PROPUESTAS PARA EL AULA
es una colección destinada a docentes,
integrada por un conjunto de cuadernillos
que presentan actividades correspondientes
a las distintas áreas disciplinares
y a los distintos ciclos de enseñanza.

Las actividades han sido diseñadas
a partir de una selección
de contenidos relevantes, actuales y,
en algunos casos, contenidos clásicos
que son difíciles de enseñar.

Las sugerencias de trabajo
que se incluyen cobran sentido
en tanto sean enriquecidas,
modificadas o adaptadas de acuerdo
a cada grupo de alumnos
y a los contextos particulares
de cada una de las escuelas.

Índice

Introducción

A partir de la inclusión en los nuevos diseños curriculares de contenidos que atraviesan el trabajo matemático escolar y que resultan fundamentales para la comprensión y resolución de problemas en este dominio de conocimiento, hemos elegido como ejes, para el desarrollo de estas propuestas, algunos procedimientos generales del quehacer matemático, adecuados para ser trabajados en este nivel de escolaridad:

- localización, lectura e interpretación de información matemática;
- interpretación y representación de conceptos y relaciones en distintos marcos (físico, gráfico, geométrico, etc.);
- modelización de situaciones problemáticas a través de materiales tablas, dibujos, fórmulas, etc.;
- generalización de soluciones y resultados. Elaboración de conjeturas y pruebas.

Es importante destacar que tales contenidos deben trabajarse en el marco del aprendizaje de los contenidos correspondientes a los otros bloques. Así por ejemplo, la propuesta denominada DE CIRCUNFERENCIAS Y ELIPSES, permite trabajar aspectos relevantes de la actividad matemática escolar en este nivel: una de las funciones de la demostración en Matemática (demostrar para comprender por qué es verdadero un determinado enunciado) y la generalización de resultados y soluciones. Sin embargo, no se apunta al estudio de estos objetos en si mismo sino a propósito del aprendizaje de ciertas características de las secciones cónicas (elipse y circunferencia) y de sus ecuaciones cartesianas.

En estas propuestas sugerimos trabajar con algunos de los dominios que cobran especial importancia en este ciclo: la Geometría, que es un campo propicio para el planteo de conjeturas, la elaboración de pruebas y la generalización de soluciones; la combinatoria que resulta un campo interesante para la búsqueda de procedimientos económicos a partir de conocimientos que los alumnos poseen, y las funciones que constituyen un instrumento fundamental para la modelización.

Consideramos que la actividad matemática escolar se centra, especialmente, en el trabajo de modelización encaminado a resolver problemas pertenecientes tanto a objetos o procedimientos propios de la matemática como a objetos o fenómenos ajenos a la matemática. Hemos seleccionados diversos contextos para la presentación de las situaciones sugeridas. Así, algunas de ellas pertenecen a contextos externos a la Matemática (Propuestas Nº 2, 4 , 6 y 7) y otras a contextos internos a la Matemática (Propuestas Nº 1, 3 ,5 y 8).

Los objetivos planteados en las diferentes propuestas pueden modificarse de acuerdo a los conocimientos que dispongan los alumnos. Por ejemplo, en la propuestas denominada RAÍCES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO, puede suceder que los alumnos hayan trabajado en la resolución de sistemas de ecuaciones lo que requeriría minimizar el trabajo en la primera parte de esta secuencia.

Otra posibilidad es que los alumnos hayan trabajado en la resolución de sistemas de ecuaciones; de ecuaciones de segundo grado completas y también con la noción intuitiva de número irracional. En esta caso, se trataría de una situación de reinversión de tales contenidos y los objetivos se centrarían en el abordaje del estudio de la naturaleza de las raíces de la ecuación de segundo grado en función del signo del discriminante y de las propiedades de dichas raíces. Puede proponerse entonces sólo la segunda parte de esta secuencia centrando el trabajo en los conocimientos involucrados en la situación que resultan nuevos para los alumnos.

Para que las situaciones de enseñanza planteadas favorezcan un aprendizaje significativo para los alumnos, la gestión de la clase puede organizarse considerando cuatro momentos diferenciados. Un primer momento de presentación de las situaciones para su resolución en pequeños grupos.

Un segundo momento de resolución efectiva por parte de los alumnos en el que la intervención del docente está pensada como facilitadora de la acción para aclarar consignas y alentar la resolución sin intervenir de modo directo sugiriendo "lo que se debe hacer".

Un tercer momento de confrontación tanto de los resultados como de los procedimientos-argumentos empleados en el que el docente organiza la reflexión sobre lo realizado y un cuarto momento de síntesis del docente de los conocimientos a los que llegó el grupo en el cual él establece las relaciones entre ese conocimiento que ha circulado en la clase y aquél que pretendía enseñar. En esta etapa, el docente propone los nombres de las propiedades utilizadas, reconoce ciertos conocimientos producidos por los alumnos y los vincula con conocimientos ya estudiados o con nuevos a trabajar, etc.

1

RAÍCES DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Contenidos

Interpretación de conceptos y relaciones en distintos marcos (geométrico, numérico, algebraico, gráfico).

Propósitos y fundamentación

La siguiente secuencia[1] ha sido diseñada con el propósito de que los alumnos analicen las posibilidades de solución de un sistema de ecuaciones y aborden el estudio de la naturaleza de las raíces de las ecuaciones de segundo grado por medio de la puesta en funcionamiento de conocimientos pertenecientes a diferentes marcos (geométrico, algebraico gráfico y numérico). También les permite determinar la fórmula para la resolución de estas ecuaciones.

Durante la primera etapa se propicia el trabajo de la noción de número irracional en un contexto que resulta familiar a los alumnos: áreas y perímetros de rectángulos. Asimismo, es posible abordar la relación entre las áreas de los rectángulos de perímetro fijo.

Desarrollo

Primera parte

Dados dos números positivos **s** y **p**, busquen un rectángulo de perímetro 2**s** cm y área **p** cm^2 para los siguientes valores de **s** y **p**:

a) **s** = 15 y **p** = 36

b) **s** = 41 y **p** = 402

c) **s** = 39 y **p** = 402

A partir del enunciado anterior, en un comienzo, resulta conveniente organizar la clase de modo tal que puedan formarse al menos seis grupos de alumnos, a fin de que cada grupo reciba un par de valores y por lo menos dos grupos distintos trabajen con el mismo par. Esto permitirá, durante la puesta en común la confrontación de procedimientos y resultados por parte de cada grupo, para continuar luego con la elaboración de conclusiones en conjunto y el reconocimiento, por parte del docente, de los nuevos conocimientos enseñados.

Los valores de **s** y **p** han sido seleccionados de modo tal que el problema tenga una solución entera (a); una solución irracional (b) y que no tenga solución (c). Por otra parte, la elección de valores enteros se realizó a fin de facilitar la tarea de los alumnos, en el sentido de que la complejización del cálculo no desvíe el objetivo central del problema.

1. Esta secuencia ha sido tomada de Douady, R. "Ingeniería Didáctica y evolución de la relación con el saber en las Matemáticas de Collége-Seconde", en *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y las prácticas*. Topiques éditions, Francia, 1996.

La respuesta al inciso a puede lograrse por medio de muy pocos intentos numéricos (tanteo). Es decir, buscar valores de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tales que su suma sea 15, calcular su producto y compararlo con 36.

