Propuestas para el aula es una colección destinada a docentes, integrada por un conjunto de cuadernillos que presentan actividades correspondientes a las distintas áreas disciplinares y a los distintos ciclos de enseñanza.

Las actividades han sido diseñadas a partir de una selección de contenidos relevantes, actuales y, en algunos casos, contenidos clásicos que son difíciles de enseñar.

Las sugerencias de trabajo que se incluyen cobran sentido en tanto sean enriquecidas, modificadas o adaptadas de acuerdo a cada grupo de alumnos y a los contextos particulares de cada una de las escuelas.

Índice

Introducción

A partir de la consideración en los nuevos diseños curriculares de contenidos que atraviesan todo el trabajo matemático en el aula y que son fundamentales para la comprensión y la resolución de problemas en este dominio de conocimiento, hemos elegido como ejes, para el desarrollo de estas propuestas, algunos procedimientos generales relacionados con el quehacer matemático, característicos de este ciclo de la escolaridad:

- búsqueda de regularidades;
- generalización de soluciones y resultados;
- investigación de la validez de generalizaciones;
- interpretación y representación de conceptos y relaciones en diferentes marcos;
- modelización de situaciones problemáticas a través de gráficos, fórmulas, ecuaciones, etc. y
- localización, lectura e interpretación de información matemática.

Es importante destacar que la propuesta desarrolla estos contenidos en el marco del aprendizaje de los contenidos correspondientes a los otros bloques y no como objetos en sí mismos. Por ejemplo, en la propuesta denominada **UN FENÓMENO LINEAL**, se desarrolla una propuesta que permite trabajar algunos aspectos centrales de la problemática de la modelización en Matemática, como por ejemplo la elección de variables pertinentes, la determinación de sus valores, las condiciones bajo las cuales es posible anticipar resultados, etc., así como trabajar ciertas características esenciales de las funciones lineales y de sus formas de representación.

Hemos elegido dominios que en este ciclo cobran vital importancia: la Geometría, que es un campo interesante para plantear, entre otras cosas, ciertos límites a "razonamientos naturales" utilizados por los alumnos y contrastarlos con los razonamientos adoptados en la Matemática para validar sus resultados; el Álgebra, campo interesante para "la inmersión" en procesos de generalización, la problemática de su construcción y su validación y las probabilidades, ámbito en el que es posible discutir los límites de lo determinístico y en el cual cobran importancia algunos modelos aproximados.

Para que las situaciones de enseñanza planteadas sean una ocasión de aprendizaje significativo para los alumnos, la gestión de la clase ha sido pensada en cuatro momentos diferenciados. Un primer momento de presentación de las situaciones para su resolución en pequeños grupos. Un segundo momento de resolución efectiva por parte de los alumnos en el que la intervención del docente está pensada como facilitadora de la acción para aclarar consignas y alentar la resolución sin intervenir de modo directo, sugiriendo "lo que se debe hacer". Un tercer momento de confrontación tanto de los resultados como de los procedimientos/argumentos empleados en el que el docente organiza la reflexión sobre lo realizado, y un cuarto momento de síntesis del docente de los conocimientos a los que llegó el grupo en el cual el docente establece las relaciones entre este conocimiento que ha circulado en la clase y aquél que pretendía enseñar al diseñar la actividad.

En esta etapa, el docente pone nombres a las propiedades utilizadas, reconoce ciertos conocimientos producidos por los alumnos y los vincula con conocimientos matemáticos ya estudiados o con nuevos a trabajar, etc.

Es importante señalar que los objetivos de las diferentes propuestas pueden modificarse, aunque no los contenidos de éstas, según los conocimientos que los alumnos posean al enfrentarse con ellas.

Por ejemplo, la propuesta Nº 3, **EXPLORANDO REGULARIDADES** puede ser utilizada con alumnos que ya han construido cierta racionalidad matemática relativa a la validación (por ejemplo, aquellos que pueden reconocer los límites de ciertos razonamientos que si bien les permiten formular conjeturas, no les permiten validarlas, conforme a ciertas "reglas de funcionamiento" para la validación acordadas en el marco de la clase de Matemática) pero también puede ser utilizada para comenzar a plantear esta problemática en la escuela. Según se trate de uno u otro objetivo, el docente podrá realizar las modificaciones que crea necesarias para arribar a ellos. En el caso de la propuesta mencionada, en la **Parte 2**, se le exige a los alumnos que justifiquen la estrategia elegida y expliquen por qué con esta estrategia podrán ganar, sin permitirles probarla de forma empírica, justamente porque hemos observado que aquellos alumnos que todavía no han entrado en un cierto "juego matemático", al probar empíricamente sus resultados y "ver" que funcionan, se rehúsan luego a dar explicaciones más generales. Esta restricción no será necesaria en los casos en que los alumnos ya reconozcan los límites de estas validaciones pragmáticas.

1

LOS GRÁFICOS CARTESIANOS

Contenidos

Localización, lectura e interpretación de información: análisis y construcción de gráficos.

Propósitos

En las propuestas habituales, los gráficos de funciones aparecen como una "representación más", muy a menudo realizados a partir de su expresión algebraica y desprovistos de significación. Es intención de esta propuesta presentar algunos ejemplos que permitan una modificación del status de los gráficos de funciones en tanto herramientas eficaces para la resolución de ciertos tipos de problemas.

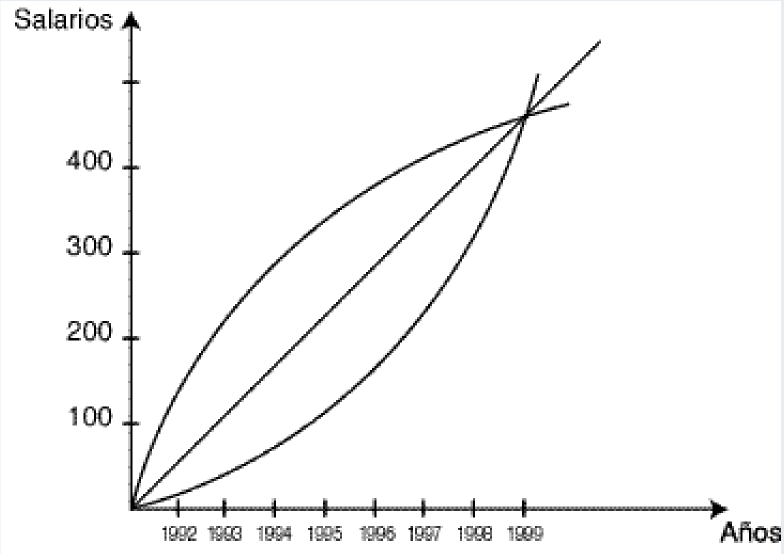
Por otro lado pensamos que esta forma de representación de las funciones permite trabajar sobre dos ideas centrales del concepto de función: las nociones de dependencia y de variación.

