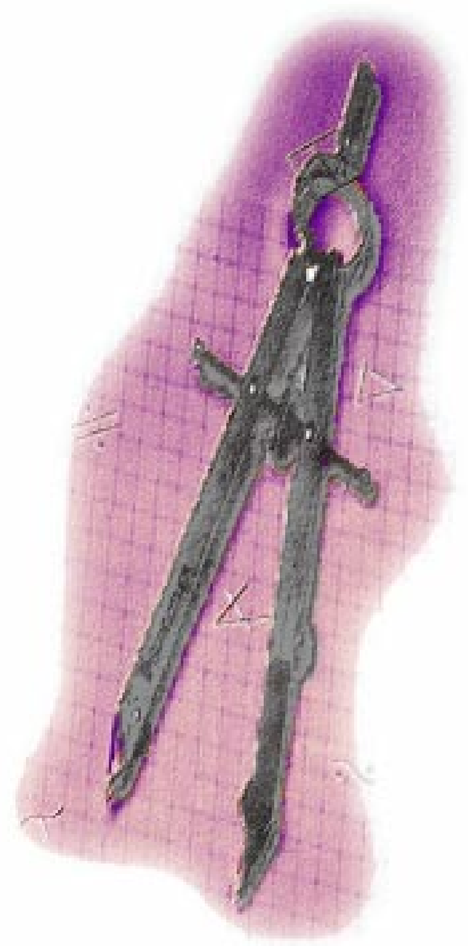
Representación gráfica de funciones



Gustavo Corach y Norberto Fava

Con la colaboración de

Liliana Bronzina y Pilar Varela

Calidad de la Educación

Presidente de la Nación
Dr. CARLOS SAÚL MENEM

Ministro de Cultura y Educación de la Nación
Dr. MANUEL GARCÍA SOLÁ

Secretario de Programación y Evaluación Educativa
Prof. SERGIO LUIS ESPAÑA

Subsecretario de Evaluación Educativa
Lic. PABLO NARVAJA

Subsecretaria de Gestión Educativa
Lic. IRENE BEATRIZ KIT

Director del Instituto Nacional de Educación Técnica
Prof. CARLOS PALACIO

Directora Nacional de Evaluación
Lic. MARÍA LUCRECIA TULIC

Equipo de Coordinación

Lic. Ana Diamant
Prof. Graciela Maciel
Ing. Carlos Rondón Cardoso
C.P.N. Luis Zipitría

Equipo de Edición

Arq. Javier Maiza
Dibj. Héctor Martín
Sra. Rosana Masini
Ddra. Coralia Vignau

Índice

Representación gráfica de funciones

1 Variables y constantes

Cualquier símbolo tal como x, y, z, etc., que sirva para representar un elemento arbitrario (no especificado) de cierto conjunto X se llama ***variable***; el conjunto es el ***dominio*** de la variable y cada elemento de X un ***valor*** de la misma.
Para indicar que a la variable x le asignamos el valor a, escribimos $x = a$.

Ejemplos

1) El símbolo x en la afirmación:

"si $0 < x < 1$, entonces $x^2 < x$"

es una variable cuyo dominio es el conjunto de los números reales.

2) El dominio de la variable n del enunciado:

"la sucesión $\frac{1}{n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito",

es el conjunto de los enteros positivos.

Para representar números reales suelen usarse las últimas letras del alfabeto:

$$x, y, z, u, v, w, r, s, t, ...,$$

a veces acompañadas por algún subíndice:

$$x_1, x_2, x_3, ..., y_1, y_2, y_3, ..., \text{etc.}$$

Definición Las variables cuyos dominios son *intervalos* de números reales se llaman ***variables reales*** (usamos la noción de intervalo en un sentido amplio que incluye a las semirrectas, abiertas o cerradas, y aun a toda la recta real).

En el extremo opuesto, cualquier símbolo que represente un objeto determinado se llama ***constante***. Por ejemplo, son constantes los símbolos:

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \sqrt{2},\ \frac{5}{3},\ \pi,\ e,\ i,\ +,\ =,\ \text{etc.}$$

Una de las constantes más destacadas de la Física es la que representa la velocidad de la luz en el vacío, cuyo valor aproximado es:

$$c = 3\times 10^5\ \frac{km}{s} = 3\times 10^8\ \frac{m}{s}.$$

2 Funciones

Supongamos que entre dos variables x e y se ha establecido una relación f mediante la cual cada valor de x determina unívocamente el valor de y. Entonces decimos que y es función de x y escribimos $y = f(x)$. El símbolo x se llama ***variable independiente***, mientras que y se llama ***variable dependiente***. El dominio de la variable independiente se llama también ***dominio de la función***. Finalmente, las funciones que relacionan variables reales se llaman ***funciones reales*** o ***numéricas***.

Cuando se trata de funciones numéricas, la relación funcional suele expresarse por medio de una fórmula que indica explícitamente cómo obtener el valor de y dado x, como en los siguientes ejemplos:

$$y = 3x - 1,$$

$$y = x,$$

$$y = x^2,$$

$$y = sen\ x,$$

$$y = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)\ ,\ \text{etcétera.}$$

En todos estos casos, con excepción del último, el dominio de la función es la recta real **R**; en el último, el dominio es la semirrecta cerrada $[0, +\infty)$, formada por los números reales no negativos.

Para referirse a distintas funciones suelen usarse los símbolos f, g, h, ϕ, ψ, etc.; y es claro que para conocer una función f es suficiente saber con precisión cómo se determina $f(x)$. Así, podríamos haber presentado los ejemplos anteriores de la manera siguiente:

$$f(x) = 3x - 1,\quad g(x) = x,\quad h(x) = x^2,\quad \phi(x) = \text{sen}\, x,\quad \psi(x) = \sqrt{x},\ \text{etcétera.}$$

La condición para que dos funciones f y g sean iguales es que tengan el mismo dominio y que para cada x del mismo se verifique $f(x) = g(x)$. Entonces $f = g$.

A veces, para definir una función es necesario recurrir a una fórmula compuesta, como ocurre con el célebre caso del valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

También es compuesta la fórmula que define la función ***signo de x***:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ -1 & \text{si} \quad x < 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Notemos que $x\operatorname{sgn}(x) = |x|$, cualquiera que sea el número *x*.

Sólo para darnos una idea de la enorme variedad de funciones que existen incluimos el siguiente ejemplo, llamado ***función de Dirichlet***:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Las funciones que toman un valor único –no hay que olvidarlas– se llaman ***constantes***. Por ejemplo, si $y = 1$ cualquiera que sea el valor de *x*, entonces decimos que *y es constante igual a* 1.