Para resolver el inciso b, los alumnos deberán formular o reformular el problema en el marco algebraico ($\mathbf{2x + 2y = 2s}$; $\mathbf{x\ .\ y = p}$ o bien, $\mathbf{x + y = s}$; $\mathbf{x\ .\ y = p}$).

Después de una etapa de familiarización que permita que los alumnos se den cuenta que no es posible encontrar la solución por tanteo, pueden desplegar distintos procedimientos, como por ejemplo, dibujar varios rectángulos de perímetro 41 y calcular su área, u organizar sus resultados en una tabla de cuatro columnas: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x + y}$, $\mathbf{x\ .\ y}$; buscando el valor 402 en la última columna. Pronto constatarán que no es posible encontrar ese número.

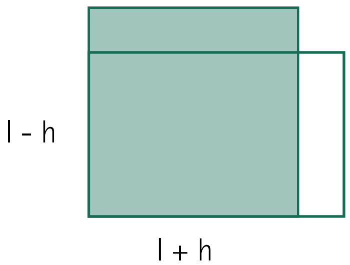
Si los alumnos trabajan únicamente con valores enteros de $\mathbf{x}$ y de $\mathbf{y}$; pueden pensar que el problema no tiene solución, dado que en este caso no es posible encontrar valores que verifiquen las condiciones del problema. Resultaría necesario que el profesor propicie el trabajo con números decimales a partir de preguntas tales como: "¿existe algún rectángulo tal que las medidas de sus lados estén comprendidas entre los pares considerados?". Las sucesivas aproximaciones decimales permitirán concluir que no es posible "llegar exactamente a 402", instancia adecuada para introducir (o profundizar) la noción intuitiva de número irracional. La utilización de calculadoras científicas facilita la tarea de los alumnos.

También es posible que los alumnos dibujen varios rectángulos de perímetro 41 por el método de compensación, instancia adecuada para trabajar la propiedad: *entre todos los rectángulos de igual perímetro, el cuadrado es el de mayor área.*

Asimismo pueden representar gráficamente ambas ecuaciones e intentar aproximarse a las condiciones bajo las cuales ambas gráficas de intersectan. De no suceder, resultaría interesante proponer este trabajo.

En el caso del inciso c, los intentos numéricos y gráficos no permiten que los alumnos determinen el rectángulo. Esta vez, no hay puntos comunes en las gráficas de ambas ecuaciones: todos los pares que verifican $\mathbf{x + y = 39}$ son menores que 402, incluso en el caso del cuadrado.

Resultaría conveniente preguntar si es posible encontrar un rectángulo de igual perímetro que el de un cuadrado y cuya área sea mayor.



Puede suceder que algunos alumnos realicen un estudio geométrico a partir del dibujo de un cuadrado (lado l) que se deforme en un rectángulo de igual perímetro (lados $\mathbf{l + h}$ y $\mathbf{l - h}$), que comparen las áreas y establezcan que cuando se pasa al rectángulo, ésta decrece.

Asimismo es probable que se valgan de un razonamiento algebraico que conduzca a concluir que, al pasar del cuadrado al rectángulo, el área del cuadrado $\mathbf{l^2}$ se convierte $\mathbf{l^2 - h^2}$ lo que posibilita interpretar que el problema no tiene solución, dado que ningún rectángulo cumple las condiciones establecidas en este inciso.

Segunda parte

a • ¿Qué condiciones deben cumplir los números **s** y **p** para que se pueda encontrar un rectángulo de perímetro **2s** cm y área **p** cm^2

b • ¿Para qué valores de **s** y **p** el sistema de ecuaciones **$x + y = s$; $x \cdot y = p$** tiene solución única, para qué valores tiene soluciones reales y distintas y para qué valores no tiene solución real?

En este caso puede resultar adecuado un primer momento de trabajo individual seguido de un trabajo grupal en el que se discutirán los resultados logrados y los procedimientos utilizados para pasar finalmente a una puesta en común en la que cada grupo exponga sus conclusiones y se expliciten los nuevos conocimientos.

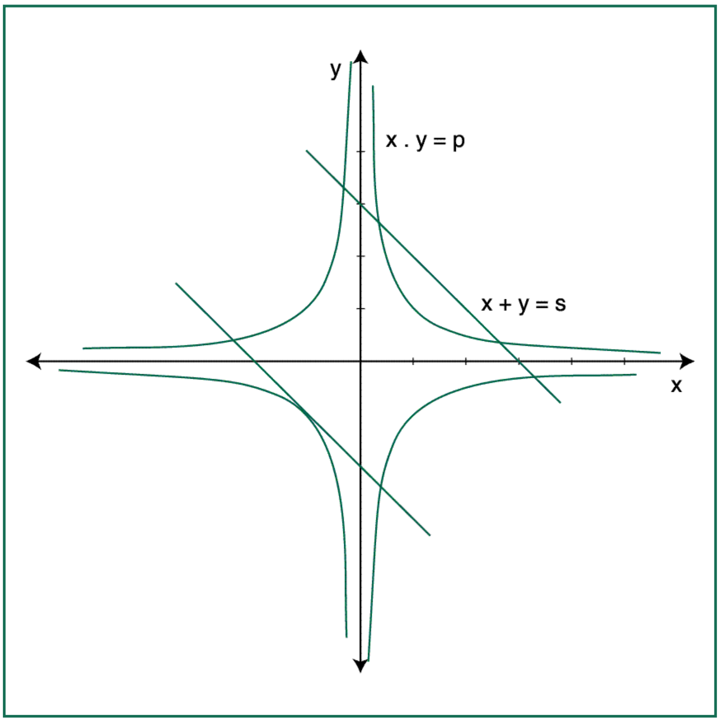
Para responder al inciso a, es posible que algunos alumnos realicen una representación gráfica, como en el problema anterior. Sin embargo, el hecho de tener que considerar un número elevado de casos, marcará las limitaciones del método gráfico remitiendo a un planteo más general. Se hace necesario entonces utilizar un conocimiento trabajado en la primera etapa (de todos los rectángulos de igual perímetro el cuadrado es el de mayor área) y sistematizarlo de la siguiente manera:

- considerar un cuadrado de lado **$l = s/2$**; su área estará dada por **$l^2 = (s/2)^2$**
- todo rectángulo de igual perímetro tiene un área que está dada por **$(l + h) \cdot (l - h)$** y es siempre menor que la del cuadrado **$((l + h)\ (l - h) < l^2)$**
- comparar el área del cuadrado con **p**: si **p** es mayor que **$(s/2)^2$**, el sistema no tiene solución; si **p** es menor que **$(s/2)^2$**, existe una solución y si **p** es igual a **$(s/2)^2$**, la solución es el cuadrado.

Surge así un nuevo conocimiento:

- El conjunto de pares **(s,p)** tales que **$s > 0$, $p > 0$** y **$p = s^2/4$** marca el límite entre los pares para los cuales existe solución y aquellos para los que no existe.
- El sistema de ecuaciones **$x + y = s$ $(s > 0)$**; **$x \cdot y = p$ $(p > 0)$** tiene solución **si $p \leq s^2/4$** y no tiene solución si **$p > s^2/4$.**

La resolución del inciso b puede abordarse desde los marcos gráfico y algebraico, debiéndose extender a todos los valores **s** y **p** (positivos, negativos o nulos), el criterio por el cual tiene solución el sistema planteado (el marco geométrico sólo tiene sentido para valores positivos de **s** y **p**). El trabajo gráfico implica considerar todo el plano.



