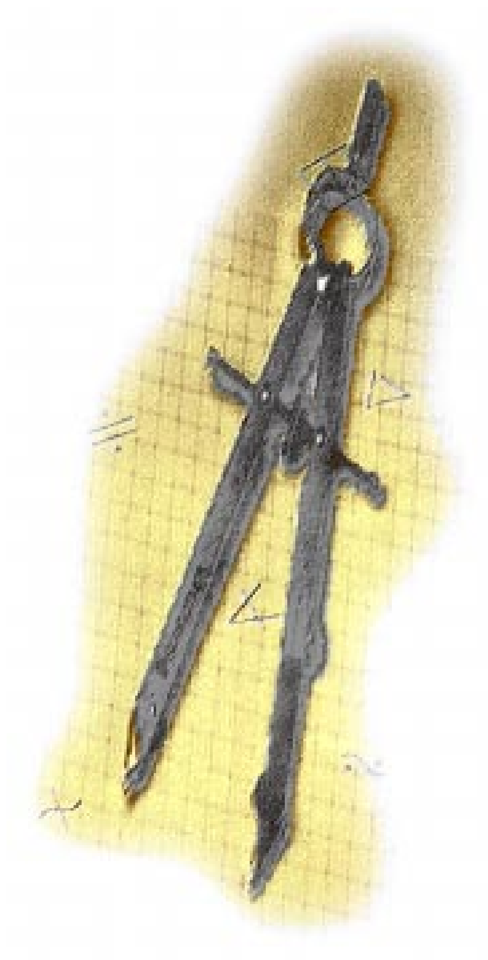
Vectores en el plano y en el espacio



Gustavo Corach y Norberto Fava

Con la colaboración de

Liliana Bronzina y Pilar Varela

Calidad de la Educación

Presidente de la Nación
Dr. CARLOS SAÚL MENEM

Ministro de Cultura y Educación de la Nación
Dr. MANUEL GARCÍA SOLÁ

Secretario de Programación y Evaluación Educativa
Prof. SERGIO LUIS ESPAÑA

Subsecretario de Evaluación Educativa
Lic. PABLO NARVAJA

Subsecretaria de Gestión Educativa
Lic. IRENE BEATRIZ KIT

Director del Instituto Nacional de Educación Técnica
Prof. CARLOS PALACIO

Directora Nacional de Evaluación
Lic. MARÍA LUCRECIA TULIC

Equipo de Coordinación

Lic. Ana Diamant
Prof. Graciela Maciel
Ing. Carlos Rondón Cardoso
C.P.N. Luis Zipitría

Equipo de Edición

Arq. Javier Maiza
Dibj. Héctor Martín
Sra. Rosana Masini
Ddra. Coralia Vignau

Índice

A Vectores en el plano

B Vectores en el espacio

C Apéndice

INTRODUCCIÓN

Este material está destinado a los docentes que enseñan Matemática en las escuelas de Nivel Medio de todo el país.

Su contenido surge del análisis de los resultados alcanzados por los alumnos que respondieron a la prueba de finalización del Nivel Medio administrada a fines de 1997.

Los temas que se tratarán identifican dificultades probadas en los logros de los alumnos e intentan aportar información disciplinar con el objeto de ayudar a resolverlos.

La primera de cuatro entregas sucesivas abordó el contenido

- Geometría de coordenadas

La que ahora estamos presentando desarrolla aspectos vinculados a

- Vectores en el plano

Las próximas versarán sobre

- Funciones linales y cuadráticas
- Funciones trascendentes

La intención es proponer un recorrido conceptual no sólo por los contenidos que se identificaron como dificultosos, sino también por aquellos que funcionan como requisitos previos para la construcción del conocimiento sobre ellos.

Sería de nuestro agrado que la propuesta, tanto teórica como metodológica fuera de utilidad para los docentes que desde su tarea cotidiana hacen lo posible por mejorar la calidad de los aprendizajes.

VECTORES EN EL PLANO

Segmentos orientados y vectores

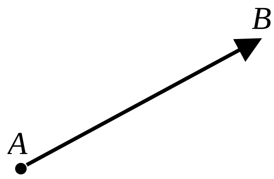
1

Desde el punto de vista geométrico se piensa en los vectores como segmentos orientados que pueden interpretarse como desplazamientos paralelos o translaciones del plano. Por otro lado, una vez elegido un sistema de coordenadas cada vector se identifica con un par ordenado de números (sus proyecciones sobre cada eje) llamados componentes del vector, y las operaciones con los vectores se traducen en unas operaciones aritméticas muy sencillas con sus componentes.

Para las aplicaciones es necesario comprender y dominar los dos aspectos del concepto.

1. Segmentos orientados y vectores

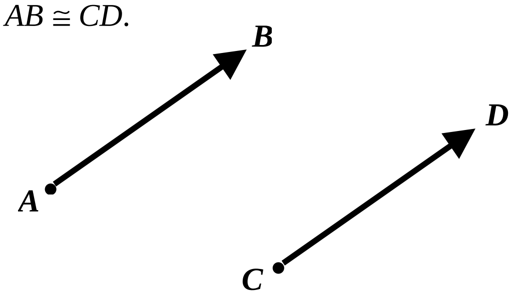
Un segmento AB cuyos extremos están dados en cierto orden se llama ***segmento orientado***. El punto A es el **origen** y B el **extremo** del segmento orientado AB. Para representarlo geométricamente suele usarse una flecha que indica el sentido de recorrido desde A hacia B, como se ilustra en la siguiente figura.



Imaginemos ahora un deslizamiento del plano con la propiedad de que dos puntos cualesquiera del mismo describen segmentos paralelos de igual longitud y del mismo sentido. Tal movimiento se llama ***desplazamiento paralelo*** o ***traslación***.

Notas. (i) En realidad sólo importa la posición inicial y la posición final de cada punto. En términos formales, una traslación es una aplicación especial del plano en sí mismo; (ii) la noción de paralelismo se toma con amplitud: dos rectas coincidentes se consideran paralelas; (iii) una definición de la 'igualdad de sentido' se da al final del párrafo 4.

La traslación que lleva el punto A hasta B es la misma que lleva C hasta D (ver figura), siempre que el segmento orientado CD sea paralelo a AB y tenga la misma longitud y el mismo sentido, en cuyo caso se dice que son ***equivalentes*** y se escribe $AB \cong CD$.



Se comprende que para indicar una traslación basta señalar un punto cualquiera del plano y el punto al que es transportado por ella, lo que equivale a señalar un segmento orientado.

Ahora podemos definir lo que se entiende por "vector".

Se llama **vector** *AB* a la traslación que lleva *A* hasta *B*.
El vector AB se denota por el símbolo $\overrightarrow{AB}$.

De acuerdo con lo expresado, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si y sólo si $AB \cong CD$.

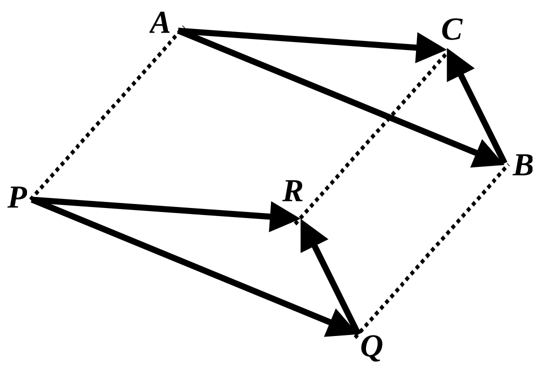
Nota. "Vector" significa en latín "el que transporta, arrastra o conduce" lo que se aviene muy bien con el concepto.

Notemos que cualquier punto del plano puede elegirse como origen de un segmento orientado equivalente a otro segmento dado.

Suma y diferencia de vectores 2

Supongamos ahora que se realizan dos traslaciones en forma sucesiva: la traslación que lleva *A* hasta *B*, seguida de la que lleva *B* hasta *C*. El resultado final (composición) de ambos movimientos equivale a una traslación única que lleva *A* hasta *C*.

La demostración se basa en el hecho de que un cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos y de igual longitud es un paralelogramo. En efecto, refiriéndonos a la figura,



supongamos que $AB \cong PQ$ y $BC \cong QR$. Entonces la primera traslación lleva *P* a *Q*; la segunda *Q* a *R*, y por consiguiente la composición de ambas lleva *P* a *R*. Debemos probar que $PR \cong AC$.

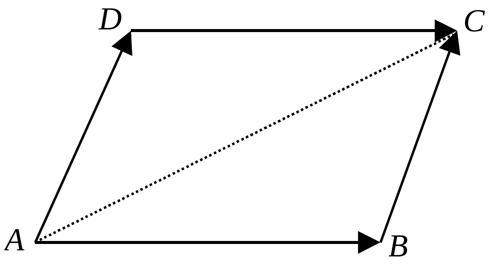
Puesto que los cuadriláteros *APQB* y *CRQB* son paralelogramos, también lo es *APRC*. Luego $AC \cong PR$ y con ello hemos probado que la composición de dos traslaciones es una traslación.

Para expresar que la traslación $\vec{AB}$ seguida de $\vec{BC}$ equivale a $\vec{AC}$ usaremos la relación

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

que en algunos textos se conoce como ***relación de Möbius-Chasles,*** nombre que adoptaremos principalmente por comodidad de referencia.

La relación de Möbius-Chasles equivale a la "*regla del paralelogramo*" que se usa en Física para sumar magnitudes vectoriales. En efecto si A, B, C y D son vértices de un paralelogramo como el que muestra la figura,



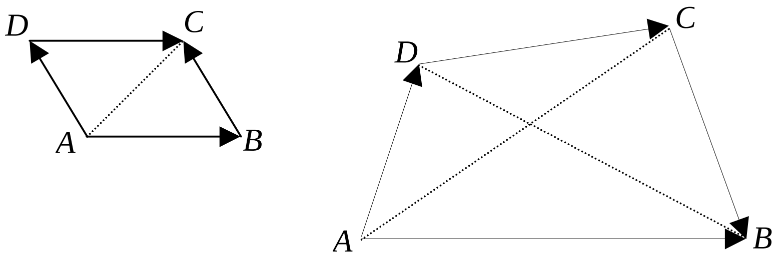
entonces $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

A esta altura surge la conveniencia de una notación más concisa para los vectores. Con ese fin vamos a usar los símbolos X, Y, Z, U, V, W, etc.

