un cuadrado de lado "a + b" (piensen que a y b son dos números reales cualesquiera), dividido de la siguiente forma:

Podemos calcular el área total como si no estuviera dividido, o sumar las áreas parciales de cada una de las regiones.



a. ¿Cuáles de las siguientes igualdades pueden relacionarse con el gráfico? Para los casos que seleccionen indiquen si son verdaderas, o no, las igualdades y justifiquen.

i. $4(a + b) = a^2 + b^2$

ii. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

iii. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + a^2b^2$

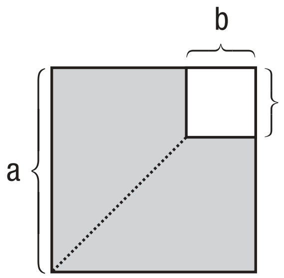
iv. $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$

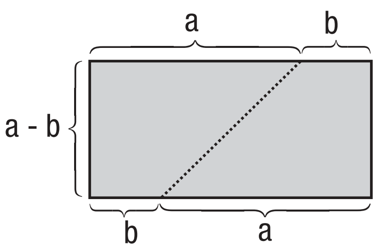
b. Si a o b es un número negativo, ya no puede representar una longitud; es decir, la representación geométrica no es adecuada. Prueben, reemplazando a y b varias veces por valores positivos y negativos, si se verifican para valores negativos las igualdades que seleccionaron.

ACTIVIDAD 2

A partir del siguiente gráfico, en el que la segunda figura se formó reordenando 2 de las piezas incluidas en el cuadrado de lado a, se puede dar una justificación geométrica de la identidad:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$





a. Expliquen a qué figura hace referencia cada miembro de la igualdad.

b. Analicen si la igualdad se cumple para cualquier elección de a y b, o sólo para algunas. Escriban cómo lo pensaron.

ACTIVIDAD 3

Encuentren una justificación geométrica para la identidad:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Pista: ¿Cómo se representa o se halla gráficamente la diferencia entre dos segmentos?

Además de considerar a y b positivos, por usarlos como longitudes, ¿qué relación deben verificar a y b?

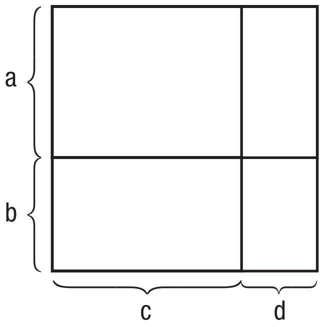
Para reflexionar

La expresión $(a + b)^2$ puede calcularse con el producto $(a + b).(a + b)$. ¿Es esto válido para cualquier par de números a y b?

- ¿Cómo deben hacer para expresar como producto de dos factores la expresión $a^2 + 2ab + b^2$?
- ¿Qué pueden decir de las otras expresiones?
- Estas justificaciones geométricas no sirven para probar las igualdades para todo número real. ¿Por qué? ¿Cómo pueden hacer en los casos anteriores para probar estas identidades para todo número real?

ACTIVIDAD 4

Analicen cómo se relacionan las dos figuras que se incluyen a continuación, con las expresiones algebraicas siguientes. a, b, c y d son 4 números reales positivos. ¿Qué igualdades se pueden establecer en este caso?

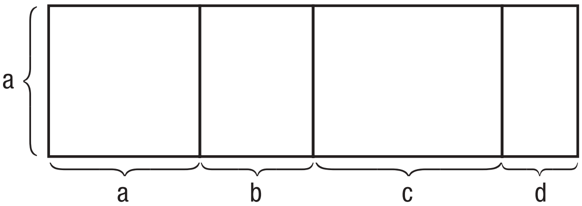


$(a + b) . (c + d)$

$a (a + b + c + d)$

$a\, a + a\, b + a\, c + a\, d$

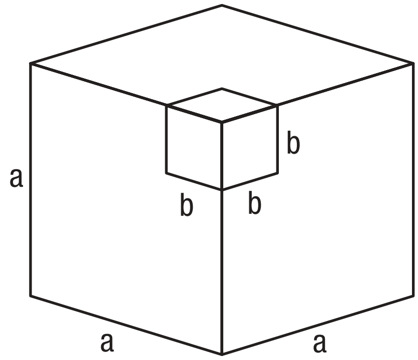
$a\, c + b\, c + a\, d + b\, d$



ACTIVIDAD 5

Podemos obtener un modelo geométrico para $a^3 - b^3$, considerando un cubo de arista a al que le cortamos un cubito de arista b (menor que a).

Si cortamos el cubito a partir de un vértice del cubo mayor, podemos calcular el volumen restante de una segunda forma, a partir de descomponer la figura en 4 prismas rectos, prolongando las aristas del cubo más chico.



a. Dibujen la descomposición mencionada del volumen restante.

b. Encuentren una expresión algebraica del volumen restante, como suma de los volúmenes de cada parte. Exprésenla como producto.

c. Verifiquen, aplicando propiedad distributiva, que el producto que propusieron se corresponde con la diferencia de los volúmenes.

Para investigar

Busquen una interpretación geométrica de $(a + b)^3 = a^3 + 3\, a^2b + 3ab^2 + b^3$

Para el caso de $(a - b)^3$, intenten emplear una representación geométrica para hallar una expresión equivalente. Expliquen cómo se relaciona con el desarrollo algebraico.

Verifiquen en ambos casos, empleando la propiedad distributiva.

ACTIVIDAD 1

En una clase de matemática, la profesora planteó el siguiente problema:

En una panadería, vendían cada factura a 30 centavos, y el kilo de pan a $1,20. María compró algunas facturas y 1 kilo de pan y cuando fue a pagar se dio cuenta de que había gastado lo mismo que el día anterior, cuando había comprado la mitad de facturas y el doble de pan. ¿Cuántas facturas compró cada día? ¿Cuánto pagó en total, cada día?

Inmediatamente Clara, una de las alumnas, pensó que no hacía falta escribir ecuaciones para resolver el problema, y se puso a probar con diversos valores.

Organizó los datos y obtuvo estas dos tablas:

Primer día

facturas	precio
1	0,30 + 2,40 = 2,70
2	3
3	3,30

Segundo día

facturas	precio
2	0,60 + 1,20 = 1,80
4	2,40
6	3

a. Expliquen cómo confeccionó cada tabla. ¿Ya obtuvo la respuesta? Si contestan que sí, digan cuál es. En caso contrario, prosigan la tabla hasta encontrarla. En ambos casos, justifiquen su respuesta.

b. Realicen un gráfico con los valores de las tablas, colocando en el eje de abscisas la cantidad de facturas (para que les resulte más fácil trabajar, pueden usar como escala en las ordenadas un cuadrito o medio cm para cada $0,30). ¿Cómo ubican la respuesta en el gráfico?

c. Anahí, una de sus compañeras, prefería plantear ecuaciones.

Si llamó x a la cantidad de facturas compradas el segundo día, ¿cómo le quedaron las ecuaciones?

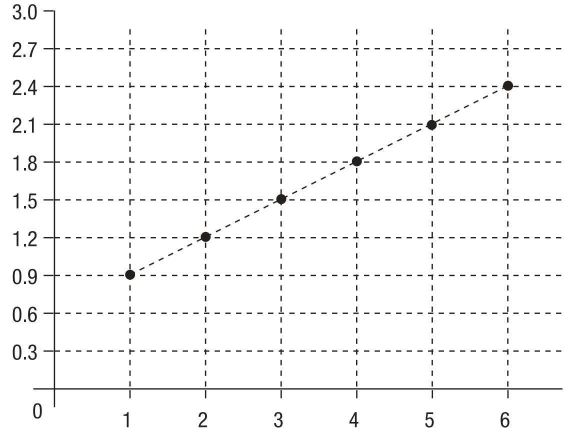
d. Sergio, que también prefería usar ecuaciones, llamó x a la cantidad de facturas compradas el primer día. ¿Obtuvo las mismas ecuaciones que Anahí, o cambiaron en algo? Escríbanlas.

ACTIVIDAD 2

La misma profesora propuso que buscaran la respuesta a la siguiente variación del problema, mediante un gráfico:

En una panadería, vendían cada factura a 30 centavos, y el kilo de pan a $1,20. María compró algunas facturas y $\frac{1}{2}$ kilo de pan y gastó menos de $2. ¿Cuántas facturas pudo haber comprado?

a. Clara hizo rápidamente el siguiente gráfico; expliquen cómo lo obtuvo.



b. ¿Corresponde calcular algún valor para “x” = 0?

c. La profesora dijo que a la altura de los $2 trazaran una recta horizontal, para ayudarse a calcular la respuesta. Analicen cómo se relaciona la sugerencia que dio la profesora con la respuesta buscada, e indiquen cuál es esta respuesta.

Para reflexionar

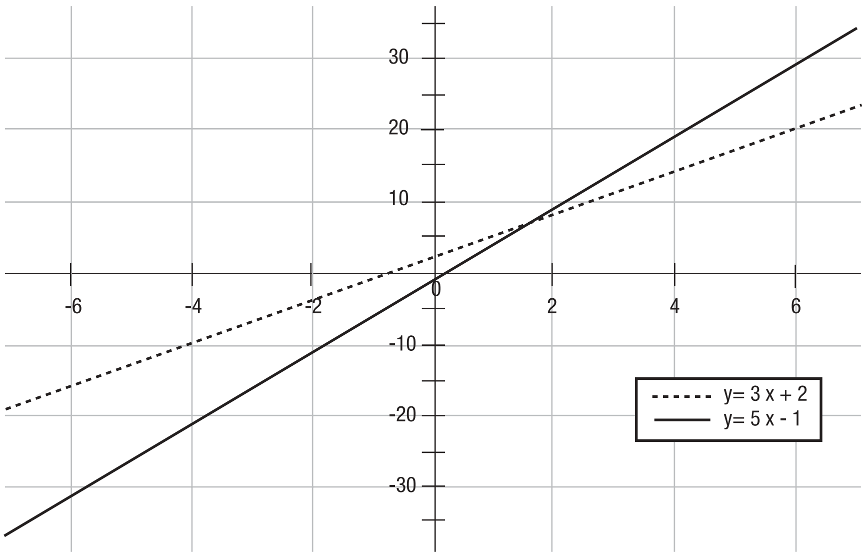
- En el gráfico que hicieron a partir de los valores que calculó Clara, los puntos quedan sobre dos rectas. ¿Cuáles son las ecuaciones de esas rectas?
- ¿Qué dato vinculado con el problema proporciona cada coordenada del punto de intersección de las rectas sobre las que se encuentran los puntos?
- ¿Qué relación hay entre las rectas que se dibujaron en el último problema y las respuestas a dicho problema?

ACTIVIDAD 3

Si la inecuación que tienen que resolver es: $3x + 2 \leq 5x - 1$, se puede interpretar que se buscan valores de x para los cuales el total de calcular $3x + 2$ resulte menor o igual al total de calcular $5x - 1$. Si además la inecuación no está asociada a un problema, se puede elegir cualquier valor para x.

a. Hagan una tabla comparando ambos totales para diversos valores de x.

b. En el siguiente gráfico se representan las rectas $y = 3x + 2$ e $y = 5x - 1$, que dividen al plano en 4 regiones. A partir de la comparación que hicieron, indiquen cuál o cuáles de esas regiones representan la solución. Expliquen por qué.



c. Hallen las coordenadas del punto de intersección. ¿Qué representan en relación con la inecuación?

Para investigar

a. Si dibujan dos rectas en el plano, éstas pueden ser oblicuas, paralelas o coincidentes. Analicen cómo se relaciona esto con la cantidad de soluciones que puede tener una ecuación.

b. Si se considera la ecuación $3x + 1 = ax + b$, ¿qué se puede decir de a y b para que la ecuación no tenga solución? Representen gráficamente.

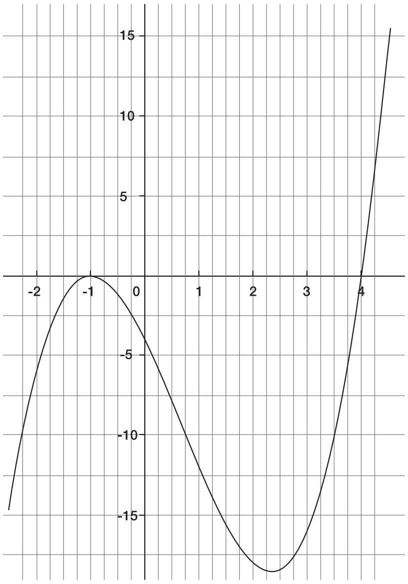
Y si en cambio queremos que tenga infinitas soluciones, ¿cómo deben ser a y b?

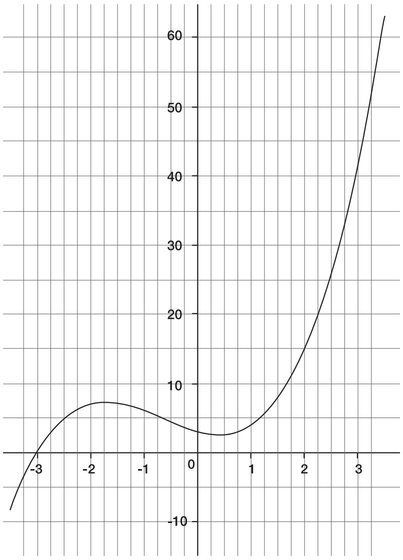
¿Qué sucede con la cantidad de soluciones de la ecuación si usamos cualquiera de los otros valores de a y b?