Existe un tipo especial de variables que presentaremos mediante un ejemplo sencillo. Cuando se dice: consideremos todas las funciones de la forma $y = ax + b$ se entiende que los valores de *a* y *b* pueden elegirse arbitrariamente (son variables) pero quedan fijos una vez elegidos, en cierto contexto. Las variables sometidas a esta restricción se llaman ***parámetros***. Inicialmente '*parámetro*' se usó para designar la distancia del foco a la directriz de una parábola.

Ejemplos

Los casos más frecuentes de relaciones funcionales se presentan en las aplicaciones de la Matemática a otras ciencias. Sin embargo, los ejemplos que ponen a prueba el alcance de las definiciones, obligando a veces a modificarlas, provienen de la Matemática misma. La función de Dirichlet es una muestra sencilla de lo afirmado.

1) La presión que debe soportar cualquier artefacto (o ser vivo) que se sumerja hasta un punto situado a una profundidad h en el océano está dada por la fórmula:

$$p = p_0 + \rho h,$$

donde p_0 es la presión atmosférica al nivel del mar (nivel 0) y r una constante que representa el peso específico del agua de mar.

> ***Algunos datos***: Para tener una idea del modo en que varía la presión con la profundidad, digamos que el valor de r oscila entre 1020 y 1030 kilogramos de fuerza por metro cúbico, según el mar de que se trate. Por otra parte, el valor normal de p_0 es 10336 kilogramos de fuerza por metro cuadrado.
> Dividiendo la igualdad anterior por p_0 obtenemos la fórmula aproximada $q = 1 + 0{,}1\ h$, que expresa la presión en atmósferas cuando la profundidad h se mide en metros. La fórmula muestra que se añade una atmósfera de presión por cada 10 metros de profundidad.
> El casco de una batisfera -del griego *báthos*, profundidad- debe ser tanto más resistente cuanto mayor sea su radio. Para comprenderlo basta pensar en la presión superficial (fuerza por unidad de longitud) que se genera sobre una esfera hueca de radio r, cuya sección es πr^2. La fuerza que oprime a dos hemisferios cualesquiera uno contra otro es $p\pi r^2$, lo que dividido por la longitud de la circunferencia de contacto entre ambos nos da el valor de la presión superficial: $0{,}5\ p\ r$, proporcional al radio.

¿Qué interpretación podríamos dar a un valor negativo de *h*?

Un poco de discusión en clase debería conducir a los alumnos a sugerir ellos mismos que *valores negativos de la profundidad corresponden a puntos por encima de la superficie; tanto más elevados cuanto menor sea el valor de* h. Ahora bien, la presión atmosférica por encima del nivel del mar se mantiene casi constante e igual a p_0 dentro de un rango de altitud moderado, digamos 200 metros. Luego, la siguiente fórmula expresa la presión p en función de la profundidad h:

$$p = f(h) = \begin{cases} p_0 + \rho h & \text{si} \quad h \geq 0, \\ p_0 & \text{si} \quad -200 < h < 0. \end{cases}$$

2) El área de un círculo es una función de su radio r y la relación entre ambas variables se expresa mediante la fórmula $A = \pi r^2$.

3) El volumen de una esfera sólida es función de su radio r y la relación entre ambas variables es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

4) Mientras pueda despreciarse la resistencia del aire, la velocidad alcanzada por un cuerpo pesado que cae libremente desde una altura *h*, en el momento de chocar contra el suelo, está dada por la fórmula

$$v = \sqrt{2g\,h}\,.$$

La fórmula exhibe la velocidad *v* en función de la altura de caída.

5) La diferencia de nivel *h* alcanzada por un líquido que moja las paredes de un tubo capilar cilíndrico es función del radio de su sección. La fórmula es

$$h = \frac{c}{r},$$

donde *r* es el radio del tubo y *c* una constante que depende del líquido (ley de Jurin).

6) La abscisa *x* y la ordenada *y* de un punto que recorre con movimiento uniforme una circunferencia de radio *R* con centro en el origen de coordenadas, están dadas por las fórmulas

$$x = R\cos(\omega t + \alpha)\,, \qquad y = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha),$$

donde w representa la velocidad angular del movimiento y α el ángulo inicial. Las fórmulas exhiben en forma explícita las coordenadas del punto en función del tiempo *t*.

Los ejemplos anteriores sugieren la conveniencia de prestar atención a las funciones de la forma

$$y = ax + b,\quad y = ax^2,\ y = ax^3,\ y = c\sqrt{x}\,,\ \ y = \frac{c}{x}\,,\ y = \cos x\,,\ y = \mathrm{sen}\,x\,,$$

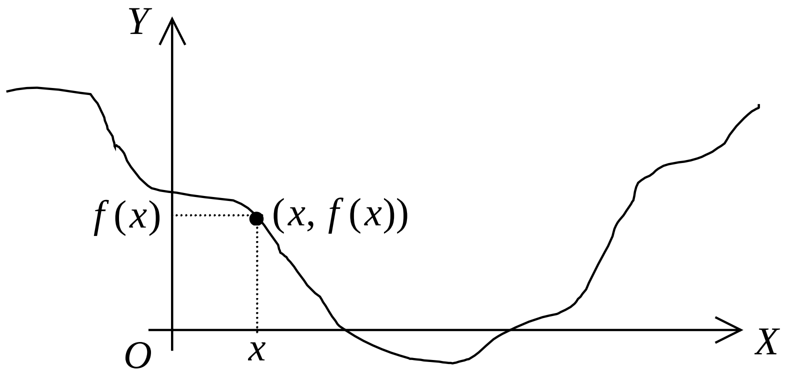
que sirven de modelos matemáticos a los fenómenos considerados.

Otros fenómenos requieren para su descripción el uso de funciones menos elementales.

Gráficas

Siempre que sea posible, la mejor forma de visualizar una función numérica f consiste en estudiar lo que se llama su ***gráfica*** (o ***gráfico***), que es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano $\mathbf{R}^2$ tales que $y = f(x)$. En símbolos:

$$\text{gráfica de } f = \{(x, y) : y = f(x)\}.$$



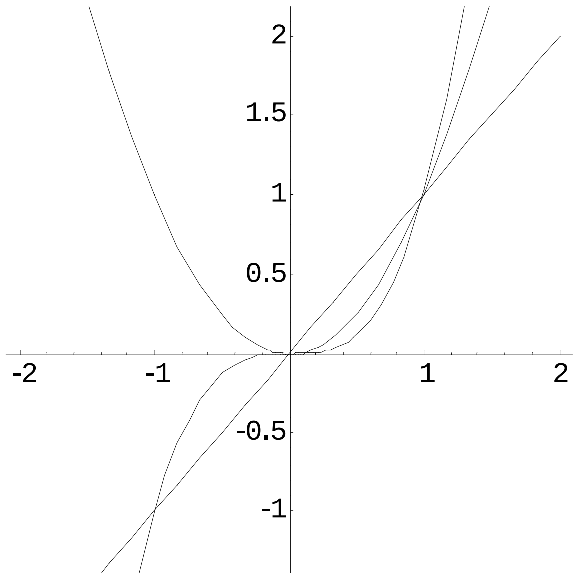
Notemos que un punto (x, y) del plano $\mathbf{R}^2$ pertenece a la gráfica de f si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$y = f(x),$$

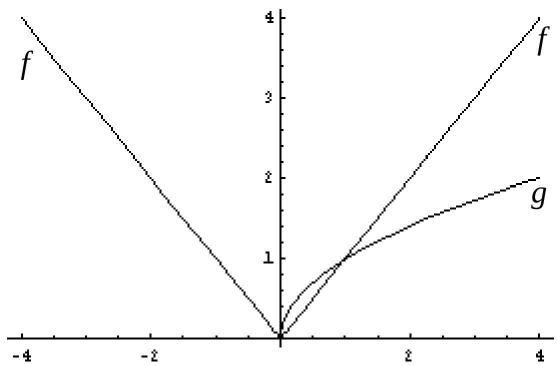
por tal motivo llamada ***ecuación de la gráfica***.