El tratamiento algebraico permite expresar **x** e **y** de la siguiente manera: $\mathbf{x = s/2 + h}$ e $\mathbf{y = s/2 - h}$, y posteriormente reemplazarlas en $\mathbf{x \cdot y = p}$. Esta ecuación se convierte en $\mathbf{s^2/4 - h^2 = p}$, o bien $\mathbf{h^2 = s^2/4 - p}$.

Para que el sistema tenga solución, el segundo miembro de esta última ecuación deberá ser positivo o nulo $\mathbf{(s^2/4 - p \geq 0)}$. Esta condición es válida para todos los valores de **s** y de **p**, puesto que el signo de **s** no interviene en la condición, y si **p** es negativo se verifica automáticamente.

En este momento es conveniente designar las raíces de la ecuación de la siguiente manera: $\mathbf{h = +\sqrt{\quad\quad}}$ o $\mathbf{h = -\sqrt{\quad\quad}}$, y obtener $\mathbf{x = s/2 + \sqrt{\quad\quad}}$ e $\mathbf{y = s/2 - \sqrt{\quad\quad}}$.

Y estudiar entonces la noción de ecuación de segundo grado; su resolución; la naturaleza de sus raíces en función del signo del discriminante y las propiedades de estas últimas.

Este problema también posibilita abordar algunas nociones de análisis matemático tales como la de serie numérica, la convergencia de series y el acercamiento a números reales no racionales desde este marco.

2

FUNCIONES COMPUESTAS: EL CASO DEL TRUEQUE

Contenidos

Modelización de situaciones problemáticas mediante funciones.

Propósitos y fundamentación

La siguiente actividad[1] ha sido seleccionada con el propósito de destacar la potencialidad de las funciones como herramientas de modelización de situaciones externas a la matemática.

En este caso se ha elegido trabajar una situación de proporcionalidad que requiere ser modelizada mediante una función compuesta. Tanto el contexto como los valores numéricos seleccionados permiten resaltar la necesidad de la delimitación del dominio de la función en una situación en el que el mismo cobra sentido para los alumnos.

Desarrollo

Enunciado

En una comunidad indígena, donde no se utiliza dinero para comprar, se establecen las siguientes equivalencias para realizar trueques:

Por 5 gallinas, recibirán 6 palomas.

Por 4 palomas, recibirán 5 patos.

a • Una persona quiere cambiar gallinas por patos. ¿Podrías encontrar la relación que determine, de modo general, la equivalencia entre gallinas y patos?

b • ¿Podrías determinar en esta situación una función matemática? Justificá tu respuesta.

En este caso resulta conveniente un primer momento de trabajo individual a fin de que cada alumno intente arribar a una solución. Durante dicho trabajo es posible que para responder al punto **a**, surjan distintas estrategias de resolución.

Así, algunos alumnos pueden privilegiar el uso de la "regla de tres", apoyándose seguramente en los tratamientos clásicos de las situaciones de proporcionalidad, y proponer respuestas tales como "por cada dos gallinas recibirán 3 patos".

1. El primer problema, como así también algunos aspectos de su análisis, han sido extraídos de Higueras, L. *La noción de función. Análisis epistemológico y didáctico*. Universidad de Jaén, España, 1998.

Asimismo es posible que otros alumnos utilicen estrategias de puesta en ecuación:

$5g = 6p_l$; $4p_l = 5p_t$ y en algunos casos relacionen **g** y **p_t** obteniendo **$2g = 3p_t$**.

Es importante destacar que en ambos casos, el tipo de trabajo no implica un pensamiento funcional, sino proporcional.

Frente a lo solicitado en b, puede suceder que algunos alumnos propongan fórmulas no adecuadas, como por ejemplo **$p_t = 2/3g$**, sin tener en cuenta que esta fórmula no expresa el número de patos en función del número de gallinas sino cuántas gallinas equivalen a un pato. A fin de que los alumnos se den cuenta de que el error proviene de una confusión entre variable independiente y variable dependiente, puede sugerirse utilizar esa fórmula para responder a la pregunta: "Si tengo 10 gallinas para hacer el trueque, ¿cuántos patos me corresponderán?", y solicitar que se controle el resultado volviendo a la equivalencia inicial.

También es posible que otros alumnos sugieran la fórmula correcta: **$p_t = 3/2g$**, (o bien, **$f(x) = 3/2\ x$**, siendo **x** el número de gallinas y **$f(x)$** el número de patos en función del número de gallinas). Sin embargo, si no se delimita el dominio de validez de estas últimas, resultan insuficiente en el contexto del problema.

En esta instancia resulta adecuado organizar un debate y proponer preguntas tales como: "Si sólo se dispone de dos gallinas: ¿es posible efectuar el trueque? ¿Y en caso que haya sólo 5 palomas?", entre otras, lo que permite trabajar la determinación de dominios de funciones compuestas.

Sugerencias

La actividad anterior puede completarse con problemas como los que proponemos a continuación. El primero de ellos posibilita trabajar la noción de inversa de una función compuesta y su relación con las inversas de las funciones componentes **$(f_2 \text{ o } f_1)^{-1} = f_1^{-1} \text{ o } f_2^{-1}$**.

Si ahora el trueque se establece de la siguiente manera:

Por 5 patos, recibirán 4 palomas.

Por 6 palomas, recibirán 5 gallinas.

a • ¿Qué función establece la correspondencia entre patos y gallinas?

b • Comparala con la que determinaste en el problema 1. ¿Qué podés decir?

En el siguiente caso se trata de un problema abierto cuya resolución permite a los alumnos reinvertir la noción de dominio de funciones compuestas.

Modificá las cantidades de animales en el primer problema de modo tal que la función que establece la correspondencia entre gallinas y palomas tenga como dominio el conjunto de números naturales pero que el dominio de la que asigna gallinas a patos no sea este conjunto.

3

FUNCIONES Y GRÁFICAS

Contenidos

Interpretación de conceptos y relaciones en distintos marcos (algebraico y gráfico).

Propósitos y fundamentación

En la educación Polimodal, la noción de función, sus diferentes representaciones y el estudio detallado del comportamiento de las funciones más utilizadas, adquieren una relevancia especial. Se pretende que los alumnos continúen el estudio de las funciones, correspondiendo a este nivel un tratamiento más sistemático y profundo de las nociones de variable, parámetro y dependencia; de las variables discretas y continuas; de la caracterización de los dominios o conjuntos de definiciones; del uso de este concepto y sus limitaciones en la modelización de situaciones provenientes de la matemática y de otras áreas de conocimiento y de las distintas formas de representación de funciones (coloquial, gráfica, algebraica, por tablas, etc.).

En tal sentido, la actividad[1] que proponemos a continuación intenta resaltar la existencia de algunas de las relaciones entre lo gráfico y lo algebraico y potenciar el status del trabajo gráfico como un verdadero trabajo matemático.

