PROGRAMA NACIONAL

DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

NIVEL MEDIO

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN

Presidente de la Nación
DR. CARLOS SAÚL MENEM

Ministro de Cultura y Educación
ING. AGR. JORGE ALBERTO RODRíGUEZ

Secretaria de Programación y Evaluación Educativa
LIC. SUSANA BEATRIZ DECIBE

Subsecretaria de Programación y Gestión Educativa
LIC. INÉS AGUERRONDO

Subsecretario de Evaluación de Programas
PROF. SERGIO ESPAÑA

Subsecretario de Evaluación de la Calidad Educativa
LIC. HORACIO NÉSTOR.SANTÁNGELO

ÍNDICE

La XVIII Asamblea Extraordinaria del Consejo Federal de *Cultura* y Educación puso énfasis en generar instrumentos alternativos de acción que apuntaran a fortalecer los aprendizajes de Matemática y lengua.

En esa linea se inscriben los materiales que aquí se presentan a cada institución escolar con la intención de aportar al mejoramiento de la Calidad de la Educación y proporcionar a los docentes elementos innovadores para enriquecer la práctica educativa.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Sabemos que *estos son tiempos de* **sociedades dinámicas, en rápida evolución. Preparar a nuestros alumnos-as para su inserción** *en la* **sociedad es, entre otras cosas, ayudarlos a formar una actitud** *in-***dependiente que les permita, a cada paso, evaluar hechos y elegir caminos. Es decir, desde la** *escue-***la, tenemos el compromiso de enseñarles a resolver problemas.**

Un trabajo sistemático respecto a la resolución de problemas, ayuda a *que:*

- **se entrenen en la lectura e interpretación de** *textos,*
- **se familiaricen con el lenguaje** *matemático,*
- **se capaciten para** *traducir un mensaje coloquial a una* **expresión** *matemática donde se pongan de manifiesto las premisas establecidas y los resultados a obtener,*
- **puedan** *elaborar sus propias* **estrategias de resolución,**
- **se sientan estimulados para verbalizar los caminos empleados, por ellos o por** *otros,* **para llegar a la meta,**
- **realicen intercambios de interpretaciones de enunciados y estrategias utilizadas,**
- **logren una actitud positiva hacia lo novedoso,**
- **puedan decidir si cuentan con suficientes herramientas** *como* **para encarar el proble-***ma* **y de no ser as;, a qué fuentes de información confiables pueden recurrir, y**
- **se apropien de contenidos matemáticos y lógicos.**

En resumen, *este* **tipo de trabajo es valioso porque logra integrar en un todo armonioso los polos alrededor de los** *que* **gira la enseñanza: los contenidos y los procesos.**

El "Programa Nacional de Resolución de Problemas" organizado por el Ministerio de Cultura y Educación de la Nación se acerca *a* **los docentes con** *esta colección de problemas,* **con la intención de brindar una** *opción más para que la tarea del aula sea ágil y productiva.*

Los problemas que se presentan podrán ser utilizados como parte de la enseñanza y el aprendizaje escolar y también en espacios extra-áulicos que no involucren un desarrollo curricular sistemático (la hora de problemas, club de ciencias, olimpíadas, campamentos, etc.). Sin embargo, deben te-*ner* **asignado** *un tiempo* **semanal concreto** *que permita un trabajo sistemático ya que sin esto es im-***posible que se desarrollen las capacidades operativas en los alumnos.**

Ing. Agr. Jorge Alberto Rodríguez, Ph. D.

Ministro de Cultura y Educación de **la Nación**

SUGERENCIAS PARA EL MEJOR APROVECHAMIENTO DEL MATERIAL

Elegir cuidadosamente el problema teniendo en cuenta el tema, el grado de dificultad, la función que debe cumplir (generación o reinversión de conocimientos, control de los aprendizajes, diagnóstico, etc.).

Hacer que los alumnos lean comprensivamente el problema y propiciar el intercambio de interpretaciones, sin señalar estrategias de resolución. Este trabajo debe estar orientado a establecer qué es lo que se pide y cuáles son los datos del problema.

Es frecuente que los alumnos, quieran saber de antemano, cómo encarar la resolución; no faltará quien pregunte: “¿es de más o de por?“, “¿uso Pitágoras?“.

Una buena estrategia ante esto es abstenerse. Hay que mantener un delicado equilibrio con respecto a la ayuda. Tener siempre presente que es el alumno el que debe realizar la parte importante del trabajo y que al profesor le compete orientar y coordinar, dosificando la información en relación con las características del alumno o del grupo.

❑ Al plantear problemas, es importante estar dispuestos a escuchar distintas alternativas de solución (muchas veces diferentes de las nuestras), hay que aprovecharlas, nunca rechazarlas.

Es valiosos dejar que algunos alumnos o grupos (no siempre los mismos), expongan su solución (no sólo las correctas) al resto de la clase. Esto ayudará a lograr mayor claridad expositiva, a valorar distintas estrategias de resolución y a utilizar al error en su rol constructivo.

Es imprescindible que el docente, terminado el trabajo con las situaciones problemáticas, provoque o haga una síntesis vinculada con los conceptos y los procedimientos que condujeron a la resolución del problema, a efectos de que queden contextualizados los saberes (matemáticos y lógicos).

ORGANIZACIÓN DEL MATERIAL

Consta de las siguientes partes:

- **Presentación**
- **Sugerencias para el mejor aprovechamiento del material**
- **Capítulo I - Invitación a la Matemática**
- **Capítulo II - Invitación a la Aritmética**
- **Capítulo III - Invitación a la Estadística**
- **Capítulo IV - Invitación a la Geometría**

- **Capítulo V - Más problemas**
- **Bibliografía**

En cada una de las “Invitaciones” hay una:

a) fundamentación matemática que pretende ampliar o profundizar los contenidos que se abordan. Está pensada para el docente. A él le corresponde, si lo cree conveniente, hacer las adecuaciones para transferir esto a sus alumnos.

b) *colección de* problemas del tema del que se ocupa el Capítulo. Están categorizados en dos grupos sugeridos para l°, 2do y 3ro (Nivel Básico) y 4to y 5to (Nivel Superior).

Cada problema está dentro de un recuadro. Para identificarlo se han utilizado letras y números: El primer número (romano) corresponde al **Capítulo.** El segundo número (arábigo) al orden dentro del **Capítulo.**

Por último la letra, indica el nivel de escolaridad en el que se sugiere su uso: B = Nivel Básico, S = Nivel Superior.

Muchos de los problemas que se presentan admiten variantes que permiten ser utilizados en distintos años o con grupos heterogéneos. El campo numérico, el orden en el que están dados los datos y las preguntas, si se piden respuestas para casos concretos o se pretenden generalizaciones, son algunas de las variables didácticas que pueden simplificar o complejizar una situación problemática.

Para la evaluación se sugiere el criterio de resolución completa tomando en cuenta tanto el resultado como la presentación matemática del material.

En el Capítulo “Más problemas” hay situaciones clasificadas tan sólo teniendo en cuenta los años del nivel secundario. Se proponen distintos temas. El profesor los utilizará incorporándolos a los distintos bloques temáticos que desee trabajar.

Para un mejor aprovechamiento, es conveniente que el docente haga una apropiación previa y total del material y luego se disponga a trabajarlo con sus alumnos.

Considérense estas sugerencias tan sólo a título orientativo, pues la última palabra en el aula, la tiene el docente. Él es el que conoce al grupo y a los objetivos específicos del trabajo.

Se ha confeccionado un material similar a éste, destinado a maestros del nivel primario. Invitamos a los profesores a que le presten atención. Sería un elemento más para lograr la articulación, desde la perspectiva curricular, metodológica y de la formación docente, entre estos dos niveles de escolaridad.

CAPÍTULO I

INVITACION A LA MATEMÁTICA

QUÉ ES LA MATEMÁTICA?

¿Por qué la Matemática es muy importante en la educación? ¿Por qué se destina mucho dinero en algunos países para formar o contratar matemáticos? ¿Es verdad que las computadoras pueden resolver los problemas matemáticos con mayor rapidez y precisión que las personas y ello elimina la necesidad de matemáticos?

Para responder estas preguntas es necesario saber qué es la Matemática y cómo opera. La Matemática es mucho más que la Aritmética, que es la ciencia del número y del cálculo. Es más que el Álgebra, que es el lenguaje de los símbolos, de las operaciones y de las relaciones. Es más que la Geometría que es el estudio de las formas y de las dimensiones. Es más que la Estadística, que es la ciencia de la interpretación de los datos y de los gráficos. La Matemática comprende estas cosas y mucho más.

La Matemática es un modo de pensar, un estilo de razonar. Sirve para decidir si una idea es razonable o al menos para establecer si una idea es probablemente adecuada para lo que se busca. La Matemática es un campo abierto a la exploración y a la investigación y todos los días se producen ideas nuevas y fecundas. Es un modo de pensar que sirve para resolver los problemas de la ciencia, de la administración, del comercio, de la industria, etc.

Es un lenguaje de símbolos que todo el mundo entiende, y hay muchos que piensan que sería la única lengua común con los seres de otros mundos.

Es también un arte como la música, con una simetría, un orden y un ritmo que pueden ser muy bellos.

La Matemática está definida como el estudio de la regularidad, donde por regularidad se entiende **cualquier combinación de formas e ideas que se repiten sistemáticamente.**

Este estudio de la regularidad tiene mucha importancia, dado que regularidad y simetría se producen en la naturaleza. La luz, el sonido, el magnetismo, la corriente eléctrica, las mareas, el recorrido de los cuerpos celestes, los cristales de la nieve y la mecánica del átomo, todos presentan una regularidad que permite sean estudiados por la Matemática

LA MATEMÁTICA EN NUESTRO MUNDO

Si damos una mirada a la historia de nuestra civilización, acordaremos que la Matemática tuvo siempre mucha importancia pues ha servido para: medir los límites de un terreno, predecir las estaciones, calcular las tasas, conducir los navíos, construir casas y puentes, diseñar cartas geográficas, proyectar armas y hacer planes de guerra, comprender el movimiento de los planetas, desarrollar el comercio, descubrir nuevos principios científicos, inventar nuevas máquinas, crear cerebros electrónicos, desarrollar estrategias en los juegos, regular el tráfico y las comunicaciones, producir aparatos para nuevas mediciones, viajar por el espacio, descubrir nuevos minerales, predecir el tiempo, predecir el aumento de la población, etc.

Día a día aumentan las aplicaciones de la Matemática y su campo de estudio. Con experimentos, fantasia y razonamientos, los matemáticos generan hechos e ideas que los gobiernos, las empresas y los científicos usan para modificar la civilización.

Si pensamos por un momento en los inventos de nuestro mundo, como los satélites, los submarinos nucleares, las fábricas automáticas y los antibióticos, nos daremos cuenta de cómo la ciencia modifica nuestra vida.

Hoy en día es muy grande el requerimiento de matemáticos para la investigación, la enseñanza y las nuevas aplicaciones. No todos seremos matemáticos o científicos, pero todos debemos disponer de ciertos conocimientos matemáticos para comprender lo que ocurre en nuestro mundo. Estos conocimientos proporcionan ventajas en la escuela, la casa y el trabajo. Para ser un buen ciudadano en un país moderno y de grandes ambiciones se requiere una buena formación matemática.

QUÉ HACEN LOS MATEMÁTICOS?

La Matemática sirve a la cartografía, a la arquitectura, a la cosmonáutica, al diseño industrial, a la economía, etc. pero, el contador que resuelve problemas de finanzas o el astrónomo que mide la distancia de la Tierra a cualquier otro punto celeste no es un matemático en el sentido estricto de la palabra. Ciertamente usan ideas propuestas por matemáticos.

La tarea de los matemáticos es descubrir principios nuevos o aplicar viejos principios a problemas nuevos. Ellos se ocupan de problemas interesantes como el célebre último teorema de Fermat.

En el margen de un libro, el ilustre matemático francés Pierre de Fermat (1601-1665) escribió: “Si n es un número mayor que 2, no existen números enteros a, b, c, tales que resulte $a^3 + b^3 = c^3$. Encontré una demostración verdaderamente maravillosa, pero este margen es pequeño para contenerla”.

