CONSEJO NACIONAL DE EDUCACION

NOCIONES

SOBRE LA

PROYECCIÓN AXONOMÉTRICA

(REPRODUCIDO DE

«EL MONITOR DE LA EDUCACIÓN COMÚN», N.º 500)

1914
IMPRENTA J. WEISS Y PREUSCHE
PATRICIOS 241 — BUENOS AIRES

CONSEJO NACIONAL DE EDUCACION

NOCIONES

SOBRE LA

PROYECCIÓN AXONOMÉTRICA

(REPRODUCIDO DE

«EL MONITOR DE LA EDUCACIÓN COMÚN», N.º 500)

1914

IMPRENTA J. WEISS Y PREUSCHE

PATRICIOS 241 — BUENOS AIRES

Nociones sobre la proyección axonométrica

INTRODUCCIÓN

Como varios profesores me han preguntado el sentido de las "Nociones de Axonometría" indicadas al final del § 3 del programa de 4o. año de Matemáticas, para las escuelas normales, he creído sería útil poner a su alcance un buen tratado sobre este punto. Para ello solicité de mi joven amigo el Profesor Ingeniero Emilio Rebuelto quisiera tener a bien traducir la parte correspondiente de la Enciclopedia de Matemáticas elementales de Weber y Wellstein, (ver programa, edición privada, pág. 39; bibliografía 2.).

Presento pues a la consideración de los señores profesores normales y de los alumnos de los cursos del profesorado dicha traducción; ella va precedida de consideraciones generales sobre proyecciones que el señor profesor Rebuelto ha recopilado en una síntesis clarísima. Además, para hacer más inteligible el texto, las notaciones alemanas han sido cambiadas por las francesas, más usadas entre nosotros.

Los profesores tendrán así un excelente texto para ponerse bien al corriente de la Axonometría, tan útil en geometría del espacio, desde que en Axonometría hacemos, casi todos los profesores, las figuras en el pizarrón, aun cuando muchos las hagan de instinto más bien que por raciocinio o teoría.

Debo agregar que considero suficiente presentar bien a los alumnos de 4o. año el contenido del Cap. I y del Cap. II § 2 y 3, y servirse de ellos para hacerles comprender en qué consiste propiamente el dibujo en el pizarrón. No creo sea conveniente recargar con el total de esta traducción a la enseñanza, pero sí creo muy útil que cada profesor trate de asimilársela. Le permitirá de vez en cuando indicar a sus alumnos cómo hace él las figuras esteorométricas y el por qué de la construcción. Asimismo podrán de tiempo en tiempo hacer exponer y discutir por los alumnos y futuros maestros y profesores, las razones que les guían al dibujar sobre el pizarrón figuras en el espacio, y determinar, aun cuando sólo aproximadamente, las verdaderas dimensiones de los cuerpos representados.

Deseando haber así contestado a la preguntas que se me dirigieron, me queda agradecer al señor Profesor Ingeniero Emilio Rebuelto su importante colaboración al mejoramiento de nuestra enseñanza matemática.

Jorge Duclout.

La *Proyección axonométrica*, o más brevemente, la *Axonometría*, es uno de los tantos métodos de que dispone la Geometría Descriptiva para conseguir su objeto, de representar las figuras del espacio sobre un plano, (que en todo lo que sigue lo llamaremos *el cuadro*) y de modo que a los puntos de una recta del espacio, le correspondan en la imagen, los puntos de otra recta.

Estas representaciones, se obtienen por proyecciones; se considera un punto fijo *O*, (que en todo lo que sigue lo llamaremos el *centro de proyección*), exterior al cuadro, y que puede también ser el punto en el infinito de cualquier dirección. La recta que une un punto P del espacio con el centro de proyección, se llama *rayo proyectante* y el punto P' en que el rayo proyectante corta al cuadro, será la imagen de P, o la proyección de P sobre el cuadro.

La imagen del centro de proyección, es siempre indeterminada, pues corresponde al caso en que el punto P coincide con O: la recta O P, queda evidentemente indeterminada.

Cada rayo proyectante, dà una sola imagen de un punto, pero en realidad proyecta el infinito número de puntos que se encuentran sobre él; y a todos estos, les corresponde una misma imagen en el cuadro, que es la traza o intersección del rayo proyectante con el cuadro. Inversamente, a todo punto Q' del cuadro, le pueden corresponder en el espacio el infinito número de puntos de la recta O Q'.

Puede preveerse, con estas simples observaciones, que la representación del espacio sobre el plano, no puede ser unívoca. Si una recta contiene un número infinito de puntos, y un plano un número infinito de rectas, (que serían las perpendiculares a una recta en cada uno de sus infinitos puntos), resulta que el plano contiene un número doblemente infinito de puntos: análogamente, el espacio contendrá un número triplemente infinito de puntos. La representación de estos puntos, en número triplemente infinito, por medio de los doblemente infinitos puntos del plano, hace que a cada punto del plano, le correspondan infinito número de puntos del espacio. La Geometría Descriptiva, tal como está hoy constituída, cumple esta condición, pero de tal manera, que los infinitos puntos del espacio que se corresponden con un punto del plano, están todos sobre el rayo proyectante que pasa por este punto.