Las actividades que se presentan no están pensadas como una secuencia sino como un conjunto independiente de diferentes situaciones que permitan un trabajo con distintos grados de complejidad. En este sentido, las actividades pueden ser utilizadas en años diferentes o complementadas con otras con el objeto de conformar una secuencia.

Desarrollo

Problema 1

Uno de los siguientes gráficos representa los diferentes salarios que Federico fue obteniendo a lo largo de distintos años; el otro representa los salarios de Fernanda en el transcurso de los mismos años, y el último representa los salarios de Octavio en igual período.



Nos informan que el aumento del salario de Federico fue mayor en los últimos años y que el aumento del salario de Octavio fue disminuyendo a medida que pasaron los años.

a. ¿Cuál es el gráfico que corresponde a Federico, cuál a Fernanda y cuál a Octavio?

b. ¿En cuánto le aumentaron el salario a Fernanda entre 1994 y 1996?

c. ¿Qué característica tuvo el aumento de salario que le dieron a Octavio a medida que pasaron los años?

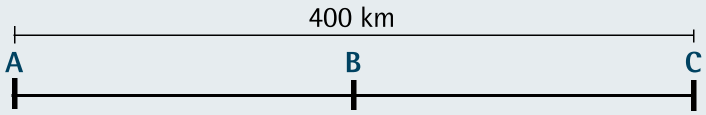
Comentarios

En este caso se trata de analizar gráficos y de utilizar información que se puede obtener de ellos para responder a las preguntas planteadas. Hemos elegido un problema en el cual sea necesaria cierta transformación de la información "directa" que puede obtenerse de la lectura del gráfico (obsérvese que todas las preguntas se refieren al "aumento" del salario, variable que no está representada en ninguno de los dos ejes pero cuyos valores puede deducirse a partir de la información que las otras variables brindan).

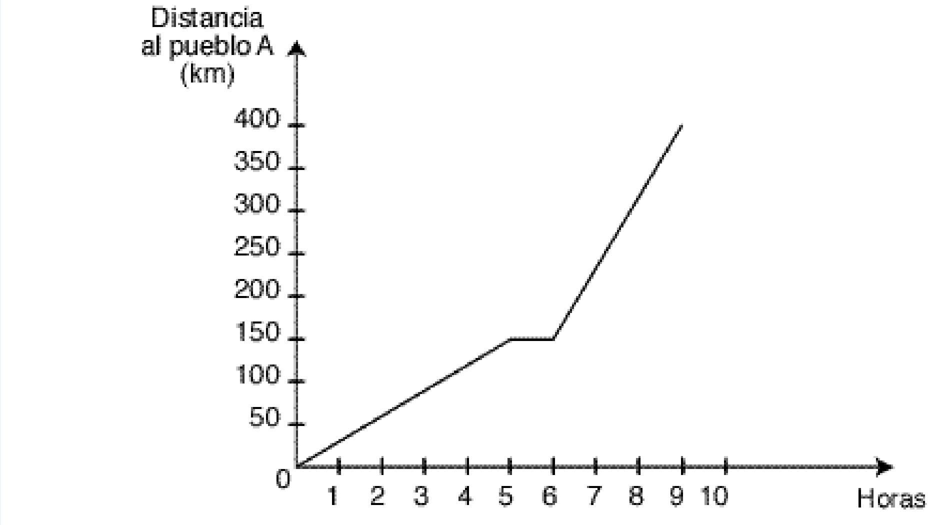
Es importante asociar, a partir de trabajar con problemas como éste, los "tipos de variación" con "la forma" de los gráficos.

Problema 2

Un auto marcha desde **A** hasta **C**, sin retroceder nunca.



En el siguiente gráfico se representa la distancia del auto al punto de partida A, a medida que transcurre el tiempo.



Construir un gráfico cartesiano que represente la distancia del auto al pueblo B a medida que transcurre el tiempo.

Comentarios

En este problema, los alumnos deberán construir un gráfico a partir de la información que se da en el texto pero también de la información que tendrán que obtener del gráfico dado: la velocidad en los diferentes tramos, el hecho de que la velocidad es constante por tramos puesto que el gráfico está compuesto por diferentes segmentos.

La idea de proponer la construcción de un gráfico de distancia a un punto intermedio del camino está relacionada con el hecho de que los alumnos suelen confundir la representación de la distancia a un punto con "el trayecto efectivo" del auto. En este sentido, será interesante discutir por qué en el gráfico construido hay "tramos descendentes" (a pesar de que el auto no retrocede nunca) y en el gráfico dado no los hay.

Problema 3

Dos ciclistas parten de un mismo lugar, a la hora 6 y marchan por un camino recto, sin retroceder nunca.

Entre hora y hora los ciclistas marchan a velocidad constante.

En las siguientes tablas se indica la distancia al punto de partida a la que cada uno de ellos se encuentra en distintas horas del día.

Ciclista 1

Hora	7	8	9	10	11	12	13	14
Distancia en km	40	80	100	100	150	180	190	210

Ciclista 2

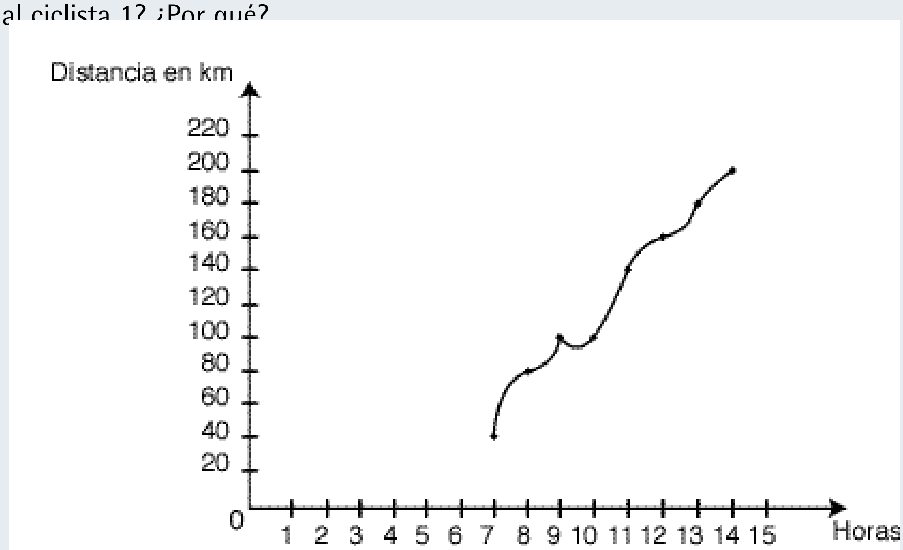
Hora	7	8	9	10	11	12	13	14
Distancia en km	30	80	110	130	140	160	180	220

a. ¿Durante cuánto tiempo el ciclista 1 estuvo delante del ciclista 2?