Se sabía desde muchos siglos antes de los tiempos de Fermat que si n = 2 es fácil encontrar ternas de números enteros x,y,z, que resuelven $x^2 + y^2 = z^2$; por ejemplo 3, 4 y 5 o también 5, 12 y 13. Estos números se llaman ternas pitagóricas porque responden al teorema de Pitágoras. Pero ninguno encontró tres enteros positivos x, y, z, que cumplieran esto para

x3 f y3 = 23 ó x4 + y4 = 24

Fermat sostenía haber demostrado que es imposible encontrar números de este género.

En realidad su teorema no tiene mucha importancia práctica, pero en el curso de los trescientos años de tentativas para demostrarlo se han desarrollado ideas muy importantes para la Matemática actual. Ideas tan fecundas que constituyen temas centrales de la investigación matemática contemporánea.

REGULARIDADES NUMÉRICAS

La habilidad del matemático para resolver un problema depende en buena medida de su sensibilidad para reconocer cierta configuración regular. Si encuentra una periodicidad interesante laestudia y busca descubrir su significado, rastrea una regla o una fórmula que la explique o la describa. Es por eso que para ser un buen matemático se necesita estar fascinado por la regularidad.

Un buen ejemplo de regularidad es el ideado por Blas Pascal (1623-1662), matemático contemporáneo de Fermat y tan célebre como él. Se trata del triángulo aritmético observado por el desarrollo de las siguientes expresiones:

$(a + b)O =$ 1

$(a + b)l =$ 1.a + 1.b

$(a + b1^2 =$ L $a^2 + 2.ab + l.b^2$

$(a + b)^3 =$ $l.a^3 + 3.a2b + 3.ab^2 + l.b^3$

Si observamos los coeficientes del desarrollo del binomio, vemos que cada fila empieza y termina con 1, mientras que los otros números son la suma de los dos escritos sobre él en la fila anterior.

1

1 1

1 **2** 1

1 **3** **3** 1

Esta configuración regular sirve para resolver muchos problemas de Álgebra y Estadística.

El trabajo de los matemáticos se parece al de los poetas o al de los escritores: gustan de ocuparse de las ideas, su tarea tiene mucho de razonamientos y reflexiones y ésto se puede hacer en cualquier parte, mientras se espera el colectivo, durante un viaje, al bañarse (Arquímedes) o en la mesa de trabajo.

PROBLEMAS DE REGULARIDAD

Para resolverlos es conveniente individualizar un esquema de regularidad.

I.1.B

Pucho y su esposa Julia trabajan juntos. Cada nueve días Pucho tiene un día de franco, Julia tiene un día libre cada seis. Hoy es el día libre de Pucho y Julia lo tendrá mañana. ¿Cuándo fue la última vez que tuvieron franco el mismo día?. ¿Cuál fue el último domingo que pasaron juntos en la quinta si hoy es viernes?

I.2.S

¿Cuántos segmentos pueden formarse con 4, 5, 6..., n puntos

a) alineados

- b) coplanares?
- c) en el espacio?

1.3.B

¿Cuántas diagonales tienen: un cuadrilátero, un pentágono, un exágono,...un polígono convexo de n lados?

1.4.B

¿Cuál es la cifra de las unidades de 7^{1994}?

EL MÉTODO EXPERIMENTAL

Por medio de la fantasía, la intuición y el razonamiento, los matemáticos buscan descubrir buenas ideas para resolver problemas difíciles. Es muy divertido explorar ideas nuevas, estar a la caza de una sospecha o encontrar otros caminos para resolver los mismos problemas. 0, por qué no, enunciar nuevos conceptos con palabras claras y concisas.

Uno de los caminos más usados para encontrar buenas ideas consiste en completar experimentos. Este método es similar al usado por los científicos en el laboratorio. Se llama método inductivo. Observemos cómo funciona este método en la siguiente situación:

Un experimento simple ilustra una notable propiedad de los triángulos. Dibujamos sobre una cartulina algunos triángulos de distintas medidas y luego de recortarlos disponemos los ángulos como indica la figura:

El primer y el tercer ángulo se apoyan sobre una línea recta. Este experimento hace suponer que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano, para probar realmente esto, debemos realizar una demostración aplicando el método lógico-deductivo. Pero por muchos triángulos con los que probemos, jamás tendremos la certeza de que la suma siempre es un ángulo llano. Sólo tenemos una conjetura. Las ideas descubiertas por este método inductivo son frecuentemente verdaderas, pero no siempre.

Examinemos las siguientes operaciones aritméticas:

2 x 2 = 4	2 + 2 = 4
3/2 x 3 = 9/2	3/2 + 3 = 9/2
4/3 x 4 = 16/3	4/3 + 4 = 16/3
5/4 x 5 = 25/4	5/4 + 5 = 25/4

Si con estos ejemplos concluímos por inducción que sumando o multiplicando los mismos números se obtienen los mismos resultados, hemos concluido un disparate que puede desmentirse con un contraejemplo.

Hemos ilustrado un grave defecto del razonamiento inductivo: considerar como general algo sólo a partir de algunos casos particulares. Ello puede conducir a una confusión. Para demostrar que una afirmación es falsa basta encontrar un contraejemplo y la afirmación queda descartada. No siempre la observación de los juicios particulares infiere la causa o la ley, 0 sea el juicio universal.

APLICACIONES DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO

I.5.B

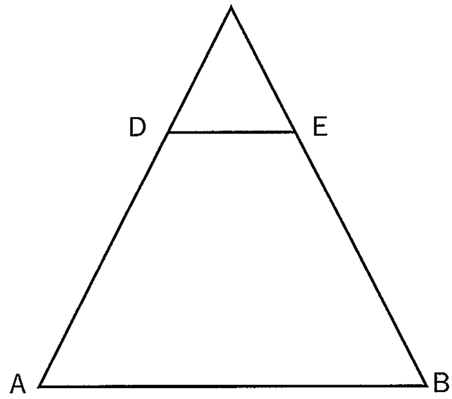
Escribir los cuadrados de los números de 1 a 20 incluídos. ¿Qué regularidad se observa en los cuadrados de los números impares? ¿Y en la de los números pares? ¿Y en la de los números divisibles por 5?

I.6.S

Dado un segmento AB cualquiera para dividirlo en tres partes iguales se puede realizar la siguiente construcción:

Sobre una semirrecta y con una unidad adecuada se determinan tres segmentos consecutivos.

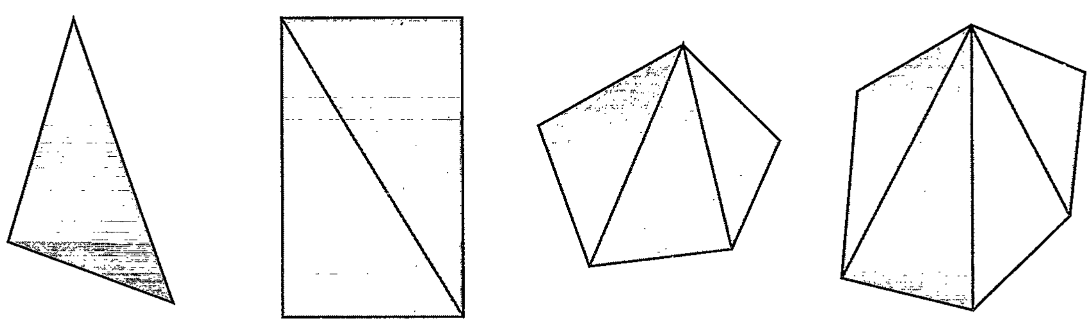
Si el segmento total obtenido es mayor que la mitad del AB, construir con él, un triángulo isósceles con la base AB. Desde el vértice opuesto a la base se toma la unidad y se marca sobre los dos lados. Uniendo ambos puntos queda determinado un segmento DE que es exactamente la tercera parte del AB.



¿Cómo se puede dividir un segmento en 2, 4, 5..., n partes iguales?

DEMOSTRACIONES BASADAS EN EL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Tratemos de hacer un experimento coi figuras geométricas planas y convexas, como las dibujadas.



Si admitimos la conjetura de un párrafo anterior (que es verdadera) que dice que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es el doble de un recto (2R), entonces la suma de los ángulos interiores de ün polígono convexo será igual al número de triángulos que pueden formarse a partir de un vértice. Esto es igual al número n de lados menos 2. Por lo tanto la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a:

$$(n - 2).\ 2R$$

Si analizamos el razonamiento anterior, hemos partido de resultados que consideramos verdaderos, como la conjetura de la suma de los ángulos de un triángulo y el supuesto (que también es verdadero) sobre el número de triángulos que puede formarse, y hemos calculado la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono convexo. Este método lógico se llama deductivo. Naturalmente la verdad de la conclusión depende de la verdad de las ideas de partida y de la corrección de los pasos lógicos empleados.

I.7.B

Una botella y su tapón cuestan 55 centavos. La botella cuesta 50 centavos más el tapon. ¿Cuánto cuesta el tapón?

I.8.S

Se tienen 8 monedas iguales en la forma, el color, el brillo y el tamaño. Se sabe que una de ellas es falsa y que su peso es levemente menor que el de una moneda verdadera. ¿Es posible, con dos pesadas en una balanza de dos platillos identificar la moneda falsa?

CAPÍTULO II

INVITACIÓN A LA ARITMÉTICA

ALGO SOBRE LA ARITMÉTICA

La Aritmética nació como el lenguaje destinado a responder preguntas de la vida cotidiana. Para contestar a estos requerimientos fue necesario inventar los números y las medidas, también el modo de combinarlos y de confrontarlos. De esta manera se llegó al desarrollo de la ciencia del número o Aritmética.

La humanidad demoró muchos siglos en crear un sistema numérico que funcione bien. Sabemos que nuestro sistema de numeración es de base decimal, en el cual el valor de las cifras depende de su posición. El nuestro no es el único que tiene esta característica ya que esto ocurre en otros sistemas usados actualmente y en la antigüedad.

El estudio del número resultó siempre un argumento efectivo para sugerir algoritmos, cuestiones o conceptos nuevos. Veamos como ejemplo, el siguiente método para calcular una división:

552		23
-230		
-322	=	10 x 23
-230	=	10 x 23
92		
92		4 x 23
	24	

552 : 23 = 10 + 10 + 4 = 24

Frecuentemente se encuentran números que se descomponen y se reagrupan con insólita regularidad, lo que permite generar nueva luz sobre las relaciones entre ellos.

Un ejemplo es el del esquema de los múltiplos de nueve.

1 x 9 = 9	0 + 9 = 9
2 x 9 = 1 8	1 + 8 = 9
3 x 9 = 2 7	2 + 7 = 9
4 x 9 = 3 6	3 + 6 = 9
5 x 9 = 4 5	4 + 5 = 9
6 x 9 = 5 4	5 + 4 = 9 -
7 x 9 = 6 3	6 + 3 = 9
8 x 9 = 7 2	7 + 2 = 9
9 x 9 = 8 1	8 + 1 = 9
10 x 9 = 90	9 + 0 = 9

Obsétvese que la cifra de la decena aumenta de 1 a 9 mientras que la cifra de la unidad disminuye de 9 a 0. Después de 45 los productos tienen los mismos números que los precedentes pero escritos al revés.

Hay muchas otras configuraciones de números, algunas de ellas muy interesantes. Asi por ejemplo:

- Los números 1, 3, 6 y 10 se pueden representar por un esquema triangular:

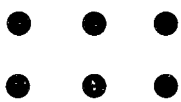
Los números 1, 4, 9 y 16 se pueden representar en un esquema cuadrado:

1 4 9 16

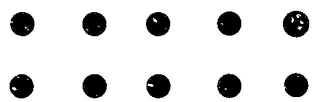
e Los cuadrados tienen la extraña propiedad de ser iguales a la suma de números impares consecutivos. Así:

$$4 = 1 + 3$$
$$9 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

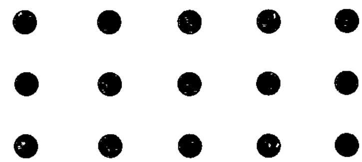
o Algunos números como 6, 10 y 15 se pueden representar en un esquema rectangular:



$2 \times 3 = 6$



$2 \times 5 = 10$



$3 \times 5 = 15$

- Con otros números como 2,3, 5, 7, Il y 13 no se pueden formar ni cuadrados ni rectángulos. Estos números sólo pueden dividirse por sí mismos y por la unidad, se Ilaman números primos. Desde hace siglos los matemáticos buscan una relación entre los números primos que permita enunciar una ,fórmula que los describa y que permita encontrarlos a todos. Ninguno ha hallado una fórmula que individualice a todos los números primos. Este es un ejemplo para ilustrar que una buena parte de la teoría de números es todavía inductiva.