Dos aplicaciones muy sencillas de la relación de Möbius-Chasles permiten afirmar las leyes conmutativa y asociativa para la suma de vectores:

$$\boxed{\begin{array}{c} X + Y = Y + X \\ X + (Y + Z) = (X + Y) + Z \end{array}}$$

Para la demostración usaremos como guía los siguientes diagramas:



En efecto, en la figura de la izquierda observamos que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.$$

Y en la de la derecha, $\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$;

pero por otro lado, $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, igual que antes.

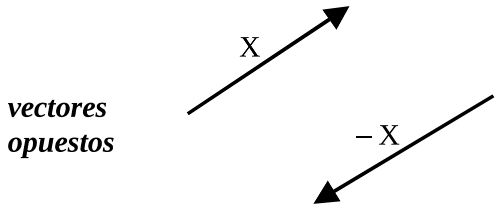
Cualquiera que sea el punto P, el vector $\overrightarrow{PP}$ representa la ***traslación nula*** que deja a cada punto en el mismo lugar en que se encuentra. Nos referimos a ella como el vector cero o vector nulo y la indicamos simplemente por 0.

De manera que si X es el vector $\overrightarrow{AB}$, la relación de Möbius-Chasles nos da

$$X + 0 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = X$$

Si $X = \overrightarrow{AB}$, el vector $\overrightarrow{BA}$ se llama opuesto de X y se denota por $-X$. La misma relación de Möbius-Chasles nos da

$$X + (-X) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0.$$



Vamos, por último, a analizar el concepto de diferencia entre vectores, cuya interpretación geométrica tiene mucha importancia en las aplicaciones.

Dados X e Y, hay un único vector V tal que

$$X + V = Y$$

Para comprenderlo basta sumar $-X$ a ambos miembros, con lo que resulta

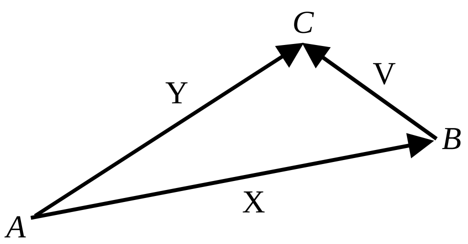
$$V = Y + (-X)$$

El vector V se llama ***diferencia*** entre los vectores Y y X y se indica por el símbolo $Y - X$.
Veamos la interpretación geométrica.

Tomando un punto A del plano, podemos encontrar otros dos puntos B y C, tales que

$$X = \overrightarrow{AB} \text{ e } Y = \overrightarrow{AC},$$

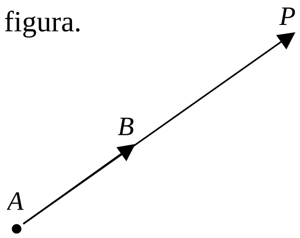
como se muestra en la siguiente figura.



En ella podemos apreciar que la diferencia $Y - X$ está representada por el segmento orientado *BC*. La demostración es otra consecuencia de la relación de Möbius-Chasles.

3 Producto de un vector por un número real

Para definir el producto de un vector X por un número real l, supongamos primero que l es positivo y que $X = \overrightarrow{AB}$, como se exhibe en la figura.



Sobre la semirrecta de origen A que contiene B elegimos un punto P tal que la longitud del segmento AP sea igual al producto de l por la longitud de AB. En tal condición definimos el producto λX como el vector $\overrightarrow{AP}$.

En primer lugar la definición es correcta: el vector así definido es independiente del segmento orientado que se elija para representar al vector X.

Cuando l es negativo, $-\lambda$ es positivo, y en tal caso definimos $l X$ como el vector opuesto de $(-\lambda)X$. Es decir, $\lambda X = -(-\lambda)X$. Finalmente, pondremos $0X = 0$ (notemos que en esta igualdad el símbolo 0 representa en cada miembro un objeto diferente).

A continuación enumeramos las leyes que rigen a esta operación, que junto con las leyes del párrafo anterior sirven de base a la noción de espacio vectorial abstracto.

1) $1X = X$

2) $\lambda(\mu X) = (\lambda\mu)X$

3) $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$

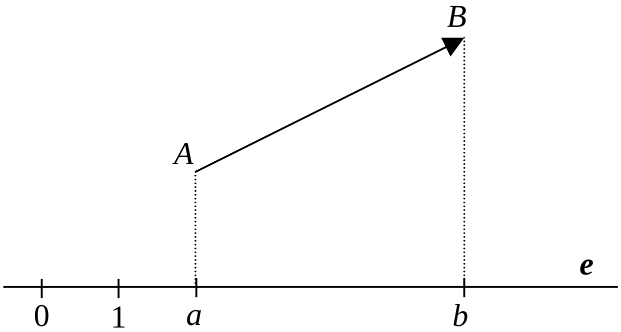
4) $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu X$

4 Proyección sobre un eje

Consideremos un eje coordenado, es decir, una recta ***e*** en la que se ha elegido una escala numérica.

Dado un vector $X = \overrightarrow{AB}$, supongamos que los pies de las perpendiculares desde los extremos del segmento al eje ***e*** tienen abscisas a y b.

El número $b - a$ que sólo depende del vector y del eje, se llama proyección de X sobre ***e*** y se indica por medio del símbolo $\mathrm{pr}_e\, X$.



En primer lugar conviene observar que $\mathrm{pr}_e(-\mathrm{X}) = -\mathrm{pr}_e(\mathrm{X})$.
La utilidad de la proyección se basa principalmente en las siguientes propiedades:

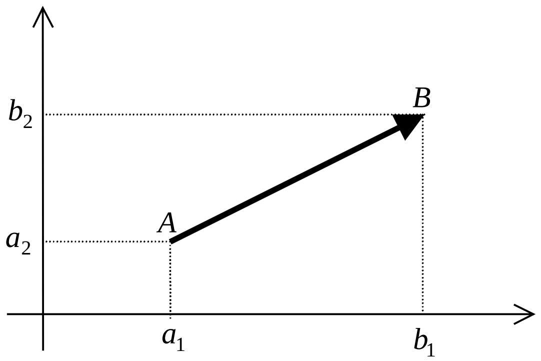
$$\boxed{\mathrm{pr}_e(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{pr}_e\mathrm{X} + \mathrm{pr}_e\mathrm{Y}, \qquad \mathrm{pr}_e(\lambda\mathrm{X}) = \lambda\,\mathrm{pr}_e\mathrm{X}}$$

La primera afirma que ***la proyección de una suma es la suma de las proyecciones*** y es una consecuencia inmediata de la definición.

Para $\lambda > 0$ la segunda es una consecuencia del teorema de Thales; para $\lambda < 0$ conviene razonar así:

$$\mathrm{pr}_e(\lambda\mathrm{X}) = \mathrm{pr}_e[-(-\lambda)\mathrm{X}] = -\mathrm{pr}_e[(-\lambda)\mathrm{X}] = -(-\lambda)\,\mathrm{pr}_e\mathrm{X} = \lambda\,\mathrm{pr}_e\mathrm{X}.$$

El otro hecho importante es que podemos identificar cualquier vector por sus proyecciones sobre dos ejes coordenados no paralelos como se exhibe en la siguiente figura, donde hemos elegido un sistema de coordenadas ortogonales.



Las proyecciones del vector $\mathrm{X} = \overrightarrow{AB}$ sobre cada uno de estos ejes son los números

$$\mathrm{pr}_1\mathrm{X} = b_1 - a_1, \quad \mathrm{pr}_2\mathrm{X} = b_2 - a_2,$$

llamados ***componentes*** del vector en el sistema elegido.

Es claro que para definir un vector basta dar sus componentes, por lo que es legítimo escribir

$$\mathrm{X} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2),$$

siempre que tengamos presente que, por lo general, al cambiar el sistema de coordenadas varían los componentes del vector.

El número $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$, que representa la longitud del segmento *AB*, se llama ***norma*** o ***módulo*** de X y se indica por $\|\mathrm{X}\|$. Es decir,

$$\|\mathrm{X}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

De acuerdo con lo dicho, una vez elegido un sistema de coordenadas expresaremos cada vector del plano mediante un par ordenado de números reales -sus proyecciones o componentes en el sistema elegido-, en la siguiente forma:

$$\mathrm{X} = (x_1, x_2), \qquad \mathrm{Y} = (y_1, y_2), \qquad \mathrm{U} = (u_1, u_2), \qquad \mathrm{V} = (v_1, v_2), \qquad \text{etc.}$$

Entonces es claro que la afirmación $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ equivale a las relaciones

$$x_1 = y_1, \qquad x_2 = y_2;$$

y que las operaciones vectoriales se describen aritméticamente de manera muy simple:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{X} + \mathrm{Y} = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2) & \lambda \mathrm{X} = (\lambda x_1, \lambda x_2) \\ -\mathrm{X} = (-x_1, -x_2) & \mathrm{Y} - \mathrm{X} = (y_1 - x_1,\, y_2 - x_2) \end{array}}$$

en tanto que la norma de X se calcula por medio de la fórmula

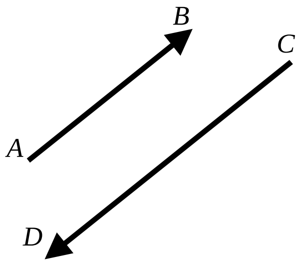
$$\| \mathrm{X} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ .$$

El sentido del sentido

Dos segmentos orientados *AB* y *CD* tienen ***el mismo sentido*** si sus proyecciones sobre cualquier eje coordenado tienen el mismo signo, lo que equivale a decir que son paralelos y la recta que pasa por *A* y *C* deja a *B* y *D* en un mismo semiplano. Mejor sería decir "cualquier recta por *A* y *C* " para abarcar el caso en que estos puntos coinciden.

5 Paralelismo; independencia lineal; bases

Dos vectores se llaman ***paralelos*** si pueden representarse por segmentos paralelos. Así, los vectores que corresponden a los segmentos orientados *AB* y *CD* de la figura siguiente son paralelos.



Se comprende entonces que los vectores X e Y son paralelos si existe algún número l tal que $\mathrm{Y} = \lambda \mathrm{X}$ o bien $\mathrm{X} = \lambda \mathrm{Y}$.