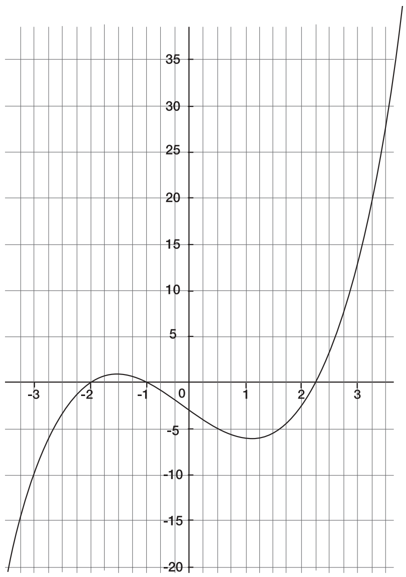
ACTIVIDAD 1

Los siguientes gráficos representan aproximadamente a los polinomios

$P(x) = x^3 + 2x^2 – 2x + 3$; $Q(x) = x^3 – 2x^2 – 7x – 4$ y $F(x) = x^3 + x^2 – 4x - 4$







a. A partir de los datos incluidos en los gráficos, identifiquen qué gráfico corresponde a cada ecuación. Indiquen en cada caso qué datos emplearon y cómo los interpretaron.

b. Indiquen en los gráficos las raíces de cada polinomio. Estimen sus valores, a partir de los gráficos.

c. ¿Qué valor de obtiene al evaluar una función en una raíz?

Apliquen ese dato para comprobar si sus estimaciones son correctas para cada uno de los valores estimados.

d. Expresen cada polinomio como producto de dos o más factores. Intenten, cuando sea posible, que cada factor sea una expresión lineal.

Pista: Para eso pueden emplear un resultado llamado "teorema del resto", que dice que el resto de dividir un polinomio $P(x)$ por $(x – a)$ es $P(a)$, luego si a es raíz, como el resto es 0, $(x – a)$ divide al polinomio.

ACTIVIDAD 2

Tomemos otro ejemplo. Si les piden que hallen las raíces del polinomio $G(x) = 6x^3 – 5x^2 – 2x + 1$, tienen que resolver la ecuación $6x^3 – 5x^2 – 2x + 1 = 0$.

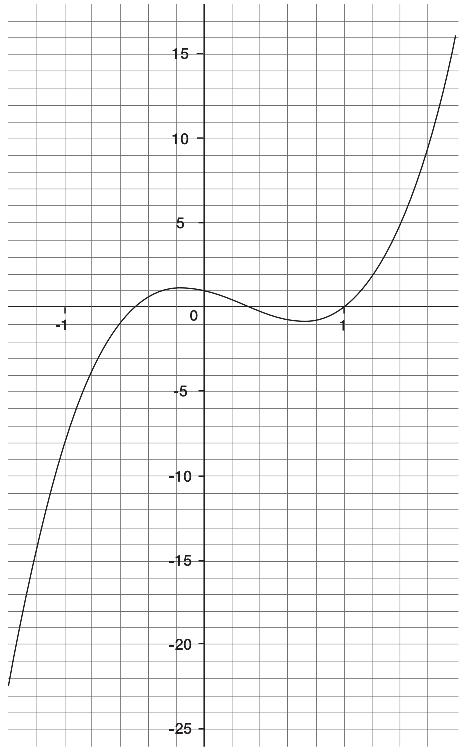
a. Intenten resolverla antes de probar con el método que sugerimos.

b. Si nos dicen (o si obtenemos por tanteo, o leemos en un gráfico) que $x = 1$ es una raíz (verifíquenlo), podemos dividir el polinomio $G(x)$ por $(x – 1)$ y rescribirlo; entonces también podemos reescribir la ecuación como: $(x – 1)(6x^2 + x – 1) = 0$.

Verifiquen que las ecuaciones son equivalentes.

(Pista: En este caso, ya saben que alguno de los dos factores debe ser cero; ya conocen una fórmula para hallar las raíces de una función cuadrática, así que podrán resolver $6x^2 + x – 1 = 0$.)

El gráfico del polinomio G(x) es siguiente:



c. Hallen analíticamente todas las raíces.

d. Marquen en el gráfico las raíces y comparen si sus valores se corresponden con los que hallaron analíticamente.

e. Comparen sus resultados con los de algunos compañeros.

Para reflexionar

¿Qué dato del gráfico usaron para poder factorizar los polinomios?

En uno de los casos no deben de haber encontrado la forma de expresar al polinomio de grado 3 como producto de tres factores lineales (repetidos o no). ¿Cómo se refleja eso en el gráfico correspondiente?

¿Cómo pueden factorizar un polinomio conociendo las raíces del mismo?

¿Qué sucede con el gráfico, cuando hay factores lineales repetidos? (observar la posición relativa de la función respecto al eje de abscisas)

ACTIVIDAD 3

a. Dibujen, si es posible, para cada caso, un polinomio de grado 3 que satisfaga las siguientes condiciones:

1. que tenga dos raíces negativas racionales solamente;

2. que no tenga raíces;

3. que corte cuatro veces el eje de abscisas;

4. que corte el eje de abscisas en x = -2 solamente.

b. Tomando en cuenta las relaciones entre los gráficos y el factoreo de polinomios que analizaron antes, propongan una expresión analítica para cada caso. Comprueben que se adapta a los datos de sus gráficos.

Para investigar

En general, no siempre es posible calcular analíticamente en forma sencilla las raíces de un polinomio cuando es de grado mayor o igual a 3.

En el caso en que el polinomio tenga sólo coeficientes enteros hay un resultado llamado “teorema de Gauss” que permite hallar, si existen, sus raíces racionales. Investiguen este resultado.

Las representaciones y los problemas

La noción de función, tal como la conocemos hoy, es relativamente moderna. Pero las funciones en sí ya eran usadas por los antiguos matemáticos como una herramienta para describir especialmente movimientos. En ese entonces, pensaban a las funciones como lo que permitía mostrar un cambio y una dependencia, el cambio de la posición dependiendo del tiempo (por ejemplo de los planetas), el tiempo necesario para frenar un móvil dependiendo de su velocidad, etc. Y como, además, no escribían fórmulas ni hacían gráficos cartesianos, la descripción era coloquial, las curvas eran "lugares geométricos".

ACTIVIDAD 1

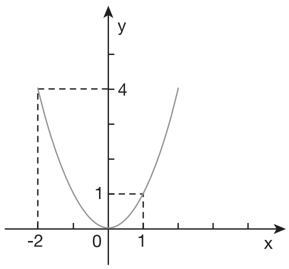
Les presentamos aquí distintas formas de expresar funciones: gráficos, tablas, fórmulas algebraicas y descripciones coloquiales, y algunas propiedades de las mismas. Para cada uno de los gráficos siguientes, encuentren, si es posible:

a. Las tablas, fórmulas algebraicas y descripciones coloquiales correspondientes a la misma función, considerándolas en su dominio de definición.

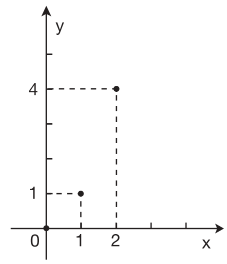
b. Las propiedades de las mismas.

Gráficos

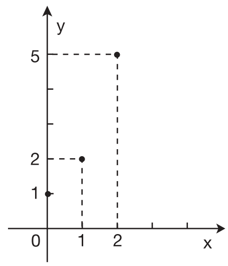
1



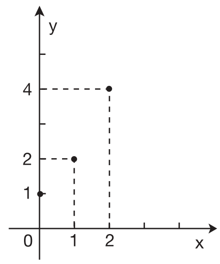
2



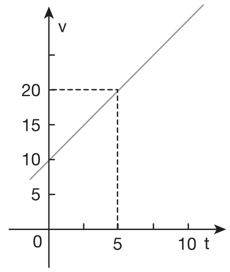
3



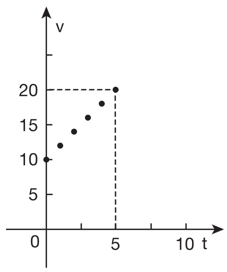
4



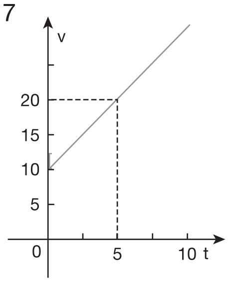
5



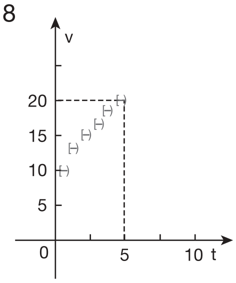
6



7



8



Tablas

1	
X	y
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64

2	
x	y
0	0
1	1
-1	1
2	4
$\sqrt{2}$	2
$-\sqrt{2}$	2
-2	4

3	
T	v
0	10
1	12
2	14
3	16

4	
T	v
0	10
0.5	11
1	12
1.5	13
2	14
2.5	15
3	16

Propiedades

1. Es creciente.
2. Es una función.
3. Es par (simétrica respecto del eje y).
4. Es impar (simétrica respecto del origen).
5. Es continua.
6. Es decreciente.

Fórmulas

1. $v = 10i + 2\ t$
2. $v = 2\ t$
3. $v = (1/2)\ 2\ t^2$
4. $y = x^2$
5. $y = 2^x$
6. $y = x^2 + 1$
7. $y = x^3$
8. $y = e^x$

Descripciones

1. Es una recta.
2. Es una semirrecta.
3. Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco y una recta fija llamada directriz.
4. Es una parábola.
5. Es una exponencial.
6. Son puntos sobre una parábola.

Para reflexionar

Discutan los criterios utilizados para asociar las distintas formas de expresión y las propiedades que cumplen las funciones presentadas.

ACTIVIDAD 2

En el contexto de un problema particular, la función que sirve para describirlo o resolverlo, muchas veces está definida sobre un conjunto de valores más restringido que el del dominio de la misma función aislada del contexto del problema.

a. Asocien cada uno de los problemas siguientes con alguna función de las presentadas en la actividad anterior.
b. Analicen, en los siguientes casos, cómo hay que modificar el dominio de la función elegida para que sea válido en el contexto del problema.

1. El alquiler de una herramienta de carpintería cuesta \$10 más \$2 por cada día. ¿Cuántos días podemos usarla si queremos gastar menos de \$20?

2. Un auto sale de Buenos Aires hacia Mar del Plata. En el momento en que el conductor empieza a mirar la velocidad, va a 10km/h. Si la aceleración es constante, de 2 km/h, ¿cuánto tardará en alcanzar una velocidad de 80 km/h?

3. Las amebas se reproducen, partiéndose en 2 cada minuto. Si comenzamos con una ameba en el instante 0, ¿cuántas amebas habrá a los 5 minutos?

Para investigar

- Encuentren un problema para cada uno de los gráficos que no tienen asociada una situación problemática. Analicen el dominio en el contexto del problema.
- Para cada una de las fórmulas que no tienen asociado un gráfico, tracen el gráfico correspondiente y analicen en cada caso si la fórmula corresponde o no a una función.

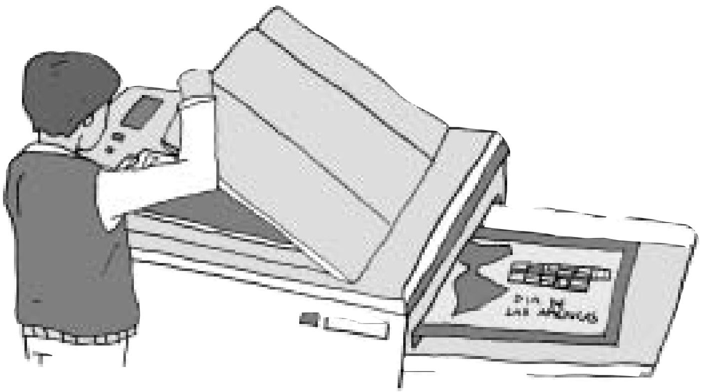
ACTIVIDAD 1

Matías recuerda una discusión mantenida en clase el año anterior, antes del debate abierto que organizaron para el Día de las Américas. Tenían que encargar los afiches para pegar en las paredes, e intentaban determinar cuál debía ser la ampliación que debían encargar de unas postales cuadradas, pequeñas pero muy adecuadas.

a. Expresen el crecimiento del área ocupada por el afiche cuando se encargan fotocopias ampliadas y realicen un gráfico que les permita encontrar rápidamente el valor del área para cualquier ampliación que deseen. (Recuerden que la ampliación al 20% por ejemplo, significa que el largo, el ancho, la diagonal, ... resultarán de una longitud mayor en un 20%).

b. Comparen el crecimiento del área del afiche y el crecimiento de su contorno, en relación con la ampliación del lado de la postal.

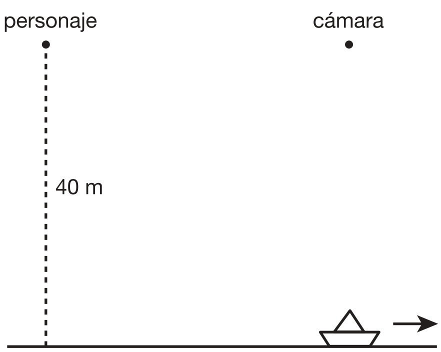
c. Expresen mediante fórmulas ambos crecimientos y realicen las gráficas cartesianas correspondientes. ¿Cómo se comportan? ¿En qué se parecen y en qué se diferencian?