b. ¿Se cruzaron los ciclistas alguna vez? ¿Cuándo?

c. En el enunciado del problema se indica que, entre hora y hora, los ciclistas van a velocidad constante. ¿Es necesaria esta aclaración para poder responder a las preguntas a y b? ¿Por qué?

d. Si los ciclistas no marchan a velocidad constante entre hora y hora, ¿podría ser el siguiente un gráfico correspondiente al ciclista 1? ¿Por qué?



Comentarios

En esta actividad, el gráfico puede aparecer no solamente como "una forma más" de representación de un fenómeno sino como un medio "económico" para la resolución de problemas: en este caso, permite visualizar de forma global el fenómeno a estudiar y proporciona, a partir de su análisis, la información necesaria para responder las preguntas **a** y **b**.

Es importante que los alumnos puedan trabajar con diferentes tipos de problemas para los cuales una determinada representación sea más pertinente que otra para acceder a la respuesta. Como objetivo global se apunta a que, frente a un determinado problema de modelización, el alumno pueda elegir el tipo de representación más conveniente para avanzar en su resolución.

Las cuestiones **c** y **d** ponen de relieve la importancia de la toma en cuenta de las hipótesis en la construcción de un gráfico que representa un cierto fenómeno así como la relación entre estas hipótesis y la información que no puede leerse directamente desde la tabla (por ejemplo, qué sucede entre las 8 y las 9 con cada uno de los ciclistas). Es necesaria la puesta en juego de nociones de variación uniforme y de gráficas asociadas a este tipo de variaciones para completar la información presente en la tabla y construir el gráfico correspondiente.

2

MONEDAS Y PROBABILIDADES

Contenidos

Modelización de situaciones problemáticas a través de materiales, tablas, dibujos, fórmulas, etc. (eje 3). Análisis de la equiprobabilidad de resultados

Propósitos

El cálculo de probabilidades mediante la fórmula de Laplace[1] requiere de un análisis minucioso del número de casos posibles y de la equiprobabilidad de estos últimos. En este sentido, la siguiente actividad apunta a profundizar tales análisis en una situación que comunmente remite a una anticipación errónea de la equiprobabilidad de los sucesos. Para ello se propone confrontar los resultados obtenidos mediante la utilización de la mencionada fórmula (enfoque clásico) con resultados obtenidos a partir de experimentaciones reales o simuladas (enfoque frecuencial), o bien reconsiderar las respuestas mediante el uso de representaciones adecuadas

Desarrollo

En un curso se plantean los siguientes problemas:

A un grupo de alumnos se le pidió que calcularan, al arrojar simultáneamente dos monedas iguales de $1, la probabilidad de obtener una cara y una ceca. Uno de ellos hizo el siguiente análisis:

Los posibles resultados son:

- ambas cara
- ambas ceca
- una cara y una ceca

La probabilidad buscada es $\frac{1}{3}$.

Al otro grupo, se le pidió que calcule, al arrojar simultáneamente 2 monedas distintas (una de 50 centavos y una de $1.-), la probabilidad de obtener una cara y una ceca. Un alumno propuso lo siguiente:

Los posibles resultados son:

- ambas cara
- ambas ceca
- cara la de $1 y ceca la de 50 centavos
- ceca la de $1 y cara la de 50 centavos

La probabilidad buscada es $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

1. Recordemos que Laplace define la **probabilidad** de un suceso como el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre que estos sean igualmente posibles.

¿Cuál de los razonamientos de los alumnos es correcto?

Es posible que muchos de ellos respondan que en ambos casos los razonamientos son correctos.

Si es así, resulta conveniente sugerir que analicen sus respuestas a la luz de resultados experimentales. Para eso la clase puede organizarse, entonces, separando a los alumnos en grupos,, y solicitando a la mitad de los grupos que obtengan 100 resultados experimentales trabajando con dos monedas iguales (por ejemplo de $1) y a la otra mitad que obtengan otros 100 resultados con dos monedas distintas (por ejemplo, una de $1 y otra de 50 centavos) y que anoten los resultados obtenidos en una hoja, sin colocar su nombre.

A fin de facilitar la tarea, pueden formarse grupos de modo tal que cada uno de ellos pueda obtener 25 resultados. Asimismo puede proponerse trabajar con una cajita de telgopor con tapa en la que se colocan 20 monedas, se tapa, se agita, se vuelca sobre la mesa y se anotan los resultados. De este modo, un solo experimento permite registrar diez resultados. En este caso, a fin de evitar posibles confusiones, es necesario resaltar que se trata de la experiencia "arrojar dos monedas".

Posteriormente es aconsejable anotar los resultados en el pizarrón y preguntar a los alumnos si a partir de las tablas de resultados experimentales es posible distinguir los grupos que usaron monedas de igual valor de los que usaron monedas de distinto valor.

También podría simularse la experiencia mediante el uso de tablas de números al azar.

Una instancia posterior de debate posibilitará discutir por qué no es posible identificar la experiencia a partir de los resultados y detenerse en los razonamientos analizados al comienzo, identificando así que el error del primer alumno proviene de una incorrecta determinación del número de casos igualmente posibles (en ambos casos los resultados son cuatro: cara-cara; cara-ceca; ceca-cara y ceca-ceca) que requiere la utilización de la fórmula laplaciana.

Resulta entonces importante destacar que el secreto de un buen análisis reside en considerar que aunque las monedas tengan igual valor se trata de objetos distintos.

Otra opción para trabajar las respuestas incorrectas de los alumnos es sugerir la construcción o el completamiento de tablas o diagramas que permitan recoger los distintos resultados posibles.