Una forma más simétrica de expresar el mismo hecho es decir que existen *números* l y m, *al menos uno distinto de cero*, tales que

$$\lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} = 0 \qquad (\lambda \neq 0 \text{ o } \mu \neq 0)$$

Y en tal caso se dice que los vectores son ***linealmente dependientes***.

En efecto, si los números l y m y los vectores X e Y satisfacen la última igualdad y por ejemplo, $\mu \neq 0$, entonces $\mu \mathrm{Y} = -\lambda \mathrm{X}$, de donde

$$\mathrm{Y} = (-\frac{\lambda}{\mu})\mathrm{X} \ ,$$

lo que muestra que los vectores son paralelos. Recíprocamente, si los vectores son paralelos e $\mathrm{Y} = \lambda \mathrm{X}$, entonces $\lambda \mathrm{X} + (-1)\mathrm{Y} = 0$.

Por el contrario, diremos que los vectores X e Y son ***linealmente independientes*** si una relación de la forma

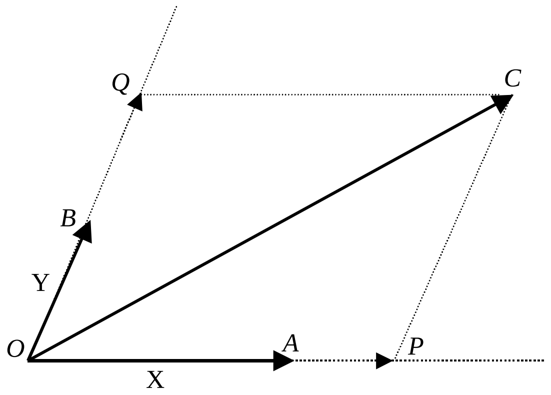
$$\lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} = 0$$

sólo es posible si $\lambda = 0$ y $\mu = 0$.

Supongamos ahora que $\mathrm{X} = 0$. Entonces $1\mathrm{X} + 0\mathrm{Y} = 0$ y los vectores son linealmente dependientes. Por tanto, *si dos vectores son linealmente independientes ninguno de ellos puede ser nulo.*

Siendo X e Y vectores linealmente independientes, a partir de un origen *O* consideremos dos segmentos orientados *OA* y *OB* como muestra la figura, tales que

$$\mathrm{X} = \overrightarrow{OA} \quad \text{e} \quad \mathrm{Y} = \overrightarrow{OB}$$



Para cualquier vector Z podemos elegir un punto *C* tal que $\mathrm{Z} = \overrightarrow{OC}$, y por el punto *C* hacer pasar rectas paralelas a los segmentos, cuyas intersecciones con las rectas que contienen a éstos hemos llamado *P* y *Q*, de manera que para ciertos números l y m, se tendrá

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \mathrm{X} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OQ} = \mu \mathrm{Y} \; .$$

Entonces

$$\mathrm{Z} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} \, .$$

Por tanto, para cualquier vector *Z* existen números l y m tales que

(1) $$\mathrm{Z} = \lambda \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} \, .$$

Los números l y m que permiten expresar Z en la forma (1) son únicos, pues si existieran otros dos, λ' y μ', tales que

$$\mathrm{Z} = \lambda' \mathrm{X} + \mu' \mathrm{Y},$$

restando miembro a miembro tendríamos $(\lambda - \lambda')\mathrm{X} + (\mu - \mu')\mathrm{Y} = 0$.

Puesto que X e Y son linealmente independientes, ambos paréntesis deberían anularse, de donde $\lambda = \lambda'$ y $\mu = \mu'$, lo que prueba la unicidad de la representación (1).

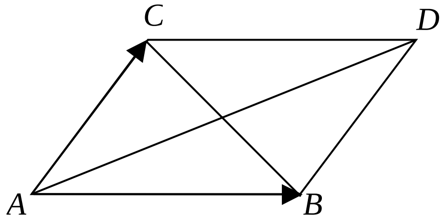
Hemos probado que **si X *e* Y *son linealmente independientes, entonces cada vector* Z *puede expresarse de manera única en la forma*** (1).

Para expresar este hecho decimos que los vectores X e Y forman una base de vectores del plano.

Una vez elegidos el punto *O* y los vectores X e Y linealmente independientes, los números l y m pueden tomarse como coordenadas del punto *C*, cuya posición determinan. Por ese motivo la terna $(O, \mathrm{X}, \mathrm{Y})$ se denomina ***sistema de coordenadas*** y el punto *O* ***origen*** del sistema. Las rectas que contienen a los segmentos *OA* y *OB* son los ***ejes de coordenadas***. Finalmente, cuando los ejes son perpendiculares el sistema se denomina ***ortogonal***.

Terminamos el presente párrafo con dos enunciados clásicos que sirven para ilustrar la noción de independencia lineal en el plano.

Problema 1: Probar que las diagonales de un paralelogramo se cortan mutuamente en segmentos de igual longitud.



Consideremos un paralelogramo *ABDC* como el de la figura y pongamos

$$\mathrm{X} = \overrightarrow{AB}, \qquad Y = \overrightarrow{AC}.$$

Para encontrar la intersección de las diagonales buscamos dos números l y m tales que

$$\lambda\,\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{BC}.$$

Es decir,

$$\lambda(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{X} + \mu(\mathrm{Y}-\mathrm{X})$$

o lo que es equivalente,

$$(\lambda - 1 + \mu)\mathrm{X} \;+\; (\lambda - \mu)Y = 0.$$

Puesto que X e Y son linealmente independientes ambos paréntesis deben ser nulos:

$$\lambda + \mu - 1 = 0, \qquad \lambda - \mu = 0,$$

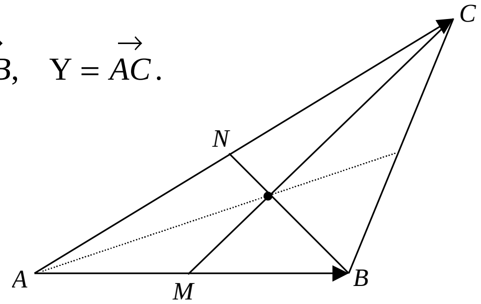
de donde resulta

$$\lambda = \mu = \frac{1}{2}.$$

Problema 2. Probar que las medianas de un triángulo se cortan en un punto situado en los dos tercios de cada una de ellas a partir del vértice correspondiente.

En el triángulo *ABC*, sean *M* y *N* los puntos medios de los lados *AB* y *AC*. Pongamos

$$\mathrm{X} = \overrightarrow{AB}, \quad \mathrm{Y} = \overrightarrow{AC}.$$



Luego: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\,X, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\,Y.$

Para hallar el punto de intersección de las medianas debemos encontrar dos números *l* y *m* tales que $\overrightarrow{AB} + \lambda\,\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC} + \mu\,\overrightarrow{CM}$; es decir,

$$\overrightarrow{AB} + \lambda\,(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} + \mu\,(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}),$$

o sea, $X + \lambda\left(\frac{1}{2}Y - X\right) = Y + \mu\left(\frac{1}{2}X - Y\right)$.

Pasando todos los términos a un mismo miembro y asociando adecuadamente,

$$\left(1 - \lambda - \frac{\mu}{2}\right)X \;+\; \left(\frac{\lambda}{2} - 1 + \mu\right)Y = 0.$$

La independencia lineal de los vectores X e Y hace necesario que ambos paréntesis sean iguales a cero, de donde resulta un sistema de dos ecuaciones lineales con las incógnitas λ y μ, cuya solución es

$$\lambda = \mu = \frac{2}{3}.$$

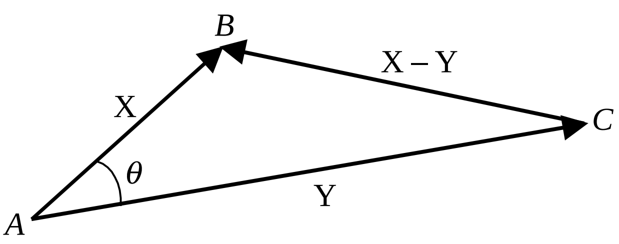
Puesto que la mediana correspondiente al vértice *A* se corta con las anteriores en la misma forma, se sigue que también ella pasa por el punto calculado.

Ángulo entre vectores; producto escalar 6

Dados dos vectores X e Y, a partir de cualquier punto *A* podemos construir segmentos orientados *AB* y *AC* con origen *A*, tales que

$$X = \overrightarrow{AB} \quad \text{e} \quad Y = \overrightarrow{AC},$$

como muestra la figura.



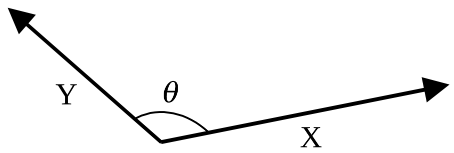
Llamando q al ángulo que forman dichos segmentos, el ***producto escalar*** de los vectores X e Y es, por definición, el número

$$X \cdot Y = \|X\|\,\|Y\|\,\cos\theta$$

Es decir: *norma de* X *por norma de* Y *por el coseno del ángulo comprendido entre ambos segmentos.* La definición es correcta porque el ángulo q es independiente de los puntos que se elijan para la construcción anterior (ángulos de lados paralelos del mismo sentido son congruentes). Por tal razón es legítimo referirse a q como '*el ángulo entre los dos vectores*' :

ángulo entre los vectores X e Y = q.

El ángulo entre los vectores puede ser obtuso, como muestra la figura, pero se define de modo que en cualquier caso verifique $0 \leq \theta \leq \pi$.



En el triángulo de la primera figura las longitudes de los lados son

$$\| \mathrm{X} \|, \quad \| \mathrm{Y} \| \quad \text{y} \quad \| \mathrm{X} - \mathrm{Y} \|,$$

de modo que aplicando el teorema del coseno podemos afirmar que

(1) $$\| \mathrm{X} - \mathrm{Y} \|^2 = \| \mathrm{X} \|^2 + \| \mathrm{Y} \|^2 - 2 \| \mathrm{X} \| \| \mathrm{Y} \| \cos\theta.$$

Supongamos ahora que tenemos expresados los vectores por sus componentes en un sistema de coordenadas ortogonales en la forma que hemos visto en el párrafo anterior:

$$\mathrm{X} = (x_1, x_2), \quad \mathrm{Y} = (y_1, y_2),$$

y por consiguiente, $\mathrm{X} - \mathrm{Y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$.