En el siguiente diagrama se han trazado las gráficas de las funciones:

$$y = x, \qquad y = x^2, \qquad y = x^3.$$



Las gráficas de las funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = \sqrt{x}$ resultan útiles para comprender su significado:



Observaciones

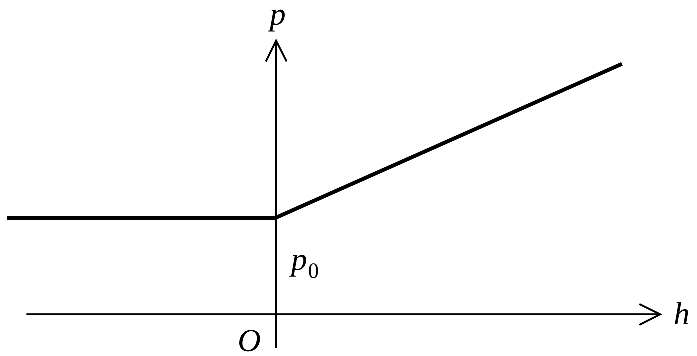
i) notemos que las escalas sobre cada eje pueden ser diferentes;

ii) los valores de g son no negativos y su gráfica no incluye ningún punto con abscisa negativa.

Ejercicio

Mostrar que para cualquier número x, $|x|^2 = x^2$ y $\sqrt{x^2} = |x|$.

La función $p = f(h)$ analizada en el ejemplo **1** del párrafo anterior (presión en función de la profundidad) tiene una gráfica en forma de línea quebrada:



La parte de la gráfica en el semiplano derecho es una semirrecta de pendiente r.

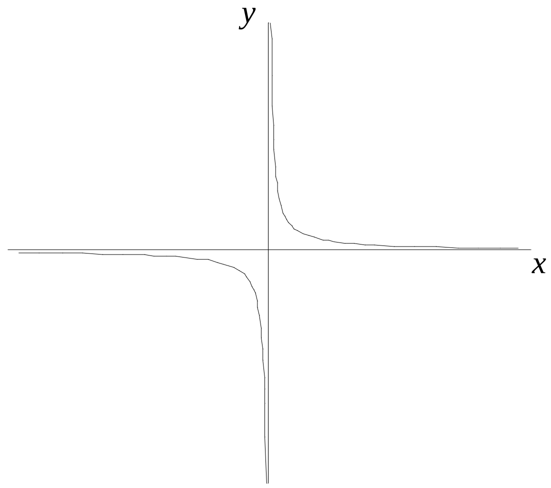
Para meditar: es imposible *trazar* la gráfica de la función de Dirichlet en el sentido habitual del término. Sin embargo, la gráfica existe y está formada por los puntos de la forma $(x, 1)$ con x racional y los de la forma $(x, 0)$ con x irracional. Por ejemplo, los siguientes puntos pertenecen a ella:

$$(0, 1), \ (\frac{2}{3}, 1), \ (-3, 1), \ (\sqrt{2}, 0), \ (\pi, 0), \ (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0).$$

La gráfica de la función

$$y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

asociada con la noción de proporcionalidad inversa, (ejemplo 5 del párrafo anterior), es la ***hipérbola equilátera***:



El dominio de la función es toda la recta real, con excepción de 0.
Multiplicando la igualdad anterior por x obtenemos la relación simétrica

$$x\,y = 1,$$

equivalente a la anterior (si se cumple la segunda, entonces $x \neq 0$ y es posible dividir por x para obtener nuevamente la ecuación inicial).
Por ella vemos muy fácilmente que si el punto (x, y) satisface la relación, también la satisfacen los puntos $(-x, -y)$, (x, y) y $(-y, -x)$; lo que significa que la gráfica de la función es simétrica con respecto al origen y a las bisectrices de los cuadrantes.

Los ejes coordenados son ***asíntotas*** de la gráfica; lo que significa que a medida que un punto que recorra la misma se aleje del origen se hallará cada vez más próximo a uno de los ejes; tanto más próximo cuanto más alejado, propiedad que puede apreciarse a simple vista.

4 Funciones lineales

Llámanse así las funciones de la forma

(1) $$y = mx + b$$

donde m y b son constantes.
Podemos escribir la ecuación anterior en la forma

$$m\,x \;+\; (-1)\,y \;=\; -\,b,$$

de donde se sigue que la gráfica de cualquier función lineal es una recta no paralela al eje OY.
Recíprocamente, cualquier recta no paralela a dicho eje satisface una relación lineal:

$$ax + by = c\,,$$

con $b \neq 0$. Despejando y, obtenemos

$$y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{c}{b}\;,$$

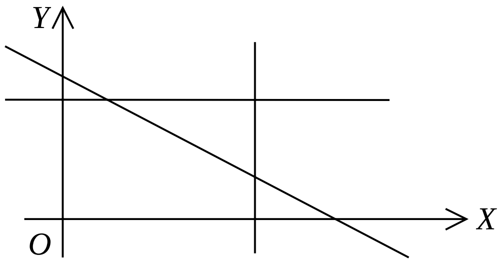
que es una ecuación de la forma (1), como se ve escribiendo más brevemente m en lugar de $-\frac{a}{b}$ y b en lugar de $\frac{c}{b}$.
Vemos así que las gráficas de las funciones lineales son las rectas no paralelas al eje OY.

Recordemos ahora que entre las coordenadas x, y de los puntos que pertenecen a una recta del plano existe una relación de la forma

$$ax + by = c$$

en la que al menos uno de los coeficientes a y b es distinto de cero.
Si $a = 0$ la representación gráfica de la relación es una recta horizontal (paralela al eje OX); si $b = 0$, una recta vertical (paralela al eje OY); si a y b son ambos distintos de cero, una recta que no es paralela a ninguno de los ejes. La figura siguiente esque-

matiza los tres casos:



Los parámetros m y b de la función (1) se llaman ***pendiente*** y ***ordenada al origen***, respectivamente, y son característicos de la recta y de la función lineal, como se deduce del siguiente ejercicio:

Ejercicio

Mostrar que si para cualquier x se cumple $m_1 x + b_1 = m_2 x + b_2$, entonces $b_1 = b_2$ y $m_1 = m_2$.