3

EXPLORANDO REGULARIDADES

Contenidos

Modelización de situaciones problemáticas a través de fórmulas.

Propósitos

Se trata de una actividad que puede ser utilizada en los comienzos del Álgebra. La producción de fórmulas es un recurso interesante para la introducción de "las letras" en la clase de Matemática; en este caso, el recurso algebraico aparece como un medio para resolver problemas que implican la exploración de regularidades. Esta situación en particular es rica puesto que puede dar lugar a diferentes métodos de cálculos y, por ende, a una variedad de fórmulas que implicará una discusión sobre la validez y la equivalencia de las mismas.

Asimismo, la situación exige la puesta en funcionamiento de un proceso de generalización y abre un espacio para el trabajo sobre la problemática de la validación en la clase de Matemática, en particular, la validación de un proceso de generalización.

Desarrollo

Organización de la clase

Se arman equipos de cuatro alumnos y el docente propone el siguiente juego (en la Parte 1 del juego no se puede usar calculadora).

- **Parte 1**

  "El profesor les dará diez números consecutivos y el equipo que primero encuentre la suma de estos números será el ganador".

  El docente propone, a continuación, comenzar a jugar y escribe en el pizarrón:

  1era partida: 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28.

  Luego de finalizada esta partida, se propone la segunda:

  2da partida: 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792.

  Luego de finalizada esta partida, se propone la tercera:

  3era partida: 6985, 6986, 6987, 6988, 6989, 6990, 6991, 6992, 6993, 6994.

- **Parte 2**

  Cada equipo tendrá un tiempo para buscar alguna estrategia que permita ganar rápidamente, cualquiera sean los diez números consecutivos que se propongan.

  Luego, cada grupo tendrá que presentar la estrategia diseñada y dar razones que justifiquen por qué ella sirve cualquiera sean los diez números consecutivos y por qué creen que permite ganar rápidamente.

Puesta en común

Al finalizar la Parte 2 se realiza una puesta en común en la cual se discuten las estrategias propuestas y se analizan aquéllas que supuestamente permiten ganar más rápido.

- **Parte 3**

  Se busca ahora escribir una fórmula que permita, dado el primero de los diez números consecutivos que hay que sumar, obtener como resultado la suma de éstos.

  Cada grupo tendrá que explicar cómo ha obtenido la fórmula.

Puesta en común

Se analizan, se comparan y se validan las diferentes producciones.

- **Parte 4**

  1. ¿Es posible que la suma de diez números consecutivos dé por resultado 735.245? ¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son los números que se han sumado?
  2. ¿Es posible que la suma de diez números consecutivos dé por resultado18.450? ¿Por qué?

     Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son los números que se han sumado?

Puesta en común

Se analizan, se comparan y se validan las diferentes producciones.

Comentarios

En la Parte 1, frente a una respuesta de un grupo, el docente controla el resultado de la suma. En caso de obtenerse una respuesta incorrecta, el juego continúa hasta que aparezca la primera respuesta correcta. En esta instancia no hay ningún tipo de discusión en relación a la manera de obtener los resultados (cada equipo no deberá divulgar la estrategia que supuestamente le permite ganar el juego).

En la primera parte de la situación, los números que se proponen son cada vez mayores, de tal manera que la realización de todas las cuentas comience a manifestarse como un método "poco económico" y así implicar al alumno en la búsqueda de otros procedimientos.

El hecho de no conocer de antemano el conjunto de números que el docente propondrá podría funcionar como "motor de generalización": las estrategias locales diseñadas en la primera parte (esencialmente ligadas a estrategias de cálculo mental) no son fácilmente generalizables, fundamentalmente frente a la exigencia de comunicación; muchas de ellas deberán reformularse a partir de la exigencia de la producción de una fórmula.

Es importante, en la Parte 3, discutir la equivalencia de diferentes fórmulas posibles, cada una de ellas proveniente de diferentes regularidades, como por ejemplo:

1. **n** x 10 + 45 — siendo **n** el primer número de la secuencia
2. (**n**+9) x 10 – 45 — siendo **n** el primer número de la secuencia
3. ((**n**+4) + (**n**+5)): 2 x 10 — siendo **n** el primer número de la secuencia
4. (**n**+4) x 10 + 5 — siendo **n** el primer número de la secuencia
5. 5x (2**n**+9) — siendo **n** el primer número de la secuencia.

4

EL PROBLEMA DEL RECTÁNGULO

Contenidos

La validación en Geometría.

Propósitos

Se trata de una situación que tiene por objetivo discutir o poner en duda la medición como recurso para comparar dos áreas y, en general, como método para tomar decisiones y/o validar proposiciones en Geometría. La situación ha sido elegida teniendo en cuenta que el trabajo sobre la validación en Matemática tiene un rol fundamental en este ciclo: interesa que el alumno aprenda a desarrollar argumentaciones basadas en propiedades conocidas de las figuras, de tal manera de establecer el carácter necesario de los resultados de forma independiente de la experimentación.

Desarrollo

Enunciado

Dado el rectángulo ABCD con AB=10 cm y BC = 6 cm:

- trazar la diagonal AC y marcar sobre ella un punto P a 9 cm de A;
- trazar una paralela al lado AD que pase por P; llamar I al punto en que corta a AB y J al punto en que corta a DC;
- también por P trazar una paralela al lado AB, y llamar K al punto en que corta a AD y L al punto en que corta a BC.

¿Cuál de los dos rectángulos IBLP o KPJD tiene área mayor?

Organización de la clase

- **Parte 1**
  Los alumnos trabajan en forma individual sobre el enunciado citado.

- **Parte 2**
  Cuando todos los alumnos tienen una respuesta, el profesor propone que se reúnan en grupos de cuatro y discutan el problema para arribar en conjunto a una solución. Por otro lado, y teniendo en cuenta que deberán exponer y defender ante los otros grupos su respuesta, tendrán que elaborar una justificación del trabajo realizado.

- **Parte 3**
  Un representante de cada grupo expone en el pizarrón los resultados y se organiza un debate sobre ellos.

- **Parte 4**
  se realiza un balance final mediante el cual los alumnos identificarán aquello que se pretende que aprendan a través de la actividad.

Comentarios

¿Por qué se eligen esta formulación del problema y esta organización de la clase?