ACTIVIDAD 2

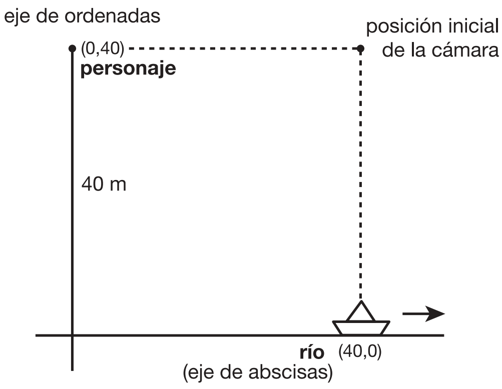
Un director de cine quiere rodar la última escena de la película del siguiente modo: un personaje inmóvil ve marchar un barco a lo largo de un río que corre en línea recta, y a 40 m de la persona.

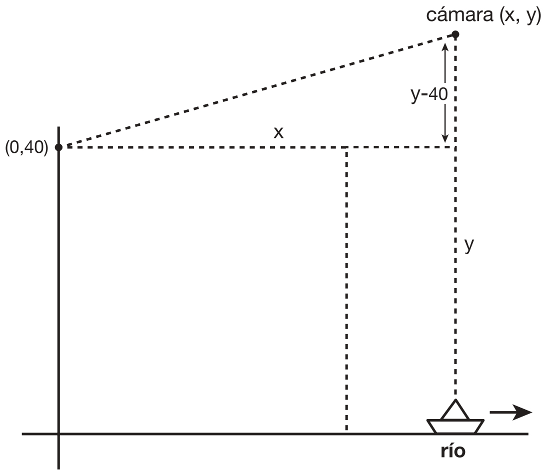
a. El director proyecta hacer un largo travelling, manteniendo igualmente enfocados al barco y al personaje, es decir teniendo siempre a ambos equidistantes de la cámara.



Dibujen aproximadamente la trayectoria

b. Para poder dibujar la trayectoria con precisión, se puede buscar su ecuación usando el siguiente sistema de referencia.





Encuentren la ecuación y dibujen la gráfica, destacando la parte que corresponde al problema.

c. Comparen la gráfica con la realizada en **a.**

d. Si se piensa en la trayectoria de la cámara como un conjunto de puntos ¿Qué condiciones verifican estos últimos? ¿A qué curva conocida pueden asociar la gráfica?

Reflexión

Las funciones consideradas en las actividades anteriores sólo tienen sentido para valores positivos de la variable independiente. ¿Por qué?

En estos casos, han representado “partes” de funciones cuadráticas.

Es posible construir gráficas “completas”, independizándose de los contextos en que han sido planteadas. Representen esas funciones y puntualicen semejanzas y diferencias entre ellas, analizando las gráficas.

Para investigar

En distintas disciplinas, es posible identificar fenómenos en los que algunas variables se relacionen mediante la función cuadrática.

Así por ejemplo en Física, Galileo descubrió que la expresión que relaciona la distancia d que recorre un cuerpo en caída libre en un tiempo t es cuadrática.

Averigüen cuál es dicha expresión y dibujen su gráfica.

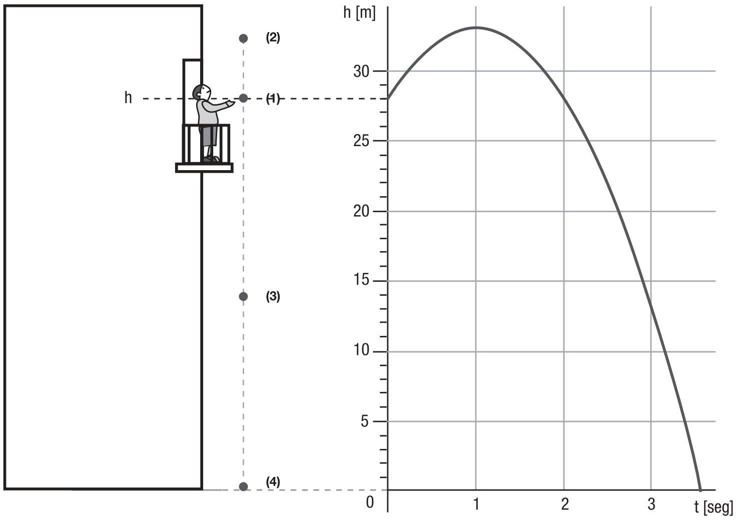
Busquen otros fenómenos que también puedan modelizarse con la función cuadrática.

ACTIVIDAD 1

Desde la ventana de su casa, Jorge arroja una piedra verticalmente hacia arriba. Sabemos, por lo aprendido en Física, que la función que describe la altura de la piedra (expresada en metros) en función del tiempo (expresado en segundos) es:

$h(\mathbf{t}) = -5\,\mathbf{t}^2 + 10\,\mathbf{t} + 28$

El siguiente es un esquema de la situación, acompañado por un gráfico de la función h(**t**):



a. ¿Para qué valores de t es válida la función h(t), es decir, representa la altura de la piedra?

b. ¿A qué altura se encuentra la ventana desde donde Jorge arrojó la piedra? ¿Qué valor de t permite calcular esta altura?

c. Indiquen en el gráfico los puntos correspondientes a las posiciones de la piedra marcadas del (1) al (4). Para cada una, indiquen la altura y el tiempo que tardó, desde que fue arrojada, en llegar a esa altura. Verifiquen que haya coherencia entre la información del gráfico y los valores correspondientes en la fórmula de h(t).

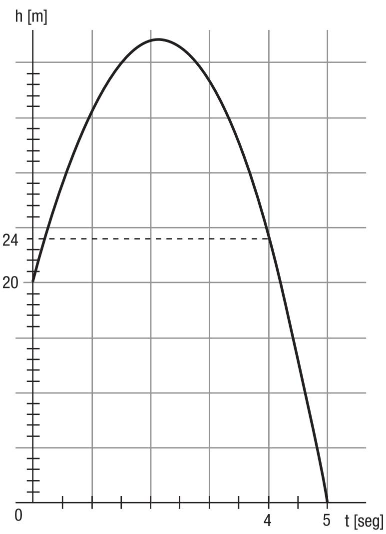
d. La velocidad de la piedra (expresada en m/seg) se puede determinar en cada instante por la función v(t) = 10 - 10 t, donde t es el tiempo en segundos, desde que se la arrojó. Grafiquen esta función, para el intervalo de tiempo desde que se arroja la piedra hasta que llega al piso. Tomen en cuenta el esquema anterior, y relacionen el signo de v y el sentido en que se mueve la piedra.

¿A qué velocidad llega la piedra al piso? Conviértanla a km/h para poder compararla con la velocidad que tendría un automóvil.

ACTIVIDAD 2

En el mismo instante en que Jorge arroja la piedra, su amigo Alberto que está en otra ventana del mismo edificio también arroja una piedra hacia arriba.

En el siguiente gráfico se representa la altura de esta segunda piedra en función del tiempo.



a. ¿A qué altura se encuentra Alberto?

b. Escriban la fórmula de la función cuadrática que expresa la altura de la piedra.

c. ¿Cuál de las dos piedras llega más alto?

d. ¿En algún momento las dos piedras están a la misma altura? Indiquen cómo lo pensaron.

Para reflexionar

- ¿Qué relación hay entre las raíces de la función $h(t) = -2t^2 + 10t + 28$ y la situación descripta en el primer problema? ¿Y entre las raíces y el gráfico de la función?
- ¿Qué datos relacionados con la situación permiten obtener las coordenadas del vértice de la parábola en cada problema?
- ¿Qué otros datos relacionados con las situaciones se pueden obtener de los gráficos? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 3

En Economía se suele definir la "función demanda" de un producto como la cantidad de unidades compradas de ese producto en función del precio unitario del mismo.

El ingreso que se obtiene al vender un producto puede calcularse como el precio del total de las unidades demandadas.

Una empresa ha analizado la venta de uno de sus productos y llegó a las siguientes conclusiones:

- si el precio unitario de su producto se fijara en $1, la cantidad de unidades demandadas sería 1450, y
- por cada peso que se aumentara el precio unitario, se demandarían 50 unidades menos.

a. Expresen la función demanda y el ingreso en función del precio.

b. ¿Para qué valores del precio son válidas las expresiones?

c. ¿Qué tipo de funciones obtienen?

d. Hagan un gráfico aproximado de cada una.

e. ¿Cuál es el precio al que conviene vender el producto para tener el ingreso máximo?

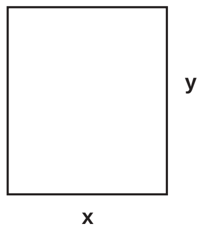
Para investigar

Dibujen un rectángulo de 16 cm de perímetro. Calculen su área.

Repitan lo anterior, para un rectángulo distinto, tratando de conseguir que el área aumente. Traten de conseguir otro rectángulo de área mayor a la de los dos anteriores. Expliquen cómo lo pensaron.

Consideren ahora todos los rectángulos de 20 cm de perímetro y expresen el área de esos rectángulos en función de uno de sus lados.

Para poder comparar con los resultados de sus compañeros, unifiquen la notación, al referirse a la base y a la altura, de la siguiente forma:



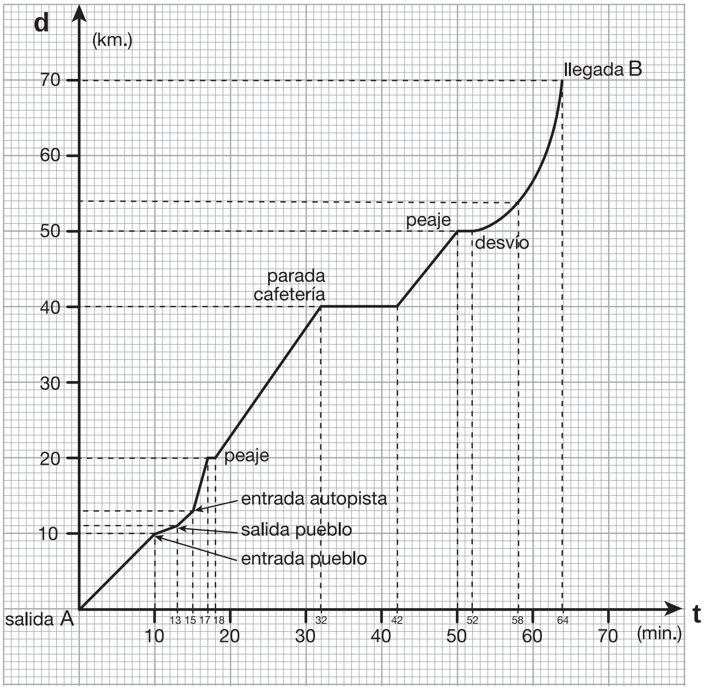
- ¿Para qué dimensiones del rectángulo el área es máxima?

  Tomen otros valores para el perímetro, y realicen un estudio similar.
- ¿Qué conclusiones se pueden extraer acerca de los rectángulos de perímetro fijo y área máxima?

ACTIVIDAD 1

Viajar en auto

El gráfico muestra la trayectoria recorrida por un coche desde una ciudad A hasta otra ciudad B. La distancia viene dada en km. Esta distancia, d, es función del tiempo, t, dado en minutos.



a. ¿Qué distancia total ha recorrido el coche durante este viaje, y cuál ha sido la duración total del viaje?

b. ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche durante el viaje?

c. ¿Cuál ha sido la velocidad media que ha llevado en la autopista? ¿Y si se descuenta el tiempo que estuvo parado?

d. ¿Cuál ha sido la velocidad media entre el instante que marca 52 minutos y el instante que marca 64 minutos?

e. Indiquen un intervalo en el que la velocidad media para cualquier intervalo contenido en él sea la misma. Indiquen otro intervalo en el que no ocurra lo mismo.

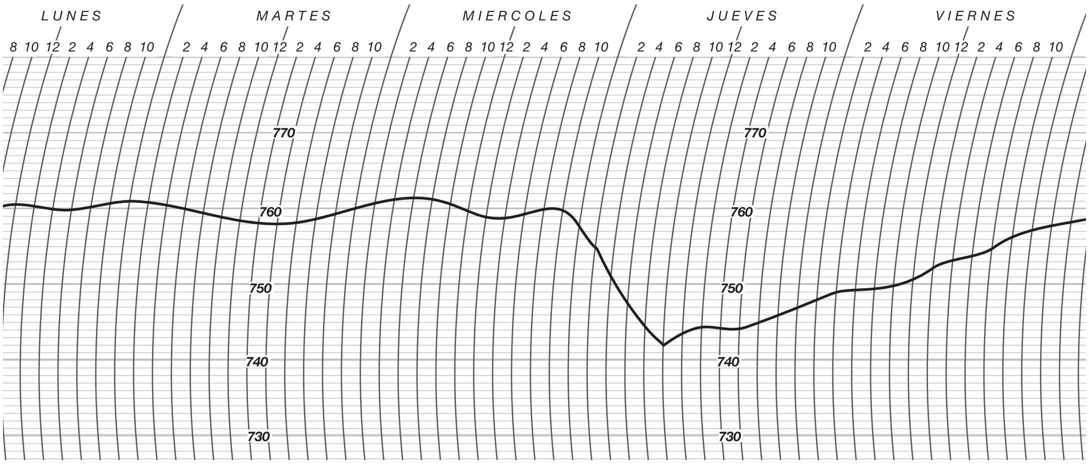
ACTIVIDAD 2

Predicción del tiempo

Para predecir el buen o mal tiempo hay que conocer las variaciones bruscas de la presión atmosférica; es decir que, no sólo interesa la variación de la presión, sino en cuánto tiempo ha tenido lugar esa variación.