Los rayos proyectantes son las únicas rectas del espacio cuya imagen se reduce a un punto, pues si unimos O con dos puntos A y B de una recta p que no pase por O, las rectas $O\ A$ y $O\ B$ estarán en el plano determinado por p y O, que cortará al cuadro en la recta p', imagen de p, y de las rectas en número infinito que se encuentran sobre el plano A B O, pues todas ellas tienen a este plano como plano proyectante. Generalizando, podríamos decir que una curva cualquiera del cuadro, es la imagen de las infinitas curvas que se hallan sobre el cono que tiene a O como vértice y a la curva del cuadro como directriz.

Por consiguiente, no basta conocer la imagen de una figura del espacio, para reconstruirla: son necesarios otros datos, y según la naturaleza de estos, se tienen los diferentes *sistemas de proyección*, de que se sirve la Geometría Descriptiva.

Una primera división sería:

Proyección central, o cónica, cuando el centro O de proyección está a una distancia determinada y finita del cuadro.

Proyección paralela, o cilíndrica, cuando el centro O de proyección está en el infinito.

En ambos sistemas hay elementos para la reconstrucción del centro de proyección: para encontrar las relaciones entre imagen y objeto, se puede, en ambos sistemas, tomar como datos dos proyecciones diferentes del mismo objeto, o tomar la proyección de las tres aristas que concurren a un mismo vértice, de un cubo que sirve de comparación.

Cuando son los primeros los datos elegidos, y se combinan con la proyección central, se tiene la *fotogrametría*, que permite reconstruir una figura del espacio, partiendo de varias fotografías del mismo objeto, que son otras tantas proyecciones centrales: cuando se los combina con la proyección paralela, se tiene el *método de Monge*, que utiliza dos proyecciones paralelas del mismo objeto sobre dos planos que se cortan en ángulo recto.

Cuando son los segundos, combinados con la proyección

central o con la paralela, se tienen las diferentes clases de *proyección axonométrica*.

La proyección central, de la cual es la *perspectiva* un caso particular, representa los objetos del espacio tal como los vería un ojo inmóvil; los rayos luminosos emanados del objeto y que llegan al ojo atravesando la pupila, forman aproximadamente una radiación, que al atravesar las capas refringentes del cristalino se invierte, dando sobre la retina la imagen invertida del objeto. Cortando esta radiación visual con un plano, antes de que penetre en el ojo, se obtiene una imagen análoga a la que suministra la proyección central.

Un inconveniente de este sistema de proyección es que los objetos no aparecen con sus dimensiones reales, ni en sus verdaderas proporciones uno con respecto al otro, pues todo depende de su mayor o menor distancia al centro de proyección.

Dos rectas paralelas en la proyección central no tienen por imagen dos rectas paralelas más que cuando son paralelas al cuadro. En cualquier otro caso, los planos α y β que proyectan dos rectas a y b, tienen un punto común O, y por lo tanto tendrán una recta común p, paralela a a y b, y que cortará al cuadro en un punto P', llamado *punto de fuga* de las dos rectas.

Si desplazamos el centro de proyección hasta el punto en el infinito de una dirección cualquiera, los planos proyectantes α y β se hacen paralelos y cortan al cuadro según rectas paralelas. Por lo tanto, en la proyección paralela, las rectas paralelas resultan, representadas por rectas paralelas, excepto cuando son paralelas a la dirección de la proyección, en cuyo caso ya hemos visto que están representadas por un punto cada una.

A causa de esto, las *proyecciones paralelas* dan mayor fidelidad en las representaciones que las *centrales*, por lo cual llenan más ventajosamente las necesidades prácticas del ingeniero y del arquitecto para la representación de los objetos, y simplifican mucho los dibujos correspondientes.

Toda proyección paralela de un paralelógramo es otro paralelógramo, salvo, naturalmente cuando su plano es paralelo a la dirección de la proyección, en cuyo caso se reduce a un segmento de recta: las proyecciones paralelas de dos segmentos iguales, y de igual dirección, son iguales y paralelas, pues si están en dos rectas distintas, uniendo sus extremos, se tiene un paralelógramo, y si están sobre la misma recta, uniéndolos con otros iguales sobre otra recta paralela, tendremos dos paralelógramos que ya sabemos se proyectan según paralelógramos.