Como se espera que la mayoría de los alumnos resuelva el problema a través de la medición de los lados de cada rectángulo y del cálculo de las áreas, se han hecho algunas elecciones intencionales de tal forma que los resultados obtenidos por cada alumno fueran divergentes. Esto provocaría, en primer lugar, contradicciones dentro de cada uno de los grupos y luego entre los diferentes grupos que conforman la clase. Las medidas elegidas para los lados del rectángulo ABCD son tales que los lados de los rectángulos cuyas áreas se deben comparar resultan números irracionales. Esto conduce a una mayor imprecisión en las mediciones efectuadas por los alumnos.

Por otro lado, si bien hubiera sido posible proponer un enunciado sin medidas, se ha querido evitarlo porque se ha supuesto que la diversidad de dibujos que hubieran surgido en estas condiciones no permitiría evidenciar una contradicción, ya que los alumnos podrían atribuir la diferencia entre los resultados obtenidos al hecho de haber dibujado rectángulos diferentes.

La organización de la clase adquiere asimismo un lugar esencial para el establecimiento de condiciones que permitan aproximarse al objetivo deseado. Un primer conflicto debe aparecer en cada grupo, con relación a la confrontación de respuestas diferentes, ya que interesa empezar a cuestionar la "exactitud de la medida" e ir modificando esta concepción de los alumnos por la idea de que toda medición es aproximada. Por esta razón, se ha pensado una instancia de trabajo individual para que cada uno llegue al grupo con una respuesta al problema.

Hasta este momento del desarrollo de la actividad, el docente no se posiciona ni a favor ni en contra de las decisiones individuales o grupales. Por supuesto que está activo y participa de todas las cuestiones que no comprometan el desarrollo del debate posterior. Es decir, si algún grupo llega a la instancia del debate con la confirmación del docente de que su resultado es correcto, tal debate no cumplirá la función para la cual fue previsto.

5

EL PROBLEMA DE LOS DISCOS

Contenidos

La simulación de fenómenos aleatorios.

Propósitos

Una de las finalidades de las probabilidades es descubrir modelos matemáticos que sirvan para interpretar del mejor modo posible una situación probabilística dada. En muchas ocasiones, estos modelos pueden no estar al alcance de los alumnos o resultarles complejos. Es en estos casos donde la simulación puede convertirse en una herramienta interesante para la búsqueda de un modelo aproximado para trabajar la situación. Del mismo modo, la simulación puede usarse como instrumento para "verificar" o "controlar" ciertos resultados obtenidos teóricamente.

La actividad que propondremos a continuación es interesante puesto que, si bien es posible encontrar un modelo teórico para resolverla, el modelo empleado comúnmente por los alumnos es errado y la simulación aparece como un instrumento para poner en cuestionamiento dicho modelo.

Desarrollo

Problema 1

En una caja hay tres discos de igual diámetro; uno de ellos tiene una cara roja y la otra azul; el otro tiene las dos caras rojas y el tercero las dos caras azules.

- El profesor extrae al azar uno de los discos y muestra a los alumnos una de sus caras. Los alumnos tienen que adivinar el color de la cara oculta. Este juego se repite 20 veces y resulta ganador aquel que consiguió acertar la mayor cantidad de veces el color de la cara del disco que no se muestra.

  ¿Les parece que hay alguna estrategia que les permita ganar?

Comentarios

Es habitual que en este problema los alumnos respondan que "da lo mismo decir cualquier cosa" o que "no existe ninguna estrategia más conveniente que otra", proponiendo el siguiente argumento: del otro lado del disco puede haber rojo o azul, entonces da lo mismo que diga cualquiera de estos dos colores puesto que la probabilidad de cada uno de ellos es $\frac{1}{2}$.

Como este razonamiento no es correcto, proponemos invitar a los alumnos a que realicen el juego con alguno de sus compañeros (eligiendo una estrategia a seguir), lo que permitirá el cuestionamiento de aquél. Es posible que simulen el juego, recortando tres papelitos del mismo tamaño y coloreándolos, o colocando alguna identificación, como por ejemplo una cruz para los lados que representan el rojo y un círculo para los lados que representan el azul.

Será conveniente proponer a los alumnos que contruyan un cuadro como el siguiente:

	Color que se muestra	Color supuesto	Color real
Primera partida			
Segunda partida			
Tercera partida			
Cuarta partida			
....			

Realizando el análisis del cuadro es posible comenzar a cuestionar esta primera estrategia de los alumnos: se empieza a sospechar que si se elige como estrategia "decir el mismo color que nos muestran", se hubiera ganado en más casos.

Efectivamente, en este juego es conveniente elegir el mismo color que se está mostrando puesto que en la caja hay tres papeles de los cuales dos tienen de los dos lados el mismo color. Entonces, la probabilidad de sacar un papel que tenga de los dos lados el mismo color es $\frac{2}{3}$.

Problema 2

De un mazo de 40 cartas se extrae una, se la vuelve a mezclar en el mazo y luego se extrae otra. Interesa calcular la probabilidad de que las dos cartas sean del mismo palo.

Comentarios

Dependiendo del nivel de escolaridad de los alumnos, la simulación podría ser utilizada, en este caso, para "controlar" un resultado teórico o para "aproximarnos" a un resultado teórico.

Un manera de aproximarse al valor de la probabilidad es realizar la experiencia efectiva. Pero también es posible simular esta experimentación mediante la utilización de cualquier recurso que genere números aleatorios.

Por ejemplo, en las calculadoras existe una tecla RANDOM que proporciona comúnmente números aleatorios en el intervalo (0; 1). Para resolver el problema planteado podemos usar este recurso, , de la siguiente manera: como en el mazo de cartas hay cuatro palos diferentes y suponemos que todos tienen la misma posibilidad de aparecer (es decir, que los sucesos son equiprobables), cualquier número aleatorio perteneciente al intervalo (0; 0.25) simulará la aparición de cartas de un cierto palo, por ejemplo oro; cualquier número aleatorio perteneciente al intervalo (0.25; 0.50) simulará la aparición de cartas de otro palo, por ejemplo copa; cualquier número aleatorio perteneciente al intervalo (0.50; 0.75) simlará la aparición de cartas de espada y, por último, si aparece un número aleatorio perteneciente al intervalo (0.75; 1) supondremos que se trata de una carta de basto.

Entonces, es posible armar una tabla con pares de números aleatorios y determinar la frecuencia relativa de aparición de cartas del mismo palo para aproximarse a la probabilidad teórica. Según el tipo de problemas que se trabajen, será necesario adaptar la utilización de la calculadora o la tabla de números aleatorios.