Reemplazando estos valores en la igualdad (1) obtenemos

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2\, \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y}.$$

Desarrollando los cuadrados del miembro izquierdo y cancelando los términos que aparecen en ambos miembros, resulta la igualdad

$$-2\, x_1 y_1 - 2\, x_2 y_2 = -2\, \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y},$$

de donde se obtiene la fórmula del producto escalar en cualquier sistema de coordenadas ortogonales:

(2) $$\boxed{\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2}$$

En particular,

$$\mathrm{X} \cdot \mathrm{X} = x_1^2 + x_2^2 = \| \mathrm{X} \|^2,$$

de donde

$$\| \mathrm{X} \| = \sqrt{\mathrm{X} \cdot \mathrm{X}}$$

La fórmula (2) permite probar con facilidad las propiedades básicas del producto escalar:

$$\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y}=\mathrm{Y}\cdot\mathrm{X}$$

$$\lambda\,\mathrm{X}\cdot\mu\,\mathrm{Y}=(\lambda\,\mu)\,\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y},$$

$$\mathrm{X}\cdot(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})=\ \mathrm{X}\cdot\mathrm{Y}\ +\ \mathrm{X}\cdot\mathrm{Z},$$

$$\mathrm{X}\cdot\mathrm{X}=0\quad\text{si y sólo si }\ \mathrm{X}=0.$$

Veamos, por ejemplo, la demostración de la tercera: si $\mathrm{Z}=(z_1,\,z_2)$, entonces

$$\mathrm{X}.(\mathrm{Y}+\mathrm{Z})=x_1(y_1+z_1)+x_2(y_2+z_2)=x_1y_1+x_2y_2+x_1z_1+x_2z_2=\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y}\ +\ \mathrm{X}\cdot\mathrm{Z}.$$

El producto escalar permite calcular el ángulo entre dos vectores no nulos. En efecto,

$$\cos\theta\ =\ \frac{\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y}}{\|\,\mathrm{X}\,\|\,\|\,\mathrm{Y}\,\|}\ =\ \frac{x_1y_1+x_2y_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \tag{3}$$

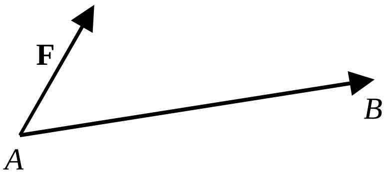
y valor del coseno determina el de q (siempre en radianes) en el intervalo [0, p] .

En particular, para que los vectores sean perpendiculares deberá ser $\cos\theta=0$; o sea, $\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y}=0$, de donde la siguiente definición: ***diremos que los vectores* X *e* Y *son ortogonales si el producto escalar de ambos es cero.***

Conviene destacar que según la definición adoptada el vector nulo es ortogonal a cualquier otro.

El producto escalar tiene su aplicación más tradicional en la Mecánica, donde el trabajo de una fuerza constante **F** a lo largo de un camino rectilíneo *AB* se define como el producto escalar $\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Por otra parte, hay ramos importantes de la Matemática, aparte la Geometría, en los que la noción de producto escalar proporciona un punto de vista geométrico para orientarse hacia la solución de muchos problemas.



Problema 3: Probar las relaciones

1) $\|\,\mathrm{X}+\mathrm{Y}\,\|^2=\|\,\mathrm{X}\,\|^2+\|\,\mathrm{Y}\,\|^2+2\,\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y}$

2) $\|\,\mathrm{X}-\mathrm{Y}\,\|^2=\|\,\mathrm{X}\,\|^2+\|\,\mathrm{Y}\,\|^2-2\,\mathrm{X}\cdot\mathrm{Y}$

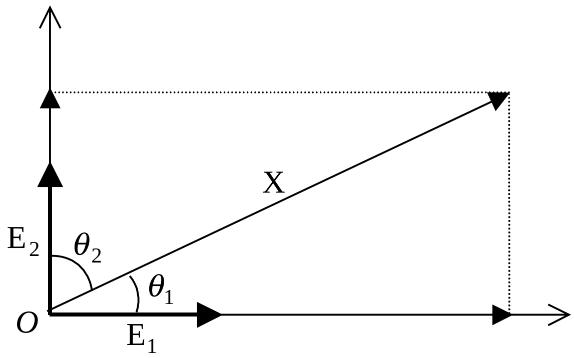
3) $(\mathrm{X}+\mathrm{Y})\cdot(\mathrm{X}-\mathrm{Y})=\|\,\mathrm{X}\,\|^2-\|\,\mathrm{Y}\,\|^2$

4) $\|\,\mathrm{X}+\mathrm{Y}\,\|^2+\|\,\mathrm{X}-\mathrm{Y}\,\|^2=2\,\|\,\mathrm{X}\,\|^2+2\,\|\,\mathrm{Y}\,\|^2$

La última, llamada *ley del paralelogramo*, expresa el hecho de que en un paralelogramo la suma de los cuadrados de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

Dos vectores del plano E_1 y E_2 mutuamente perpendiculares y de norma 1 forman una ***base ortonormal.***

Tomando dos segmentos orientados que representen a dichos vectores a partir de un origen común O obtendremos un sistema de coordenadas ortogonales como muestra la siguiente figura. Los ejes del sistema son las rectas que contienen a los segmentos.



Las condiciones para que E_1 y E_2 formen una base ortonormal son, pues, las siguientes:

$$E_1 \cdot E_2 = 0, \quad \| E_1 \| = 1, \quad \| E_2 \| = 1.$$

Consideremos ahora una vector X que forma con los vectores de la base sendos ángulos θ_1 y θ_2. Entonces tendremos

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2,$$

$$X \cdot E_1 = (x_1 E_1 + x_2 E_2) \cdot E_1 = x_1\ E_1 \cdot E_1 \ + \ x_2\ E_2 \cdot E_1 = x_1$$

y por otro lado

$$X \cdot E_1 = \| X \| \| E_1 \| \cos\theta_1 = \| X \| \cos\theta_1,$$

lo que demuestra que el número x_1 es la proyección ortogonal de X sobre el eje de E_1. Y en forma análoga se demuestra que x_2 es la proyección de X sobre el eje de E_2. De manera que expresando los vectores por sus componentes en el sistema considerado podemos escribir

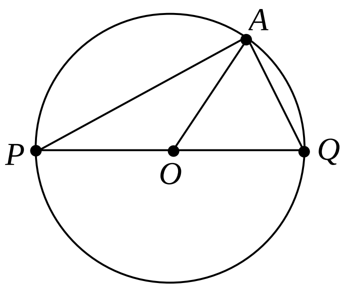
$$X = (x_1, x_2).$$

En particular, los vectores de la base se expresan así:

$$E_1 = (1, 0) \text{ y } E_2 = (0, 1).$$

Los siguientes ejemplos, que pueden darse a los alumnos en forma de problemas, tienen por objeto ilustrar la noción de producto escalar con algunas aplicaciones sencillas.

1. Probar que todos los ángulos inscriptos en una semicircunferencia son rectos.



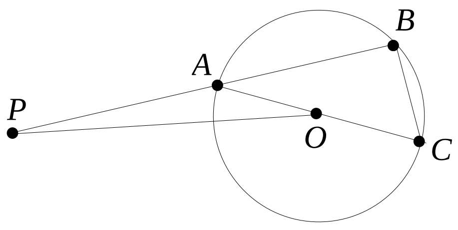
Sea PQ un diámetro de una circunferencia con centro O. Debemos probar que si A es un punto de la misma, los segmentos AP y AQ son perpendiculares.

En efecto, puesto que $\vec{OQ} = -\vec{OP}$,

$$\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = (\vec{AO} + \vec{OP}) \cdot (\vec{AO} + \vec{OQ}) = (\vec{AO} + \vec{OP}) \cdot (\vec{AO} - \vec{OP})$$

$$= \| \vec{AO} \|^2 - \| \vec{OP} \|^2 = 0.$$

2. Como segundo ejemplo vamos a introducir el concepto de potencia de un punto con respecto a una circunferencia.
Consideremos una circunferencia de centro O y radio r como muestra la siguiente figura. Siendo P un punto del plano, supongamos que una recta cualquiera que pasa por P corta a la circunferencia en los puntos A y B.



Nos proponemos demostrar que el producto

(1) $$\vec{PA} \cdot \vec{PB}$$

depende sólo de P y de la circunferencia.
Llamando C al punto diametralmente opuesto de A, tendremos:

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{BC}) = \vec{PA} \cdot \vec{PC} = (\vec{PO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{PO} + \vec{OC}).$$

De modo que llamando d a la distancia de P al centro O, el último miembro de las igualdades anteriores puede evaluarse así:

$$(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA}) = \| \overrightarrow{PO} \|^2 - \| \overrightarrow{OA} \|^2 = d^2 - r^2,$$

lo que demuestra que el producto (1) depende de la distancia de P al centro de la circunferencia y el radio de la misma, pero no de la recta que pasa por P. Este valor constante se llama *potencia de P con respecto a la circunferencia*.

La potencia de P es positiva si P es un punto exterior; negativa si es un punto interior y nula si P está sobre la circunferencia.

3. La ***identidad de Euler*** afirma que si A, B, C y M son cuatro puntos cualesquiera, entonces

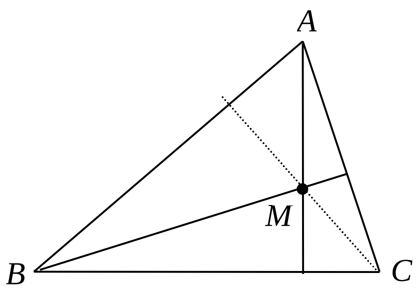
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Notemos el orden cíclico de los puntos A, B y C. Para probarla basta escribir

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}, \quad \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$$

y aplicar la propiedad distributiva del producto escalar.

En un triángulo ABC sea M el punto donde se cortan las alturas correspondientes a los vértices A y B.



Aplicando la identidad de Euler a estos cuatro puntos y teniendo en cuenta que en este caso particular

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \qquad \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0,$$

resulta también

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Es decir, la recta que pasa por M y C es la altura que corresponde al vértice C.

B VECTORES EN EL ESPACIO

Traslaciones en el espacio. 9

El concepto de vector en el espacio sólo difiere del que hemos estudiado en lo que respecta a la dimensión, que se refleja en el número de componentes y desempeña un papel secundario en muchos aspectos. De todos modos conviene hacer un resumen de las nociones básicas.