La medida de la variación de la presión atmosférica entre dos instantes no es más que la diferencia entre las lecturas de la presión hechas en un instante y en otro.

La gráfica muestra la presión atmosférica medida en una estación meteorológica durante un intervalo de 5 días y medio.



Para predecir cambios o estabilidad en el tiempo, se tienen en cuenta los datos que se enumeran a continuación.

- Un descenso de presión atmosférica que dure más de tres horas y que sea en media superior a 1,3 milímetros por hora anuncia mal tiempo, y si ya hace mal tiempo, lo continuará haciendo.
- Un aumento de presión atmosférica que dure más de tres horas y que sea en media superior a 1,3 milímetros por hora anuncia buen tiempo y si ya hace buen tiempo, lo continuará haciendo.
- Una presión estable anuncia cambio de tiempo.

Analicen qué pronóstico puede hacer el observatorio a las 6 de la mañana del miércoles, del jueves y del viernes.

Reflexión

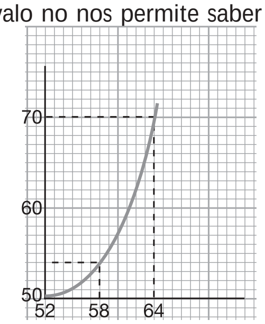
Para resolver las actividades anteriores, han analizado la variación de una variable para una cierta variación de otra y buscaron identificar la tasa de variación de la función en distintos intervalos.

Una expresión general de la tasa de variación es: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

¿Cómo se puede interpretar para cada problema la tasa de variación?

Para investigar

En muchos casos resultan insuficientes los datos que proporcionan estudios como los anteriores. Por ejemplo, en el caso del automóvil que va a la ciudad B, la tasa de variación en un intervalo no nos permite saber con qué velocidad va el coche cuando se cumple exactamente el minuto 58.



Para averiguarla, hay que ir considerando la velocidad media en intervalos cada vez más pequeños tanto entre 57 y 58 como entre 58 y 59. Esas velocidades se van acercando a un mismo número, la velocidad instantánea o tasa de variación local de la función en un punto.

- Investiguen trabajando con la calculadora cuál es, aproximadamente, la velocidad instantánea del auto cuando sale del último peaje.
- ¿Cómo se puede interpretar la tasa de variación local en la segunda actividad?

ACTIVIDAD 1

a. En el gráfico se representan:

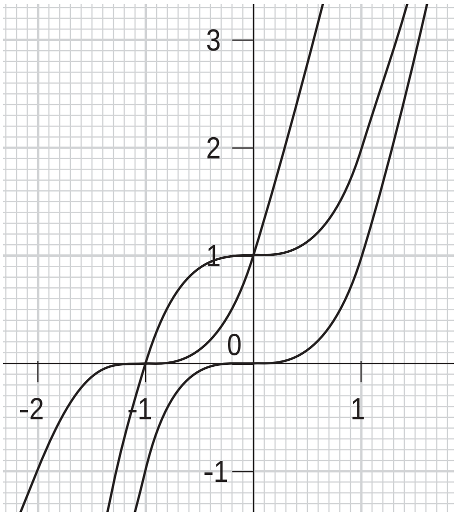
$A(x) = x^3$

$B(x) = (x+1)^3$

$C(x) = x^3 + 1$

Indiquen cuál es el gráfico correspondiente a cada polinomio.

Expresados como resultado de aplicar traslaciones, ¿cómo se obtienen los gráficos de B(x) y C(x) a partir del gráfico de A(x)?

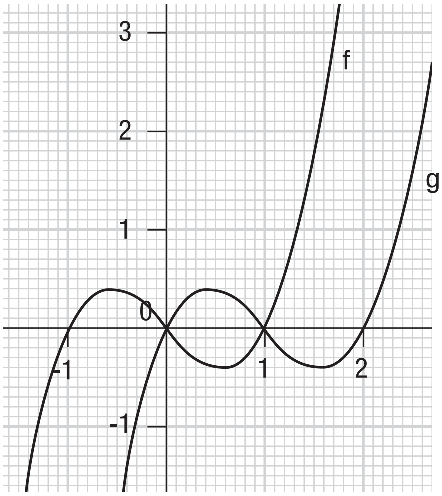


b. En el siguiente gráfico se representan los polinomios:

$f(x) = x^3 - x$

$g(x)$

Expresen una fórmula para g(x), observando que su gráfico es una traslación del gráfico de f.



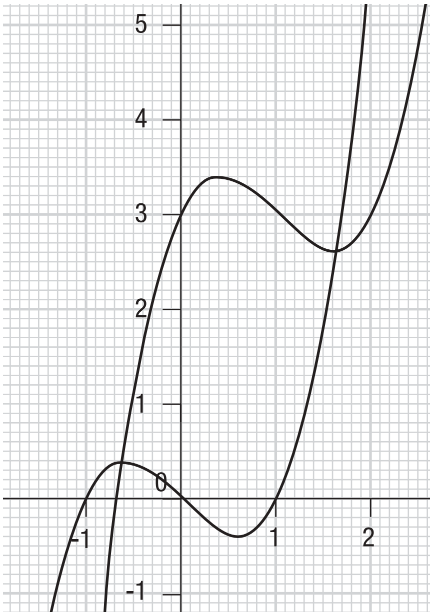
c. Aquí representamos gráficamente:

$f(x)$

$h(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 3$

¿A qué función pertenece cada gráfico?

¿Qué relación tiene el gráfico de h(x) con el de f(x)?



Para reflexionar

- ¿Cómo se relacionan los gráficos de x^3 y $(x - a)^3$? (para valores positivos y negativos de a).
- ¿Cómo se relacionan los gráficos de x^3 y $x^3 + b$?
- Ustedes ya conocen las funciones cuadráticas, que son polinomios de grado 2. Analicen si las conclusiones anteriores son válidas para ellas.

ACTIVIDAD 2

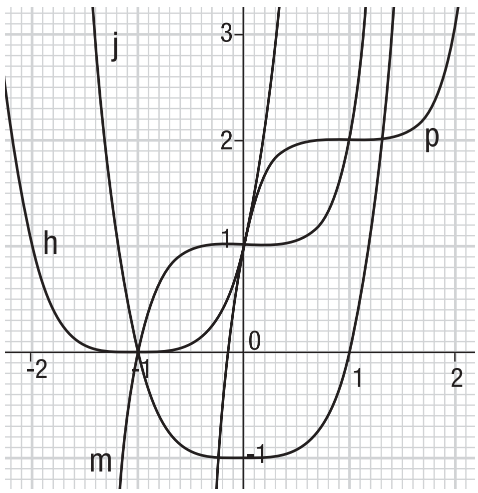
a. Los siguientes gráficos se han obtenido desplazando una cantidad entera de unidades, horizontal o verticalmente, los gráficos de:

$f(x) = x^4$

$g(x) = x^5$

Den una expresión algebraica de cada función, e indiquen a qué gráfico corresponde.

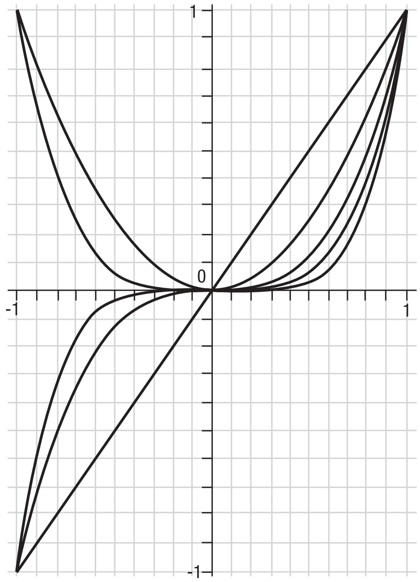
Expliquen cómo las reconocieron.

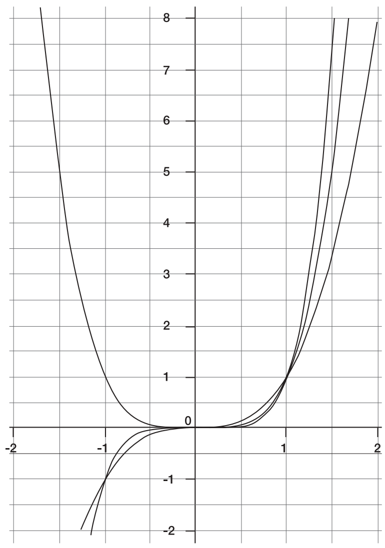


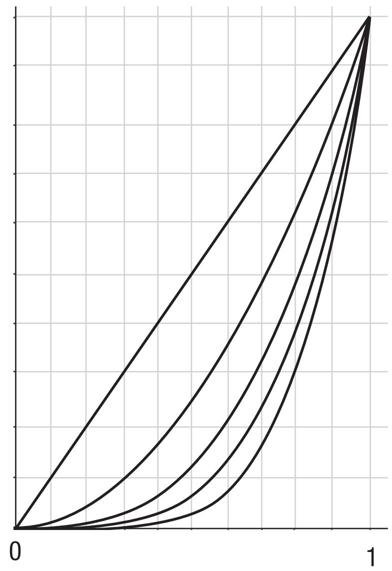
b. Identifiquen en cada uno de los siguientes gráficos algunas o todas las funciones:

$y = x$ $y = x^2$ $y = x^3$ $y = x^4$ $y = x^5$

Indiquen en cada caso qué datos del gráfico usaron para distinguirlas.





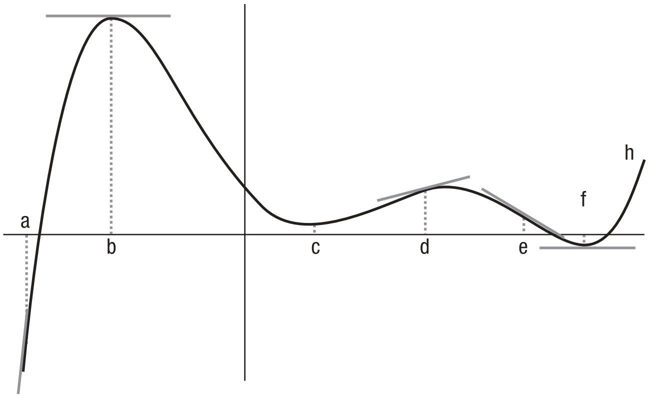


Para investigar

Ya conocen formas de calcular la expresión desarrollada del binomio cuadrado, es decir $(x+a)^2$, y del binomio cubo, es decir $(x+a)^3$. A la expresión $(x+a)^n$ se la llama binomio de Newton investiguen cómo se calcula para $n \geq 4$.

ACTIVIDAD 1

En el siguiente gráfico se representan una función y parte de las rectas tangentes al gráfico de dicha función en algunos puntos.



a. ¿En qué puntos la recta tangente tiene pendiente positiva? ¿En cuáles es negativa? ¿En algún caso vale 0?

b. En el intervalo (a, b) la función representada es creciente, tracen la tangente al gráfico de la función en varios puntos correspondientes a ese intervalo ¿Qué signo tiene la pendiente de la tangente en esos casos?

c. En el intervalo (b, c) la función es decreciente. ¿Cuál es el signo de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos correspondientes a ese intervalo?

d. Caractericen a la función en x = b. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente?

ACTIVIDAD 2

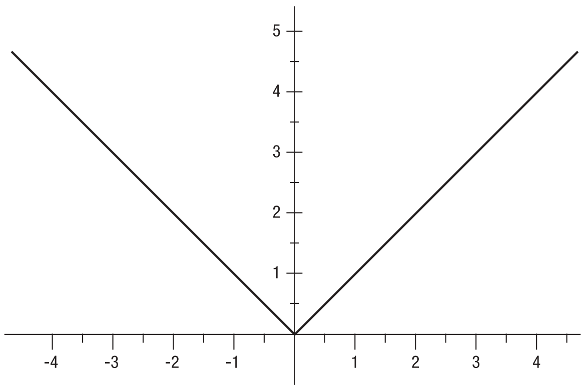
Grafiquen la función $f(x) = x^3$; calculen su derivada en x = 0. ¿Tiene la función un extremo (es decir, un máximo o un mínimo) en x = 0? ¿Cómo es la recta tangente al gráfico de f en el punto (0, 0)?

ACTIVIDAD 3

En el siguiente gráfico se representa la función “módulo”, que se puede definir como:

$y = x$ si $x \geq 0$

$y = -x$ si $x < 0$



a. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente al gráfico de f para los puntos con coordenada x < 0? ¿Y para x > 0?

b. ¿Se puede trazar la tangente a la gráfica de la función en x = 0? ¿Es derivable en x = 0?

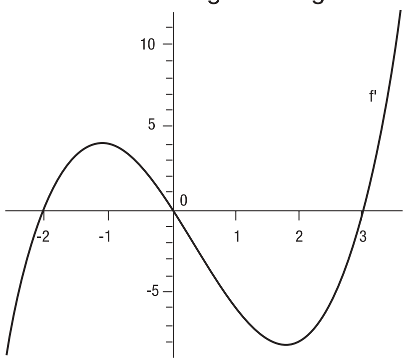
c. ¿Tiene algún extremo esta función?