6

UN FENÓMENO LINEAL

Contenidos

Modelización de situaciones problemáticas a través de materiales, tablas, gráficos y fórmulas.

Propósitos

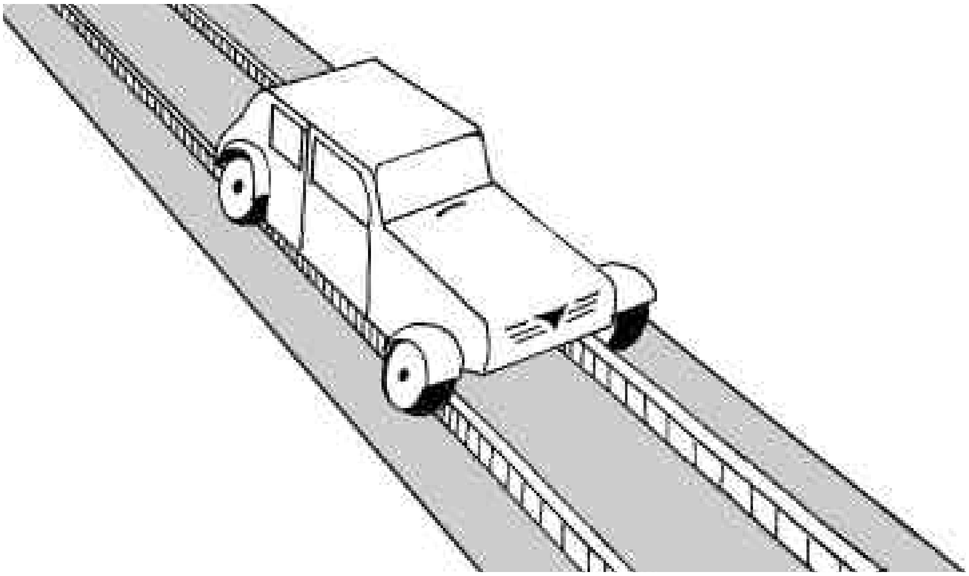
Se trata de una actividad que permite trabajar la problemática de la modelización: elección de variables pertinentes (en la etapa de experimentación, los alumnos tendrán que decidir cuáles son las variables a considerar para resolver el problema que luego se les planteará), la medición de sus valores, las condiciones bajo las cuales la anticipación esperada es pertinente, etc. Esta actividad permite también una primera aproximación a las características fundamentales de los fenómenos lineales y de sus formas de representación.

Por otro lado, se trata de una actividad interesante puesto que permite al docente analizar la función que en ella juegan los materiales concretos, función que muchas veces se desliza hacia una manipulación sin un objetivo específico.

Desarrollo*

Materiales

Los alumnos necesitarían autitos a pila, cronómetros, cintas métricas y pistas de madera en donde se indique el lugar de salida, como se muestra en el siguiente dibujo. La velocidad de los autitos debe ser aproximadamente constante y las pistas tener todas la misma longitud (en las pistas pueden construirse unos carriles de tal manera que el auto no se desvíe y se desplace siempre en línea recta).



* Esta actividad se ha realizado tomando como referencia una propuesta coordinada por la Prof. Patricia Sadovsky que se ha experimentado en diferentes oportunidades y que ha sido analizada en la cátedra de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Parte 1

Organización de la clase: los alumnos trabajan en grupos de cuatro.

Consigna: teniendo a su disposición un autito, una pista, cintas métricas y cronómetros, se les plantea el siguiente problema:

> El auto es largado a ...... cm de la salida. ¿A qué distancia de la salida se encontrará el auto luego de ...... segundos de ser largado?

Los alumnos deberán experimentar con los autitos haciendo lo que crean necesario y teniendo en cuenta que luego de esta experimentación se completarán los espacios en blanco que están en el problema (con diferentes valores) y tendrán que resolverlo con los datos obtenidos en esta experimentación, sin volver a utilizar los autitos.

Luego de proponer una respuesta, podrán verificar si es correcta haciendo la experimentación efectiva.

Parte 2

Organización de la clase: continúan trabajando los grupos ya armados.

Consigna: supongamos que cada uno de los autitos se larga a 25 cm de la salida. Se propone a los alumnos responder:

a. ¿Cuál es la cuenta que le indicarían a una computadora para que calcule la distancia a la que se encuentra el auto de la línea de salida, si se ingresa como dato el tiempo transcurrido desde que fue largado?

b. ¿Puede ser que el auto se encuentre a 120 cm de la línea de salida a los 20 segundos de haber partido? ¿Por qué?

c. ¿Puede ser que el auto se encuentre a 175 cm de la línea de salida a los 30 segundos de haber partido? ¿Y que se encuentre a 100 cm de la salida a los 15 segundos de haber partido? ¿Por qué?

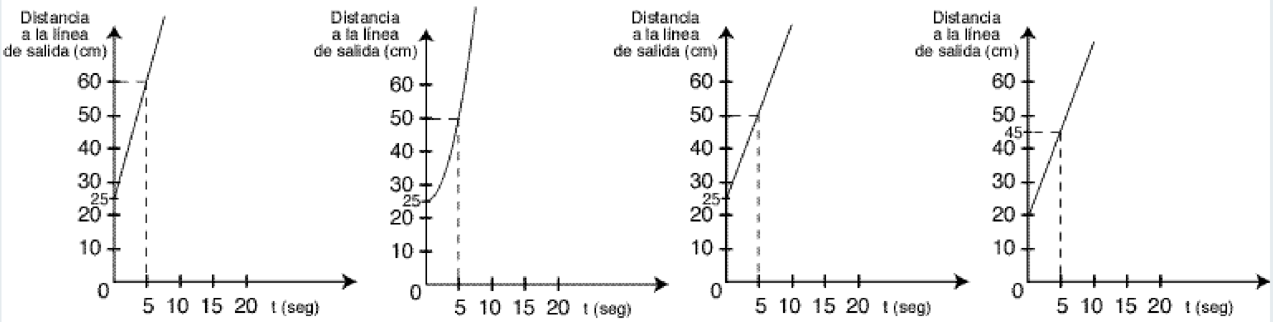
(Los datos que se proponen analizar deberán ser elegidos por el docente en función de la velocidad aproximada de los autitos con que trabaje en clase. En nuestro caso, estamos pensando en un autito hipotético con una velocidad aproximada de 5 cm/seg.)