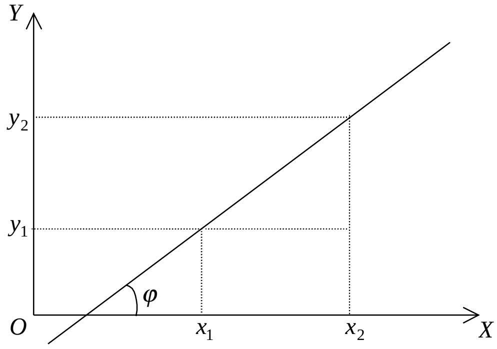
Para comprender el significado geométrico de los parámetros m y b y el motivo de sus nombres, consideremos dos puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2) situados sobre la recta de ecuación $y = mx + b$:

$$y_1 = mx_1 + b \ , \quad y_2 = mx_2 + b.$$

Entonces $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$, de donde

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

lo que significa que m es la tangente trigonométrica del ángulo φ que forma la recta con el eje OX (***inclinación*** de la recta con respecto a dicho eje):

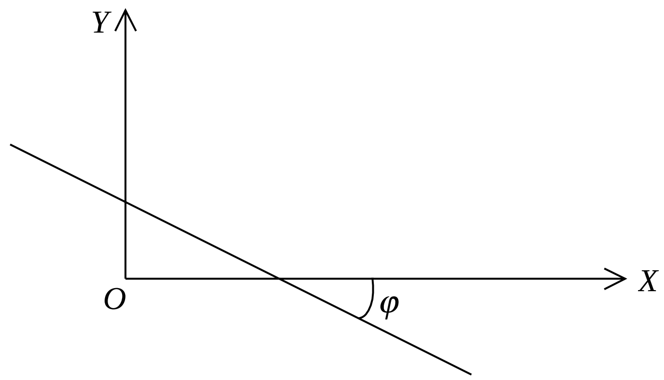


En símbolos,

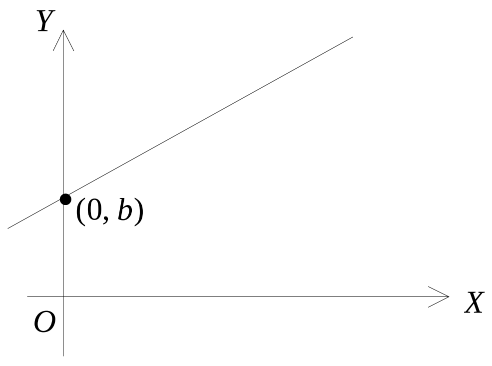
$$m = \operatorname{tg}\varphi .$$

Recordemos también que φ se encuentra comprendido en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Un valor negativo de m indica que φ es negativo y que la recta se dirige *'cuesta abajo'*. Más precisamente: la ordenada de un punto que se deslice por ella disminuye a medida que aumenta su abscisa, como muestra la figura siguiente:



Si $m = 0$ entonces $y = b$: la función es constante y se representa por una recta horizontal.
Puesto que la función $m = \operatorname{tg}\varphi$ es estrictamente creciente en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, se sigue que m es tanto mayor cuanto mayor sea φ y recíprocamente.
Por otro lado, si en la ecuación $y = mx + b$ elegimos $x = 0$, obtenemos $y = b$, lo que muestra que la intersección de la recta con el eje OY es el punto $(0, b)$ como ilustra el siguiente diagrama:

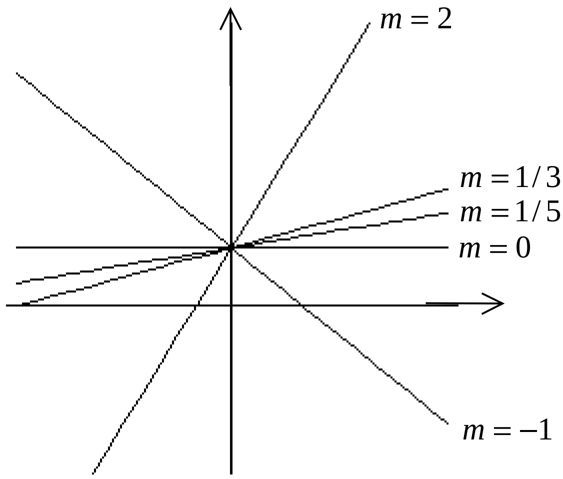


que explica por sí solo el motivo por el que b se llama ordenada al origen.

En el siguiente diagrama hemos trazado las gráficas de varias funciones lineales con distintos valores de la pendiente *m* y ordenada al origen igual a 1. A saber:

$$y = 2x+1, \quad y = \frac{1}{3}x+1, \quad y = \frac{1}{5}x+1, \quad y = 1, \quad y = -x+1,$$

cuyas pendientes son: 2, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, 0 y –1, respectivamente.

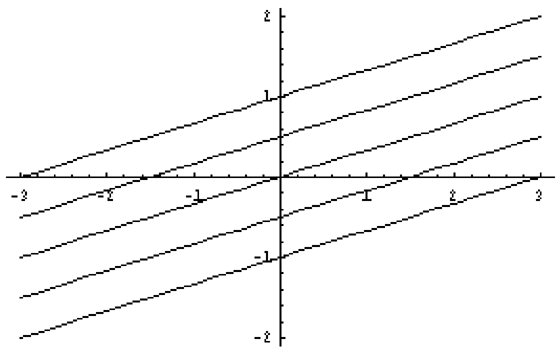


Observemos que entre las funciones lineales con la misma ordenada al origen la pendiente es tanto mayor cuanto más "empinada" hacia arriba sea la recta que la representa. La recta $y = -x+1$, con pendiente negativa, marcha "cuesta abajo".

Para ilustrar el sentido de la ordenada al origen representamos las funciones lineales

$$y = \frac{1}{3}x+1, \quad y = \frac{1}{3}x, \quad y = \frac{1}{3}x-1, \quad y = \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}, \quad y = \frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \quad ,$$

con idéntica pendiente igual a $\frac{1}{3}$:



El ejemplo sugiere que las gráficas de las funciones lineales con una misma pendiente forman un "haz" de rectas paralelas. En efecto, es fácil probar que las rectas de ecuación

$$y = mx + b_1, \qquad y = mx + b_2$$

no tienen ningún punto común, a menos que sea $b_1 = b_2$.

Ejercicios

1) Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (–3, 2) y (3, 5).