Este resultado puede generalizarse diciendo: *Cuando un punto divide a un segmento de recta en una relación dada, la imagen de este punto, en cualquier proyección paralela divide a la imagen del segmento en la misma relación.*

La demostración se deduce del principio de la semejanza; basta observar en la figura 1.ª que cuando AA', BB', CC' son paralelas, se tiene

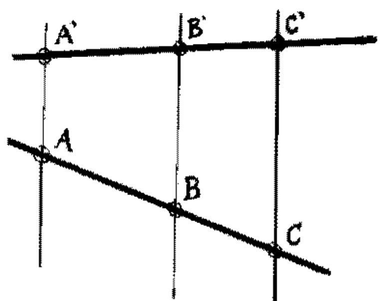

Fig. 1ª

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}$$

En la proyección central, por el contrario no permanece invariable esta relación. Sean las rectas u y u' de la figura 2, proyectadas ambas desde O, así es que puede tomarse a una cualquiera de ellas por imagen de la otra, de tal modo que a los puntos A, B, C, D, de una de ellas, corresponden los puntos A', B', C', D' de la otra: sean h y h' las perpendiculares trazadas desde O a las dos rectas. Se tiene evidentemente:

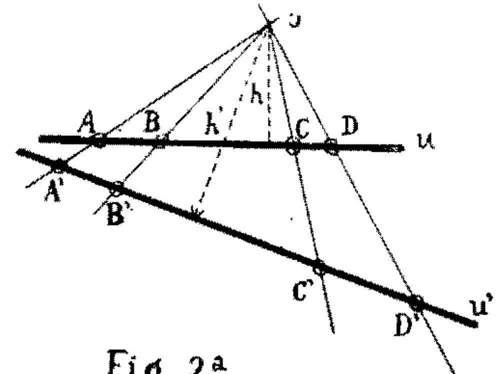

Fig. 2ª

$$\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{DC}=\frac{\frac{1}{2}AB.\,h}{\frac{1}{2}BC.\,h}:\frac{\frac{1}{2}AD.\,h}{\frac{1}{2}DC.\,h}=\frac{AOB}{BOC}:\frac{AOD}{DOC}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}AO.\,OB.\ \mathrm{sen}\ AOB}{\frac{1}{2}OB.\,OC.\ \mathrm{sen}\ BOC}:\frac{\frac{1}{2}AO.\,OD.\ \mathrm{sen}\ AOD}{\frac{1}{2}DO.\,OC.\ \mathrm{sen}\ DOC}=\frac{AO.\ \mathrm{sen}\ AOB}{OC.\ \mathrm{sen}\ BOC}:$$

$$\frac{AO.\ \mathrm{sen}\ AOD}{OC.\ \mathrm{sen}\ DOC}=\frac{\mathrm{sen}\ AOB}{\mathrm{sen}\ BOC}:\frac{\mathrm{sen}\ AOD}{\mathrm{sen}\ DOC}=\frac{\mathrm{sen}\ A'OB'}{\mathrm{sen}\ B'OC'}:$$

$$\frac{\mathrm{sen}\ A'OD'}{\mathrm{sen}\ D'OC'}=\frac{A'B'}{B'C'}:\frac{A'D'}{D'C'}$$

lo que demostraría que *en la proyección central, queda invariable la relación anarmónica de cuatro puntos.*

II. — LA PROYECCION AXONOMETRICA PARALELA OBLICUA

§ 1) De las consideraciones anteriores se deduce inmediatamente el método general de construcción de la proyección axonométrica paralela.

Supongamos que hubiéramos logrado representar las tres aristas O X, O Y, O Z, que salen de un vértice O de un cubo, por sus imágenes en un plano, y sean O' X', O' Y', O' Z', estas representaciones. Excluímos por ahora el caso particular de que tres de los cuatro puntos O', X', Y', Z', estén en línea recta.

Las tres rectas O X, O Y, O Z, las podemos considerar como ejes de un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. Para representar ahora un punto P cualquiera del espacio, en el presente sistema de proyección, necesitaremos trazar desde P las perpendiculares a los tres ejes de coordenadas. Sean estas perpendiculares (1)

$$P\,Px\,; \quad P\,Py\,; \quad P\,Pz.$$

y las tres coordenadas serán entonces

$$x = O\,Px\,; \quad y = O\,Py\,; \quad z = O\,Pz.$$

El problema consiste ahora en encontrar sobre las tres rectas O'X'; O'Y'; O'Z', la representación P'x, P'y, P'z, de los tres puntos Px, Py, Pz.