Estas configuraciones muestran cómo la regularidad que se encuentra en las relaciones numéricas interesa a los matemáticos. La teoría de números, rama de la Matemática que se ocupa del estudio de las configuraciones numéricas, ha conducido a importantes resultados y descubierto conceptos matemáticos nuevos. Se ve ahí cómo la más simple Aritmética puede conducir a uha multiplicidad de ideas sugerentes. -

ALGUNOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD.

Busquemos un criterio de divisibilidad por 7.

Si n es un número natural, en el que b es la cifra de las unidades y a el número formado por las cifras restantes, es decir $n = 10a+b$. (por ejemplo, si $n = 33684$, $a = 3368$ y b F

4), entonces n = IOa + b = 7a + (3a + b) será divisible por 7 sí y sólo sí (3a + b) lo es. Este podría ser un criterio de divisibilidad pero no parece útil, ya que decidir si (3a+b) es o no un múltiplo de 7 es tan complejo como hacerlo con n = IOa + b. Pero (3a + b) es divisible por 7 si y sólo sí 3a + b + 14b lo es. Como 3a + 15b = 3(a+5b), resulta que n será múltiplo de 7 si lo es a + 5b. Esto sí es más simple de verificar. Veámoslo en unos ejemplos.

Para que el procedimiento sea más práctico haremos los cálculos separando mentalmente la cifra de las unidades.

```
   3368(4)
+
     20        (= 5 x 4)
   -------
   338(8)
+
    40         (= 5x8)
   -----
   37W
+
   40          (= 5x8)
   77    ------------------->   es divisible x 7

   3387(2)
+
     10        (= 5 x 2)
   -------
   339(7)
+
  - 35         (= 7 x 5)
   37(4)
+
   20          (=5X4)
   57    ------------------->   No es divisible x 7
```

II.1.B

a) Criterio de divisibilidad por ll. Verificar que si n = IOa + b entonces n es divisible por ll sí y sólo si a + IOb lo es. Utilizar este criterio para decidir si los números 20592 y 5392 son o no divisibles por ll.

b) Criterio de divisibilidad por 19. Verificar que si n = IOa + b entonces n es divisible por 19 sí y sólo si a + 2b lo es.

ALGUNOS JUEGOS ARITMÉTICOS

II.2.B

Elige un número. Multiplícalo por 9. Borra una cifra cualquiera que no sea un cero. Suma las cifras que quedan y dime la suma. Yo te diré la cifra que has borrado. ¿Cómo podré hacerlo?

II.3.B

1800 tornillos pesan tanto como 6930 tuercas. Obtener el menor número de tuercas y de tornillos para el cual las tuercas pesan igual que los tornillos.

II.4.B

Un niño llevaba una canasta con huevos y se cayó. Le preguntaron cuántos huevos llevaba y contestó que no sabía pero si los contaba de 2 en 2 le sobraba 1; de 3 en 3 le sobraba 1; de 4 en 4 le sobraba 1; de 5 en 5 le sobraba 1; de 6 en 6 le sobraba 1; y de 7 en 7 no le quedaba ninguno. ¿Cuántos huevos había en la canasta si la capacidad de ésta es inferior a 30 docenas?.

II.5.S

De todos los números menores que 100, ¿Cuáles son los que tienen mayor cantidad de divisores?

II.6.S

Un niño camina a pasos regulares por una senda rectilínea hecha de planchas rectangulares de cemento, cuyas juntas están distanciadas 85 cm. Sus zapatos tienen 20 cm. de longitud y su paso es de 50 cm. Parte con el talón tocando una junta y cuenta las juntas que va pisando (es decir, aquellas donde su zapato toca la junta). Después de 400 pasos. ¿Cuántas juntas contó?

¡OTRA ARITMÉTICA?

Contando con los números que representan la hora (0,1,2,3, ...11) frecuentemente se obtienen resultados insólitos, por ejemplo, si son las 8 y sumamos 7 horas obtenemos como resultado 3 y no 15.

Esta aritmética, que se obtiene utilizando un sistema de números del tipo del reloj, se llama aritmética modular. El sistema de aritmética modular es un sistema numérico finito pues tiene una cantidad determinada de números.

,Un sistema numérico finito puede construírse con los días de la semana, acordando que el domingo es el 1, el lunes es el 2, ... el sábado es el cero. En este sistema numérico la suma de 4 más 5 es 2 y significa que 5 días después del miércoles es lunes.

En el sistema horario la suma de 8 más 9 se escribe

$$8 + 9 = 5 \pmod{12}$$

y se lee : 8 más 9 igual 5 módulo 12 y módulo 12 significa que no hay más de 12 números, volviendo a cero con el 12. En el sistema semanal 5 + 6 = 4 (mod 7).

LAS CLAVES SECRETAS

Desde tiempos inmemoriales, los espías, los amantes y los políticos han usado claves secretas para enviar sus mensajes ptira que sólo el destinatario pudiera comprenderlos, procurando evitar que fueran descifrados por el enemigo, el rival o el adversario. Poetas y científicos han Ilenado páginas sobre estos temas que se vinculan con el misterio, el secreto y la seguridad.

Con el advenimiento de las telecomunicaciones y la informatización de la sociedad, la criptografía ha dejado de ser el curioso divertimento de generales y científicos excéntricos. Hoy en día todo el mundo está pendiente de sus avances, pues sin ellos las comunicaciones electrónicas pueden ser tan inseguras que todas las ventajas de celeridad y comodidad que ofrecen se tornan irrelevantes.

Los niños de ‘Juegos de Guerra” están más cerca be la vida cotidiana que de la ciencia-ficción. Los cajeros automáticos de los bancos y todas las transacciones que se realizan simplemente mediante órdenes a una computadora deben ser protegidos de la acción de los delincuentes informáticos, cada vez más frecuentes.

LOS MENSAJES SECRETOS DEL CÉSAR

Julio César, para gobernar su enorme imperio debió utilizar claves secretas muy seguras para la época. Él simplemente transmitía su mensaje y un número entre 0 y 27, llamado la cifra de César. Sus generales sabían que cada letra del alfabeto correspondía inicialmente a un número entre 1 y 27.

espacio	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12

M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Recibido el mensaje, sustituían las letras y los espacios por el número correspondiente. Luego le sumaban a cada número la cifra del César y por último, sustituían cada uno de los números así obtenidos por sus correspondientes restos en la división por 28. Ahora sí, reemplazaban estos números por letras, según la asignación original y podían leer las órdenes del César.

Si la cifra del César es 12 y el mensaje es GTVGTHTOPOGDAP (el mensaje no tenía ningún espacio), los pasos que hemos descripto son

0721230721082116171607040117
1933351933203328292819161329
1905071905200500010019161301
R E G R E S E - A - R O M A

En la terminología actual, si t es la cifra del César y m es la letra del mensaje que queremos descifrar, debemos resolver la ecuación:

$$c \equiv m + t \pmod{28}$$

Este código aumenta considerablemente su seguridad si en lugar de mandar una cifra del César para todo el mensaje se manda una cifra del César para cada letra. Lo complicado es transmitir las cifras del César sin que el enemigo se entere.

II.7.S

¿Cuál es el siguiente mensaje secreto del César si la cifra secreta es 17?

DEKDLWMSOXKMBEDZ

II.8.S

¿Cómo hay que codificar QUIEN GANÓ para que se pueda descifrar usando la cifra secreta 18?

ICÓMO ENVIAR MENSAJES SECRETOS EN PÚBLICO?

En la era de la informática, la criptografía se ha desarrollado vertiginosamente. Actualmente es imprescindible disponer de métodos para enviar información confidencial de manera tal que muchísimos curiosos puedan leer el mensaje y, aún sabiendo que es un secreto que les interesa, sólo el destinatario sea capaz de descifrarlo.

Veamos un modelo sencillo de tales claves.

El transmisor tiene una clave t que es pública. En nuestro ejemplo será $t = 7$. Además tiene un número n, que también es público. En nuestro ejemplo será $n = 22$

El receptor tiene la clave secreta r. En nuestro ejemplo tomaremos $r = 3$. Por sup'uesto, como todo el mundo, el receptor conoce el número 22.

Vamos a transmitir solamente la letra 1. Esta es la letra número 9 de nuestro alfabeto.

El transmisor calcula g^7, y transmite el resto de la división de g^7 por 22, que es 15.

El receptor recibe 15 y hace las siguientes cuentas: primero calcula 15^3 y luego su resto en la división por 22. Le da 9. Así sabe que el mensaje es la novena letra del alfabeto, o sea 1. (En realidad, con $n = 22$ sólo se pueden codificar 22 letras distintas).

En general, el transmisor transforma el número a a ser transmitido en $p = at \pmod n$. El receptor calcula $y = P^r \pmod n$. Un teorema de Fermat asegura que eligiendo convenientemente los números t, n y r, resultará $y = a$.

¿Cómo hay que elegir t, n y r para que este teorema se aplique? Estos tres números deben satisfacer una serie de tres condiciones, que son:

(i) n es el producto de dos primos distintos p y q.

(ii) el producto tr tiene resto 1 en la división por el número (p-l)(q-1), es decir $tr = 1 \pmod{(p-l)(q-1)}$.

(iii) Los números r y (p-l)(q-1) no tienen factores comunes, es decir, son coprimos.

A esta altura sería muy conveniente verificar que los valores elegidos en nuestro ejemplo, $t = 7$, $n = 22$ y $r = 3$, satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii).

La seguridad de este método reside en lo dificultoso que es descomponer en primos números muy grandes. 0 sea que si los primos p y q se eligen muy grandes y una vez calculado n = pq se borran, es muy difícil recuperar los valores p y q. Y si no se conocen p y q es imposible determinar r.

El problema de descomponer un número muy grande en factores primos puede resultar complejo aún para una computadora. Esto ocurre, por ejemplo si n tiene 200 cifras.

II.9.S

Utilizando las claves y el núm~ero del ejemplo, ¿Cuál es el mensaje cifrado que debe enviar el transmisor si quiere decir PAIS?

II.10.S

Con las mismas claves y el número del ejemplo, ¿Qué significado tiene el mensaje PNSA?

II.11.S

Hallar posibles valores de la clave pública t y la clave secreta r si el número n es 33.

MÁS JUEGOS ARITMÉTICOS

II.12.B

¿En qué día de la semana será (o fue) tu cumpleaños este año? ¿En qué día de la semana caerá el año que viene? ¿Por qué?

II.13.B

En cierto mes, tres domingos son días pares. ¿Qué día de la semana será el *20* de ese mes?

II.14.B

La suma de 6 números es par, el producto de los cuatro primeros es impar y el último es par. ¿Es posible conocer la paridad del quinto número?

II.15.B

Un alambre de 524 cm. es cortado desde uno de sus extremos *A* en trozos de 26 cm. y desde el otro de sus extremos B en trozos de 32 cm. Si los obreros que realizan estos cortes proceden alternadamente, comenzando el obrero del extremo A

¿qué obrero efectuará el último corte?

II.16.B

Un juego conocido tiene las reglas siguientes:

1) Juegan alternadamente 2 jugadores.
2) Cada jugador en su turno escribe un número entero entre 1 y 10 inclusive. Ese número se adiciona a la suma de los números escritos en las jugadas precedentes, (salvo naturalmente que se trate de la primera jugada).
3) Pierde el jugador cuyo número hace que la suma sea 100 o más.

El jugador que comienza el juego, si su contrincante juega bien, pierde. Explique cómo y por qué.