2) Hallar la ecuación de la recta que pasa por (–1, 2) y es paralela a la recta

$$2x + 3y - 6 = 0.$$

3) Hallar la intersección del eje OX (de ecuación $y = 0$) con la recta que pasa por (1, 1) y es paralela a la recta determinada por los puntos (1, 0) y (0, 3).

¿Cómo se modifica la abscisa de un punto situado sobre una recta cuando se introduce otra escala numérica, con otro origen y otra unidad de medida?.
Queremos mostrar que entre las abscisas de un mismo punto con respecto a las dos escalas existe una relación lineal:

$$y = ax + b,$$

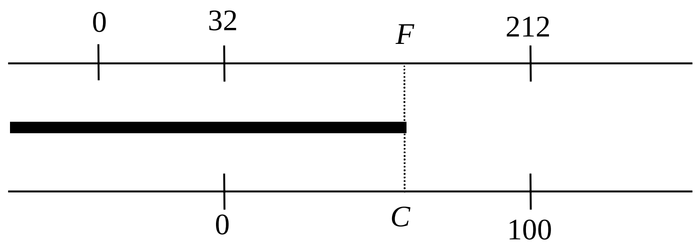
donde *a* y *b* son ciertas constantes que dependen de la ubicación de los orígenes y de la relación entre las respectivas unidades de medida.
Lo mejor para comprenderlo es descomponer el pasaje a un nuevo sistema en dos etapas: $x \to z \to y$. A saber:

1°) una traslación del origen sin cambiar la unidad de medida, lo que da lugar a una relación muy sencilla, de la forma $z = x + h$.

2°) un cambio de unidad de medida sin cambiar el origen, el que se expresa por una relación de la forma $y = az = a(x+h) = ax + b$ (naturalmente, $a \neq 0$).

Ejemplo (escalas termométricas)

Sean *C* y *F* las expresiones de una misma temperatura en grados centígrados (o Celsius) y en grados Farenheit, respectivamente.



De acuerdo con lo anterior, entre ambas escalas existe una relación de la forma

$$C = aF + b.$$

Para hallar los valores de *a* y *b*, debemos tener en cuenta que 32°*F* equivalen a 0°*C* y 212°F equivalen a 100°C, como se resume en la siguiente tabla:

F	C
32	0
212	100

Entonces podemos escribir las ecuaciones

$$0 = 32a + b, \quad 100 = 212a + b,$$

de las que resulta a = $\frac{5}{9}$, b = – 32 ($\frac{5}{9}$) . Luego,

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Regla práctica aproximada (útil para viajeros)

$$C = \frac{F-32}{2} + 10\% \text{ del término anterior.}$$

¿Qué explicación podemos dar para la validez de esta regla?

Notemos que $\frac{5}{9}$ no difiere demasiado de $\frac{1}{2}$. En realidad, $\frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$. Luego,

$$C = \frac{5}{9}(F-32) = \frac{1}{2}(F-32) + \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{2}\right)(F-32) = \frac{F-32}{2} + \frac{1}{9}\,\frac{F-32}{2}$$

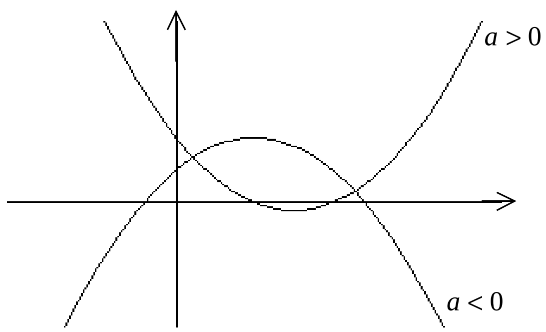
Por otro lado, $\frac{1}{9}$ = 0,111 ...≈ 0,1 = $\frac{1}{10}$ = 10%

Se llaman ***cuadráticas*** las funciones que pueden expresarse en la forma de un trinomio de segundo grado:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Se prueba fácilmente que si $f(x)$ es cero para $x = 0, 1$ y -1, entonces los tres coeficientes a, b y c son nulos, de donde $f(x) = 0$ para cualquier valor de x.
En realidad, una función cuadrática no puede anularse en más de dos puntos distintos, a menos que sean nulos sus tres coeficientes, pues si $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ y $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, y el miembro derecho es distinto de cero si x es distinto de x_1 y x_2, a menos que a sea nulo.
De esto se deduce que la condición para que dos funciones cuadráticas sean iguales es que tengan los mismos coeficientes. En otras palabras, los coeficientes de una función cuadrática son característicos de la función.

Por lo visto sobre geometría de coordenadas sabemos que la gráfica de una función cuadrática es una parábola de eje vertical; convexa hacia abajo si $a > 0$ y cóncava hacia abajo si $a < 0$. El siguiente diagrama ilustra los dos casos:



Cualquier función cuadrática alcanza un valor extremo (mínimo o máximo) que corresponde al vértice de la parábola y puede localizarse usando el método de completación de cuadrados, ya estudiado en el fascículo sobre coordenadas.
Considerando la enorme importancia de este método elemental nos proponemos estudiar con su ayuda la función cuadrática general:

$$
\begin{aligned}
y = ax^2 + bx + c \; &= \; a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
&= \; a\left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \beta,
\end{aligned}
$$

donde por brevedad de la notación hemos llamado b al número $(4ac - b^2)/4a$.

Como a, b y c son constantes, podemos afirmar:

1. Si $a > 0$ el mínimo valor de y se alcanza cuando $x = -\dfrac{b}{2a}$, pues sólo para ese valor de x es nulo el número $\left(x + \dfrac{b}{2a} \right)^2$, siendo estrictamente positivo para todos los demás.

2. Si $a < 0$ el máximo valor de y se alcanza nuevamente cuando $x = -\dfrac{b}{2a}$, pues en tal caso el cuadrado anterior multiplicado por un coeficiente negativo es negativo, salvo que sea nulo.

3. En ambos casos la gráfica de la función es simétrica con respecto a la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$ (eje de la parábola), pues el valor de y es el mismo en los puntos $x = -\dfrac{b}{2a} \pm h$, cualquiera que sea h.

4. La condición para que la gráfica de la función cuadrática corte al eje horizontal es que a y b tengan distinto signo o bien que b sea nulo. Dejamos la fácil demostración a cargo del lector.

Nota importante: Existe el riesgo de que los alumnos intenten memorizar las fórmulas anteriores, lo que sería un penoso desperdicio de esfuerzo y "espacio de memoria".

Ejercicios

1. Determinar los coeficientes b y c para que la parábola $y = x^2 + bx + c$ pase por los puntos de intersección de la recta $y = 3x - 6$ con los ejes coordenados.

2. Calcular el valor de c para que la parábola de ecuación $y = -x^2 + 2x + c$ pase por el punto (–1, 0). Determinar el vértice, el eje de simetría, la intersección con los ejes coordenados; trazar la gráfica.