Basándonos precisamente en las observaciones preliminares, podremos poner que

$$\frac{O'P'x}{O'X'} \quad \frac{O\,Px}{O\,X} \; ; \; \frac{O'P'y}{O'Y'} \quad \frac{O\,Py}{OY} \; ; \; \frac{O'P'z}{O'Z'} \quad \frac{O\,Pz}{O\,Z}$$

de donde podremos deducir los valores reducidos de las tres coordenadas *x, y z.*

Para hacerlo gráficamente, (ver Fig. 3ª) tomemos un seg-

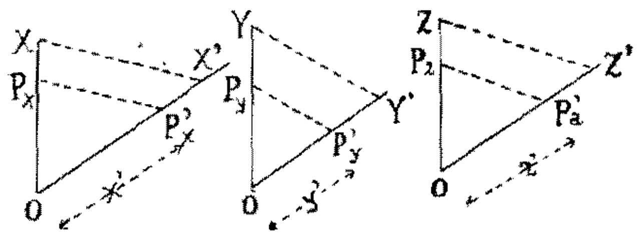

Fig. 3ª

mento O X y por *O* tracemos una recta con una dirección cualquiera O X', sobre la que llevaremos un segmento igual a

(1) Por dificultades tipográficas, se escribe *Px* en vez de poner la x en subíndice como se ve en la figura.

O'X'; tomemos sobre O X, el segmento O P x, que se trata de reducir, y tracemos la X X' y su paralela P x P'x; se tiene la magnitud buscada

$$x' = O\,P'x$$

y análogamente

$$y' = O\,P'y \qquad z' = O\,P'z.$$

Si ahora tomamos sobre las imágenes de los tres ejes (Figura 4ª) las magnitudes *x', y',* y *z',* llegaremos inmediata-

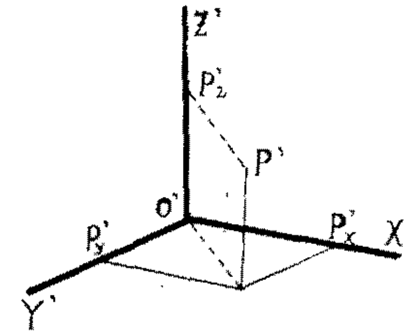

Fig. 4ª

mente, por el trazado de las rectas paralelas indicadas en la figura, a determinar la imagen del punto P.

En general, se eligen los datos de modo que las magnitudes *x', y', z',* llamadas *longitudes reducidas,* sean efectivamente menores que las reales *x, y, z,* pero no es absolutamente necesario. En las figuras están indicados los dos casos posibles.

---

§ 2) Repitiendo un suficiente número de veces las operaciones indicadas, se pueden representar cuantos puntos se quieran y obtener así la representación completa de una figura espacial. Pero bajo esta forma, el método resulta largo e incómodo: sería conveniente buscar entre la figura final y las líneas auxiliares, algunas relaciones que economizasen líneas de construcción.

Primeramente, podemos por sencillez, suponer que el cuadro sea paralelo al eje de las *z*; tendremos entonces O' Z' igual y paralelo O Z, con lo cual desaparece la reducción de la coordenada *z*. La simplificación de la reducción que debe hacerse sobre las otras coordenadas, se vé inmediatamente sobre la figura 5.

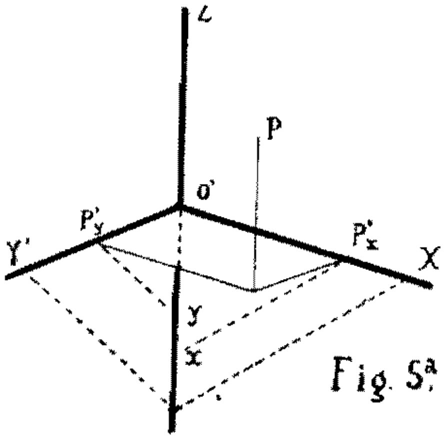

Fig. 5ª

Este método ha sido recientemente desarrollado por Beyel en un trabajo publicado en los *Archiv. für Math. und Phys.* Vol. 4, pág. 237.

Como se vé, se llega con esta proyección paralela derivada de los ejes de coordenadas, (y que por eso se llama *axonométrica*,) a hacer depender todo de la representación previa de tres segmentos O X, O Y, O Z, perpendiculares entre sí, e inversamente, a reconstruir los tres segmentos, dadas sus imágenes.

Para esto se utiliza el teorema de Pohlke, sobre el cual ha escrito un estudio Fr. Schilling, publicado en el *Ztschr. f. Math. u. Phys.* 48, 1902, pág. 487, con el título *Über den Pohlkeschen Satz.* El enunciado del teorema es el siguiente:

Tres segmentos O X, O Y, O Z, en un plano, que parten de un mismo punto O, pueden ser considerados siempre como la proyección paralela de un sistema de tres segmentos iguales y perpendiculares entre sí, y donde a lo más, tres de los

cuatro puntos O', X', Y', Z', pueden hallarse en línea recta: La solución general da cuatro sistemas de ejes, de todos los cuales, el O', X', Y', Z', es una proyección paralela, que por desplazamiento paralelo en la dirección de la proyección, no puede transformarse en otra.

Este teorema ha tenido hasta ahora simplemente un valor teórico, pues en la práctica, la reconstrucción de O X Y Z, partiendo de O', X', Y', Z', es en el caso general, demasiado complicada. No la demostraremos, limitándonos a casos particulares en que la solución inmediata es particularmente adsequible.