Desarrollo

Enunciado 1

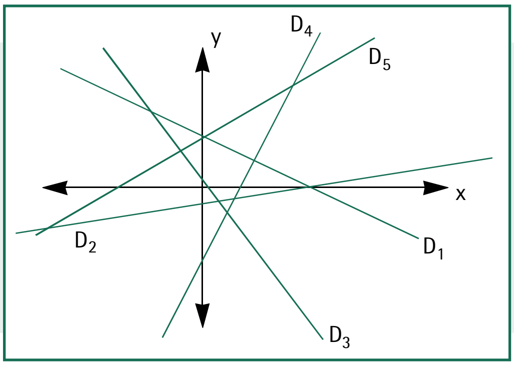
Las rectas D_1,..........., D_5, representadas en el gráfico, tienen ecuaciones **$y = a_1\ x + b_1$,..........., $y = a_5\ x + b_5$.**

Te pedimos que:

a • Ordenes los números a_1,.........., a_5 en prden creciente.

b • Ordenes los números b_1,.........., b_5 en orden creciente.

Justificá en todos los casos.



A partir del trabajo con este problema, los alumnos podrán analizar desde la gráfica los coeficientes asociados a la función lineal: pendiente de una recta y ordenada al origen e interpretar su significado geométrico.

A tal fin es conveniente un primer momento de trabajo individual y un posterior debate que posibilite la confrontación entre las propuestas de los alumnos y sus correspondientes justificaciones.

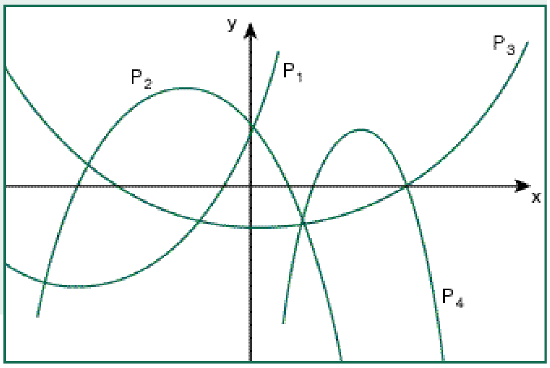
En la misma línea, pero apuntando en este caso a que los alumnos analicen algunos aspectos característicos de gráficas de funciones de segundo grado (concavidad de la parábola, desplazamientos), y sus relaciones con los coeficientes de la función de segundo grado y con la suma de las raíces de la misma, puede proponerse el siguiente enunciado:

1. Esta actividad, como así también algunos aspectos de su análisis, han sido extraídos de Artigue, M. AUDI MATH, *Dossier de l? Enseignant des mathématiques*. Centre National de Documentation Pédagogique, 1990.

Enunciado 2

Cada una de las cuatro parábolas del gráfico representan una función cuadrática de la forma

$y = a_i\, x_2 + b_i\, x + c_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$.



a • Ordená los a_i en orden creciente.

b • Ordená los $-b_i/a_i$ en orden creciente.

c • Ordená los b_i en orden creciente.

d • Ordená los c_i en orden creciente.

Justificá en todos los casos.

También pueden proponerse situaciones que permitan reconocer los efectos sobre el gráfico de una función de una transformación simple de la variable independiente o de la función ....

Enunciado 3

Consideremos seis curvas representadas 1...... 6 graficadas a continuación. La curva 1 es el gráfico de f(x).

Indicá, entre las curvas 2, 3, 4, 5, 6, cuuáles representan las gráficas de las siguientes funciones:

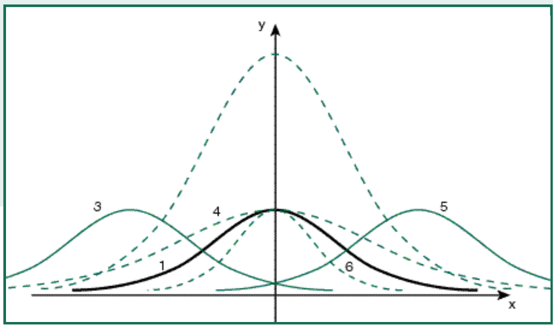
a • f(2x)

b • f(x / 2)

c • 2 f(x)

d • f(x + 1)

e • f(x-1)



Enunciado 4

Sea f(x) la función definida sobre $R^+ \cup \{0\}$ graficada a continuación:

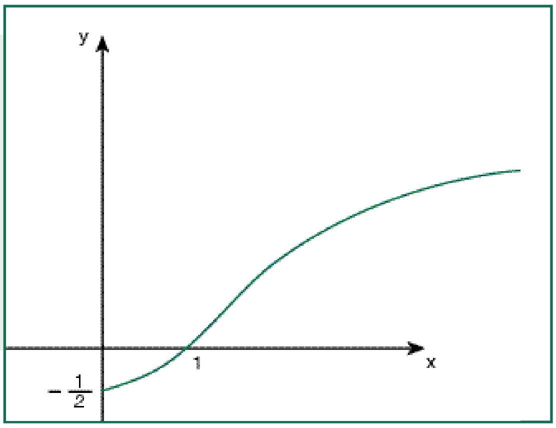
Graficá las siguientes funciones:

a • f(-x)

b • $f^2(x)$

c • 1 - f(x)

d • $\sqrt{f(x)}$



4

UN RECURSO PARA CONTAR

Contenidos

La organización de la información y la búsqueda de modelos para resolver situaciones de combinatoria.

Propósitos y fundamentos

Son conocidas las dificultades que surgen en el aula en relación a los problemas de combinatoria. Si bien no resulta complicado para los alumnos la distinción entre problemas que requieran o no la consideración del orden en un conjunto de elementos, sí es complejo su tratamiento desde el punto de vista del cálculo. El recorrido habitual es proponer primero la resolución de problemas en los que el orden es importante (variaciones) para luego avanzar hacia aquellos en los que el orden no interesa (combinaciones). Al comparar ambos tipos de problemas, por ejemplo, entre 7 personas, elegir 2 para formar una dupla presidente-vicepresidente de un club y entre 7 personas elegir 2 para armar un equipo de tenis, los alumnos suelen reconocer que en el segundo problema hay menos casos que en el primero, pero la dificultad aparece cuando se trata de determinar cuántos hay. El hecho de tener "menos casos" es asociado, en general, a "restar alguna cantidad" a la cantidad inicial, lo que complejiza la búsqueda de un método de cálculo puesto que "esta cantidad" no es simple de encontrar. En este trabajo, proponemos una estrategia que el docente puede utilizar para ayudar a los alumnos a buscar otro procedimiento, bastante económico, basado en los conocimientos que el alumno ya posee. Estamos suponiendo que los alumnos ya han resuelto problemas de variaciones y permutaciones y que disponen de procedimientos de cálculo para los mismos.

Desarrollo

Se trata de proponer cualquier problema de combinatoria en el que no sea necesario considerar el orden de los elementos (suponiendo que es la primera vez que se enfrentan a un problema de este tipo) y permitir a los alumnos desarrollar sus propios procedimientos para llegar a la respuesta.

Por ejemplo:

Entre 20 alumnos de una clase, hay que elegir 3 de ellos para armar un grupo de representantes de la clase para realizar una visita. ¿Cuántos grupos diferentes podrían representar a la clase?

Hemos elegido 20 alumnos para que el conteo de todos los casos, de manera individual, resulte costoso. Podría suceder que no lo fuera para algunos grupos de alumnos; en este caso es conveniente que el docente proponga otro problema con valores mayores.