3. Dada la parábola $y = x^2 - 2x + 2$, hallar la ecuación del eje de simetría, las coordenadas del vértice y las intersecciones de la misma con los ejes coordenados.

4. Siendo $a > 0$ y $x_0 > 0$, consideremos el punto (x_0, y_0) de la parábola $y = x^2 - a$, la que corta al eje horizontal en los puntos $(\sqrt{a}, 0)$ y $(-\sqrt{a}, 0)$. ¿Qué valor debemos dar a m para que la recta de ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ tenga al punto (x_0, y_0) como único punto de contacto con la parábola? (recta tangente a la parábola en el punto considerado).

Sugerencia: puesto que $y_0 = x_0^2 - a$, la ecuación de la parábola puede escribirse en la forma $y - y_0 = x^2 - x_0^2$.

7 Clasificación de las funciones

funciones polinómicas, racionales, algebraicas y trascendentes

Las más sencillas entre todas las funciones son las funciones lineales, de las que las constantes representan un caso particular.
Una clase considerablemente más amplia es la de las ***funciones polinómicas***:

$$y = P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

de la que las funciones lineales y las cuadráticas son casos particulares.

En orden creciente de amplitud sigue la clase de las ***funciones racionales***, que son aquellas que pueden expresarse como cociente de polinomios:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m} \quad ,$$

En la expresión de una función racional intervienen sólo las operaciones de suma producto y cociente. Por ejemplo, son racionales las funciones $\varphi(x) = 1/x$ y $\psi(x) = 1/(x^2 + 1)$.

Para entender mejor el siguiente concepto -el de función algebraica- daremos primero un ejemplo sencillo. Consideremos la función:

$$y = \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2 + 1}} \cdot$$

Elevando al cubo, multiplicando por el denominador y pasando al primer miembro, resulta:

$$-(x-1)^3 + (x^2 + 1)y^3 = 0.$$

La definición general de función algebraica es la siguiente:

Definición Una función $y = f(x)$ se llama ***algebraica*** si existen ciertos polinomios $P_0(x), P_1(x), ..., P_n(x)$, no todos nulos, tales que

$$P_0(x) + P_1(x)y + P_2(x)y^2 + \cdots + P_n(x)y^n = 0$$

para cualquier valor x en el dominio de la función.

Ejercicio

Mostrar que la función $y = \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2-\sqrt{x}}}{1 + \sqrt[5]{x}}$ $(x > -1)$ es algebraica.

Los ejemplos considerados corresponden a la noción de función algebraica *explícita*, que se obtiene cuando a las operaciones racionales de suma producto y cociente se añade la extracción de raíces de cualquier orden.

Existen también funciones algebraicas *implícitas*. El hecho está ligado con la imposibilidad de obtener fórmulas generales que permitan resolver por radicales las ecuaciones de grado mayor que cuatro.

Definición Las funciones que no son algebraicas se llaman ***trascendentes***.

Son trascendentes las ***funciones circulares*** y sus inversas:

$$\text{sen}\, x, \quad \cos x, \quad \text{tg}\, x, \quad \text{arcsen}\, x, \quad \text{arctg}\, x,$$

del mismo modo que la ***función exponencial*** y su inversa, la ***función logarítmica***:

$$a^x, \quad \log_a x, \quad (a > 0).$$

Sin embargo la demostración de estas afirmaciones excede el carácter elemental de estas notas.

Desde el punto de vista del Análisis Matemático interesan también otras clasificaciones. Por ejemplo, funciones continuas, diferenciables, analíticas. A comienzos del presente siglo, el francés René Baire (1874-1932) introdujo una clasificación a partir de las nociones de continuidad y límite puntual, obteniendo una clasificación transfinita útil en la teoría de las funciones reales, que se conoce con el nombre del mismo Baire. La utilidad de sus métodos ha trascendido el objetivo inicial de la clasificación.

En el siguiente módulo estudiaremos más detenidamente las funciones ***trascendentes elementales***, que son las que hemos nombrado en último lugar.

8 Operaciones con las funciones reales

Algunas de las operaciones que se describen en este párrafo han sido usadas de manera tácita en los párrafos anteriores. Las más simples son las que provienen de las operaciones aritméticas, a saber: la ***suma***, el ***producto*** y el ***cociente*** de dos funciones f y g son las funciones $\varphi,\ y$ y θ que se definen por medio de las siguientes fórmulas:

$$\varphi(x) = f(x) + g(x), \quad \psi(x) = f(x)g(x), \quad \theta(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de las dos primeras es la intersección de los dominios de f y g, mientras que el de la tercera es el conjunto de los puntos de dicha intersección donde g no toma el valor cero. Suele designarse a estas funciones con una notación más breve: $f+g,\quad fg$ y $\quad f/g$. En forma más explícita:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad (f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

Para completar el panorama, si c es una constante se define la función cf por medio de la fórmula $(cf)(x) = cf(x)$.

Una de las operaciones más útiles es la composición de funciones.

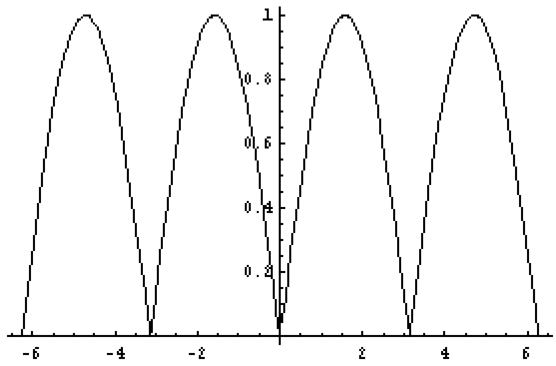
Definición	Se llama ***composición*** de dos funciones f y g a la función h definida por la fórmula $h(x) = g(f(x))$. Para denotar la composición se escribe $h = g \circ f$.

El dominio de h está formado por los puntos x del dominio de f tales que $f(x)$ pertenece al dominio de g.