---

§ 3) Las construcciones anteriores valen para cualquier proyección axonométrica paralela; tratemos ahora el caso particular de la proyección axonométrica paralela oblicua: tomemos el cuadro o plano de proyección paralelo a dos ejes coordenados, por ejemplo, a los de la X y de las Z. El resultado de esta proyección será una proyección oblicua, en la cual aparecen todos los segmentos paralelos al plano X O Z en su verdadera magnitud: únicamente los segmentos con la dirección del eje O Y aparecen aumentados o disminuídos todos en la misma relación; en general se elige la dirección de la proyección de tal manera que no haya ningún alargamiento.

En estas condiciones, la figura 5ª se transforma en la 6ª; en esta última, se tiene:

O' X' = O X ; O' Z' = O Z ; O' P' x = x ; P' x P' z = P' P'_3 = z ; O' Z' = O' Y = O Y ;

tomando sobre O' Y, O' P' y = y, y trazando P' y P' y paralela a Y Y' queda terminado el punto P' y con el cual podremos obtener la imagen P' del punto P.

Otra construcción del punto P' sería la siguiente: desde O' P'x = X, trazar P'x P'z = Z, y P'x P°_3 = y: trazar por P'x la paralela P'x P_3 a O' Y', y desde P, la paralela a Y° Y', que corta a la anterior en P'', de donde trazamos finalmente la P'_3 P', igual y paralela a P'x P''z.

---

§ 4) Esta deducción de la proyección oblicua, conduce inmediatamente al mecanismo de la construcción, pero geométricamente es poco intuitiva. Para obtener un concepto más profundo de la significación de las líneas auxiliares de esta construcción, utilizaremos la observación de que la pro-

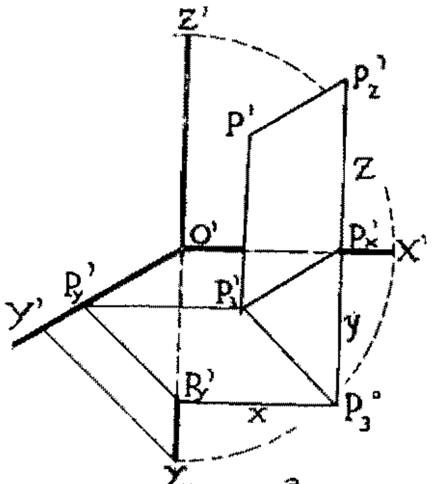

Fig. 6ª

yección paralela de un objeto no cambia cuando el cuadro se desplaza paralelamente. Hagamos entonces coincidir el cuadro con el plano X Z: las imágenes de los puntos de este plano son idénticas con el original, y pueden por lo tanto, ser designadas como tales. Las proyecciones oblicuas de los otros puntos del espacio, las indicamos en la figura 7ª con el sub-

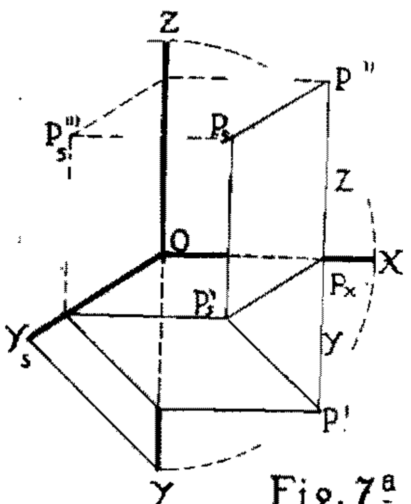

Fig. 7ª

índice *s*. El pie de la perpendicular trazada desde P á X Z, o proyección ortogonal de P, la llamamos P'': el pie de la perpendicular desde P al plano X Y lo designaremos con P', para mayor concordancia con notaciones comúnmente empleadas en el método de Monge. Su proyección oblicua será P's: análogamente, llamando P''' la proyección ortogonal de P sobre el plano Y Z, su proyección oblicua será P'''s. En la figura 7ª, O Y es la verdadera magnitud de O Y; además O P x $= x$; P x P' = y; P' P's paralelo a Y Ys; P x P's paralelo a O Ys: P's Ps igual y paralelo a Px P'' $= z$.

Como se vé, puede representarse cada punto por medio de sus coordenadas cuando ya hay en el plano de la figura un solo elemento O Y representado. Es evidente que según la dirección de proyección que se elija, cada punto arbitrario Ys del cuadro, puede considerarse como proyección de Y. Para eso basta, después de tomar arbitrariamente Ys, hacer a Y Ys, dirección de proyección.