II.17.B

Jaimito se jacta de ser el que suma más rápido y para demostrarlo le pide a un compañero que escriba un número de 7 cifras, que escribe:

6.991.542

A otro compañero le pide que escriba debajo otro número de 7 cifras, que escribe:

8.201.533

Él propone un tercer número:

3.008.457

Le pide a un tercer compañero que escriba un número de 7 cifras, que escribe:

2.318.776

Por último, él escribe:

1.798.466 -

Jaimìto traza la línea y empezando desde la izquierda escribe la suma:

22.318.774

¿Cómo eligió Jaimito sus números?

CAPÍTULO III

INVITACIÓN A LA ESTADÍSTICA

EL SENTIDO DE LAS COINCIDENCIAS: LA PROBABILIDAD

La probabilidad entra en nuestras vidas de muchas maneras diferentes. Quizás el primer encuentro sea a través de los juegos de azar: dados, naipes, ruleta,.... Pronto nos damos cuenta de que los nacimientos, las defunciones, los accidentes, las transacciones económicas y los vínculos personales admiten un tratamiento estadístico. Más adelante advertimos que muchos fenómenos complejos, algunos sumamente determinísticos, sólo podrán tratarse mediante el cálculo de probabilidades.

En nuestro mundo complejo, lleno de coincidencias aparentemente sin sentido, lo que hace falta muchas veces, no son más hechos verídicos, sino un dominio mejor de los hechos conocidos. Para ello las probabilidades son de un valor incalculable. Los tests estadísticos y los intervalos de confianza, la diferencia entre causa y correlación, la probabilidad condicional, la independencia y la regla del producto, el arte de hacer estimaciones y el diseño de experimentos, los conceptos de valor esperado y de distribución de probabilidad, así como ejemplos y contraejemplos de todo lo anterior deberían ser más conocidos y divulgados.

La *probabilidad,* como la lógica, ya no es algo exclusivo de los matemáticos. Impregna nuestra vida.

El amplio espectro que va desde lo imposible hasta la certeza

Cuando algo no puede suceder, su probabilidad es 0. Si indudablemente ocurrirá, su probabilidad es 1. ¿Y entre ambos extremos qué pasa? ¿Qué significa la probabilidad l/2? ¿Cómo se refleja en la realidad?

Al lanzar 200 veces una moneda, es de esperar que la cantidad de veces que cae cara sea aproximadamente 100, o sea, en el 50% de los casos. Decimos entonces que la probabilidad de que al arrojar una moneda caiga cara esl/2.

Hay una manera muy simple de calcular la probabilidad de sucesos, que evita hacer tantos experimentos: cuando se realiza una experiencia aleatoria (lanzar una moneda, arrojar un dado, sacar bolillas de un bolillero, sacar cartas de un mazo,.....) en la que todos los resultados son igualmente probables, la probabilidad de cada uno de ellos es "uno dividido el número de resultados posibles".

En la ruleta hay 37 números (del 0 al 36). La probabilidad de que salga el 8 es l/37. Si un jugador hizo apuestas en el 8, el ll y el 15 (en tres números), su probabilidad de ganar es:

$$\frac{\text{cantidad de números a los que apostó}}{\text{cantidad de resultados de la ruleta}} = \frac{3}{37}$$

En general, la probabilidad de un suceso se calcula como

$$\frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$$

Así, para determinar la probabilidad de un suceso, hay que responder bien a tres preguntas:

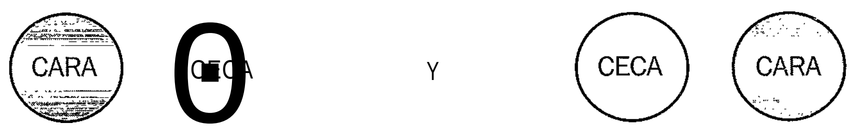
¿Cuántos son los resultados posibles?
¿Son igualmente probables?
¿Cuántos son los casos favorables?

Comprenderemos mejor la importancia de estas preguntas con algunos ejemplos.

Se arrojan dos monedas, una de 5 centavos y una de 10 centavos. ¿Cuál es la probabilidad de que salga una cara y una ceca?

Uno se ve tentado de decir: hay tres casos, dos caras, dos cecas ó una cara y una ceca, de modo que la probabilidad que quiero calcular **es l/3.** Esto es **Falso.** Los tres resultados mencionados no son igualmente probables. Al tirar las dos monedas se presentan cuatro posibilidades:

Estos cuatro resultados sí son equiprobables. Para que salga una cara y una ceca, los casos favorables son dos:



Su probabilidad es 2/4 = l/2.

III.1.S

Diego tiene dos amigos, uno vive en la estación Catedral y el otro en Palermo. Todos los días, cuando termina con sus obligaciones, sea la hora que fuere, se para en el andén del subterráneo de Plaza Italia y sube al primer tren que pasa, ya sea hacia Palermo o hacia Catedral. De este modo decide a qué amigo visita.

La frecuencia de los trenes en ambas direcciones (Palermo-Catedral o Catedral-Palermo) es de un servicio cada diez minutos.

Al año cae en la cuenta de que ha visitado 329 veces a Juan Marcos, su amigo de Palermo, y 36 veces a Lucho, su amigo de Catedral. ¿Cómo se explica esta situación?

Ayuda:

Si ambas frecuencias son de 10 minutos, la diferencia entre servicios es constante.

III.2.S

Truchiscola es una conocida gaseosa. En la tapita de cada botella hay una letra: T-R-U-CH-I-S-C-O-L-A. La embotelladora publicita que regalará una bicicleta a aquellos que formen la palabra Truchiscola con las tapitas.

Se desea saber el valor medio del número de botellas que hay que comprar para completar la palabra si las letras están uniformemente distribuídas en las botellas.

La solución de este problema no es sencilla, pero se puede obtener una solución experimental bastante satisfactoria. (el valor teórico para formar la palabra de 10 letras distintas es 1-b 10/9 -i- 10/8 + 10/7 + 10/6 + 10/5 + 10/4 + 10/3 + 10/2 + 10 s 29,29)

Cada alumno dispondrá de una tabla distinta de 500 números al azar con los números 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Se puede utilizar la lista del último dígito de los números de una página de la guía telefónica.

Cada alumno contará cuántos números de su tabla debe recorrer para obtener por primera vez un dígito de cada clase. Luego se promedian los números obtenidos por todos los alumnos. Ese valor no diferirá mucho del valor teórico 29,29.

Hay que recalcar que esto no significa que comprando 30 botellas es seguro que se complete la palabra, pero nos queda bastante claro que detrás de la promoción de Truchiscola hay trampa. Seguramente la embotelladora no distribuirá uniformemente todas la letras. Más aún, habrá una o más letras que sólo aparecerán muy ocasionalmente: tantas veces como bicicletas quiera regalar Truchiscola SA.

III.3.B

El Servicio Meteorológico publica todos los días un pronóstico para la jornada, con una estimación de la temperatura, la nubosidad, los vientos y a veces una probabilidad de lluvia: 30%, 70% o 90%.

Es muy frecuente escuchar que los pronosticadores se equivocan mucho.

Desarrollamos la siguiente actividad: diariamente registramos en una planilla la fecha, la probabilidad de lluvia anunciada (ponemos 0 si no habla de lluvias el pronostico) y si llovió 0 no.

Fecha	Probabilidad de lluvia	¿Llovió?

Con esta información a lo largo de un año podremos criticar o no a nuestros pronosticadores con mayor fundamento. Podemos hacer el ejercicio, una semana o un mes, pero entonces nuestro fundamento para la crítica será mucho menor.

III.4.S

¿Es tanta coincidencia?

Le pedimos a cada alumno que le pregunte a 23 personas distintas la fecha del cumpleaños y haga una lista con los 23 nombres y los correspondientes cumpleaños. ¿En cuántas listas hay alguna fecha repetida? Es de esperar que en aproximadamente la mitad. No es una gran coincidencia que entre 23 personas haya 2 (por lo menos) que cumplen años el mismo día. ¿Por qué?

Calculemos la probabilidad de que entre 23 personas no haya ningún cumpleaños repetido. Casos totales es el número de conjuntos de 23 días repetidos o no

$$366^{23}$$

Casos favorables: es el número de conjuntos de 23 días distintos

$$366.365.364 \ldots\ldots\ldots\ldots 346.345.344$$

la probabilidad de que entre 23 personas todas cumplan años en distintos días es

$$\frac{366.365.364.363 \ldots\ldots\ldots\ldots 346.345.344}{366^{23}} \approx 0{,}49$$

entonces la probabilidad de que por lo menos 2 de las 23 personas cumplan años el mismo día es aproximadamente 1 - 0,49 = 0,51

MÁS QUE 1/2 !!!!!

Aunque lo más llamativo sean los valores extremos y las coincidencias, lo que suele proporcionar más información son los valores medios o valores esperados. El valor esperado de una cantidad es la media de los valores que toma, pesados según sus posibilidades respectivas. Por ejemplo, si un cuarto de las veces la cantidad vale 2, un tercio vale 6, otro un tercio de las veces vale 15 y el un doceavo restante vale 54. El valor esperado de la magnitud es 2.1/4 + 6.1/3 + 15.1/3 + 54.1/12 = 12

III.5.S

Una compañía de seguros tiene motivos para pensar que, en promedio, cada año una de cada 1000 pólizas terminará en una reclamación de \$20.000.-, una de cada 100 en una reclamación de \$ 5.000.-, una de cada 10 en una reclamación de \$ 500.- y el resto no dará lùgar a reclamación, esto es, \$ O.- A la compañía le interesaría saber cuál es el gasto medio por cada póliza suscripta.

La respuesta nos la da el valor esperado, que en este caso es

$$20000.1/1000 + 5000.1/100 + 5OO.l/lO + 0.889/1000 = \$120$$

Invente otros problemas con otros valores.

III.6.S

Un laboratorio que analiza sangre en busca de una enfermedad que afecta a una persona de cada 100, recibe las muestras de sangre de los pacientes en grupos de 50. El director debe decidir si en vez de analizar la sangre de cada individuo por separado no seria más económico mezclar un poco de cada una de las 50 muestras y analizar el conjunto. Si la muestra total da negativo, podrá declarar sanos a los 50 y en caso contrario deberá analizar la muestra de sangre de cada individuo del grupo por separado. ¿Cuál es el número esperado de análisis que habría que realizar en caso que se decidiera adoptar este procedimiento?

El laboratorio debe realizar o bien un análisis (si da negativo) o 51 (si da positivo). La probabilidad de que una persona esté sana es 99/100, y por lo tanto la probabilidad de que lo estén las 50 que componen el grupo es $(99/100)^{50}$. Entonces la probabilidad de que haya que realizar un sólo análisis es $(99/100)^{50}$.

Por otra parte, la probabilidad de que por lo menos una persona de un grupo padezca la enfermedad es l-(99/100)50 y ésta es la probabilidad de que haya que realizar 51 análisis.

Por lo tanto, el número esperado de análisis necesarios es

$$1.(99/100)50 + 51. (l-(99/100)50 \; z \; 21$$

La situación es clara, si el número de personas que ha de pasar el análisis es grande, será una sauna decisión por parte del director tomar una parte de cada muestra, mezclarla y analizar primero la muestra mezcla. Y si hace falta analizará luego por separado los restos de las 50 muestras. En promedio este procedimiento hará que basten 21 análisis cada 50 personas.

Dos ejemplos sumamente ilustrativos.

Hay infinidad de problemas cuyo resultado teórico es exacto pero en la práctica es imposible de lograr. En muchos de estos casos se puede aplicar el método de las "muestras". Veremos con cuidado dos situaciones distintas.

LAS ENCUESTAS 0 SONDEOS DE OPINIÓN

Se puede comprender muy bien cómo funcionan realizando experiencias en el aula. Para ello hay que disponer de 800 fósforos y una bolsa no transparente.

Se separan 200 fósforos y se les hace una marca con marcador rojo. Se separan otros 100 y se les hace una marca azul. Tendremos así 500 fósforos blancos (los que quedaron sin marcar), 200 rojos y 100 azules.