Parte 3

Organización de la clase: una primera etapa de trabajo individual para luego continuar con los grupos ya organizados.

Consigna:

¿Cuál o cuáles de los siguientes gráficos puede corresponder a la distancia a la línea de salida en función del tiempo del auto considerado en la Parte 2? ¿Cuáles gráficos no pueden corresponder? ¿Por qué?



Comentarios

¿Por qué en la Parte 1 de la actividad se dejan espacios en blanco en el problema planteado a los alumnos?

Porque la actividad perdería sentido si estos espacios se completan de antemano (los alumnos medirían la distancia en el tiempo propuesto y se acabaría ahí la actividad). El objetivo es que los alumnos decidan aquellos datos necesarios a considerar que les permitirán anticipar la posición del auto en función del tiempo, cualquiera sea la distancia inicial a la cual se lo coloca y cualquiera sea el tiempo que se desee considerar.

Algunos de los procedimientos habituales que hemos observado en clase son:

- calcular el largo total de la pista y el tiempo que el auto tarda en recorrerlo y, a partir de ahí, y usando la noción de proporcionalidad directa, calcular lo que recorre por segundo;
- calcular la distancia que el auto recorre en un período de tiempo prefijado, por ejemplo 30 segundos, y dividir la distancia por 30 para calcular los centimetros recorridos en cada segundo.

Es importante observar que, en estos procedimientos, los alumnos están dando por supuesto (de manera implícita) un dato fundamental: la velocidad del auto es constante, dato que no se les ha explicitado a los alumnos puesto que es la esencia del modelo que se desea construir.

En las diferentes oportunidades que hemos experimentado esta actividad, ningún alumno se planteó la necesidad de analizar explícitamente este supuesto como condición para que los procedimientos anteriormente señalados sean válidos.

Nos parece que en una primera etapa del trabajo es posible avanzar sin necesidad de esa explicitación, para luego realizar una confrontación con alguna actividad posterior en la cual ese supuesto se ponga de manifiesto (por ejemplo, ubicando la pista en un plano inclinado, lo que implicará evidenciar un cambio de velocidad y, entonces, una vuelta sobre el problema anterior).

Cuando el docente presente pares de datos para confrontar la anticipación con la experiencia efectiva en la Parte 1, es interesante proponer, entre otros, los siguientes:

10 cm	4 segundos
10 cm	8 segundos

Es probable que los alumnos calculen la distancia a la línea de salida para el primer par de valores, que en nuestro auto supuesto de velocidad 5 cm/seg nos daría que se encuentra a 10 + 4 x 5 = 30 cm de la salida, y que digan que en el caso siguiente se encontrará a 60 cm de la partida puesto que se trata del doble de tiempo. Es interesante discutir con los alumnos por qué este razonamiento es erróneo, ya que la elección de colocar el autito en un lugar que no fuera la salida es intencional para poner en discusión la posibilidad o no de utilizar proporcionalidad, o entre qué variables es posible utilizarla (no hay proporcionalidad entre el tiempo y la distancia a la línea de salida, pero si la hay entre el tiempo y la distancia recorrida por el auto, puesto que su velocidad es constante).

En las Partes 2 y 3 se proponen diferentes formas de representación del modelo matemático que permite resolver el problema planteado. Será interesante discutir con los alumnos, a propósito de la fórmula solicitada en 2a, el significado de cada uno de los coeficientes que aparecen en ella, así como la variación de éstos en función de la variación de los datos del problema. Asimismo, en el caso de la representación gráfica, se pretende relacionar la característica esencial de los modelos lineales (variación constante) con las características de los gráficos propuestos.

A partir de actividades como las presentadas, es posible seguir diferentes caminos: podrían plantearse problemas de encuentro entre diferentes autos, introduciendo de esta manera las ecuaciones o podrían trabajarse otros modelos lineales que vincularan otros tipos de variables, por ejemplo, temperatura del agua en función del tiempo de calentamiento. En este último caso es interesante interpretar cada uno de los coeficientes del modelo lineal en función del contexto en el cual éste se construye.

7

AGRANDAR Y ACHICAR FIGURAS Y CUERPOS

Contenidos

Localización, lectura, interpretación y comunicación de información matemática simple, en forma oral, escrita o visual de textos, diarios, facturas, bases de datos, etc. (Eje 1): escalas, mapas...

Propósitos

Algunos alumnos calculan correctamente los perímetros y las áreas de figuras elementales; otros las confunden al realizar los cálculos. También encontramos que, en muchos casos, no manejan las relaciones entre las dimensiones lineales y las áreas de figuras semejantes ni entre las dimensiones lineales y los volúmenes de cuerpos también semejantes.

Esto complica, entre otras, la resolución de situaciones que involucran el uso de escalas en mapas o maquetas. Así, suelen tener la idea de que el mismo factor de escala aparece para todas las medidas, es decir, que si reducimos a la mitad –por ejemplo– la longitud, también lo hará el área. La idea de crecimiento lineal, también es extendida al tener que evaluar volúmenes. A fin de trabajar tales relaciones, proponemos el siguiente trabajo.

Desarrollo

Podemos presentar a los alumnos preguntas como la siguiente y solicitarles que justifiquen sus repuestas. Luego es adecuado organizar un debate que posibilite analizar los errores cometidos y sus posibles causas.

Problema 1

Si sacamos una fotocopia del plano de una habitación cuyo original mide 3 unidades de largo y 2 unidades de ancho con una reducción del 50%,

- ¿qué dimensiones se reducen a la mitad: el largo, el ancho o el área? ¿Por qué?

Resulta conveniente recordar a los alumnos que la fotocopiadora trabaja ampliando o reduciendo longitudes. Sin embargo, es muy posible que gran parte de los alumnos respondan que "todas las dimensiones se reducen un 50%".

A fin de que puedan superar este error persistente, puede sugerirse que calculen el área de la habitación original, el área correspondiente en la fotocopia y las comparen.

Esta instancia resulta adecuada para estudiar la relación entre los perímetros y las áreas de las figuras semejantes.

Otra actividad que puede realizarse a continuación o en forma independiente de la anterior es la siguiente:

Problema 2

Entregar a los alumnos un mapa de la República Argentina en el que está indicada la escala, y una fotocopia de una de las provincias, ampliada al doble de sus longitudes y pedirles que marquen en ella dos ciudades que estén aproximadamente a 100 km una de otra. Luego, formularles preguntas como las que siguen y solicitarles que argumenten a propósito de sus respuestas.