Este es el resultado principal contenido en el teorema de Pohlke para el caso tratado. Supongamos que nos haya sido dada la dirección l de la proyección, (que no debe ser perpendicular al plano del cuadro), por su ángulo w, formado con éste, (máxima pendiente), y por la proyección ortogonal l'' de uno de los rayos de proyección, l, la que obtendremos proyectando todos los puntos del rayo sobre el plano del cuadro: w es el menor ángulo entre l y l''. Las proyecciones ortogonales de todos los rayos proyectantes, son paralelas e iguales entre sí, y por lo tanto iguales también a l''.

Las proyecciones oblicuas de todas las perpendiculares al cuadro son paralelas a l''. Para proyectar ahora a O Y, tracemos por *O* la paralela a l'', (ver Fig. 8ª), y por *O* la perpendicular O Y o a O Ys, tomando un segmento O Y o = O Y. Trazando ahora por Yo la paralela a l^o que forma un ángulo igual a w con l'', encontrará a O Ys en Y's. La misma figura, permite seguir la construcción necesaria para reconstruir la dirección de proyección, cuando se conoce la longitud O Y, y la proyección O Y's de O Y.

---

§ 5) Podemos prescindir del sistema de coordenadas, puesto que O Y puede ser cualquier perpendicular al plano del cuadro y puede entonces aplicarse el procedimiento indicado en la Fig. 8ª a cada uno de los puntos Y.

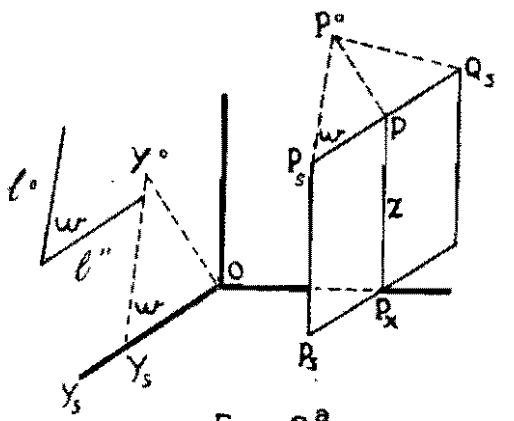

Fig. 8ª

Sea por lo tanto P un punto cualquiera situado delante del cuadro y P'' su proyección ortogonal sobre éste. Tracemos por P'' la paralela a la dirección *l''* y obtendremos así un lugar geométrico para la imagen *Ps* de P. Sobre esta recta, levantemos en P'' la perpendicular $P''P^{o} = y$, y tracemos por P° la paralela a l°, que encontrará a la paralela anterior en el punto Ps. En la Fig. 8ª, a la cual nos referimos, podría considerarse al punto *O* como proyección ortogonal de Y, y designarlo por Y': Si la dirección de la proyección oblicua fuera perpendicular al cuadro, (caso que hemos excluído), se tendría Ps idéntico a P''.

Si para aumentar el relieve se dibuja de nuevo en la figura a que nos referimos, el sistema de ejes, se tendrá P'' Ps paralelo a O Ys; P'' Px' perpendicular al eje X; y *Ps P's* igual *y* paralelo a *P'' Px*.

La misma figura, muestra también la representación de un punto *Q* situado en el espacio detrás del cuadro, y que de intento lo hemos elegido dispuesto simétricamente al P, respecto al cuadro.

Puesto que en la enseñanza, la pizarra o cuadro se utiliza como plano de proyección, la distancia de un punto al plano de proyección será su distancia al cuadro. Podemos entonces representar un punto por su proyección ortogonal *P'* y su distancia al cuadro P P' que será a la vez su ordenada *y*.

---

§ 6) Si se quisiera de esta manera representar una figura por un gran número de puntos, el procedimiento sería demasiado lento y minucioso. Para facilitarlo, y hacerlo más práctico, se elige una dirección de proyección conveniente, de tal modo que la relación de la distancia al cuadro P P'', a la distancia aparente Ps P'', sea un valor fácil de construir, por ejemplo, $\frac{1}{2}$. Puesto que

$$P\,P'' : Ps\,P'' = P^{o}\,P'' : Ps\,P'' = \text{tang. } w$$

sólo depende del ángulo *w*, esta escala de reducción entre las distancias (verdadera y aparente) al cuadro, es la misma para todos los puntos, y si admitimos que es igual a $\frac{1}{2}$, se tiene sencillamente que P'' Ps es paralela a *l''* e igual a $\frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{2}$ P P''; este resultado es particularmente útil cuando se trata de distancias que haya que medir a una escala determinada.

---

§ 7) Para la representación de objetos arquitectónicos o de las construcciones, se dan comúnmente las proyecciones ortogonales de los puntos principales sobre un plano horizontal, que supondremos sea el *x y*.

Propongámosnos ahora el caso general de utilizar esta proyección o planta para hallar la proyección oblicua de una figura poligonal del plano *x y*, por ejemplo, de un cuadrado. Para mayor claridad, tomemos en dicho plano *x y* una recta *u* paralela a *x*, y que encuentre al eje *y* en Y; y además una paralela *w* al eje *y*, de manera que el cuadrado a representar resulte comprendido en el rectángulo *x, u, y, w*. Representemos primero, (Fig. 9ª), el punto Y y tracemos por Ys, la recta u_s paralela a *x*. Sea T la intersección de *w* con *x*; w_s pasará por este punto y será paralela a O Ys.