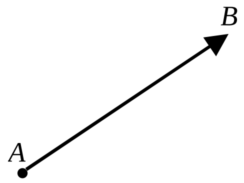
Se llama *desplazamiento paralelo o* ***traslación*** a un movimiento de todo el espacio con la propiedad de que dos puntos cualesquiera describen segmentos paralelos de igual longitud y del mismo sentido.

Hay que recordar que dos rectas del espacio son paralelas si están contenidas en un mismo plano y no tienen ningún punto común, o bien son idénticas. Segmentos contenidos en rectas paralelas se llaman paralelos.

Para indicar una traslación basta señalar un punto cualquiera y la posición que ocupa una vez trasladado. La traslación que lleva el punto A al punto B se llama ***vector AB*** y se designa por medio del símbolo $\overrightarrow{AB}$.

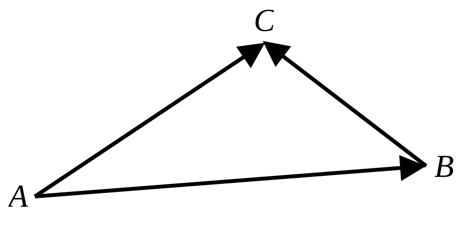
La condición para que dos segmentos orientados definan (o representen) al mismo vector es que sean paralelos y tengan la misma longitud y el mismo sentido.

El vector se indica gráficamente por medio de una flecha, como muestra la siguiente figura.



El siguiente paso es definir la ***composición (o suma)*** de traslaciones.

Si en forma sucesiva se realizan dos traslaciones: la traslación que lleva A a B seguida de la traslación que lleva B a C, el resultado será la traslación que lleva A a C, como ilustra la siguiente figura.



Igual que en el plano, simbolizamos este hecho mediante la ***relación de Möbius-Chasles***:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

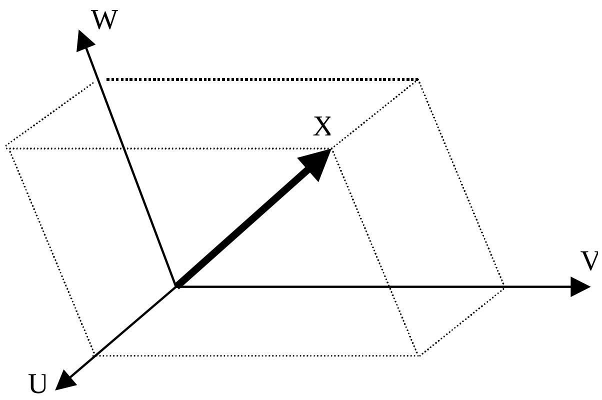
Esta relación (equivalente a la *regla del paralelogramo*) nos permite definir la suma de vectores: si $X = \overrightarrow{AB}$ e $Y = \overrightarrow{BC}$, el vector $\overrightarrow{AC}$ se llama suma de los vectores X e Y y se designa por $X + Y$.

Para probar que la composición de dos traslaciones es una traslación sólo se requieren las propiedades elementales del paralelogramo y el carácter transitivo del paralelismo de rectas en el espacio. Por lo demás la demostración es idéntica a la que hemos visto en el caso del plano.

Las definiciones de vector nulo, vector opuesto, diferencia de vectores y producto de un vector por un escalar, así como las propiedades de estas operaciones son idénticas a las ya estudiadas en el caso del plano. Pero para los alumnos puede ser útil un repaso de todas estas nociones con la ayuda de abundantes dibujos referidos al espacio que ayudan a desarrollar la tan necesaria "intuición espacial".

Bases de vectores en el espacio. 10

Tres vectores U, V y W que puedan representarse por segmentos concurrentes tales que ninguno de ellos se encuentre contenido en el plano que determinan los otros dos, forman una ***base*** de vectores en el espacio.



La propiedad fundamental de una base es la posibilidad de representar cualquier vector X como ***combinación lineal*** de los vectores de la base; es decir, en la forma

$$\mathrm{X} = \lambda\,\mathrm{U} + \mu\,\mathrm{V} + \nu\,\mathrm{W},$$

donde los números l, m y n, llamados ***componentes*** del vector en la base dada, son únicos.

La explicación de esta unicidad reside en el concepto de independencia lineal: los vectores U, V y W son ***linealmente independientes***; lo que significa que una igualdad de la forma

(1) $$\lambda\,\mathrm{U} + \mu\,\mathrm{V} + \nu\,\mathrm{W} = 0$$

sólo es posible si $\lambda = 0$, $\mu = 0$ y $\nu = 0$.

La demostración es por reducción al absurdo. Si fuera, por ejemplo, $\nu \neq 0$, entonces podríamos despejar W de la manera siguiente:

$$\mathrm{W} = -\frac{\lambda}{\nu}\,\mathrm{U} - \frac{\mu}{\nu}\,\mathrm{V},$$

de donde se deduciría que el segmento que representa a W estaría en el plano determinado por los segmentos que representan a U y V, en contra de lo que habíamos supuesto. Luego, $\nu = 0$; y análogamente se prueba que, necesariamente, $\mu = 0$ y $\lambda = 0$.

Supongamos ahora que algún vector X admite dos representaciones como combinación lineal de los vectores U, V y W:

$$\mathrm{X} = \lambda\,\mathrm{U} + \mu\,\mathrm{V} + \nu\,\mathrm{W} = \lambda'\,\mathrm{U} + \mu'\,\mathrm{V} + \nu'\,\mathrm{W}.$$

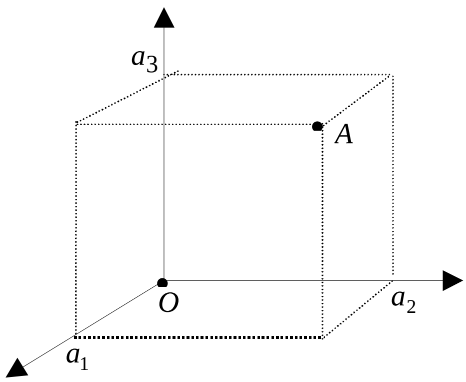
Pasando todos los términos al primer miembro y asociando adecuadamente, resulta

$$(\lambda - \lambda')\mathrm{U} + (\mu - \mu')\mathrm{V} + (\nu - \nu')\mathrm{W} = 0;$$

pero para que esta igualdad se cumpla deben anularse los tres paréntesis.
Es decir, $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, $\nu = \nu'$, lo que prueba la unicidad de la expresión (1).

Coordendas ortogonales y producto escalar. 11

Consideremos tres ejes coordenados mutuamente perpendiculares, en los que por comodidad se ha elegido la misma unidad de longitud, haciendo coincidir los ceros de las tres escalas numéricas en un punto *O* que llamamos ***origen*** de coordenadas.



Los planos perpendiculares a los ejes que pasan por un punto *A* cortan a los ejes en ciertos puntos cuyas abscisas, a_1, a_2, a_3 llamadas ***coordenadas de A,*** determinan la posición del punto.

Suponiendo que $\mathrm{X} = \overrightarrow{AB}$, designemos las coordenadas de A por a_1, a_2, a_3 y las de B por b_1, b_2, b_3. Entonces los números:

$x_1 = b_1 - a_1$, $x_2 = b_2 - a_2$, $x_3 = b_3 - a_3$, llamados proyecciones del segmento *AB*,

que son los mismos para todos los segmentos orientados que representan al vector X, se llaman **componentes** del vector.

El hecho de que todos segmentos orientados que definen el mismo vector tengan las mismas proyecciones sobre cada eje se demuestra fácilmente con algunos rudimentos de geometría del espacio. Recíprocamente, dos segmentos orientados con las mismas proyecciones definen el mismo vector.

Una vez elegido el sistema de coordenadas cada vector se identifica por sus componentes, por lo que resulta natural escribir $\mathrm{X} = (x_1, x_2, x_3)$.

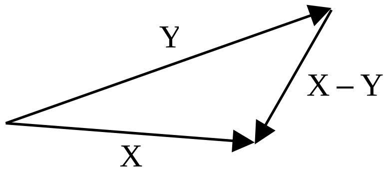
El número $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, que representa la longitud del segmento *AB*, se llama ***norma de* X** y se designa por $\| \mathrm{X} \|$. Es decir,

$$\| \mathrm{X} \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Las operaciones vectoriales se expresan de manera muy natural en términos de componentes: si $\mathrm{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, entonces

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \qquad \lambda \mathrm{X} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$
$$-\mathrm{X} = (-x_1, -x_2, -x_3), \qquad \mathrm{X} - \mathrm{Y} = \mathrm{X} + (-\mathrm{Y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3).$$

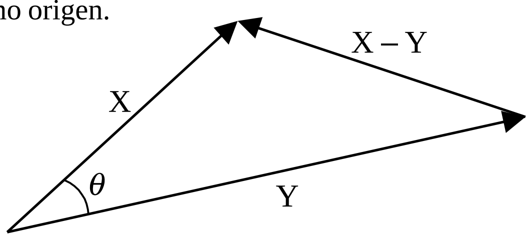
Una importancia especial tiene la interpretación geométrica de la diferencia:



El producto escalar se define del mismo modo que en el plano:

$$\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} = \| \mathrm{X} \| \, \| \mathrm{Y} \| \cos\theta,$$

donde q es el ángulo de los vectores, es decir, el que forman los segmentos orientados que los representan a partir de un mismo origen.



Entonces el teorema del coseno nos da la relación

$$\| \mathrm{X} - \mathrm{Y} \|^2 = \| \mathrm{X} \|^2 + \| \mathrm{Y} \|^2 - 2\, \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y},$$

de donde, expresando las normas en función de los componentes, se obtiene la fórmula del producto escalar en cualquier sistema de coordenadas ortogonales:

$$\boxed{\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}$$

Las propiedades básicas del producto escalar son las siguientes:

(1) $\mathrm{X} \cdot \mathrm{X} = \| \mathrm{X} \|^2$ (2) $\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} = \mathrm{Y} \cdot \mathrm{X}$

(3) $(\lambda \mathrm{X}) \cdot \mathrm{Y} = \lambda (\mathrm{X} \cdot \mathrm{Y})$ (4) $\mathrm{X} \cdot (\mathrm{Y} + \mathrm{Z}) = \mathrm{X} \cdot \mathrm{Y} + \mathrm{X} \cdot \mathrm{Z}$

(5) $\| \lambda \mathrm{X} \| = |\lambda| \, \| \mathrm{X} \|$

Ejercicio. Probar que $X \cdot (Y - Z) = X \cdot Y - X \cdot Z$.