El número de fósforos de cada clase es desconocido para los alumnos. El docente pone los 800 fósforos en la bolsa, bien mezclados. La clase debe calcular el porcentaje de fósforos rojos, de fósforos azules y de fósforos blancos que hay en la bolsa.

Cada alumno, a su turno, sacará un puñado de fósforos de la bolsa y contarán cuántos son rojos, cuántos son azules y cuántos son blancos, registrando el porcentaje de cada clase que hay en el puñado. Por ejemplo, si un alumno sacó 56 fósforos, de los cuales 16 son rojos, 6 son azules y 34 son blancos, registrará 28%, 10% y 60%. Luego regresa su puñado a la bolsa y extrae el siguiente alumno. (Los porcentajes no suman 100 pues se han redondeado a números enteros).

Cuando varios alumnos hayan hecho la experiencia, se procede a contar todos los fósforos de la bolsa y calcular los porcentajes reales de cada color: 25%, 12,5% y 62,5%. Se observará luego el grado de aproximación obtenido en cada caso.

¿Qué pasa si se promedian los porcentajes de un color que obtuvieron los alumnos?

Con este procedimiento se hacen las encuestas con las que nos bombardean los medios de comunicación. Las más serias se preocupan de tomar cuidadosamente los "puñados" de personas, asegurándose de que sea realmente al azar. Esto quiere decir variedad de nivel sociocultural, nivel económico, sexo, edad, etc.

ESTIMACIÓN DEL TAMAÑO DE UNA POBLACIÓN

Si tenemos la bolsa con 400 fósforos sin marcar, trataremos de averiguar cuántos fósforos hay en la bolsa.Se toma cierto número de ellos, por ejemplo 80, y se les hace una marca que permita distinguirlos de los demás, por ejemplo con un marcador azul. Luego se los regresa a la bolsa y se los mezcla bien. A continuación, cada alumno, por turno, saca un puñado de fósforos de la mezcla, cuenta los marcados y los blancos y establece la proporción. Hecho esto, regresa el puñado a la bolsa y hace su extracción el siguiente alumno.

Si un alumno contó 12 azules y 50 blancos, su planteo es

$$\frac{\text{azules sacados (12)}}{\text{total sacado (62)}} = \frac{\text{total de azules (80)}}{\text{total de la bolsa (x)}}$$

Este alumno estimará que en la bolsa hay:

$$\frac{80 . 62}{12} \approx 413 \text{ fósforos}$$

Si se promedian las estimaciones obtenidas por varios alumnos se obtiene una estimación mejor.

Con este procedimiento los biólogos estiman el número de peces que hay en una laguna: pescan una cantidad determinada, les hacen una marca y luego los regresan a la laguna. Dejan pasar un tiempo para que los peces marcados se diseminen y mezclen con los peces sin marcar. Luego pescan algunos peces (éste es el “puñado”) y establecen la proporción entre marcados y sin marcar, tal como hicimos en el ejemplo de los fósforos.

III.7.S

¿Cuál es la probabilidad de ganar la lotería?

III.8.S

¿Cuál es la probabilidad de ganar el Quini 6? ¿y el Prode?

III.9.B

¿Cuál es la probabilidad de que, al arrojar dos dados, la suma de los valores sea 7 ¿y que sea 4? ¿y 2?

III.10.S

Se arroja una moneda repetidamente hasta que aparezca una sucesión de dos valores iguales. ¿Cuál es la probabilidad de que la experiencia termine antes de la sexta jugada?

III.11.S

En una jaula del zoológico hay un león, un tigre, un jabalí, una hiena y un zorro. Se abre la puerta y salen los animales de a uno. ¿Cuál es la probabilidad de que salga el león primero? ¿Cuál es la probabilidad de que salgan en orden alfabético?

III.12.B

Una urna contiene 10 bolillas numeradas de 0 a 9. Se sacan dos bolillas sucesivamente, reponiendo la primera antes de sacar la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos números consecutivos?

III.13.S

Juan y Pedro acuerdan el siguiente juego. Se lanzan dos dados. Si la suma de los números vale 2,3,4,10,11,12 gana Juan y si la suma vale 5,6,7,8,9 gana Pedro. ¿Quién tiene más probabilidades de ganar?

Algunos de estos problemas se pueden resolver sólo experimentalmente. En ese caso pueden ser propuestos a chicos de años inferiores

CAPÍTULO IV

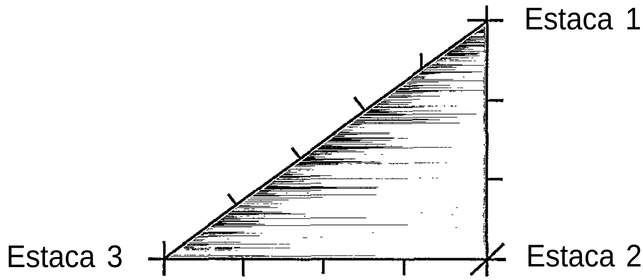
INVITACIÓN A LA GEOMETRÍA

UN POCO DE HISTORIA ANTIGUA

En el antiguo Egipto, en cada primavera las aguas del Nilo superaban los terraplenes y los diques. Anegaban las tierras por kilómetros y kilómetros. Los egipcios acogían con gusto esta inundación anual porque sus tierras eran muy áridas y éste era el único medio efectivo para regar los campos. Pero el anegamiento también traía contratiempos pues el agua borraba la división de las tierras. Por eso, después de que las aguas se retiraban había que dividir nuevamente los campos.

En esos tiempos el sistema de medidas era muy rudimentario. Hubo que desarrollar mucha Matemática para que las medidas alcanzaran la extensión y la precisión que tienen hoy.

La Geometría empírica o física, sobre la que están basadas muchas actividades humanas necesitó el ángulo recto y los agrimensores egipcios procedían de la siguiente manera. Sobre una soga de cierta longitud hacían 13 nudos a intervalos regulares. Fijaban la soga con estacas como indica la figura.



El ángulo formado en la estaca 2 es recto. Los catetos miden 3 y 4 unidades y la hípotenusa 5 unidades.

Los egipcios, satisfechos con este sistema, no se cuestionaron por qué. Sólo les importó que si los lados de un triángulo son proporcionales a 3, 4 y 5 el triángulo es rectángulo.

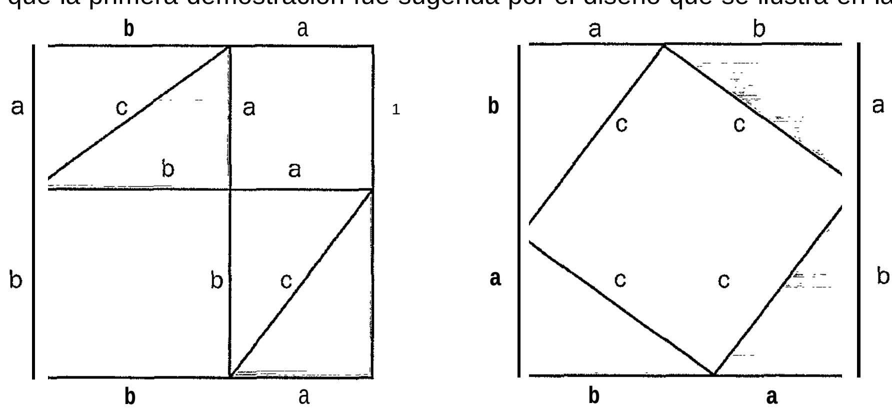
En la misma época los hindúes necesitaban construir ángulos rectos y encontraron otras ternas pitagóricas que formaban triángulos rectángulos, como las siguientes:

12, 16 y 20	15,20 y 20
5, 12 y 13	15,36 y 39
8, 15 y 17	12,35 y 37

La primera respuesta al por qué de esta relación la dio Pitágoras en el siglo VI antes de Cristo y su nombre será siempre recordado por la importante relación que demuestra el teorema de Pitágoras.

En cualquier triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros dos se llaman catetos. La relación puede enunciarse así: “El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.

Se cree que la primera demostración fue sugerida por el diseño que se ilustra en las figuras:



Se construyen dos cuadrados grandes de lado a + b. Tenemos por otra parte cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b. Lw áreas no ocupadas por triángulos rectángulos deben ser iguales 0 sea que

$a^2 + b^2 = c^2$ que es el teorema de Pitágoras expresado en términos algebraicos.

IV.1.B

Escribir ternas pitagóricas y no pitagóricas. Justificar

UNA AVENTURA ENTRE LOS NÚMEROS Y LA GEOMETRíA

Es poco lo que se sabe de Pitágoras. Se sostiene que fue alumno de THALES (640-530 A.C.), famoso filósofo considerado uno de los "siete sabios". Se supone que sus escritos se perdieron, pero de una cosa parecen estar seguros los historiadores y es que sin las ideas de Thales y de Pitágoras, Platón no hubiera alcanzado su nivel de filosofía y sin Platón el mundo se hubiera privado de ideas fundamentales.

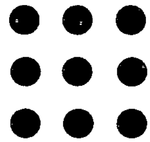
De joven Pitágoras viajó mucho por los países bañados por el Mediterráneo. En el 509 A.C. se estableció en Crotona, ciudad de Italia meridional, fundada por los griegos. En ella formó una sociedad secreta cuyos miembros se llamaban pitagóricos. Se ocupaban de debatir asuntos morales y también argumentos científicos. Sus discusiones aportaban ideas a la Matemática y a la Astronomía.

Investigaron los sonidos musicales y demostraron que si dos cuerdas están igualmente tensas y una es el doble de largo que la otra, al hacerlas vibrar producen notas musicales que difieren en un octavo. Fueron los primeros en enunciar que la Tierra es una esfera que rota en torno al sol, al igual que el conjunto de los planetas.

Ya hemos visto (Cap. II) los números triangulares, rectangulares, cuadrados, etc. Los pitagóricos buscaban estas formas en los números y descubrieron muchas ideas importantes, como la de que los números cuadrados se obtienen como suma de los números impares.

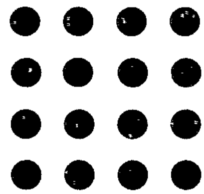
	1	●	1 = 12
1 + 3	4	a a a a	4 = 22

1 + 3 + 5 9



$9 = 3^2$

l - l - 3 + 5 + 7 1 6



16 = 4*

Esto indujo a Pitágoras a preguntarse si pueden expresarse los números cuadrados como suma de dos números cuadrados. La respuesta nos lleva a la terna que usaba los egipcios 3,4,5.

Como dijimos anteriormente, una terna de números enteros x,y,z que verifica que

$$x^2 + y^* = z^*$$

se llama pitagórica.

Los pitagóricos buscaron una expresión general que permitiera generar las ternas y tuvieron éxito con la expresión

$$m; \quad \frac{m^2 - 1}{2}; \quad \frac{m^* + 1}{2}$$

donde m puede tomar cualquier valor entero impar. ¿Por qué se excluyen los valores pares de m?

Se proponen los siguientes problemas:

IV.2.S

Demostrar que la fórmula

$$m^2 + [l/2 (m^* - III^* = KW (t-n^* + UI^2$$

vale para todo valor de m.

IV.3.S

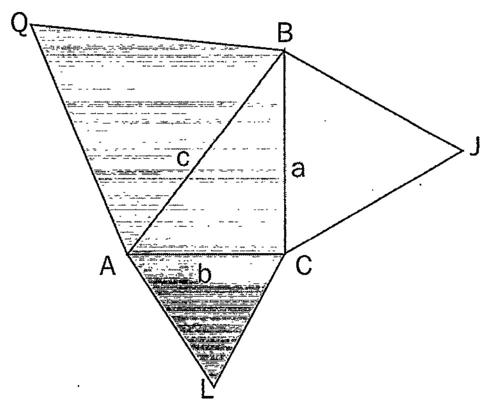
La expresión $(m^* - n^*)^* + (2mn)^* = (m^* + n^*)^*$ genera números pitagóricos. Demostrar que si n = 1 se obtiene una expresión equivalente a la encontrada por Pitágoras.

LA GEOMETRíA Y EL TEOREMA DE PITÁGORAS

El teorema de Pitágoras tiene una conocida interpretación geométrica:

0 la suma de las áreas de los cuadrados construídos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construído sobre la hipotenusa.