Luego de permitir a los alumnos desplegar sus propios procedimientos (nuestras experiencias nos dicen que aquellos que arriban a la respuesta lo hacen vía procedimientos muy costosos y que muchos no consiguen arribar a la respuesta) resultaría adecuado que el docente solicite a los alumnos que confeccionen un cuadro como el siguiente, en el que en cada renglón tendrán que poner todos los grupos de a 3 personas que ahora serán contados una sola vez:

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA

....

Hemos utilizado las letras para representar a cada uno de los integrantes del curso. Seguramente no sea necesario que los alumnos completen totalmente el cuadro sino solo algunos renglones para reconocer su estructura. A partir del mismo el docente puede discutir con los alumnos cuestiones como las siguientes:

- la manera de calcular la cantidad total de elementos que tendrá este cuadro (un problema ya conocido de variaciones, para el cual los alumnos disponen de un recurso de cálculo);
- la manera de calcular la cantidad de elementos que tiene cada renglón del cuadro (problema de permutaciones ya conocido);
- la forma de utilizar estos dos valores calculados y la estructura del cuadro para llegar a la respuesta.

Es posible que algunos alumnos propongan respuestas como la siguiente:

"Se sabe que cada renglón siempre tendrá 6 grupos de los cuales me interesa contar sólo 1. Se sabe, además, que en total habrá 20 x 19 x 18 = 6840 grupos. Entonces, aplicando regla de tres simple:

De 6 me interesan 1

De 6840 me interesan x

X = 6840 : 6"

También es posible que otros digan:

"En el cuadro hay en total 6840 elementos y en cada fila hay 6. Como me interesa saber la cantidad de filas que habrá hay que dividir 6840 por 6", llegando al mismo resultado que en el caso anterior.

El docente deberá hacer notar a los alumnos que se ha resuelto un nuevo problema apelando a dos problemas ya conocidos: uno de variaciones (el numerador es la cantidad de grupos suponiendo que el orden importa) y otro de permutaciones (el denominador es la cantidad de grupos posibles, intercambiando los 3 integrantes), pudiendo arribar de esta manera a un método de cálculo económico.

5

DE ÁREAS Y PERÍMETROS

Contenidos

Elaboración de conjeturas y pruebas.

Propósitos y fundamentación

La siguiente actividad está pensada con el propósito de que los alumnos elaboren conjeturas y las prueben.

Se ha elegido plantearla en un contexto geométrico referido a la relación entre perímetro y área de rectángulos. Su resolución puede poner de manifiesto errores resistentes de los alumnos (algunos creen que varían de igual modo) que suelen persistir aún en el Nivel Polimodal.

El las fichas Nº 1 y Nº 8 hemos considerado la variación del área de cuadriláteros de perímetro fijo. En esta ficha estudiaremos la relación entre los perímetros de rectángulos de área fija.

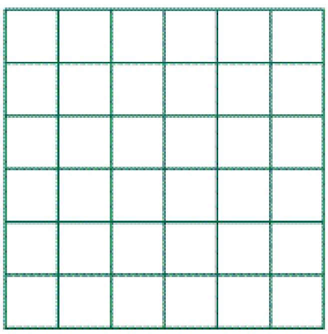
La situación permite ser modelizada por medio de funciones. La determinación del valor mínimo del perímetro remite a considerar el problema de encontrar un valor extremo.

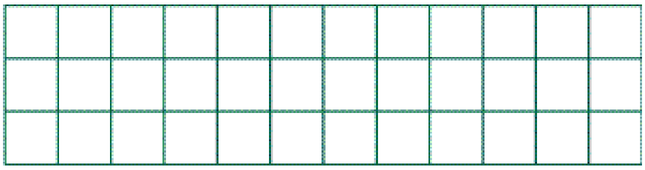
Desarrollo

Enunciado 1

Considerá todos los rectángulos de igual área, por ejemplo de área 36 cm^2. ¿Cómo varía el perímetro?

Es recomendable un primer momento de trabajo individual. Es posible que algunos alumnos respondan que el perímetro no varía y que otros, apoyándose en dibujos como los siguientes, afirmen lo contrario:





Una pequeña puesta en común que permita a los distintos grupos argumentar a propósito de sus repuestas permitirá concluir que el perímetro varía.

En esta instancia resulta adecuado preguntar:

Enunciado 2

De los rectángulos anteriores: ¿existe alguno de perímetro mínimo? Justificá.

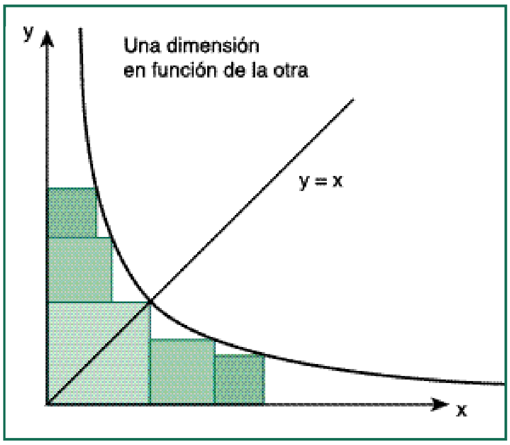
La respuesta a esta pregunta posibilita plantear dos funciones:

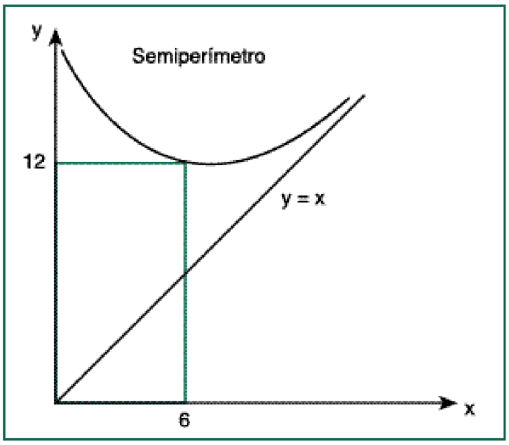
⇒ **$f(x) = 36/x$** (que expresa cómo varía una dimensión del rectángulo en función de la otra).

⇒ **$f(x) = 2(x + 36/x)$** (que expresa como varía el perímetro del rectángulo en función de una de sus dimensiones).

En el caso de esta última función, y a fin de simplificar el trabajo, puede considerarse el semiperímetro: **$f(x) = x + 36/x$**.

Un estudio de las correspondientes gráficas resulta pertinente:





El análisis de la gráfica de la izquierda permite observar la simetría de esta última con relación a la recta de ecuación y = x. Asimismo pone en evidencia que si una de las dimensiones tiende a infinito, la otra tiende a cero, por lo que el área permanece contante. Esto puede relacionarse con el estudio de las asíntotas de la hipérbola, las rectas de ecuación **$x = 0$** e **$y = 0$**.

El análisis de la otra gráfica muestra que cuando una de las dimensiones del rectángulo tiende a infinito, el semiperímetro también lo hace. En este caso las asíntotas son **$x = 0$** e **$y = x$**.

Si los alumnos dibujan rectángulos como los sombreados, es posible que conjeturen que el rectángulo de menor perímetro es el cuadrado. Resulta entonces pertinente preguntar porqué.

Una posible prueba consistiría en el planteo de la inecuación:

$$x + 36/x \geq 12 \text{ o sea } \frac{x^2 - 12x + 36}{x} \geq 0$$

Luego, como **x** es positivo, se tiene **$(x - 6)^2 \geq 0$**, lo que implica que el mínimo alcanzado es 12 para **$x = 6$**.