Rebatamos ahora el plano de las *x y*, alrededor del eje de las *x*, hasta que coincida con el plano de la figura *x z*:

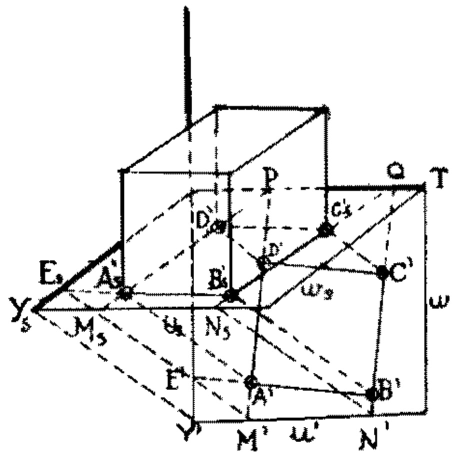

Fig 9ª

entonces Y', u', w' serán las nuevas posiciones de Y, u, w. El cuadrado a representar, A' B' C' D', estará en el rebatimiento, tal como se halla en su verdadera posición respecto a $x\,y$.

Si M y N son las intersecciones de A' D' y B' C' con u, y $M' N'$ sus rebatimientos, se tendrá que las rectas $M M'$, $N N'$ e $Y Y'$ serán paralelas, lo mismo que las $Ms\,M'$, $Ns\,N'$, $Ys\,Y'$, con lo cual quedarán determinados Ms y Ns sobre u_s.

Podemos ahora seguir determinando las proyecciones de las rectas A' D' y B' C' utilizando sus intersecciones P y Q con el eje x: sus imágenes serán P Ms y Q Ns. Puesto que las rectas A A', M M', B B', N N', C C' y D D' son todas paralelas, estarán todas ellas inclinadas de 45° respecto a los planos de las $x\,y$ y $x\,z$, y por consiguiente también estarán A's A', B's B', C's C', D's D', Ms M', e Ys Y', con lo que quedarán determinados A's, B's, C's y D's sobre P Ms y Q Ns, respectivamente.

También se podrá tener $A' B'$ y $C' D'$, o representar las diagonales del cuadrado análogamente como A' D' y B' C'. Las dos construcciones deben hacerse, para controlar la exactitud del dibujo.

Este método da también elementos para determinar A's, B's, C's, D's, sin el empleo de la recta u.

En la figura 9ª se ha supuesto que A' B' C' D' fuera la base de un cubo, el cual ha sido también representado.

---

§ 8) Como cualquier plano perpendicular al $x\,z$, puede desempeñar el rol del plano $x\,y$, el método de construcción anterior servirá igualmente para estos planos, por ejemplo, para el plano $y\,z$.

Supongamos querer representar una figura del plano $y\,z$, y tomemos el caso particular de que sea un cuadrado A B C D: rebatamos este plano alrededor del eje z hasta tenerlo en el plano de la figura, haciéndolo girar como la hoja de un libro hacia la izquierda. (Ver Fig. 10ª). La nueva posición del

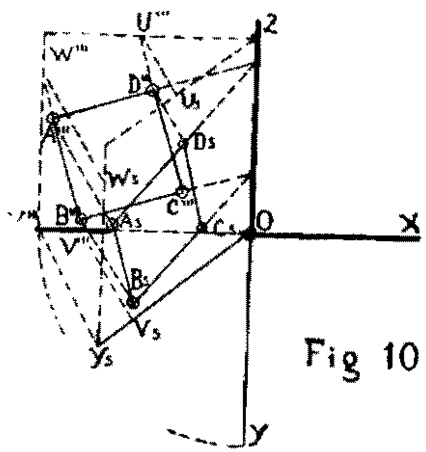

Fig 10ª

cuadro será A''' B''' C''' D''' que supondremos dada: Puesto que ahora también A A''', B B''', C C''' y D D''' son paralelas, si As, Bs, Cs, Ds son las imágenes buscadas de A B C D, se deberá tener As A''', paralela con Bs B''', Cs C''' y Ds D'''.

Esta dirección la determinaremos por medio de un segmento O Y del eje Y rebatido, cuya extremidad ocupa la posición Y''' sobre el eje x y donde

$$O\,Y''' = O\,Y = O\,Y',$$

teniendo Y en la figura 10ª, la misma significación que en las 7ª y 9ª.

Como también As A''' es paralela a Ys Y''', la representación podrá obtenerse de varias maneras: En la fig. 10ª se han utilizado los puntos de intersección V''', W''' de la recta A B con el eje rebatido *y* y con la paralela al eje *z* llevada por Y''': Las rectas Vs V''', Ys Y''' y Ws W''' se han trazado paralelas, lo mismo que las As A''', y Bs B'''.