El producto $X \cdot X$ se designa frecuentemente por X^2. Así, por ejemplo, suele escribirse

$$(X + Y) \cdot (X - Y) = X^2 - Y^2.$$

Dos vectores X eY se llaman ***ortogonales*** (o perpendiculares) si $X \cdot Y = 0$.

Los vectores

$$E_1 = (1, 0, 0), \quad E_2 = (0, 1, 0) \quad \text{y} \quad E_3 = (0, 0, 1)$$

forman lo que se llama una ***base ortonormal***, lo que significa que son ortogonales y tienen norma 1, según se resume en el cuadro siguiente:

$$E_i \cdot E_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Finalmente, cada vector X admite una única representación de la forma

$$X = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3.$$

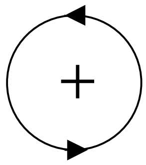
La única elección posible es $\lambda_1 = x_1$, $\lambda_2 = x_2$, $\lambda_3 = x_3$.

Orientación. 12

El concepto matemático de orientación no es trivial, pero resulta útil e interesante por estar relacionado con algunos fenómenos llamativos. El desafío didáctico consiste en hacer comprender la importancia del tema y la conveniencia de admitir sin demostración algunos enunciados aceptables desde un punto de vista intuitivo.

Comenzaremos por enumerar algunos hechos:

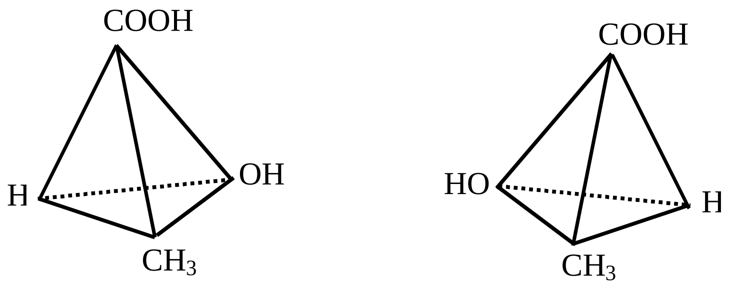
- La imagen en el espejo de una mano izquierda es una mano derecha.
- Algunos carteles suelen pintarse al revés en el frente de ambulancias y patrulleros policiales para que puedan leerse cómodamente en los espejos retrovisores de los otros vehículos.
- Al dar vuelta un guante de la mano derecha resulta un guante de la mano izquierda.
- Supongamos que en un plano se ha elegido como positivo el sentido de rotación "antihorario", como suele hacerse. Al mirar el plano desde el semiespacio opuesto el sentido de rotación positivo será "horario".
- Sobre una hoja de papel trazamos una circunferencia con una flecha que indique el sentido positivo ("antihorario") de rotación como muestra el siguiente dibujo:



Observe que al colocar esta figura frente a un espejo el sentido positivo se transforma en "horario" en el plano de la imagen.

La conclusión que se extrae de estas experiencias es que las denominaciones "horario" y "antihorario" son puramente convencionales; y que el único recurso lógicamente aceptable consiste en elegir arbitrariamente un sentido de rotación y declararlo positivo, señalando como negativo el sentido opuesto.

- Hay substancias con propiedades diferentes a pesar de tener la misma composición química, como es el caso de los isómeros ópticos del ácido láctico, cuyas estructuras moleculares se describen por medio de los siguientes esquemas:



En el centro de cada tetraedro se ubica un átomo de carbono.

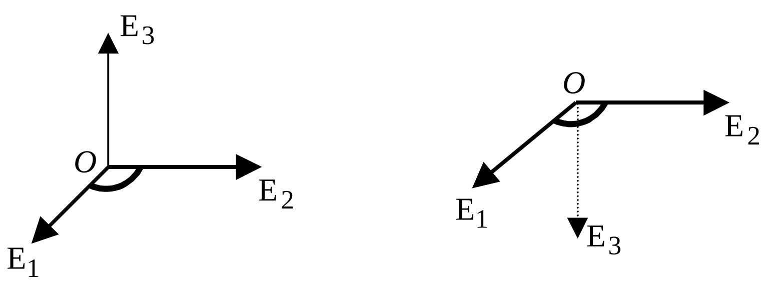
¿En qué difieren esas dos moléculas? Notemos que cada una de ellas parece la imagen especular de la otra y que no hay manera de superponerlas sin "abrir" uno de los tetraedros y "darlo vuelta" como si fuera un guante.

- Para determinar el sentido de la fuerza que actúa sobre una carga eléctrica que se mueve en un campo magnético suele usarse en textos de Física la "regla de la mano derecha".

Los fenómenos mencionados se vinculan con una propiedad sutil que poseen la recta, el plano y el espacio y se conoce con el nombre de ***orientabilidad***.

En adelante supondremos que los vectores de cualquier base se dan en cierto orden, formando una ***base ordenada***.

La figura siguiente muestra dos bases ordenadas de distinta naturaleza. En una de ellas los vectores E_1, E_2 y E_3 pueden adaptarse a los dedos pulgar, índice y mayor de la mano derecha, respectivamente, por lo que se dice que es una ***terna derecha***.

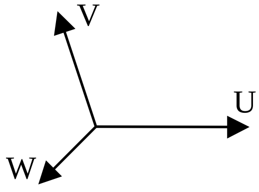


En la otra ocurre algo análogo, pero con los dedos correspondientes de la mano izquierda, por lo que decimos que es una ***terna izquierda***.

Las clases formadas por las ternas derechas y las ternas izquierdas representan los dos sentidos opuestos en que puede orientarse el espacio, del mismo modo que en cada recta hay dos sentidos de recorrido y en cada plano dos sentidos de rotación.

La condición para que dos bases ortonormales puedan superponerse por un movimiento continuo de modo que cada vector de una de ellas coincida con el vector correspondiente de la otra es que sean de la misma clase.

El concepto de orientación puede aplicarse a bases ordenadas generales, como las descriptas al final del parágrafo anterior:

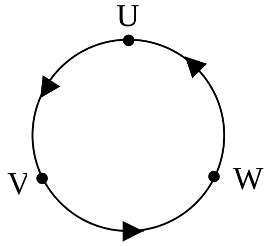


Las bases del espacio se dividen en dos clases, cada una de las cuales define una orientación (o sentido de rotación) en el espacio. Así, {U,V,W} es una base derecha si se supone que U y V se encuentran en el plano de la hoja, mientras W se dirige hacia la vista del lector. En tal caso {V,U,W} es una base izquierda.

Al estudiar las propiedades del producto vectorial, en la siguiente sección, daremos un criterio algebraico para decidir si dos bases cualesquiera son o no de la misma clase, es decir si definen la misma o distinta orientación del espacio.

Para elegir la orientación positiva basta atribuir ese signo a una base ordenada. Las que tengan la orientación opuesta serán negativas.

Así, las bases {U, V, W}, {V, W, U} y {W, U, V} tienen la misma orientación. Notemos la preservación del orden cíclico:



En cambio las bases {V, U, W}, {U, W, V} y {W, V, U} tienen la orientación opuesta: si las tres primeras son positivas, las últimas son negativas y viceversa.

Producto vectorial y producto mixto. 13

Comenzaremos por elegir un sistema de coordenadas ortogonales con origen en un punto *O*, como se ha descripto en el párrafo 11. Los vectores, identificados por sus componentes en dicho sistema, serán representados por segmentos orientados con origen en un punto *A*:

$$\mathrm{X} = \overrightarrow{AB} = (x_1, x_2, x_3), \quad \mathrm{Y} = \overrightarrow{AC} = (y_1, y_2, y_3) \ , \text{ etc.}$$

Adoptamos como orientación positiva la de la terna ortonormal $\{\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{E}_3\}$

$$\mathrm{E}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathrm{E}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathrm{E}_3 = (0, 0, 1).$$

Supongamos primero que X e Y son distintos de cero y forman un ángulo *q* que verifica las relaciones $0 < \theta < \pi$.

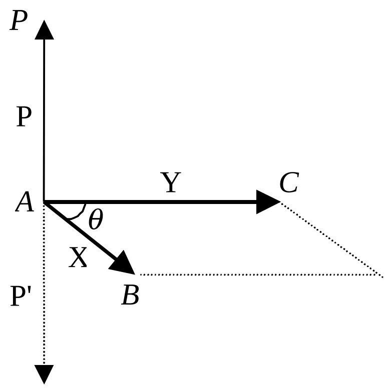
En tales condiciones, **el producto vectorial** $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ se define como el vector $\mathrm{P} = \overrightarrow{AP}$ con las siguientes propiedades:

1) P es ortogonal a los vectores X e Y; es decir, $\mathrm{P} \cdot \mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{P} \cdot \mathrm{Y} = 0$;

2) $\| \mathrm{P} \| = \| \mathrm{X} \| \| \mathrm{Y} \| \operatorname{sen} \theta$;

3) La terna X, Y, P tiene orientación positiva.

En el siguiente diagrama hemos representado el producto vectorial suponiendo que la orientación positiva del espacio es "derecha".



La norma de P es el área del paralelogramo que tiene por lados a los segmentos *AB* y *AC*, que suele llamarse *paralelogramo generado* por los vectores X e Y.

Si la orientación del espacio fuera "izquierda" el producto vectorial sería el vector opuesto $\mathrm{P}' = -\mathrm{P}$.

Para completar la definición convendremos en que el producto vectorial es nulo si lo es alguno de los vectores, o bien si el ángulo *q* toma alguno de los valores extremos 0 o p.

De la definición se deducen fácilmente las siguientes propiedades:

(1) $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = - \mathrm{Y} \times \mathrm{X}$

(2) $(-\mathrm{X}) \times \mathrm{Y} = -(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$

(3) $(\lambda \mathrm{X}) \times \mathrm{Y} = \lambda (\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathrm{X} \times (\lambda \mathrm{Y})$

La tercera es inmediata en el caso $\lambda > 0$; para l negativo se reduce fácilmente al caso anterior con ayuda de la propiedad (2).