En caso que los alumnos dispongan de la noción de derivada como así también de procedimientos elementales de cálculo de las mismas (por definición, por reglas), esta situación puede utilizarse para abordar o profundizar el estudio de los valores extremos de una función.

6

INFORMACIÓN DADA POR GRÁFICOS DE FUNCIONES

Contenidos

Localización, lectura e interpretación de información matemática.

Propósitos y fundamentación

El propósito de esta propuesta es que los alumnos interpreten información matemática de una relativa complejidad. En tal sentido resulta conveniente trabajar con algunas revistas científicas de divulgación que incluyen artículos que permiten profundizar tales interpretaciones. Es importante además, que los alumnos detecten el uso que se hace en otras disciplinas de algunas nociones que ellos conocen de la clase de Matemática.

Desarrollo

Se presenta a los alumnos una fotocopia de parte del artículo: "La influencia ambiental en el crecimiento humano", de L. M. Guimarey, F. R. Carnese y H. M. Pucciarelli, publicado en la revista *Ciencia Hoy*, Vol. 5, Nº 30 (1995), que adjuntamos a continuación y en el que hemos tapado parte de la información. La idea es que los alumnos puedan recomponer la información que falta asociando el texto con los gráficos que se incluyen, y analizar la relación entre éstos.

Enunciado

- Completá en los cuadrados que aparecen en el texto, a qué figura se hace referencia.
- En el original, una de las figuras representa sobre el eje verical la estatura, medida en cm. ¿Cuál de las figuras es? Justificá.
- El nombre del gráfico es "Crecimiento acumulado en varones y mujeres". ¿Podés explicar este nombre?
- El otro gráfico representa sobre el eje vertical la Velocidad de crecimiento. ¿En qué unidades está representada? ¿Por qué?
- El segundo párrafo del texto ("La velocidad de crecimiento...") no cita ninguna de las figuras, pero describe una de ellas. ¿Cuál? Justificá.
- Ese mismo párrafo dice que "... En algún momento entre el primer y tercer año se produce una gradual inflexión de la curva...". ¿Con qué significado está utilizado el término inflexión? ¿Tiene alguna relación con lo que en matemática llamamos un punto de inflexión de una curva?
- El gráfico que representa la velocidad de crecimiento, ¿cómo se puede construir a partir del otro (crecimiento acumulado)?
- La idea de velocidad que se utiliza, ¿es la misma que la utilizada en física?
- ¿Qué relación tiene esto con la noción de función derivada de una función dada? Explicá.

Las últimas 4 preguntas están relacionadas con los temas más avanzados de funciones en este nivel. En tal sentido es necesario tener en cuenta cuáles son los conocimientos de sus alumnos para decidir si las incluye o no.

Texto

La forma de registrar el crecimiento es medir regularmente la estatura, desde el nacimiento hasta, aproximadamente, los veinte años. Si se representan esos valores en un gráfico, en función del tiempo, se obtiene una curva como la de la figura ☐ donde cada punto representa el crecimiento previo, el acumulado hasta el momento.

La velocidad de crecimiento varía con la edad: la curva es más empinada al principio de la vida, en los primeros tres años, y casi vertical en los puntos cercanos al cero. En algún momento entre el primero y tercer año, se produce una gradual inflexión de la curva de crecimiento, que, a partir de entonces, continúa ascendiendo con pendiente sensiblemente constante, hasta llegar a un nuevo punto de inflexión, correspondiente al popularmente llamado estirón de la pubertad, que ocurre en los dos sexos, pero a diferente edad; pasado este, el crecimiento cesa y la curva se hace horizontal, paralela al eje del tiempo.

0meros tres años, y casi vertical en los puntos cercanos al cero. En algún momento entre el primero y el tercer año, se produce una gradual inflexión de la curva de crecimiento, que, a partir de entonces, continúa ascendiendo con pendiente sensiblemente constante, hasta llegar a un nuevo punto de inflexión correspondiente al popularmente llamado estirón de la pubertad, que ocurre en los dos sexos, pero a diferente edad; pasado éste el crecimiento cesa y la curva se hace horizontal, paralela al eje del tiempo.

Otra forma de analizar el crecimiento es calcular la variación de estatura por unidad de tiempo: representar; para cada edad, la velocidad de crecimiento -por ejemplo, en centímetros por año- (Figura ☐). Como es obvio, esa representación tomará la forma de una desaceleración constante, salvo por la reaceleración de la adolescencia. También en la figura ☐ se diferencian tres períodos: el primero muestra una pronunciada disminución de la velocidad de crecimiento, desde unos 15-20 cm/año, en el primer semestre de vida, hasta unos 6-7 cm/año, a los 2-3 años; durante el segundo período, a lo largo de las edades preescolar y escolar, la velocidad de crecimiento es suavemente decreciente entre los 7 cm/año y los 5 cm/año; el tercer período corresponde al pico de aceleración puberal, en el cual los varones alcanzan en un par de años (entre los doce y los quince) nuevamente los 10-11 cm/año, y las niñas llegan, también en unos dos años, a un máximo de alrededor de 9 cm/año. Luego de esos máximos la caída de velocidad es abrupta, hasta llegar prácticamente a cero, ya que si bien las personas pueden seguir creciendo hasta, aproximadamente, los treinta años, luego de los dieciocho, no suelen aumentar de estatura mucho más de unos 3 cm.

Figura 1

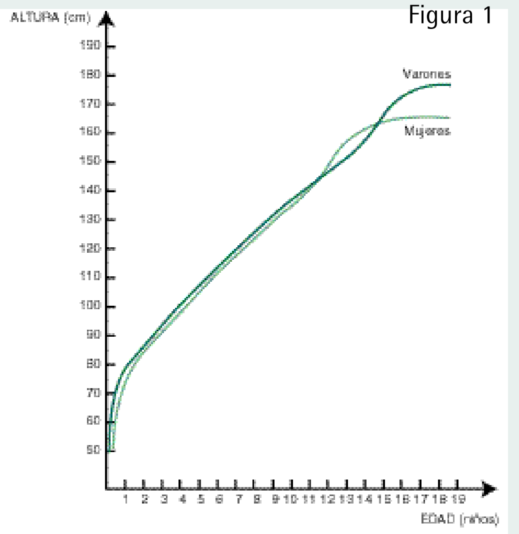
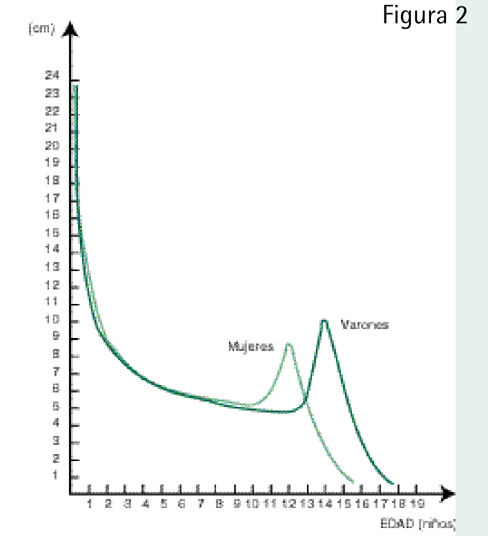


Figura 2



7

DE CIRCUNFERENCIAS Y ELIPSES

Contenidos

Generalización de soluciones y resultados y elaboración de pruebas en Geometría.