Es interesante destacar que este resultado vale para cualesquiera otras figuras semejantes construídas sobre los lados del triángulo. Por ejemplo: el área del triángulo equilátero construído sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos construídos sobre los catetos. Recordemos que en las figuras semejantes las áreas son proporcionales al cuadrado de las dimensiones que se corresponden. En particular: si dos triángulos son semejantes entonces sus áreas son proporcionales al cuadrado de los lados correspondientes. Por lo tanto,



Area (BCJ) = a2 y Area (ACL) = b*
Area (ABQ) c^2 Area (ABQ) c*

Si a* + b* = c* entonces a* + b* = 1
c* c*

Luego Area (BCJ) + Area (ACL) = 1
Area (ABQ) Area (ABQ)

y resulta

Area (BCJ) + Area (ACL) = Area (ABQ)

IV.4.S

Demostrar que se pueden reemplazar dos caños cilíndricos, uno de 3 cm. de diámetro y otro de 4 cm. de diámetro por uno de 5 cm., sin que aumente la presión en el caño.

APARECE UN NÚMERO EXTRAÑO

El estudio de los números pitagóricos puede inducirnos a pensar que los griegos se ocupaban de estudiar sólo los números enteros, pero no es exactamente así. Es verdad que Pitágoras y sus seguidores estaban fascinados por las relaciones entre los números enteros, pensaban que todo el universo se podía explicar con ellos. Les preocupaba que fuera imposible encontrar dos enteros tales que el cuadrado de uno sea igual al doble del cuadrado del otro. El problema que buscaban resolver con números enteros se podía expresar así:

m ^{2} = n* + **n* = 2n2, tj** $\frac{m*}{n*}$ **- = 2 ó J I ! - . E = 2**
n n

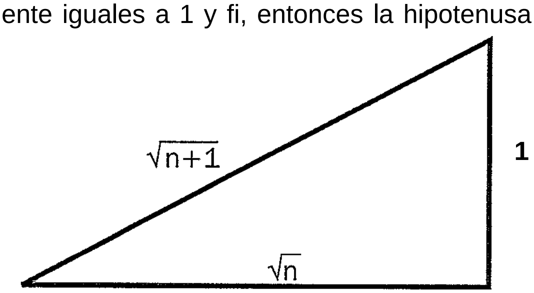
El número que multiplicado por sí mismo es igual a 2 se llama raiz cuadrada de 2

4 5

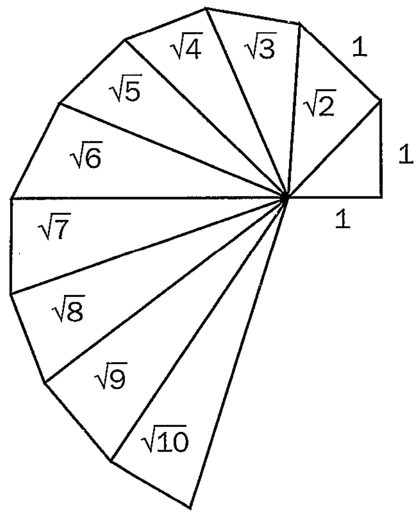
Los pitagóricos descubrieron que ningún valor entero de m y n verifica la expresión. Esta conclusión significa que la raíz cuadrada de 2 no puede expresarse como razón de dos enteros, es decir, no es un número racional.

EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN ACCIÓN

Usando el teorema de Pitágoras se puede demostrar que si los catetos de un triángulo rectángulo son respectivamente iguales a 1 y fi, entonces la hipotenusa tiene longitud igual a &%?i.



Si n es un número entero se puede construir con regla y compás un segmento de longitud m, conociendo 1 y 6. Utilizando este principio, se pide verificar la exsctitud de la siguiente figura.



IV.5.S

Construir con un aregla y compás un triángulo rectángulo de catetos x, Ge hipotenusa &% Utilizando el compás, comparar los resultados con los de la figura anterior.

IV.6:S

Construir un segmento de longitud T& y otro de longitud 6. Observar que el doble de 6,s igual a 65, esto es si &iG = 2.6.

CÁLCULO DE LA RAíZ CUADRADA POR APROXIMACIONES RACIONALES

Supongamos que queremos calcular fi. Nuestra primera estimación es 1. Si dividimos a 2 (que es el radicando) por 1 (que es el valor estimado), el resultado es 2. A continuación tomamos la media aritmética (1+2)/2 = 3/2 como nueva aproximación de fi.

A partir de la estimación 3/2, repetimos el procedimiento: dividimos a 2 por 3/2 (2: 3/2 = 4/3). De los dos últimos valores 3/2 y 4/3, uno es mayor y otro es menor que 112. La media aritmética de estos dos valores será una aproximación mejor

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} \text{ z } \frac{17}{12} \text{ c } 1,416$$

De esta manera obtenemos sucesivamente mejores aproximaciones de$

$$x^* = \frac{1 + \$}{2} = 1,5$$

$$x3 = \frac{1,5 + \&}{2} = 1,415$$

$$x4 = \frac{1,415 + \frac{2}{1,415}}{2} = 1,41421$$

$$x5 = \frac{1,41421 + \frac{2}{1,41421}}{2} = 1,4142135$$

Hemos llegado a la quinta cifra decimal exacta, esto significa que el valor hallado difiere de aen menos de un cienmilésimo.

Este procedimiento se puede aplicar al cálculo de fi poniendo

$$x^* = \frac{x1 + \frac{"}{x1}}{2}$$

donde x1 la primera estimación y x2 la segunda.

Esta fórmula es un método muy razonable pues al buscar un número x que multiplicado por sí mismo sea igual a n (si x.x = n entonces x = fi), si x_1 es una aproximación de x por exceso, n/x, lo será por defecto y su media aritmética

$$x1 = \frac{x1 \quad 3 - \frac{L}{X1}}{2}$$

habrá reducido el error a la mitad.

IV.7.B

En una circunferencia de 2,5 cm. de radio hay inscripto un triángulo rectángulo. Sabiendo que la diferencia de los catetos es un centímetro, calcular la superficie.

IV.8.B

Tres ciudades A, B y C se hallan unidas dos a dos por un camino recto. Los dos caminos que llegan a C forman un ángulo recto. Las distancia entre A y C es 75 km. y la distancia entre B y C es de 100 km.. ¿Cuántos kilómetros de más recorre una persona que al ir de la ciudad A a la ciudad B debe pasar necesariamente por la ciudad C?

IV.9.S

La sombra de una persona de 1,80 m de altura producida por un foco de alumbrado es inicialmente de 3,60 m. Después la persona se para justo en el lugar donde terrtiina su sombra, comprobando que su sombra mide ahora 4 m. ¿A qué altura del piso está el foco?

IV.10.S

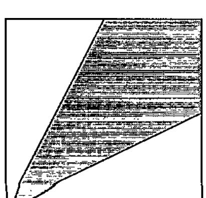
Un foso profundo de 3 m de ancho rodea un terreno rectangular R. Estoy en el exterior y sólo dispongo de dos tablones livianos pero rígidos de 2,95 m de longitud. ¿Cómo puedo hacer para llegar a R?

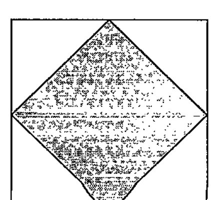
IV.11.S

Una barca se dirige al oeste atravesando un río que corre en dirección sur a la velocidad de 2 km./h. La barca viaja a 5 km./h respecto al agua pero la corriente la desvía hacia el sur. ¿A qué velocidad se mueve la barca respecto de la orilla?

IV.12.B

En las figuras siguientes se han marcado los puntos medios sobre los lados del cuadrado. Determinar el perímetro de las regiones sombreadas.





IV.13.S

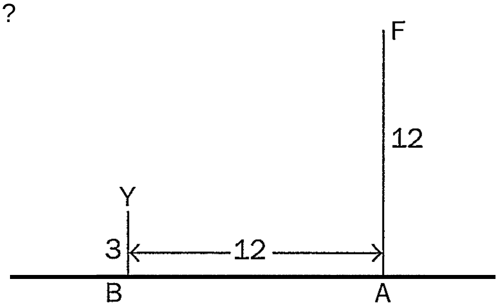
En las empresas de aeronavegación las cajas estándar para encomiendas tienen las siguientes medidas:

40 cm. x 60 cm. x 1 m, 60 cm. x 60 cm. x 90 cm. y 1 m x 1 m x 1 m

¿Puedo despachar por encomienda mi caña de pescar que mide 1,70 m si la compañía prohibe que la lleve en la cabina?

IV.14.S

En el plano de la figura me he representado a mí mismo en el punto Y, un foco de alumbrado F y una pared. Están también indicadas las distancias en metros del foco a la pared (AF = 12 m) de mí a la pared (YB = 3m) y la distancia AB es de 12 metros. Sé que el foco está a 3 metros de altura, pero eso no disminuye el placer que siento como persona relativamente baja (1,50 m exactamente) al contemplar la longitud de mi sombra. ¿Cuál es esa longitud?

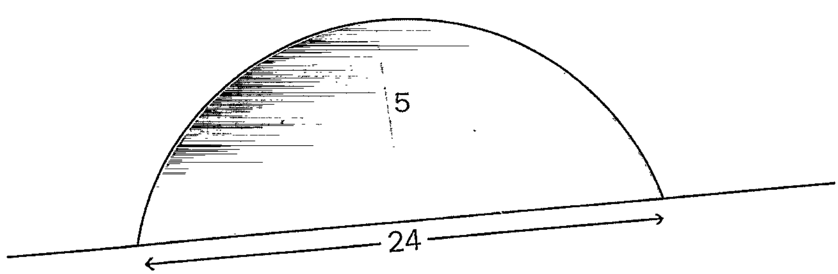


IV.15.S

Calcular el volumen de un tetraedro de 6 cm. de lado.

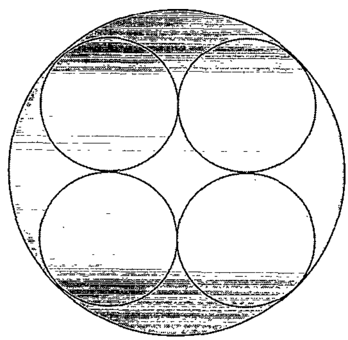
IV.16.S

Para reconstruir un cilindro, un mecánico debe calcular su diámetro utilizando la parte existente del mismo. En el esquema se muestran dos medidas que toma con una regla graduada. En este momento, ¿Está en condiciones de calcular el diámetro?



IV.17.S

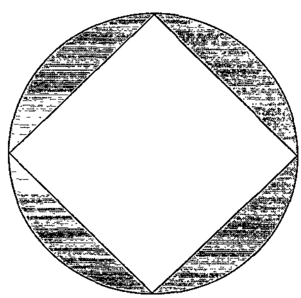
Un mecánico desea colocar cuatro engranajes en una caja circular, de modo que sean todos tangentes como indica la figura



Si la circunferencia de la caja tiene un diámetro igual a D y los cuatro engranajes tienen diámetro d, demostrar que D = 2,414.d.

IV.18.B

De un tronco cilíndrico de diámetro d se desea obtener una viga de sección cuadrada



¿Cuál es la diferencia entre las áreas de las secciones del tronco y la viga?

CAPÍTULO V

MÁS PROBLEMAS

En este capítulo proponemos otra serie de problemas para que los docentes los utilicen con el objetivo temático que consideren más relevante, pues cada uno de ellos abarca más de un tema matemático. Así, por ejemplo: una situación de medida puede estar vinculada con figuras geométricas, necesitar de operaciones aritméticas para su resolución y estar dada en un conjunto numérico determinado.