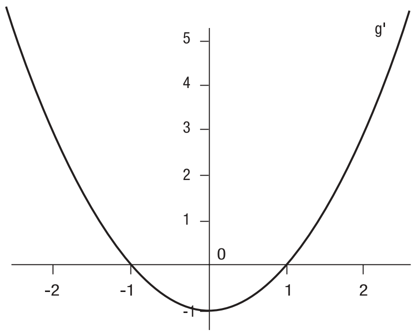
Para reflexionar

- ¿Qué relación hay entre el valor de la derivada de una función en x = a y la recta tangente al gráfico de la función en el punto (a, f(a))?
- Si la función es derivable en un punto, ¿cuánto debe valer la derivada en ese punto para que haya un extremo?
- Si la derivada en un punto es 0, ¿se puede asegurar que la función tiene un extremo en ese punto?
- Si la función no es derivable en un punto, ¿puede tener un extremo en ese punto?
- ¿Qué condición sobre la derivada permite decidir si la función es creciente o decreciente?

ACTIVIDAD 4

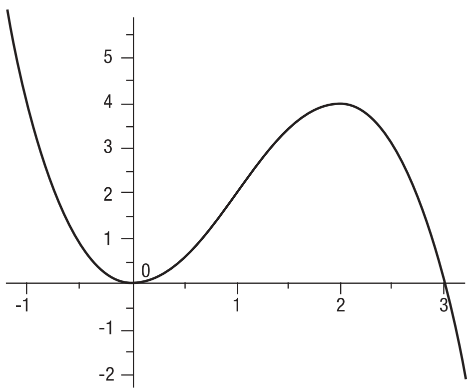
a. En cada uno de los siguientes gráficos se representa la derivada de una función.

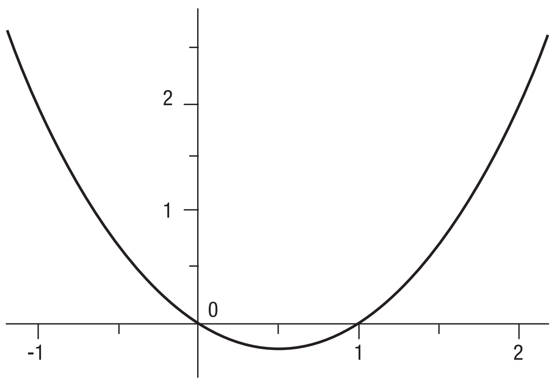




1. Indiquen los intervalos de positividad y de negatividad de cada derivada.
2. Analicen cómo se relacionan con los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada función.
3. Dibujen para cada una de ellas un gráfico posible de la función.
4. Comparen con sus compañeros los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los intervalos de positividad y de negatividad que tiene la función que dibujaron. ¿Deben coincidir?

b. Si f'(x) = x (1 – x), ¿alguna de las siguientes puede ser la gráfica de f? ¿Por qué?





Para investigar

a. Averigüen algún ejemplo de las aplicaciones que tiene la derivada en problemas estudiados en el campo de la Física.

b. Busquen en textos de matemática qué es o cómo se obtiene la derivada segunda. ¿Qué interpretación gráfica se le puede dar?

ACTIVIDAD 1

Cuando en las novelas de ciencia ficción se realizan viajes interplanetarios o interestelares, no suelen mencionarse "pequeños detalles", como la alimentación de los astronautas. Pero Venus, el planeta más cercano a la Tierra, está cien veces mas lejos que la Luna, y Neptuno está 11.500 veces más lejos que la Luna. Se comprende entonces que en los viajes interplanetarios que han de durar largos meses e incluso años, el problema de alimentación de los tripulantes es serio. El almacenamiento de los alimentos en su estado habitual supondría una enorme sobrecarga para la astronave.

Por ello, los científicos tratan de poner a punto sistemas cíclicos en los que los desperdicios puedan ser utilizados. Las algas, como las otras plantas, absorben dióxido de carbono y proporcionan oxígeno. Además, pueden utilizar como alimento los productos de desecho de los astronautas y servir ellas como alimento.

Cierta clase de alga, llamada clorella, se reproduce duplicando su número en dos horas y media. Al cabo de otras dos horas y media vuelve a duplicar su número, y así sucesivamente.

a. Encuentren la expresión que relacione el número de kilos de clorella (suponiendo que inicialmente se cuenta con 1 kg) en función del período de reproducción y representen gráficamente.

b. Este crecimiento tan rápido crearía algunas dificultades en la astronave, porque, transcurridos 40 períodos, es decir, poco más de cuatro días, habría 2^{40} kilos de algas (¡más de un millón de millones de kilos!).

Por otra parte, es natural que el crecimiento no siga ese ritmo porque las algas van muriendo o siendo consumidas y, además, ¡no habría suficientes productos de desecho para alimentar a tantas algas ni sitio en la astronave por grande que esta fuera!

Aislándonos de estas cuestiones, ¿hasta cuánto podría aumentar la cantidad de algas con el transcurso del tiempo?

ACTIVIDAD 2

Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda balanceada tantas veces hasta que salga cara, en cuyo caso ya no se lanza más.

a. Encuentren la expresión que relacione la probabilidad de que "salga cara" en función del número de veces que hay que arrojar la moneda y representen gráficamente.

b. ¿Puede ocurrir que lanzando 100.000 veces la moneda nunca salga cara?

c. ¿Puede ocurrir que la probabilidad buscada sea tan próxima a cero como queramos? ¿En algún caso podrá ser cero?

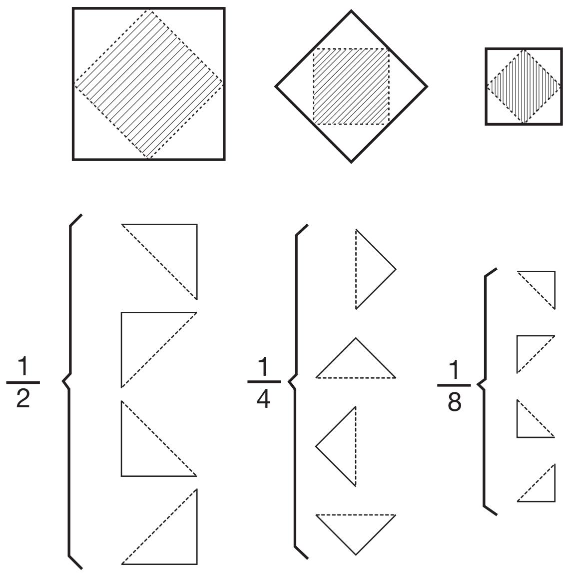
Reflexión

Las funciones que han utilizado para resolver las actividades anteriores tienen características especiales: se trata de funciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuyo conjunto imagen es un subconjunto de los números reales. Se las denomina sucesiones.

Habrán observado que, en la primera actividad, basta con aumentar n para que los valores de f(n) crezcan enormemente. ¿Sucede lo mismo en la segunda?

ACTIVIDAD 3

Tomen un cuadrado de papel de área 1 y corten todas las esquinas como se indica en la figura. Con el cuadrado que queda realicen una operación similar, y así sucesivamente.



a. Construyan una tabla que represente el área del cuadrado de papel que queda sobre la mesa en función del número de veces que se han realizado los cortes

b. Encuentren la expresión general de esa relación y representen gráficamente.

c. ¿Se trata de una sucesión?.¿Por qué?

d. ¿Podremos tener sobre la mesa todo el papel, es decir, una cantidad de papel de área 1?

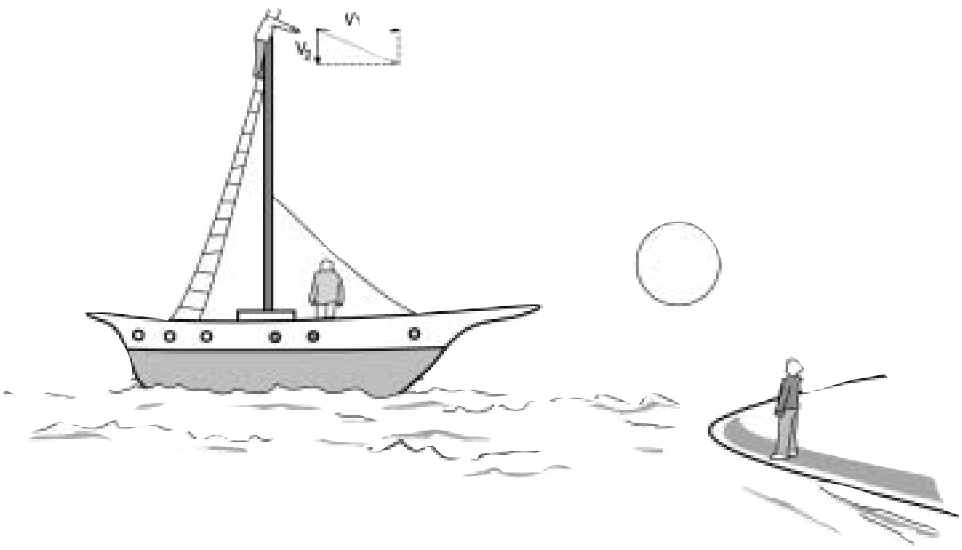
e. ¿Podremos tener en la mano tan poco papel como queramos?

f. ¿Cuál es el comportamiento de f(n) al aumentar n?

ACTIVIDAD 1

Copérnico sostenía que la Tierra giraba sobre su eje y alrededor del Sol. Sus oponentes rebatían esta tesis argumentando que, en ese caso, si se arrojaba una piedra desde lo alto de una torre, esta debería caer hacia el oeste y no al pie de la torre como prueba la experiencia. Galileo, que defendía la teoría copernicana, argumentaba que la piedra se hallaba sometida a dos movimientos simultáneos: una velocidad horizontal, debida al movimiento de la Tierra, y otra vertical, debida a la fuerza de gravedad.

Para probar la teoría de Galileo, Pierre Gassendi realizó en 1640, cerca de Marsella, la experiencia que se detalla a continuación. Lanzó una piedra desde lo alto del mástil de un barco que se desplazaba con movimiento uniforme para comprobar cómo caía. El siguiente dibujo representa el barco y la piedra vista desde la orilla, en la primera posición al ser arrojada.



a. ¿Cuál les parece que es la forma de la trayectoria de la piedra vista por un observador situado en el mismo barco?

b. ¿Cuál es la forma de la trayectoria que ve un observador desde la orilla?

c. ¿Por qué se han utilizado vectores para representar velocidades? ¿Qué velocidad está representada en cada vector?

d. Analicen si los vectores horizontal y vertical se modifican o no en distintas posiciones de la piedra.

e. Encuentren el vector suma para dos posiciones distintas. ¿Cómo se modifica el vector suma?

f. ¿Qué significa la modificación del vector a medida que la piedra cae?

Para reflexionar

- Un compañero dice que el observador situado en el barco ve caer la piedra verticalmente, pero el que está en tierra no ve una trayectoria recta sino de forma curva. ¿Les parece que tiene razón? ¿Por qué?
- ¿En qué casos una magnitud se puede representar por vectores y en qué casos no? Busquen ejemplos de ambos tipos y expliquen por qué los eligieron.

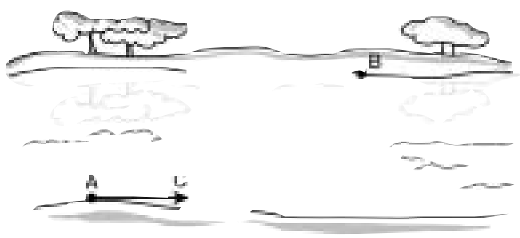
ACTIVIDAD 2

Diego discute con Marina cómo cruzar un río desde el punto indicado con A en el dibujo hasta el indicado con B, sabiendo que la velocidad de la corriente con dirección AC es de 3 km/h. Diego sabe que finalmente la dirección de su velocidad en la trayectoria no resultará la misma dirección de la velocidad con la que nade.

Él piensa que si nada en forma perpendicular, puede calcular a qué velocidad tiene que nadar para que la velocidad resultante sea de 5 km/h. Marina le dice que no le conviene nadar perpendicularmente a la velocidad de la corriente, sino formando un ángulo de 60º con el borde del río y orientado hacia B, porque de ese modo, para la misma velocidad resultante su velocidad de nado puede ser menor.

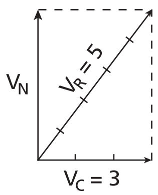
a. ¿Creen que Marina tiene razón? ¿Por qué?

b. Dos alumnos encuentran diferentes procedimientos para resolver este problema. Analícenlos y justifiquen si les parecen o no correctos.