Propósitos y fundamentación

La primera parte de la actividad seleccionada apunta a que los alumnos elaboren conjeturas y propongan pruebas que les permitan validarlas.

En este caso la demostración funciona como una herramienta que permite comprender por qué es verdadero un determinado enunciado, aceptado como tal a partir del trabajo sobre un dibujo.

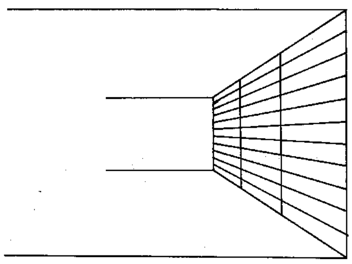
Para ello se presenta un problema perteneciente a un contexto extramatemático cuya solución remite a la ecuación cartesiana de la circunferencia.

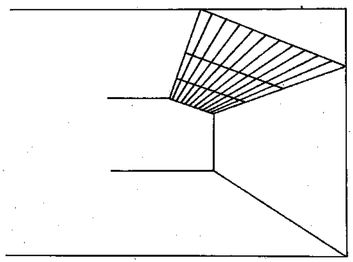
En la segunda parte se propone la generalización de la solución obtenida, lo que posibilita considerar a la circunferencia como un caso particular de elipse.

Desarrollo

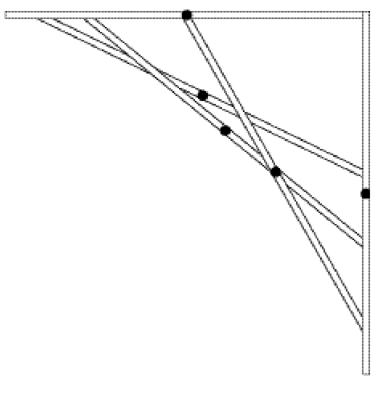
Enunciado

Un portón levadizo de forma rectangular tiene una movilidad que le permite pasar de una posición vertical a una posición horizontal, como se indica en el dibujo. Los puntos medios de los lados laterales se deslizan por dos correderas de sustentación. ¿Qué forma geométrica tienen las correderas?

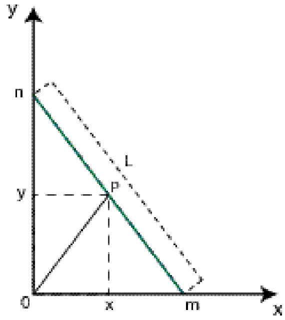




A partir del dibujo de las distintas posiciones de uno de los laterales del portón, se espera que los alumnos respondan que se trata de un cuarto de circunferencia.



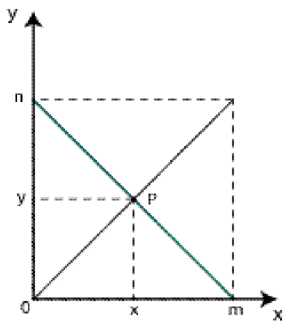
En esta instancia es adecuado que el docente les solicite que prueben sus afirmaciones. La utilización de un gráfico cartesiano puede resultar un instrumento para tal propósito:



Se trata de determinar la propiedad común a las coordenadas de (x, y) del punto medio P, en todas las posibles posiciones.

La utilización del teorema de Pitágoras remite a la expresión $x^2 + y^2 = |\overline{OP}|^2$, lo que permite asegurar que se trata de una circunferencia de radio $\overline{OP}$. Resta entonces averiguar la longitud de este segmento.

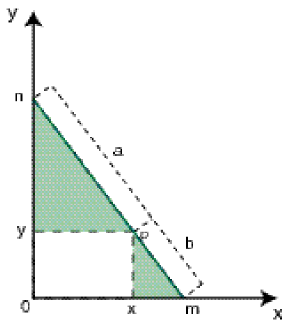
Una posible estrategia consiste en construir un rectángulo como el siguiente:



En dicho rectángulo el punto de intersección de sus diagonales coincide con el punto medio P, a partir de lo cual es posible determinar que la longitud del radio de la circunferencia es l/2.

También es posible arribar a dicho valor a partir de la expresión de las coordenadas P como coordenadas del punto medio de un segmento (x = m/2 ; y = n/2) y su relación con la longitud del lado lateral del portón ($m^2 + n^2 = l^2$).

Posteriormente puede preguntarse qué curva describen las distintas posiciones de P, si éste no se encuentra ubicado en el punto medio:



La relación existente entre los lados homólogos de los triángulos semejantes sombreados permite determinar que se trata de una elipse ($\mathbf{\sqrt{b^2 - y^2} / b = x/a \Rightarrow x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1}$) .

A continuación puede volverse a la circunferencia a fin de considerarla como una elipse de excentricidad 1 (b = a).

8

CUADRILÁTEROS ARTICULADOS

Contenidos

Modelización de situaciones problemáticas a propósito del abordaje de la función seno

Propósitos y fundamentación

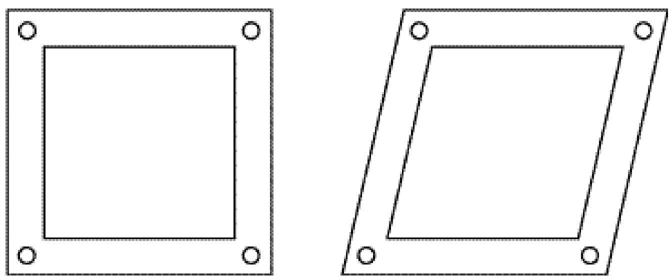
La siguiente secuencia[1] permite introducir el estudio de la función seno para ángulos entre 0º y 180º y resaltar la ausencia de proporcionalidad entre un ángulo y su correspondiente seno.

Tanto el contexto elegido (áreas de paralelogramos, que resulta familiar a los alumnos) como el uso de material concreto facilitan el trabajo con esta nueva función.

Por otra parte, a partir de la resolución de las cuestiones propuestas, se recuperan relaciones analizadas en ciclos anteriores que suelen ofrecer dificultades a los alumnos (la relación que expresa la variación del área en figuras de igual perímetro).

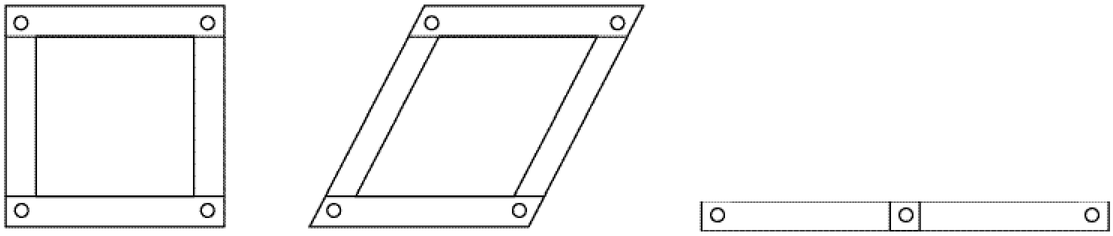
Desarrollo

Se trata de presentar a los alumnos un cuadrilátero de lados iguales articulados en los cuatro vértices (pueden utilizarse cuatro tiras de cartón de igual longitud unidas por broches mariposa), que se deforme. Luego se pregunta si el área cambia cuando se pasa de una posición a otra:



Después de un primer momento de trabajo individual es posible que los alumnos respondan que "el área no cambia porque los lados no cambian". En este caso, mostrar las distintas posiciones del cuadrilátero articulado puede ayudar a superar tal dificultad:

1. Esta actividad, como así también algunos aspectos considerados en el análisis de la misma, han sido tomados de Berté, Annie. *Matemática dinámica*. A•Z Editora, Buenos Aires, 1999.