Es conveniente que el lector, al estudiar este ejemplo, construya de nuevo la figura y observe las numerosas comprobaciones que permite la superdeterminación de los puntos.

---

§ 9). Como ya hemos dicho antes, este método puede aplicarse a todo plano perpendicular al plano de la figura.

Sea M M'' N N'' (ver Fig. 11ª) un plano en esas condi-

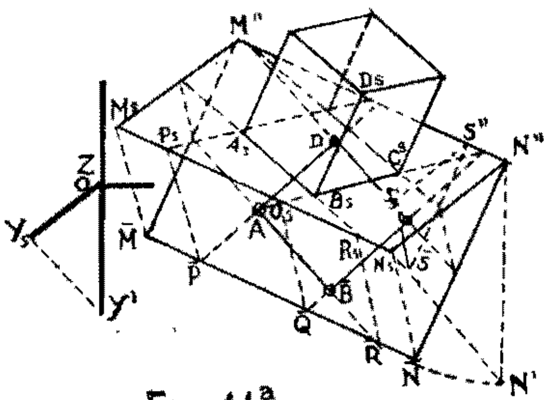

Fig. 11ª

ciones, cuyo lado M'' N'' que se halla en el plano de la figura, es la proyección ortogonal de M N: rebátase este rectángulo alrededor de M'' N'' sobre el plano del dibujo, o plano *x z*, obteniéndose así un rectángulo M̄ N̄ N'' M'' congruente con el rectángulo dado que queremos construir. Para esto, si suponemos dado el rectángulo por su imagen Ms Ns N'' M'' y por Ys Y', necesitaríamos deducir de Ns N'', la magnitud N N'. Para eso, tracemos N' N'' paralela a *O Y'*, y N' Ns paralela a Ys Y': entonces, por lo dicho anteriormente, tendremos N' N'' = N N' y quedará determinado N̄ N'' = N' N'' con lo cual se determina el rebatimiento del rectángulo.

Si *S* es un punto cualquiera del plano de este rectángulo, dado por su imagen Ss, y S̄ su rebatimiento, tendremos S S̄, M N̄ y N N̄ paralelas entre sí, y también Ss S̄, Ms M̄, y Ns N̄.

Tomemos ahora Ss S'' paralelo a Ns N'', S'' se halla sobre M'' N''; tracemos S'' S̄, paralelo a N'' N; y S_2 S̄, paralela a Ns N̄, con lo cual se tendrá S, deducido de Ss. Inversamente, se ve cómo puede obtenerse Ss deduciéndolo de S. Por consiguiente, cualquier figura del plano del rectángulo, puede representarse deduciéndola del rebatimiento, y análogamente de la margen puede reconstruirse la verdadera forma, que es la que el rebatimiento muestra.

---

§ 10) Por estos procedimientos se ha presentado en la figura 11ª un rectángulo A B C D, situado en el plano M N N'' M''. Al mismo tiempo se ha supuesto que este rectángulo fuera la base de un paralelepípedo recto y rectangular.

Las cuatro aristas perpendiculares a este plano, son paralelas al plano del cuadro y aparecerán en su verdadera magnitud: sus imágenes serán perpendiculares a M'' N'', pues son paralelas a la normal al plano M N N'' M'' en el punto N'', y esta normal se encuentra en el cuadro o plano de proyección. No hemos dibujado la figura con el menor número de construcciones posibles, sino todo lo contrario, con objeto de procurar controles y verificaciones diversas para cada punto.

Es muy útil conocer diferentes construcciones para un mismo punto, pues a menudo resulta que una cualquiera de ellas no es práctica ni aplicable, por la forma o disposición del objeto a representar, tamaño del papel en que se dibuja, etc

---

§ 11) Las figuras 7ª y 8ª muestran cómo puede deducirse la proyección oblicua de un punto P de su proyección ortogonal P'', cuando se ha dado el rebatimiento de su distancia al cuadro en la dirección del eje de las *z*, o en la dirección normal a la imagen del eje de las *y*. En la Fig. 11ª puede verse este método en su forma más general: se ha supuesto dada la imagen *Ms* de un punto M, la proyección ortogonal M'', y su rebatimiento M'' $\overline{\text{M}}$, en una dirección cualquiera. Estos datos, fijan naturalmente la dirección de la proyección.

Para representar ahora un punto cualquiera *S*, cuya distancia al cuadro, *y*, y cuya proyección ortogonal *S''* son conocidas, bastará trazar S'' $\overline{\text{S}}$ paralela a M'' $\overline{\text{M}}$, e igual a *y*: las paralelas por S'' y $\overline{\text{S}}$ a M'' Ms y a $\overline{\text{M}}$ Ms, se cortarán en el punto Ss.

H. Weber y J. Wellstein.