Alumno A:

Con ángulo de 90°



Para $V_{nado} \perp V_{corriente}$

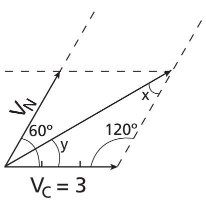
$V_{resultante} = 5$ km/h

$V_{corriente} = 3$ km/h

$V_{nado}^2 = 5^2 - 3^2$ (Por Pitágoras)

$V_{nado} = 4$ km/h

Con ángulo de 60°



Por el teorema del seno

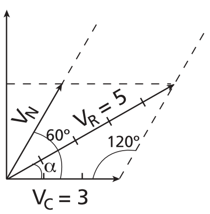
$$\frac{\text{Sen } 120º}{V_R} - \frac{\text{Sen } x}{V_C} \Rightarrow \text{sen } x = \frac{v_C}{v_R}\text{ Sen } 120º \text{ ; sen } x = 3/5 \,.\, \sqrt{3}/2$$

$$\text{sen } x = 0{,}51 \text{ ; } x \cong 30°$$

$$\frac{\text{Sen } 120º}{V_R} - \frac{\text{Sen } y}{V_N} \Rightarrow V_N = V_R \,.\, \frac{\text{Sen } 30º}{\text{Sen } 120º} \Rightarrow V_N = V_C$$

Alumno B:

Con ángulo de 60° (Por el Teorema del Seno se determina el valor del ángulo)



$V_C = 3\,\hat{i}$

$V_R = 5 \cos 30°\,\hat{i} + 5 \text{ sen } 30°\,\hat{j}$

$V_N = V_R - V_C$

$V_N = (5 \cos 30° - 3)\,\hat{i} + 5 \text{ sen } 30°\,\hat{j}$

$V_N = (5.\sqrt{3} / 2)\,\hat{i} + 5 / 2\,\hat{j}$

Para investigar

- Busquen la relación que hay entre la ley de independencia de los movimientos y los problemas de las actividades anteriores.
- Propongan otros ejemplos que puedan interpretarse mediante esta ley.

Problemas con las compras

ACTIVIDAD 1

Un grupo de amigos decidió pasar un día en el parque. A la tarde, Analía fue a un quiosco donde compró 2 alfajores y 1 latita de gaseosa y pagó $ 1,80 . Carlos le preguntó a Analía cuánto pagó cada cosa y ella respondió que no sabía. Mientras hablaban, Beatriz también fue a comprar al mismo quiosco, pero ella compró 3 alfajores de los mismos que compró Analía, y 2 gaseosas también de las mismas; pagó $ 3,10. Cuando volvió Beatriz (que tampoco preguntó los precios de cada cosa) entre los tres amigos intentaron determinar los precios desconocidos.

a. ¿Pueden ustedes averiguar los precios? Si pueden, expliquen cómo lo hicieron; si no pueden, expliquen también por qué.

b. Más tarde, Darío compró 6 alfajores y 3 gaseosas y pagó $4,20. Cuando regresó, Carlos dedujo en seguida que Darío había comprado en otro quiosco.

¿Cómo se dio cuenta?

c. Finalmente, Elena compró 1 alfajor y una gaseosa y Carlos, sin preguntar cuánto pagó, creyó que ya podía calcular el precio de cada cosa. ¿Es cierto? Si contestan que sí, calcúlenlo; si contestan que no, expliquen por qué.

d. Analía le hizo notar a Elena que había dos quioscos que tenían precio distinto. Entonces, Elena aclaró que ella había comprado en el lugar en que la gaseosa costaba menos. ¿Cambia la respuesta anterior con este dato? ¿Por qué?

e. En otro quiosco, la gaseosa costaba $1 y cada alfajor, 50 centavos y Carlos decidió comprar allí. ¿ Dónde le convenía más comprar? Expliquen por qué.

Para reflexionar

- ¿Podía Carlos calcular el precio de cada producto después de hablar con Analía, pero antes de que llegara Beatriz? ¿Por qué?
- A partir de lo que dijo Analía se podía calcular el gasto de 4 alfajores y 2 gaseosas. ¿Cómo se puede hacer? ¿Se puede calcular también el precio de 6 alfajores y 2 gaseosas? Si contestan que sí, expliquen cómo, y si contestan que no, expliquen por qué.
- Si Beatriz, en cambio, compraba 4 alfajores y 2 gaseosas a $3,60, ¿tendrían datos suficientes para calcular el precio de cada artículo? Expliquen por qué.
- ¿Pueden calcular cuánto le costó cada alfajor y cada gaseosa a Darío? Si piensan que sí, expliquen cómo, y si piensan que no, expliquen por qué.
- Para cada uno de los cinco amigos, escriban una ecuación que relacione qué compró y cuánto gastó, tomando como variables los precios de cada producto.
- ¿Qué sucede si resuelven el sistema formado por las tres ecuaciones correspondientes a las compras de Analía, Beatriz y Darío? ¿Pueden relacionarlo con la observación que hizo Carlos?
- ¿Cuántas ecuaciones son necesarias para averiguar dos incógnitas? Justifiquen su respuesta sobre la base de lo que ya vimos.

ACTIVIDAD 2

En Economía se llama “recta de balance” al conjunto de las combinaciones máximas de dos bienes que el consumidor puede comprar con una cantidad fija de dinero (se supone que se gasta todo y que el precio de cada bien permanece fijo en el período estudiado). Veamos un ejemplo. Una persona separa $60 para gastar durante el mes en carne de vaca o de pollo. El kilogramo de carne de vaca cuesta \$2 y el de pollo, \$4. Gastando todo el dinero que separó, podría comprar 15 kg. de pollo durante el mes; si no, podría comprar 6 kg. de carne de vaca pero entonces, sólo podría comprar 12 kg. de pollo.

a. Encuentren por lo menos otras cuatro combinaciones más, usando todo el dinero.

b. Ubiquen en un gráfico los valores que obtuvieron. Para poder comparar con los gráficos de sus compañeros, ubiquen la cantidad de carne de vaca en el eje de abscisas y la de pollo, en el de ordenadas.

c. A partir de la representación gráfica, ¿pueden anticipar dónde se graficarían otras combinaciones posibles? ¿Cuántas soluciones hay?

d. Escriban una ecuación que relacione ambas cantidades comparadas con los \$60 disponibles. Ésa es la expresión que se llama "recta de balance". ¿Es una recta, en este caso? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?

e. ¿En qué cambiaría la situación para otra persona que tuviera \$80 para gastar en esos productos? ¿Cómo se refleja el cambio en el gráfico? (Supongan que los precios se mantienen constantes).

ACTIVIDAD 3

Representen gráficamente la ecuación $3x - 2y = a$ para algún valor de a que elijan.

a. En el gráfico, ¿qué representa al conjunto solución?

b. Elijan otro valor de a y representen la nueva recta en el mismo gráfico. Si las soluciones del sistema formado por ambas ecuaciones están representadas por los puntos de intersección de las rectas en el gráfico, ¿cuántas soluciones tiene el sistema? Resuelvan el sistema analíticamente y comprueben si los resultados coinciden.

c. ¿Pueden elegir un nuevo valor para a y plantear otra ecuación de manera que resulte un sistema cuya única solución sea el punto (1,0)? Analicen gráficamente la respuesta. ¿Cuántas rectas pasan por el punto (1,0)? ¿Es única la respuesta en el caso anterior?

Para investigar

Analicen qué cantidad de soluciones puede tener un sistema con dos incógnitas, según la cantidad de ecuaciones que lo compongan. Investiguen por lo menos los casos con solo una, con dos, y con tres ecuaciones.

Busquen relaciones entre las distintas posibilidades que encontraron y los gráficos correspondientes a las ecuaciones en cada sistema.

Intenten enunciar problemas que se relacionen con las distintas situaciones planteadas.

ACTIVIDAD 1

Una persona deposita en un banco $1000 en un plazo fijo que paga el 0,4 % de interés mensual.

a. Al terminar el mes, ¿cuánto ganó de intereses? Si retira el monto, es decir, el dinero depositado inicialmente más los intereses ganados, ¿cuánto dinero retira?

b. Si resuelve depositar por un mes más el dinero y los intereses ganados, ¿cuál será el monto obtenido al cabo del segundo mes?

c. Expliquen cómo obtuvieron el monto correspondiente a cada mes.

d. Si a fin de cada mes deposita el total acumulado, ¿cuál será el monto si retira el dinero a los n meses? Intenten encontrar una fórmula en la cual sólo haya que reemplazar n para tener el monto acumulado.

e. Otra persona deposita, en ese mismo banco, $2000. Analicen cómo se modifica la respuesta a cada una de las preguntas anteriores en ese caso.

f. Si la primera persona depositara el dinero en una cuenta que le ofrece un 0,08% anual, ¿cómo se modificaría la respuesta a cada una de las cuatro primeras preguntas en este caso?

g. Discutan con algunos de sus compañeros las respuestas a las preguntas anteriores.

h. A la entrada del banco, a la segunda persona le dieron un folleto en el que decía que otra entidad daba el 5% anual a los ahorristas que dejaran el dinero por un año. Esta nueva opción, ¿le conviene más o no? Expliquen por qué.

Para reflexionar

- ¿Hay proporcionalidad entre alguno de estos pares de variables (dejando en cada caso fijas todas las demás no mencionadas:capital inicial y monto; monto e interés mensual; interés obtenido en un mes y porcentaje [o tasa] de interés mensual; monto y tiempo?

ACTIVIDAD 2

Vamos analizar el problema del crecimiento de una población. En general, interesa estimar cómo varía el número de habitantes de un determinado lugar en función del tiempo. Esta variación en el número de habitantes se puede calcular a partir de los resultados de los censos de población y se conoce como la tasa de crecimiento (o decrecimiento) de la población.

En un pueblo de 1500 habitantes la tasa de crecimiento es del 4 % anual.

a. ¿Cuántos habitantes tendrá el pueblo dentro de un año? ¿Y dentro de dos años? ¿Y dentro de un año y medio? Expliquen en cada caso cómo hicieron para calcularlo.

b. Indiquen la función que les permite calcular el número de personas que habitará dicho pueblo al cabo de x años. Representen gráficamente esta función.

c. Evalúen la función que propusieron en 1, en 1,5 y en 2. ¿Hay coincidencia con los valores que obtuvieron en la parte a)? ¿Debería haberla?

ACTIVIDAD 3

Las sustancias radiactivas se desintegran a través del tiempo, transfomándose en otra sustancia. La rapidez con que se desintegran se mide mediante su “período de semidesintegración”, que es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de su masa inicial.

Tomando como unidad de tiempo dicho período, la función que indica la cantidad de masa de una sustancia en función del tiempo es $M(t) = (0,5)^t$ [1].

Por ejemplo, para el plutonio 241, el período de semidesintegración es de 13 años, y para el plutonio 239, de 24.000 años. Una regla empírica establece que estos desechos radiactivos deben ser aislados por un período de 10 a 20 veces su período de desintegración.

a. Hagan un gráfico aproximado de la función M(t).

b. Calculen para cada uno de los ejemplos, cuánto tiempo como mínimo tendrían que permanecer aislados los desechos radiactivos, y qué proporción de la masa inicial habrá en ese momento.

ACTIVIDAD 4

Si un monto de dinero se deposita en una cuenta a una tasa de interés simple, y se pacta que los intereses que se obtienen en cada período no se depositan, y se cobran al final de la operación,

a. ¿cuánto dinero se obtiene si se depositan $1000 al 0,4 % mensual simple durante un año?

b. Obtengan la función que les permite calcular el monto en función del tiempo. ¿Es creciente?

c. Comparen su crecimiento con el de la función obtenida en la primera situación.

Para investigar

a. En un pueblo se pudo establecer que el crecimiento anual de la población es del 4,5 %. Si actualmente tiene 2500 habitantes, ¿cuántos tendrá dentro de 5 años?

Si se mantiene esta tasa de crecimiento, ¿en cuánto tiempo el pueblo contará con 4000 habitantes?

b. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital al 1,5 % mensual compuesto? ¿Es necesario conocer el capital inicial? ¿Por qué?

[1] La función está “normalizada”: la unidad de tiempo es el período de semidesintegración; si se quiere comparar la cantidad de masa de dos sustancias distintas, no es “visible” la diferencia de este modo; para eso se la expresa como $M(t) = M_0 \cdot e^{k.t}$, por ejemplo, donde M_0 es la masa inicial, y k se relaciona con dicho período.

ACTIVIDAD 1

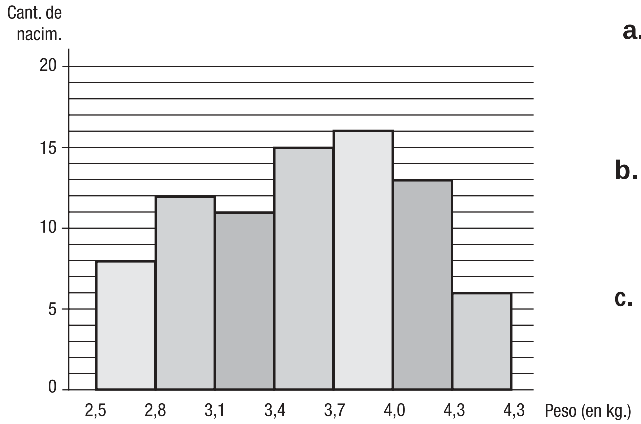
Los médicos saben que si un bebé recién nacido pesa 500 g menos de la media de los pesos de los recién nacidos en una región, deben tomarse precauciones especiales en su cuidado.

Para determinar cuál es la media del peso de los recién nacidos en un determinado lugar, durante dos meses se recopilaron los siguientes datos (los datos están en kilogramos).

2,56	2,87	3,11	3,45	3,85	4,25	4,23	2,83
3,12	3,45	4,25	2,75	2,93	3,25	3,65	3,72
4,05	4,55	3,05	3,33	3,47	2,63	3,02	3,33
3,56	3,96	4,23	4,37	2,96	3,14	3,68	2,57
2,31	3,25	3,45	3,72	4,12	4,52	2,87	3,71
3,59	2,59	2,85	3,21	3,41	3,85	4,15	4,45
4,01	3,79	3,49	2,61	2,97	3,39	3,47	3,71
4,05	3,99	4,33	3,88	3,60	2,65	2,95	3,12
3,69	3,89	4,22	4,33	4,14	3,83	3,55	2,70
3,05	3,14	3,51	3,90	4,29	3,78	4,28	3,97
3,71	2,83						

Para analizarlos, un grupo de investigadores decidió agruparlos en intervalos y construir un histograma. Comenzó en 2,5 kg y consideró intervalos de 0,3 kg. de amplitud [1].