Una vez que en la clase se acuerde que el área varía, sugerimos proponer a los alumnos que discutan cómo mostrarían la variación del área en un gráfico.

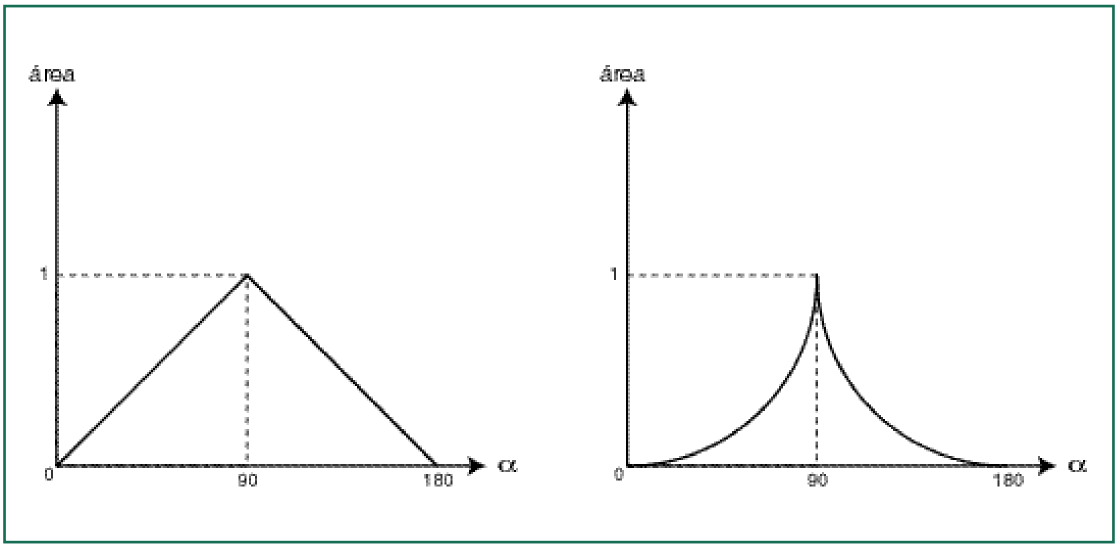
Esto instalará una discusión en torno a qué considerar como variable independiente.

Es posible que algunos alumnos se apoyen en la fórmula del área del paralelogramo (A = l x h) y respondan que la variable es la altura, lo que permite plantear que simplifiquen tomando una unidad como longitud del lado. En este caso, el número que expresa la medida del área, en unidades de superficie, es el mismo número que expresa la medida de la altura, en unidades de longitud.

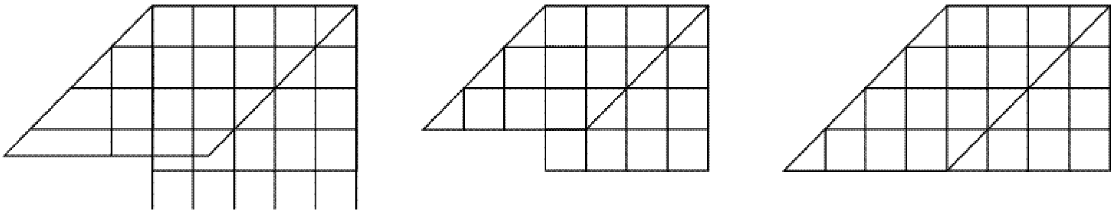
También es posible que se sugieran como posibles variables independientes la diagonal o el ángulo.

Si bien ambas respuestas son correctas; en esta instancia se propondrá estudiar la función tomando al ángulo como variable independiente.

Seguramente surgirán gráficos incorrectos como éstos:



Es necesario entonces, discutir cómo obtener las imágenes de los valores intermedios; por ejemplo la imagen de 45º. Valiéndose de dibujos como el siguiente, pueden aparecer distintas aproximaciones (3/4; 3/5...) lo que permitirá resaltar las limitaciones que ofrece el dibujo.



En esta instancia resulta adecuado considerar un triángulo rectángulo e isósceles cuya hipotenusa mida una unidad y utilizar el teorema de Pitágoras para determinar la medida de uno de sus lados, obteniendo así la imagen de 45º. También pueden obtenerse las imágenes de 30º y de 60º a partir de un triángulo equilátero de lado unidad, y volviendo a posiciones simétricas del rombo, notar que el valor de las imágenes de los ángulos suplementarios es igual.

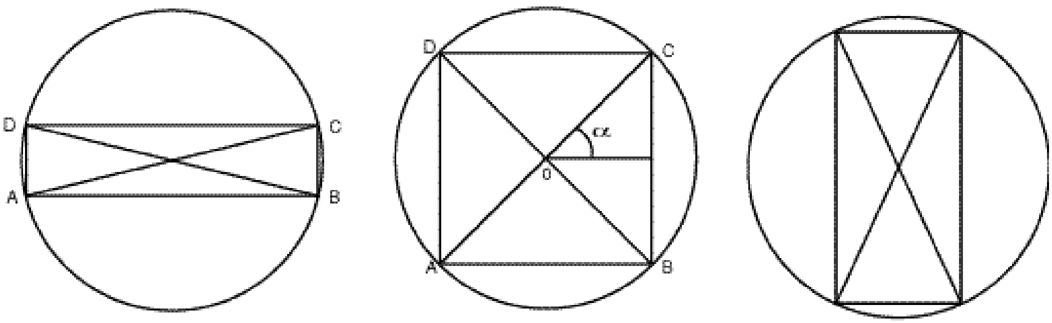
Si los alumnos sugieren que se trata de una parábola; se les puede pedir que encuentren su ecuación. Dado que la gráfica pasa por (0º,0); por (180º, 0) y que su vértice tiene coordenadas (90º, 1), conviene sugerir un cambio de unidades (por ejemplo 90º = 1) y determinar la imagen de 45º. Esto los llevará a notar que ese valor es distinto al valor obtenido anteriormente ($\sqrt{2/2} < 3/4$), y que por lo tanto, no se trata de una parábola:

A continuación es aconsejable presentar la nueva función y analizar su comportamiento, planteando el análisis de la variación del seno cuando el ángulo aumenta o disminuye al doble, triple..., lo que permite mostrar la ausencia de proporcionalidad entre el ángulo y el seno.

Sugerencias

El hecho de tomar una unidad como medida del lado del cuadrilátero articulado puede retomarse para trabajar la circunferencia trigonométrica.

También pueden presentarse dos varillas AC y AB de la misma longitud (2a) y articuladas en su punto medio común. Se trata de un rectángulo inscripto en un círculo:



Es posible estudiar la variación de su área, por ejemplo, si expresamos el área en función del ángulo α obtenemos $4\,a^2$ sen α cos α; o sea $2a^2$ sen 2α. Se puede solicitar también a los alumnos que indiquen cómo varía el perímetro en función de α. Esto conduce a la función f(α)= 4a (sen α + cos α) que pasa por un máximo para α= 45º.