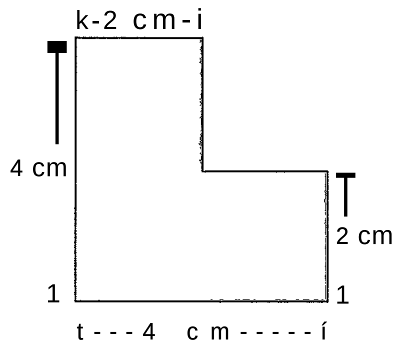
I[B] A Ñ O

I.- Completa la siguiente tabla:

m .	*r!*	m - t n	m X n
1 7	25		
	100	136	
	1		1040
		96	0
400			4400

2.- Un automóvil consume 9 litros de nafta por cada 100 km. recorridos. El litro de nafta cuesta 78 centavos. ¿Cuánto dinero se gasta en nafta para hacer un viaje de 450 km. con este auto?

3.- Con 12 módulos de la forma:

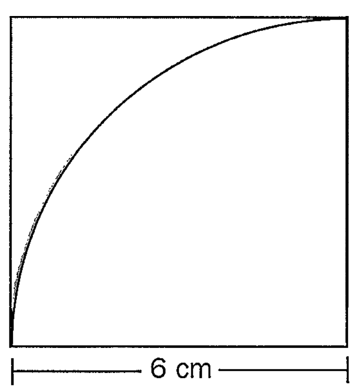


se puede formar un cuadrado. ¿Cuál será el área del mismo? Fabrica 12 de estos módulos con papel e intenta armar el cuadrado.

4.- Al multiplicar 12.345.679 por un número de una cifra, se obtiene otro número cuyas cifras son todas iguales a 1. ¿Por qué número se multiplicó?

5.- Un avión sale de Madrid a las 20:15 del domingo en vuelo directo a Buenos Aires. Si la duración del vuelo se estima en 15 horas y 20 minutos, ¿qué día y a qué hora llegará a Buenos Aires? (Nota: entre Madrid y Buenos Aires hay una diferencia de 4 horas: cuando en Madrid son las 12, en Buenos Aires son las 8).

6.- Calcula el área de la región sombreada:



7.- ¿Cuánto costarán 13 kg. de café si por 19 kg. se han pagado $ 123,50?

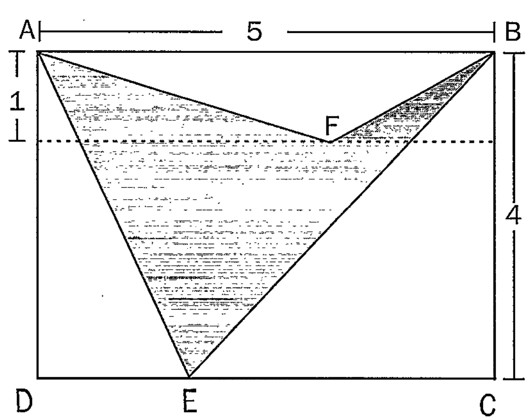
8.- Calcula los números que faltan de este cuadrado mágico. (Un cuadrado mágico es aquel que produce los mismos resultados al sumar los elementos de cualquier fila, columna o diagonal)

2,25	6	1,25		3,75
	1,25		3,50	
	1,50	5,25		5,50
2,50	3	4,75		0,75
2,75			0,50	2,25

9.- Un cubo de madera de 18 cm. de arista ha sido dividido en 8 cubos iguales. ¿Qué superficie y qué volumen tiene cada uno de los cubos resultantes?

lo.- En una plantación de frutales, un quinto de los árboles son manzanos y un cuarto de los árboles son perales. Los restantes 132 son cerezos. ¿Cuántos árboles hay en la plantación?

ll.- En el rectángulo ABCD, E es un punto del lado DC y F es un punto interior del triángulo AEB que está a distancia 1 del lado AB. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



12.- Natalia quiere hacer una torta cuyos ingredientes son:

500 g de harina leudante

250 g de manteca

250 g de azúcar

4 huevos

1 taza de leche

cuando va a buscar los huevos encuentra sólo 3. De los demás ingredientes hay cantidad suficiente. ¿Cuánto debe poner de cada ingrediente para hacer una torta que tenga la misma composición que la de la receta?

2DO AÑO

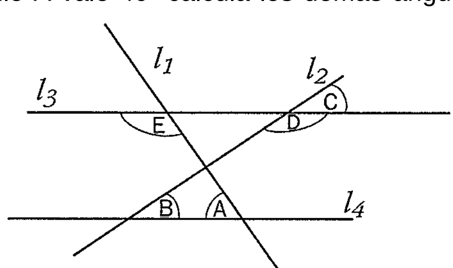
l.- El padre tiene 26 años y el hijo 2 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble de la edad del hijo?

2.- ¿Qué diferencia de altura hay entre la cima del Everest que tiene 8.882 metros y el fondo de la fosa marina de las islas Marianas, que está a 10.915 metros de profundidad?

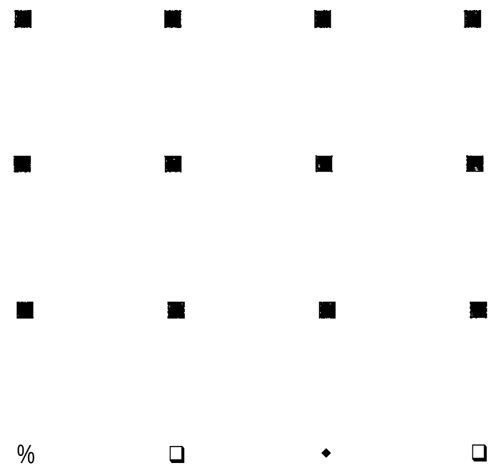
3.- Se sabe que en el triángulo ABC el ángulo A mide menos de 55” y el ángulo C mide menos de 30”. ¿Puede ser un triángulo rectángulo?

4.- El número estimado de estrellas de nuestra galaxia es 1O^{1}l y el número estimado de galaxias en el universo es lOl*. Si supones que todas las galaxias tienen el mismo número de estrellas. ¿qué número de estrellas estimas que puede haber en el universo?

5.- En la figura las rectas 21 y 2-7 son perpendiculares mientras que las rectas 1; y 2-f son paralelas. Sabiendo que el ángulo A vale 40” calcula los demás ángulos indkados.

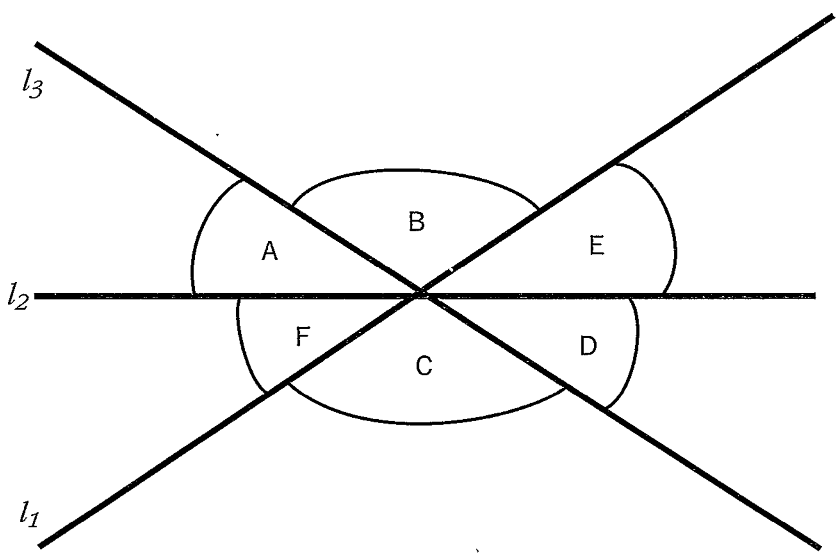


6.- Cuántos cuadrados se pueden dibujar con vértices en los puntos señalados?



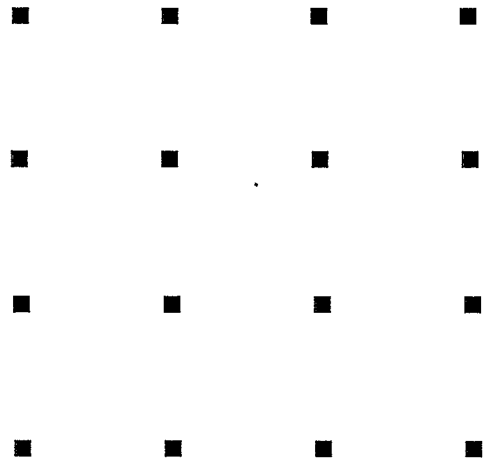
7.- Encuentra un número de dos cifras que al sumarle 9 se convierte en otro número con las mismas dos cifras en orden invertido. ¿Puedes encontrar otro? ¿Hay más? ¿Cuántos?

8.- Las rectas del dibujo concurren en el punto 0. Sabiendo que 12 es bisectriz del ángulo que forman las rectas 21 y 23 y que el ángulo B mide 120”, calcula todos los ángulos indicados en la figura



¿Cuánto vale la suma de todos los ángulos? (A + B + C + D + E + F)

9.- En el problema N°6 se podían encontrar 20 cuadrados con vértices en los puntos señalados. Calcula ahora el área de cada uno de ellos.



lo.- Encuentra el dígito que corresponde a cada letra para que se cumpla que (HE)* = SHE

ll.- a y b son dos números naturales con la propiedad de que su suma es impar. Decide si el número n - b es par o impar. ¿Puedes decidir si son pares o impares los números $(3n + b)$ y $(n - b + 5a + 7b)$?

12.- El sonido recorre 340 metros por segundo. Durante una tormenta se ha oído el trueno 13 segundos después de verse el relámpago. ¿A qué distancia aproximadamente se produjo el rayo?

3^{EB} AÑO

I.- a) ¿Cuál es el mayor entero que es menor que -15/8?

b) ¿Cuál es el menor entero que es mayor que -15/8?

2.- Un artículo que ha sufrido un aumento del 5% actualmente cuesta $ 336.- ¿Cuál era el precio antes de dicho aumento?

3.- ¿Cuántos cubos de 3 cm. de arista entran en un cubo de 6 cm. de arista?

4.- Mi calculadora no funciona bien ya que, a veces, muestra borrosa alguna figura.

a) Después de realizar algunas multiplicaciones en el visor apareció

28512@

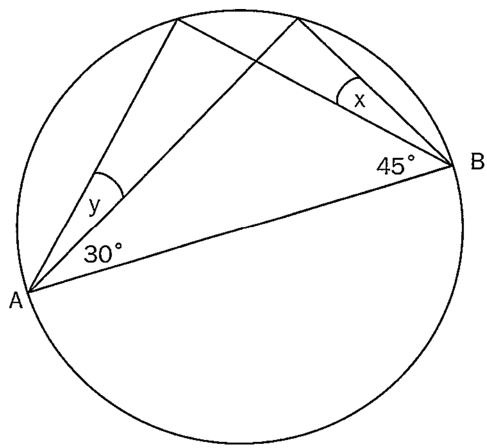
Recuerdo que uno de los factores era 10. ¿Cuál es la cifra que no se lee?

b) Cuando hice 16x15x14x. . . . . . x1, en el visor apareció

2092278988@000

¿Cuál es, en este caso, la cifra borrosa?

5.- AB es diámetro de la circunferencia. Halla x e y.



6.- ¿Cuántas veces cabe el volumen de la Luna en el volumen de la Tierra?

Nota: el volumen estimado de la Luna es de 21,9x10’ km^3 y el volumen de la Tierra es de alrededor de 1,08 x 10^1* km^3. El diámetro de la Tierra es 3,67 veces el diámetro de la Luna. ¿Coincide con la proporción antes obtenida? Explica por qué.

4"AÑO

I.- El Gran Mago me dijo:

- Piensa un número.
- Añádele 15.
- Multiplica por 3 el resultado.
- A lo que salga réstale 9.

- Divide por 3.
- réstale 8.
- Dime lo que sale.

Yo le dije:

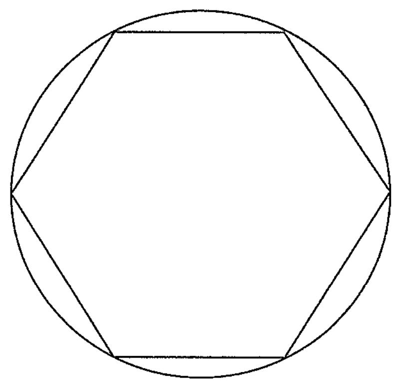
- 32 Gran Mago

Y el Gran Mago me dijo instantáneamente:

- El número que pensaste fue el 28.