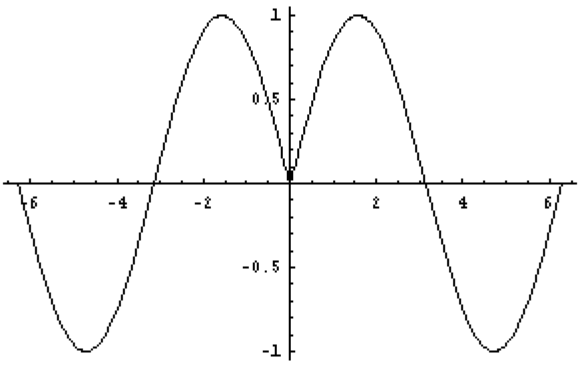
Por ejemplo, la función $h(x) = |\operatorname{sen} x|$ resulta de componer las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad g(x) = |x|.$$

La gráfica de $(g \circ f)(x) = |\operatorname{sen} x|$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ es:



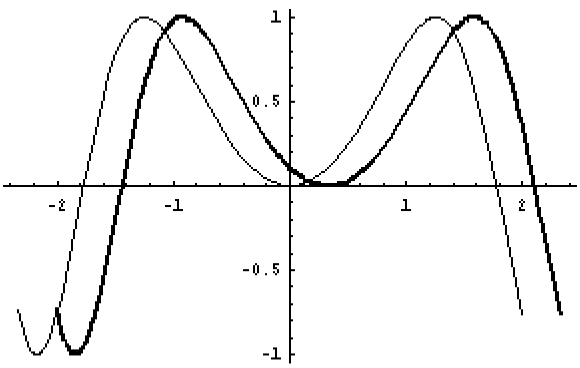
Por otro lado, la gráfica de la composición $\psi(x) = f(g(x)) = \text{sen}\,|x|$ en el mismo intervalo es esta otra:



El ejemplo ilustra el hecho de que en general, $g \circ f \neq f \circ g$, aun en el caso en que ambas funciones posean el mismo dominio, como ocurre en nuestro ejemplo.

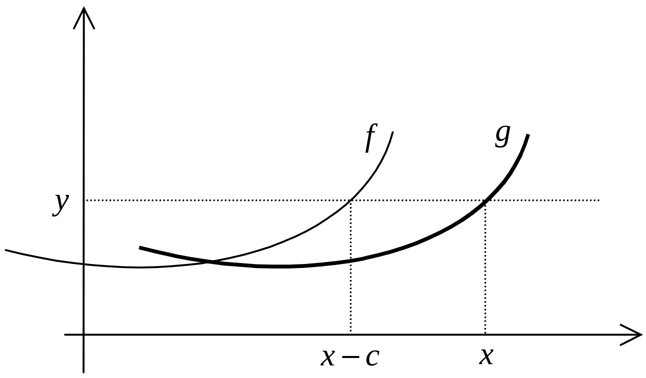
Consideramos, por último, la traslación. En el gráfico que sigue hemos representado las funciones

$f(x) = \text{sen}(x^2)$ y $g(x) = f(x - 1/3) = \text{sen}[(x - 1/3)^2]$ (en trazo más grueso).



Notemos que la gráfica de g se obtiene trasladando la gráfica de f hacia la derecha una distancia igual a $\frac{1}{3}$

En general, si c es una constante positiva, entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = f(x-c)$ existe una relación muy simple: la gráfica de g resulta de trasladar la de f hacia la derecha a una distancia c. En efecto, el punto (x, y) pertenece a la gráfica de g si y sólo si $y = g(x) = f(x-c)$, es decir, si y sólo si $(x-c, y)$ pertenece a la gráfica de f, como muestra la figura siguiente:



Por el contrario, la gráfica de la función $h(x) = f(x+c)$ se obtiene trasladando la de f hacia la izquierda a una distancia c.
De aquí que si, interpretando t como el tiempo, representamos gráficamente las funciones

$$f(x-ct)$$

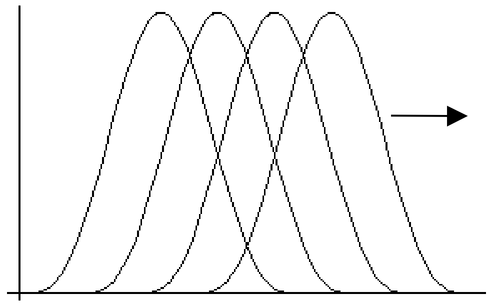
para una sucesión creciente de valores de t, digamos:

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$$

tendremos la impresión de una onda que se desplaza hacia la derecha con velocidad c, como muestra la siguiente figura; en tanto que las funciones

$$f(x+ct)$$

semejan una onda que se desplaza hacia la izquierda con la misma velocidad.



Nota En realidad es más profundo que una mera impresión o semejanza. Si f tiene derivada segunda, las funciones de dos variables:

$$u(x,t) = f(x - ct) \quad \text{y} \quad u(x,t) = f(x + ct)$$

satisfacen la *ecuación de d'Alembert* (o de la cuerda vibrante):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

9 El concepto de función

La noción de función, limitada en los comienzos del Cálculo a las correspondencias entre números definidas por fórmulas analíticas muy sencillas, hubo de ser ampliada con el fin de estudiar los nuevos problemas que se planteaban tanto en la Matemática como en otras disciplinas afines a ella.
El concepto de función desempeña un papel esencial en todos los ramos de la Matemática y sus aplicaciones, en los que se presenta bajo formas y nombres diversos: *función, aplicación, transformación, representación, correspondencia, operación.* El descubrimiento de que todos estos nombres se refieren a una misma noción –la noción general de función– ha representado uno de los avances conceptuales más útiles y significativos.

Sería un error excluir este importante concepto de la enseñanza elemental, equiparándolo con las exageraciones de la "Matemática Moderna". Idéntica observación puede hacerse con respecto al Álgebra de Conjuntos.

Recordemos que el producto cartesiano de dos conjuntos X e Y está formado por todos los pares ordenados (x, y) tales que $x \in X$ e $y \in Y$.

Definición Un subconjunto f del producto cartesiano $X \times Y$ se llama ***función*** (o ***aplicación***) de X en Y si satisface las siguientes condiciones:

1) para cada x de X existe y en Y tal que $(x, y) \in f$;

2) si $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in f$ entonces $y = z$.

Notación funcional: Para cada x de X, el único y de Y tal que $(x, y) \in f$ se designa por el símbolo $f(x)$; de modo que la afirmación $y = f(x)$ equivale a $(x, y) \in f$.
Para indicar que f es una función de X en Y se escribe

$$f : X \to Y.$$

El conjunto X se llama ***dominio*** de la función, y se designa por $\operatorname{dom} f$. El conjunto Y se llama ***codominio*** de f.

Otro concepto útil es el de imagen: se llama ***imagen*** de *f*, simbolizado por im *f*, al conjunto de los puntos y de Y tales que $y = f(x)$ para algún *x* del dominio. Es decir,

$$\text{im } f = \{y : \ y = f(x) \ \text{para algún } x \ \text{de } X\}.$$

Ejercicio (asociatividad de la composición)

Sean *f*, *g* y *h* tres funciones tales que

$$\text{im } f \subset \text{dom } g \quad \text{e} \quad \text{im } g \subset \text{dom } h.$$

Probar que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Nota. Este sencillo ejercicio ayuda a comprender por qué el producto de matrices es asociativo.

Recordemos brevemente que una función *f* es:

(a) ***inyectiva*** si la afirmación $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$;

(b) ***suryectiva*** si $\text{im } f = Y$;

(c) ***biyectiva*** si es inyectiva y suryectiva.

Definición ***Función inversa***. Una función $g : Y \to X$ se llama ***inversa*** de la función $f : X \to Y$ si la igualdad $y = f(x)$ equivale a $x = g(y)$.