Las siguientes fórmulas se obtienen también fácilmente a partir de la definición:

$$(4) \qquad \begin{cases} E_1 \times E_2 = E_3 = -E_2 \times E_1 \\ E_2 \times E_3 = E_1 = -E_3 \times E_2 \\ E_3 \times E_1 = E_2 = -E_1 \times E_3 \end{cases}$$

Ejercicio. Probar que $X \times X = 0$. En particular, $E_i \times E_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

El producto vectorial es distributivo, es decir, que goza de la siguiente propiedad:

$$(5) \qquad X \times (Y + Z) = X \times Y \; + \; X \times Z;$$

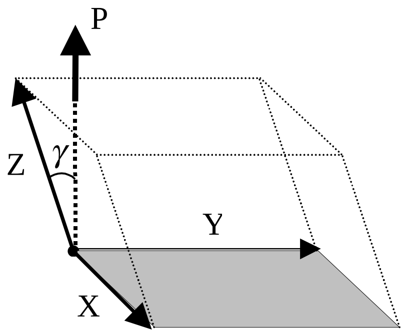
pero la demostración de esta fórmula se dará después de haber interpretado el producto mixto, que definimos a continuación.

Definición: ***El número*** $(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{Z}$ ***se llama 'producto mixto' de los vectores X, Y y Z .***

En primer lugar notemos que el paréntesis puede omitirse, escribiendo simplemente $X \times Y \cdot Z$. En efecto, la interpretación $X \times (Y \cdot Z)$ sería inconsistente con la definición de producto vectorial, en vista de que $Y \cdot Z$ es un número y el producto vectorial se aplica solamente a pares de vectores.

Comencemos por interpretar geométricamente el producto mixto.

Probaremos primero que si los vectores son linealmente independientes y la terna X, Y, Z tiene orientación positiva, el producto mixto representa el volumen del paralelepípedo w engendrado por los tres vectores, que hemos representado en la siguiente figura:



Poniendo $P = X \times Y$ y llamando g al ángulo comprendido entre los vectores P y Z, si tenemos en cuenta que $\gamma < \pi / 2$ y $\| Z \| \cos \gamma$ es la altura de w, tendremos:

$$X \times Y \cdot Z = P \cdot Z = \| P \| \| Z \| \cos \gamma \; = \; \text{área de la base} \times \text{altura de } w,$$

que es precisamente el volumen de w.

Si la terna X, Y, Z tiene orientación negativa, entonces

$$X \times Y \cdot Z = -(Y \times X) \cdot Z = - \text{ volumen de } w.$$

Resumiendo:

$$X\times Y\cdot Z=\begin{cases}\ \ \text{volumen de }\omega\\ -\text{volumen de }\omega\end{cases}$$

según que la terna X,Y,Z tenga orientación positiva o negativa.

Una consecuencia de esta interpretación geométrica es que el producto mixto es cero sólo si los vectores X, Y, Z son *linealmente dependientes* (es decir, que pueden representarse por segmentos coplanares).

La interpretación geométrica del producto mixto nos conduce al siguiente corolario:

Corolario. $X\times Y\cdot Z \ = \ Z\times X\cdot Y \ = \ Y\times Z\cdot X$ (notemos la preservación del orden cíclico entre los tres vectores).

Para probar la distributividad del producto vectorial nos basaremos en la propiedad distributiva del producto escalar y en una afirmación muy sencilla:
Un vector X que verifique

$$X\cdot W=0 \text{ para cualquier vector W}$$

debe ser nulo. En efecto, eligiendo $W=X$ tendremos , $X\cdot X=0$ de donde se sigue que $X=0$. Veamos ahora la demostración de la propiedad distributiva:

Debemos probar que $X\times(Y+Z)-X\times Y-X\times Z$ es el vector nulo. Para ello calcularemos su producto escalar con un vector arbitrario W:

$$[X\times(Y+Z)-X\times Y-X\times Z]\cdot W=X\times(Y+Z)\cdot W \ - \ X\times Y\cdot W \ - \ X\times Z\cdot W.$$

Permutando los factores de cada producto mixto sin alterar el orden cíclico, podemos escribir el segundo miembro de esta igualdad en la forma

$$W\times X\cdot(Y+Z)-W\times X\cdot Y-W\times X\cdot Z\ ;$$

o bien, extrayendo el factor común $W\times X$,

$$W\times X\cdot(Y+Z-Y-Z)=W\times X\cdot 0=0\ ,$$

lo que demuestra la distributividad del producto vectorial.

Vamos a obtener los componentes del producto vectorial en el sistema de coordenadas que estamos utilizando. Supongamos que

$$X=(x_1,x_2,x_3)=x_1E_1+x_2E_2+x_3E_3,\quad Y=(y_1,y_2,y_3)=y_1E_1+y_2E_2+y_3E_3\ .$$

Entonces la propiedad distributiva (5) juntamente con las fórmulas (4) nos permiten calcular el producto vectorial:

$$\begin{aligned}X\times Y&=x_1y_2E_1\times E_2+x_1y_3E_1\times E_3+x_2y_1E_2\times E_1+x_2y_3E_2\times E_3\\&\quad+x_3y_1E_3\times E_1+x_3y_2E_3\times E_2\\&=(x_2y_3-x_3y_2)E_1+(x_3y_1-x_1y_3)E_2+(x_1y_2-x_2y_1)E_3\end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{X \times Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2,\ x_3 y_1 - x_1 y_3,\ x_1 y_2 - x_2 y_1).}$$

En cuanto al producto mixto, si $Z = (z_1, z_2, z_3)$, entonces tendremos:

$$X \times Y \cdot Z = (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3.$$

La última expresión es un determinante. Más precisamente:

$$X \times Y \cdot Z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Supongamos que los vectores X, Y y Z son linealmente independientes. La condición para que la base $\{X, Y, Z\}$ tenga la misma orientación que la terna ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ es que el producto mixto $X \times Y \cdot Z$ sea el volumen del paralelepípedo engendrado por los tres vectores (necesariamente positivo).
Obtenemos así un criterio puramente algebraico para determinar si las bases ordenadas

$$\{X, Y, Z\} \ \text{ y } \ \{E_1, E_2, E_3\}$$

tienen la misma orientación u orientaciones opuestas.

La condición para dichas bases tengan la misma orientación es que el determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

sea positivo. Si el determinante es negativo, las orientaciones son opuestas.

Con recursos muy elementales del Álgebra Lineal el criterio se generaliza fácilmente a dos bases cualesquiera y sirve para definir en forma abstracta (sin auxilio de las manos) el concepto matemático de orientación. El enunciado es el siguiente:

Siendo $\{X, Y, Z\}$ y $\{U, V, W\}$ dos bases cualesquiera, escribamos los vectores de una de ellas como combinación lineal de los vectores de la otra base:

$$\begin{cases} U = a_1 X + a_2 Y + a_3 Z \\ V = b_1 X + b_2 Y + b_3 Z \\ W = c_1 X + c_2 Y + c_3 Z. \end{cases}$$

Entonces diremos que dichas bases tienen la misma orientación si la matriz del cambio de base:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

tiene determinante positivo. En cambio diremos que las bases tienen orientaciones opuestas si el determinante de la matriz (6) es negativo.

Para comprender el criterio no hay más que realizar el cambio de base en dos etapas:

$$\{X, Y, Z\} \to \{E_1, E_2, E_3\} \to \{U, V, W\},$$

teniendo en cuenta que la matriz de la composición es el producto de las matrices y el determinante del producto es el producto de los determinantes.

En conclusión, no hemos hecho más que dividir el conjunto de todas las bases del espacio en dos clases por medio de una relación de equivalencia: dos bases son equivalentes si la matriz del cambio de base entre ambas tiene determinante positivo.

Estas clases representan las dos posibles ***orientaciones*** del espacio; y es claro que cualquier base pertenece a una de las dos orientaciones. Para orientar el espacio sólo hay que elegir una base y declararla positiva; las que tengan la orientación opuesta serán negativas.

Acerca de la notación

Las notaciones para los vectores difieren mucho según el tema, muchas veces por necesidad. En los párrafos siguientes los vectores se denotan con letras negrillas, mayúsculas o minúsculas, según convenga.

Aplicación: el teorema de la palanca. 14

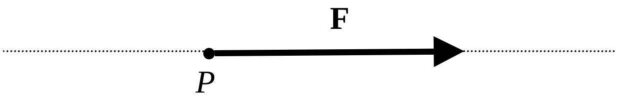
El estudio de la palanca y la noción de baricentro fueron desarrollados por dos grandes geómetras de la antigüedad: Arquímedes (s. -III) y Pappus (s. III y IV), con los recursos geométricos de su época. Los teoremas de Pappus sobre el baricentro, referidos a cuerpos y superficies de revolución, fueron redescubiertos por el suizo P.H. Guldin (1577-1643).

Recordemos que por ***palanca*** se entiende un cuerpo rígido, idealmente sin peso, con un vínculo que sólo le permite rotar en torno a un punto fijo llamado ***punto de apoyo***.

Como aplicación del producto vectorial nos proponemos analizar un problema muy antiguo. El problema consiste en hallar la condición para que un sistema de fuerzas que actúan en distintos puntos de una palanca en direcciones arbitrarias, se encuentre en equilibrio.

Una vez elegido un sistema de coordenadas con origen O, el vector $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$, cuyos componentes x, y, z son las coordenadas del punto A, se llama ***vector posición*** de A.

Para nuestro propósito conviene pensar cada fuerza como un par (P, **F**), donde P es el punto de aplicación y **F** un vector que representa las propiedades vectoriales de la fuerza (dirección, sentido e intensidad), como se ilustra en la figura.



La recta dirigida por **F** que pasa por P es la *recta de acción* de la fuerza; dos fuerzas cuyas rectas de acción concurren en un punto se llaman *concurrentes*.