- En la fotocopia, ¿a cuántos centímetros están una de otra?
- En el mapa de la República Argentina, ¿a cuántos centímetros están una de otra?
- ¿Cuál es la escala que corresponde a la fotocopia?
- Si el mapa de la provincia se ampliara de modo tal que su área fuera el doble, ¿cuál sería la distancia entre las ciudades?

Simultáneamente o en un trabajo posterior (según los conocimientos de que dispongan los alumnos), se pueden trabajar otros problemas, incluyendo los de volúmenes.

Así por ejemplo, se pueden plantear cuestiones tales como:

- ¿Cuántas veces mayor es un acuario **x** que otro **y**, si **x** es 2 veces más largo, 3 veces más ancho y 2 veces más profundo que **y**?
- ¿Cuántas esferas pequeñas de 2 cm de diámetro es necesario colocar en una balanza para equilibrar una esfera cuyo diámetro es el doble? (La balanza y las esferas se encuentran a la vista de lo niños.)

8

AMPLIANDO FOTOGRAFÍAS

Contenidos

Interpretación de conceptos y relaciones en distintos marcos (geométrico, numérico, algebraico, gráfico) a propósito del trabajo con errores frecuentes de los alumnos.

Propósitos

Gran parte de los conceptos matemáticos pueden intervenir en distintos dominios, en distintos marcos. Sin embargo, posiblemente potenciado por los dispositivos de enseñanza, es habitual que los alumnos no puedan reconocer en otro marco un concepto conocido o que consideren que un mismo concepto funciona de distinto modo según el marco en que se encuentre.

A fin superar tales dificultades, la siguiente actividad[1] apunta al trabajo con un error muy arraigado en los alumnos del Tercer Ciclo de la EGB (y que persiste en ciclos superiores) a partir del análisis y de las relaciones de sus significados en los marcos algebraico, geométrico y gráfico.

Desarrollo

En forma muy frecuente observamos que los alumnos realizan simplificaciones como las siguientes:

$\frac{a+3}{b+3} = \frac{a}{b}$ y especialmente $\frac{a+\sqrt{}}{b+\sqrt{}} = \frac{a}{b}$ o bien $\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b}$

También es frecuente que los docentes se valgan sólo de contraejemplos a fin de mostrar que tales simplificaciones son incorrectas (por ejemplo, comparar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1+2}{2+2}$).

Ahora bien; dicho error puede vincularse con el que cometen los alumnos cuando se les solicita que amplíen un rectángulo de modo tal de obtener otro semejante al primero y agregan o quitan una tira de ancho constante de ambos lados del rectángulo, pues piensan que de tal modo la razón entre las dimensiones permanece constante.

En tal sentido, la siguiente actividad permite una reflexión sobre las relaciones entre tales errores favoreciendo su superación:

Se entrega a los alumnos una fotografía de 4 cm x 2 cm. Queremos ampliarla de modo tal que el lado que mide 4 cm pase a medir 7 cm. ¿Cuánto debe medir el otro lado?

Ante todo debemos resaltar que la elección de la medida del lado de la fotografía ampliada no es casual. En efecto, si solicitamos que el lado que mide 4 cm pase a medir 8 cm no aparece ninguna dificultad pues se trata de duplicar las dimensiones.

1. Esta actividad, como así también algunos aspectos considerados en su análisis, han sido tomados de Annie Berté. *Matemática dinámica*, A-Z Editora, Buenos Aires, 1999.

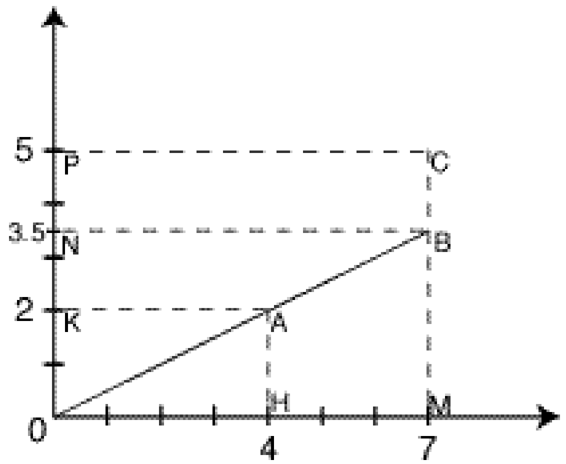
En el caso propuesto resulta importante un primer momento de trabajo individual a partir del cual es muy posible que muchos alumnos sugieran que hay que "agregar 3" a ambos lados.

Quizá respondan del siguiente modo: "Si duplicamos todo, tenemos: 4 x 2 = 8; 2 x 2 = 4. Pero el lado mayor tiene que medir 7, que es 8 – 1, por lo que el lado menor tiene que medir 3, que es 4 –1".

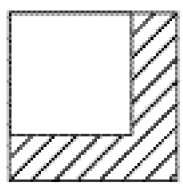
Es posible que otros propongan una respuesta correcta razonando de la siguiente manera: "Si a 4 le tengo que sumar 3, a 2 –que es la mitad de cuatro– le tengo que sumar 1,5". Si esta respuesta aparece con mucha fuerza puede sugerirse que consideren que el rectángulo original mide 5 cm x 2 cm, dado que el hecho de que 2 sea la mitad de 4 puede favorecer respuestas como la anterior.

También puede darse que algunos alumnos utilicen otros procedimientos adecuados (regla de tres o el planteo de la proporción correspondiente).

A continuación es conveniente proponer a los alumnos que realicen un sistema de coordenadas cartesianas, ubicando uno de los vértices de los rectángulos en el origen de coordenadas, lo que permitirá mostrar que, para la ampliación correcta, los puntos O, A y B están alineados:



En esta instancia es adecuado volver sobre el error algebraico y proponer la ampliación de una foto cuadrada, lo que permitirá discutir por qué en este caso es pertinente "agregar una faja de ancho constante", del mismo modo que a partir de expresiones como $\frac{a+3}{a+3}$ es correcto deducir que es igual a $\frac{a}{a}$ y valerse de la siguiente representación:



Sugerencias

A partir de la representación mediante coordenadas cartesianas pueden analizarse las características de las funciones de proporcionalidad directa, la noción de pendiente de una recta y establecer relaciones con la semejanza de figuras planas.