Es claro que, en caso de existir, la inversa *g* está determinada por *f* y que la relación entre una función y su inversa es recíproca.

La condición necesaria y suficiente para que una función *f* tenga inversa es que sea biyectiva. La demostración es un ejercicio interesante para los alumnos.

Para cada conjunto *X* conviene tener presente la ***aplicación idéntica*** (o ***identidad***) de *X* en sí mismo:

$$i_X : X \to X$$

que se define por la sencilla fórmula $i_X(x) = x$.

La tendencia a olvidarla es natural, como lo es la de no incluir los conjuntos $\varnothing$ y X entre las partes de X.

Con ayuda de la aplicación idéntica el hecho de que *g* sea inversa de *f* se expresa de manera muy natural, teniendo en cuenta que $y = f(x)$ si y sólo si $x = g(y)$. Luego,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x = i_X(x), \text{ de donde, } g \circ f = i_X,$$
$$f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y = i_Y(y), \text{ de donde, } f \circ g = i_Y.$$

Por ejemplo, la inversa de la función $y = 3x - 1$ se obtiene despejando *x* en esta igualdad. El resultado es la función $x = \frac{1}{3}(y+1)$.

Ejercicios

1. Sean *a* y *b* dos elementos distintos de *X*. Mostrar que la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq a \text{ y } x \neq b \\ b & \text{si } x = a \\ a & \text{si } x = b, \end{cases}$$

define una función biyectiva de *X* en sí mismo cuya inversa es la misma *f*.

2. Denotando por *J* el intervalo (–1, 1) de la recta real, mostrar que las fórmulas

$$y = f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad (x \in \mathbf{R}), \quad x = g(y) = \frac{y}{1-|y|} \quad (y \in J)$$

definen un par de funciones mutuamente inversas:

$$f : \mathbf{R} \to J \quad \text{y} \quad g : J \to \mathbf{R}.$$

Sugerencia: calcular $g \circ f$ y $f \circ g$.

Conviene agrupar las funciones elementales más comunes con sus respectivas inversas, observando cuidadosamente aquellos casos en que debe restringirse el dominio de la función para lograr una función inyectiva:

Función	*Dominio*	*Inversa*	*Dominio*
$y = x^2$	$x \geq 0$	$x = \sqrt{y}$	$y \geq 0$
$y = x^n \quad (n \text{ par})$	$x \geq 0$	$x = \sqrt[n]{y}$	$y \geq 0$
$y = x^n \quad (n \text{ impar})$	$x \in \mathbf{R}$	$x = \sqrt[n]{y}$	$y \in \mathbf{R}$
$y = a^x \quad (a > 0)$	$x \in \mathbf{R}$	$x = \log_a y$	$y > 0$
$y = \operatorname{sen} x$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$x = \operatorname{arcsen} y$	$-1 \leq y \leq 1$
$y = \operatorname{tg} x$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	$x = \operatorname{arctg} y$	$y \in \mathbf{R}$

10 Representación gráfica de funciones inversas

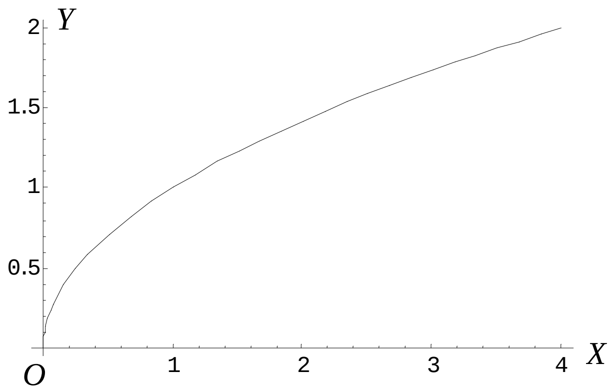
Comencemos por un ejemplo sencillo. Para representar la función

$$y = \sqrt{x} \quad (x \geq 0),$$

conviene pensar en su inversa:

$$x = y^2 \quad (y \geq 0)$$

eligiendo la variable y (sobre el eje vertical) como variable independiente. El resultado es la conocida gráfica en forma de 'semiparábola' con eje horizontal:



No existe ningún obstáculo para intercambiar los papeles de x e y como variable independiente y variable dependiente cuando ello sea posible, es decir, cuando la función tenga inversa. Tampoco lo hay para representar la variable independiente sobre el eje vertical OY.

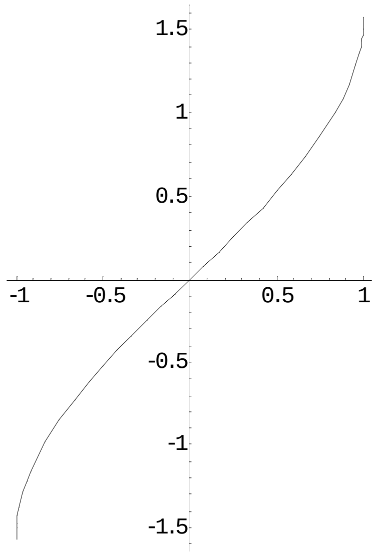
Veamos otro ejemplo: si queremos representar gráficamente la función

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

comencemos observando que la igualdad anterior equivale a

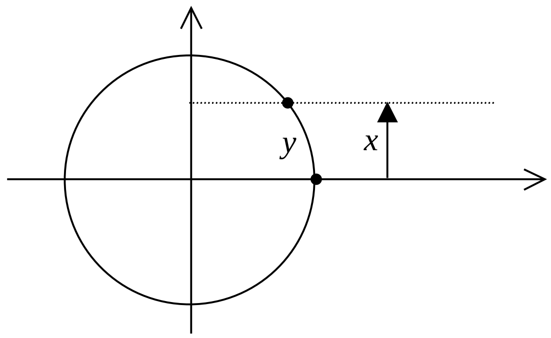
$$x = \operatorname{sen} y \quad (-\pi/2 \leq y \leq \pi/2).$$

La segunda función tiene como gráfica un arco de sinusoide. La variable independiente y (sobre el eje vertical) recorre el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, en tanto que el correspondiente valor x crece estrictamente desde su valor mínimo –1 hasta su máximo 1, como muestra la siguiente figura:



Hemos restringido el dominio de la variable y a un intervalo donde la función $x = \text{sen}\, y$ es estrictamente creciente, y por tanto inyectiva. Conviene que los alumnos verifiquen con el gráfico a la vista que es ésta la función arcsen o sen^{-1} incorporada en sus calculadoras, siempre que la pongan en "*modo radián*", un requisito que olvidan con frecuencia.

Para fijar mejor las ideas es útil visualizar la función $y = \text{arcsen}\, x$ en la circunferencia unitaria, destacando la unicidad del arco y entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x, como se ilustra en la figura:



Un tratamiento más detallado de las funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales será el objeto de otro fascículo.