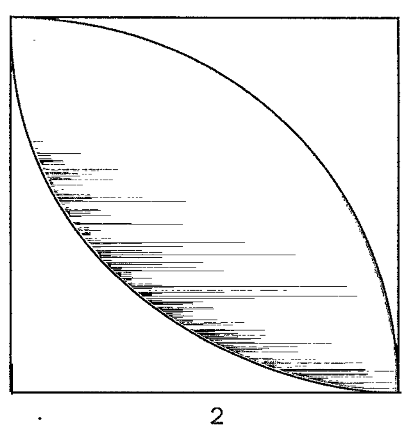
¿Cómo consigue el Gran Mago averiguarlo tan rápido?

2.- Halla el área del hexágono regular de la figura sabiendo que el diámetro de la circunferencia mide 20 cm.

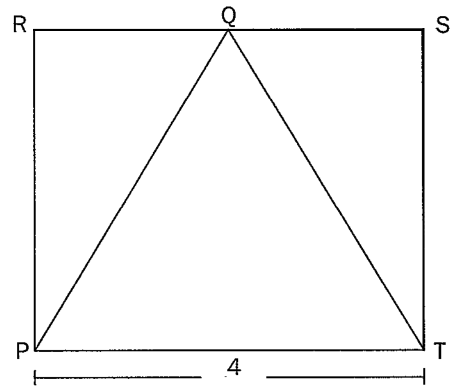


3.- El promedio de 4 números enteros positivos distintos es 70 y ninguno de ellos es menor que 40. ¿Cuál es el mayor número que podría estar entre ellos?

4.- Calcula el área de la región limitada por los dos arcos de circunferencia.



5.- Sabemos que PRST es un rectángulo y que PQT es un triángulo equilátero. ¿Cuál es el área de PRST?



6.- Le pregunté a mi padre:

- ¿Cuánto vale un helado chico en la heladería de la esquina?

Me contestó:

- No sé, nunca me he fijado.

Dije:

- Pero si acabamos de tomar uno mamá, la abuela, mis dos hermanos, tú y yo. ¿Cuánto pagaste?

Respondió:

- Algo más de 14 pesos.

Añadí:

- El domingo pasado, además de nosotros seis invitaste a dos amigos míos. ¿Cuánto pagaste entonces?

Contestó:

- Era poco menos de 20 pesos, pues puse un billete y me dieron algo de vuelto.

¿Cuánto vale aproximadamente el helado chico en la heladería de la esquina?

7.- Juan eligió un número de cuatro cifras, (que por supuesto no comienza con cero) que no tiene cifras repetidas.

Sebastián dice un número y Juan, comparándolo con el suyo, le informa la cantidad de cifras que están bien (cifra correcta ubicada en lugar correcto) y la cantidad de cifras que están regular (cifra correcta en lugar incorrecto).

Ahora te damos los números que dijo Sebastián y las respuestas de Juan:

Número	Bien	Regular
5374	1	0
5681	0	2
6194	0	2
8327	0	1

¿Qué número eligió Juan?

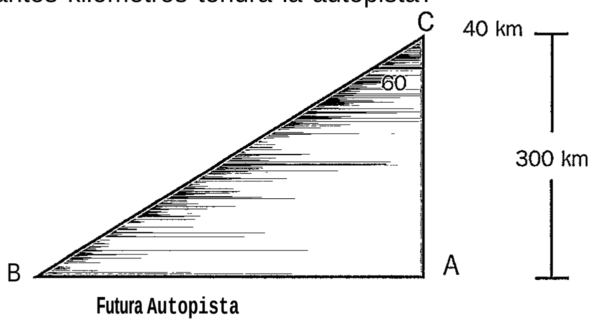
8.- Un hotel tiene habitaciones singles y dobles. Tiene un total de 50 habitaciones y 87 camas. ¿Cuántas habitaciones singles tiene? ¿Cuántas dobles?

9.- Para preparar una lata de pintura del tono AMAVER se necesitan 4 tubos de pigmento amarillo y 2 de pigmento verde.

Para preparar una lata del tono VERAMA, en cambio, se usan 1 tubo de pigmento amarillo y 2 de pigmento verde.

La Empresa "La Brocha Depilada", que pinta un edificio en esos dos tonos, ha utilizado hasta ahora 95 tubos de pigmento amarillo y 70 de pigmento verde. ¿Cuántas latas de cada tono se han preparado?

lo.- Un político tiene que ir a dos pueblos A y B para realizar su campaña electoral. El vive en la capital C, que dista 300 km. del pueblo A. Su campaña se basa fundamentalmente en anunciar la futura autopista que unirá el pueblo A con el pueblo B y, para que den crédito a sus palabras, ayudándose con un esquema, explica que con los recursos que hasta ahora ha conseguido se pueden hacer 60 km. de la autopista, lo que equivaldría a,construir una ruta paralela a la futura autopista que saldría a 40 km. de C en la carretera AC y llegaría hasta la carretera CB. ¿Cuántos kilómetros tendrá la autopista?



II.- Si te dieran a elegir entre

l a J L ava parte y la $\frac{2n}{2n+1}$ ava parte de una
n - t i

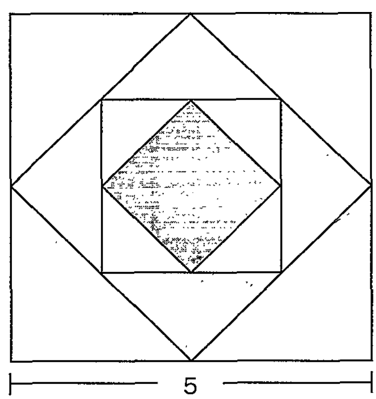
fortuna, ¿Cuál elegirías? (n es un número natural)

Y si la opción fuera entre

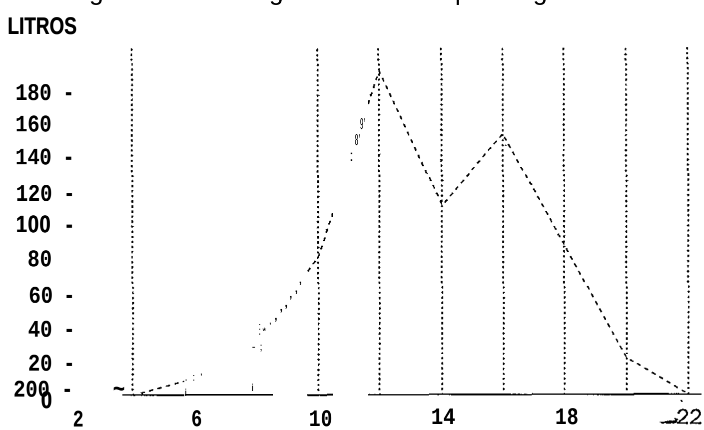
l a J l - ava parte y la $\frac{n2}{t\text{-}S + 1}$ ava parte?
n + l

5" AÑO

l.- En el cuadrado de la figura, se ha formado el cuadrado que une los puntos medios de cada lado, y se ha repetido el proceso 3 veces. Halla el área de la región sombreada.



2.- El consumo de agua en un colegio viene dado por la gráfica:



a) ¿Durante qué horas es nulo el consumo de agua?

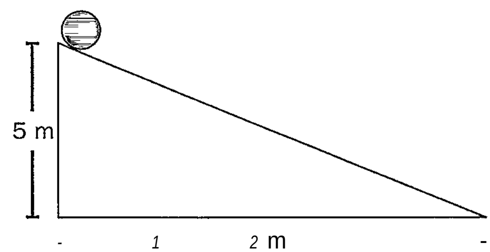
b) ¿A qué hora se consume más agua?

c) Haz una gráfica para el consumo de agua en una discoteca.

3.- Un alto horno tiene una producción diaria estimada en 12 toneladas. En un mes que a priori tenía 22 días laborables, ha habido 5 días laborables consecutivos de paro a partir del 6O día. ¿Cuál debe ser la producción diaria promedio en los días posteriores a la huelga para que la producción mensual sea la inicialmente esperada?

Responde la pregunta anterior considerando que el paro es a partir del día x, con x 3/4 16

4.- Por la rampa rodará un rollo cilíndrico que tiene un radio de 6 cm. ¿Cuántas vueltas completas dará el rollo hasta completar el descenso?



5.- Luisa y Ana, que viven a 1000 m de distancia, se encuentran habitualmente en un café que queda hacia el este de la casa de Luisa, y hacia el sur de la casa de Ana. Si este café queda 200 m más cerca de la casa de Ana que de la de Luisa ¿A qué distancia de la casa de Ana queda el café?

6.- La anterior compañía de electricidad facturaba los consumos domiciliarios, según la siguiente tarifa:

- Cargo fijo sobre derecho a consumo	$ 2 3 3
- Los primeros 126 kwh	$ 0,0634 ch
- Los restantes kwh	$ 0,094 CIU

Sobre el total se incrementaba un 17,20% en concepto de Fondos e Impuestos. ¿Cuánto pagaba una familia que consumía 122 kwh? ¿y otra que consumía 215 kwh? La familia Pérez pagó una vez $32,60 ¿Cuántos kwh consumió en aquella oportunidad?

7.- Una masa de levadura duplica su volumen cada 40 minutos. Si en este momento la masa ocupa la mitad de un bol ¿cuánto hace que ocupaba la octava parte del volumen del mismo?

8.- Si rodeáramos la Tierra con una soga siguiendo la línea del Ecuador, necesitaríamos una cierta longitud de soga. ¿En cuánto hay que aumentar esa longitud si se quiere dar la misma vuelta, pero separando la soga de la superficie un centímetro? ¿No te parece increíble?. Repite el cálculo si la vuelta se hace a x cm. de distancia de la superficie terrestre.

9.- Tres personas desean repartir entre ellas 21 botellas iguales, de las cuales se hallan: 7 llenas, 7 vacías y 7 a medio llenar (de vino). El reparto debe hacerse con la condición de que cada uno de ellos reciba la misma cantidad de botellas y la misma cantidad de vino (No vale abrir las botellas) ¿Cómo puede hacerse?

lo.- Resolver mentalmente:

$$187 - 185 + 183 - 181 + \dots\dots\dots\dots + 7 - 5 + 3 - 1 =$$

ll.- Un viaje en ómnibus de 1200 km. hubiera tardado 3 horas menos si la velocidad promedio del vehículo hubiera sido superior en 20 km./h ¿A qué velocidad promedio se realizó el viaje?

12.- Una jarra de 4 litros de capacidad contenía 2,5 litros de solución salina al 30%. Se derramó accidentalmente medio litro del contenido, y se agregó luego agua pura hasta completar la capacidad de la jarra. ¿Cuál es la concentración de la nueva solución?

BIBLIOGRAFíA

- CHARNAY, Roland: Aprender (por medio de) la resolución de problemas, del libro Didácticas de la Matemática, compilación de Parra, C. y Saiz, I., Editorial Paidós, Buenos Aires, 1994.

- Currícula y textos escolares en vigencia

- DICKSON, L. y otros: El aprendizaje de las Matemáticas, Editorial Labor, España, 1991.

- GUZMÁN, Miguel de,: Para pensar mejor, Editorial Labor S.A., Barcelona, 199 1.

- GUZMÁN, Miguel de,: Tendencias innovadoras en educación matemática, O.M.A., Buenos Aires, 1991.

- ORTON, A.: Didáctica de las Matemáticas, Editorial Morata S.A., Madrid, 1990.

- POLYA, G.: Cómo plantear y resolver problemas, Editorial Trillas, México, 1972.

- SANTALÓ, L. y colaboradores: De educación Y estadística, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1994.

- SANTALÓ, L. y colaboradores: Enfoques hacia una didáctica humanista de la Matemática, Editorial Troquel, Bs. As., 1994.

- SCHOENFELD, Alan: Ideas y tendencias en la resolución de problemas, O.M.A., Buenos Aires, 1991.

- WHIMBEY, A. y LOCKHEAD, J.: Comprender y resolver problemas, Aprendizaje Visor, Madrid, 1993.