Obtuvo:

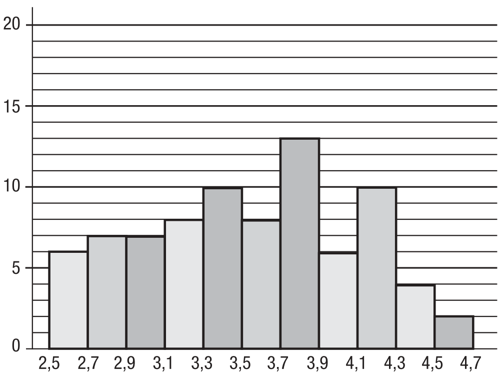


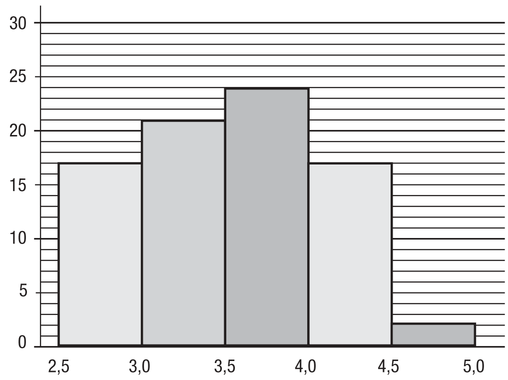
a. Calculen la media a partir del histograma.

Pista: tomen como peso representativo de cada intervalo su punto medio, y supongan que el peso de todos los nacimientos correspondientes a ese intervalo es igual al peso representativo.

b. Según el estudio que realizaron, ¿a partir de qué peso deberán tener cuidados especiales con los bebés?

c. Otro grupo de investigadores, por su lado, construyeron histogramas agrupando los datos de distinta forma. Calculen, para cada uno de ellos, la media correspondiente.





d. Según ellos, ¿a partir de que peso deberán tener cuidados especiales con los bebés?

[1] Se puede acordar, por ejemplo, que el punto de división entre 2 intervalos pertenece al de la derecha, para evitar contar un mismo dato en 2 intervalos.

Para reflexionar

- Expliquen cómo creen que se construyen los histogramas.
- ¿ El valor de la media será el mismo cualquiera sea el histograma que se construya?
- Para calcular la media en cada intervalo se suele elegir el dato central. ¿Qué efectos tendría en la media si se eligiera sólo el dato central de una de las divisiones del intervalo?

ACTIVIDAD 2

En la siguiente tabla se da la información sobre los sueldos en una pequeña empresa.

Sueldo	0 - 500	500 - 1000	1000 - 1500	1500 - 2000	2000 - 2500	2500 - 3000
Frecuencia	32	20	8	11	14	5

a. Calculen el sueldo promedio.

b. ¿Qué porcentaje de los empleados cobra menos de $1000? Discutan si el promedio es representativo de los datos, en este caso que indica la tabla.

¿Cómo representa la mediana la situación salarial?

- Recuerden que, cuando conocen cada uno de los datos, para calcular la mediana, se los ordena (por ejemplo de menor a mayor) y se toma el dato central (cuando el número de datos es impar) o el promedio de los dos centrales (cuando es par).

c. Analicen las frecuencias acumuladas para determinar cuál es el dato central y en qué intervalo se encuentra.

Cuando el dato central no cae en una división de los intervalos, para hallar la mediana, se supone que los datos están equidistribuidos en el intervalo. Entonces, se divide el intervalo que contiene la mediana en partes iguales, se calcula el valor de cada división y se trabaja como si las divisiones representaran a los datos.

d. Calculen la mediana con este procedimiento.

e. Discutan cuál de los dos parámetros centrales representa mejor la situación, en este caso.

Para investigar

Averigüen cómo se calcula la moda cuando los datos están dados por intervalos de clase. Pueden buscar información en libros, o inventar un conjunto de datos y probar diferentes procedimientos.

Ayuda: identifiquen primero el intervalo modal, es decir el de mayor frecuencia.

Supongamos que es normal

En la primera mitad del siglo XIX, K.F.Gauss (1777-1855) hizo aportes importantes a varias ramas de la matemática. Estudiando los errores que se producen al medir una misma magnitud, se dio cuenta de que si se representan estos datos en un histograma, éstos se distribuyen según la campana que lleva su nombre. Esta distribución también se conoce como "distribución normal", ya que muchas variables de la naturaleza la siguen, por ejemplo, las características de individuos de una misma especie, como es el caso de la altura o el peso de las personas o de determinados animales. Gauss pudo hallar parámetros que caracterizaban esta distribución.

ACTIVIDAD 1

En una ciudad se ha instalado un laboratorio de cultivos experimentales y se busca que, para cada nuevo cultivo, los gastos de climatización puedan ser mínimos. Se está estudiando la posibilidad de comenzar en mayo con un cultivo de tomates para el que se necesita que la temperatura máxima y la mínima no varíen más allá de 10º con respecto a un promedio de alrededor de 20º y 15º , respectivamente.

Para tomar la decisión, sólo se cuenta con el siguiente cuadro con las temperaturas máxima (M) y mínima (m) de la ciudad durante los días del mes de mayo del año anterior.

DOMINGO	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	T. Máx: 20º T. Min: 10º	T. Máx: 22º T. Min: 14º	T. Máx: 18º T. Min: 12º	T. Máx: 16º T. Min: 14º	T. Máx: 19º T. Min: 11º	T. Máx: 20º T. Min: 13º
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
T. Máx: 15º T. Min: 2º	T. Máx: 17º T. Min: 4º	T. Máx: 22º T. Min: 14º	T. Máx: 18º T. Min: 4º	T. Máx: 15º T. Min: 4º	T. Máx: 13º T. Min: 2º	T. Máx: 12º T. Min: 6º
14	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
T. Máx: 17º T. Min: 8º	T. Máx: 20º T. Min: 10º	T. Máx: 14º T. Min: 6º	T. Máx: 14º T. Min: 9º	T. Máx: 15º T. Min: 10º	T. Máx: 14º T. Min: 8º	T. Máx: 18º T. Min: 10º
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
T. Máx: 20º T. Min: 11º	T. Máx: 24º T. Min: 12º	T. Máx: 25º T. Min: 13º	T. Máx: 23º T. Min: 15º	T. Máx: 21º T. Min: 16º	T. Máx: 22º T. Min: 15º	T. Máx: 24º T. Min: 13º
28	**29**	**30**	**31**			
T. Máx: 22º T. Min: 13º	T. Máx: 20º T. Min: 11º	T. Máx: 18º T. Min: 9º	T. Máx: 18º T. Min: 8º			

a. Suponiendo que las temperaturas se comporten como en el mismo mes del año anterior, piensan que resulta conveniente iniciar el cultivo en el mes de mayo? ¿Por qué?

b. Si se evalúa que no sería tan costoso afrontar la climatización del laboratorio sólo durante el 10% de los días del mes, ¿cambia la decisión? .

c. Otra manera de evaluar los costos de climatización es determinando hasta cuánto se aceptará como desvío de los valores de la media. ¿Cuál debería ser la desviación típica aceptada para decidir iniciar los cultivos en mayo?

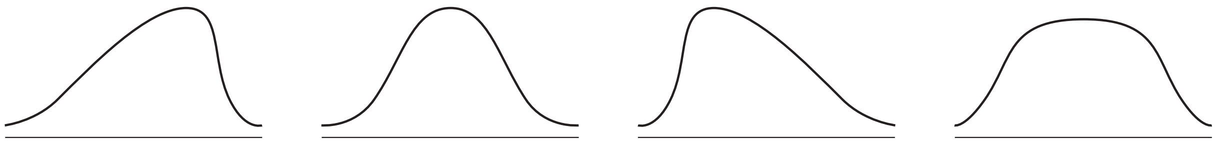
ACTIVIDAD 2

Se toma un mismo examen en dos cursos distintos. Sobre un puntaje máximo de 10, ambos cursos obtuvieron una media de 6 puntos, pero el curso A con una desviación estándar de 0,5 puntos y el B, con una de 1,5 puntos.

a. ¿Qué está revelando en este caso la diferencia en las desviaciones estándar?

b. Elijan, de las cuatro distribuciones siguientes, una para asignar al curso A y otra para asignar al curso B. Justifiquen su elección.

1 2 3 4



c. Elijan una de las cuatro distribuciones anteriores, si saben además que el curso A tuvo un 30% de aplazados, mientras que el B tuvo sólo un 10%, y que ambos cursos tuvieron la misma cantidad de alumnos que sacaron 10.

Para reflexionar

a. ¿Qué información sobre la distribución de los datos proporciona el rango si además se tiene en cuenta la media?

b. Analizando los resultados de las dos actividades anteriores, un compañero planteó que "cuanto menor es la desviación típica, más cerca de la media están los datos".¿Por qué?

Para investigar

Para la medicina, es importante tener algunas informaciones que representen un conjunto de los datos relativos a un número elevado de personas. Por ejemplo, para evaluar el crecimiento de chicos de ambos sexos, se procesan datos agrupados por edades y sexos, de peso y altura. Como estos datos pueden variar en forma significativa con las épocas y los países, al utilizar las tablas, es importante tener en cuenta dónde y cuándo fueron realizadas.

Para una distribución normal, aproximadamente el 70% de la población está en el intervalo ($\overline{X}$ - σ; $\overline{X}$ + σ), el 95% en el intervalo ($\overline{X}$ - 2σ; $\overline{X}$ + 2σ) y el 99% en el intervalo ($\overline{X}$ - 3σ; $\overline{X}$ + 3σ).

Con estos datos, resuelvan la siguiente situación.

La estatura media de los hombres de dos ciudades es de 1,70 m, y las desviaciones estándar son 5 cm y 7 cm, respectivamente. Si suponemos que las alturas se distribuyen normalmente, ¿qué porcentaje de individuos altos hay? ¿Cuál es el rango de sus medidas? Si la ciudad tiene 200.000 habitantes, de los cuales el 30% son hombres, ¿qué cantidad de hombres bajos hay? ¿Por debajo de qué altura diremos que un hombre que vive en esta ciudad es muy bajo?

Recuerden que

El rango, es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor.

La "desviación típica o estándar" se calcula para un conjunto de N datos x_i y media ξ como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\overline{X} - x_i)^2}{N}}$$

(Con N - 1 en el denominador, en lugar de N, si trabajamos con muestras de población.)

ACTIVIDAD 1

Muchos problemas de probabilidad se pueden resolver con suficiente aproximación de manera experimental. Por ejemplo, si quisieran calcular la probabilidad de obtener tres ases, exactamente, en 1 tirada al tirar 5 dados, podrían efectuar la experiencia 100 veces (o más) y contar en cuántas de esas veces obtuvieron exactamente tres ases.

a. ¿Cómo calcularían con esos datos la probabilidad mencionada?

Sin embargo, la realización de las experiencias un gran número de veces, a menudo es un trabajo engorroso, a veces, imposible en clase. Una tabla de números al azar permite “simular” una experiencia para calcular la probabilidad de un suceso experimentalmente. Por ejemplo, si quieren calcular experimentalmente la probabilidad anterior y tienen una tabla de números al azar del 1 al 6, pueden pensar cada número de la tabla como el resultado de haber arrojado un dado una vez. Cada vez que “tiren” los dados 100 veces, el número de casos favorables será distinto. Queremos ver cómo se relaciona esta forma de calcular la probabilidad con la probabilidad teórica.

b. Les proponemos confeccionar , divididos en grupos de 4 o 5 alumnos, una tabla de 100 números al azar de 1 a 6; luego podrán agregar la tabla que hizo cada grupo para obtener así una nueva tabla de, por lo menos, 500 números.

Les sugerimos a continuación algunos métodos para la obtención de los números [1].

- Colocar en una bolsa 6 bolillas numeradas del 1 al 6 y extraer las bolillas con reposición anotando los resultados.
- Tomar una guía telefónica y anotar la última cifra de cada número telefónico que aparece en una página (o hacer cualquier elección semejante).

c. Prueben el funcionamiento de la tabla de su grupo: úsenla para simular la experiencia de obtener exactamente tres ases al tirar 5 dados y calcular la probabilidad experimental.

Por ejemplo, si de nuestra tabla extrajimos:

56163	11613	32613	...
61412	23213	65324	...
52141	25445	51236	...

Podemos pensar que la primera vez que tiramos los dados sacamos 5, 6, 1, 6 y 3, etc. En este caso, en 9 tiradas obtuvimos “exactamente tres ases” una sola vez. Así que nuestra probabilidad experimental es de 1/9.

d. Comparen su resultado con el resultado de otros grupos.

e. Promedien los resultados de varios grupos para tener un valor correspondiente a una mayor cantidad de repeticiones[2].

f. En este caso, por ejemplo, por medio de un diagrama de árbol pueden calcular la probabilidad teórica. Discutan los resultados obtenidos.

[1] Para facilitar el recuento de datos, es conveniente escribir los números obtenidos en grupos, por ejemplo, dejando un espacio cada 5 columnas y cada 4 filas, así será facil contarlos de a 20.