Nuestras deducciones se basarán en unos postulados muy sencillos. Aceptamos que el estado de equilibrio (o desequilibrio) de la palanca no se altera cuando se realiza alguna de las siguientes operaciones:

A) *Trasladar el punto de aplicación de una fuerza a cualquier otro punto de su recta de acción.*

B) *Substituir dos fuerzas* $(P_1, \mathbf{F}_1)$ *y* $(P_2, \mathbf{F}_2)$ *que concurren en un punto* P *por la fuerza única* $(P, \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$ ***(regla del paralelogramo)**.*

C) *Agregar (o eliminar) cualquier fuerza cuya recta de acción pase por el punto de apoyo.*

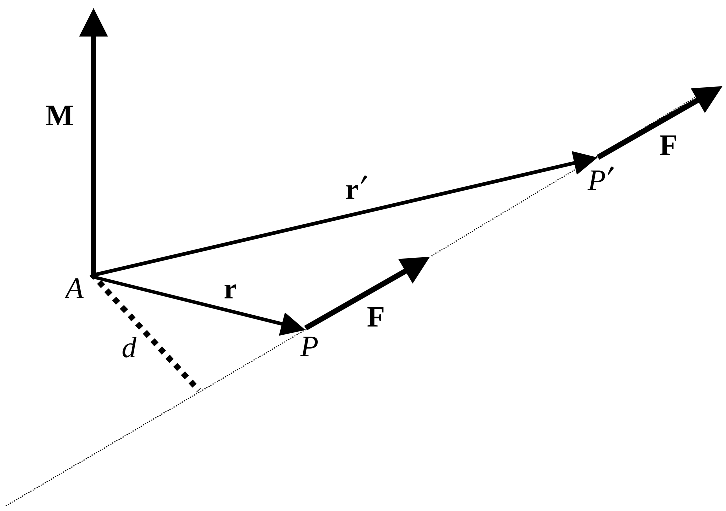
A los anteriores agregamos un último enunciado.

D) *bajo la acción de una fuerza única (P,* **F***), la condición de equilibrio es que el vector* **F** *sea nulo, o bien que la recta de acción de* **F** *pase por el punto de apoyo.*

Sea $\mathbf{r} = \overrightarrow{AP}$ el vector que determina el segmento orientado AP. Por definición, el ***momento*** de la fuerza $(P, \mathbf{F})$ con respecto al punto A es el producto vectorial

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{AP} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Recordando la definición del producto vectorial es fácil ver que la norma de **M** es Fd, donde F es la norma de **F** y d la distancia del punto A a la recta de acción de la fuerza.



Si se traslada el punto de aplicación de la fuerza hasta un punto P' de su recta de acción (figura anterior), el nuevo momento será

$$\mathbf{M}' = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \lambda \mathbf{F}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}.$$

Esto prueba que ***el momento de una fuerza no varía al trasladar el punto de aplicación a cualquier otro punto de su recta de acción.***

Pensemos ahora en un sistema de n fuerzas actuando sobre la palanca, cuyos momentos con respecto al punto de apoyo A son $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots \mathbf{M}_n$. Queremos probar que ***la condición de equilibrio es que la suma de estos momentos sea nula*** (teorema de la palanca).

El caso de una sola fuerza ($n = 1$) es consecuencia inmediata del principio (D).

En el caso general, podemos suponer que ninguna recta de acción pasa por A, ya que las fuerzas que no cumplan esta condición tienen momento nulo y pueden eliminarse en virtud de (C). Siendo, $n \geq 2$

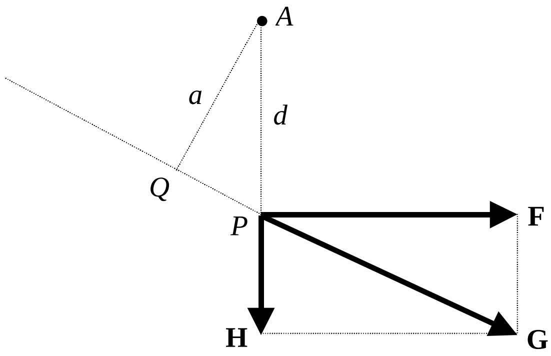
consideremos un sistema formado por n fuerzas $(P_1, \mathbf{F}_1), (P_2, \mathbf{F}_2), \ldots, (P_n, \mathbf{F}_n)$.

La idea de la demostración es que podemos substituir las dos primeras fuerzas por otras dos $(P_1, \mathbf{G}_1)$ y $(P_2, \mathbf{G}_2)$ concurrentes en un punto P, con los mismos momentos que las primeras (la demostración se posterga por un 'momento'). A su vez, las dos últimas pueden substituirse por la única fuerza $(P, \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2)$. Entonces el nuevo sistema, equivalente al inicial, tiene una fuerza menos pero la misma suma de momentos que el de partida. En efecto, por la distributividad del producto vectorial,

$$\overrightarrow{AP} \times (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2) = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

El caracter inductivo de la demostración es ahora evidente, por lo que omitiremos el resto de los detalles; aunque nos queda aún por demostrar la afirmación postergada.

La figura siguiente muestra cómo puede 'torcerse' una fuerza sin variar su momento con respecto al punto de apoyo: agregamos al sistema la fuerza $(P, \mathbf{H})$ cuya recta de acción pasa por A. Ahora podemos substituir $(P, \mathbf{F})$ por $(P, \mathbf{G})$, cuyo momento, con la misma dirección y sentido que los de $(P, \mathbf{F})$, tiene norma $Ga = Fd$ donde $G = \|\mathbf{G}\|$ y $F = \|\mathbf{F}\|$, lo que demuestra que los momentos de ambas fuerzas son iguales.



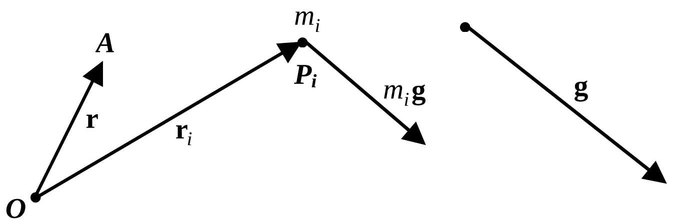
Notemos que tampoco ha variado el 'plano de acción' de **F** (el que determinan la recta de acción de **F** y el punto A).

Por último, se comprende que 'torciendo' adecuadamente, podemos lograr que dos fuerzas cualesquiera concurran en un punto situado sobre la intersección de sus planos de acción. **Q.E.D**.

Baricentro de un sistema finito de masas puntuales 15

Consideremos un cuerpo rígido formado por un número finito de masas puntuales m_i ubicadas en ciertos puntos P_i cuyos vectores de posición con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas con origen O son

$$\mathbf{r}_i = \overrightarrow{OP_i} = (x_i, y_i, z_i) \quad (\mathrm{i} = 1, 2, ..., \mathrm{n}).$$



¿Dónde hemos de colocar el punto de apoyo A para que por acción de las fuerzas de gravedad $m_i\mathbf{g}$ la palanca se encuentre en equilibrio, cualquiera que sea el vector de aceleración de la gravedad **g**?

Poniendo $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ (vector posición de *A)*, es claro que nuestro propósito estará logrado si para cualquier vector **g**, se cumple

$$\sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \times m_i \mathbf{g} \;=\; \sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \times \mathbf{g} \;=\; \mathbf{0}$$

es decir, si $\sum_i m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Para esto sólo hace falta que se cumpla

$$\left(\sum m_i\right)\mathbf{r} = \sum m_i \mathbf{r}_i$$

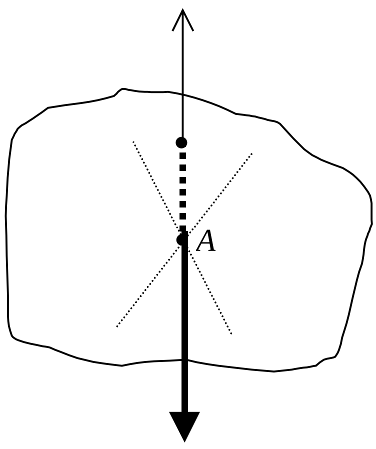
Es decir,

$$\mathbf{r} \;=\; \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

El punto A cuyo vector de posición acabamos de calcular se llama ***baricentro*** del sistema. Las coordenadas del baricentro son los componentes de **r,** a saber:

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\,, \qquad y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}\,, \qquad z = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Suspendido desde el baricentro el cuerpo queda en "equilibrio indiferente". O bien: suspendiendo el cuerpo desde uno cualquiera de sus puntos, la prolongación de la vertical pasa por el baricentro; una propiedad que permite hallar en forma experimental el baricentro de una placa de forma irregular como la que muestra la figura.



Para que el teorema de la palanca siga siendo válido en el caso de palancas materiales (con peso propio) basta colocar el punto de apoyo en el baricentro de la palanca.

APÉNDICE. Invariancia del baricentro por transformaciones afines.

En este apéndice adoptamos la costumbre muy difundida de designar cada punto A del espacio por su vector de posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ con respecto a un sistema de coordenadas.

En Matemáticas se llama ***baricentro*** de un sistema finito de puntos

$$\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \ \ (i = 1, 2, ..., n)$$

afectados por masas positivas m_i, al punto

$$\mathbf{r} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$$

Aquí las "masas positivas" son simplemente números positivos que se asignan a los puntos del sistema, de modo tal que al punto $\mathbf{r}_i$ se le asigna el número m_i.

Queremos probar que ***la posición del baricentro es independiente del sistema de coordenadas***, pero de una manera independiente de toda noción física.

Consideremos un cambio de coordenadas de la forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix},$$

donde la matriz cuadrada del segundo miembro es inversible; que es lo que se entiende por ***transformación afín***.

Poniendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ y $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$, podemos escribir dicha transformación en la forma más concisa:

$$\mathbf{r}' = \psi(\mathbf{r}) + \mathbf{h},$$

donde ψ es una aplicación lineal inversible de $\mathbf{R}^3$ en sí mismo y $\mathbf{h}$ un vector que representa una traslación. La posición de los puntos $\mathbf{r}_i$ en el nuevo sistema de coordenadas está dada por los vectores:

$$\mathbf{r}_i' = \psi(\mathbf{r}_i) + \mathbf{h} \ \ (i = 1, 2, ..., n)$$

Por tanto, la posición del baricentro en el nuevo sistema de coordenadas será:

$$\mathbf{r}' = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i'}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i [\psi(\mathbf{r}_i) + \mathbf{h}]}{\sum m_i} = \psi\left(\frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}\right) + \mathbf{h} \ = \psi(\mathbf{r}) + \mathbf{h},$$

lo que prueba nuestra afirmación.

Cuando las masas m_i son todas iguales, el baricentro del sistema es el promedio

$$\mathbf{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i$$