Se trata de buscar un método para producir los números de forma tal que todos los resultados sean igualmente probables, para poder calcular probabilidad como el cociente entre casos favorables y casos posibles.

Para los problemas con dados es conveniente hacer la segunda tabla, extrayendo de la anterior, los resultados del 1 al 6 y reacomodándolos.

[2] Verifiquen que cada probabilidad obtenida corresponda a la misma cantidad de casos considerados; sino, denle los pesos respectivos a las distintas probabilidades experimentales.

Para reflexionar

- Discutan qué relación hay entre la probabilidad teórica y la probabilidad experimental.
- Expliquen qué ventajas tiene usar una tabla de números al azar para obtener la probabilidad experimental y cómo influye en los resultados la cantidad de números que tiene la tabla.

ACTIVIDAD 2

En un bolillero hay 10 bolillas numeradas del 0 al 9. Se extraen al azar y, con reposición, 5 bolillas. Se quiere calcular la probabilidad de que haya exactamente dos números iguales.

a. Simulen la experiencia usando una tabla de números al azar adecuada para calcular "experimentalmente" la probabilidad buscada.

b. Comparen con otros grupos los resultados que obtuvieron. Vuelvan a calcular la probabilidad, uniendo las tablas.

c. Intenten calcular la probabilidad teórica, para comparar con los resultados anteriores.

ACTIVIDAD 3

Una tabla de números al azar puede tener la cantidad de elementos distintos que precisemos (por ejemplo, para problemas de dados conviene que haya sólo 6 resultados distintos). A veces se puede aprovechar la tabla que tenemos, haciendo una convención. Por ejemplo, para simular una moneda, se puede asignar cara a la mitad de los resultados, y ceca a la otra mitad. Usando este tipo de adaptación, hallen experimentalmente la respuesta a la siguiente situación:

Si se toman en cuenta todas las familias con 5 hijos, y se elige una al azar, ¿cuál esperan que sea la probabilidad de elegir una familia con más hijos varones que hijas mujeres? (Supongan que en cada nacimiento es igualmente probable que nazca un varón o una mujer.)

Para investigar

Si ya resolvieron actividades sobre probabilidad contando teóricamente los casos favorables y los posibles, vuelvan a calcular la probabilidad con las tablas que tienen y comparen resultados. Si aún no lo hicieron, empiecen por buscar ejercicios y resolverlos. En cualquiera de los dos casos elijan los ejercicios que se adaptan al uso de estas tablas.

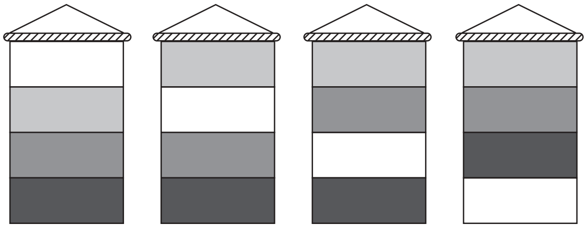
ACTIVIDAD 1

Una profesora propuso en el curso el siguiente problema:

Cada equipo de vóleibol de un colegio debe identificarse con un banderín de cuatro franjas horizontales pintadas cada una de colores distintos. Los colores disponibles son rojo, blanco, azul y verde. Hay 18 equipos inscriptos. ¿Se podrán hacer banderines distintos para todos?

Pidió que cada uno lo pensara por separado y que, luego de cinco minutos, formaran grupos de a tres para resolverlo.

Lucía lo pensó así: “Si me fijo en el lugar donde iría el color blanco, lo puedo poner 1°, 2°, 3° o 4°.



Tengo 4 opciones. Pero si me fijo en el verde, puedo hacer lo mismo y tengo 4 opciones más. Con el azul tengo otras 4 y con el rojo, 4 más. Son 16 banderines distintos. No van a alcanzar para distinguir a los equipos.”

Cuando lo explicó en su grupo, Néstor se dio cuenta de que Lucía estaba contando menos casos, porque cada vez que ella colocaba un color en un lugar, los otros 3 colores en los que no se fijaba se podían cambiar entre sí de 6 formas distintas. Así que le parecía que eran 16 . 6 = 96 banderines. Sobraban para distinguir los equipos. Julieta, que estaba en el grupo con ellos, dijo que para ella Néstor contaba muchos casos, que no estaba segura si no estaba repitiendo alguno. Así que decidieron volver a controlar los resultados.

a. Analicen en cada respuesta, si hay afirmaciones ciertas y erróneas; traten de explicar en qué consisten los errores.

b. ¿Cuántos banderines se pueden formar? Enumeren todas las combinaciones usando un diagrama de árbol.

c. La profesora pidió que analizaran si habría más o menos banderines que antes, en el supuesto caso de que, por error, la franja banca de los banderines se tiñera de verde. Analicen ustedes qué sucedería a partir del diagrama de árbol que hicieron en el punto anterior.

d. ¿Cuántos banderines distintos de 5 franjas se podrían formar, con los 4 colores mencionados, usando dos franjas de verde?

Para reflexionar

- ¿Qué es una permutación y cómo se cuentan todas las permutaciones de n elementos?
- ¿Cuál es la diferencia entre las permutaciones de los ejercicios anteriores?
- ¿Cómo se pueden contar las permutaciones en las que aparecen elementos repetidos?

ACTIVIDAD 2

a. Ahora queremos contar las permutaciones en las que aparecen elementos repetidos. Con los números 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números de 7 cifras podemos formar en los cuales el 2 aparezca tres veces?

Pista: Imaginen que hay tres números 2 distintos, que identificaremos como 2 **2** 2. Para cada ubicación del 1, 3, 4 y 5, ¿cuántas formas hay de ubicar los tres 2? ¿Cuántas veces están contando a un mismo número? Por ejemplo, dejando en el mismo lugar al 1, 3, 5 y 7, se pueden obtener: 1**2**32245 y 1**2**32245, que contamos como distintos, pero ambos son el 1232245.

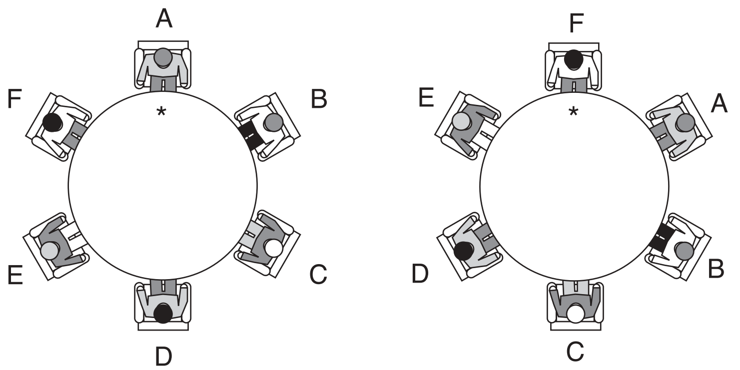
b. ¿Cuántas ubicaciones posibles de 1, 3, 4 y 5 hay?

¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con las 10 letras de PARABRISAS?

Pista: Diferencien, como antes, los elementos repetidos para contar. Después analicen cuántas veces están contando a la misma palabra.

c. Alberto y sus cinco amigos salen a comer todos los jueves y se sientan alrededor de una mesa redonda. El último jueves se dieron cuenta de que, probablemente por costumbre, se sentaban siempre del mismo modo. Si de allí en adelante cada día cambiaran de lugar, se preguntaron: ¿de cuántas maneras distintas podrían sentarse?

Tengan en cuenta que, para determinar que dos distribuciones son iguales, se debe verificar que cada persona esté sentada entre las mismas dos. Por ejemplo, los dos gráficos muestran distribuciones iguales, aunque desde el asiento marcado con * y en sentido horario, en la primera se lee ABCDEF y en la segunda, FABCDE:



Pista: Fijen una posición, por ejemplo, la de Alberto y ubiquen a sus amigos de todas las formas posibles; analicen qué obtuvieron.

Para investigar

En las distribuciones en las que no importa el orden (combinaciones) también pueden aparecer elementos repetidos.

Por ejemplo: si les dicen que pueden elegir 5 caramelos de una bolsa que contiene muchos caramelos de frutilla, limón y naranja, ¿qué tres elecciones distintas podrían hacer? ¿De cuántas formas distintas pueden elegirlos?

Traten de elaborar una estrategia para contar estos casos.

ACTIVIDAD 1

La idea de probabilidad data de muy antiguo y aparece fuertemente ligada a los juegos de azar. Un ejemplo interesante de cómo los juegos de azar motivaron la teoría de la probabilidad es la correspondencia que sostuvieron, a mediados del siglo XVII, Fermat y Pascal, dos grandes matemáticos franceses. Este diálogo epistolar estuvo motivado, en parte, porque a Pascal, un jugador le había preguntado "cómo podía ser que fuera más ventajoso sacar por lo menos un 6 en cuatro jugadas con un sólo dado, que sacar un doble 6 con los dos dados en 24 jugadas, a pesar de que 4 es a 6 como 24 a 36". Es importante aclarar que el jugador había comprobado experimentalmente esta diferencia.

Luego de contar la anécdota anterior, una profesora propuso en el curso que calcularan ambas probabilidades, trabajando en grupos.

En un grupo, Cecilia inmediatamente dijo que tenían que imaginarse cada dado de un color, como siempre hacían y que para la primera probabilidad, "por lo menos un 6" era un 6, dos 6, tres 6 o cuatro 6; y se puso a calcular cada una.

Dalila la escuchó, pero pensó que era más fácil calcular la probabilidad de no sacar ningún 6 en 4 tiradas, que era lo contrario de lo que quería, y luego restarlo de 1.

Enzo, por su parte, no estaba de acuerdo con "pintar cada dado de un color", porque en el problema no se decía eso; además, para asegurar que hubiera un 1, podía pensar que un dado ya estaba en 1: sólo tenía que calcular la cantidad de casos posibles y de casos favorables para los demás dados.

a. Identifiquen si hay afirmaciones ciertas o erróneas en cada uno de los razonamientosde los chicos, y justifiquen. Calculen de dos formas distintas la probabilidad de obtener "al menos un 6" en 4 tiradas.

Para la segunda parte, decidieron que la forma más corta de calcular era la de Dalila, calculando lo contrario de lo que querían.

Enzo dijo que, en una sola tirada, para calcular la probabilidad de sacar un doble 6 había que dividir 1 caso favorable sobre 18 posibles, porque el primer dado podía salir del 1 al 6, y lo mismo para el segundo dado, así que había 36 combinaciones; pero no importaba cuál iba primero, así que tenía que dividir por 2. Cecilia no estaba de acuerdo, porque para ella había que "pintar los dados", y ver cuál salía primero, así que eran 36 casos posibles. Enzo le dijo que, en ese caso, también tenía que contar en orden los casos favorables, y entonces había 2, según el dado que saliera primero con cada 6, y al simplificar 2/36 le daba 1/18 como a él. Dalila dijo que estaban haciendo algo mal, porque si iban a calcular lo contrario, tenían que sacar la probabilidad de no sacar doble 6, así que en el primer dado podían sacar del 1 al 5, y lo mismo en el segundo, y entonces tenían 25 opciones. Les pareció que alguno estaba del todo bien en esto, porque, ya fueran 1 o 2 opciones de sacar doble 6, con las 25 no llegaban a completar las 36 posibles.

b. Analicen cada uno de los razonamientos descriptos; señalen los errores que pudiera haber.

c. Calculen la probabilidad de obtener "al menos un doble 6" en 24 tiradas (a partir de calcular la probabilidad contraria).

Para reflexionar

- Enuncien las propiedades que usaron para calcular las probabilidades buscadas.
- Comparen las distintas maneras correctas que plantearon para calcular la primera probabilidad, e indiquen cuál sería otra forma de calcular la segunda probabilidad pedida.

ACTIVIDAD 2

Cuentan que un célebre matemático llamado Juan Le Rond D'Alembert tuvo una no menos célebre equivocación. Calculó que la probabilidad de sacar por lo menos una cara al arrojar dos veces una moneda es 2/3.

a. Expliquen por qué es incorrecta esta respuesta.

b. Calculen la probabilidad de obtener exactamente una cara al arrojar dos veces una moneda.

c. Calculen de dos formas distintas la probabilidad de obtener al menos una cara.

Para investigar

Rodrigo asistió a una reunión de amigos y contó cuántas personas había presentes; después de este cálculo, dijo que era "muy probable" que allí hubiera dos personas que cumplieran años el mismo día; es decir, que la probabilidad de eso era mayor que 1/2.

Inmediatamente un amigo argumentó que, para que de seguro hubiera dos personas que cumplieran años el mismo día, el grupo tendría que tener 366 personas. Entonces, para que la probabilidad fuera mayor que 1/2, sería necesario que estuvieran presentes al menos 183 personas, que es la mitad de 366.

Rodrigo le dijo que había caído en un error muy común, que no se sintiera mal por eso, y que mejor se concentrara en el problema inverso.

Al rato, el amigo le dio la razón.

- Discutan por qué saber que la probabilidad es mayor que 1/2 le permite afirmar que "es muy probable".
- Averigüen cuál es el menor número de personas que podía haber en la reunión; como ayuda, les decimos que eran menos de 25 personas.

Equidad
Programa de Acciones
Compensatorias en Educación
PACE

Unidad de Recursos Didácticos
SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN BÁSICA

MINISTERIO de EDUCACIÓN
PRESIDENCIA de la NACIÓN